Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Co všechno víme o přirozených číslech

Vypracovala: Alena Košáková
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.

České Budějovice 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma „Co všechno víme o přirozených číslech“ jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 24. 4. 2019 ………………………

Košáková Alena

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce panu prof. RNDr. Pavlu Tlustému, CSc. za podnětné rady a odbornou pomoc, kterou mi poskytovat při psané této bakalářské práce.

Anotace

Cílem mé bakalářské práce je seznámit žáky, učitele, ale také rodiče a příznivce matematiky s přirozenými čísly, především s prvočísly. V první kapitole si vysvětlíme, definici prvočísel a jejich využití v běžném životě, druhá kapitola je zaměřena na prvočíselná dvojčata a třetí na prvočíselná trojčata. Poté následuje kapitola, která obsahuje různé metody k výpočtu a nalezení prvočísel. Pátá kapitola je věnována prvočíslům, která jsou pojmenována podle významných matematiků, kteří se tímto tématem zabývali.

Annotation

The aim of my bachelor thesis is to introduce students, teachers, but also parensts and supporters of mathematics with natural numbers, especially prime numbers. In the first chapter we will explain the definition of prime numbers and their use in everyday life, the second chapter is focused on prime twins and the third on prime tiplets. This is followed by a chapter that contains various methods for calculating and finding primes. The fifth chapter is devoted to prime numbers, which are named after the eminent mathematicians who dealt with this topic.

Obsah

Úvod

Matematika je vědní obor, který fascinuje lidi již od nepaměti, kdy si poprvé uvědomili rozdíl mezi jedním a více pazourky a začali si klást zásadní otázku KOLIK.

Různá tajemství matematiky byla častou výzvou pro chytré lidi, protože zjistili, že matematika je důležitá pro vývoj lidstva a jeho budoucnost. Zahrnuje mnoho oborů a jedním ze zajímavých témat jsou prvočísla, která jsou často opomíjena, ale pro mnohé matematiky i tajemná. Musíme si uvědomit, že nás prvočísla doprovázejí celý život, aniž bychom to vnímali. Vždyť v pohádkách a v pověstech se objevují tři sudičky, sedm trpaslíků nebo zakázaná třináctá komnata. V dospělosti zase věříme na pátek třináctého či nikdy nespíme v hotelovém pokoji s číslem třináct.

V mé bakalářské práci „Co všechno víme o přirozených číslech“ jsem se podrobně zaměřila na oblast prvočísel. Zabývala jsem se hlavně základním rozdělením prvočísel, a především historií získávání jednotlivých čísel. Vědci, matematici i studenti se je snažili nalézt, ale také vymyslet matematické vzorce k jejich objevení, přesto tento obor matematiky není moc známý.

Tato práce by měla napomoci pochopit svět prvočísel a prohloubit o ně zájem.

1. Definice

Prvočísla jsou přirozená čísla větší než 1, která jsou dělitelná pouze jedničkou a sami sebou. Jsou považována za stavební kameny matematiky, za matematické „atomy“ či za „genetický kód“ matematiky.

Každé přirozené číslo větší než 1 lze napsat ve tvaru:

$$n = {p_1}^{n_1} \cdot {p_2}^{n_2} \cdot {p_3}^{n_3} \dots {p_r}^{n_r}$$

kde $n_i \geq 1$ pro $1 \leq i \leq r$; p je prvočíslo.

Prvočísla je možno využít v různých oblastech našeho života, například v kryptografii, v matematice ve školách (rozklad složeného čísla na prvočísla, největší společný dělitel, nejmenší společný násobek), v bankovnictví (elektronické bankovnictví, elektronické podpisy), v podnikání (datové schránky), atd.

Prvočísel existuje nekonečně mnoho. Toto tvrzení již vyslovil Eukleidés a uměl ho i dokázat.

Důkaz:

Jestliže vynásobíme mezi sebou všechna doposud známá prvočísla (konečná řada prvočísel), vznikne nám číslo, které již nebude prvočíslem, ale číslem složeným.

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \dots \cdot p_n$$

Proto k součinu těchto prvočísel musíme přičíst jedničku.

$$p = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

Dostaneme číslo, které vydělíme-li prvočísly (použitých činitelů), bude mít vždy zbytek 1.

Z tohoto tvrzení lze vyvodit, že prvočísel je nekonečně mnoho, a vždy lze vytvořit nějaké větší prvočíslo.

2. Prvočíselná dvojčata

Prvočíselná dvojčata (= prvočíselná dvojice) je dvojice prvočísel, jejichž rozdíl je 2, nebo libovolné sudé číslo.

Pouze s číslem 2 nelze najít žádné prvočíselné dvojče, neboť číslo 2 je sudé, a pokud k sudému číslu přičteme sudé číslo, vznikne další sudé, které již je číslem složeným.

Prvočíselná dvojčata s rozestupem 2 si vypíšeme v tabulce:

$(3; 5)$	$(5; 7)$	$(11; 13)$	$(17; 19)$	$(29; 31)$	$(41; 43)$
$(59; 61)$	$(71; 73)$	$(101; 103)$	$(107; 109)$	$(137; 139)$	$(149; 151)$
$(179; 181)$	$(191; 193)$	$(197; 199)$	$(227; 229)$	$(239; 241)$	$(269; 271)$
$(281; 283)$	$(311; 313)$	$(347; 349)$	$(419; 421)$	$(431; 433)$	$(461; 463)$
$(521; 523)$	$(569; 571)$	$(599; 601)$	$(617; 619)$	$(641; 643)$	$(659; 661)$
$(809; 811)$	$(821; 823)$	$(827; 829)$	$(857; 859)$	$(881; 883)$	

Tabulka: prvočíselná dvojčata s rozestupem 2 (podle *Graciána, 2017*)

Prvočíselných dvojčat s rozestupem 2 je nekonečně mnoho.

Největší dosud známá prvočíselná dvojčata, která byla objevena v roce 2016 (14. září). Jsou tvořena 388 342 číslicemi. Tyto čísla vypadají takto:

$$2\,996\,863\,034\,895 \times 2^{1\,290\,000} \pm 1$$

Většina prvočíselných dvojčat, která mají strukturu $(p; p+2)$, se dají také napsat ve tvaru:

$$(6k-1; 6k+1)$$

kde k je libovolné přirozené číslo.

Nyní si ukážeme, že tento předpis platí pro prvních pět prvočíselných dvojčat s rozestupem 2:

Hodnota k	Čísla získaná po dosazení do předpisu: $(6k-1; 6k+1)$	Je to prvočíselná dvojice?
1	$(6 \cdot 1 - 1; 6 \cdot 1 + 1) = (5; 7)$	Ano
2	$(6 \cdot 2 - 1; 6 \cdot 2 + 1) = (11; 13)$	Ano
3	$(6 \cdot 3 - 1; 6 \cdot 3 + 1) = (17; 19)$	Ano
4	$(6 \cdot 4 - 1; 6 \cdot 4 + 1) = (23; 25)$	Ne
5	$(6 \cdot 5 - 1; 6 \cdot 5 + 1) = (29; 31)$	Ano

Tabulka: prvočíselná dvojčata s rozestupem 2 předpisu $(6k-1; 6k+1)$

Jak již je vidět z následující tabulky, tento předpis neplatí pro všechna prvočíselná dvojčata s rozestupem 2. V tabulce nám nikdy nevznikne dvojče $(3; 5)$.

Prvočíselná dvojčata s rozestupem 4:

$(3; 7)$	$(7; 11)$	$(13; 17)$	$(19; 23)$	$(37; 41)$	$(43; 47)$
$(67; 71)$	$(79; 83)$	$(97; 101)$	$(103; 107)$	$(109; 113)$	$(127; 131)$
$(163; 167)$	$(193; 197)$	$(223; 227)$	$(229; 233)$	$(277; 281)$	$(307; 311)$
$(313; 317)$	$(349; 353)$	$(379; 383)$	$(397; 401)$	$(439; 443)$	$(457; 461)$
$(463; 467)$	$(487; 491)$	$(499; 503)$	$(613; 617)$	$(643; 647)$	$(673; 677)$
$(757; 761)$	$(769; 773)$	$(823; 827)$	$(853; 857)$	$(859; 863)$	$(877; 881)$
$(883; 887)$	$(907; 911)$	$(967; 971)$			

Tabulka: prvočíselná dvojčata s rozestupem 4

Prvočíselná dvojčata s rozestupem 6:

$(5; 11)$	$(7; 13)$	$(11; 17)$	$(13; 19)$	$(17; 23)$	$(23; 29)$
$(31; 37)$	$(37; 43)$	$(41; 47)$	$(47; 53)$	$(53; 59)$	$(61; 67)$
$(67; 73)$	$(73; 79)$	$(83; 89)$	$(97; 103)$	$(101; 107)$	$(103; 109)$
$(107; 113)$	$(131; 137)$	$(151; 157)$	$(157; 163)$	$(167; 173)$	$(173; 179)$
$(191; 197)$	$(193; 199)$	$(233; 239)$	$(251; 257)$	$(257; 263)$	$(263; 269)$
$(271; 277)$	$(277; 283)$	$(307; 313)$	$(311; 317)$	$(331; 337)$	$(353; 359)$
$(367; 373)$	$(373; 379)$	$(383; 389)$	$(433; 439)$	$(443; 449)$	$(457; 463)$
$(461; 467)$	$(503; 509)$	$(541; 547)$	$(557; 563)$	$(563; 569)$	$(571; 577)$
$(593; 599)$	$(601; 607)$	$(607; 613)$	$(613; 619)$	$(641; 647)$	$(647; 653)$
$(653; 659)$	$(727; 733)$	$(733; 739)$	$(751; 757)$	$(821; 827)$	$(823; 829)$
$(853; 859)$	$(877; 883)$	$(947; 953)$	$(971; 973)$	$(977; 983)$	$(991; 997)$

Tabulka: prvočíselná dvojčata s rozestupem 6

Prvočíselná dvojčata s rozestupem 8:

$(3; 11)$	$(5; 13)$	$(11; 19)$	$(23; 31)$	$(29; 37)$	$(53; 61)$
$(59; 67)$	$(71; 79)$	$(89; 97)$	$(101; 109)$	$(131; 139)$	$(149; 157)$
$(173; 181)$	$(191; 199)$	$(233; 241)$	$(263; 271)$	$(269; 277)$	$(359; 367)$
$(389; 397)$	$(401; 409)$	$(431; 439)$	$(449; 457)$	$(479; 487)$	$(491; 499)$
$(563; 571)$	$(569; 577)$	$(593; 601)$	$(599; 607)$	$(653; 661)$	$(683; 691)$
$(701; 709)$	$(719; 727)$	$(743; 751)$	$(761; 769)$	$(821; 829)$	$(911; 919)$
$(929; 937)$	$(983; 991)$				

Tabulka: prvočíselná dvojčata s rozestupem 8

Prvočíselná dvojčata s rozestupem 10:

$(3; 13)$	$(7; 17)$	$(13; 23)$	$(19; 29)$	$(31; 41)$	$(37; 47)$
$(43; 53)$	$(61; 71)$	$(73; 83)$	$(79; 89)$	$(97; 107)$	$(103; 113)$
$(127; 137)$	$(139; 149)$	$(157; 167)$	$(163; 173)$	$(181; 191)$	$(223; 233)$
$(229; 239)$	$(241; 251)$	$(271; 281)$	$(283; 293)$	$(307; 317)$	$337;\ 347)$
$(349; 359)$	$(373; 383)$	$(379; 389)$	$(409; 419)$	$(421; 431)$	$(433; 443)$
$(439; 449)$	$(457; 467)$	$(499; 509)$	$(547; 557)$	$(577; 587)$	$(607; 617)$
$(631; 641)$	$(643; 653)$	$(673; 683)$	$(691; 701)$	$(709; 719)$	$(733; 743)$
$(751; 761)$	$(787; 797)$	$(811; 821)$	$(829; 839)$	$(853; 863)$	$(877; 887)$
$(919; 929)$	$(937; 947)$				

Tabulka: prvočíselná dvojčata s rozestupem 10

3. Prvočíselná trojčata

Trojčata neboli „triplety“ se také objevují i v prvočíslech, ale neexistuje jich tolik jako prvočíselných dvojčat. Existuje jen jedna trojice, jak si nyní ukážeme, protože musí splňovat vždy následující vzorec:

$$(p, p+2, p+4)$$

Důkaz: Důkaz si rozdělíme do tří dílčích kroků.

1. Nechť $p = 3k$.

   Po dosazení dostaneme:

$$(3k; 3k+2; 3k+4)$$

Pro tento předpis existují prvočíselná trojčata. Platí to pro $k = 1$, pro prvočíselné trojče $(3; 5; 7)$. Pokud za k dosadíme číslo 2, vznikne následující trojice čísel: $(6; 8; 10)$. Tato trojice neobsahuje žádné prvočíslo, všechna čísla jsou násobky 2.

2. Nechť $p = 3k + 1$.

   Po dosazení vznikne nový předpis:

$$(3k+1; 3k+1+2; 3k+1+4)$$

Pokud tento výraz upravíme, vznikne:

$$(3k+1; 3k+3; 3k+5)$$

Pokud z výrazu $3k+3$ vytkneme číslo 3, vznikne výraz:

$$3 \cdot (k+1)$$

Z tohoto výrazu je již vidět, že pokud $k \geq 1$ vznikne nám nejmenší číslo 6 a to není prvočíslo. Proto pro tento předpis nelze najít žádné prvočíselné trojče.

3. Nechť $p = 3k + 2$.

   Když za p dosadíme náš předpis, vznikne nový předpis:

$$(3k + 2; 3k + 2 + 2; 3k + 2 + 4)$$

   Po upravení předchozího předpisu vznikne výraz:

$$(3k + 2; 3k + 4; 3k + 6)$$

   Toto tvrzení neplatí pro žádné prvočíselné trojče.

■

4. Síta a metody pro získání prvočísel

Síta slouží k rychlému nalezení prvočísel na větší množině čísel. Síta lze počítat ručně, nebo také pomocí různých programů, které naši práci zjednoduší.

4.1. Síto Eratosthena

Jedna z prvních metod získání prvočísel pochází od řeckého matematika, astronoma, geografa a ředitele alexandrijské knihovny, Eratosthena z Kyrény (273-194 př. n. l.). Nejdříve si napsal čísla na papyrus, který byl natáhnutý na rám, ale čísla neškrtal, pouze si daná čísla označoval propíchnutím. Jeho metoda je dodnes známá jako Eratosthenovo síto, pomocí kterého Eratosthenes přišel na prvočísla z první stovky přirozených čísel.

Nyní si uděláme tabulku, ve které budeme mít všech 100 prvních přirozených čísel a budeme postupovat jako Eratosthenes. Podle domluvy číslo 1 není prvočíslem, proto si toto číslo vyřadíme již na samém začátku a nebude ho brát v potaz.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Nyní vyškrtáme všechna čísla, která jsou násobky čísla 2, kromě čísla 2:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

Nyní vyškrtáme všechny násobky čísla 3 kromě čísla 3. Pokud číslo je již škrtnuté a muselo by se znovu škrtnout, tak ho přeskočíme, protože na číslo nebereme již zřetel. Jako příklad si můžeme uvést číslo 6, toto číslo je násobkem čísla 2 i 3.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Nyní vyškrtáme všechny násobky čísla 5, 7, kromě jejich násobků s jedničkou:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Síto jsme zastavili, neboť jsme dosáhli čísla 10, protože 10 je druhá odmocnina čísla 100.

Obecně platí tvrzení: chceme-li nalézt prvočísla menší, než je dané přirozené číslo. Je třeba „prosít“ všechna čísla, která budou nabývat hodnot do odmocniny z daného přirozeného čísla včetně.

Prvočísla, která nám zůstala v tabulce si nyní zvýrazníme:

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Užitím Eratosthenova síta získáme prvočísla, která jsou menší nebo rovna číslu 1 000:

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

(podle *Graciána, 2017*)

4.2. Síto Atkina

Toto síto vytvořili Arthur Oliver Lonsdale Atkin (1925-2008), britský matematik, a Daniel Julius Bernstein (1971), německo-americký matematik. Síto Atkina je obměnou Eratosthenova síta. Základní myšlenka je složená z kvadratických forem, která má předpis:

$$ax^2 + by^2$$

Je to novější a rychlejší metoda k získání prvočísel. Síto Atkina je 9,2krát rychlejší než síto Eratosthena pro získání prvočísel s využitím počítače. Avšak tato metoda pomocí výpočtu v ruce je zdlouhavější.

Toto síto funguje následujícím způsobem:

1. Musíme si určit množinu čísel, na které budeme hledat prvočísla.
2. Nyní si z největšího čísla dané množiny zjistíme odmocninu.
3. Tím jsme zjistili, jaké nejvyšší hodnoty bude nabývat hodnota x a y.
4. Tyto hodnoty vytváří pár, tím způsobem, že hodnota x zůstává jako konstanta a hodnota y se mění, vždy její hodnota narůstá o 1 až do hodnoty, která je rovna odmocnině z největšího čísla na naší hledané množině.
5. Tyto hodnoty x a y budeme dosazovat do následujících 3 předpisů a poté zjišťovat, zda výsledek je prvočíslo nebo číslo složené.
   a) $4x^2 + y^2$
   b) $3x^2 + y^2$
   c) $3x^2 - y^2$

Příklad: Zjistěte všechna prvočísla menší než 100 pomocí Atkinova síta.

Řešení: K nalezení prvočísel pomocí Atkinova síta budeme potřebovat znát tři již zmíněné předpisy:

$$4x^2 + y^2$$
$$3x^2 + y^2$$
$$3x^2 - y^2$$

Nyní budeme dosazovat postupně do jednotlivých předpisů, vždy ponecháme hodnotu *x* pro všechny tři předpisy. Hodnota *y* bude začínat v každé tabulce na hodnotě jedna a bude se zvětšovat o jedničku až do hodnoty, kdy výsledek bude nabývat hodnot větších než námi požadovaná horní hranice. Když hledáme prvočísla na množině čísel, která je rovna prvním stům číslům, bude poslední číslo nabývat hodnoty 100.

Čísla, která budou prvočísly zvýrazníme. Nad každou tabulkou uvedeme, jakou hodnotu a do jakého výrazu budeme dosazovat.

$x = 1;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $4x^2 + y^2$

x	*y*	$4x^2 + y^2$
1	1	$4 \cdot 1^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$
1	2	$4 \cdot 1^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$
1	3	$4 \cdot 1^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$
1	4	$4 \cdot 1^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$
1	5	$4 \cdot 1^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$
1	6	$4 \cdot 1^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40$
1	7	$4 \cdot 1^2 + 7^2 = 4 + 49 = 53$
1	8	$4 \cdot 1^2 + 8^2 = 4 + 64 = 70$
1	9	$4 \cdot 1^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85$
1	10	$4 \cdot 1^2 + 10^2 = 4 + 100 = 104$

$x = 1;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $3x^2 + y^2$

x	y	$3x^2 + y^2$
1	1	$3 \cdot 1^2 + 1^2 = 3 + 1 = 4$
1	2	$3 \cdot 1^2 + 2^2 = 3 + 4 = 7$
1	3	$3 \cdot 1^2 + 3^2 = 3 + 9 = 12$
1	4	$3 \cdot 1^2 + 4^2 = 3 + 16 = 19$
1	5	$3 \cdot 1^2 + 5^2 = 3 + 25 = 28$
1	6	$3 \cdot 1^2 + 6^2 = 3 + 36 = 39$
1	7	$3 \cdot 1^2 + 7^2 = 3 + 49 = 52$
1	8	$3 \cdot 1^2 + 8^2 = 3 + 64 = 67$
1	9	$3 \cdot 1^2 + 9^2 = 3 + 81 = 84$
1	10	$3 \cdot 1^2 + 10^2 = 3 + 100 = 103$

$x = 1;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $3x^2 - y^2$

x	y	$3x^2 - y^2$
1	1	$3 \cdot 1^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$
1	2	$3 \cdot 1^2 - 2^2 = 3 - 4 = -1$
1	3	$3 \cdot 1^2 - 3^2 = 3 - 9 = -3$
1	4	$3 \cdot 1^2 - 4^2 = 3 - 16 = -13$
1	5	$3 \cdot 1^2 - 5^2 = 3 - 25 = -22$
1	6	$3 \cdot 1^2 - 6^2 = 3 - 36 = -33$
1	7	$3 \cdot 1^2 - 7^2 = 3 - 49 = -46$
1	8	$3 \cdot 1^2 - 8^2 = 3 - 64 = -61$
1	9	$3 \cdot 1^2 - 9^2 = 3 - 81 = -78$
1	10	$3 \cdot 1^2 - 10^2 = 3 - 100 = -97$

$x = 2;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $4x^2 + y^2$

x	y	$4x^2 + y^2$
2	1	$4 \cdot 2^2 + 1^2 = 4 \cdot 4 + 1 = 16 + 1 = 17$
2	2	$4 \cdot 2^2 + 2^2 = 4 \cdot 4 + 4 = 16 + 4 = 20$
2	3	$4 \cdot 2^2 + 3^2 = 4 \cdot 4 + 9 = 16 + 9 = 25$
2	4	$4 \cdot 2^2 + 4^2 = 4 \cdot 4 + 16 = 16 + 16 = 36$
2	5	$4 \cdot 2^2 + 5^2 = 4 \cdot 4 + 25 = 16 + 25 = 41$
2	6	$4 \cdot 2^2 + 6^2 = 4 \cdot 4 + 36 = 16 + 36 = 52$
2	7	$4 \cdot 2^2 + 7^2 = 4 \cdot 4 + 49 = 16 + 49 = 65$
2	8	$4 \cdot 2^2 + 8^2 = 4 \cdot 4 + 64 = 16 + 64 = 80$
2	9	$4 \cdot 2^2 + 9^2 = 4 \cdot 4 + 81 = 16 + 81 = 97$
2	10	$4 \cdot 2^2 + 10^2 = 4 \cdot 4 + 100 = 16 + 100 = 116$

$x = 2;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $3x^2 + y^2$

x	y	$3x^2 + y^2$
2	1	$3 \cdot 2^2 + 1^2 = 3 \cdot 4 + 1 = 12 + 1 = 13$
2	2	$3 \cdot 2^2 + 2^2 = 3 \cdot 4 + 4 = 12 + 4 = 16$
2	3	$3 \cdot 2^2 + 3^2 = 3 \cdot 4 + 9 = 12 + 9 = 21$
2	4	$3 \cdot 2^2 + 4^2 = 3 \cdot 4 + 16 = 12 + 16 = 28$
2	5	$3 \cdot 2^2 + 5^2 = 3 \cdot 4 + 25 = 12 + 25 = 37$
2	6	$3 \cdot 2^2 + 6^2 = 3 \cdot 4 + 36 = 12 + 36 = 48$
2	7	$3 \cdot 2^2 + 7^2 = 3 \cdot 4 + 49 = 12 + 49 = 61$
2	8	$3 \cdot 2^2 + 8^2 = 3 \cdot 4 + 64 = 12 + 64 = 76$
2	9	$3 \cdot 2^2 + 9^2 = 3 \cdot 4 + 81 = 12 + 81 = 93$
2	10	$3 \cdot 2^2 + 10^2 = 3 \cdot 4 + 100 = 12 + 100 = 112$

$x = 2;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $3x^2 - y^2$

x	y	$3x^2 - y^2$
2	1	$3 \cdot 2^2 - 1^2 = 3 \cdot 4 - 1 = 12 - 1 = 11$
2	2	$3 \cdot 2^2 - 2^2 = 3 \cdot 4 - 4 = 12 - 4 = 8$
2	3	$3 \cdot 2^2 - 3^2 = 3 \cdot 4 - 9 = 12 - 9 = 3$
2	4	$3 \cdot 2^2 - 4^2 = 3 \cdot 4 - 16 = 12 - 16 = -4$
2	5	$3 \cdot 2^2 - 5^2 = 3 \cdot 4 - 25 = 12 - 25 = -13$
2	6	$3 \cdot 2^2 - 6^2 = 3 \cdot 4 - 36 = 12 - 36 = -24$
2	7	$3 \cdot 2^2 - 7^2 = 3 \cdot 4 - 49 = 12 - 49 = -37$
2	8	$3 \cdot 2^2 - 8^2 = 3 \cdot 4 - 64 = 12 - 64 = -52$
2	9	$3 \cdot 2^2 - 9^2 = 3 \cdot 4 - 81 = 12 - 81 = -69$
2	10	$3 \cdot 2^2 - 10^2 = 3 \cdot 4 - 100 = 12 - 100 = -88$

$x = 3;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $4x^2 + y^2$

x	y	$4x^2 + y^2$
3	1	$4 \cdot 3^2 + 1^2 = 4 \cdot 9 + 1 = 36 + 1 = 37$
3	2	$4 \cdot 3^2 + 2^2 = 4 \cdot 9 + 4 = 36 + 4 = 40$
3	3	$4 \cdot 3^2 + 3^2 = 4 \cdot 9 + 9 = 36 + 9 = 45$
3	4	$4 \cdot 3^2 + 4^2 = 4 \cdot 9 + 16 = 36 + 16 = 52$
3	5	$4 \cdot 3^2 + 5^2 = 4 \cdot 9 + 25 = 36 + 25 = 61$
3	6	$4 \cdot 3^2 + 6^2 = 4 \cdot 9 + 36 = 36 + 36 = 72$
3	7	$4 \cdot 3^2 + 7^2 = 4 \cdot 9 + 49 = 36 + 49 = 85$
3	8	$4 \cdot 3^2 + 8^2 = 4 \cdot 9 + 64 = 36 + 64 = 100$
3	9	$4 \cdot 3^2 + 9^2 = 4 \cdot 9 + 81 = 36 + 81 = 117$
3	10	$4 \cdot 3^2 + 100^2 = 4 \cdot 9 + 100 = 36 + 100 = 136$

$x = 3;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $3x^2 + y^2$

x	y	$3x^2 + y^2$
3	1	$3 \cdot 3^2 + 1^2 = 3 \cdot 9 + 1 = 27 + 1 = 28$
3	2	$3 \cdot 3^2 + 2^2 = 3 \cdot 9 + 4 = 27 + 4 = 31$
3	3	$3 \cdot 3^2 + 3^2 = 3 \cdot 9 + 9 = 27 + 9 = 36$
3	4	$3 \cdot 3^2 + 4^2 = 3 \cdot 9 + 16 = 27 + 16 = 43$
3	5	$3 \cdot 3^2 + 5^2 = 3 \cdot 9 + 25 = 27 + 25 = 52$
3	6	$3 \cdot 3^2 + 6^2 = 3 \cdot 9 + 36 = 27 + 36 = 63$
3	7	$3 \cdot 3^2 + 7^2 = 3 \cdot 9 + 49 = 27 + 49 = 76$
3	8	$3 \cdot 3^2 + 8^2 = 3 \cdot 9 + 64 = 27 + 64 = 91$
3	9	$3 \cdot 3^2 + 9^2 = 3 \cdot 9 + 81 = 27 + 81 = 108$
3	10	$3 \cdot 3^2 + 10^2 = 3 \cdot 9 + 100 = 27 + 100 = 127$

$x = 3;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $3x^2 - y^2$

x	y	$3x^2 - y^2$
3	1	$3 \cdot 3^2 - 1^2 = 3 \cdot 9 - 1 = 27 - 1 = 26$
3	2	$3 \cdot 3^2 - 2^2 = 3 \cdot 9 - 4 = 27 - 4 = 23$
3	3	$3 \cdot 3^2 - 3^2 = 3 \cdot 9 - 9 = 27 - 9 = 18$
3	4	$3 \cdot 3^2 - 4^2 = 3 \cdot 9 - 16 = 27 - 16 = 11$
3	5	$3 \cdot 3^2 - 5^2 = 3 \cdot 9 - 25 = 27 - 25 = 2$
3	6	$3 \cdot 3^2 - 6^2 = 3 \cdot 9 - 36 = 27 - 36 = -9$
3	7	$3 \cdot 3^2 - 7^2 = 3 \cdot 9 - 49 = 27 - 49 = -22$
3	8	$3 \cdot 3^2 - 8^2 = 3 \cdot 9 - 64 = 27 - 64 = -37$
3	9	$3 \cdot 3^2 - 9^2 = 3 \cdot 9 - 81 = 27 - 81 = -54$
3	10	$3 \cdot 3^2 - 10^2 = 3 \cdot 9 - 100 = 27 - 100 = 73$

$x = 4;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $4x^2 + y^2$

x	y	$4x^2 + y^2$
4	1	$4 \cdot 4^2 + 1^2 = 4 \cdot 16 + 1 = 64 + 1 = 65$
4	2	$4 \cdot 4^2 + 2^2 = 4 \cdot 16 + 4 = 64 + 4 = 68$
4	3	$4 \cdot 4^2 + 3^2 = 4 \cdot 16 + 9 = 64 + 9 = 73$
4	4	$4 \cdot 4^2 + 4^2 = 4 \cdot 16 + 16 = 64 + 16 = 80$
4	5	$4 \cdot 4^2 + 5^2 = 4 \cdot 16 + 25 = 64 + 25 = 89$
4	6	$4 \cdot 4^2 + 6^2 = 4 \cdot 16 + 36 = 64 + 36 = 100$
4	7	$4 \cdot 4^2 + 7^2 = 4 \cdot 16 + 49 = 64 + 49 = 113$
4	8	$4 \cdot 4^2 + 8^2 = 4 \cdot 16 + 64 = 64 + 64 = 128$
4	9	$4 \cdot 4^2 + 9^2 = 4 \cdot 16 + 81 = 64 + 81 = 145$
4	10	$4 \cdot 4^2 + 10^2 = 4 \cdot 16 + 100 = 64 + 100 = 164$

$x = 4;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $3x^2 + y^2$

x	y	$3x^2 + y^2$
4	1	$3 \cdot 4^2 + 1^2 = 3 \cdot 16 + 1 = 48 + 1 = 49$
4	2	$3 \cdot 4^2 + 1^2 = 3 \cdot 16 + 2^2 = 48 + 4 = 52$
4	3	$3 \cdot 4^2 + 3^2 = 3 \cdot 16 + 9 = 48 + 9 = 57$
4	4	$3 \cdot 4^2 + 4^2 = 3 \cdot 16 + 16 = 48 + 16 = 64$
4	5	$3 \cdot 4^2 + 5^2 = 3 \cdot 16 + 25 = 48 + 25 = 73$
4	6	$3 \cdot 4^2 + 6^2 = 3 \cdot 16 + 36 = 48 + 36 = 84$
4	7	$3 \cdot 4^2 + 7^2 = 3 \cdot 16 + 49 = 48 + 49 = 97$
4	8	$3 \cdot 4^2 + 8^2 = 3 \cdot 16 + 64 = 48 + 64 = 112$
4	9	$3 \cdot 4^2 + 9^2 = 3 \cdot 16 + 81 = 48 + 81 = 129$
4	10	$3 \cdot 4^2 + 10^2 = 3 \cdot 16 + 100 = 48 + 100 = 148$

$x = 4;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $3x^2 - y^2$

x	y	$3x^2 - y^2$
4	1	$3 \cdot 4^2 - 1^2 = 3 \cdot 16 - 1 = 48 - 1 = 47$
4	2	$3 \cdot 4^2 - 1^2 = 3 \cdot 16 - 4 = 48 - 4 = 44$
4	3	$3 \cdot 4^2 - 3^2 = 3 \cdot 16 - 9 = 48 - 9 = 39$
4	4	$3 \cdot 4^2 - 4^2 = 3 \cdot 16 - 16 = 48 - 16 = 32$
4	5	$3 \cdot 4^2 - 5^2 = 3 \cdot 16 - 25 = 48 - 25 = 23$
4	6	$3 \cdot 4^2 - 6^2 = 3 \cdot 16 - 36 = 48 - 36 = 12$
4	7	$3 \cdot 4^2 - 7^2 = 3 \cdot 16 - 49 = 48 - 49 = -1$
4	8	$3 \cdot 4^2 - 8^2 = 3 \cdot 16 - 64 = 48 - 64 = -16$
4	9	$3 \cdot 4^2 - 9^2 = 3 \cdot 16 - 81 = 48 - 81 = -65$
4	10	$3 \cdot 4^2 - 10^2 = 3 \cdot 16 - 100 = 48 - 100 = -52$

$x = 5;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $4x^2 + y^2$

x	y	$4x^2 + y^2$
5	1	$4 \cdot 5^2 + 1^2 = 4 \cdot 25 + 1 = 100 + 1 = 101$
5	2	$4 \cdot 5^2 + 2^2 = 4 \cdot 25 + 4 = 100 + 4 = 104$
5	3	$4 \cdot 5^2 + 3^2 = 4 \cdot 25 + 9 = 100 + 9 = 109$
5	4	$4 \cdot 5^2 + 4^2 = 4 \cdot 25 + 16 = 100 + 16 = 116$
5	5	$4 \cdot 5^2 + 5^2 = 4 \cdot 25 + 25 = 100 + 25 = 125$
5	6	$4 \cdot 5^2 + 6^2 = 4 \cdot 25 + 36 = 100 + 36 = 136$
5	7	$4 \cdot 5^2 + 7^2 = 4 \cdot 25 + 49 = 100 + 49 = 149$
5	8	$4 \cdot 5^2 + 8^2 = 4 \cdot 25 + 64 = 100 + 64 = 164$
5	9	$4 \cdot 5^2 + 9^2 = 4 \cdot 25 + 81 = 100 + 81 = 181$
5	10	$4 \cdot 5^2 + 10^2 = 4 \cdot 25 + 100 = 100 + 100 = 200$

$x = 5;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $3x^2 + y^2$

x	y	$3x^2 + y^2$
5	1	$3 \cdot 5^2 + 1^2 = 3 \cdot 25 + 1 = 75 + 1 = 78$
5	2	$3 \cdot 5^2 + 2^2 = 3 \cdot 25 + 4 = 75 + 4 = 79$
5	3	$3 \cdot 5^2 + 3^2 = 3 \cdot 25 + 9 = 75 + 9 = 84$
5	4	$3 \cdot 5^2 + 4^2 = 3 \cdot 25 + 16 = 75 + 16 = 91$
5	5	$3 \cdot 5^2 + 5^2 = 3 \cdot 25 + 25 = 75 + 25 = 100$
5	6	$3 \cdot 5^2 + 6^2 = 3 \cdot 25 + 36 = 75 + 36 = 111$
5	7	$3 \cdot 5^2 + 7^2 = 3 \cdot 25 + 49 = 75 + 49 = 124$
5	8	$3 \cdot 5^2 + 8^2 = 3 \cdot 25 + 64 = 75 + 64 = 139$
5	9	$3 \cdot 5^2 + 9^2 = 3 \cdot 25 + 81 = 75 + 81 = 156$
5	10	$3 \cdot 5^2 + 10^2 = 3 \cdot 25 + 100 = 75 + 100 = 175$

$x = 5;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $3x^2 - y^2$

x	y	$3x^2 - y^2$
5	1	$3 \cdot 5^2 - 1^2 = 3 \cdot 25 - 1 = 75 - 1 = 74$
5	2	$3 \cdot 5^2 - 2^2 = 3 \cdot 25 - 4 = 75 - 4 = 71$
5	3	$3 \cdot 5^2 - 3^2 = 3 \cdot 25 - 9 = 75 - 9 = 66$
5	4	$3 \cdot 5^2 - 4^2 = 3 \cdot 25 - 16 = 75 - 16 = 59$
5	5	$3 \cdot 5^2 - 5^2 = 3 \cdot 25 - 25 = 75 - 25 = 50$
5	6	$3 \cdot 5^2 - 6^2 = 3 \cdot 25 - 36 = 75 - 36 = 39$
5	7	$3 \cdot 5^2 - 7^2 = 3 \cdot 25 - 49 = 75 - 49 = 26$
5	8	$3 \cdot 5^2 - 8^2 = 3 \cdot 25 - 26 = 75 - 64 = 11$
5	9	$3 \cdot 5^2 - 9^2 = 3 \cdot 25 - 81 = 75 - 81 = -6$
5	10	$3 \cdot 5^2 - 10^2 = 3 \cdot 25 - 100 = 75 - 100 = -25$

$x = 6;\ y \geq 1$ dosadíme do výrazu $4x^2 + y^2$

x	y	$3x^2 - y^2$
6	1	$3 \cdot 6^2 - 1^2 = 3 \cdot 36 - 1 = 108 - 1 = 107$
6	2	$3 \cdot 6^2 - 2^2 = 3 \cdot 36 - 4 = 108 - 4 = 104$
6	3	$3 \cdot 6^2 - 3^2 = 3 \cdot 36 - 9 = 108 - 9 = 99$
6	4	$3 \cdot 6^2 - 4^2 = 3 \cdot 36 - 16 = 108 - 16 = 92$
6	5	$3 \cdot 6^2 - 5^2 = 3 \cdot 36 - 25 = 108 - 25 = 83$
6	6	$3 \cdot 6^2 - 6^2 = 3 \cdot 36 - 36 = 108 - 36 = 72$
6	7	$3 \cdot 6^2 - 7^2 = 3 \cdot 36 - 49 = 108 - 49 = 59$
6	8	$3 \cdot 6^2 - 8^2 = 3 \cdot 36 - 26 = 108 - 64 = 44$
6	9	$3 \cdot 6^2 - 9^2 = 3 \cdot 36 - 81 = 108 - 81 = 27$
6	10	$3 \cdot 6^2 - 10^2 = 3 \cdot 36 - 100 = 108 - 100 = 8$

Pomocí Atkinova síta zjistíme všechna prvočísla na dané množině přirozených čísel.

Tuto metodu zvládne i žák druhého stupně. Vyžaduje jen znalost druhých mocnin přirozených čísel, a to do čísla 10 včetně a znalost prvočísel do čísla 100.

4.3. Síto Sundarama

Vytvořil ho v roce 1934 indický student S. P. Sundaram.

Toto síto funguje podle předpisu

$$i + j + 2ij$$

kde i; j jsou přirozená čísla.

Pro tato čísla musí ještě platit:

$$i \leq j$$

a ještě pro hodnoty i, j platí:

$$i = 1; 2; 3; 4; 5; 6 \dots \frac{\sqrt{2N+1} - 1}{2}$$

$$j = i;\ i + 1;\ i + 2;\ \dots, \frac{N - i}{2i + 1}$$

Když se sítováním skončíme, musíme zbylá čísla dosadit do vzorce $2n + 1$, kde n je číslo, které zůstane v tabulce nevyškrtnuté.

Příklad: Na množině přirozených čísel od 1 do 100 zjistěte všechna prvočísla pomocí síta Sundarama.

Řešení: Nejdříve si uděláme tabulku čísel od 1 do 100:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Nyní budeme tvořit tabulky, ve kterých budeme za jednotlivé hodnoty *x* a *y* dosazovat hodnoty, které se budou měnit pouze u hodnot proměnné *y*. Jednotlivé výsledky budeme barevně zvýrazňovat v tabulce s čísly od jedné do sta, která bude následovat za tabulkou s výpočty.

$i = 1; j = \left(1; \frac{N-i}{2i+1}\right) = \left(1; \frac{100-1}{2\cdot 1+1}\right) = (1; 33)$ dosadíme do výrazu $i + j + 2ij$

i	j	$i + j + 2ij$
1	1	$1 + 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 + 2 = 4$
1	2	$1 + 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$
1	3	$1 + 3 + 2 \cdot 1 \cdot 3 = 4 + 6 = 10$
1	4	$1 + 4 + 2 \cdot 1 \cdot 4 = 5 + 8 = 13$
1	5	$1 + 5 + 2 \cdot 1 \cdot 5 = 6 + 10 = 16$
1	6	$1 + 6 + 2 \cdot 1 \cdot 6 = 7 + 12 = 19$
1	7	$1 + 7 + 2 \cdot 1 \cdot 7 = 8 + 14 = 22$
1	8	$1 + 8 + 2 \cdot 1 \cdot 8 = 9 + 16 = 25$
1	9	$1 + 9 + 2 \cdot 1 \cdot 9 = 10 + 18 = 28$
1	10	$1 + 10 + 2 \cdot 1 \cdot 10 = 11 + 20 = 31$
1	11	$1 + 11 + 2 \cdot 1 \cdot 11 = 12 + 22 = 34$
1	12	$1 + 12 + 2 \cdot 1 \cdot 12 = 13 + 24 = 37$
1	13	$1 + 13 + 2 \cdot 1 \cdot 13 = 14 + 26 = 40$
1	14	$1 + 14 + 2 \cdot 1 \cdot 14 = 15 + 28 = 43$
1	15	$1 + 15 + 2 \cdot 1 \cdot 15 = 16 + 30 = 46$
1	16	$1 + 16 + 2 \cdot 1 \cdot 16 = 17 + 32 = 49$
1	17	$1 + 17 + 2 \cdot 1 \cdot 17 = 18 + 34 = 52$
1	18	$1 + 18 + 2 \cdot 1 \cdot 18 = 19 + 36 = 55$
1	19	$1 + 19 + 2 \cdot 1 \cdot 19 = 20 + 38 = 58$
1	20	$1 + 20 + 2 \cdot 1 \cdot 20 = 21 + 40 = 61$
1	21	$1 + 21 + 2 \cdot 1 \cdot 21 = 22 + 42 = 64$
1	22	$1 + 22 + 2 \cdot 1 \cdot 22 = 23 + 44 = 67$
1	23	$1 + 23 + 2 \cdot 1 \cdot 23 = 24 + 46 = 70$

1	24	$1 + 24 + 2 \cdot 1 \cdot 24 = 25 + 48 = 73$
1	25	$1 + 25 + 2 \cdot 1 \cdot 25 = 26 + 50 = 76$
1	26	$1 + 26 + 2 \cdot 1 \cdot 26 = 27 + 52 = 79$
1	27	$1 + 27 + 2 \cdot 1 \cdot 27 = 28 + 54 = 82$
1	28	$1 + 28 + 2 \cdot 1 \cdot 28 = 29 + 56 = 85$
1	29	$1 + 29 + 2 \cdot 1 \cdot 29 = 30 + 58 = 88$
1	30	$1 + 30 + 2 \cdot 1 \cdot 30 = 31 + 60 = 91$
1	31	$1 + 31 + 2 \cdot 1 \cdot 31 = 32 + 62 = 94$
1	32	$1 + 32 + 2 \cdot 1 \cdot 32 = 33 + 64 = 97$
1	33	$1 + 33 + 2 \cdot 1 \cdot 33 = 34 + 66 = 100$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$i = 2; j = \left(2; \frac{N-i}{2i+1}\right) = \left(2; \frac{100-2}{2\cdot 2+1}\right) = \left(2; \frac{98}{5}\right)$ dosadíme do výrazu $i + j + 2ij$

i	j	$i + j + 2ij$
2	2	$2 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 + 8 = 12$
2	3	$2 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 5 + 12 = 17$
2	4	$2 + 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 = 6 + 16 = 22$ *)
2	5	$2 + 5 + 2 \cdot 2 \cdot 5 = 7 + 20 = 27$
2	6	$2 + 6 + 2 \cdot 2 \cdot 6 = 8 + 24 = 32$
2	7	$2 + 7 + 2 \cdot 2 \cdot 7 = 9 + 28 = 37$ *)
2	8	$2 + 8 + 2 \cdot 2 \cdot 8 = 10 + 32 = 42$
2	9	$2 + 9 + 2 \cdot 2 \cdot 9 = 11 + 36 = 47$
2	10	$2 + 10 + 2 \cdot 2 \cdot 10 = 12 + 40 = 52$ *)
2	11	$2 + 11 + 2 \cdot 2 \cdot 11 = 13 + 44 = 57$
2	12	$2 + 12 + 2 \cdot 2 \cdot 12 = 14 + 48 = 62$
2	13	$2 + 13 + 2 \cdot 2 \cdot 13 = 15 + 52 = 67$ *)
2	14	$2 + 14 + 2 \cdot 2 \cdot 14 = 16 + 56 = 72$
2	15	$2 + 15 + 2 \cdot 2 \cdot 15 = 17 + 60 = 77$
2	16	$2 + 16 + 2 \cdot 2 \cdot 16 = 18 + 64 = 82$ *)
2	17	$2 + 17 + 2 \cdot 2 \cdot 17 = 19 + 68 = 87$
2	18	$2 + 18 + 2 \cdot 2 \cdot 18 = 20 + 72 = 92$
2	19	$2 + 19 + 2 \cdot 2 \cdot 19 = 21 + 76 = 97$ *)
2	20	$2 + 20 + 2 \cdot 2 \cdot 20 = 22 + 80 = 102$ **)

*) Tato čísla nebereme v potaz, jsou již v tabulce zvýrazněny

**) Toto číslo také nebereme v potaz, jeho hodnota je větší než 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$i = 3; j = \left(3; \frac{N-i}{2i+1}\right) = \left(3; \frac{100-3}{2 \cdot 3+1}\right) = \left(3; \frac{97}{7}\right)$ dosadíme do výrazu $i + j + 2ij$

i	j	$i + j + 2ij$
3	3	$3 + 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 = 6 + 18 = 24$
3	4	$3 + 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 7 + 24 = 31$ *)
3	5	$3 + 5 + 2 \cdot 3 \cdot 5 = 8 + 30 = 38$
3	6	$3 + 6 + 2 \cdot 3 \cdot 6 = 9 + 36 = 45$
3	7	$3 + 7 + 2 \cdot 3 \cdot 7 = 10 + 42 = 52$ *)
3	8	$3 + 8 + 2 \cdot 3 \cdot 8 = 11 + 48 = 59$
3	9	$3 + 9 + 2 \cdot 3 \cdot 9 = 12 + 54 = 66$
3	10	$3 + 10 + 2 \cdot 3 \cdot 10 = 13 + 60 = 73$ *)
3	11	$3 + 11 + 2 \cdot 3 \cdot 11 = 14 + 66 = 80$
3	12	$3 + 12 + 2 \cdot 3 \cdot 12 = 15 + 72 = 87$ *)
3	13	$3 + 13 + 2 \cdot 3 \cdot 13 = 16 + 78 = 94$ *)
3	14	$3 + 14 + 2 \cdot 3 \cdot 14 = 17 + 84 = 101$ **)

*) Tato čísla nebereme v potaz, jsou již v tabulce zvýrazněny

**) Toto číslo také nebereme v potaz, jeho hodnota je větší než 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$i = 4; j = \left(4; \frac{N-i}{2i+1}\right) = \left(4; \frac{100-4}{2\cdot 4+1}\right) = \left(4; \frac{96}{9}\right)$ dosadíme do výrazu $i + j + 2ij$

i	j	$i + j + 2ij$
4	4	$4 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 4 = 8 + 32 = 40$ *)
4	5	$4 + 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 = 9 + 40 = 49$ *)
4	6	$4 + 6 + 2 \cdot 4 \cdot 6 = 10 + 48 = 58$ *)
4	7	$4 + 7 + 2 \cdot 4 \cdot 7 = 11 + 56 = 67$ *)
4	8	$4 + 8 + 2 \cdot 4 \cdot 8 = 12 + 64 = 76$ *)
4	9	$4 + 9 + 2 \cdot 4 \cdot 9 = 13 + 72 = 85$ *)
4	10	$4 + 10 + 2 \cdot 4 \cdot 10 = 14 + 80 = 94$ *)
4	11	$4 + 11 + 2 \cdot 4 \cdot 11 = 15 + 88 = 103$ **)

*) Tato čísla nebereme v potaz, jsou již v tabulce zvýrazněny

**) Toto číslo také nebereme v potaz, jeho hodnota je větší než 100

V tomto kroku tabulka nezmění svojí podobu z předchozího kroku:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$i = 5; j = \left(5; \frac{N-i}{2i+1}\right) = \left(5; \frac{100-5}{2 \cdot 5+1}\right) = \left(5; \frac{95}{11}\right)$ dosadíme do výrazu $i + j + 2ij$

i	j	$i + j + 2ij$
5	5	$5 + 5 + 2 \cdot 5 \cdot 5 = 10 + 50 = 60$
5	6	$5 + 6 + 2 \cdot 5 \cdot 6 = 11 + 60 = 71$
5	7	$5 + 7 + 2 \cdot 5 \cdot 7 = 12 + 70 = 82$ *)
5	8	$5 + 8 + 2 \cdot 5 \cdot 8 = 13 + 80 = 93$
5	9	$5 + 9 + 2 \cdot 5 \cdot 9 = 14 + 90 = 104$ **)

*) Tato čísla nebereme v potaz, jsou již v tabulce zvýrazněny

**) Toto číslo také nebereme v potaz, jeho hodnota je větší než 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$i = 6; j = \left(6; \frac{N-i}{2i+1}\right) = \left(6; \frac{100-6}{2\cdot 6+1}\right) = \left(6; \frac{99}{3}\right)$ dosadíme do výrazu $i + j + 2ij$

i	j	$i + j + 2ij$
6	6	$6 + 6 + 2 \cdot 6 \cdot 6 = 12 + 72 = 84$
6	7	$6 + 7 + 2 \cdot 6 \cdot 7 = 13 + 84 = 97$ *)
6	8	$6 + 8 + 2 \cdot 6 \cdot 8 = 14 + 96 = 110$ **)

*) Tato čísla nebereme v potaz, jsou již v tabulce zvýrazněny

**) Toto číslo také nebereme v potaz, jeho hodnota je větší než 100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$$i = 7; j = \left(7; \frac{N-i}{2i+1}\right) = \left(7; \frac{100-7}{2\cdot 7+1}\right) = \left(7; \frac{93}{15}\right) \text{ dosadíme o výrazu } i + j + 2ij$$

i	j	$i + j + 2ij$
7	7	$7 + 7 + 2 \cdot 7 \cdot 7 = 14 + 98 = 112$ **)

**) Toto číslo také nebereme v potaz, jeho hodnota je větší než 100

Tabulka se nezmění.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Dále nemusíme prosívat, protože přesívání pro přirozená čísla do 100 bylo již dokončeno. Čísla, která nám v tabulce zůstala (n) dosadíme do následujícího předpisu:

$$2n + 1$$

n	$2n + 1$
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$
2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$
3	$2 \cdot 3 + 1 = 7$
5	$2 \cdot 5 + 1 = 11$
6	$2 \cdot 6 + 1 = 13$
8	$2 \cdot 8 + 1 = 17$
9	$2 \cdot 9 + 1 = 19$
11	$2 \cdot 11 + 1 = 23$

14	$2 \cdot 14 + 1 = 29$
15	$2 \cdot 15 + 1 = 31$
18	$2 \cdot 18 + 1 = 37$
20	$2 \cdot 20 + 1 = 41$
21	$2 \cdot 21 + 1 = 43$
23	$2 \cdot 23 + 1 = 47$
26	$2 \cdot 26 + 1 = 53$
29	$2 \cdot 29 + 1 = 59$
30	$2 \cdot 30 + 1 = 61$
33	$2 \cdot 33 + 1 = 67$
35	$2 \cdot 35 + 1 = 71$
36	$2 \cdot 36 + 1 = 73$
39	$2 \cdot 39 + 1 = 79$
41	$2 \cdot 41 + 1 = 83$
44	$2 \cdot 44 + 1 = 89$
48	$2 \cdot 48 + 1 = 97$
50	$2 \cdot 50 + 1 = 101$
51	$2 \cdot 51 + 1 = 103$
53	$2 \cdot 53 + 1 = 107$
54	$2 \cdot 54 + 1 = 109$
56	$2 \cdot 56 + 1 = 113$
63	$2 \cdot 63 + 1 = 127$
65	$2 \cdot 65 + 1 = 131$
68	$2 \cdot 68 + 1 = 137$
69	$2 \cdot 69 + 1 = 139$
74	$2 \cdot 74 + 1 = 149$
75	$2 \cdot 75 + 1 = 151$
78	$2 \cdot 78 + 1 = 157$
81	$2 \cdot 81 + 1 = 163$
83	$2 \cdot 83 + 1 = 167$
86	$2 \cdot 86 + 1 = 173$

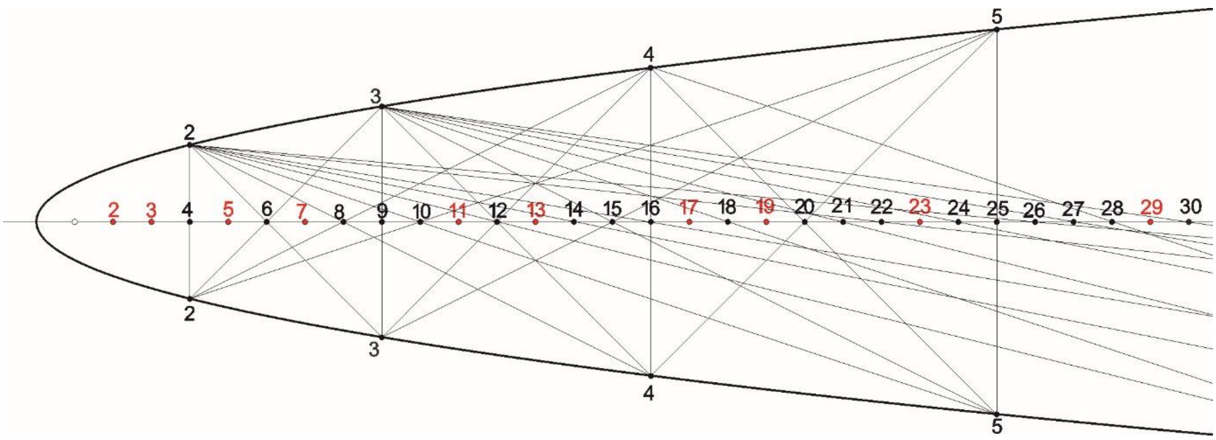
89	$2 \cdot 89 + 1 = 179$
90	$2 \cdot 90 + 1 = 181$
95	$2 \cdot 95 + 1 = 191$
96	$2 \cdot 96 + 1 = 193$
98	$2 \cdot 98 + 1 = 197$
99	$2 \cdot 99 + 1 = 199$

V tabulce jsme dostali prvočísla na intervalu $(1; 2n + 1)$ kromě čísla 2.

4.4. Metoda pomocí paraboly ruských matematiků 20. století

Jurij Vladimirovič Matijasevič (*1947) a Sergej Borisovič Stečkin (1920-1995) jsou ruští matematici. Vymysleli princip generování prvočísel pomocí paraboly předpisu

$$x = y^2$$



Na číselné ose jsou zvýrazněná celá kladná čísla. V číslech, které jsou druhými mocninami přirozených čísel, sestrojíme kolmici. Ta protne parabolu ve dvou bodech. Těmito body, jsou čísla, která vzniknou po odmocnění druhé mocniny daného čísla.

Například: bodem 25, který leží na již známé číselné ose, povedeme kolmici. Tato kolmice protne parabolu v bodech, které označíme čísly 5. Tyto body jsou činiteli (5 · 5) daného součinu.

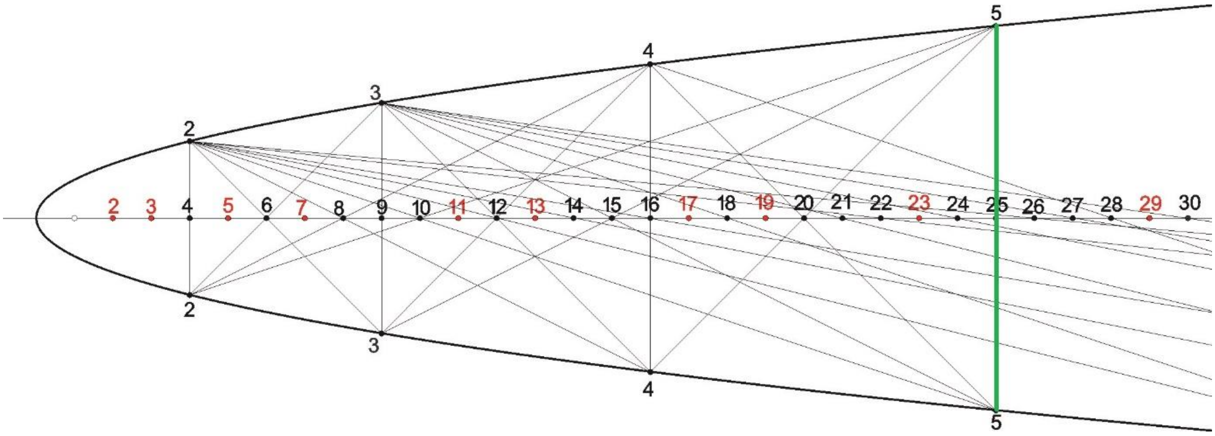
Početně:

$$x = y^2$$

$$x = 25$$

$$25 = y^2$$

$$|y| = 5$$



Obrázek: metoda pomocí paraboly ruských matematiků 20. st. (podle *Graciána, 2017*)

Každý bod na jedné polorovině paraboly spojíme s každým bodem na opačné polorovině paraboly.

Body, které nejsou protnuty, jsou prvočísla a jsou vyznačena červeně (viz obrázek: metoda pomocí paraboly ruských matematiků 20. st.).

5. Prvočísla pojmenovaná po slavných matematicích

5.1. Prvočísla Eulera

Leonhard Paul Euler (1707-1783) byl švýcarský matematik.

Eulerův vzorec zní:

$$n^2 + n + 41$$

Pokud za *n* dosadíme libovolné přirozené číslo, které bude menší než 40, výsledkem bude vždy prvočíslo.

n	$n^2 + n + 41$	Je to prvočíslo?
1	$1^2 + 1 + 41 = 1 + 1 + 41 = 43$	Ano
2	$2^2 + 2 + 41 = 4 + 2 + 41 = 6 + 41 = 47$	Ano
3	$3^2 + 3 + 41 = 9 + 3 + 41 = 12 + 41 = 53$	Ano
4	$4^2 + 4 + 41 = 16 + 4 + 41 = 20 + 41 = 61$	Ano
5	$5^2 + 5 + 41 = 25 + 5 + 41 = 30 + 41 = 71$	Ano
6	$6^2 + 6 + 41 = 36 + 6 + 41 = 42 + 41 = 83$	Ano
7	$7^2 + 7 + 41 = 49 + 7 + 41 = 56 + 41 = 97$	Ano
8	$8^2 + 8 + 41 = 64 + 8 + 41 = 72 + 41 = 113$	Ano
9	$9^2 + 9 + 41 = 81 + 9 + 41 = 90 + 41 = 131$	Ano
10	$10^2 + 10 + 41 = 100 + 10 + 41 = 110 + 41 = 151$	Ano
11	$11^2 + 11 + 41 = 121 + 11 + 41 = 132 + 41 = 173$	Ano
12	$12^2 + 12 + 41 = 144 + 12 + 41 = 156 + 41 = 197$	Ano
13	$13^2 + 13 + 41 = 169 + 13 + 41 = 182 + 41 = 223$	Ano
14	$14^2 + 14 + 41 = 196 + 14 + 41 = 210 + 41 = 251$	Ano
15	$15^2 + 15 + 41 = 225 + 15 + 41 = 240 + 41 = 281$	Ano
16	$16^2 + 16 + 41 = 256 + 16 + 41 = 272 + 41 = 313$	Ano
17	$17^2 + 17 + 41 = 289 + 17 + 41 = 306 + 41 = 347$	Ano
18	$18^2 + 18 + 41 = 324 + 18 + 41 = 342 + 41 = 383$	Ano
19	$19^2 + 19 + 41 = 361 + 19 + 41 = 380 + 41 = 421$	Ano

20	$20^2 + 20 + 41 = 400 + 20 + 41 = 420 + 41 = 461$	Ano
21	$21^2 + 21 + 41 = 441 + 21 + 41 = 462 + 41 = 503$	Ano
22	$22^2 + 22 + 41 = 484 + 22 + 41 = 506 + 41 = 547$	Ano
23	$23^2 + 23 + 41 = 529 + 23 + 41 = 552 + 41 = 593$	Ano
24	$24^2 + 24 + 41 = 576 + 24 + 41 = 600 + 41 = 641$	Ano
25	$25^2 + 25 + 41 = 625 + 25 + 41 = 650 + 41 = 691$	Ano
26	$26^2 + 26 + 41 = 676 + 26 + 41 = 702 + 41 = 743$	Ano
27	$27^2 + 27 + 41 = 729 + 27 + 41 = 756 + 41 = 797$	Ano
28	$28^2 + 28 + 41 = 784 + 28 + 41 = 812 + 41 = 853$	Ano
29	$29^2 + 29 + 41 = 841 + 29 + 41 = 870 + 41 = 911$	Ano
30	$30^2 + 30 + 41 = 900 + 30 + 41 = 930 + 41 = 971$	Ano
31	$31^2 + 31 + 41 = 961 + 31 + 41 = 992 + 41 = 1033$	Ano
32	$32^2 + 32 + 41 = 1024 + 32 + 41 = 1056 + 41 = 1097$	Ano
33	$33^2 + 33 + 41 = 1089 + 33 + 41 = 1122 + 41 = 1163$	Ano
34	$34^2 + 34 + 41 = 1156 + 34 + 41 = 1190 + 41 = 1231$	Ano
35	$35^2 + 35 + 41 = 1225 + 35 + 41 = 1260 + 41 = 1301$	Ano
36	$36^2 + 36 + 41 = 1296 + 36 + 41 = 1332 + 41 = 1373$	Ano
37	$37^2 + 37 + 41 = 1369 + 37 + 41 = 1406 + 41 = 1447$	Ano
38	$38^2 + 38 + 41 = 1444 + 38 + 41 = 1482 + 41 = 1523$	Ano
39	$39^2 + 39 + 41 = 1521 + 39 + 41 = 1560 + 41 = 1601$	Ano
40	$40^2 + 40 + 41 = 1600 + 40 + 41 = 1640 + 41 = 1681$	Ne

Další čísla *n*, která jsou větší než 40, jsou prvočísly nahodile.

5.2. Fermatova prvočísla

Pierre de Fermat (1601-1665) byl francouzský matematik, který dal jméno Fermatovým číslům. Jsou to taková čísla, která jsou rovna

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

kde $n \geq 0$

Fermat se domníval, že všechna čísla, která splňují předpis jsou prvočísly, ale dnes se ví, že to není pravda. K tomu tvrzení dospěl v roce 1732 Leonhard Euler, že číslo F_5 již není prvočíslem, neboť toto číslo lze rozložit na součin prvočísel, a je to číslo složené.

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = \ 4\,294\,967\,296 + 1 = 4\,294\,967\,297$$

Dokázal ho rozložit na součin dvou čísel. Těmi čísly jsou čísla 641 a $6\,700\,417$.

Gauss sepsal několik prvních Fermatových prvočísel a také věřil, že všechna čísla, která splňují vzorec, jsou prvočísly. Také se mýlil.

Další pokrok ve Fermatových číslech učinil F. Landry v roce 1880. Dokázal, že Fermatovo sedmé prvočíslo, není prvočíslem, ale číslem složeným. Lze ho rozložit na součin dvou činitelů, těmi jsou čísla:

$$2^{2^6} + 1 = 274\,147 \cdot 67\,280\,421\,310\,721$$

Felix Klein tvrdil, že Fermatovo prvočíslo F_7 je prvočíslem, není to však pravda. Tento názor byl vyvrácen až v roce 1970. Rozklad F_7:

$$F_7 = 2^{2^7} + 1 =$$

$$= (2^9 \cdot 1\,141\,971\,971\,095\,088\,142\,685 \ + 1) \cdot (2^9 \cdot 116\,503\,103\,764\,643 \ + 1)$$

Polský matematik Waclaw Sieprinski (1882-1969) v roce 1962 dokázal, že Fermatovo prvočíslo F_{194} není prvočíslo bez použití jakékoliv techniky.

Seznam dodnes známých Fermatových prvočísel, která jsou opravdu po výpočtu prvočísly.

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 2 + 1 = 3$$

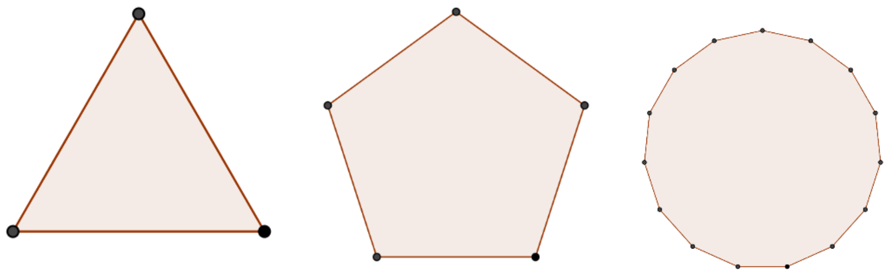
$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 16 + 1 = 17$$

$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 256 + 1 = 257$$

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,536 + 1 = 65\,537$$

Fermatova prvočísla jsou také spojena s další záhadou, s geometrií. Tuto souvislost objevil Carl Friedrich Gauss. Přišel na to, že každý libovolný pravidelný mnohoúhelník lze narýsovat pouze pomocí kružítka a pravítka, právě tehdy když počet vrcholů eukleidovsky konstruovaného mnohoúhelníku je roven Fermatovu prvočíslu nebo součinu libovolných Fermatových čísel. Prvním mnohoúhelníkem, pro který toto platí je trojúhelník. Dalšími jsou například pětiúhelník, patnáctiúhelník, sedmnáctiúhelník…



V roce 1832 Richelot sestrojil pomocí kružítka a pravítka 257úhelník.

5.3. Mersennova prvočísla

Marin Mersenne (1588-1648) byl francouzský matematik a fyzik. V díle *Cogitata physico-mathematica* (1644) zveřejnil pojednání o prvočíslech. Mersenne sám uvedl seznam. Pokud bude p na intervalu $\langle 2; 257 \rangle$ je číslo $2^p - 1$ a zároveň je číslem z následujícího seznamu:

$$2; 3; 5; 7; 13; 17; 19; 31; 67; 127; 257$$

bude Mersennovým prvočíslem.

Mersenne již ve své době věděl, že pro $p = 11$, nebude $2^p - 1$ prvočíslem.

Euler dokázat, že Mersennovo prvočíslo existuje i pro:

$$p = 31;\ 2^{31} - 1$$

Ale tvrzení, které uvedl Mersenne nemusí vždy platit: když p nebude prvočíslem, tak ani číslo $2^p - 1$ nebude prvočíslem. Ale i v případě, že p bude prvočíslo, číslo $2^p - 1$ nemusí být prvočíslem.

Následující seznam byl stanoven v roce 1947 jako konečný úplný seznam:

$$p = 2; 3; 5; 7; 13; 17; 19; 31; 61; 89; 107; 127.$$

Důkaz: Dokažte, že číslo $2^p - 1$ nemusí být prvočíslem, je-li p prvočíslo.
Toto dokážeme pomocí sporu. Provedeme negaci výroku: Je-li $2^p - 1$ prvočíslem, pak musí být i p prvočíslo.

Dosadíme-li za p číslo 2, vznikne také prvočíslo:

$$p = 2$$

$$2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Po dosazení $p = 3$ vznikne také prvočíslo:

$$p = 3$$

$$2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

Číslo *p* a výsledek 31 jsou prvočísla:

$$p = 5$$

$$2^5 - 1 = 32 - 1 = 31$$

Číslo 127 i *p* jsou prvočísla:

$$p = 7$$

$$2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$$

Číslo *p* je prvočíslo, ale číslo 2047 **není prvočíslem. Z toho vyplývá, že původní tvrzení není pravdivé, že platí pro všechna *p*.**

$$p = 11$$

$$2^{11} - 1 = 2048 - 1 = 2047$$

■

Seznam 8 Mersennových prvočísel nyní napíšeme do následující tabulky:

pořadí	*n*	M_n	datum objevu	objevitel
1.	2	3	dávno	neznámý
2.	3	7	dávno	neznámý
3.	5	3	dávno	neznámý
4.	7	127	dávno	neznámý
5.	13	8 191	1456	neznámý
6.	17	131 071	1588	Cataldi
7.	19	524 287	1588	Cataldi
8.	31	2 1447 486 647	1772	Leonhard Euler

(podle zdroje http://mersenne.ru/info.htm)

Tato prvočísla se hledají do dnešní doby. Dne 7.12.2018 amatérský matematik Patrick Loreche v rámci projektu Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS) nalezl doposud největší známé dokázané Mersennovo prvočíslo.
Toto číslo $2^{82\ 589\ 933} - 1$ má celkem 24 862 048 míst, jmenuje se M82589933 a samotné číslo by v dokumentu zaobíralo přibližně 10MB. Jde o 51. odhalené číslo. (podle zdroje https://vtm.zive.cz/clanky/amatersky-nadsenec-objevil-dosud-nejvetsi-zname-prvocislo/sc-870-a-196562/default.aspx)

Mersennova prvočísla jsou ve světě lidí velice důležitá. Hrají svojí roli v tzv. „prvočíselných testech“, které zkoumají s pomocí algoritmů, zda dané číslo je či není prvočíslem.

5.4. Prvočísla Pythagora

Pythagoras ze Samu (570-510 př. n. l.) byl řecký filosof, matematik, astronom i kněz.

Pythagorova prvočísla jsou taková prvočísla, která splňují předpis

$$4n + 1$$

kde n je přirozené číslo.

Nyní si odvodíme prvních pár Pythagorových prvočísel:

$$n = 1$$

$$4n + 1 = 4 \cdot 1 + 1 = 4 + 1 = 5$$

Pro $n = 1$ existuje prvočíslo Pythagora.

$$n = 2$$

$$4n + 1 = 4 \cdot 2 + 1 = 8 + 1 = 9$$

Pro $n = 2$ také neexistuje prvočíslo Pythagora.

$$n = 3$$

$$4n + 1 = 4 \cdot 3 + 1 = 12 + 1 = 13$$

Pro $n = 3$ existuje prvočíslo Pythagora.

$$n = 4$$

$$4n + 1 = 4 \cdot 4 + 1 = 16 + 1 = 17$$

Pro $n = 4$ existuje prvočíslo Pythagora.

$$n = 5$$

$$4n + 1 = 4 \cdot 5 + 1 = 20 + 1 = 21$$

Pro $n = 5$ neexistuje prvočíslo Pythagora.

Seznam prvočísel Pythagora:

5	13	17	29
37	41	53	61
73	89	97	101
109	113	137	149
157	181	193	197
229	233	241	257
269	277	281	293
313	317	349	353
373	389	397	401
409	421	433	449
457	461	509	541
557	569	577	593
601	613	617	

Prvočísla Pythagora také lze napsat jako součet dvou čtverců, tzn. číslo lze rozložit na součet druhých mocnin přirozených čísel.

Zápis:

$$p = 4n + 1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow p = x^2 + y^2$$

kde *p* je prvočíslo.

Tento vztah vypozoroval Fermat. Tato skutečnost, že $p = 4n + 1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow p = x^2 + y^2$ platí pouze pro prvočísla typu $4n + 1$, pro typ $4n - 1$ toto neplatí.

Například:

$$5 = 1^2 + 2^2$$

$$13 = 3^2 + 2^2$$

$$17 = 1^2 + 4^2$$

$$29 = 5^2 + 2^2$$

...

5.5. Prvočísla Sophie Germainové

Marie-Sophie Germainová (1776-1831) byla francouzská matematička, fyzička.

Prvočísla Sophie Germainové jsou taková prvočísla, pro která platí výraz:

$$p' = 2p + 1$$

Číslo p' se nazývá **bezpečné prvočíslo.**

p	$2p + 1$	Prvočíslo?
2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	Ano
3	$2 \cdot 3 + 1 = 7$	Ano
5	$2 \cdot 5 + 1 = 11$	Ano
7	$2 \cdot 7 + 1 = 15$	Ne
11	$2 \cdot 11 + 1 = 23$	Ano
13	$2 \cdot 13 + 1 = 27$	Ne
17	$2 \cdot 17 + 1 = 35$	Ne
19	$2 \cdot 19 + 1 = 39$	Ne
23	$2 \cdot 23 + 1 = 47$	Ano
29	$2 \cdot 29 + 1 = 59$	Ano
31	$2 \cdot 31 + 1 = 63$	Ne
37	$2 \cdot 37 + 1 = 75$	Ne
41	$2 \cdot 41 + 1 = 83$	Ano
43	$2 \cdot 43 + 1 = 87$	Ne
47	$2 \cdot 47 + 1 = 95$	Ne
53	$2 \cdot 53 + 1 = 107$	Ano
59	$2 \cdot 59 + 1 = 119$	Ne
61	$2 \cdot 61 + 1 = 123$	Ne
73	$2 \cdot 73 + 1 = 147$	Ne
79	$2 \cdot 79 + 1 = 159$	Ne
83	$2 \cdot 83 + 1 = 167$	Ano
89	$2 \cdot 89 + 1 = 179$	Ano
97	$2 \cdot 97 + 1 = 195$	Ne

Největší doposud známé prvočíslo Sophie Germainové je číslo

$$2\,618\,163\,402\,417 \times 2^{1\,290\,000} - 1$$

Toto číslo obsahuje 388 342 číslic a bylo nalezeno sítí PrimeGrid v roce 2016.

Tyto prvočísla Sophie Germainové se používají v kryptografii. Prvočíslem Sophie Germainové nemůže být žádné prvočíslo, které končí cifrou 7, neboť po vynásobení čísla 2 a přičtení čísla 1, vznikne číslo, které bude končit cifrou 5, a to bude vždy dělitelné číslem 5.

5.6. Prvočísla Wagstaffa

Samuel S. Wagstaff Jr. (1945-) je americký matematik, který definoval, že prvočíslo bude takové číslo, které bude splňovat předpis:

$$p = \frac{2^q + 1}{3}$$

kde q je také prvočíslo.

Mají uplatnění v kryptografii.

Nyní si ukážeme jejich hledání:

$$q = 2$$

$$p = \frac{2^2 + 1}{3} = p = \frac{4 + 1}{3} = \frac{5}{3}$$

Číslo $\frac{5}{3}$ není prvočíslem, proto budeme hledat dále první prvočíslo Wagstaffa.

$$q = 3$$

$$p = \frac{2^3 + 1}{3} = \frac{8 + 1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Číslo 3 je prvočíslo a je také první prvočíslo Wagstaffa.

Budeme hledat ještě další:

$$q = 5$$

$$p = \frac{2^5 + 1}{3} = \frac{32 + 1}{3} = \frac{33}{3} = 11$$

Číslo 11 také je prvočíslo.

$$q = 7$$

$$p = \frac{2^7 + 1}{3} = \frac{128 + 1}{3} = \frac{129}{3} = 43$$

Číslo 43 je také prvočíslo.

Nyní si uvedeme seznam několika prvočísel Wagstaffa:

3	11	43	683	2 731
43 691	174 763	2 796 203	715 827 883	2 936 031 007 403

Největší známé prvočíslo Wagstaffa je číslo $\frac{2^{13\,372\,531}+1}{3}$, má 4 025 533 číslic. Bylo nalezené Ryanem Propperem roku 2013.

Druhé největší číslo nalezené téhož roku také Ryanem Propperem je číslo $\frac{2^{13\,347\,311}+1}{3}$, které má 4 017 941 čísel.

Zda je číslo prvočíslem Wagstaffa lze dokázat pomocí metody na ověření prvočíselnosti s pomocí eliptických křivek. Tato metoda je v dnešní době nejrychlejší algoritmus pro kontrolu, nese zkratku ECPP (= Elliptic Curve Primality Proving). Tuto metodu vymysleli roku 1986 Joe Kilian a Shafi Goldwasser. Pomocí této metody lze dokázat prvočíselnost do $q \leq 83\,339$, neboť: když $q > 83\,339$ mohou to být prvočísla.

Závěr

Cílem bakalářské práce „Co všechno víme o přirozených číslech“ bylo seznámit zájemce o matematiku se základními údaji o prvočíslech. Zaměřila jsem se na širokou historii získávání prvočísel.

Člověk se seznámil s jednotlivými body práce, které nejsou součástí výuky na středních ani na vysokých školách, ale jsou zde srozumitelně vysvětleny postupy hledání prvočísel podle jednotlivých matematiků. Každý z nich k problému přistupoval rozdílnými způsoby, jako jsou různé výpočty, vzorce, tabulky nebo grafické řešení.

Jednotlivé postupy jsem se snažila vypracovat tak, aby ho pochopil každý student a učitel je mohl využít ke zpestření výuky. Použila jsem velké množství barevných tabulek, které jsou přehledné, jednoduché a rychle pochopitelné.

Doufám, že informace v této bakalářské práci pomůžou čtenářům rozšířit vědomosti a znalosti v matematice a zároveň zvýšit zájem o tento obor.

Seznam použité literatury

Crilly Tony, Velké otázky, Matematika, Knižní klub, 2012, ISBN 978-80-242-3596-7

Gracián, Prvočísla; Dlouhá cesta do nekonečna, 2017, nakladatelství Dokořán, ISBN 978-80-7363-842-9

Rooney Anne, Příběh matematiky, Od projektování pyramid po objevení nekonečná, 2017, knihy Omega, ISBN 978-80-7390-579-8

Берман Г. Н., Число и наука о нём, государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1954

Ижмужаметов Ш. Т., Методы факторизации натуральных чисел, Казанский университет, 2011

Кордемский Б. А., Математическая смекалка, государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956

Seznam použitých internetových zdrojů

https://vesmir.cz/cz/casopis/archiv-casopisu/1997/cislo-2/desate-fermatovo-cislo-rozlozeno-prvocinitele.html

https://vtm.zive.cz/clanky/amatersky-nadsenec-objevil-dosud-nejvetsi-zname-prvocislo/sc-870-a-196562/default.aspx

https://ru.wikipedia.org/wiki/Решето_Сундарама

http://mathemlib.ru/books/item/f00/s00/z0000038/st013.shtml

https://ru.wikipedia.org/wiki/Решето_Аткина

https://studopedia.info/9-17908.html

https://math.wikireading.ru/673

https://math.wikireading.ru/674

https://math.wikireading.ru/684

http://mersenne.ru/info.htm