UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PEDAGOGICKÁ FAKULTA
Katedra matematiky

Diplomová práce

Bc. Tomáš Krézek

Infinitezimální počet v úlohách s fyzikální tématikou při výuce studentů učitelství matematiky

Vedoucí práce

Doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.

Olomouc 2024

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně za použití literatury a pramenů uvedených v závěru práce.

V Olomouci dne 12.6.2024 ……...…………………….

Bc.Tomáš Krézek

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat paní doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc. za vedení diplomové práce, poskytnutí cenných rad a věnovaný čas.

Obsah

1 Úvod

Propojení matematiky s reálným světem nabývá v aktuálním vzdělávacím systému stále na větším významu. Proto jsem se rozhodl zaměřit svou diplomovou práci právě na tuto problematiku, kdy je mým cílem zaměřit se na hlubší pohled na využití infinitezimálního počtu v rámci fyzikálních problémů při studiu matematické analýzy v rámci výuky studentů učitelství matematiky na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého.

Klíčovými koncepty infinitezimálního počtu jsou derivace a integrace, které nejsou pouze matematickými nástroji, ale rovněž prostředek umožňující interpretaci a řešení příkladů s fyzikální tématikou.

Cílem této diplomové práce je zaměřit se na schopnost studentů učitelství matematiky řešit příklady infinitezimálního počtu v kontextu problémů fyziky. Zároveň je cílem zjistit, zda samotní studenti považují aplikaci infinitezimálního počtu v praktických ukázkách jako přínosnou při pochopení problematiky a najít vhodný způsob tohoto propojení.

V rámci tohoto tématu navazuji na svou bakalářskou práci na téma *Aplikace diferenciálního počtu ve fyzice*, ve které jsem se zabýval sestavením sady praktických příkladů diferenciálního počtu s fyzikální tématikou. Jedná se tedy o formu rozšíření problematiky a příspěvek k diskusi na téma propojování matematiky a fyziky, jakožto úzce spjatých disciplín, zdůrazňující spojení matematických konceptů a konkrétních problémů, v našem případě problémů fyzikálních, v kontextu výuky budoucích učitelů matematiky.

2 Diferenciální počet

Obecně se diferenciální počet zabývá výpočtem rychlosti změny. V případě, kdy při zkoumání určitého jevu věnujeme pozornost dvěma proměnným veličinám, můžeme mezi nimi vypozorovat jistou souvislost. Jestliže dojde ke změně jedné proměnné, dojde ke změně druhé proměnné. V takovém případě nazýváme první veličinu nezávisle proměnnou, nebo také jako argument, druhou veličinu jako závisle proměnnou, nebo funkcí veličiny první.

Proměnné ve většině případů označujeme písmeny x, y, pokud se však jedná o fyzikální konstanty, nebo označení fyzikálních veličin, ponecháváme v obvyklém označení, které používá fyzika. Funkce označujeme písmeny f, g, h. Pro specifikování přímé závislosti mezi dvěma veličinami píšeme f: $y = f(x)$, kde x označuje závisle proměnnou a y nezávisle proměnnou. (Kuben, Šarmanová, 2006, s. 2)

2.1 Limita funkce

Limita funkce, jakožto fundamentální pojem matematické analýzy, nám umožňuje definovat pojem derivace a zavést integrální počet.

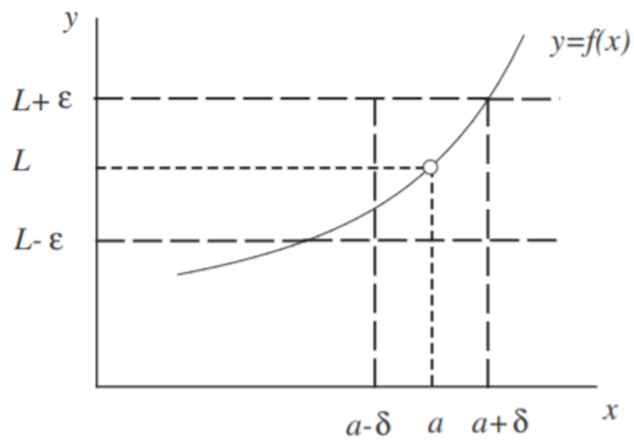
Definice 1.1 (Limita funkce)

Nechť $L \in$ R. Funkce $f(x)$ má v bodě a limitu L a píšeme $\lim_{x \to a} f(x) = L$, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechna x z neúplného δ-okolí bodu a, tj. pro $0 < |x - a| < \delta$ je $|f(x) - L| < \varepsilon$.

V definici limity se nepředpokládá nic o funkci $f(x)$ v bodě a. Tedy existence limity $\lim_{x \to a} f(x)$ ani její hodnota nezávisejí na hodnotě $f(a)$, ani na tom, zda funkce f je v bodě a definována.

2.1.1 Geometrický význam definice limity

Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = L$, pak ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje neúplné δ-okolí bodu a tak, že v něm platí $|f(x) - L| < \varepsilon$ (definice 1.1), tj. $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. To znamená, že v neúplném δ-okolí bodu a probíhá graf funkce f v pásu ohraničeném přímkami $y = L - \varepsilon$, $y = L + \varepsilon$.



Obrázek 1: Geometrický význam definice limity. (Převzato z [1], str. 20)

Platí, že každá funkce $f(x)$ má v každém svém bodě nejvýše jednu limitu. Tato funkce je spojitá v bodě a, jestliže platí $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

2.2 Derivace a její historie

Geometrickým významem pojmu derivace, tedy problémem směrnice tečny, se zabývali matematici již v antickém Řecku. Prvními matematiky, kteří se tečnou ke křivce zaobírali, byli Archimédés (287-212 př. n. l.) a Eukleidés (325-260 př. n. l.). A právě Archimédes byl prvním, kdo zavedl pravidla pro počítání s nekonečně malými veličinami (tj. infinitezimálními). Svůj objev však nepoužíval k výpočtu tečen a derivací, ale k výpočtu ploch rovinných útvarů a objemů těles.

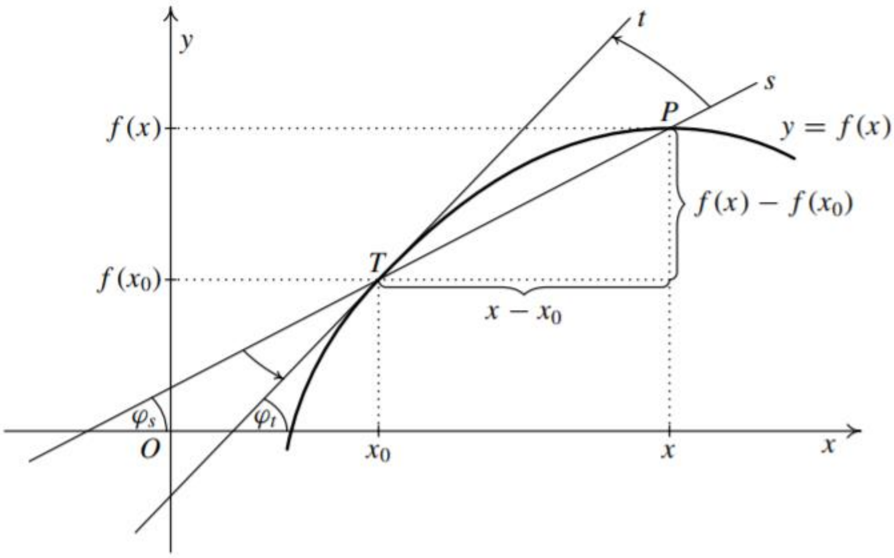
Základ matematické analýze a pojmům, jako je derivace, nebo integrální počet položili nezávisle na sobě ve 17. století anglický matematik Sir Isaac Newton (1643-1727) a německý matematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

2.2.1 Geometrický význam a definice derivace

Derivace nám udává poměr změny $f(x)$ ku změně jejího argumentu x. Jinými slovy derivace popisuje tzv. rychlost změny funkce, kterou v bodě x můžeme nazvat jako sklon křivky. Sklon křivky (její strmost) je dán velikostí úhlu, který svírá osa x s tečnou ke křivce.

Číselně nám tedy velikost úhlu představuje tangens úhlu, nebo také směrnici tečny. Z toho vyplývá, že v případě růstu funkce v bodě x nabývá směrnice tečny kladné hodnoty. Naopak jedná-li se o pokles funkce v bodě x, nabývá směrnice tečny hodnot záporných.

Pro snadnější představu si můžeme význam derivace znázornit graficky. Na grafu funkce f si definujme bod T, jehož souřadnice odpovídají $T = [x_0, f_0]$ (viz. obrázek 2). Dále si zvolíme na grafu funkce f libovolný bod P, jehož souřadnice budou $P = [x, f]$. Za pomoci těchto dvou bodů sestrojíme sečnu s grafu funkce. Dále si představme, že bodem x pohybujeme ve směru k bodu x_0 a postupně se tedy bod P přibližuje po grafu funkce k bodu T. Je-li funkce spojitá, což v našem případě je, dojde ke splynutí bodu P s bodem T a sečna s přechází v přímku t, kterou nazýváme tečnou t ke grafu f v bodě T. Směrnice sečny tedy přešla ve směrnici tečny. (Kuben, Šarmanová, 2006, s. 187)



Obrázek 2: Geometrický model derivace. (Převzato z [1], str. 187)

Jinými slovy, tečna t v bodě T je tzv. limitní polohou sečny s. To znamená, že za předpokladu, že limita existuje a nenabývá hodnot ∞ nebo $-\infty$, můžeme její směrnici vyjádřit za pomocí limity jako

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Samotnou derivaci v určitém bodě poté označujeme např. jako $f'(T)$, analogicky tedy můžeme derivaci v bodě x_0 vyjádřit jako

$$f'(T) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

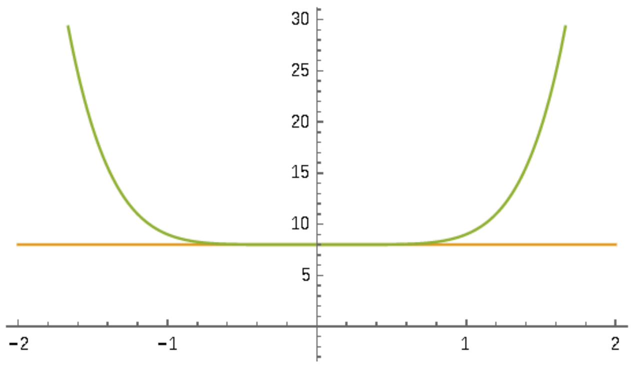
Výraz dále tedy označujeme jako derivaci funkce $f\ (x)$ v bodě *T*. Rozdíl v čitateli nazýváme přírůstkem nebo také diferencí závisle proměnné funkce f v bodě *T*. Rozdíl ve jmenovateli nazýváme přírůstkem nebo diferencí nezávisle proměnné *x* v bodě *T*. Tento rozdíl ve jmenovateli dále bude označovat jako *h*.

Příklad 1.1

Nyní si na jednoduchém příkladu názorně ukážeme výpočet derivace. Mějme zadanou funkci danou předpisem $f(x) = x^6 + 8$. Našim úkolem bude zjistit, zda existuje derivace v bodě $x_0 = 0$ a čemu je rovna.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6 + 8 - (0 + 8)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x} = \lim_{x\to 0} x^5 = 0$$

V bodě $x_0 = 0$ tedy derivace existuje a je rovna číslu 0. Z pohledu geometrického významu nám výsledek říká, že směrnice neboli tangenta úhlu, jenž svírá tečna a kladná část osy x je rovna nule. Jelikož tangens je roven 0 pro úhel 0°, je tečna rovnoběžná s osou x.



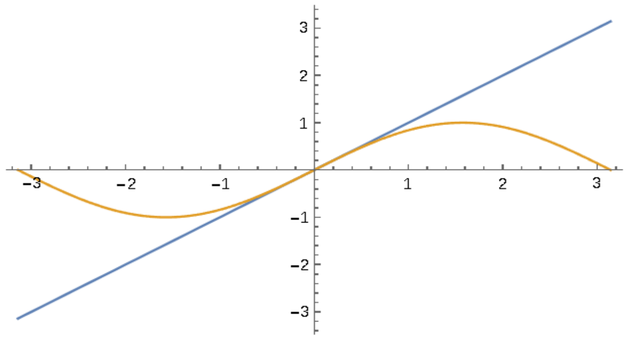
Obrázek 3: Grafické znázornění první derivace funkce $f(x) = x^6 + 8$ v bodě $x_0 = 0$.

Příklad 1.2

Analogicky si dále ukážeme výpočet derivace pro funkci danou předpisem $f(x) = \sin(x)$ opět v bodě $x_0 = 0$.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Derivace v bodě $x_0 = 0$ stejně jako v příkladu 1.1 existuje a je rovna hodnotě 1. Z geometrického hlediska to tedy znamená, že tangens je roven hodnotě 1, která odpovídá úhlu 45° (neboli π/4), což je úhel, který svírá tečna s osou x.



Obrázek 4: Grafické znázornění první derivace funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

2.2.2 Derivace základních elementárních funkcí

Nyní si uvedeme derivace základních elementárních funkcí, které budeme při výpočtech v další části práce využívat.

1.	$k' = 0$	$k \in \mathbb{R}$
2.	$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$	$a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^+$
3.	$(\sin x)' = \cos x$	$x \in \mathbb{R}$
4.	$(\cos x)' = -\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
5.	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$x \in \mathbb{R}$
6.	$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathrm{Z}\right\}$
7.	$(\mathrm{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathrm{Z}\}$
8.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}^+$
9.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
10.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
11.	$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$	$x \in \mathbb{R}$
12.	$(\mathrm{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$	$x \in \mathbb{R}$
13.	$(\mathrm{a}^x)' = \mathrm{a}^x \cdot \ln(\mathrm{a})$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$
14.	$(\log_{\mathrm{a}} x)' = \frac{1}{x\ln(\mathrm{a})}$	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}^+$

2.2.3 Derivace složené funkce

Uvažujme složenou funkci $F = f \circ g$. Předpokládejme, že existuje derivace funkce g v bodě x_0 a derivace funkce f v bodě $u_0 = g(x_0)$. Pak i složená funkce F má derivaci v bodě x_0 a platí

$$F'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'(u_0) \cdot g'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big) \cdot g'(x_0).$$

Demonstrujme si výpočet derivace složené funkce se znalostí její definice na názorných příkladech.

Příklad 1.3

Vypočtěte derivaci funkce F danou předpisem $F(x) = \cos(5x^3)$.

Nejprve si musíme uvědomit, která funkce je vnější složkou f, a která je vnitřní g. Vnější složkou je $f(u) = \cos\,(u)$ a vnitřní složkou $u = g(x) = 5x^3$. Derivací vnější složky složené funkce obdržíme

$$f'(u) = (\cos(\mathrm{u}))' = -\sin(u)$$
$$f'\big(g(x)\big) = -\sin(g(x))$$

a derivací vnitřní složky

$$g'(x) = (5x^3)' = 15x^2.$$

Dle definice můžeme nyní vypočíst derivaci zadané složené funkce $F(x) = \cos(5x^3)$.

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \boldsymbol{-\sin(5x^3) \cdot 15x^2}$$

Příklad 1.4

Vypočtěte derivaci funkce F danou předpisem $F(x) = \sqrt{4x^2 - 2x}$.

Opět si definujme vnější a vnitřní složku složené funkce $F(x)$. Vnější složkou je $f(u) = \sqrt{u}$ a vnitřní složkou $u = g(x) = 4x^2 - 2x$. Derivace vnější složky

$$f'(u) = (\sqrt{u})' = (u^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$f'\big(g(x)\big) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}$$

a derivace vnitřní složky

$$g'(x) = (4x^2 - 2x)' = 8x - 2.$$

Dle definice můžeme nyní vypočíst derivaci zadané složené funkce $F(x) = \sqrt{4x^2 - 2x}$.

$$F'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 - 2x}} \cdot 8x - 2$$

$$F'(x) = \frac{8x - 2}{2\sqrt{4x^2 - 2x}} = \boldsymbol{\frac{4x - 1}{\sqrt{4x^2 - 2x}}}$$

2.2.4 Derivace vyšších řádů

Pokud má funkce f v každém bodě svého definičního oboru derivaci, obdržíme novou funkci f'. Novou funkci jsme schopni opět derivovat, jinými slovy může existovat $(f')'$ v bodě x_0. Toto číslo nazýváme druhou derivací funkce f v bodě x_0 a značíme jako $f''(x_0)$, nebo také jako $f^{(2)}(x_0)$.

Analogicky dokážeme vypočíst třetí, čtvrtou, až n-tou derivaci funkce f. V případě výpočtu třetí derivace musíme nejprve vypočíst první a druhou derivaci. Díky vypočtené třetí derivaci jsme schopni vypočíst derivaci čtvrtého řádu a tak dále.

V našem případě se budeme zabývat derivacemi prvního a druhé řádu, které využijeme při řešení fyzikálních úloh. Jejich fyzikální význam si objasníme v nadcházející kapitole.

Příklad 1.5

Nyní si ukážeme výpočet derivace 4. řádu funkce $f(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + x$ a poté najdeme její hodnotu v bodě $x_0 = 2$.

$f(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + x$	$f(2) = 62$
$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 14x + 1$	$f'(2) = 85$
$f''(x) = 12x^2 + 12x + 14$	$f''(2) = 86$
$f^{(3)}(x) = 24x + 12$	$f^{(3)}(2) = 60$
$f^{(4)}(x) = 24$	$f^{(4)}(2) = 24$

2.2.5 Fyzikální význam derivace

Jak již bylo zmíněno, cílem této práce je ukázka využitelnosti derivací ve fyzice a při řešení fyzikálních příkladů. Nejběžnějším druhem derivace ve fyzice jsou časové derivace, avšak derivace může být spjata i s proměnnými jiného druhu. S ohledem na čas představuje derivace funkce rychlost změny funkce. Základním příkladem derivování ve fyzice je pohyb, protože představuje-li závisle proměnná polohu bodu, pak její derivací podle času dostaneme okamžitou rychlost (neplést s průměrnou rychlostí). V případě, kdy máme dánu funkci, která popisuje rychlost hmotného bodu v závislosti na čase, pak proměnná představuje rychlost, pak její derivací podle času je okamžité zrychlení. Jinými slovy, okamžité zrychlení je druhou derivací pohybu podle času.

Derivace je tedy využitelná v oblasti mechaniky, kdy zkoumáme pohyb, rychlost, zrychlení, popřípadě výchylku nějakého bodu či tělesa v závislosti na čase. Avšak mechanika není jedinou oblastí fyziky, kdy zkoumáme závislost změny jedné veličiny ku druhé. V termodynamice můžeme za pomoci derivování zjistit například závislost změny nadmořské výšky na změně tlaku vzduchu, nebo rychlost změny napětí vodních par od absolutní teploty. Poslední oblastí, kterou se budeme zabývat je elektřina a magnetismus, kdy budeme například počítat intenzitu okamžitého proudu derivací vztahu pro množství elektrického náboje, nebo také elektromotorické napětí derivací vztahu proudu podle času.

Je zřejmé, že v případě derivování funkce, která nám popisuje průběh určité veličiny v závislosti na nezávisle proměnné (například v závislosti na čase), obdržíme funkci novou. Tedy derivování ve fyzikálním významu odvozuje vztahy veličin, závislé na stejné proměnné.

3 Integrální počet

Integrální počet je matematická disciplína, která se zabývá studiem a aplikací integrování, matematické operace, jež slouží k vyhodnocení ohraničené plochy pod křivkou nebo objemu tělesa. Tato oblast infinitezimálního počtu se zaměřuje na řešení problémů, které vyžadují sumaci nekonečně malých hodnot.

V integrálním počtu dva základní pojmy: určitý a neurčitý integrál. Určitý integrál slouží k výpočtu plochy mezi grafem funkce a osou x v daném intervalu. Neurčitý integrál zase reprezentuje množinu funkcí, jejichž derivace je původní funkce uvnitř integrantu.

Centrálním prvkem integrálního počtu je Riemannův integrál, který umožňuje aproximovat plochy pod křivkou pomocí součtu malých částí, nazývaných Riemannovy sumy. S rozvojem moderní matematiky byly vytvořeny i další formy integrálů, jako například Lebesgueův integrál, které rozšiřují možnosti a aplikace integrálního počtu do komplexnějších oblastí matematiky a fyziky. Integrální počet je klíčovým nástrojem pro modelování, analýzu a porozumění procesů spojitých změn a akcí v široké škále vědních oborů.

3.1 Integrace a její historie

Historie integrace sahá až do starověku, kdy se různí matematikové snažili formulovat metody pro výpočet ploch a objemů geometrických tvarů. Některé z nejstarších záznamů o metodách integrace pochází od starověkých Řeků a Babyloňanů.

Antický matematik Archimédés (asi 287-212 př. n. l.) byl jedním z prvních, kdo se systematicky zabýval výpočtem ploch a objemů. Jeho metoda na výpočet plochy pod parabolou představuje jeden z předchůdců integrálního počtu. Archimédés také používal metodu vyplňování těles, což bylo podobné principu, který později hrál roli při vývoji integrálu.

Ve středověku byly integrální metody ve značné míře opomíjeny. Práce Archiméda byly často ztraceny a vědecký výzkum byl ovlivněn především filosofií a náboženstvím.

V renesanci a postrenesančním období začali matematici znovu zkoumat otázky integrace. Italský matematik Bonaventura Cavalieri (1598-1647) přispěl k vývoji nekonečně malých objemů a ploch. Blaise Pascal (1623-1662) a Pierre de Fermat (1607-1665) vyvinuli metodu, která byla podobná dnešním myšlenkám na výpočet integrálu.

Nakonec, v 17. století, Isaac Newton (1643-1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nezávisle na sobě vytvořili moderní kalkulus, což zahrnuje i integrální počet. Jejich práce položila základy teorie derivací a integrací, a tím vytvořila robustní matematický aparát pro analýzu změn a ploch pod křivkami.

V průběhu 18. a 19. století došlo k dalšímu zdokonalení teorie integrace a rozšíření oblasti působnosti. Matematici jako Leonhard Euler, Joseph Fourier a Bernhard Riemann přispěli k dalšímu porozumění integrálnímu počtu a jeho aplikacím. Moderní formulace integrálního počtu pak byla vyvinuta v průběhu 20. století v rámci oblastí jako Lebesgueův integrál a dalších.

3.2 Určitý integrál

Určitý integrál je základní koncept v kalkulu, který umožňuje vypočítat celkovou plochu pod křivkou grafu funkce na daném intervalu. Tento proces je zásadní pro mnoho aplikací v matematice, fyzice, inženýrství a dalších vědních oborech, kde je potřeba určit celkovou akumulaci nějaké veličiny, jako je například hmotnost, energie nebo množství látky.

Určitý integrál funkce $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ můžeme zapsat jako

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

kde a a b jsou dolní a horní mez integrace, $f(x)$ je integrant, neboli integrovaná funkce a dx označuje proměnnou integrace.

Geometricky můžeme určitý integrál vyjádřit jako plochu mezi křivkou $f(x)$, osou x a svislými čarami vyjadřující mez od a po b. Jestliže je funkce $f(x)$ na celém intervalu $[a, b]$ kladná, pak určitý integrál představuje plochu pod křivkou, která je rovněž kladná. Jestliže je funkce $f(x)$ na celém intervalu $[a, b]$ záporná, pak je určitý integrál této funkce na tomto intervalu záporný. Plocha pod osou x je však kladná. Ve výsledku může být tedy celkový integrál kladný, záporný, nebo dokonce nulový v závislosti na chování průběhu funkce.

Výpočet určitého integrálu zahrnuje koncept limit, kde se plocha pod křivkou aproximuje jako součet ploch mnoha velmi úzkých obdélníků. Tento přístup je formalizován pomocí Riemannových sum (viz. další kapitola), což je způsob, jakým integrál přesně definujeme. Určité integrály zahrnují tři základní vlastnosti:

Linearita: Integrál součtu funkcí je roven součtu integrálů těchto funkcí.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Konstantní násobek: Konstantu lze vytknout před integrál.

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Aditivita na intervalech: Integrál na větším intervalu lze rozdělit na součet integrálů na menších intervalech.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

3.2.1 Riemannův integrál

Riemannův integrál je jedním z klíčových pojmů v integrálním počtu, který formálně definuje určitý integrál jako limitu sum. Tento koncept, pojmenovaný po německém matematikovi Bernhardu Riemannovi, poskytuje základ pro přesné pochopení integrace. Riemannův přístup k integraci spočívá v aproximaci plochy pod křivkou pomocí konečného počtu obdélníků, jejichž plochy se sečtou. Jak se počet obdélníků zvyšuje a jejich šířka se zmenšuje, tato suma konverguje k přesné hodnotě integrálu.

Abychom definovali Riemannův integrál, začněme s funkcí $f(x)$ definovanou na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Interval $[a, b]$ rozdělíme na n-počet podintervalů pomocí dělících bodů

$$a = x_0 < x_1 <..< x_n = b,$$

kdy každý podinterval mí šířku

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Pro každý podinterval $[x_{i-1}, x_i]$ zvolíme bod c_i (tento bod může být v rámci podintervalu libovolný) a provedeme součet.

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

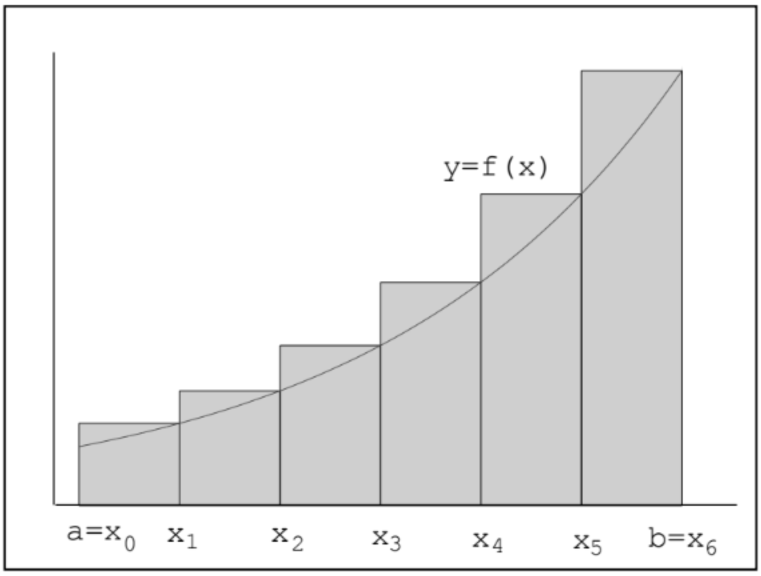
Tento součet S se nazývá Riemannova suma. Riemannova suma je aproximací plochy pod křivkou $f(x)$. Když počet podintervalů n roste k nekonečnu a šířka každého podintervalů Δx_i se blíží nule, Riemannova suma konverguje k určité hodnotě, pokud tato limita existuje.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Pokud tato limita existuje, říkáme, že funkce $f(x)$ je Riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$ a výsledná hodnota je Riemannův integrál funkce $f(x)$ od a do b.

Pro existenci Riemannova integrálu musí být splněny určité podmínky. Jednou z klíčových podmínek je omezenost funkce $f(x)$ na daném intervalu. Navíc funkce musí být na daném intervalu téměř všude spojitá. To znamená, že body nespojitosti mohou existovat, ale jejich množina musí mít míru nula (například konečný nebo spočetný počet bodů nespojitosti).

Geometricky lze Riemannův integrál interpretovat jako celkovou plochu pod křivkou $f(x)$ mezi $x = a$ a $x = b$. Plocha nad osou x se počítá kladně, zatímco plocha pod osou x se počítá záporně. Tento přístup nám umožňuje přesněji kvantifikovat akumulaci veličin, jako jsou vzdálenost, plocha, objem nebo množství látky.



Obrázek 5: Horní součet funkce $f(x)$ při dělení D_6 na intervalu $< a, b >$.

(Převzato z [2], str. 46)

3.3 Integrace základních elementárních funkcí

Nyní se zaměříme na výpočet integrálů základních elementárních funkcí, které se mohou objevit v následující části práce.

1.	$\int k \, dx = kx + C$	$x \in \mathbb{R};\ k = konst.$
2.	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
3.	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log(a)} + C$	$x \in \mathbb{R};\ a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$
4.	$\int e^x \, dx = e^x + C$	$x \in \mathbb{R}$
5.	$\int \frac{1}{x \cdot \ln(a)} \, dx = \log_a \lvert x \rvert + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};\ a \in (0, \infty) \setminus \{1\}$
6.	$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln \lvert x \rvert + C$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
7.	$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
8.	$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$	$x \in \mathbb{R}$
9.	$\int \frac{1}{\cos^2 \cdot x} \, dx = \mathrm{tg}(x) + \mathrm{C}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right\}, k \in Z$
10.	$\int \left(-\frac{1}{\sin^2 \cdot x}\right) dx = \mathrm{cotg}(x) + \mathrm{C}$	$x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}, k \in Z$

Příklad 1.6

Výpočet několika příkladů za pomoci znalosti vzorců na integrování elementárních funkcí.

a) $\int \boldsymbol{x^5 \, dx}$

S využitím vzorce č.2 můžeme příklad vypočíst jako

$$\int x^5 \, dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{x^6}{6} + C.$$

b) $\int \mathbf{7}\, \boldsymbol{dx}$

Podle 1. vzorce dokážeme snadno určit, že

$$\int 7\, dx = 7x + C.$$

Jelikož můžeme zadání zapsat ve tvaru

$$\int 7 \cdot x^0\, dx,$$

což v kombinaci s druhým vzorcem dává

$$\int 7 \cdot x^0\, dx = 7 \cdot \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = 7 \cdot x^1 + C.$$

c) $\int \sqrt{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{dx}$

Postupujeme stejně jako v příkladě a), pouze si odmocninu přepíšeme do tvaru mocniny.

$$\int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

3.4 Fyzikální význam integrace

Ve fyzice hraje integrace klíčovou roli při modelování a popisu různých fyzikálních jevů. Integrální počet umožňuje matematicky kvantifikovat a analyzovat množství různých fyzikálních veličin, a tím poskytuje hlubší porozumění chování systémů a procesů ve fyzikálním světě.

Integrace se často používá k určení plochy pod křivkou v grafu fyzikální veličiny v závislosti na jiné proměnné. Například, integrace okamžité rychlosti pod křivkou v čase poskytuje okamžitou dráhu, kterou objekt urazí.

V oblasti mechaniky se integrace využívá k výpočtu práce, kterou síla vykonává při pohybu objektu. Integrace síly podél dráhy objektu dává celkovou práci vykonanou touto silou.

Dalším využitím je například určení hmotnosti, kdy integrace hustoty látky přes objem může poskytnout hmotnost celého objektu. Například integrace hustoty ve tvaru určeném objemem dává celkovou hmotnost tělesa.

Své využití nachází integrace také v elektřině a magnetismu. Integrace elektrického nebo magnetického pole přes určitou plochu dává elektrický nebo magnetický tok. Tato veličina je důležitá pro práci s elektromagnetickými jevy.

A v neposlední řadě například využití při řešení diferenciálních rovnic, jelikož je integrace klíčovým nástrojem při jejich řešení. Diferenciální rovnice popisují změny fyzikálních veličin vzhledem k jiným veličinám.

Fyzikální význam integrace tedy spočívá v tom, že umožňuje převést abstraktní koncepty matematiky na konkrétní a užitečné aplikace ve fyzikálním světě. Pomáhá vytvářet modely, porozumět chování systémů a provádět kvantitativní analýzy, což je klíčové pro rozvoj fyzikální teorie a aplikací v technologii a inženýrství.

4 Mezipředmětové vztahy v kontextu výuky na vysoké škole

Mezipředmětové vztahy ve vzdělávání obecně představují dynamický a klíčový prvek, pomocí kterého jsme schopni propojovat různé oblasti studia a umožnit studentům získat komplexnější znalosti a dovednosti. Integrací mezi různými oblastmi můžeme docílit lepšího porozumění a schopností aplikace získaných vědomostí v reálných situacích, na rozdíl od získání pouze teoretických poznatků bez hlubšího porozumění.

Při výuce s užitím mezipředmětových vztahů mezi různými disciplínami, které překračují hranice samostatných oborů, což v našem případě matematika bezesporu je, můžeme rozdělit vztahy na dva typy:

a) Horizontální mezipředmětové vztahy

Tyto vztahy můžeme aplikovat v případě, kdy jsou různé obory na stejné úrovni ne stupni vzdělávání. Tedy propojujeme disciplíny s podobnou úrovní složitosti nebo stupněm pokročilosti.

Tedy v případě vysokoškolského vzdělávání můžeme horizontální mezipředmětové vztahy aplikovat mezi matematikou a fyzikou, při aplikaci složitějších matematických konceptů k pochopení fyzikálních jevů. Tento vztah je ovšem oboustranný, tedy pomocí fyzikálních jevů můžeme ilustrovat právě například infinitezimální počet a jeho skutečnou podstatu a využití.

Jedná se tedy o velice vhodnou metodu pro rozvoj komplexního myšlení a získání širší perspektivy v rámci dané problematiky. Zároveň poskytujeme studentům možnost aplikace znalostí z jednoho oboru při řešení problémů v jiném oboru.

b) Vertikální mezipředmětové vztahy

V rámci vertikálních mezipředmětových vztahů rovněž aplikujeme propojení mezi různými obory studia, ale na rozdíl od horizontálních, kdy se jednalo o stejné úrovně, či stejné stupně vzdělávání, vytváříme propojení mezi různými úrovněmi a různými stupni vzdělávání.

Tedy například v našem případě mohou vertikální mezipředmětové vztahy existovat mezi pokročilými kurzy matematiky a základními kurzy fyziky. Tahle metoda má obrovskou výhodu v tom, že dokážeme uvést složitější matematické téma za pomocí jednodušší problematiky fyziky, jelikož v případě, kdy by studenti neměli dostatečné porozumění fyzikální tématiky, mohlo by dojít k složitější integraci poznatků.

Vertikální mezipředmětové vztahy nám tedy umožňují postupné rozvíjení znalostí a dovedností v rámci konkrétního oboru studia a zároveň do jisté míry udržovat propojení s dalšími obory. Zároveň dochází k postupnému prohloubení znalostí a postupné přípravě na složitější studijní materiál, kdy vertikální spojení může přejít ve spojení horizontální.

4.1 Integrace matematiky a fyziky

Propojení matematiky a fyziky je nezbytné pro řešení pochopení fyzikálních problémů, a to zejména díky aplikaci infinitezimálního počtu. Diferenciální a integrální počet totiž umožňuje matematický aparát pro modelování fyzikálních jevů a jejich kvantitativní popis.

Diferenciální počet je základním nástrojem při zkoumání změn fyzikálních veličin vůči času a prostoru. Pomocí derivací jsme schopni kvantitativně popsat například rychlost, zrychlení, sílu. Obecně můžeme říct, že diferenciální počet umožňuje popis dynamiky těles a procesů v přírodě a aplikaci ve spoustě oblastech, jako je mechanika, termodynamika, elektromagnetismus ale i ve spoustě oblastech mimo fyziku.

Integrální počet nám pak poskytuje matematický aparát pro výpočet celkových efektů fyzikálních jevů, kdy jejich využití můžeme aplikovat například k výpočtům rozložení hmoty, energie či pravděpodobnosti fyzikálního jevu v prostoru a čase. Konkrétním příkladem využití je výpočet momentu setrvačnosti tělesa, určení těžiště tělesa, určení střední hodnoty určité veličiny a spoustu dalších.

Právě tohle propojení matematiky a fyziky umožňuje fyzice formulovat matematické modely fyzikálních jevů a provést sofistikované výpočty, které nám pomáhají porozumět jevům v našem světě. Zároveň matematická analýza konkrétních fyzikálních problémů posiluje chápání matematických konceptů a jejich aplikaci v praxi.

Během studia jak matematiky, tak fyziky, je důležité poukazovat na důležitost vztahu těchto dvou disciplín, které se navzájem obohacují a potvrzují své koncepty a myšlenky. Cílem studia by mělo být porozumění problematik v širším kontextu a v rámci toho zároveň rozvíjet analytické a kritické myšlení. Důležitým aspektem je dále také využitelnost získaných znalostí a dovedností, což nám právě propojení matematické analýzy a fyziky nabízí.

4.2 Studie o efektivitě integrace matematiky a fyziky ve výuce

Studie o integraci matematiky a fyziky ve vzdělávání STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics) zdůrazňují význam propojení teoretického učení s praktickými aplikacemi (Smith & Jones, 2019). Jedním z příkladů je studie zaměřená na integrovaný kurz matematiky a fyziky pro studenty prvního ročníku inženýrství, která ukazuje, že modelování reálných problémů může významně zlepšit porozumění studentů a rozvoj jejich dovedností (Brown & Green, 2020). Hlavním cílem této studie bylo analyzovat modely vytvořené studenty, hodnotit efektivitu pedagogického přístupu a zkoumat přínosy integrativního vzdělávání. Studie zjistila, že zatímco většina studentů dokázala úspěšně vytvořit teoretické modely, aplikace těchto modelů na reálné scénáře byla složitější, což naznačuje potřebu většího zapojení praktických aktivit do kurikula (Brown & Green, 2020).

Další výzkum zdůrazňuje důležitost praktických zkušeností ve vzdělávání jako prostředku ke zlepšení propojení mezi teoretickými znalostmi a jejich praktickým využitím. Studie provedená v italském vzdělávacím kontextu ukazuje, že programy střídání školy a práce (School–Work Alternation, SWA) mohou efektivně překlenout mezeru mezi třídními aktivitami a skutečnými pracovními zkušenostmi (Rossi et al., 2018). Tento přístup nejenže zvyšuje relevantnost akademického učení pro studenty, ale také zlepšuje jejich vnímání zaměstnatelnosti a rozvíjí klíčové dovednosti potřebné na současném trhu práce (Rossi et al., 2018).

Výzkumy také ukazují, že integrace fyziky a matematiky prostřednictvím modelovacích aktivit a interdisciplinárních projektů může obohatit vzdělávací zkušenost studentů, což vede k hlubšímu porozumění a lepší připravenosti na složité problémy v reálném světě (Johnson & Lee, 2021). Tímto způsobem je možné studentům ukázat, jak teoretické koncepty matematiky a fyziky mohou být aplikovány na praktické problémy, což zvyšuje jejich motivaci a angažovanost ve výuce (Johnson & Lee, 2021).

Tyto studie tedy naznačují, že propojení matematiky a fyziky v kontextu praktických aplikací je efektivní metodou pro zlepšení vzdělávacího procesu. Přináší nejen hlubší pochopení teoretických konceptů, ale také připravuje studenty na praktické výzvy, se kterými se mohou setkat ve své profesní kariéře (Smith & Jones, 2019; Brown & Green, 2020; Rossi et al., 2018; Johnson & Lee, 2021).

4.3 Úlohy pro aplikaci matematické analýzy ve fyzikálních úlohách

V rámci této části práce jsem se zaměřil na zkoumání schopnosti studentů druhého ročníku bakalářského studia učitelství matematiky pro základní školy na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého v Olomouci aplikovat matematickou analýzu v kontextu fyzikálních úloh. Pro tento účel jsem připravil sadu čtyř úloh, přičemž dvě z nich byly zaměřeny na diferenciální počet a dvě na integrální počet.

Úkolem studentů bylo tyto úlohy vyřešit, přičemž k dispozici měli nejen zadání, ale i teoretický doplněk ke každé úloze. Tento doplněk sloužil k připomenutí teoretických základů a poskytl potřebné informace k úspěšnému vyřešení úloh. Cílem bylo zjistit, jak studenti dokážou aplikovat teoretické poznatky z matematické analýzy na konkrétní fyzikální problémy a jaký mají přístup k řešení těchto úloh.

Je důležité poznamenat, že se jednalo o koncepty úloh, u nichž se některé mohly jevit jako špatně konstruované. Ne každý student má blízko k fyzice a některé úlohy mohly představovat větší výzvu právě kvůli fyzikálnímu kontextu. Přesto je klíčové, aby studenti pochopili, jak matematická analýza přesahuje do jiných oborů a jak může být aplikována na reálné problémy.

Pomocí následného dotazníku, který si představíme v další části této práce, jsem chtěl zjistit, zda studentům tyto úlohy přijdou vhodné pro výuku matematické analýzy a co jim při řešení těchto úloh chybělo, aby byly účelné a pochopitelné. Tento zpětnovazební proces měl za cíl identifikovat slabá místa v konstrukci úloh, získat cenné podněty pro jejich případné vylepšení a zároveň zdůraznit význam aplikace matematických konceptů v různých vědních disciplínách.

Na následujících stranách je uvedena ukázka úloh, které studenti obdrželi a následně jejich řešení. Tyto úlohy zahrnují dvě zaměřené na diferenciální počet a dvě na integrální počet, každá doplněná o teoretický přehled nezbytný k jejich vyřešení. Poté si představíme a vysvětlíme, proč byly zvoleny právě tyto úlohy a jaký byl jejich specifický účel. Cílem je ukázat, jakým způsobem měly úlohy přispět k rozvoji schopnosti studentů aplikovat matematickou analýzu v kontextu fyzikálních problémů, a také identifikovat klíčové dovednosti a znalosti, které jsou pro úspěšné řešení těchto úloh nezbytné.

VYUŽITÍ INTEGRÁLNÍHO POČTU VE FYZICE

Úloha 1.

Zadání: Uvažujme hmotný bod pohybující se přímočaře se zrychlením $a = 3{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Určete rovnici rychlosti a dráhy. V čase $t = 0$ s byla počáteční rychlost $v_O = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a počáteční dráha $s_O = 0\ \mathrm{m}$. Vypočtěte rychlost a dráhu v čase $t = 3\ \mathrm{s}$.

Teoretický doplněk: Z diferenciálního počtu víme, že derivace dráhy podle času je okamžitá rychlost a derivace rychlosti podle času je okamžité zrychlení.

Úloha 2.

Zadání: Ve válcové nádobě s plochou dna $S = 0{,}035\ \mathrm{m^2}$ je nalita voda do výšky $h = 0{,}25\ \mathrm{m}$. Voda vytéká otvorem na dně nádoby o obsahu $s = 0{,}0003\ \mathrm{m^2}$. Za jakou dobu vyteče z nádoby všechna voda? Výtokový součinitel je $\mu = 0{,}6$.

Teoretický doplněk: Pro výtokovou rychlost můžeme použít vztah

$$v = \mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h},$$

kde μ je výtokový součinitel, g je tíhové zrychlení ($g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$) a h je vzdálenost, kterou urazí během výtoku hladina vody.

Pro výpočet času, za který vyteče voda z nádrže použijeme vztah

$$t = \int_0^h \frac{S}{v}\,\mathrm{d}x.$$

Je třeba si uvědomit, které hodnoty jsou neměnné – konstantní a které se nám v průběhu času mění.

VYUŽITÍ DIFERENCIÁLNÍHO POČTU VE FYZICE

Úloha 3.

Zadání: Z výšky $h_0 = 10\ \mathrm{m}$ je vyhozen kámen kolmo vzhůru s počáteční rychlostí $v_0 = 25\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Jakou rychlost bude mít kámen v čase $t = 2\ \mathrm{s}$? Jaké maximální výšky dosáhne a za jaký čas? Uvažujme $g = 10\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.

Teoretický doplněk: Pro výpočet využijeme vztah pro výpočet okamžité výšky *h* tělesa během svislého vrhu

$$h = h_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2,$$

kde *h* je okamžitá výška tělesa v čase t, h_0 počáteční výška tělesa a g je gravitační zrychlení. Musíme si uvědomit, že vztah pro výpočet okamžité výšky je předpisem pro dráhu tělesa, tudíž jeho první derivací podle času bude okamžitá rychlost tělesa v čase t.

Úloha 4.

Zadání: Pro dráhu harmonického pohybu platí $y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$. Odvoďte vztah pro výpočet okamžité rychlosti, okamžitého zrychlení a vypočtěte jejich hodnoty v čase $t = 3\ \mathrm{s}$, jestliže $y_m = 0{,}15\ \mathrm{m}$, $\omega = \frac{3\pi}{2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ a $\varphi_0 = 0\ \mathrm{m}$ (tj. těleso se v čase $t = 0\ \mathrm{s}$ nachází v rovnovážné poloze).

Teoretický doplněk: Harmonický pohyb koná zpravidla harmonický oscilátor. Jde o těleso, které harmonicky kmitá kolem své rovnovážné polohy a jeho závislost výchylky, okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení na čase je dána harmonickou funkcí sinus, nebo cosinus.

Závislost okamžité výchylky y (tj. polohy) na čase t je dána vztahem

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_0),$$

kde y_m je absolutní hodnota maximální výchylky, tj. amplituda, parametr ω značí úhlovou frekvenci a φ_0 počáteční fázi kmitavého pohybu tělesa v čase $t = 0$.

ŘEŠENÍ:

1.)

$$v = \int a\,dt = at = 3{,}4 \cdot 3 = 10{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$s = \int v\,dt = \int at\,dt = a\frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}4 \cdot 3^2 = 15{,}3\ \mathrm{m}$$

2.)

$$t = \int_0^h \frac{S}{v}\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{S}{\mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot x}}\mathrm{d}x = \frac{S}{\mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g}}\int_0^h \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{S}{\mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g}}\int_0^h x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{S}{\mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \left[2\sqrt{x}\right]_0^h = \frac{S}{\mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \left[2\sqrt{h} - 0\right] = \frac{S \cdot 2\sqrt{h}}{\mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g}} =$$
$$= \frac{0{,}035 \cdot 2\sqrt{0{,}25}}{0{,}6 \cdot 0{,}0003 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}} = \mathbf{43{,}9\ s}$$

3.)

$$v = v_0 - gt$$

$$v = 25 - 10 \cdot 2 = \mathbf{5\ m \cdot s^{-1}}$$

$$v = v_0 - gt$$

$$0 = 25 - 10t$$

$$\boldsymbol{t = 2{,}5\ s}$$

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$h = 10 + 25 \cdot 2{,}5 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2{,}5^2$$

$$\boldsymbol{h = 41{,}25\ m}$$

4.)

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\boldsymbol{y(3) = 0,15\ m}$$

$$g'(t) = \omega$$

$$f'(g(t)) = y_m \cos(g(t))$$

$$v(t) = g'(t) \cdot f'(g(t)) = \boldsymbol{\omega \cdot y_m \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\boldsymbol{v(3) = 0\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}}$$

$$g'(t) = \omega$$

$$f'(g(t)) = -\omega \cdot y_m \sin(g(t))$$

$$a(t) = g'(t) \cdot f'(g(t)) = \boldsymbol{-\omega^2 \cdot y_m \sin(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\boldsymbol{a(3) = -3,331\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}}$$

Nyní si představíme jednotlivé čtyři úlohy a ke každé z nich si uvedeme, proč jsme je začlenili do testových úloh a co bylo jejich záměrem z hlediska výuky matematické analýzy.

Úloha č.1

Tato úloha je zaměřena na aplikaci integrace jakožto operace inverzní k derivování, což umožňuje určování funkcí z jejich derivací. Studenti mají integrovat zrychlení, aby určili rychlost, a následně integrovat rychlost, aby určili dráhu. Tímto způsobem úloha ukazuje, jak zrychlení, rychlost a dráha spolu souvisejí a jak se pomocí integrálního počtu mohou odvodit z jedné veličiny další veličiny popisující pohyb hmotného bodu. Úloha tak zdůrazňuje praktický význam integrace v kontextu fyzikálních jevů.

Úloha č.2

Jako další jsme zvolili úlohu na aplikaci integrace při určování doby, za kterou vyteče voda z nádoby. Studenti mají použít integrální počet k určení času potřebného k úplnému vyprázdnění nádoby, přičemž musí zohlednit proměnlivou výšku hladiny vody. Naschvál jsem uvedl člen $\mathrm{d}x$ a zdůraznil jsem, že si musí uvědomit, co je proměnlivá veličina v tomto případě a co jsou neměnné konstanty. Úloha ilustruje, jak integrace umožňuje řešit problémy, kde se mění hodnoty v čase, konkrétně v případě hydrodynamiky.

Úloha č.3

Zde jsme se zaměřili na aplikaci derivací při řešení problémů mechaniky, konkrétně při určování okamžité rychlosti a výšky tělesa. Studenti mají použít derivaci dráhové funkce $h(t)$, aby našli rychlost $v(t)$. Derivace dráhy podle času dává okamžitou rychlost, což ilustruje praktický význam derivace ve fyzice. Kromě toho úloha zahrnuje nalezení maximální výšky tělesa, což vyžaduje analýzu kritických bodů funkce. Úloha tak zdůrazňuje, jak derivace umožňují řešit a určovat klíčové veličiny pohybu, jako jsou rychlost a výška.

Úloha č.4

Úloha je zaměřena na aplikaci derivací při řešení problémů harmonického pohybu. Studenti mají použít první derivaci funkce polohy $y(t)$, aby odvodili okamžitou rychlost $v(t)$, a druhou derivaci této funkce pro výpočet okamžitého zrychlení $a(t)$. Vzhledem k tomu, že se jedná o derivaci složené funkce, přidáváme úloze na složitosti a ukazujeme důležitost pochopení derivací složených funkcí ve fyzice. Úloha tak opět ilustruje praktický význam derivací ve fyzice, kde první derivace polohy podle času dává rychlost a druhá derivace dává zrychlení. Ukazuje také, jak se harmonické funkce sinus a kosinus používají k popisu kmitavého pohybu, zdůrazňující důležitost derivací v analýze dynamických systémů.

4.4 Dotazníkové šetření

Jak jsme již zmiňovali, ke čtyřem předloženým úlohám jsme doplnili dotazník, ve kterém měli studenti ohodnotit několik aspektů spojených s jejich řešením. Zároveň nás zajímal názor studentů na formu učení pomocí mezipředmětových vztahů a propojování matematických konceptů s praktickými úlohami. Hlavním cílem dotazníku bylo získat zpětnou vazbu na následující oblasti:

1. **Náročnost příkladů**

Studenti měli na stupnici od 1 (velmi snadné) do 5 (velmi obtížné) ohodnotit náročnost každého z poskytnutých příkladů v rámci testovací části. Toto hodnocení nám mělo pomoci zjistit, jak obtížné se úlohy zdály být jednotlivým studentům. Samozřejmě na hodnocení náročnosti a celkové úspěšnosti řešení se podílí skutečnost, zda mají studenti obor matematiky v kombinaci s fyzikou, zda mají učitelství matematiky jako maior nebo minor atd. Toto zkoumání ovšem nebylo naším cílem, protože se vždycky setkáváme se třídou, kde je směs různých kombinací s matematikou. Naším záměrem bylo získat obecný přehled o vnímané obtížnosti úloh napříč celým spektrem studentů.

2. **Počet praktických příkladů**

Studenti byli dotázáni, zda by chtěli mít k dispozici více praktických příkladů v rámci této problematiky. Tato otázka nám pomohla zjistit, do jaké míry jsou studenti motivováni a ochotni se více setkávat s praktickými příklady během svého studia.

3. **Hodnocení použití praktických příkladů**

Studenti měli ohodnotit použití praktických příkladů jako formy učení v rámci studia infinitezimálního počtu. Zajímalo nás, jak vhodné studentům připadá začlenění praktických příkladů do výuky, protože různí studenti mohou mít odlišné preference a potřeby. Někteří studenti mohou lépe chápat a aplikovat teoretické koncepty matematické analýzy, když vidí jejich praktické použití v konkrétních úlohách. Pro takové studenty mohou být praktické příklady nezbytné k hlubšímu porozumění látky a propojení teorie s reálnými aplikacemi.

Na druhou stranu, někteří studenti mohou považovat praktické příklady za matoucí, pokud jim například chybí pevné základy teoretických znalostí, nebo pokud dávají přednost abstraktnějšímu, čistě matematickému přístupu k učení. Získání zpětné vazby na tento aspekt nám umožní lépe porozumět, jaký dopad mají praktické příklady na různé typy studentů a jak efektivně je využít při výuce infinitezimálního počtu.

4. Další poznámky, návrhy nebo komentáře

Studenti měli prostor pro sdílení dalších poznámek, návrhů nebo komentářů týkajících se praktických příkladů nebo této testovací části. Tato část dotazníku nám poskytla cenné informace a zpětnou vazbu přímo od studentů, což nám umožní lépe přizpůsobit obsah a formu výuky jejich potřebám a preferencím.

Na další straně si představíme použitý dotazník v podobě, ve které byl předložen studentům.

DOTAZNÍK

1. **Na stupnici od 1 (velmi snadné) do 5 (velmi obtížné), jak byste ohodnotili náročnost příkladů poskytnutých v rámci této testovací části?**

Příklad č.1:	1	2	3	4	5
Příklad č.2:	1	2	3	4	5
Příklad č.3:	1	2	3	4	5
Příklad č.4:	1	2	3	4	5

2. **Myslíte, že byste měli mít k dispozici více praktických příkladů v rámci této problematiky?**

   - Ano
   - Ne

3. **Jak hodnotíte použití praktických příkladů jako formy učení v rámci studia infinitezimálního počtu?**

   - Velmi vhodná forma učení
   - Vhodná forma učení
   - Neutrální
   - Méně vhodná forma učení
   - Zcela nevhodná forma učení

4. **Máte-li nějaké další poznámky, návrhy nebo komentáře týkající se praktických příkladů nebo této testovací části, prosím, sdílejte je zde.**

5 Vyhodnocení testových úloh a dotazníků

Vyhodnocení testových úloh a dotazníků je klíčovou součástí našeho výzkumu, jehož cílem je získat přesný a komplexní přehled o znalostech a dovednostech studentů. Zaměříme se nejprve na hodnocení jednotlivých ze čtyř úloh, které byly součástí našeho testu. Každá úloha je posuzována na základě předem stanovených kritérií, která zohledňují jak správnost odpovědí, tak i postup. Testování a dotazníkového šetření se zúčastnilo **32 studentů** 2. ročníku Pedagogické fakulty Univerzity Palackého bakalářského studia učitelství matematiky pro základní školy.

Kromě hodnocení testových úloh věnujeme také značnou pozornost vyhodnocení dotazníků, které poskytují cennou zpětnou vazbu od studentů. Tyto dotazníky jsou navrženy tak, aby shromažďovaly informace o subjektivních pocitech studentů vůči obtížnosti jednotlivých úloh a přínosnosti. Analýza těchto dat nám umožňuje lépe porozumět tomu, jak studenti vnímají své vlastní schopnosti a jaké mají preference a potřeby ve výuce. Sběr těchto informací je zásadní pro úpravu výukových metod a materiálů tak, aby lépe odpovídaly potřebám studentů.

Dalším významným aspektem našeho výzkumu jsou komentáře, které nám studenti poskytli. Tyto komentáře nabízejí hlubší vhled do jejich potřeb a často obsahují konkrétní návrhy na zlepšení úloh a výuky obecně. Na základě těchto zpětných vazeb modifikujeme naše úlohy a přizpůsobíme je tak, aby lépe vyhovovaly potřebám studentů. Například, pokud studenti opakovaně poukazují na určitou úlohu jako příliš obtížnou nebo nejasnou, přehodnotíme její konstrukci a případně ji upravíme.

Kromě toho, na základě požadavků studentů, následně vytvoříme několik nových úloh, které lépe reflektují jejich zájmy a potřeby. Tyto nové úlohy budou navrženy tak, aby nejen testovaly znalosti, ale také podporovaly kritické myšlení a kreativitu.

Při tvorbě nových úloh je třeba dbát na to, aby byly formulovány s ohledem na to, že ne všichni studenti mají hluboké znalosti fyzikálních konceptů a principů. To znamená, že úlohy by měly být sestaveny tak, aby byly pochopitelné a řešitelné čistě na základě matematických znalostí a se základními znalostmi z oboru fyziky.

Zároveň nám to umožní vylepšení teoretických doplňků pro poskytnutí úvodních fyzikálních konceptů nebo jejich stručné vysvětlení v rámci úloh pro lepší porozumění a aplikaci matematických principů v různých kontextech. Tímto způsobem můžeme zajistit, že hodnocení bude spravedlivé a reflektující skutečné matematické dovednosti studentů, aniž by bylo negativně ovlivněno jejich potenciálním nedostatkem znalostí ve fyzice.

Je také důležité zdůraznit, že testové úlohy a dotazníky posuzujeme odděleně. Při našem výzkumu jsme test s úlohami nepřiřadili přímo k dotazníku, což znamená, že jsme nehledali přímou spojitost mezi úspěšností řešení úloh a postoji studentů k těmto úlohám. Tento přístup nám umožňuje analyzovat každý prvek samostatně a získat čistý pohled na matematické schopnosti studentů a jejich názory bez vzájemného ovlivňování.

Jelikož mám vzdělání jak v matematice, tak ve fyzice, mohu mít zkreslený pohled na náročnost úloh. Přirozeně bych mohl předpokládat, že určité koncepty jsou studentům jasné, i když tomu tak nemusí být. Právě proto jsou pro mě komentáře a zpětná vazba od studentů nesmírně důležité. Pomáhají mi eliminovat tento potenciální zkreslený pohled a zajistit, že úlohy budou lépe odpovídat skutečným schopnostem a potřebám studentů.

Tímto způsobem se snažíme vytvořit výukový materiál, které podporuje všechny studenty v jejich vzdělávacím procesu. Analýza zpětné vazby a následná úprava úloh jsou klíčové kroky, které nám umožní úlohy přizpůsobit tak, aby byly co nejvíce efektivní a přínosné pro všechny studenty.

5.1 Vyhodnocení testových úloh

Při hodnocení testových úloh jsme zvolili dvoubodový systém, který nám umožňuje efektivně a spravedlivě posoudit znalosti a dovednosti studentů. Tento systém je navržen tak, aby reflektoval jak pochopení fyzikálních konceptů, tak i schopnost aplikovat matematické metody, konkrétně derivace a integrace, při řešení fyzikálních úloh. Studenti věděli, zda v konkrétní úloze použít derivaci nebo integraci, a byli vybaveni nezbytnou fyzikální teorií, aby mohli své matematické znalosti úspěšně aplikovat.

Systém hodnocení úloh:

Každá úloha byla hodnocena na základě dvou klíčových aspektů, z nichž každý mohl studentovi přinést maximálně jeden bod:

1. **Bod za pochopení fyzikálního příkladu a aplikaci infinitezimálního počtu:**

Tento bod získali studenti, pokud správně pochopili fyzikální kontext úlohy a věděli, co derivace nebo integrace představuje v daném případě. Tento aspekt hodnocení reflektuje jejich schopnost propojit fyzikální teorii s matematickými nástroji, což je zásadní pro správné uchopení a řešení úlohy.

Příklad: Pokud úloha zahrnovala výpočet rychlosti z dráhy pomocí derivace, student musel rozpoznat, že derivace dráhy podle času představuje rychlost.

2. **Bod za úplné a správné řešení úlohy:**

Tento bod byl udělen pouze tehdy, pokud student získal první bod za pochopení fyzikálního příkladu. Získání tohoto bodu znamená, že student nejen správně pochopil úlohu, ale také úspěšně aplikoval matematické metody a dospěl ke správnému výsledku.

Příklad: Po identifikaci, že je třeba použít derivaci, musel student správně provést všechny výpočty a dojít k správnému výsledku rychlosti.

Příklady hodnocení:

- **Student A**

Pochopil fyzikální kontext úlohy a věděl, že je třeba použít derivaci (1 bod).
Úplně a správně vyřešil úlohu, včetně všech výpočtů (1 bod).
Celkové hodnocení: 2 body.

- **Student B**

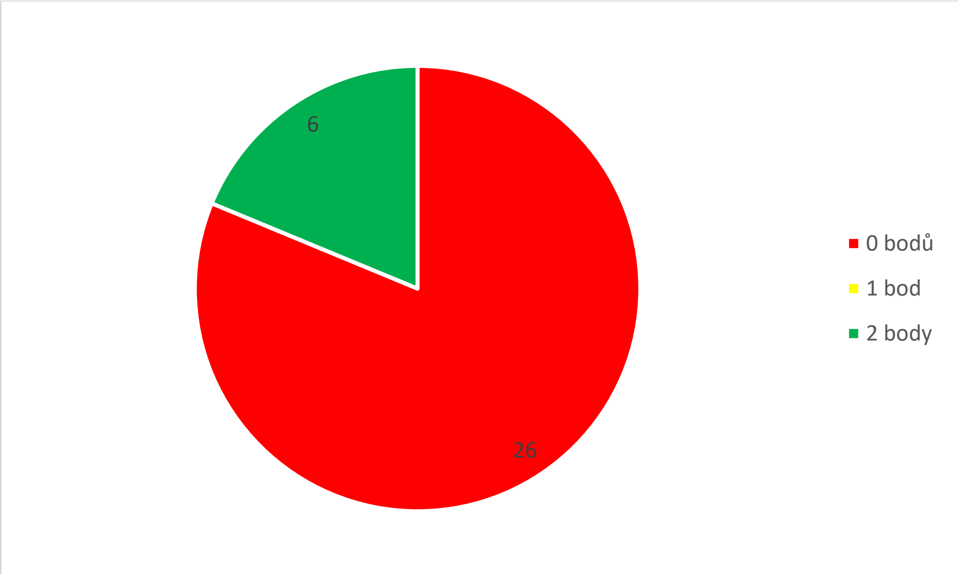
Pochopil fyzikální kontext úlohy a věděl, že je třeba použít derivaci (1 bod).
Udělal chybu ve výpočtech a nedospěl ke správnému výsledku (0 bodů za úplné řešení).
Celkové hodnocení: 1 bod.

- **Student C**

Neidentifikoval správně fyzikální kontext úlohy, a tedy nesprávně uchopil problém (0 bodů).
Bez správného pochopení nemohl získat druhý bod za řešení.
Celkové hodnocení: 0 bodů.

Na následujících stránkách představíme úspěšnost řešení studentů, včetně grafického zpracování. Počty získaných bodů budou jasně odrážet, jak si studenti vedli podle námi nastavených kritérií. Každý bod bude ukazovat, zda studenti správně pochopili fyzikální kontext úlohy a aplikovali příslušné matematické metody, jako je derivace a integrace, a také zda dospěli k úplnému a správnému řešení. Ve zvoleném hodnotícím systému bude podle počtu bodů zřejmé, do jaké fáze příklad dokázali vyřešit, což nám umožní detailně zhodnotit jejich schopnosti a znalosti v daných úlohách.

Příklad č.1: Pohyb hmotného bodu – integrální počet



Obrázek 6: Vyhodnocení úspěšnosti řešení úlohy č.1.

- **0 bodů - 26 studentů:**

Většina studentů (26 z 32) nebyla schopna správně pochopit fyzikální kontext úlohy, což naznačuje, že úloha mohla být pro ně příliš obtížná nebo že chybí potřebné základy.

- **1 bod - 0 studentů:**

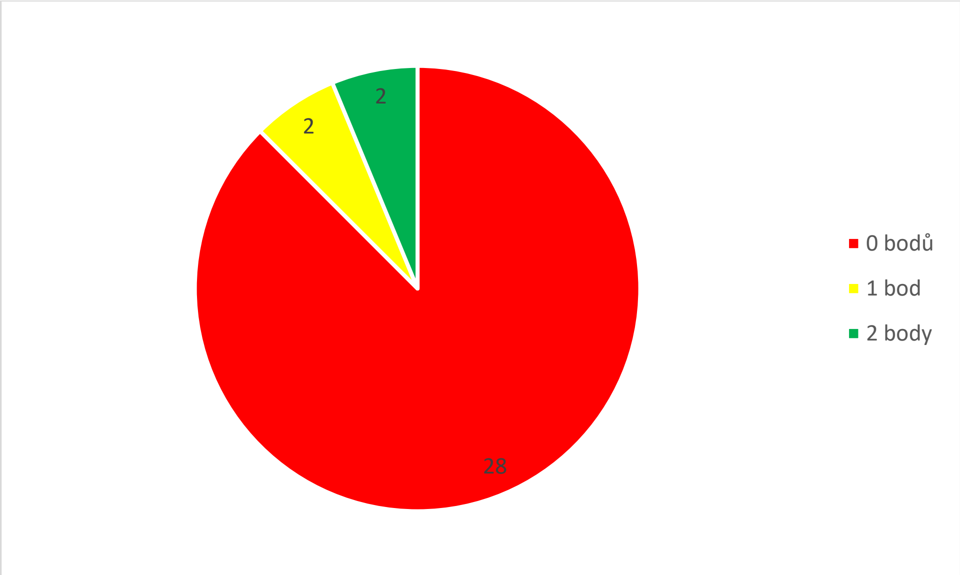
Žádný student nedosáhl pouze jednoho bodu, což ukazuje, že ti, kdo pochopili úlohu, ji také dokázali správně vyřešit.

- **2 body - 6 studentů:**

Pouze 6 studentů získalo plný počet bodů, což znamená, že tito studenti nejen pochopili úlohu, ale také správně provedli všechny výpočty.

Komentář: Tento příklad byl pro většinu studentů obtížný, což může ukazovat na potřebu lepšího vysvětlení základních fyzikálních principů a jejich aplikace v kontextu infinitezimálního počtu.

Příklad č.2: Vytékání vody z nádoby – integrální počet



Obrázek 7: Vyhodnocení úspěšnosti řešení úlohy č.2.

- **0 bodů - 28 studentů:**

Většina studentů opět nedokázala správně identifikovat fyzikální kontext úlohy.

- **1 bod - 2 studenti:**

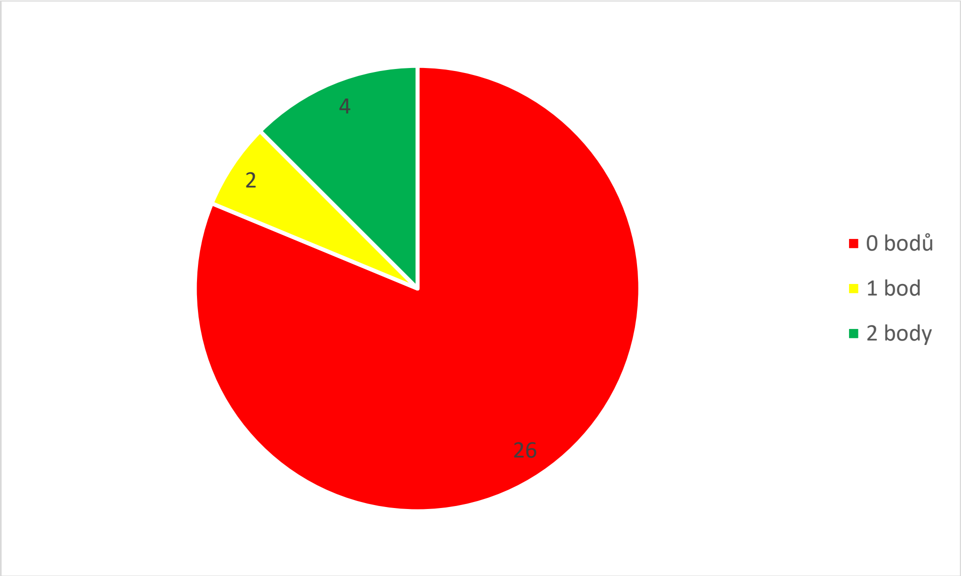
Dva studenti pochopili úlohu, ale udělali chybu ve výpočtech.

- **2 body - 2 studenti:**

Dva studenti úlohu úspěšně vyřešili.

Komentář: Tento příklad byl také velmi náročný, což naznačuje, že je třeba více procvičování a lepší vysvětlení teoretických základů. Malý počet studentů dosáhl částečného nebo úplného úspěchu, což může znamenat, že úloha byla příliš složitá nebo nedostatečně vysvětlena.

Příklad č.3: Pohyb tělesa ve svislém vrhu – diferenciální počet



Obrázek 8: Vyhodnocení úspěšnosti řešení úlohy č.3.

- **0 bodů - 26 studentů:**

Stejně jako u předchozích příkladů většina studentů nepochopila fyzikální kontext.

- **1 bod - 2 studenti:**

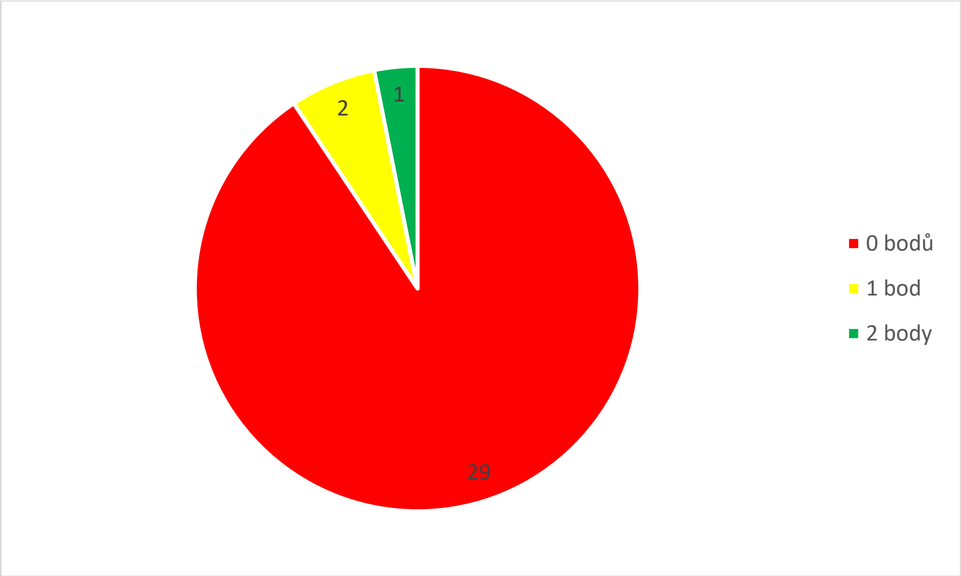
Dva studenti pochopili úlohu, ale udělali chybu ve výpočtech.

- **2 body - 4 studenti:**

Čtyři studenti úlohu úspěšně vyřešili.

Komentář: Podobný trend jako u předchozích úloh. Většina studentů nepochopila základní koncepty, což ukazuje na potřebu zlepšení v oblasti základního výkladu fyzikálních a matematických pojmů.

Příklad č.4: Rychlost a zrychlení harmonického pohybu – diferenciální počet



Obrázek 9: Vyhodnocení úspěšnosti řešení úlohy č.4.

- **0 bodů - 29 studentů:**

Tento příklad byl nejvíce problematický, protože 29 z 32 studentů nezískalo ani jeden bod.

- **1 bod - 2 studenti:**

Dva studenti pochopili úlohu, ale udělali chybu ve výpočtech.

- **2 body - 1 student:**

Pouze jeden student úlohu úspěšně vyřešil.

Komentář: Tento příklad byl pro studenty extrémně náročný. Velmi nízká úspěšnost naznačuje, že úloha byla buď příliš složitá, nebo že studentům chyběly potřebné základy k jejímu pochopení.

Celkové zhodnocení

Z výsledků je zřejmé, že většina studentů měla značné potíže s pochopením fyzikálních příkladů a jejich správným vyřešením. Získání 1-2 bodů bylo spíše výjimečné, což naznačuje několik klíčových potřeb:

- **Lepší vysvětlení základních fyzikálních a matematických konceptů:**

V případě propojování matematické analýzy s fyzikálními příklady je nezbytné nejprve poskytnout více teorie a základních příkladů před přechodem na složitější úlohy.

- **Vizualizace a praktické ukázky:**

Grafické znázornění může studentům pomoci lépe pochopit zadání a souvislosti mezi fyzikou a matematikou.

- **Více procvičování:**

Studenti potřebují více příležitostí k procvičování, aby si mohli upevnit znalosti a zlepšit své dovednosti v řešení úloh.

- **Jednodušší úvodní příklady:**

Místo začínání s náročnými aplikacemi je vhodné začít s jednoduššími příklady, které postupně přivedou studenty k hlubšímu pochopení problematiky infinitezimálního počtu a jeho aplikace ve fyzice.

Na základě následných odpovědí z dotazníků a komentářů studentů se pokusíme vybrat příklady, které by bylo vhodné přepracovat, případně k nim vytvořit výukové materiály. Pokusíme se vytvořit materiály, které by se zaměřovaly na základní příklady popisující danou problematiku a zároveň poskytovaly hlubší pohled do problematiky infinitezimálního počtu. Tento přístup zajistí, že studenti získají potřebné základy a budou lépe připraveni na složitější aplikace v budoucnosti.

5.2 Vyhodnocení dotazníků

Výsledky našeho dotazníku budeme zpracovávat následovně:

Hodnocení náročnosti příkladů:

Pro každý příklad (příklad č. 1 až příklad č. 4) shromáždíme hodnocení na stupnici od 1 (velmi snadné) do 5 (velmi obtížné). Výsledky budeme analyzovat pomocí průměrného hodnocení pro každý příklad, abychom zjistili, jak obtížné se studentům zdály jednotlivé příklady. Tyto výsledky graficky znázorníme, abychom měli jasný přehled o rozložení obtížnosti příkladů.

Potřeba více praktických příkladů:

Odpovědi na otázku, zda by studenti měli mít k dispozici více praktických příkladů, budeme analyzovat procentuálně. Zjistíme, kolik studentů odpovědělo „Ano“ a kolik „Ne“. Tyto údaje nám pomohou pochopit, zda je potřeba zvýšit počet praktických příkladů v rámci této problematiky.

Hodnocení vhodnosti použití praktických příkladů jako formy učení:

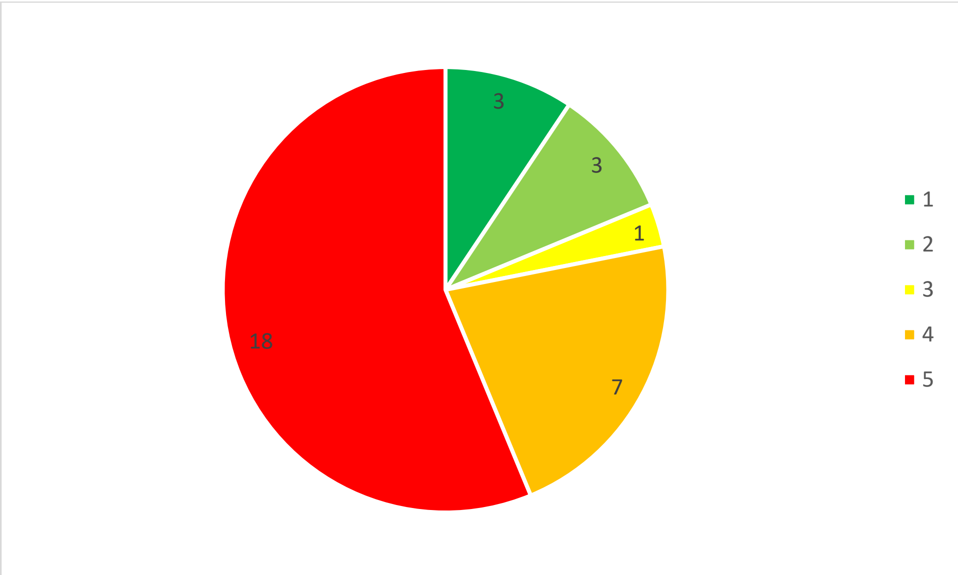
Odpovědi na otázku ohledně vhodnosti použití praktických příkladů pro učení infinitezimálního počtu budeme opět analyzovat procentuálně. Rozdělíme odpovědi do kategorií (velmi vhodná forma učení, vhodná forma učení, neutrální, méně vhodná forma učení, zcela nevhodná forma učení) a zjistíme, jaký názor mají studenti na tento způsob výuky. Výsledky rovněž graficky znázorníme, aby byl jasně viditelný celkový názor studentů.

Na základě těchto výsledků budeme schopni lépe porozumět názorům studentů na náročnost příkladů, potřebu více praktických příkladů a jejich pohled na použití praktických příkladů jako formy učení.

Dále, v dotazníku byla zahrnuta otázka č. 4, ve které jsme se zaměřili na slovní hodnocení testových úloh, popřípadě námětů na vylepšení. Jak jsme již zmínili, této otázce věnujeme samostatnou podkapitolu, která nám poskytne velmi přesný pohled na individuální požadavky studentů. Budeme analyzovat všechny dodatečné poznámky, návrhy a komentáře, abychom lépe porozuměli specifickým potřebám a návrhům studentů. Tyto informace nám pomohou při dalším zlepšování výuky a přizpůsobení studijních materiálů konkrétním požadavkům.

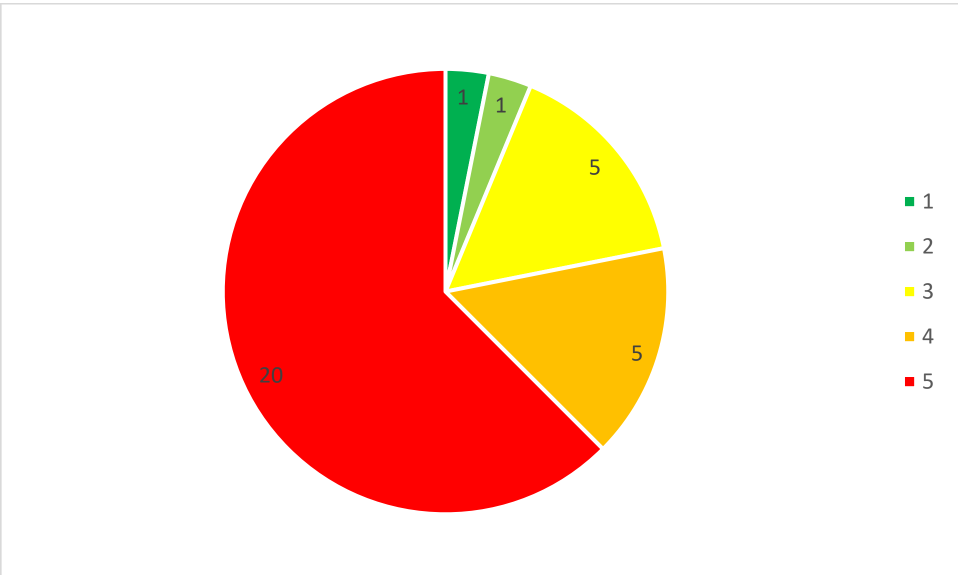
5.2.1 Hodnocení náročnosti příkladů

Příklad č.1: Pohyb hmotného bodu – integrální počet



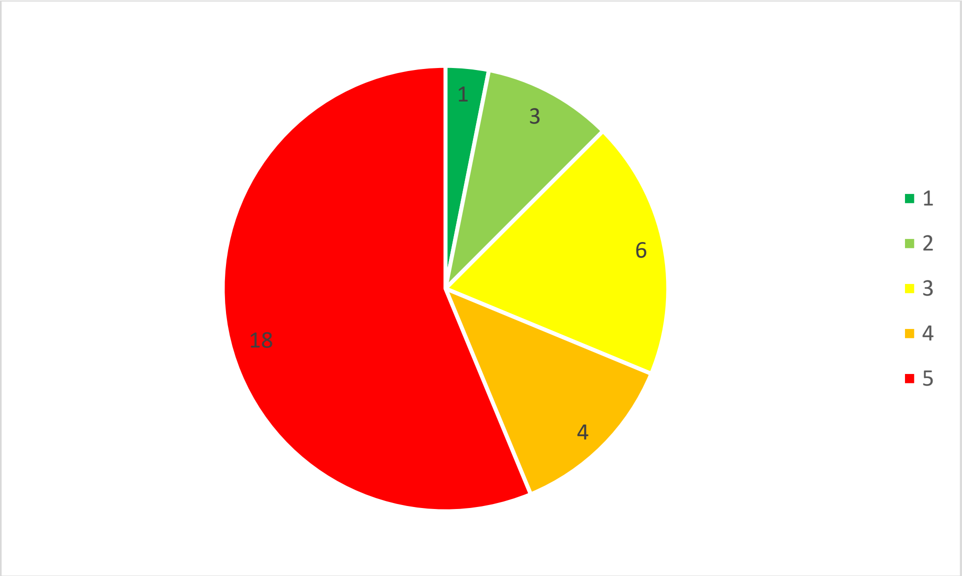
Obrázek 10: Hodnocení náročnosti úlohy č.1.

Příklad č.2: Vytékání vody z nádoby – integrální počet



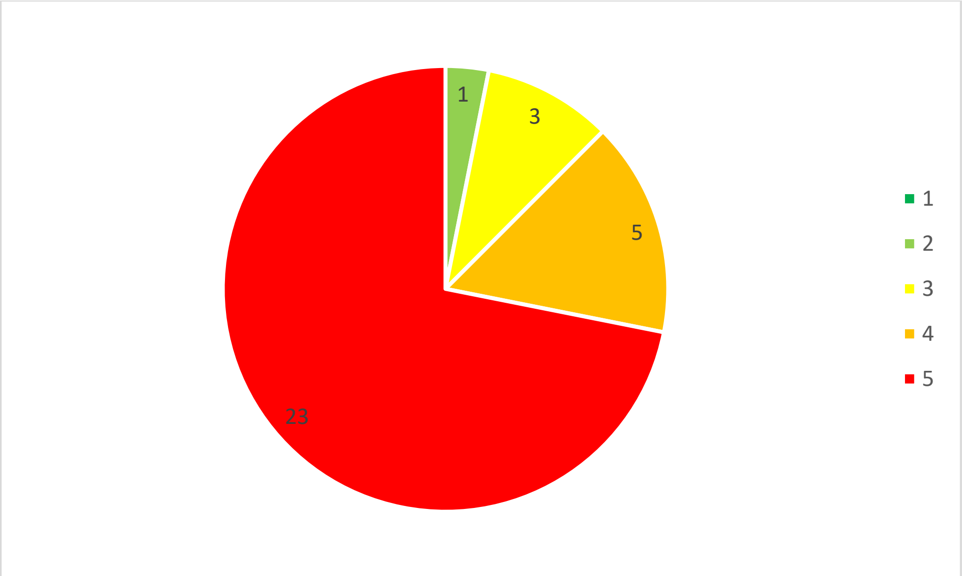
Obrázek 11: Hodnocení náročnosti úlohy č.2.

Příklad č.3: Pohyb tělesa ve svislém vrhu – diferenciální počet



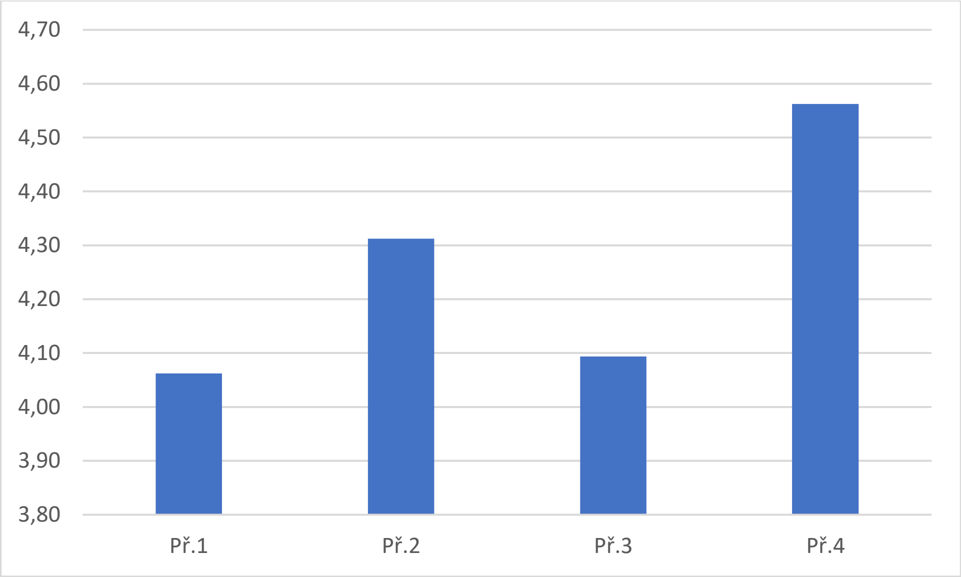
Obrázek 12: Hodnocení náročnosti úlohy č.3.

Příklad č.4: Rychlost a zrychlení harmonického pohybu – diferenciální počet



Obrázek 13: Hodnocení náročnosti úlohy č.4.

Srovnání náročnosti a komentář:



Obrázek 14: Srovnání průměrného hodnocení náročnosti úloh.

Na základě výsledků dotazníků, kde studenti hodnotili náročnost jednotlivých úloh na stupnici od 1 (velmi snadné) do 5 (velmi obtížné), lze učinit následující závěry:

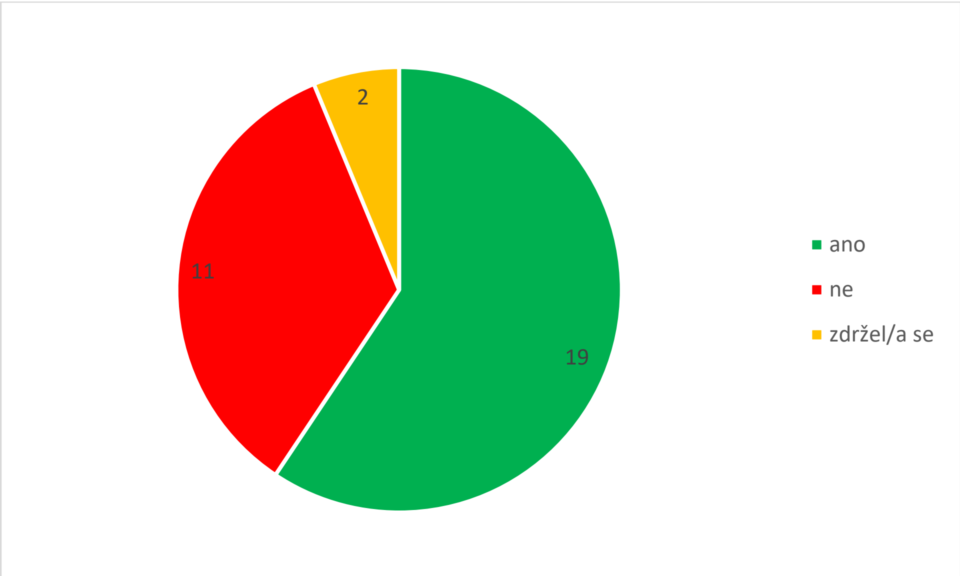
Příklad č. 1: Průměrné hodnocení 4,06
Příklad č. 2: Průměrné hodnocení 4,31
Příklad č. 3: Průměrné hodnocení 4,09
Příklad č. 4: Průměrné hodnocení 4,56

Z výsledků je patrné, že úloha č. 4 byla studenty hodnocena jako nejobtížnější s průměrným skóre 4,56. Naopak, úloha č. 1 byla hodnocena jako nejméně obtížná, ale i tak s vysokým průměrným skóre 4,06.

Celkově lze říci, že výsledky hodnocení náročnosti úloh nejsou příznivé. Vzhledem k tomu, že průměrné skóre všech úloh je velmi vysoké, je zřejmé, že studenti vnímali všechny úlohy jako obtížné. Tento výsledek naznačuje potřebu přehodnotit a případně upravit testové úlohy.

5.2.2 Hodnocení zájmu

Naším úkolem při vyhodnocení této otázky je zjistit zájem studentů o danou problematiku, konkrétně se zaměříme na to, zda studenti cítí potřebu mít k dispozici více praktických příkladů využívajících infinitezimální počet v úlohách s fyzikální tématikou. Výsledky nám umožní posoudit, jestli je současná úroveň těchto praktických příkladů dostatečná, nebo zda je třeba ji zvýšit, abychom lépe vyhověli potřebám a očekáváním studentů. Tímto způsobem získáme přehled o tom, jak moc je problematika pro studenty zajímavá a užitečná.



Obrázek 15: Vyhodnocení zájmu studentů o danou problematiku.

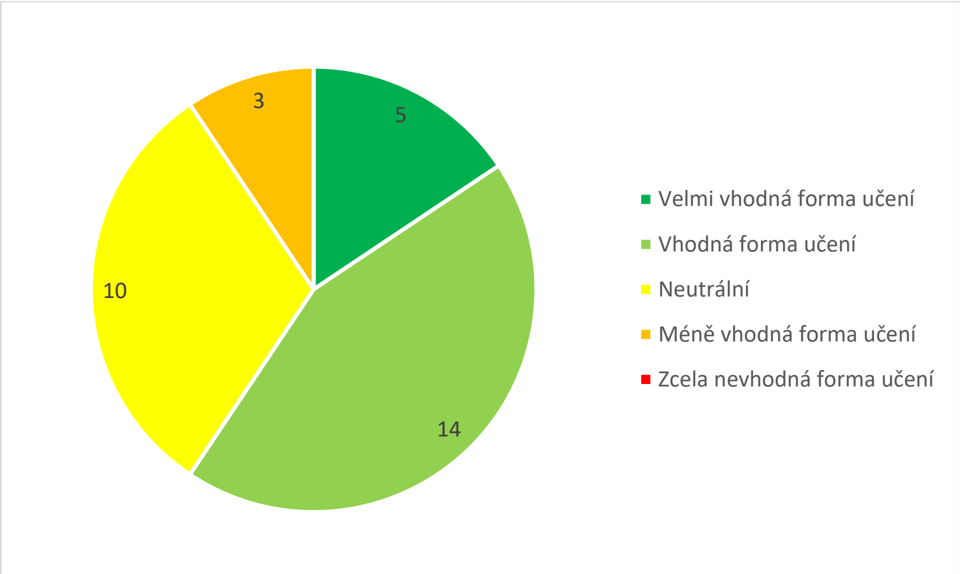
Na základě výsledků dotazníku, který vyplnilo 32 studentů, jsme získali následující odpovědi: 19 studentů odpovědělo "Ano," 11 studentů odpovědělo "Ne," a 2 studenti se zdrželi hlasování.

Z celkového počtu 32 studentů většina, konkrétně 59,4 % (19 studentů), vyjádřila potřebu mít k dispozici více praktických příkladů využívajících infinitezimální počet v úlohách s fyzikální tématikou. Tato skutečnost naznačuje, že pro více než polovinu dotázaných je současná úroveň těchto praktických příkladů nedostatečná. Naopak, 34,4 % (11 studentů) uvedlo, že současná úroveň je pro ně vyhovující, a 6,2 % (2 studenti) se k otázce nevyjádřili.

Vzhledem k těmto výsledkům je zřejmé, že pro zvýšení spokojenosti a efektivity výuky je vhodné zvážit rozšíření počtu praktických příkladů z oblasti infinitezimálního počtu aplikovaného na fyzikální problémy. To by mohlo přispět k lepšímu pochopení a aplikaci teoretických znalostí v praktických situacích, což je pro studenty klíčové.

5.2.3 Hodnocení vhodnosti použití praktických příkladů jako formy učení

Cílem této otázky je zjistit názory studentů na efektivitu využívání praktických příkladů jako formy učení při studiu infinitezimálního počtu. Otázka je navržena tak, aby poskytla podrobnější pohled na to, jak studenti vnímají praktické aplikace teoretických konceptů. Výsledky nám pomohou pochopit, zda studenti považují praktické příklady za přínosné a efektivní, a jakou roli by měly hrát v rámci jejich výuky.



Obrázek 16: Vyhodnocení názorů studentů na vhodnost formy výuky.

Na základě poskytnutých odpovědí jsme získali následující rozdělení názorů na použití praktických příkladů jako formy učení v rámci studia infinitezimálního počtu:

Pozitivní hodnocení: (Velmi vhodná forma + Vhodná forma)

- 5 (Velmi vhodná forma) + 14 (Vhodná forma) = 19
- 19 z 32 studentů hodnotí použití praktických příkladů pozitivně, což představuje 59,4 % respondentů.

Neutrální hodnocení:

- 10 studentů hodnotí tuto formu učení neutrálně, což představuje 31,3 % respondentů.

Negativní hodnocení: (Méně vhodná forma + Zcela nevhodná forma)

- 3 (Méně vhodná forma) + 0 (Zcela nevhodná forma) = 3
- 3 z 32 studentů hodnotí použití praktických příkladů negativně, což představuje 9,3 % respondentů.

Z výsledků dotazníku vyplývá, že z dotazovaných 32 studentů většina (59,4 %) hodnotí použití praktických příkladů jako vhodnou nebo velmi vhodnou formu učení při studiu infinitezimálního počtu. To naznačuje, že praktické příklady jsou obecně považovány za efektivní a přínosnou metodu výuky. Dalších 31,3 % studentů má neutrální postoj, což naznačuje, že i když nejsou zcela přesvědčeni o výhodách této formy učení, nejsou ani proti. Pouze 9,3 % studentů považuje tuto metodu za méně vhodnou.

Na základě těchto výsledků lze doporučit pokračování a případně i rozšíření používání praktických příkladů ve výuce infinitezimálního počtu, s cílem dále zvýšit efektivitu a zájem studentů o tuto problematiku.

5.3 Komentáře studentů

Hodnocení náročnosti příkladů na stupnici od 1 do 5, stejně jako otázky týkající se vhodnosti a množství praktických příkladů, nám poskytují cenné informace o vnímání testových úloh, jakožto podkladu pro výukové materiály. Z odpovědí studentů jsme zjistili, že ačkoli většina úloh byly považovány za náročné, mají studenti zájem o tuto problematiku a většina z nich si přeje více praktických příkladů během výuky. Tento prostor na poznámky slouží k získání detailnější zpětné vazby. Komentáře a návrhy nám umožní lépe pochopit potřeby a očekávání, což nám pomáhá úlohy upravit, vyřadit, doplnit nebo k nim vytvořit krátké výukové texty, a tím zlepšit jejich celkovou kvalitu a užitečnost.

Uvedeme si nyní několik komentářů, které jsou svým obsahem přínosné pro další zlepšení našich výukových materiálů. Zaměříme se tedy na komentáře studentů, které zahrnují specifické požadavky na změny nebo doplnění úloh, nedostatky, které studenti identifikovali jako překážky k úspěšnému řešení úloh, a další klíčové postřehy. Tyto poznámky nám poskytnou hlubší vhled do toho, co je potřeba upravit nebo doplnit, abychom mohli lépe přizpůsobit výukový materiál potřebám studentů a zajistit, že budou co nejsrozumitelnější a nejužitečnější.

Vybrané poznámky/komentáře studentů:

- *Jelikož jsem nestudovala střední školu, kde by se ve větší míře studovala fyzika (byla 2 roky 1x týdně), tak tyto úlohy byly mimo mé schopnosti a dovednosti.*

- *Myslím si, že pokud se při výuce dá použít praktický příklad, měl by se využít, ale když není možné vymyslet příklad, který by byl praktický, tak je lepší ten teoretický. Při složitějším učivu mi vyhovuje spíš teoretický příklad, kde se naučím nějaký určitý postup řešení.*

- *Kdybych studovala fyziku s matematikou, tak by se mi tento styl výuky s praktickými příklady zamlouval. Jelikož fyziku nestuduji, nedokážu rozklíčovat ani zadání.*

- *U některých příkladů by mi přišla fajn vizualizace. Myslím, že to je dobrý nápad na zařazení do učiva. Kdybych měla více prostudovanou teorii a hlavně obsaženou v živé paměti, tak by to pro mě bylo mnohem snadnější na vypočítání.*

- *Až příliš mnoho mimo obor, bez chápání fyzikálních souvislostí se to těžko řeší. Vhodné pro výuku fyziky, ale v matematice by muselo být doplněno o více souvislostí.*

- *Dobrý nápad, ale chybí mi k tomu více teorie a procvičování.*

- *Myslím, že kdybychom dané téma alespoň trochu probrali, vyřešili bychom příklady snadno. Tím, že spousta z nás ani fyziku v posledních (či vůbec) ročnících na střední nemělo, bylo to jako hodit nás do vody a nechat plavat. Chtělo by to trochu vysvětlit.*

- *Fyzika není má silná stránka, ale zadání bylo zajímavé a po probrání látky si myslím zvládnutelné. Pro mě v této situaci to bylo náročné.*

Na základě komentářů studentů můžeme identifikovat několik klíčových oblastí, na které bychom se měli zaměřit při zlepšování výukových materiálů. První oblastí je nedostatek předchozího vzdělání ve fyzice, který mnohým studentům ztěžuje řešení úloh. Tito studenti potřebují základní teoretické vysvětlení a podrobnější kontext, aby mohli efektivně pracovat s danými příklady a my se mohli skutečně zaměřit na praktičnost u příkladů z matematické analýzy. Bez dostatečně jasného kontextu totiž dojde k tomu, že se látka může jevit ještě náročnější než skutečně je, stejně jako u našich testových úloh.

Vizualizace příkladů se rovněž ukazuje jako přínosná pro lepší pochopení zadání a souvislostí. Grafické znázornění může studentům pomoci lépe si představit problém a usnadnit jeho řešení. Kromě toho je potřeba zahrnout více teorie a procvičování, aby studenti mohli látku lépe zvládnout a aplikovat. Opakované cvičení a různé příklady přispívají k upevnění znalostí a mohou zvýšit sebevědomí studentů při řešení úloh.

5.4 Celkové vyhodnocení

Vyhodnocení testových úloh a dotazníků bylo klíčovou součástí našeho výzkumu, jehož cílem bylo získat přesný a komplexní přehled o znalostech a dovednostech studentů. Testování a dotazníkového šetření se zúčastnilo 32 studentů 2. ročníku Pedagogické fakulty Univerzity Palackého bakalářského studia učitelství matematiky pro základní školy. Zaměřili jsme se na hodnocení čtyř úloh, které byly součástí našeho testu, a zároveň jsme věnovali značnou pozornost vyhodnocení dotazníků poskytujících cennou zpětnou vazbu.

Výsledky testových úloh:

Testové úlohy odhalily, že většina studentů měla značné potíže s pochopením fyzikálních příkladů a jejich správným vyřešením. Úlohy byly obecně hodnoceny jako obtížné, což naznačuje potřebu přehodnotit a případně upravit testové úlohy, aby lépe odpovídaly schopnostem a znalostem studentů. Průměrné hodnocení obtížnosti všech úloh bylo velmi vysoké.

Zjištění z dotazníků:

Dotazníky ukázaly, že studenti považovali úlohy za velmi náročné. Většina studentů vyjádřila potřebu mít k dispozici více praktických příkladů využívajících infinitezimální počet. Studenti také pozitivně hodnotili použití praktických příkladů jako efektivní formy učení, přičemž většina respondentů měla pozitivní postoj. Negativní hodnocení této formy učení byla minimální.

Komentáře studentů:

Komentáře studentů poskytly hlubší vhled do jejich potřeb a obsahovaly konkrétní návrhy na zlepšení.

- **Základní teoretické vysvětlení a kontext:** Nedostatečné předchozí vzdělání ve fyzice.
- **Vizualizace příkladů:** Potřeba grafických znázornění a vizuálních pomůcek.
- **Více teorie a procvičování:** Potřeba více příležitostí k procvičování.
- **Jednodušší úvodní příklady:** Začít s jednoduššími příklady a postupně zvyšovat složitost.

Na základě těchto zjištění jsme se rozhodli přepracovat některé příklady a vytvořit výukové materiály, které se zaměřují na základní příklady popisující danou problematiku. Tyto materiály rovněž mohou poskytnout hlubší pohled do problematiky infinitezimálního počtu. Tento přístup zajistí, že studenti získají potřebné základy a budou lépe připraveni na složitější aplikace v budoucnosti.

6 Vytvoření studijního textu s úlohami a teoretickým podkladem

V návaznosti na výsledky našeho výzkumu, který odhalil potřebu lepšího vysvětlení základních fyzikálních a matematických konceptů, jsme se rozhodli vypracovat sadu úloh s teoretickým podkladem. Tyto úlohy budou sloužit jako studijní text, jenž studentům poskytne jasné a srozumitelné vysvětlení fyzikálních principů a jejich aplikaci pomocí infinitezimálního počtu. Tento nový materiál je navržen tak, aby adresoval hlavní problémy a potřeby identifikované ve zpětné vazbě od studentů.

Z výsledků testových úloh a dotazníků vyplynulo, že mnoho studentů nemá dostatečné předchozí znalosti ve fyzice, což jim ztěžuje pochopení a řešení úloh, které propojují fyzikální koncepty s matematickou analýzou. Studenti opakovaně vyjadřovali potřebu jednodušších a více pochopitelných příkladů, které by jim pomohly lépe uchopit základní principy a postupně je aplikovat na složitější problémy. Také bylo zřejmé, že vizualizace je pro studenty velmi přínosná, protože jim umožňují lépe si představit a pochopit řešené úlohy. Nově připravené studijní texty proto budou obsahovat:

Teoretické úvody: Každá sada úloh bude začínat teoretickým úvodem, který srozumitelně vysvětlí základní fyzikální principy relevantní pro dané téma. Tento úvod bude zaměřen na jednoduché a jasné vysvětlení, aby byl přístupný všem studentům bez ohledu na jejich předchozí znalosti fyziky.

Praktické příklady: Po teoretickém úvodu budou následovat praktické příklady, které demonstrují aplikaci těchto principů pomocí infinitezimálního počtu. Každý příklad bude krok za krokem vysvětlen, aby studenti mohli snadno sledovat a pochopit postup řešení.

Vizualizace: Kde to bude možné, budou součástí textů také grafické znázornění a vizuální pomůcky. Tyto prvky mají za cíl usnadnit studentům pochopení a vizualizaci problému, což je klíčové pro úspěšné řešení úloh.

Procvičovací úlohy: Na závěr každé kapitoly budou zařazeny procvičovací úlohy, které umožní studentům aplikovat získané znalosti a procvičit si nově nabyté dovednosti. Tyto úlohy budou mít různé úrovně obtížnosti, aby si studenti mohli postupně zvyšovat své kompetence.

Tento přístup poskytne studentům teoretické základy a praktické dovednosti v jasně strukturovaném materiálu. Cílem je zlepšit jejich schopnost řešit fyzikální úlohy, zvýšit sebevědomí a zájem o problematiku. Doufáme, že nový materiál pomůže lépe pochopit náročné koncepty a podpoří aktivní a kritické myšlení.

6.1 Úloha č.1 Pohyb hmotného bodu – význam derivace a integrace

Teoretický úvod

Pohyb hmotného bodu je jedním z klíčových konceptů v mechanice. V případě přímočarého pohybu se zrychlením, které je konstantní, můžeme využít základní principy infinitezimálního počtu. Derivace a integrace jsou dva základní procesy, které nám umožňují analyzovat pohyb. Derivace funkce udává rychlost změny této funkce, zatímco integrace je proces, který nám umožňuje tuto změnu "nahromadit" zpět. Konkrétně:

- Derivace dráhy podle času nám dává rychlost: $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{ds(t)}}{\boldsymbol{dt}}$
- Derivace rychlosti podle času nám dává zrychlení: $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{dv(t)}}{\boldsymbol{dt}}$
- Integrace zrychlení podle času nám dává rychlost: $\boldsymbol{v} = \int \boldsymbol{a\,dt}$
- Integrace rychlosti podle času nám dává dráhu: $\boldsymbol{s} = \int \boldsymbol{v\,dt}$

Praktický příklad

Představme si hmotný bod, který se pohybuje se zrychlením $a = 3{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$. V čase $t = 0$ s je počáteční rychlost $v_0 = 0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a počáteční dráha $s_0 = 0$ m. Tedy bod se začíná pohybovat z klidového stavu z počáteční polohy.

a) Výpočet rychlosti

Protože zrychlení a je konstantní, můžeme najít rychlost v integrací zrychlení podle času:

$$v(t) = \int a\,dt = \int 3{,}4\,dt = 3{,}4t + C$$

kde C je integrační konstanta. Vzhledem k počáteční podmínce $v(0) = 0$ máme:

$$0 = 3{,}4 \cdot 0 + \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{C} = 0$$

Rovnice rychlosti je tedy:

$$\boldsymbol{v(t) = 3,4t}$$

b) Výpočet dráhy

Nyní integrujeme rychlost $v(t)$ podle času, abychom získali dráhu $s(t)$:

$$s(t) = \int v(t)dt = \int 3{,}4t\ dt = \frac{1}{2} \cdot 3{,}4 \cdot \mathrm{t}^2 + C = 1{,}7\mathrm{t}^2 + C$$

Vzhledem k počátečním podmínkám je opět integrační konstanta $\mathrm{C} = 0$.

Rovnice dráhy je tedy:

$$\boldsymbol{s(t) = 1,7\mathrm{t}^2}$$

c) Výpočet rychlosti a dráhy v čase

Chceme-li zjistit rychlost a dráhu v čase $t = 3$ s:

$$\boldsymbol{v(3) = 3,4 \cdot t = 3,4 \cdot 3 = 10,2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

$$\boldsymbol{s(3) = 1,7 \cdot \mathrm{t}^2 = 1,7 \cdot 3^2 = 15,3\ \mathrm{m}}$$

Procvičovací úlohy

1) Zrychlení hmotného bodu je $a = -9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Počáteční rychlost je $v_0 = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a počáteční dráha je $s_0 = 50$ m. Najděte rovnici rychlosti a dráhy. Vypočítejte rychlost a dráhu v čase $t = 2$ s.

   [$v(2) = 0{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $s(2) = 80{,}8$ m]

2) Hmotný bod se pohybuje s rychlostí danou rovnicí $v(t) = 5\mathrm{t}^2 - 2t + 3$. V čase $t = 0$ s je počáteční dráha $s_0 = 0$ m. Najděte rovnici dráhy a rovnici zrychlení. Vypočítejte dráhu a zrychlení v čase $t = 2$ s.

   [$a(2) = 18\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $s(2) = 15{,}33$ m]

6.2 Úloha č.2 Svislý vrh vzhůru – grafický význam pomocí derivace

Teoretický úvod

Pro výpočet využijeme základní vztahy z kinematiky s následným odvozením za pomoci matematické analýzy.

Rovnice pro okamžitou výšku h tělesa během svislého vrhu je dána vztahem

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

kde $h(t)$ je okamžitá výška tělesa v čase t, h_0 je počáteční výška tělesa, v_0 je počáteční rychlost tělesa a g je tíhové zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Již v předchozích příkladech jsme zmiňovali, že derivací dráhy podle času je rychlost a derivací rychlosti podle času je zrychlení. V našem případě nám dráhu reprezentuje výška. Tedy konkrétně v tomhle případě bude okamžitá rychlost tělesa derivací okamžité výšky tělesa.

Nyní tedy provedeme derivaci vztahu pro okamžitou výšku a získáme vztah pro okamžitou rychlost:

$$v(t) = \frac{dh(t)}{dt} = v_0 - gt$$

Dále provedeme derivaci vztahu pro okamžitou rychlost a získáme vztah pro výpočet okamžitého zrychlení:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -g$$

Praktický příklad

Z výšky $h_0 = 5\text{ m}$ je vyhozen kámen svisle vzhůru s počáteční rychlostí $v_0 = 20\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

a) Určete čas, kdy je rychlost nulová a výšku v tomto čase.

b) Najděte čas, kdy je zrychlení během vrhu rovno nule.

Rychlost kamene je nulová, když dosáhne maximální výšky. Najdeme čas, kdy $v(t) = 0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

$$v(t_{max}) = v_0 - g t_{max} = 0$$

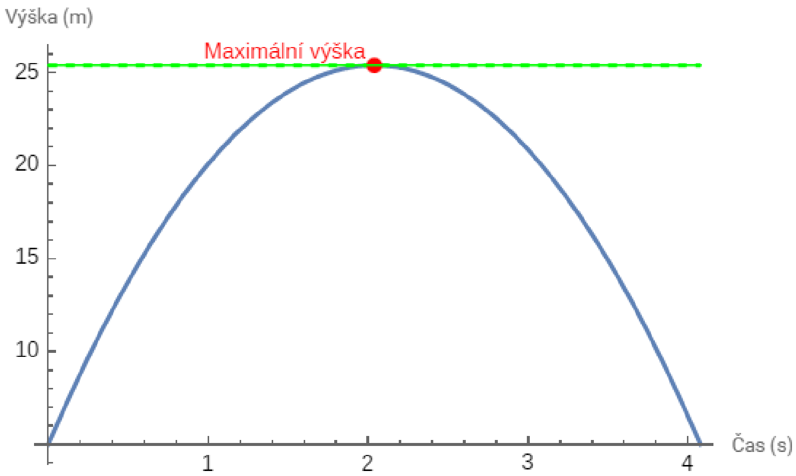
$$t_{max} = \frac{v_0}{g} = \frac{20}{9{,}81} = \mathbf{2{,}04\ s}$$

Maximální výška je dána dosazením tohoto času do rovnice pro dráhu:

$$h(t_{max}) = h_0 + v_0 t_{max} - \frac{1}{2} g {t_{max}}^2$$

$$h(2{,}04) = 5 + 20\cdot 2{,}04 - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\cdot 2{,}04^2 = \mathbf{25{,}4\ m}$$

Rychlost je nulová právě v okamžiku dosažení maximální výšky, což odpovídá času t_{max}. V grafickém znázornění pohybu kamene při svislém vrhu můžeme jasně vidět spojitost derivace funkce výšky (která představuje rychlost) s průběhem maximální výšky. V okamžiku, kdy kámen dosáhne své maximální výšky, je jeho rychlost nulová, což se projeví jako vodorovná tečna na grafu výšky v závislosti na čase. Tato tečna, reprezentovaná zelenou přímkou, ukazuje, že v bodě maximální výšky se rychlost kamene mění z kladné (při pohybu vzhůru) na zápornou (při pohybu dolů). V tomto konkrétním bodě, kde je rychlost nulová, je derivace funkce výšky rovna nule, což znamená, že sklon grafu je zde nulový. Tímto způsobem grafické znázornění poskytuje vizuální interpretaci matematické skutečnosti, že derivace funkce výšky je nulová v bodě maximální výšky, což odpovídá okamžiku, kdy se kámen na chvíli zastaví, než začne opět padat dolů.

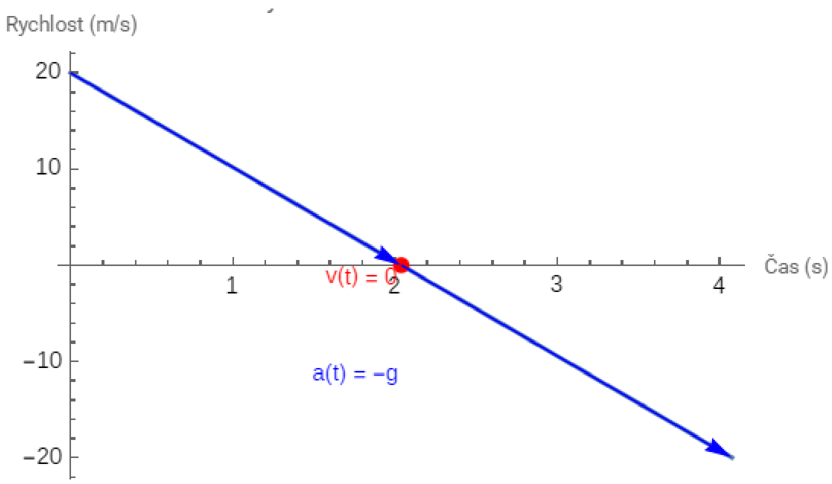


Obrázek 17: Demonstrace rychlosti jakožto derivace v bodě.

Druhá derivace dráhy podle času, tj. zrychlení, je konstantní a rovna $-g$. To znamená, že zrychlení je konstantní a nikdy není nulové. Těleso je neustále ovlivňováno tíhovým zrychlením směrem dolů a nezávisí na čase.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -g = \mathbf{-9{,}81\ m \cdot s^{-2}}$$

Tento výsledek ukazuje, že těleso je neustále zrychlováno směrem dolů gravitační silou. Gravitační zrychlení je vždy přítomné a působí na těleso po celou dobu jeho pohybu.



Obrázek 18: Průběh rychlosti při svislém vrhu vzhůru.

Na grafu vidíme závislost rychlosti kamene na čase při jeho svislém vrhu vzhůru. Na začátku, v čase $t_0 = 0$ s má kámen rychlost $v_0 = 20\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, což je znázorněno na svislé ose rychlosti.

V čase t_{max}, kdy kámen dosahuje své maximální výšky, je jeho rychlost nulová. Tento bod je označen červeným bodem s popiskem „$v(t) = 0$“. Po dosažení maximální výšky začne kámen padat zpět, a rychlost se zvětšuje v negativním směru. V čase $t = 2t_{max}$ dosáhne rychlosti stejné velikosti, ale opačného směru.

Rychlost se mění lineárně s časem, což znamená, že zrychlení je konstantní a rovno gravitačnímu zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$. Modré šipky na grafu ukazují tento lineární vztah a konstantní zrychlení je zdůrazněno popiskem „$a(t) = -g$“.

Graf poskytuje vizuální interpretaci pohybu kamene a ukazuje, jak konstantní gravitační zrychlení ovlivňuje rychlost lineárně v průběhu času. Tato lineární závislost rychlosti na čase znamená, že zrychlení, což je derivace rychlosti, je konstantní. Protože rychlost je popsána lineární funkcí, její derivace je konstantní hodnota, což potvrzuje, že gravitační zrychlení působí rovnoměrně po celou dobu pohybu kamene. Tento vztah mezi lineární změnou rychlosti a konstantním zrychlením je klíčový pro pochopení dynamiky tělesa v gravitačním poli.

Procvičovací úloha

1) Na povrchu Marsu, kde je tíhové zrychlení $g = 3{,}71\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ je vyhozen z výšky $h_0 = 3$ m kámen svisle vzhůru s počáteční rychlostí $v_0 = 15\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Jaké maximální výšky dosáhne a za jaký čas na Marsu a na Zemi?

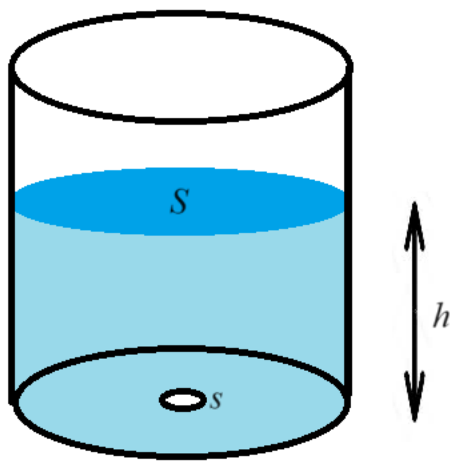
[Mars: $h_{max} = 34{,}38$ m; $t = 4{,}04$ s]

[Země: $h_{max} = 14{,}48$ m; $t = 1{,}53$ s]

6.3 Úloha č.3 Vytékání vody z nádoby – význam integrace při určování času

Teoretický úvod

V tomto příkladu budeme zkoumat, jak dlouho trvá, než všechna voda vyteče z válcové nádoby. K tomu použijeme několik základních fyzikálních a matematických vztahů. Integrace v tomto kontextu nám umožňuje vypočítat celkový čas, za který voda vyteče z nádoby tím, že vezmeme v úvahu, jak se výška hladiny vody (a tím i výtoková rychlost) mění v průběhu času. Jak se voda vypouští, hladina vody h klesá, což ovlivňuje výtokovou rychlost v, protože ta závisí na $\sqrt{h}$.



Obrázek 19: Ilustrace výtoku vody z nádoby.

Výtoková rychlost: Výtoková rychlost vody z otvoru na dně nádoby je dána vztahem

$$v = \mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h},$$

kde μ je výtoková součinitel, s je obsah otvoru na dně nádoby, g je tíhové zrychlení ($g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$) a h je vzdálenost, kterou hladina urazí během výtoku vody. Jedná se tedy o výšku hladiny vody od dna nádoby.

Je třeba si uvědomit, které hodnoty jsou neměnné – konstantní, a které se nám v průběhu času mění. V tomto případě je μ, s, g konstantní, zatímco h se mění od počáteční výšky po nulovou hodnotu.

Integrální vztah pro čas: Pro výpočet času, za který vyteče voda z nádoby, použijeme vztah

$$t = \int_0^h \frac{S}{v}\, dh.$$

Nyní dosadíme za v:

$$t = \int_0^h \frac{S}{\mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}\, dh$$

Praktický příklad

Ve válcové nádobě s plochou dna $S = 0{,}035\ \mathrm{m}^2$ je nalita voda do výšky $h = 0{,}25$ m. Voda vytéká otvorem na dně nádoby o obsahu $s = 0{,}0003\ \mathrm{m}^2$. Za jakou dobu vyteče z nádoby všechna voda? Výtokový součinitel je $\mu = 0{,}6$.

Nejprve dosadíme všechny konstantní hodnoty:

$$t = \int_0^h \frac{S}{\mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}\, dh = \int_0^h \frac{0{,}035}{0{,}6 \cdot 0{,}0003 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot h}}\, dh$$

Nyní provedeme výpočet:

$$t = \frac{S}{\mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \int_0^{0{,}25} \frac{1}{\sqrt{h}}\, dh = \frac{S}{\mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \int_0^{0{,}25} h^{-\frac{1}{2}}\, dh$$

Samotná integrace je poté:

$$\int_0^{0{,}25} h^{-\frac{1}{2}}\, dh = \left[2h^{\frac{1}{2}}\right]_0^{0{,}25} = \left[2\sqrt{h}\right]_0^{0{,}25}$$

Nyní dohromady s dosazením:

$$t = \frac{S}{\mu \cdot s \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \cdot \left[2\sqrt{h}\right]_0^{0,25} = \frac{0,035}{0,6 \cdot 0,0003 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,81}} \cdot 2\sqrt{0,25} = \mathbf{43,89\ s}$$

Procvičovací úloha

1) Ve válcové nádobě s plochou dna $S = 0,05\ \mathrm{m}^2$ je nalita voda do výšky $h = 0,4$ m. Voda vytéká čtyřmi otvory na dně nádoby, každý o obsahu $s = 0,00025\ \mathrm{m}^2$. Za jakou dobu vyteče z nádoby všechna voda? Výtokový součinitel je $\mu = 0,65$.

[$t = 17,05$ s]

6.4 Úloha č.4 Volný pád – integrační konstanty ve fyzice

Teoretický úvod

Volný pád je pohyb tělesa pouze pod vlivem gravitační síly, bez jakéhokoli odporu prostředí. Tato situace je ideálním příkladem pro studium pohybu v rámci klasické mechaniky, protože v reálných podmínkách vždy existuje určitý odpor vzduchu. Při volném pádu je zrychlení tělesa konstantní a rovno gravitačnímu zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Při analýze pohybu volně padajícího tělesa můžeme začít se zrychlením, které je konstantní. Z této informace pak pomocí integrace postupně odvodíme vztahy pro rychlost a polohu (výšku) tělesa v závislosti na čase.

Význam integračních konstant:

Integrační konstanty jsou klíčové při integraci, protože reprezentují počáteční podmínky pohybu tělesa. Když integrujeme zrychlení, získáme funkci rychlosti s integrační konstantou, která představuje počáteční rychlost. Když poté integrujeme rychlost, získáme funkci polohy (výšky) s další integrační konstantou, která představuje počáteční polohu. Při odvození nebudeme používat pro značení zrychlení písmeno a, ale písmeno g, které nám bude reprezentovat naše tíhové zrychlení, použité při volném pádu tělesa.

$$v(t) = \int g\, dt = gt + C_1$$

Jak jsme si tedy zmínili, v tomhle případě integrační konstanta C_1 reprezentuje počáteční rychlost. Můžeme tedy vztah napsat jako:

$$v(t) = gt + v_0$$

Dále při odvození vztahu pro dráhu dostáváme další integrační konstantu:

$$s(t) = \int v\, dt = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + C_2$$

V tomhle případě nám integrační konstanta C_2 reprezentuje počáteční polohu tělesa s_0. Můžeme tedy vztah přepsat jako:

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

Praktický příklad

Z výšky $h_0 = 50$ m je puštěn kámen volným pádem. Uvažujme tíhové zrychlení $g = 9{,}81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Vypočítejte rychlost a výšku kamene v čase $t = 3$s.

Již jsme si ukázali, jak integrací zrychlení podle času obdržíme vztah pro okamžitou rychlost.

$$v(t) = gt + v_0$$

V našem případě je počáteční rychlost nulová, tedy dostáváme:

$$v(3) = 9{,}81 \cdot 3 + 0 = \mathbf{29{,}43\ m \cdot s^{-1}}$$

Obdobně jsme si ukázali odvození vztahu pro výpočet okamžité výšky tělesa při volném pádu:

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

Zde je důležité opět připomenout že integrační konstanta C_1, neboli počáteční rychlost v_0 byla nulová, což ovšem neplatí pro integrační konstantu C_2, neboli počáteční výšku tělesa.

Po dosazení:

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 50 = \mathbf{94{,}145\ m}$$

Rychlost jsme tedy získali přímou integrací zrychlení g. Hodnota rychlosti po 3 sekundách jsme následně vypočítali na základě lineární funkce času, kde počáteční rychlost byla nulová (integrační konstanta C_1). Výšku jsme poté vypočítali integrací rychlosti. Počáteční podmínka (integrační konstanta C_2) byla zohledněna jako počáteční výška 50 m. Výška po 3 sekundách byla vypočítána pomocí kvadratické funkce času ke které jsme přičetli počáteční výšku.

6.5 Úloha č.5 Fyzikální práce – grafický význam pomocí integrace

Teoretický úvod

Práce je v mechanice definována jako síla působící na těleso po určité dráze. Matematicky je práce W vyjádřena jako integrál síly F podle dráhy x. To znamená, že pokud síla není konstantní a mění se v závislosti na poloze, musíme použít integraci k výpočtu celkové práce vykonané silou na těleso.

Tento příklad je zaměřený na pochopení, jak integrace umožňuje výpočet plochy pod křivkou a jaký má tento koncept význam v reálném světě, konkrétně v kontextu výpočtu práce. V mechanice je práce vykonaná proměnlivou silou na těleso při jeho pohybu po určité dráze vyjádřena jako integrál síly podle dráhy. Integrál zde představuje celkovou práci jako součet všech nekonečně malých příspěvků síly působící na těleso v každém bodě dráhy.

Obecný vzorec pro práci je

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx,$$

kde W je práce, $F(x)$ je síla jako funkce polohy x a $x_1,\ x_2$ jsou počáteční a koncová poloha.

Praktický příklad

Síla $F(x) = 2x$ působí na těleso pohybující se po přímce. Určete práci vykonanou touto silou při přesunu tělesa z polohy $x_1 = 1$ m do polohy $x_2 = 4$ m.

Nejprve provedeme integraci síly podle uvedeného vztahu jako

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx,$$

kdy po dosazení dostáváme

$$W = \int_1^4 2x\, dx.$$

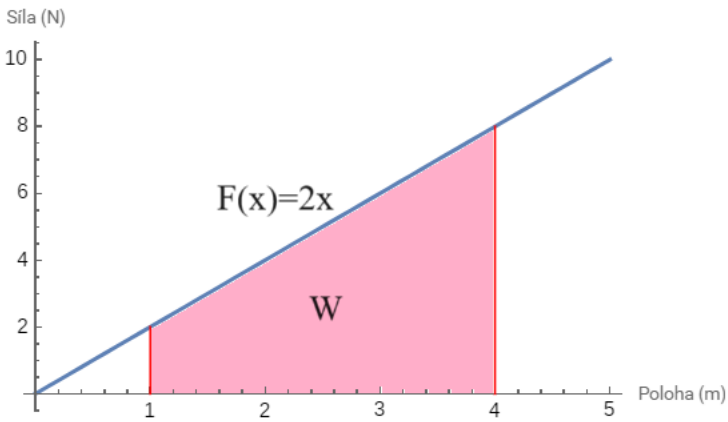
Nyní můžeme integrál vyřešit:

$$W = \int_1^4 2x\,dx = 2\int_1^4 x\,dx$$

$$W = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = 2 \cdot \left[\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right]$$

$$\boldsymbol{W = 15\,\mathrm{J}}$$

Na grafu síly $F(x)$ jako funkce polohy x bude plocha pod křivkou od $x_1 = 1$ m do $x_2 = 4$ m představovat práci vykonanou silou při přesunu tělesa. Integrál nám vlastně říká, že tato plocha je celkovou prací vykonanou proměnlivou silou.



Obrázek 20: Grafická interpretace integrace síly.

Procvičovací úloha

1) Síla $F = 10$ N působí na těleso, které se pohybuje po přímce. Určete práci vykonanou touto silou při přesunu tělesa z polohy $x_1 = 0$ m do polohy $x_2 = 5$ m. Načrtněte si graf síly jako funkce polohy a vyznačte plochu pod křivkou, která představuje vykonanou práci. (Pozn.: Síla je konstantní, tedy plocha pod křivkou by měla mít tvar obdélníku.)

[$W = 50$ J]

6.6 Úloha č.6 Pohyb po nakloněné rovině – analýza pohybu pomocí integrace

Teoretický úvod

Pohyb tělesa po nakloněné rovině je klasickým příkladem, kde se využívají základní principy mechaniky a matematické analýzy. Nakloněná rovina je rovinná plocha, která svírá úhel φ s vodorovnou rovinou. Když se těleso pohybuje po nakloněné rovině, působí na něj několik sil, včetně gravitační síly, normálové síly a případné třecí síly. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že se těleso pohybuje bez tření.

Gravitační síla F_g působí dolů s velikostí $m \cdot g$, kde m je hmotnost tělesa a g je tíhové zrychlení ($g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$). Tuto sílu můžeme rozložit na dvě složky:

Složka rovnoběžná s nakloněnou rovinou:

$$F_{\parallel} = m \cdot g \cdot \sin(\varphi)$$

Složka kolmá k nakloněné rovině:

$$F_{\perp} = m \cdot g \cdot \cos(\varphi)$$

Složka $F_{\parallel}$ způsobuje zrychlení tělesa podél roviny, zatímco složka $F_{\perp}$ je vyrovnána normálovou silou.

Zrychlení tělesa po nakloněné rovině můžeme určit pomocí Newtonova druhého zákona. Newtonův druhý zákon říká, že výsledná síla F působící na těleso je rovna součinu hmotnosti m a zrychlení tělesa a.

$$F = ma$$

V našem případě je výslednou silou složka gravitační síly rovnoběžná s nakloněnou rovinou:

$$F_{\parallel} = m \cdot a$$
$$m \cdot g \cdot \sin(\varphi) = m \cdot a$$

Po úpravě získáme vztah pro zrychlení:

$$a = g \cdot \sin(\varphi)$$

Z toho vyplývá, že zrychlení tělesa závisí na úhlu sklonu roviny a gravitačním zrychlení.

Nyní si ukážeme, jak pomocí integrace řešit příklad pohybu po nakloněné rovině. Použitím odvozených vztahů dokážeme určit, jaké zrychlení těleso na nakloněné rovině zažívá v důsledku gravitační síly. Tímto zrychlením můžeme následně integrovat, abychom vypočítali rychlost tělesa po určitém čase. Další integrací této rychlosti pak určíme dráhu, kterou těleso po rovině urazí. Tento postup nám umožňuje přesně analyzovat pohyb tělesa na nakloněné rovině pomocí matematických nástrojů infinitezimálního počtu.

Praktický příklad

Uvažujme těleso o hmotnosti $m = 2kg$, které se pohybuje po nakloněné rovině s úhlem sklonu $\varphi = 30°$. Počáteční rychlost tělesa je $v_0 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a počáteční poloha je $s_0 = 0$ m. Vypočítejte rychlost a dráhu tělesa po 5 sekundách.

Nejprve integrací zrychlení získáme rychlost

Pozn.: Samotné zrychlení a je rovno

$$a = 4{,}905 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

$$v(t) = \int a \, dt = \int g \cdot \sin(\varphi) \, dt$$

$$v(t) = g \cdot \sin(\varphi) \cdot t + v_0$$

Opět nesmíme zapomenout na integrační konstantu, která v našem případě reprezentuje počáteční rychlost v_0. Ta je ovšem nulová.

$$v(5) = 9{,}81 \cdot \sin(30°) \cdot 5 + 0$$

$$\boldsymbol{v(5) = 24,525\ \mathbf{m \cdot s^{-1}}}$$

Jako další provedeme integraci rychlosti podle času pro odvození vztahu pro uraženou dráhu tělesa.

$$s(t) = \int v\, dt = \int (g \cdot \sin(\varphi) \cdot t + v_0)\, dt$$

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin(\varphi) \cdot t^2 + v_0 t + s_0$$

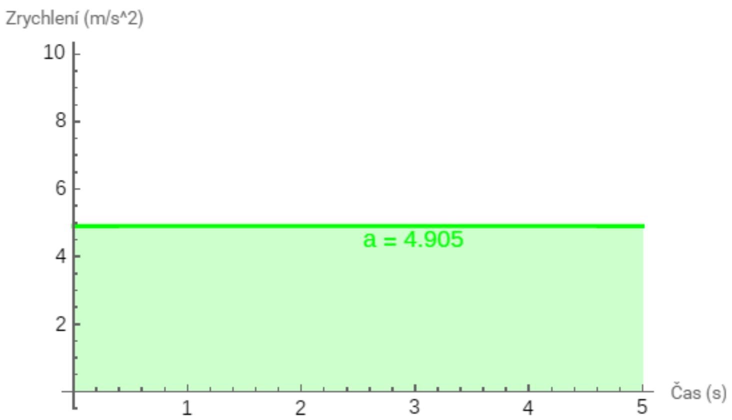
Opět můžeme vidět, že se nám integrační konstanta projevila při odvození ve formě počáteční polohy. Ta je ovšem v našem případě opět nulová.

Po dosazení dostáváme

$$s(5) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot \sin(30°) \cdot 5^2 + 0 \cdot 5 + 0$$

$$\boldsymbol{s(5) = 61.3125\ \mathbf{m}}$$

Nyní se pokusíme výsledky propojit s grafickou reprezentací.

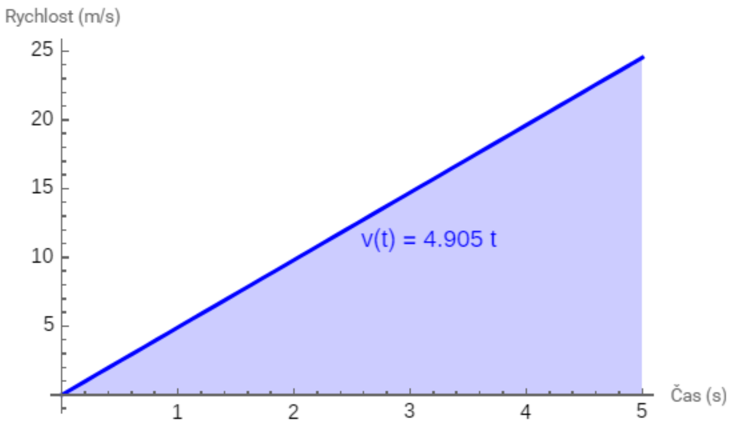


Obrázek 21: Graf průběhu zrychlení v čase v kontextu integrace funkce.

V prvním grafu je zobrazeno konstantní zrychlení tělesa $a = 4{,}905\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ v závislosti na čase. Plocha pod touto křivkou reprezentuje celkovou změnu rychlosti tělesa během daného časového intervalu. Protože zrychlení je konstantní, plocha pod křivkou je obdélník se stranami rovnými zrychlení a času. Tento obsah obdélníku můžeme vypočítat jako:

$$S = a \cdot t = 4{,}905\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \cdot 5\ \mathrm{s} = 24{,}525\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Tento výsledek, který jsme spočetli graficky odpovídá výsledku, který jsme vypočetli numericky pomocí integrace funkce zrychlení.

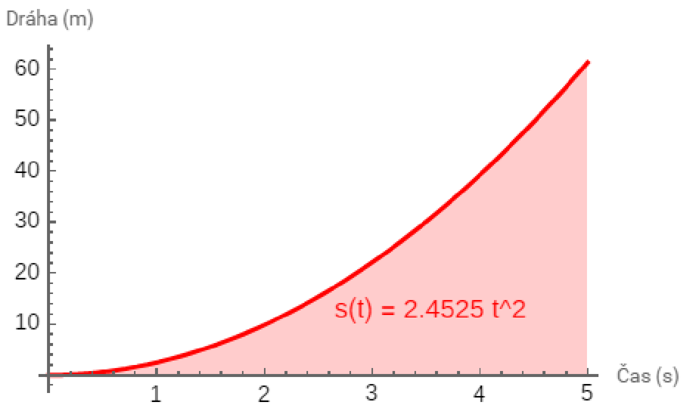


Obrázek 22: Graf průběhu rychlosti v čase v kontextu integrace funkce.

V druhém grafu je zobrazen průběh rychlosti tělesa v čase. Křivka je lineární, což odpovídá konstantnímu zrychlení. Plocha pod touto křivkou reprezentuje celkovou dráhu, kterou těleso urazí během daného časového intervalu. Vzhledem k tomu, že rychlost je funkcí času při konstantním zrychlení, plocha pod křivkou tvoří trojúhelník. Obsah tohoto trojúhelníku vypočítáme jako:

$$S = \frac{1}{2} \cdot t \cdot v(t) = \frac{1}{2} \cdot 5\ \mathrm{s} \cdot 24{,}525\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 61.3125\ \mathrm{m}$$

Opět jsme si tedy graficky potvrdili a ukázali význam řešení pomocí integrace rychlosti podle času.



Obrázek 23: Graf průběhu dráhy v čase v kontextu integrace funkce.

Ve třetím grafu je zobrazen průběh dráhy tělesa v čase. Křivka má kvadratický průběh, což je důsledkem integrace lineární funkce rychlosti. Tento graf nám ukazuje, jak dráha tělesa roste kvadraticky s časem při konstantním zrychlení. Plocha pod křivkou rychlosti v druhém grafu (trojúhelník) představuje celkovou dráhu uraženou tělesem, což je vizuálně zobrazeno v tomto grafu.

Tato vizualizace ukazuje praktické využití integrace a derivace v mechanice a demonstruje, jak jsou tyto matematické operace klíčové pro analýzu pohybu tělesa. Grafické zobrazení těchto funkcí a jejich interpretace prostřednictvím plochy pod křivkou pomáhá studentům lépe pochopit spojitost mezi těmito veličinami a význam matematických operací v kontextu fyzikálních problémů.

6.7 Úloha č.7 Fyzikální práce – grafický význam plochy pod křivkou

Když pracujeme s funkcemi, které mohou být jak nad osou x, tak pod osou x, často analyzujeme plochy, které tyto funkce vytvářejí. Tyto plochy mají významné aplikace v různých oblastech fyziky a matematiky, například při výpočtu práce. My jsme se již s jedním příkladem, zaměřeným na výpočet fyzikální práce setkali, tudíž již nebudeme uvádět hlubší fyzikální teorii.

Plocha nad osou x: Tato plocha představuje kladnou hodnotu integrálu. Pokud například integrujeme sílu podél určité trasy, tato plocha představuje práci vykonanou silou ve směru pohybu tělesa.

Plocha pod osou x: Tato plocha představuje zápornou hodnotu integrálu. V případě síly to znamená, že síla působí proti směru pohybu tělesa, což snižuje jeho energii. Záporná plocha tedy souvisí s negativní prací, která se projevuje brzděním nebo zpomalováním pohybu tělesa.

Praktický příklad

Mějme sílu $F(x) = 2x - 4$, která působí podél osy *x*. Chceme pochopit význam plochy pod touto křivkou a nad touto křivkou, když se těleso pohybuje od $x = 0$ do $x = 5$.

Nejprve nalezneme bod, kde síla mění své znaménko. Síla $F(x) = 2x - 4$ mění znaménko, když $F(x) = 0$.

$$2x - 4 = 0$$

$$x = 2$$

Integrál rozdělíme na dvě části: od $x = 0$ do $x = 2$ (kde je síla záporná) a od $x = 2$ do $x = 5$ (kde je síla kladná).

$$W = \int_0^2 F(x)\,dx + \int_2^5 F(x)\,dx$$

$$W = \int_0^2 2x - 4\,dx + \int_2^5 2x - 4\,dx$$

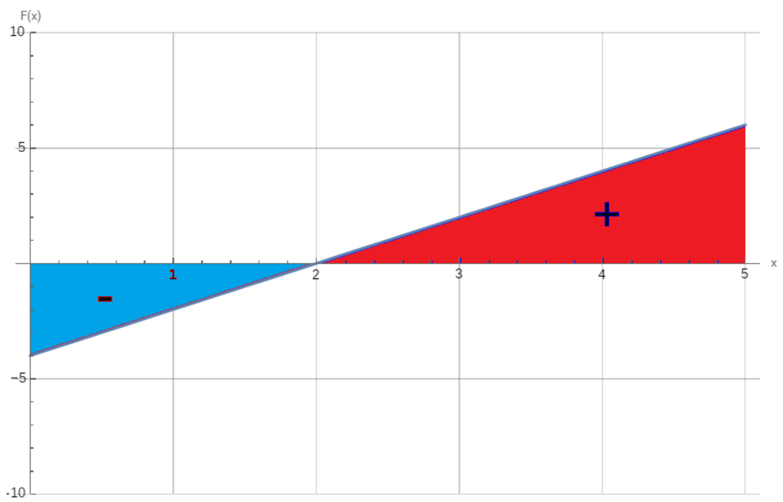
Nyní integrály vypočteme.

$$\int_0^2 2x - 4\,dx = [x^2 - 4x]_0^2 = (2^2 - 4 \cdot 2) - (0^2 - 4 \cdot 0) = \mathbf{-4}$$

$$\int_2^5 2x - 4\,dx \; = [x^2 - 4x]_2^5 = (5^2 - 4 \cdot 5) - (2^2 - 4 \cdot 2) = \mathbf{9}$$

Celková práce vykonaná silou $F(x) = 2x - 4$ při pohybu tělesa od $x = 0$ do $x = 5$ je rovna

$$W = -4 + 9 = 5.$$



Obrázek 24: Grafický význam kladné a záporné práce pomocí integrace.

Kladná práce: V intervalu $x = 2$ do $x = 5$, kde je síla kladná, síla a posunutí tělesa mají stejný směr. Síla tedy přispívá k pohybu tělesa, zvyšuje jeho energii.
Záporná práce: V intervalu $x = 0$ do $x = 2$, kde je síla záporná, síla a posunutí tělesa mají opačný směr. Síla tedy působí proti pohybu tělesa, snižuje jeho energii.

V této úloze jsme se pokusili vysvětlit koncept plochy nad křivkou a pod křivkou, což nám umožňuje pochopit význam záporné plochy. Tento přístup je klíčový pro interpretaci záporné a kladné práce v kontextu mechaniky, kde plocha pod křivkou představuje práci vykonanou ve směru pohybu a plocha nad křivkou práci působící proti směru pohybu. Význam těchto konceptů přesahuje rámec fyziky a nachází uplatnění v dalších oblastech, jako je elektrotechnika, kde integrace proudu a napětí poskytuje energii spotřebovanou nebo dodanou obvodem, nebo například také v ekonomii, kde integrace funkce příjmů a výdajů může určovat čistý zisk nebo ztrátu.

7 Závěr

Klíčovými koncepty infinitezimálního počtu jsou derivace a integrace, které nejsou pouze matematickými nástroji, ale rovněž prostředkem umožňujícím interpretaci a řešení příkladů s fyzikální tématikou, proto bylo našim cílem naší práce bylo ukázat hlubší pohled na využití infinitezimálního počtu v rámci fyzikálních problémů při studiu matematické analýzy na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého. V teoretické části práce jsme se zaměřili na teorii o diferenciálním počtu a integrálním počtu, a dále na význam mezipředmětových vztahů ve výuce. V rámci teorie jsme uvedli základní teoretické poznatky a popsali geometrický význam těchto matematických nástrojů. Důkladně jsme se věnovali základním pojmům jako je derivace a integrál, a v praktické části jsme si mohli ukázat, jak se tyto koncepty používají k řešení fyzikálních problémů, například při analýze pohybu tělesa nebo při výpočtu fyzikální práce.

V rámci experimentální části jsme nejprve provedli testy a dotazníky u studentů 2. ročníku učitelství matematiky, které měly za cíl zhodnotit znalosti a dovednosti studentů při aplikaci matematické analýzy na fyzikální problémy. Pro hodnocení testů jsme zvolili systém, kdy studenti získávali za správné pochopení příkladu 1 bod a za úplné řešení 2 body. Tento přístup nám umožnil efektivně rozdělit studenty do tří kategorií: studenty s žádným řešením, studenty, kteří pochopili zadání, ale nedokázali ho zcela vyřešit, a studenty, kteří celý příklad úspěšně vyřešili. Díky tomuto systému jsme mohli jednoduše a přesně analyzovat úroveň pochopení a dovedností jednotlivých studentů. Výsledky testů ukázaly, že studenti v drtivé většině případů nebyli úspěšní. Tento neúspěch byl pravděpodobně způsoben několika faktory, včetně nedostatečné fyzikální teoretické přípravy studentů na danou problematiku a možná i tím, že jsem neodhadl jejich připravenost na řešení těchto úloh. Nicméně, dotazníky odhalily, že studenti považují tuto výukovou metodu za vhodnou a přínosnou. Mnoho studentů v dotaznících uvedlo, že by ocenili více praktických příkladů a lepší teoretický základ, aby mohli úspěšně řešit předložené úlohy.

Na základě poznámek a komentářů studentů jsme se snažili vytvořit nové úlohy, které by lépe odpovídaly jejich potřebám a připravenosti. Tyto nové úlohy byly koncipovány tak, aby byly názornější a poskytovaly dostatečný teoretický kontext. Při tvorbě příkladů a učebních textů jsme se zaměřili na názorné ukázky aplikace matematických principů. Každá úloha byla doplněna teoretickým úvodem, praktickým příkladem a vizualizacemi, které měly studentům usnadnit pochopení a vizualizaci problémů. Tento přístup měl za cíl nejen zlepšit teoretické znalosti studentů, ale také je připravit na praktické aplikace těchto znalostí v reálných fyzikálních situacích. Při tvorbě těchto úloh jsme se zaměřili pouze na úlohy z mechaniky, jelikož cílem bylo vymyslet úlohy, které byly snadno představitelné, nikoliv aby byla možnost ukázat jejich aplikaci napříč celým spektrem fyziky. Snažili jsme se ukázat význam derivace jakožto tečny k funkci, vzájemný vztah derivace a integrace v praxi, význam integračních konstant a jejich význam při analýze pohybu, a také praktický význam plochy pod křivkou a plochy nad křivkou.

Myslím si, že tato práce by mohla být přínosná jako materiál do výuky studentů matematické analýzy, protože se nezaměřuje pouze na to, co si myslím, že by bylo dobré zahrnout, ale také reflektuje to, co sami studenti chtěli a potřebovali. Práce tedy není jen akademickým cvičením, ale skutečnou odpovědí na potřeby studentů, což z ní činí hodnotný zdroj pro výuku. Během tvorby této práce jsme kladli důraz na zpětnou vazbu od studentů, jejich připomínky a přání. Výsledné úlohy a výukové texty byly navrženy tak, aby byly názorné a přístupné, což by mělo studentům pomoci lépe pochopit složité koncepty matematické analýzy. Věřím, že je důležité hledat ve všech teoretických věcech praktické užití, protože to nejen zvyšuje pochopení teorie, ale také motivuje studenty, když vidí, jak mohou nabyté znalosti aplikovat v reálném světě. Přínos této práce tak vidím nejen ve zlepšení teoretických znalostí studentů, ale i v jejich schopnosti aplikovat tyto znalosti v praxi, což je klíčové pro jejich budoucí profesní úspěch. Tímto způsobem tato práce podporuje nejen akademický růst studentů, ale i jejich praktické dovednosti a připravenost na reálné problémy.

Seznam obrázků

Seznam použité literatury

[1] LAITOCHOVÁ, J. *Matematická analýza I: Diferenciální počet, 1. část*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2007. 80 s. ISBN 80-244-0832-5.

[2] LAITOCHOVÁ, J. *Matematická analýza 2: integrální počet. 3., nezměn. vyd. Skripta*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2009. ISBN 9788024422763.

[3] KUBEN, J. a P. ŠARMANOVÁ. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. Brno: Masarykova univerzita, 2006. 351 s. ISBN 80-248-1192-8.

[4] HOLUBOVÁ, R. *Mechanika: studijní modul*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2012, 83 s. ISBN 978-80-244-3298-4.

[5] HOLUBOVÁ, Renata. *Molekulová fyzika a termodynamika*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012, 145 s. ISBN 978-80-244-3299-1.

[6] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. *Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 1*. Druhý dotisk 1. českého vydání. Praha: Prometheus, 2006. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 81-7196-213-9.

[7] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. *Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 2*. Dotisk 1. českého vydání. Praha: Prometheus, 2003. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 81-7196-213-9.

[8] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER. *Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 3*. Praha: Prometheus, 2003. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 81-7196-213-9.

[9] Dominguez, A., De la Garza, J., Quezada-Espinoza, M., & Zavala, G. (2024). *Integration of Physics and Mathematics in STEM Education: Use of Modeling. Education Sciences*, 14(1), 20.

[10] Fantinelli, S., Cortini, M., Di Fiore, T., Iervese, S., & Galanti, T. (2024). *Bridging the Gap between Theoretical Learning and Practical Application: A Qualitative Study in the Italian Educational Context. Education Sciences*, 14(2), 198.

Anotace

Jméno a příjmení:	Bc. Tomáš Krézek
Katedra:	Katedra matematiky Pedagogické fakulty UP
Vedoucí práce:	Doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.
Rok obhajoby:	2024

Název práce:	Infinitezimální počet v úlohách s fyzikální tématikou při výuce studentů učitelství matematiky
Název v angličtině:	The infinitesimal calculus in physics-themed tasks in the teaching of mathematics teacher students
Anotace práce:	Tato diplomová práce se zaměřuje na propojení matematiky a fyziky ve výuce na Pedagogické fakultě Univerzity Palackého. Cílem je ukázat, jak lze infinitezimální počet využít při řešení fyzikálních problémů. Teoretická část pokrývá diferenciální a integrální počet, jejich geometrický význam a historický vývoj. Experimentální část zahrnuje testy a dotazníky, které hodnotí znalosti a dovednosti studentů. Na základě zpětné vazby byly vytvořeny nové úlohy s teoretickým kontextem a praktickými ukázkami aplikace matematických principů. Práce zdůrazňuje význam mezipředmětových vztahů a praktického užití teoretických znalostí.
Klíčová slova:	infinitezimální počet, diferenciální počet, integrální počet, matematická analýza, fyzikální problémy, mezipředmětové vztahy, výuka, pedagogická fakulta, zpětná vazba, učební úlohy
Anotace v angličtině:	This thesis focuses on the integration of mathematics and physics in teaching at the Faculty of Education, Palacký University. The aim is to show how infinitesimal calculus can be used to solve physical problems. The theoretical part covers differential and integral calculus, their geometric significance, and historical development. The experimental part includes tests and questionnaires that evaluate students' knowledge and skills. Based on feedback, new tasks were created with theoretical context and practical demonstrations of mathematical principles. The thesis emphasizes the importance of interdisciplinary relationships and the practical application of theoretical knowledge.
Klíčová slova v angličtině:	infinitesimal calculus, differential calculus, integral calculus, mathematical analysis, physical problems, interdisciplinary relationships, teaching, faculty of education, feedback, teaching tasks

Přílohy vázané v práci:	ilustrace
Rozsah práce:	84
Jazyk práce:	Český jazyk