

ABSTRAKT

V diplomové práci jsou shrnuty a popsány jednotlivé druhy kmitání, jejich příčiny a dopady na obrábění. Byly stanoveny metody pro určení stabilních podmínek obrábění. Cílem provedeného experimentu bylo změření frekvenční odezvosvé funkce frézky se zvoleným nástrojem a sestavení diagramu stability pro tento stroj.

Klíčová slova

Chvění, diagram stability, tloušťka třísky, šířka třísky, frekvenční odezvosvé funkce

ABSTRACT

This diploma thesis is concerning about summarizing and describing types of vibrations, their causes and influences to the machining. The stable conditions of machining were pointed out. The experiment was conducted in which the frequency response function of specific milling machine was measured. Than the stability lobe diagram was constructed.

Key words

Charter, stability lobe diagram, chip thickness, chip width, frequency response function

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

SISMILICH, Vladimír. *Název: Diplomová práce*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 58 s., 0 příloh., prof. Ing. Miroslav Píška, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Vibrace při obrábění kovů–
příčiny a jejich eliminace vypracoval samostatně s použitím odborné literatury
a pramenů, uvedených na seznamu, který tvoří přílohu této práce.

Datum 28.5.2010

.....
Vladimír Sismilich

Poděkování

Děkuji tímto prof. Ing. Miroslavu Píškovi, CSc. za cenné připomínky a rady při vypracování diplomové práce a také firmě Brüel&Kjaer za zapůjčení testovací soupravy a softwaru.

OBSAH

ABSTRAKT	4
PROHLÁŠENÍ	5
PODĚKOVÁNÍ	6
ÚVOD.....	9
1 TEORETICKÝ ROZBOR VZNIKU CHVĚNÍ A VIBRACÍ PŘI FRÉZOVÁNÍ.....	10
1.1 Historie výzkumu	10
1.2 Frézování.....	10
1.2.1 Kinematika obráběcího procesu.....	11
1.3 Typy kmitání	12
1.3.1 Volné kmitání.....	12
1.3.2 Vynucené kmitání	13
1.3.3 Samobuzené kmitání	15
1.4 Chvění při řezání kovů.....	16
1.5 Mechanismy samobuzeného kmitání při řezání kovů	16
1.6 Limitní podmínky pro stabilní obrábění.....	20
1.7 Řezné podmínky ovlivňující stabilitu obrábění	24
1.8 Diagramy stability – lobe diagramy	26
2 SÍLY A VYNUCENÉ KMITÁNÍ VE FRÉZOVÁNÍ	31
2.1 Přesnost frézování stopkovou frézou: přímé zuby.....	31
2.2 Vynucené kmitání a jeho důsledek jako nepřesnost obrobeného povrchu	32
2.3 Síly působící při obrábění stopkovou frézou se zuby do šroubovice.....	33
3 MATEMATICKÝ POPIS KMITÁNÍ PŘI FRÉZOVÁNÍ	36
3.1 Průběh základních goniometrických funkcí.....	36
3.2 Přenosová funkce soustavy s jedním stupněm volnosti	38
3.3 Měření modálních parametrů	41
3.3.1 Dynamická měření na obráběcích strojích.....	42
4 NÁVRH EXPERIMENTU.....	44
4.1 Návrh experimentu pro technologii frézování	44
4.2 Použité technické vybavení	44

4.2.1 Obráběcí zařízení	44
4.2.2 Nástroj	44
4.2.3 Měřicí zařízení	46
5 PRŮBĚH EXPERIMENTU	48
5.1 Připojení měřicí soustavy k počítači a frézce	48
5.2 Měření silového impulsu	49
5.3 Stanovení odezvy na silový impuls	50
5.4 Měření frekvenční odezvové funkce	51
5.5 Vyhodnocení získaných závislostí.....	51
ZÁVĚR	55
SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	57
SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ	58

ÚVOD

V současném obráběcím průmyslu je proces vysokorychlostního frézování důležitou technologií.

Frézovací proces je nejvíce efektivní, pokud odběr materiálu je co možná nejvyšší, zatímco kvalita obráběného povrchu zůstává stejná. Hlavními faktory ovlivňujícími rychlost odběru materiálu jsou otáčky vřetena, hloubka řezu a posuv. V průběhu frézování může při jisté kombinaci axiální hloubky řezu a rychlosti vřetene vzniknout chvění, anglicky “chatter”, což jsou nechtěné vibrace rezného nástroje nebo obrobku při obrábění.

Chvění v obráběcím procesu je nežádoucí, protože v jeho důsledku dochází ke zhoršení kvality povrchu obrobku. To má za následek snížení přesnosti, rychlejší opotřebení rezného nástroje, zvýšené zatížení stroje a dochází ke vzniku hluku. Všechny výše uvedené negativní vlastnosti způsobené chvěním se mohou objevit, pokud dojde ke zvýšení rezného výkonu, aniž by byly určeny dynamické vlastnosti obráběcího stroje.

Dynamické vlastnosti se stanovují pomocí tzv. *Modální analýzy*, na jejímž základě se sestavuje diagram stability neboli “*Stability lobe diagram*”. Diagram stability zobrazuje závislost šířky záběru ostří na otáčkách vřetene. Na jeho základě se nastavují optimální podmínky pro obrábění, aniž by se vyskytlo chvění.

1 TEORETICKÝ ROZBOR VZNIKU CHVĚNÍ A VIBRACÍ PŘI FRÉZOVÁNÍ

Obráběcí stroj, nástroj a obrobek tvoří obráběcí systém s dynamickými charakteristikami. Kmitání jednotlivých prvků obráběcího systému představuje průvodní jev řezného procesu[8]. Je důležité rozlišit tři základní skupiny mechanického kmitání, jako je přirozené kmitání, vynucené a samobuzené kmitání.

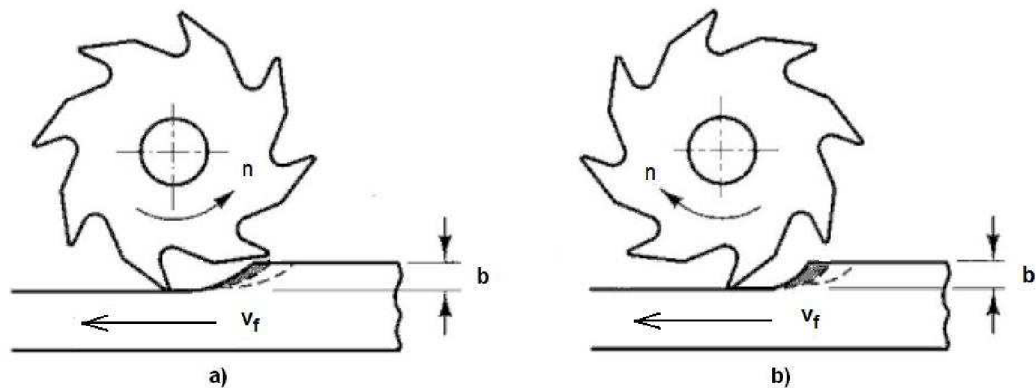
1.1 Historie výzkumu

Oblast výzkumu stability obráběcího procesu má dlouhou historii. Z řady českých vědců to byl profesor J. Tlustý, který se věnoval práci v oblasti vibrací po celý život a získal mnohá ocenění. On a jeho spolupracovníci sestavili teorii, díky které jsme schopni dnes porozumět základním principům regenerativního kmitání a jeho důsledkům na povrch obráběného materiálu, chování řezného nástroje a stroje. Tlustý a Poláček v [4] a Tobias v [10] konstatovali, že tloušťka třísky je důležitým parametrem pro vznik chvění. Tobias a Fishwick v [11] stanovili grafické znázornění stability obrábění ve formě grafů, které představovali závislost řezných parametrů, jako jsou otáčky vřetene a šířka třísky. Z těchto tzv. "*Lobe diagramů*" lze určit, zda je obrábění stabilní či nikoliv.

1.2 Frézování

Frézování je obráběcí metoda, při které se materiál obrobku odebírá břity otáčejícího se nástroje. Posuv nejčastěji koná součást, převážně ve směru kolmém k ose nástroje. U moderních frézovacích strojů jsou posunové pohyby plynule měnitelné a mohou se realizovat ve všech směrech (obráběcí centra, víceosé CNC frézky). Řezný proces je přerušovaný a každý zub frézy odřezává krátké třísky proměnné tloušťky.

Z technologického hlediska se v závislosti na aplikovaném nástroji rozlišuje frézování válcové obr. 1.1 (frézování obvodem) a frézování čelní obr. 1.2. Od těchto základních způsobů se odvozují některé další, jako frézování okružní a planetové.



Obr. 1.1 Kinematika válcového frézování – podle[12]

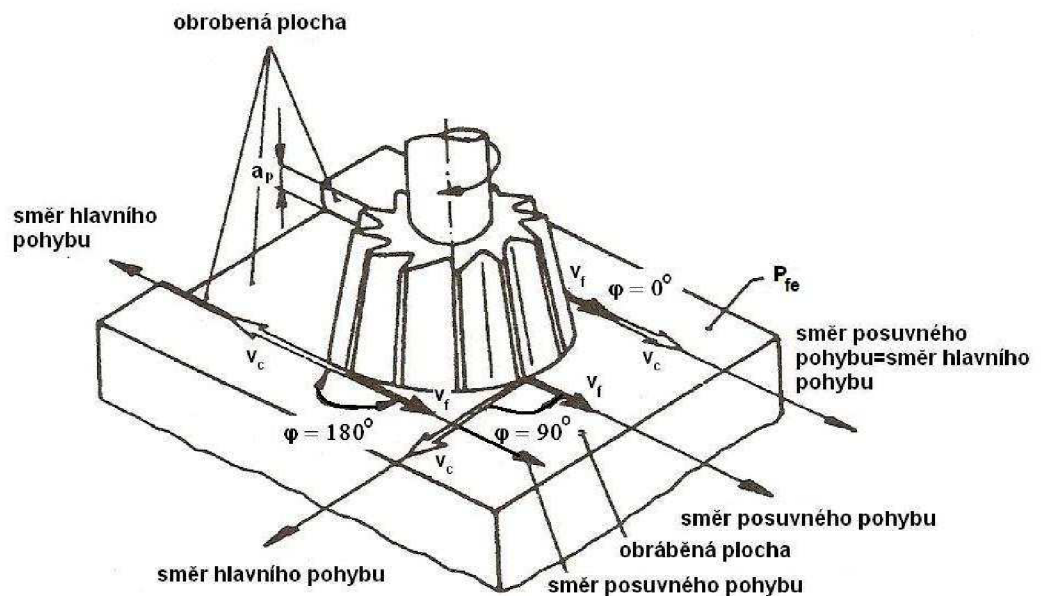
Při **nesousledném frézování** obr.1.1a) je smysl rotace nástroje proti směru posuvu obrobku. Obrobená plocha vzniká při vstupu nástroje do obrobku. Tloušťka třísky se postupně mění z nulové hodnoty na hodnotu maximální. K oddělení třísky nedojde v okamžiku její nulové tloušťky, ale po určitém skluzu břitu po ploše vytvořené předcházejícím zubem, což má za následek zvýšené silové účinky a rychlejší opotřebení břitu. Řezná síla má při tomto způsobu frézování složku, která odtahuje obrobek od stolu směrem nahoru.

Při **sousledném frézování** obr. 1.1b) je smysl rotace nástroje ve směru posuvu obrobku. Maximální tloušťka třísky vzniká při vniku zubu do obrobku. Obrobená plocha se vytváří, když zub vychází ze záběru. Řezné síly působí směrem do pracovního stolu. Sousledné frézování může probíhat pouze na přizpůsobeném stroji při vymezené vůli a předpětí mezi posunovým šroubem a maticí stolu frézky. V opačném případě způsobuje vůle nestejný posuv, při němž může dojít k poškození nástroje, popř. i stroje.

1.2.1 Kinematika obráběcího procesu

Válcové frézování se uplatňuje při práci s válcovými a tvarovými frézami. Zuby frézy jsou tvořeny pouze po obvodu nástroje, hloubka odebírané vrstvy h se nastavuje kolmo na osu frézy a na směr posuvu. Obrobená plocha je rovnoběžná s osou otáčení frézy. V závislosti na kinematice obráběcího procesu se rozlišuje frézování sousledné a nesousledné obr. 1.1.

Čelní frézování se uplatňuje při práci s čelními frézami s břity vytvořenými na obvodu i čele nástroje viz obr. 1.2. Čelní frézování se také dělí s ohledem na polohu osy frézy vzhledem k frézované ploše na symetrické a nesymetrické [8].



Obr. 1.2 Čelní frézování - kinematika pohybů nástroje a obrobku ve třech bodech nástroje-podle[8]

1.3 Typy kmitání

1.3.1 Volné kmitání

Přirozené nebo také volné kmitání vzniká, pokud je vibrační soustava na obr. 1.3 jednoduchou kombinací pružiny, tlumiče a závaží, které je vychýleno ze své rovnovážné polohy a potom uvolněno, aby se mohlo volně pohybovat.

Výsledkem je pohyb se snižující se amplitudou a frekvencí totožnou s přirozenou tlumicí frekvencí soustavy $f_d = f_n$.

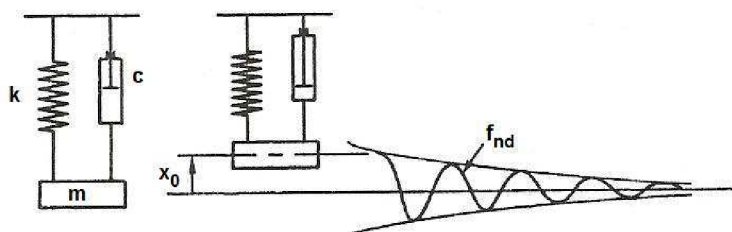
Na soustavu nepůsobí žádná vnější síla. Diferenciální rovnice tohoto pohybu je

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.1)$$

kde x je dráha, kterou těleso vykonává, \dot{x} je rychlost tělesa a \ddot{x} je jeho zrychlení. Její řešení závisí na počátečních podmínkách. Pro počáteční výchýlení x_0 a nulovou počáteční rychlost:

$$x = x_0 e^{-\lambda t} \cos(2\pi \cdot f_d \cdot t + \varphi). \quad (1.2)$$

Volné kmitání se v praxi vyskytuje málo díky jeho krátkému trvání a pomíjivému charakteru.



Obr. 1.3 Volné kmitání – podle[3]

K řešení takovéto soustavy je nutné, aby její parametry splňovaly tyto podmínky:

- soustava je absolutně tuhá a nedochází v ní k tlumení,
- pružina je absolutně tuhá a nehmotná,
- tlumič je nepoddajný a nehmotný.

1.3.2 Vynucené kmitání

Vynucené kmitání vzniká, pokud na jednotlivé prvky obráběcí soustavy působí vnější periodická síla F dle rov. 1.3.

Faktory způsobující vynucené kmitání:

a) Silové impulsy vznikající v obráběcí soustavě

- nevyváženost rotujících hmot,
- přímočaré vratné pohyby hmot.

b) Periodicky přerušovaný řezný proces

- periodická změna průřezu třísky,
- diskontinuální řezné procesy (hoblování, obrážení).

c) Silové impulsy vnesené do obráběcího systému přes základy obráběcího stroje [8].

$$F = F_0 \cos 2\pi ft . \quad (1.3)$$

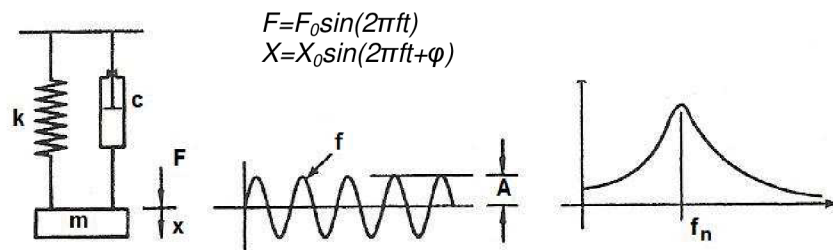
Výsledný pohyb po počáteční přechodné periodě, kde je také přítomno přirozené kmitání, se ustálí do stavu, ve kterém je amplituda A konstantní a frekvence kmitání f je stejná jako frekvence budící síly [1].

Amplituda A kmitání závisí na amplitudě síly F_0 , na tuhosti k , na tlumení soustavy c a na poměru f / f_n , což je poměr budící frekvence a přirozené frekvence soustavy. Pro $f = f_n$ vniká resonance a tedy amplituda kmitání je maximální obr. 1.4.

Vynucené kmitání se vyskytuje u všech druhů strojů, u kterých je generována periodická síla. Tento jev způsobují hlavně nevyvážené rotující součásti nebo vratné jevy. Avšak tyto vibrace jsou značné pouze v případě resonance.

V obrábění se vyskytuje velké vynucené kmitání pouze v oblastech finišování a dokončovacích operací jako je vystružování a broušení, kde vibrace způsobují zvlnění obráběného povrchu. Tento problém nastává opět v případech resonance.

Ve frézování je vynucené kmitání způsobeno periodickou složkou řezné síly.



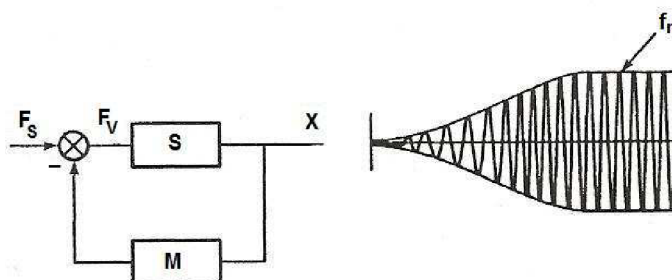
Obr. 1.4 Vynucené kmitání - podle[3]

1.3.3 Samobuzené kmitání

Samobuzené kmitání vzniká díky vnitřnímu mechanismu (tvořící uzavřený obvod) v soustavě znázorněném na obr. 1.5. Tento mechanismus je schopen vytvoření stálého, neperiodického vnějšího zdroje energie a generování periodické síly během vibrací soustavy takové, která sama podporuje vibrace.

Na rozdíl od vynuceného kmitání, které vzniká, působí-li na soustavu periodická síla a kde hlavním parametrem tohoto kmitání je amplituda, dojde-li ke kmitání samobuzenému, roste až do svého maximálního limitu, který je dán soustavou samotnou.

Jedná-li se o samobuzené kmitání, pak je to chvění při obrábění a vzniká v důsledku obráběcího procesu. Jednou ze základních příčin vzniku chvění je, že se vřeteno a nástroj dostanou do vlivu dynamických sil generovaných nestabilním kmitáním buzeným řezným procesem [2].



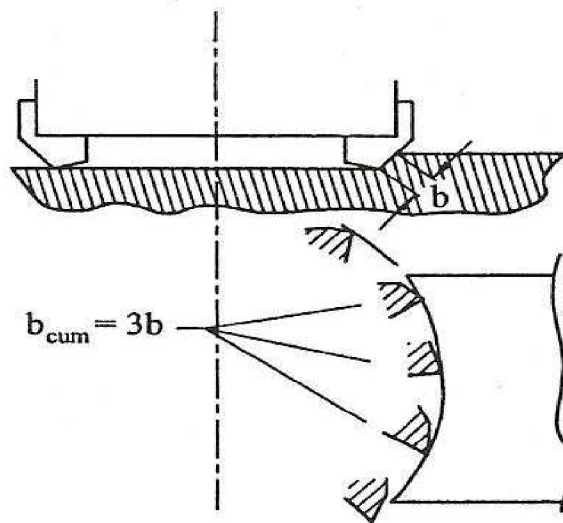
Obr. 1.5 Samobuzené kmitání – podle[3]

1.4 Chvění při řezání kovů

Chvění je samobuzený typ kmitání, který vzniká při řezném procesu, pokud je tloušťka třísky příliš velká s ohledem na dynamickou tuhost soustavy. Při takových podmínkách se tyto vibrace rychle objevují a rostou. Řezná síla se stane periodicky proměnnou a dosahuje značných amplitud. Dojde k regeneraci zvlnění obráběného povrchu a tloušťka třísky se mění ve velkém rozsahu. Chvění se snadno rozpoznatelné podle zvuku spojeného s vibracemi, podle stopy, kterou zanechává na povrchu obráběné plochy a podle vzhledu třísky. Dojde-li ke chvění, je obrábění většinou nepřijatelné, protože dochází k velkým změnám hodnot proměnné řezné síly, což může způsobit poškození nástroje nebo některých částí stroje. Současně musí být dodržena tloušťka třísky a rychlost odběru materiálu musí být pod hranicí, po jejímž překročení vzniká chvění. S ohledem na tyto skutečnosti je chvění často faktor, který limituje rychlost odběru materiálu pod hodnotu, které odpovídají charakteristiky stroje jako je výkon a točivý moment vřetena.

1.5 Mechanismy samobuzeného kmitání při řezání kovů

Hlavním řezným parametrem rozhodujícím, zda dojde ke vzniku chvění je šířka řezu (šířka třísky) b na obr. 1.6. Pro dostatečně tenkou třísku je řezný proces stabilní bez chvění. Ke chvění dochází a nabývá na síle pro všechny hodnoty v v rozsahu $b > b_{lim}$. Hodnota b_{lim} závisí na dynamických charakteristikách soustavy, na materiálu obrobku, řezné rychlosti, posuvu a na geometrii nástroje. Při frézování musíme také zvážit úhrnnou šířku třísky b_{cum} , která je součtem všech šířek třísky všech zubů v záběru.

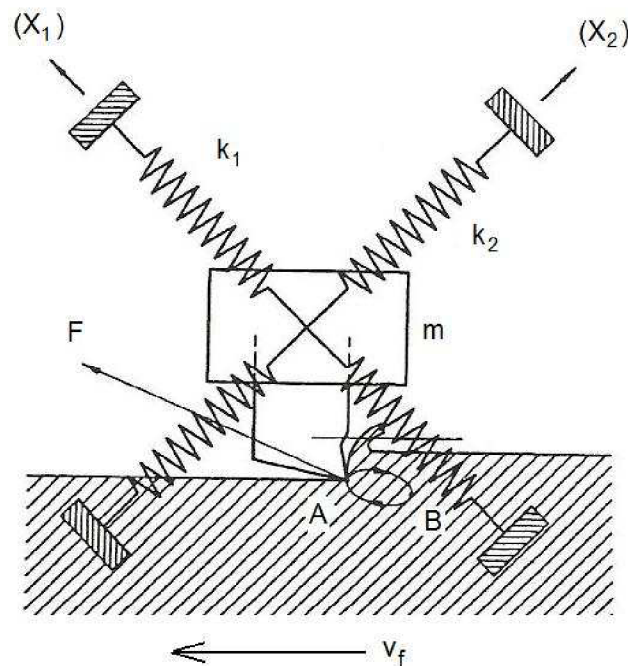


Obr. 1.6 Úhrnná tloušťka třísky pro 3 zuby v záběru - podle[3]

Existují dva hlavní důvody vzniku chvění v řezání kovů:

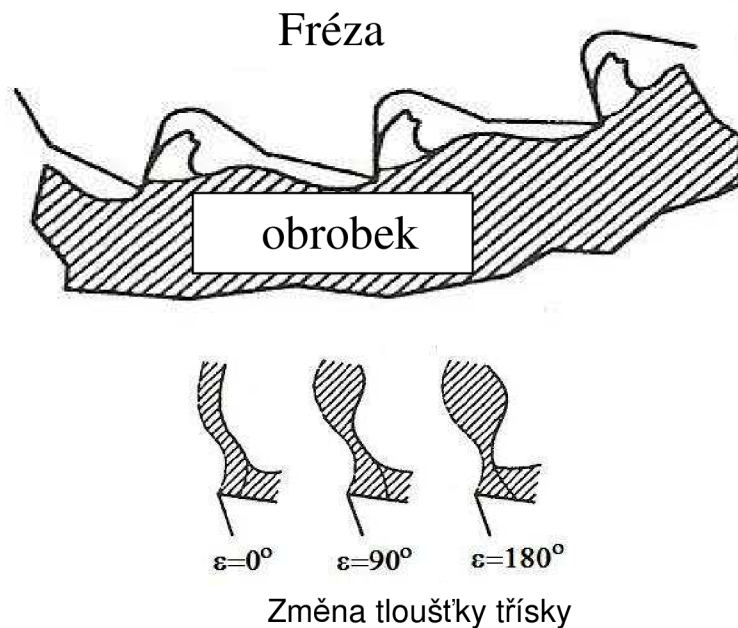
- princip polohové vazby,
- regenerace vlnitosti povrchu.

Princip polohové vazby je mechanismus samobuzených vibrací, který vzniká pouze v situaci, kdy existují relativní vibrace mezi nástrojem a obrobkem současně alespoň ve dvou směrech v rovině ortogonálního řezu, viz obr.1.7. Nástroj je připojen k tělesu zavěšeném na dvou sadách na sebe kolmých pružin. Současné vibrace ve směru X_1 a X_2 , se stejnou frekvencí a fázovým posunem, jsou výsledkem eliptického pohybu. Obrodek se pohybuje stálou rychlostí v_f , nástroj se pohybuje po eliptické dráze ve směru šipek. Pro část periodického pohybu, kdy je pohyb nástroje z bodu $A \rightarrow B$, působí síla proti tomuto pohybu a tak mu odebírá energii. Během pohybu z $B \rightarrow A$ síla "tlačí" nástroj a dodává jeho pohybu energii. Jelikož se pohyb $B \rightarrow A$ nachází hlouběji v řezu, síla F je větší než při pohybu $A \rightarrow B$. Energie dodaná silou F periodickému pohybu v oblasti $B \rightarrow A$ je větší než energie odebraná v oblasti $A \rightarrow B$. Pravidelně vzniká přebytek energie, který zachovává vibrace proti ztrátám vzniklým tlumením.



Obr. 1.7 Princip polohové vazby se dvěma vzájemně kolnými stupni volnosti – podle[3]

Regenerace vlnitosti povrchu viz obr. 1.8, je způsobena odběrem třísky z povrchu obrobku nástrojem při jakémkoliv obrábění, který byl vytvořen stejným nástrojem v předchozím kroku, jako je povrch vytvořený při soustružení v předchozí otáčce nebo ve frézování předešlým zubem frézy. Pokud dojde k vzájemné vibraci mezi nástrojem a obrobkem, pak dochází k regeneraci vlnitosti na obráběném povrchu. Nástroj v následujícím kroku narazí na zvlněný povrch a jak tloušťka třísky, tak i řezná síla mění periodicky svou hodnotu. Takto vzniklé vibrace, závislé na zmíněných podmínkách, mohou být alespoň tak velké jako v předešlém kroku. Nově vytvořený povrch je opět zvlněný. Tímto způsobem se nepřetržitě vytváří další zvlnění.



Obr. 1.8 Regenerace vlnitosti povrchu, Změna tloušťky třísky závisí na fázi mezi vibracemi dvou následujících kroků - podle[3]

Vznik vlnitosti je ovlivněn druhem operace. Mezi jednotlivými záběry zubu nástroj vychází ze záběru a jeho vibrace slábnou. Na počátku dalšího řezu se mohou jeho vibrace volně přizpůsobit na fázi pro maximální obnovení vibrací.

Regenerace vlnitosti na povrchu je popsána rov. 1.4

$$p = N + \frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{f_{ch}}{n} \quad (1.4)$$

Číslo p se skládá z celého počtu vln N a části vlny, kterou představuje zlomek $\varepsilon/2\pi$.

Pokud bude úhel posunutí ε nabývat hodnot $\varepsilon = 2k\pi$, kde $k=1,2,3,\dots,n$ a bude platit podmínka pro mez stability dle rov. 1.11. Dynamická síla dle rov. 1.10 na mezi stability je nulová a obrábění bude stabilní.

Naopak při $\varepsilon = \frac{3}{2}k\pi$ je budící síla největší a soustava bude mít největší sklon k nestabilitě. Z tohoto vyjádření regulujeme otáčky tak, aby platila podmínka $\varepsilon = 2k\pi$. Rov. 1.4 může být upravena

$$N + \frac{\varepsilon}{2\pi} = \frac{f_{ch}}{n} \quad (1.5)$$

odkud stanovíme otáčky tak, aby levá strana rov. 1.5 byla celočíselná beze zbytku vlny [2].

Pokud tomu tak bude, existuje zřejmě otáčková řada

$$n = \frac{f_{ch}}{N} \quad (1.6)$$

kde $N=1,2,3,\dots$, která se zvoleným nástrojem zaručí obrábění bez chvění.

Maximální hodnota otáček bez chvění je

$$n = \frac{60f_{ch}}{m \cdot N} \quad (1.7)$$

1.6 Limitní podmínky pro stabilní obrábění

Teorie chvění je založena na několika zjednodušeních, u kterých bylo experimentálně prokázáno, že příliš nemění nejdůležitější účinky na stabilitu.

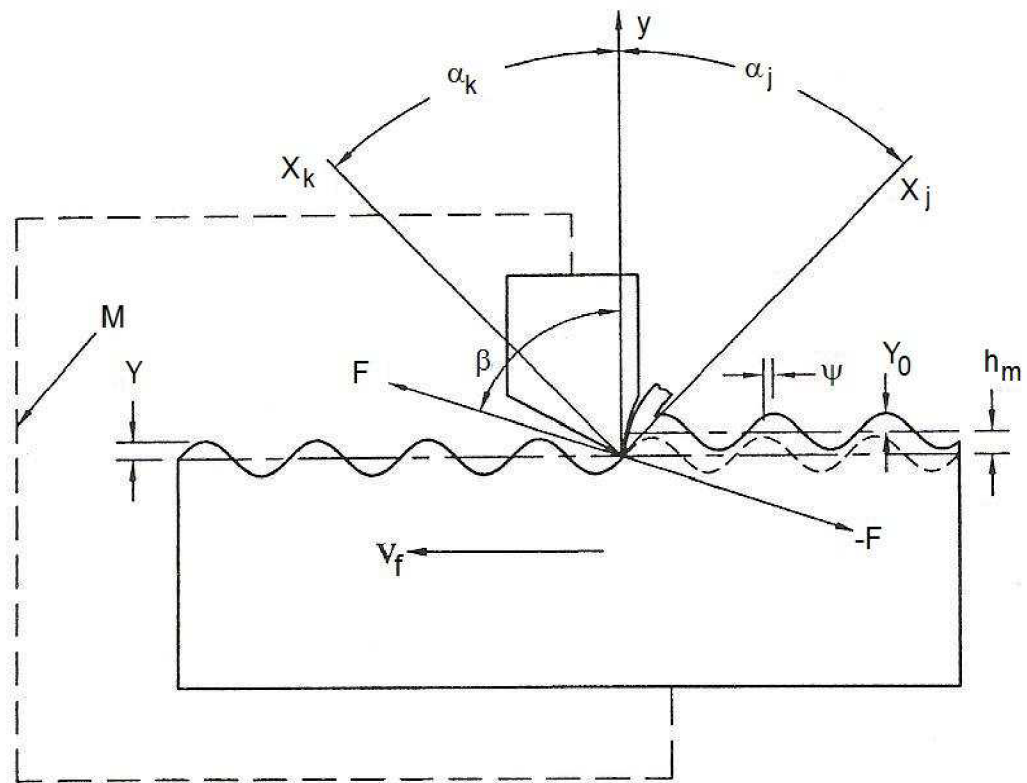
Zjednodušení jsou následující:

- vibrační soustava stroje je lineární, což znamená, že odezva soustavy je přímo úměrná odpovídajícímu buzení. V praxi se nesetkáme se soustavami čistě lineárními, avšak pro popis vlastností zkoumaných soustav (*modální analýza*) uvažujeme nejlepší možnou lineární aproximaci systémové odezvy [10],
- směr proměnné řezné síly je stále stejný,
- proměnná složka řezné síly závisí pouze na vibracích ve směru normály na obráběný povrch,
- hodnota proměnné složky řezné síly se mění úměrně a okamžitě s hodnotou tloušťky třísky,
- frekvence kmitání a vzájemný fázový posun zvlnění v následných překrývajících se řezech nejsou ovlivněny vztahem vlnové délky a délkou řezu; tento předpoklad odpovídá řezu o nekonečné délce.

Teorie chvění předpokládá lineární kmitavou soustavu a při řešení těchto soustav se měří odezvové funkce, které jsme schopni měřit na obráběcích strojích. Přes mechanickou složitost obráběcích strojů můžeme změřit jejich modální interpretace. Linearita systému stanovuje tři základní předpoklady:

- superpozice – určuje nezávislost pořadí při skládání budících účinků,
- homogenita – určuje nezávislost na velikosti amplitud budícího signálu,
- reciprocita – předpokládá existenci symetrie a tedy místo účinku buzení a místo zjišťování odezvy je volně zaměnitelné při získání shodné hodnoty přenosu [10].

Podmínky pro limitní obrábění jsou odvozeny s odkazem na obr. 1.9. Schéma obrábění je zobrazeno jako uchycení obrobku na jedné straně a nástroj na straně druhé. Mezi nimi dochází k relativnímu pohybu ve směru rychlosti posuvu v_f . Takové uspořádání tvoří vibrační soustavu, která je charakterizována jednotlivými módy vibrací ve směrech X_k a X_j . Každý z nich reprezentuje volnost relativního pohybu mezi nástrojem a obrobkem a má specifický směr. Vibrační složka, což je kolmice k obráběnému povrchu, vytváří zvlnění s amplitudou Y_0 v jednom řezu a v následujícím amplitudu Y . Směry jednotlivých režimů vibrací jsou měřeny od osy y pomocí odpovídajících hodnot úhlů α_i .



Obr. 1.9 Znárodnění regenerace vlnitosti zahrnující sílu, vlnitost povrchu a vibrace

Proces samobuzení vibrací probíhá v uzavřené soustavě, ve které vibrace způsobují změny síly a opačně. Síla závisí na vibracích v nejméně dvou následujících řezech. Maximální hodnota řezné síly při stabilním frézování tj. bez chvění je

$$F_{stat} = K_s b h \quad (1.8)$$

kde h tloušťka třísky skládající se z ustálené hodnoty h_m (střední tloušťka třísky); změny Y_0 v "horní vrstvě", což je zvlnění na povrchu z předchozího kroku; změny Y v "dolní vrstvě" kvůli vibracím v probíhajícím kroku.

$$h = h_m + (Y_0 - Y)e^{j\omega t} \quad (1.9)$$

Jelikož se jedná o lineární systém, můžeme zapsat vztah mezi amplitudou budící síly F a amplitudou změny tloušťky třísky h :

$$F_{dyn} = K_s b (Y_0 - Y) \quad (1.10)$$

kde b je šířka třísky a $(Y_0 + Y)$ a změna tloušťky třísky.

Podmínka pro stabilní obrábění může být formulována tak, že vibrace neodeznívají, ani se nezvyšují po každém záběru zubu nebo také, že jejich maximální hodnoty $|Y_0|$ a $|Y|$ se rovnají:

$$\frac{|Y_0|}{|Y|} = 1 \quad (1.11)$$

Limitní hodnota šířky třísky je vyjádřena rovnicí

$$b_{\text{lim}} = \frac{-1}{2K_s \operatorname{Re}(G)_{\text{neg}}} \quad (1.12)$$

Šířka třísky je kladné číslo, proto rov. 1.12 může platit pouze pro zápornou část funkce $\operatorname{Re}G(\omega)$. Mimoto, ze všech hodnot b , které vyhovují rov. 1.12 existuje jedna minimální šířka třísky, tj. maximální hodnota, při které je obrábění stabilní. Tato hodnota je kritická limita pro stabilitu a odpovídá největší negativní hodnotě $\operatorname{Re}G(\omega)$

$$b_{\text{lim,cr}} = \frac{-1}{2K_s \operatorname{Re}(G)_{\text{min}}} \quad (1.13)$$

- pro šířky třísky $b < b_{\text{lim}}$ je řezný proces stabilní, nedochází k žádným samobuzeným vibracím,
- pro šířky třísky $b > b_{\text{lim}}$ se objeví chvění a bude narůstat.

V praxi se amplituda chvění ustálí na konečné hodnotě.

Rov. 1.12 má velký praktický význam. Je používána k analýze a designu konstrukcí s maximální stabilitou a co nejmenší vahou. Nabízí definování kritérií pro dynamické vlastnosti konstrukcí stroj-nástroj.

Nástroj obrábí zvlněný povrch a přitom sám kmitá. Kmity a zvlnění povrchu jsou fázově posunuty o úhel ϕ :

$$\phi = 2\pi - 2\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re}(G)}{\operatorname{Im}(G)} \quad (1.14)$$

kde $\operatorname{Re}(G)$ je reálná složka přenosové funkce a $\operatorname{Im}(G)$ je imaginární složka.

Rov. 1.14 platí, pokud $|Y_0| = |Y|$.

Je-li periodické zvlnění na povrchu obrobku a kmitání nástroje, pak bude i periodická změna tloušťky právě odřezávané třísky.

Do vibrační soustavy zahrneme vřeteno, jeho uložení, hmotnost rotoru motoru, pokud je integrovaný uvnitř vřetena, upínání nástroje a nástroj. Této kmitavé soustavě budeme říkat "vřetenová jednotka". Frekvence chvění, daná modálními vlastnostmi vřetenové jednotky, které tato soustava podléhá, může být blízká zubové nebo dokonce otáčkové frekvenci [2].

1.7 Řezné podmínky ovlivňující stabilitu obrábění

Pro vibrace a následně změny tloušťky třísky je odezva vyvolaná proměnnou silou úměrná šířce třísky b . S dostatečně malou hodnotou b je obrábění vždy stabilní. Jakmile se ale hodnota b zvyšuje, dojde k dosažení a překročení limitní hodnoty b_{lim} a následně ke chvění.

Podmínky ovlivňující stabilitu obrábění:

- materiál obrobku,
- posuv,
- řezná rychlost,
- geometrie nástroje.

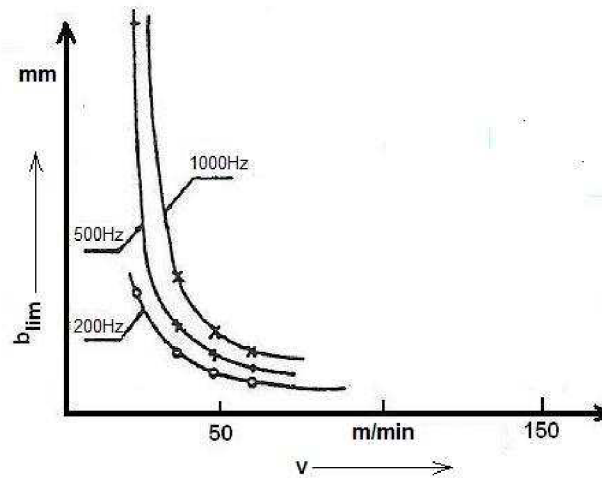
Vliv materiálu obrobku je spojen s řezným odporem K_s . Tento vliv je popsán z rov. 1.12. Pokud řezný odpor K_{sA} materiálu A bude $1,5K_{sB}$, pak právě materiál B bude mít 1,5x nižší hodnotu b_{lim} .

Vliv posuvu f je vliv střední tloušťky třísky h_m . Mezi těmito dvěma parametry je přímá úměrnost. Vliv h na b_{lim} je hlavně spojován s ovlivněním hodnoty K_s .

Hodnota K_s klesá, pokud h roste. U operací jako je soustružení nebo vyvrtávání se stabilita zvyšuje se zvětšujícím se posuvem. Často je b_{lim} menší pro malé posuvy. Operace, pro které je tenká tříska typická, jsou více

náchylné ke chvění. Nicméně tento efekt nemůže být aplikován stejnou mírou na frézování, kde se chvění obvykle zvětšuje s narůstající rychlostí posuvu. Ve většině frézovacích operací má tříska na počátku záběru nulovou tloušťku (nesousledné frézování) nebo u nulové tloušťky třísky ostří ze záběru vychází (sousledné frézování). Nastávají ale také okamžiky, kdy kombinace tenká tříska/malý posuv snižují stabilitu. Pokud zastavíme posuv, pak se na okamžik objeví chvění jako odraz toho, že se řezný nástroj postupně dostává ze záběru a tak bude mít tloušťka třísky nulovou hodnotu. Efekt posuvu může mít jak stabilizační (soustružení), tak i destabilizační účinky, které ale většinou nejsou příliš silné.

Řezná rychlost a její ovlivnění stability je často spojován s tlumením při řezném procesu. Dle rov. 1.10 je proměnná složka řezné síly úměrná změně tloušťky třísky a je předpokládáno, že koeficient $K_s b$ je reálné číslo, což znamená, že nedochází k žádnému fázovému posunu mezi dvěma změnami tloušťky třísky. K fázovému posunu může dojít při generování proměnné síly, znamenající vznik tlumení v kmitavém pohybu nástroje při tvorbě třísky. Takovéto tlumení je významné při velmi malých řezných rychlostech, pod 25m/min a hlavně nižších než 10m/min. zvýšení stability za těchto řezných rychlostí je velmi výrazné. Diagram na obr. 1.11 je typický pro obrábění uhlíkových ocelí. Vyjadřuje změny limitní hodnoty šířky třísky b_{lim} jako funkci řezné rychlosti pro soustavy s různými přirozenými frekvencemi: 200, 500 a 1000 Hz. Pro poslední dvě zmiňované frekvence nedojde k výskytu chvění za rychlosti pod 25 m/min a pro systém s nejnižší přirozenou frekvencí při rychlosti menší než 10 m/min. Tento silný stabilizační efekt je využíván v praxi. Některé operace, které jsou neodmyslitelně spjaté s problematikou chvění kvůli vysoké hodnotě šířky třísky, mohou být prováděny pouze při velmi nízkých řezných rychlostech. Z diagramu stability na obr. 1.12 je zřejmé, že hlavně při vysokých rychlostech, s nimiž přímo souvisí otáčky vřetena, dochází k velmi vysokému nárůstu stability.

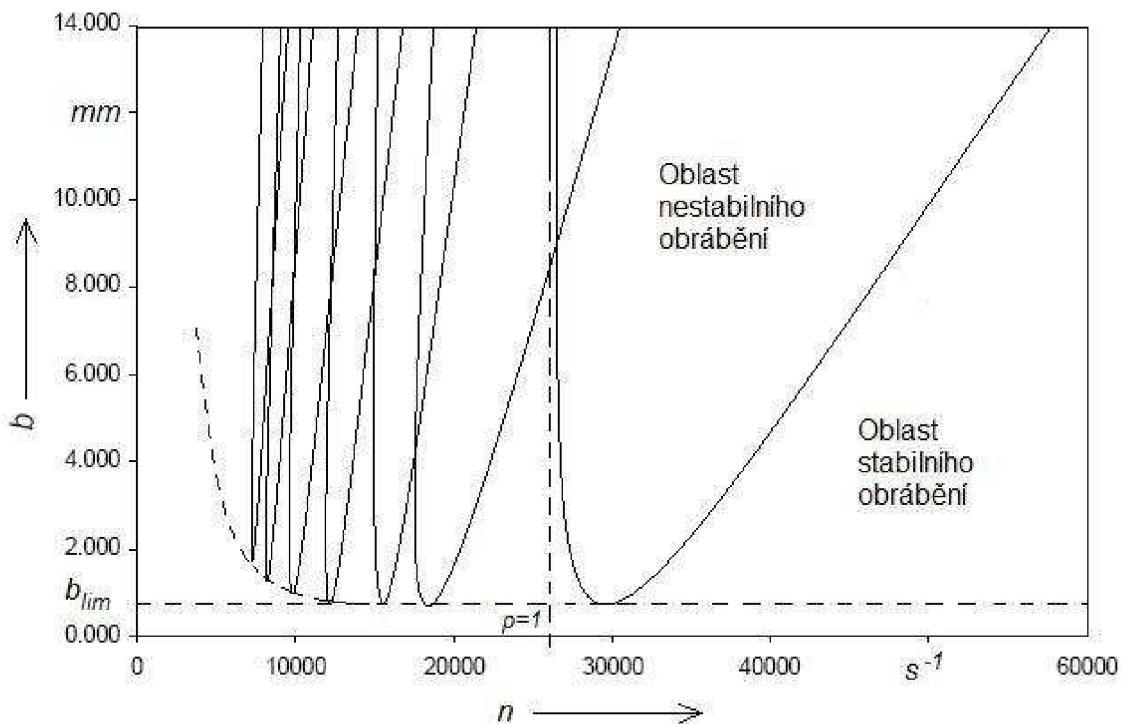


Obr. 1.11 Ovlivnění stability díky nízké řezné rychlosti

1.8 Diagramy stability – lobe diagramy

Diagram stability je graf oddělující nestabilní kombinaci šířky třísky a otáčky vřetene (otáčky, při kterých vzniká chvění) od kombinací stabilních. Řez za stabilních podmínek je možný v oblasti pod hranicí stability. Naopak nestabilní podmínky jsou nad touto hranicí.

Na obr. 1.12 je vidět, že je často možné zvýšit hodnotu šířky řezu, aniž by se vyskytlo chvění, současným zvýšením otáček vřetena než jejich snižováním. Toto chování je jeden z důležitých důvodů, jak charakterizovat dynamickou odezvu řezného nástroje a vytvořit tak odpovídající diagram stability.



Obr. 1.12 Ukázka diagramu stability

Graf na obr. 1.12 je vyhodnocen tak, že je uvažována obálka všech lobes “laloků”, jako hranici mezi stabilní oblastí pod touto obálkou a oblastí chvění nad touto obálkou. Maximální míra stability, dovolující obrábění při nejvyšší hodnotě hloubky řezu je získána při rychlosti vřetene, při které je zubová frekvence f_z stejná jako přirozená frekvence soustavy f_n .

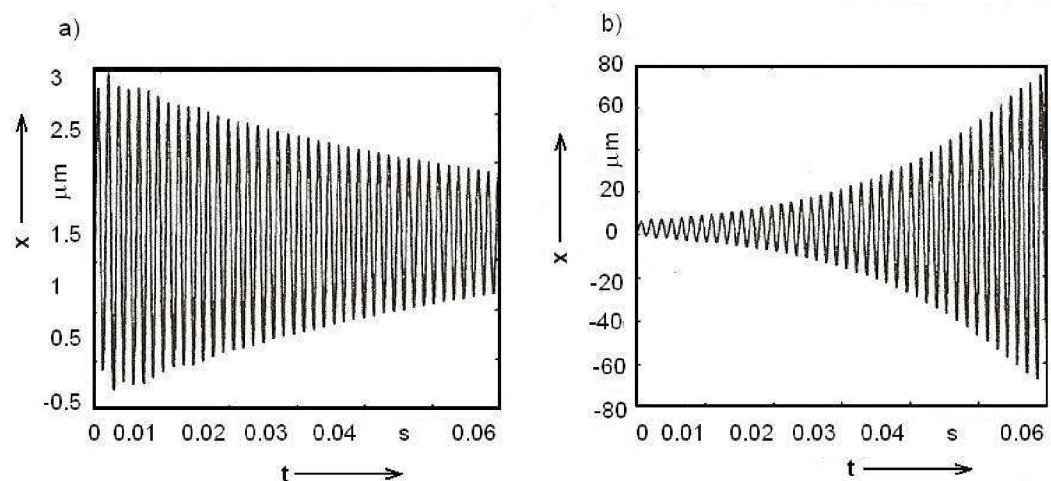
“Laloky” se zmenšují se snižujícími se otáčkami a naopak. “Laloky”, mezi kterými je mezera určující nejvyšší míru stability je možno najít v blízkosti hodnot $p = 1(N + 1)$, kde N je celočíselná část hodnoty počtu vln mezi zuby rezného nástroje a p je jejich celkový počet.

Pro menší rezné rychlosti je N vyšší a maxima stability jsou blízko u sebe a nejsou moc vysoké. To znamená, že pro mnoho vln, které vzniknou mezi následujícími záběry zubů je změna stability vlivem rychlosti vřetene nevýznamná. S otáčkami vřetene, blížícími se $n = f_n / m$ (jedna vlna mezi zuby), může být podstatné zvýšení stability docíleno zvolením přesné hodnoty otáček. Je důležité mít tedy možnost, v případě frézování, kde může být počet zvlnění způsobených chvěním mezi zuby nástroje nízký, plynule měnit otáčky

vřetene, tak abychom byli schopni zvolit rychlost co nejpříznivější pro obrábění.

Mezi nástrojem a obrobkem existuje několik významných druhů vibrací a diagram stability obsahuje několik druhů "lobes". Nicméně pouze jeden typ je dominantní a obsahuje jednu největší "mezeru" indikující otáčky vřetene pro nejhlubší stabilní řez.

Pro vhodné simulace, viz obr. 1.14, jsou dostupné softwary. Tyto testy mohou být naprogramovány přes velký rozsah otáček vřetene a hloubek řezu. Poskytnuté grafy vibrací a silových amplitud pokrývají celou škálu kombinací řezných podmínek axiálních, radiálních hloubek řezu a otáček vřetene. K získání těchto "map" je nezbytné změření dynamických charakteristik (přenosová funkce) všech nástrojů použitých během jednotlivých operací.



Obr. 1.14 Simulace chvění při frézování a) pro $b=1\text{mm}$, stabilní b) pro $b=2\text{mm}$, nestabilní – podle[3]

Alternativní metodou k nalezení nejvíce stabilních podmínek je použití kontrolního systému propojujícího mikrofon k zachycení a zpracování zvuku frézovací operace. Tak se určí v reálném čase frekvence chvění, která je stejná jako zubová frekvence a vypočítá se ideální rychlost. Tento postup je založen na předpokladu, že frekvence chvění je velmi blízká přirozené frekvenci dominantního vibračního módu.

Samostatné vlivy řezných parametrů na chvění:

- šířka třísky b při frézování: zvětšováním hodnoty b má za následek změnu stavu ze stabilního na nestabilní,
- tloušťka třísky h , posuv na zub f_z mají velmi malý vliv na limitní hodnotu b_{lim} ,
- řezná rychlost v_c : při malých řezných rychlostech proces tlumení potlačuje chvění. Můžeme tedy použít vyšší hodnoty b_{lim} ,
- otáčky vřetene: vliv otáček má přímou spojitost s řeznou rychlostí. Správnou volbou n se může hodnota b_{lim} podstatně zvýšit.

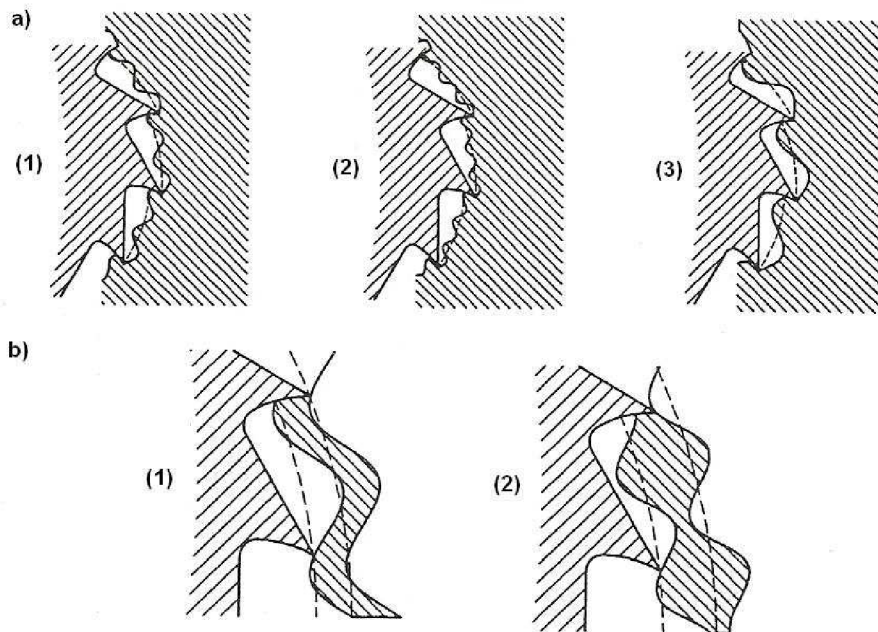
Posunutí nástroje vůči zvlněním na povrchu obrobku je dáno fázovým úhlem ε , který se mění s rychlostí vřetene. V rov. 1.4 pro určení fáze mezi následujícím zvlněním je rychlost vřetene nahrazena počtem zubů m a otáčkami vřetene n . otáčky vřetena jsou při frézování vyšší než při soustružení

$$v_c = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{1000} \quad (1.15)$$

kde d je průměr nástroje, který je mnohem menší než průměr obrobku při soustružení. Místo $d=200 \text{ mm}$ při soustružení, použijeme např. čelní frézu o průměru $d=100 \text{ mm}$ nebo stopkovou frézu o průměru $d=19 \text{ mm}$.

Uvedme příklad frézování oceli danou stopkovou frézou se čtyřmi zuby $m=4$, zubová frekvence je $f_z = m \cdot n = v / (\pi d) = 167,53 \text{ s}^{-1}$ je získaná s řezné rychlosti $v = 150 \text{ m/min}$. Při $n = 167,53 \text{ s}^{-1}$ je pak zubová frekvence $f_z = 670,13 \text{ s}^{-1}$. Předpokládejme přirozenou frekvenci stopkové frézy $f_n = 880 \text{ s}^{-1}$. Počet vln mezi zuby je $p = 880 / 670,13 = 1,31$. Získat pro tu samou fázi (stejný počet částečných vln) např. počet vln $p = 2,31$, rychlost vřetene by se musela zvýšit o 76%. V takovémto rozsahu se stabilita mění velmi značně. Ve frézování a především ve vysokorychlostním frézování, může mít změna rychlosti vřetene velmi silný efekt na zvětšení hloubky řezu a té odpovídající rychlost odběru materiálu.

Tento vliv je na obr. 1.13. V horní části je ukázáno, jak jsou vlny, které jsou při frézování vytvořeny zubem na povrchu při chvění, znovu přeřezány následujícím zubem. Za rychlosti vřetene (*a1*) vznikne mezi zuby několik vln a jejich část. Při (*a2*) je rychlost vřetene nižší. Frekvence generování vln se nezměnila, protože se stále jedná o frekvenci f_{ch} , při které vzniká chvění a ta je blízká přirozené frekvenci nástroje f_n . Na (*a3*) se rychlost vřetene zvýšila, objevila se pouze jedna a malá část vlny. Na (*b1*) se mezi zuby nachází pouze jedna vlna. Ačkoliv by byly vibrace předpokládány, jsou vlny vytvořené dvěma následujícími zuby ve fázi, což má za následek, že nedochází ke změně tloušťky třísky a ke změně síly. Tyto vibrace nebudou znova vybudeny a odezní. Toto je stabilní případ. Na (*b2*) je mezi zuby jeden a půl vlny pro totožnou amplitudu vibrací, ale tloušťka třísky se mění s dvojnásobnou amplitudou, což generuje sílu, která se pohybuje ve velkém rozsahu a budí tak další vibrace.



Obr. 1.13 Vliv řezné rychlosti na počet vln mezi zuby řezného nástroje – podle[3]

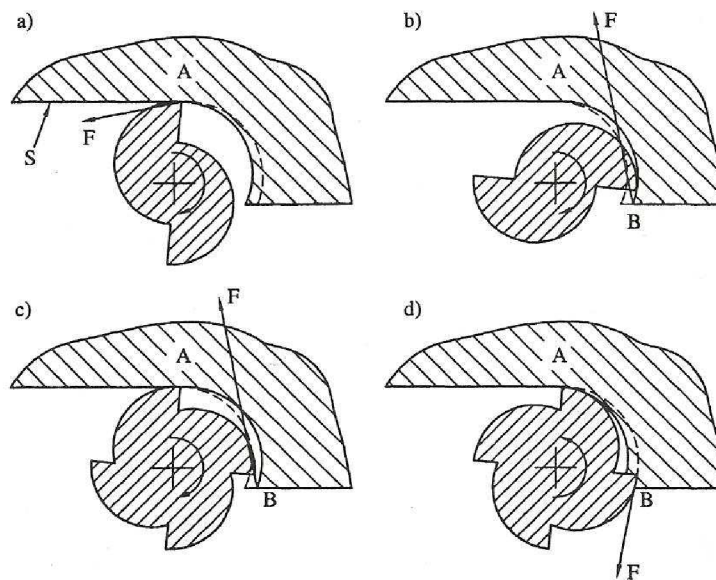
2 SÍLY A VYNUCENÉ KMITÁNÍ VE FRÉZOVÁNÍ

2.1 Přesnost frézování stopkovou frézou: přímé zuby

U zjednodušeného přístupu se předpokládá řezný nástroj s přímými zuby a s okamžitou odezvou na zatížení (statický přístup).

Na obr. 2.1 jsou zjednodušené stopkové frézy s přímými zuby. V nesousledném frézování (a) až (c) se stopková fréza většinou vychyluje směrem k obrobku. Každý zub je postupně zatížen malou silou F v bodě A, která dosahuje svého maxima v bodě B. V bodě A každý zub vytváří obrobený povrch S. V případě dvoubřité frézy (a) nedochází prakticky k žádnému vychýlení, pokud se zub nachází v bodě A. v (b) dojde k velkému vychýlení, avšak jelikož obrábíme dvoubřítým nástrojem, tak v bodě A není v záběru žádný zub, který by toto vychýlení zanesl na obráběný povrch. Pokud ale čtyřbřítá fréza (c) obrábí v radiální hloubce řezu alespoň tak velké jako je poloměr nástroje, pak dojde k přenesení vychýlení na obráběný povrch. V sousledném frézování (d) je situace obdobná, avšak nástroj je vychýlen směrem od obrobku. Ve skutečnosti zuby nejsou přímé, ale jsou ve šroubovici a vztah mezi silovým zatížením, vychýlením a tvarem obráběného povrchu je mnohem komplikovanější.

Z předchozího odstavce vyplývá, že pro řezné nástroje s přímými zuby jsou preferovanější dvoubřité frézy. Ačkoliv se vyskytuje značné odchýlení při obrábění dvoubřitou frézou, obráběný povrch je relativně přesný a neovlivněný těmito odchylkami. Aplikace tohoto předpokladu je pouze v případech nízkých otáček vřetene, při kterých je zubová frekvence mnohem nižší než přirozená frekvence vibrační soustavy nástroje.



Obr. 2.1 Síly působící na stopkové frézy a jejich vliv na přesnost obráběného povrchu - podle[3]

2.2 Vynucené kmitání a jeho důsledek jako nepřesnost obrobeneho povrchu

Harmonická síla produkuje harmonické deformace a vibrace o stejné frekvenci jakou má síla. Amplituda vibrací nezáleží pouze na amplitudě síly a na tuhosti soustavy, ale také na poměru frekvence síly f_F a přirozené frekvence soustavy f_n . Pokud jsou tyto dvě frekvence stejné, nastává rezonance a vibrace jsou maximální. Posunutí jsou pak změněna o fázi zaostávající za silou o úhel, který závisí výhradně na poměru frekvencí.

Existuje vzájemný vliv mezi řeznou silou a posunutím, jelikož posunutí ovlivňuje tloušťku třísky, která má vliv na sílu. Tento vzájemný vliv se nazývá regenerace deformací vtisknutých na povrch a vytváří tak základ pro chvění. Avšak v případě vynuceného kmitání hraje regenerace deformací malou roli.

2.3 Síly působící při obrábění stopkovou frézou se zuby do šroubovice

Uvažujme stopkovou frézu se zuby do šroubovice. Změna řezné síly je zásadní pro její vlivy na vynucené kmitání a přesnost obráběného povrchu.

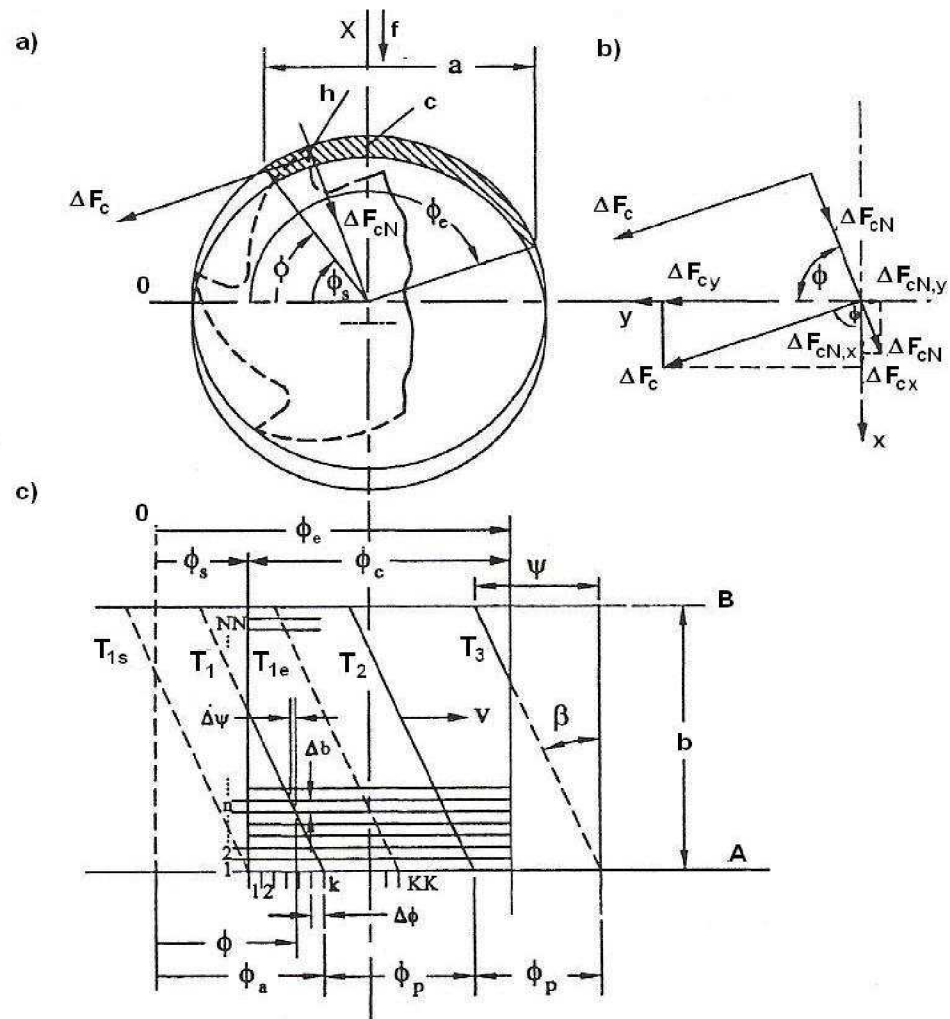
Analýza je založena na diagramech na obr. 2.2 diagram (a) zobrazujících element řezného nástroje na obrobku s radiální hloubkou (šířkou) řezu a a úhlem záběru ϕ měřeného od pozice 0 a záběru v rozsahu $\phi_s < \phi < \phi_e$. Řezný úhel je $\phi_c = \phi_e - \phi_s$. Axiální hloubka řezu je b . Směr posuvu f obrobku proti rotujícímu nástroji je vyznačen a posuv na zub je f_z . Část zubu odřezává třísku o tloušťce h podle rovnice

$$h = f_z \cdot \sin \phi. \quad (2.1)$$

Na diagramu (c) je pohled na “rozbalený” povrch nástroje. Axiální hloubka řezu b je v rozsahu od A do B. Každé ostří zubu je při rozbalení rovnou čarou skloněnou pod úhlem β (úhel šroubovice). Všechny ostří se pohybují obvodovou rychlostí v_c . Jejich pozice je znázorněna zjednodušeně pomocí úhlů ϕ . Správné určení jejich pozice je pak pomocí obvodové vzdálenosti ($r \cdot \phi$), kde r je poloměr nástroje. Záběr zubu leží v rozsahu úhlu ψ , který získáme pomocí rovnice

$$\psi = \frac{b \tan \beta}{r}. \quad (2.2)$$

Nicméně skutečný záběr jakéhokoliv zubu je pouze částečně v oblasti, která je mezi úhly ϕ_s a ϕ_e . V tomto případě jsou v záběru tři zuby T_1 , T_2 a T_3 . Ostří v záběru jsou vyneseny nepřerušovanou čarou, ostatní jsou čárkovaně.



Obr. 2.2 Diagram skládání sil při frézování pro frézy se zuby do šroubovice-
podle[3]

Změna řezné síly je periodická v souladu se "zubovou periodou", která se shoduje s rotací po rozteči ϕ_p . Pak je tedy možné uvažovat na počátku řezu zub T_1 na úrovni A , kdy $\phi_a = \phi_s$ a sledovat pohyb tohoto zubu až do chvíle, kdy $\phi_a = \phi_s + \phi_p$. Zub T_1 se bude pohybovat v tomto rozmezí z pozice označené jako T_{1s} do pozice T_{1e} . Zuby T_2 a T_3 se pohybují shodně, ale v předstihu o ϕ_p respektive o $2\phi_p$. Poloha každého zubu v rozsahu ϕ_p se mění přírůstkově a to o $\Delta\phi$ s počtem kroků k z celkového počtu KK kroků. Každý břit uvažujeme za skládající se z přírůstků o počtu n z celkového počtu NN elementů, ležících na úhlu $\Delta\psi$ a mající výšku Δb .

Element řezné složky síly ΔF_c je úměrný odpovídající elementárnímu pásmu třísky.

$$\Delta F_c = K_s \Delta b \cdot h = K_s \Delta b \cdot c \sin \phi = C \sin \phi. \quad (2.3)$$

Kde $C = K_s \Delta b \cdot c$

Amplituda normálové složky síly je

$$\Delta F_{cN} = 0,3 \cdot \Delta F_c. \quad (2.4)$$

K získání celkové síly zatěžující osu nástroje v jakýkoliv okamžik, to je v jakékoliv úhlové pozici, je nutné započítat elementární síly působící na části ostří, které jsou v záběru. Tyto síly mají odlišné směry. Na obr. 2.2b) jsou síly ΔF_c a ΔF_{cN} posunuty do osy nástroje a rozloženy do složek odpovídajícím pevným osám X a Y .

Potom:

$$\begin{aligned} \Delta F_{cx} &= \Delta F_c \cos \phi = C \sin \phi \cos \phi \\ \Delta F_{cy} &= \Delta F_c \sin \phi = C \sin^2 \phi \\ \Delta F_{nx} &= 0,3 \Delta F_c \sin \phi = 0,3 \Delta F_{cy} \\ \Delta F_{ny} &= -0,3 \Delta F_c \cos \phi = -0,3 \Delta F_{tx} \end{aligned} \quad (2.5)$$

a tedy

$$\begin{aligned} F_x &= \sum_{i=1}^n (\Delta F_{cxi} + \Delta F_{nxi}) \\ F_y &= \sum_{i=1}^n (\Delta F_{c yi} + \Delta F_{ny i}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$F = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Rovnice 2.6 se vztahují na všechny elementy všech zubů zapojených do řezného procesu v daný okamžik.

Počet ostří m , které mohou být v záběru současně je maximálně tolik, kolik se jich vejde do rozpětí řezného záběru $\phi_c = \phi_e - \phi_s$

$$m = \frac{\phi_c + \psi}{\phi_p} + 1, \quad (2.8)$$

přičemž m leží v množině celých čísel.

3 MATEMATICKÝ POPIS KMITÁNÍ PŘI FRÉZOVÁNÍ

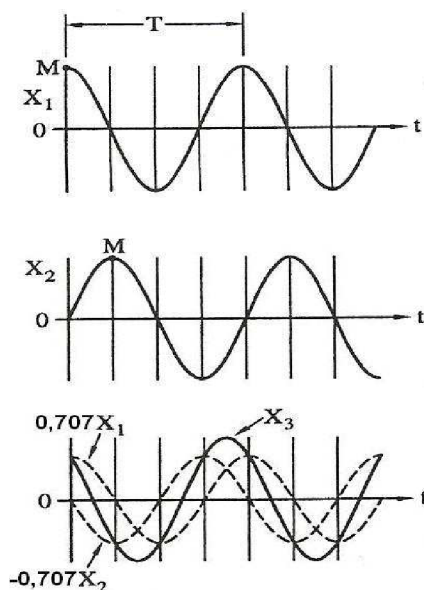
3.1 Průběh základních goniometrických funkcí

K efektivnímu řešení úloh zabývajících se vibracemi, je nutné zrekapitulovat matematické vyjádření harmonických průběhů goniometrických funkcí. Harmonické průběhy funkcí sinus a kosinus jsou na obr. 3.1 a jsou popsány

$$x_1 = A \cdot \cos(\varpi \cdot t) \quad (3.1)$$

a

$$x_2 = A \cdot \sin(\varpi \cdot t) \quad (3.2)$$



Obr. 3.1 Průběhy funkcí sinus, kosinus a jejich superpozice – podle[3]

kde A je amplituda pohybu, $\varpi = 2\pi f$ je úhlová rychlost (rad/s) a f frekvence pohybu vyjádřená v s^{-1} . Je zřejmé, že x_1 a x_2 jsou identické, s rozdílem, že x_2 je posunutá na časové ose oproti x_1 o dobu odpovídající čtvrtině periody T . Proto je například maximální hodnota M nalezena u proměnné x_1 o $T/4$ dříve než u x_2 . Funkce sinus a kosinus jsou periodické po 360° . P otom perioda $T=1/f$ je vyjádřena:

$$\omega T = 2\pi,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega = 2\pi f. \quad (3.3)$$

Časový posun mezi x_1 a x_2 je čtvrtina periody

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

a

$$\sin \omega t = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.4)$$

Je možno říci, že kosinus předbíhá sinus o 90° . Záleží na stavu funkce v čase $t=0$ a na počátku měření času. Proto funkce x_3 , jejíž záznam začíná osminu periody ($\varphi = 45^\circ$) později než funkce kosinus je vyjádřena

$$\begin{aligned} x_3 &= A \cos(\omega t + \varphi) = A(\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi) \\ x_3 &= A \cos \varphi \cos \omega t - A \sin \varphi \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.5)$$

Pro $\varphi = 45^\circ$, $\sin \varphi = \cos \varphi = 0,707$,

$$x_3 = 0,707A(\cos \omega t - \sin \omega t) = 0,707(x_1 - x_2). \quad (3.6)$$

Pro jiný fázový posun φ by byla harmonická funkce sumou všech funkcí sinus a kosinus o stejné frekvenci, ale jiné amplitudě.

Výše uvedené lze znázornit pomocí vektorů v komplexní rovině na obr.3.2a). Harmonická funkce je popsána vektorem o délce A rotujícím úhlovou rychlostí ω :

$$X = Ae^{j\omega t} = A(\cos \omega t + j \cdot \sin \omega t). \quad (3.7)$$

Sinová složka je imaginární a kosinová složka reálná část vektoru. Skutečná hodnota funkce v kterémkoliv okamžiku je reálná kosinová složka. Znázornění v komplexní rovině dovoluje vyjádřit vztah mezi fázemi. Pokud na obr. 3.2b) měření času vektoru začíná v počáteční pozici znázorněné fázovým posunem φ , který vymezuje "komplexní amplitudu", potom

$$X = Ae^{j\omega t} = A(\cos \omega t + j \cdot \sin \omega t). \quad (3.8)$$

Na obr. 3.2c) je průběh funkce sinus, tak že počáteční pozice vektoru je $X_1(\varphi = -\pi/2)$; kosinová funkce má počátek v $X_2(\varphi = 0)$ a funkce s fázovým posunem $\varphi = \pi/4$ začíná v X_3 .

Pomocí těchto vyjádření se harmonická funkce popisuje:

$$x = Xe^{j\omega t} \quad (3.9)$$

kde komplexní amplituda je vektor samotný.

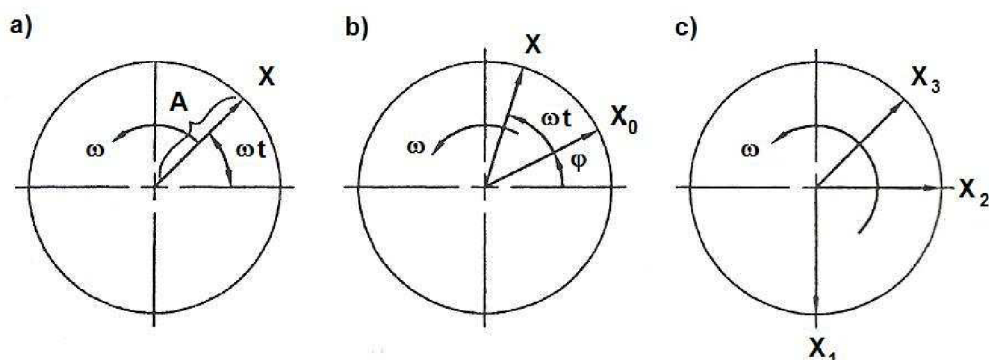
Proto

P

$$X = Ae^{j\phi},$$

r

$$X_1 = Ae^{-j\pi/2}, \quad X_2 = A, \quad \text{a} \quad X_3 = Ae^{j\pi/4}. \quad (3.10)$$



Obr. 3.2 Harmonické proměnné jako vektory v komplexní rovině – podle[3]

3.2 Přenosová funkce soustavy s jedním stupněm volnosti

Přenosová funkce v (Transfer function) je spojena s vynucenými vibracemi; vyjadřuje vztah mezi periodickou silou F a kmity X , vznikající díky této síle. Tato charakteristika popisuje velmi dobře vibrující soustavu a proto je také použita i v případě samobuzených vibrací.

V soustavě s n stupni volnosti se mohou vibrace šířit do n směrů. V praxi se soustavy s jedním stupněm volnosti příliš nevyskytují, avšak složitější konstrukce můžeme rozložit na tyto soustavy a snáze je řešit. Přenosová funkce nejjednodušší vibrační soustavy je na obr. 1.4. Skládá se ze závaží napojeného na pružinu s tuhostí k , která je připojena za druhý konec.

Paralelně s pružinou je zapojen tlumič s tlumícím koeficientem c . Na soustavu působí harmonicky proměnná síla F :

$$F = F_0 e^{j\varpi t} \quad (3.11)$$

Kde F_0 je amplituda a ϖ je frekvence síly. Diferenciální rovnice pohybu soustavy vyjadřuje rovnováhu sil působících na závaží.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{j\varpi t} \quad (3.12)$$

Řešení pro ustálený stav má tvar

$$x = X e^{j\varpi t} \quad (3.13)$$

následně $\dot{x} = j\varpi \cdot x$ a $\ddot{x} = -\varpi^2 x$.

Řešení rovnice 3.13 pro komplexní amplitudu je

$$X = \frac{F_0}{k - m\varpi^2 + jc\varpi} \quad (3.14)$$

a přenosová funkce G je poměr výstupní amplitudy X na vstupní amplitudě F_0

$$G = \frac{X}{F_0} = \frac{1}{k - m\varpi^2 + jc\varpi} \quad (3.15)$$

Pomocí substituce

$k/m = \varpi_n^2$, což je druhá mocnina přirozené frekvence soustavy,

$c/2\sqrt{km} = \zeta$ je poměrný útlum soustavy,

je přenosová funkce vyjádřena jako

$$G = \frac{X}{F_0} = \frac{1/k}{1 - \varpi^2 / \varpi_n^2 + 2j\zeta\varpi / \varpi_n} \quad (3.16)$$

V rov. 3.16 je funkce vyjádřena jako poměr úhlové frekvence ϖ budící síly a přirozené úhlové frekvence soustavy ϖ_n . V rovnici 3.16 lze ϖ nahradit pomocí f :

$$G = \frac{X}{F_0} = \frac{1/k}{1 - f^2 / f_n^2 + 2j\zeta \cdot f / f_n} \quad (3.17)$$

Přenosová funkce je poměr vektorů komplexních amplitud. Obvykle se volí vektor amplitudy síly jako reálný (jako vektor X_2 na obr. 3.2) a stanovuje se posun φ , o který vektor F_0 předbíhá vektor X .

Pro stručnost vyjádření, napíšme $p = f / f_n$, pak je rov. 3.17 ve tvaru

$$G = \frac{X}{F_0} = \frac{1/k}{1 - p^2 + 2j\zeta p} \quad (3.18)$$

Jeden ze způsobů, jak vyjádřit přenosovou funkci je pomocí amplitudy $|G|$:

$$|G| = \frac{1/k}{\sqrt{(1 - p^2)^2 + 4\zeta^2 p^2}}. \quad (3.19)$$

Přenosová funkce lze ale také vyjádřit použitím reálné složky $\text{Re}(G)$ a imaginární složky $\text{Im}(G)$ jako funkce p :

$$\text{Re}(G) = \frac{(1/k)(1 - p^2)}{(1 - p^2)^2 + 4\zeta^2 p^2} \quad (3.20)$$

$$\text{Im}(G) = \frac{-(1/k)(2\zeta p)}{(1 - p^2)^2 + 4\zeta^2 p^2}. \quad (3.21)$$

Rov. 3.19, 3.20 a 3.21 jsou vyjádřeny grafy na obr. 3.3. Tlumičím poměry jsou označeny písmenem z .

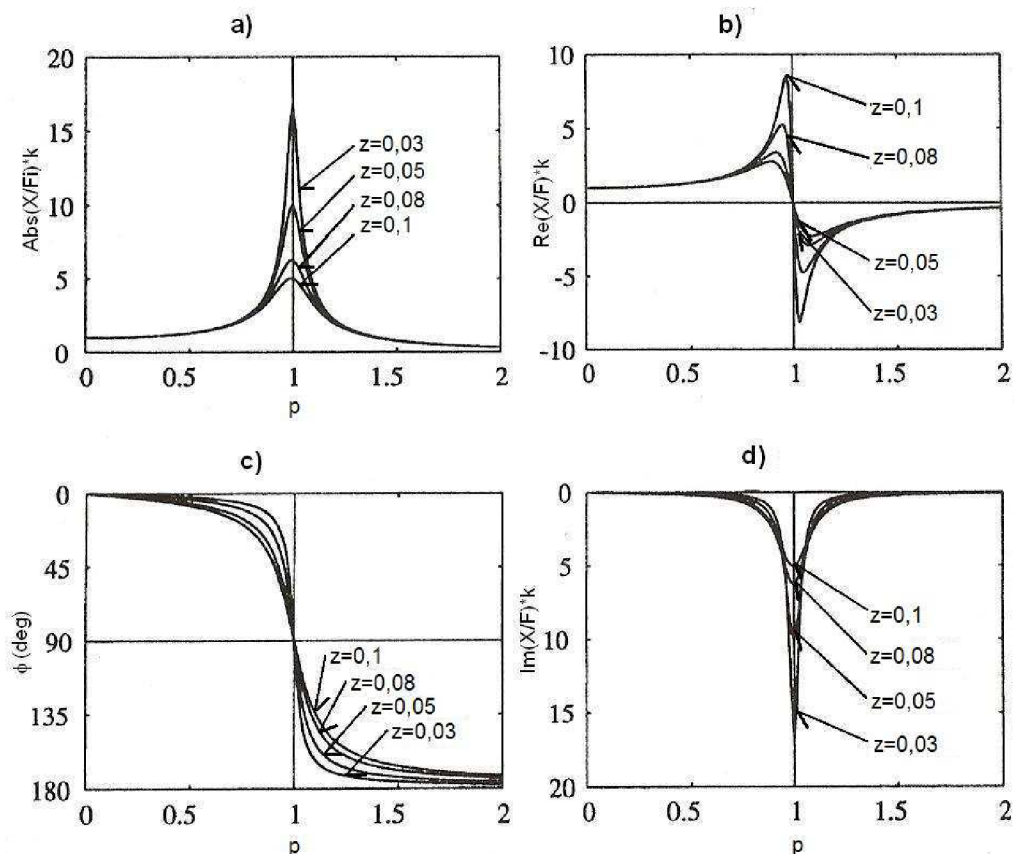
Speciální vlastnosti přenosové funkce:

- při $(f / f_n) = 0$, je hodnota přenosové funkce $G=1/k$ čistě reálná,
- při $(f / f_n) = 1$, je fázové posunutí přesně $\varphi = \pi/2$. Tento stav se nazývá resonance. Hodnota G vypočtená dle rov. 3.22 je čistě imaginární a je velmi blízko své maximální negativní imaginární hodnotě.

$$G = \frac{-j}{2k\zeta} \quad (3.22)$$

- Maximální hodnota $|G|$ se objevuje blízko stavu resonance při podmínkách $\frac{f}{f_n} = \sqrt{(1 - \zeta^2)}$ a tato hodnota je přibližně

$$|G|_{\max} \approx 1/2k\zeta \quad (3.23)$$



Obr. 3.3 Přenosová funkce pro jeden stupeň volnosti vyjadřující poměr amplitudy harmonického kmitu a amplitudy harmonické síly; a), c) vyjádření maximálních hodnot a posuvů; b) reálná a d) imaginární část – podle [3]

3.3 Měření modálních parametrů

Modální analýza má velký význam v technické diagnostice. Díky této metodě a určených výsledných modálních vlastností systému můžeme získat úplný dynamický popis mechanické soustavy. Většina problémů spojených s nadměrným hlukem či nežádoucími vibracemi v technické praxi je způsobena parametry samotné soustavy. Tyto vlastnosti se vypočítávají a následně vyhodnocují v rámci zkoušek modální analýzy. Díky těmto parametrům dokážeme predikovat výsledné vlastnosti systému.

K výsledným parametrům modální analýzy patří:

- vlastní frekvence soustavy,
- vlastní tvary kmitů,
- vlastní tlumení tvarů kmitů.

Modální analýzu můžeme provádět buď v teoretické rovině jako výpočtovou anebo v rovině praktické provedením experimentálního měření reálné soustavy. Hodnoty vypočtené jsou často porovnávány s hodnotami naměřenými, avšak v technické praxi se jen zřídka shodují. Při matematickém modelování kmitavého chování jsou sestaveny pohybové rovnice a výsledné vlastnosti modální analýzy vypočteny užitím tzv. *modální transformace*. Tato transformace spočívá v náhradě soustavy vzájemně vázaných homogenních diferenciálních rovnic soustavou nezávislých, izolovaně řešitelných homogenních diferenciálních rovnic. Složité výpočty soustavy pohybových rovnic je v mnohých případech nutné podrobit matematickému zjednodušení, které může vést k možným chybám. Teoretická modální analýza se stává nenahraditelnou v případě neexistence reálné soustavy, ale pouze softwarového modelu. Při experimentální modální analýze se určují parametry dané soustavy pomocí experimentálně naměřené vhodné množiny dat frekvenční odezvové funkce $H(\omega)$. Jen korektně provedená experimentální modální analýza nejpřesněji určí skutečné modální parametry [10].

3.3.1 Dynamická měření na obráběcích strojích

Hlavním důvodem, proč se frekvenční odezvové funkce - FRF (frequency response function) používají, je jednoduchost, s jakou lze pomocí nich popsat odezvu reálného systému. Zkoumaná konstrukce je buzena měřitelnou silou. Měří se odezva konstrukce a budicí síla. Podělením těchto dvou signálů se získá již zmíněná přenosová funkce dle rov. 3.18. Pro identifikaci vlastních frekvencí a tlumení stačí provést měření jedné FRF. Pokud chceme zjistit tvar kmitání, je třeba opakovat měření v různých bodech na měřené konstrukci. Z měření provedených v těchto bodech se sestaví model konstrukce. Jako budiče se používají modální kladiva nebo vibrátory.

Při použití druhé skupiny metod se modální parametry odhadují nepřímě, pouze na základě měření odezev zkoumané konstrukce [11].

Pro vybuzení vibrací se nejčastěji používá rázové kladívko obr. 4.3.

Dynamická odezva soustavy může být určena v průběhu vývojové fáze nebo až je soustava/stroj podroben impulsovému silovému testování. Pomocí FFT analyzátoru je přenosová funkce soustavy určena ze silového pulsu generovaného dopadem kladívka a odezva tohoto pulsu měřena akcelerometrem. Touto metodou získáme rozsáhlé informace o frekvenci a tlumícího chování soustavy během testu.

Ocelová hlava rázového kladívka je vybavena nízko odporovým senzorem, na který se dodávají násady různé tvrdosti. Je možné zvolit mezi ocelovou, plastovou, PVC a gumovou násadou společně s přídatnou zátěží na kladívko, umožňující korektní nastavení na testovanou strukturu.

Další metodou je nepřímé odhadování modálních parametrů a to pouze na základě měření odezev zkoumané konstrukce. Při tzv. *R-D testech* je stroj buzen odstředivými silami vznikajícími při rotaci vřetena. Měření je nutné provést při různých otáčkách. Důvodem je, že se tím přeladují frekvence budících sil. Při R-D testu stroje jsou měřeny otáčky a autospektra vibrací. Výsledkem je třírozměrná mapa, kde maxima značí vlastní frekvence stroje. Podle vzorkovací frekvence měřeného signálu rozeznáváme dvě metody: spektrální analýzu a harmonickou analýzu. Při spektrální analýze je vzorkovací frekvence konstantní. Při zpracování signálu probíhá FFT algoritmus (algoritmus rychlé fourierovi transformace). Spektrální mapa je potom složena z autospekter a třetí osou jsou otáčky. Nevýhodou je rozředění signálu vyšších řádů. Důsledkem je, že se ve spektrální mapě osa frekvence transformuje na řádovou. Tato metoda odstraňuje nevýhodu ředění signálu, na každou otáčku připadá stejný počet vzorků. R-D testy se tedy získají údaje o vlastních frekvencích [11].

4 NÁVRH EXPERIMENTU

4.1 Návrh experimentu pro technologii frézování

Cílem experimentu byla predikce samobuzených vibrací a konstrukce diagramu stability, pro vybranou konfiguraci nástroj-stroj. Měření probíhá za klidového stavu stroje pomocí rázového kladívka a vyhodnocovacího softwaru.

Při experimentu vyhodnotíme:

- vyhodnocení získaných dat odezvové funkce a jejich přepočet,
- určení kritické hodnoty šířky třísky $b_{lim,cr}$,
- určení limitních hodnot šířky třísky b_{lim} a otáček n ,
- sestavení diagramu stability pomocí získané závislosti.

4.2 Použité technické vybavení

4.2.1 Obráběcí zařízení

Experiment byl proveden na konzolové vertikální frézce FGH 32 obr. 4.1



Obr. 4.1 Konzolová frézka FGH 32

4.2.2 Nástroj

Pro experimentální měření byla použita válcová čelní fréza o průměru $\varnothing d=32$ mm, ČŠN 222146.



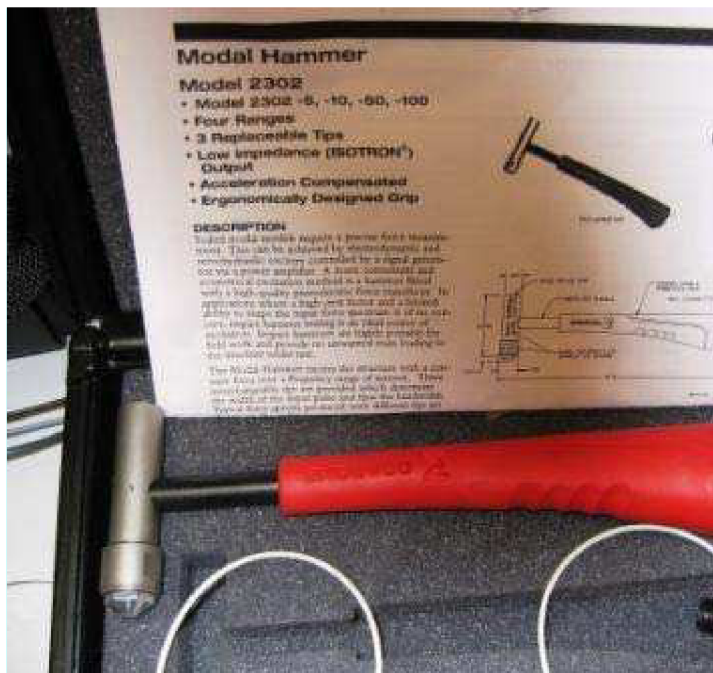
Obr. 4.2 Válnová čelní fréza

Ačkoliv byla při experimentu použita válnová fréza se zuby ve šroubovici. Pro zjednodušení bude uvažována fréza o stejném průměru, ale s rovnými zuby z důvodu zachování konstantní hodnoty tloušťky třísky h při frézování, pomocí které je vypočítán měrný řezný odpor K_s . U fréz se zuby ve šroubovici se mění tloušťka třísky h v závislosti na úhlu šroubovice a na pozici zubu v záběru.

4.2.3 Měřící zařízení

Zařízení k provedení a vyhodnocení experimentu zapůjčila firma Brüel&Kjaer.

Delta Tron impact force hammer, model 2302-5, ENDEVCO. Rázové kladívko je na obr. 4.3.



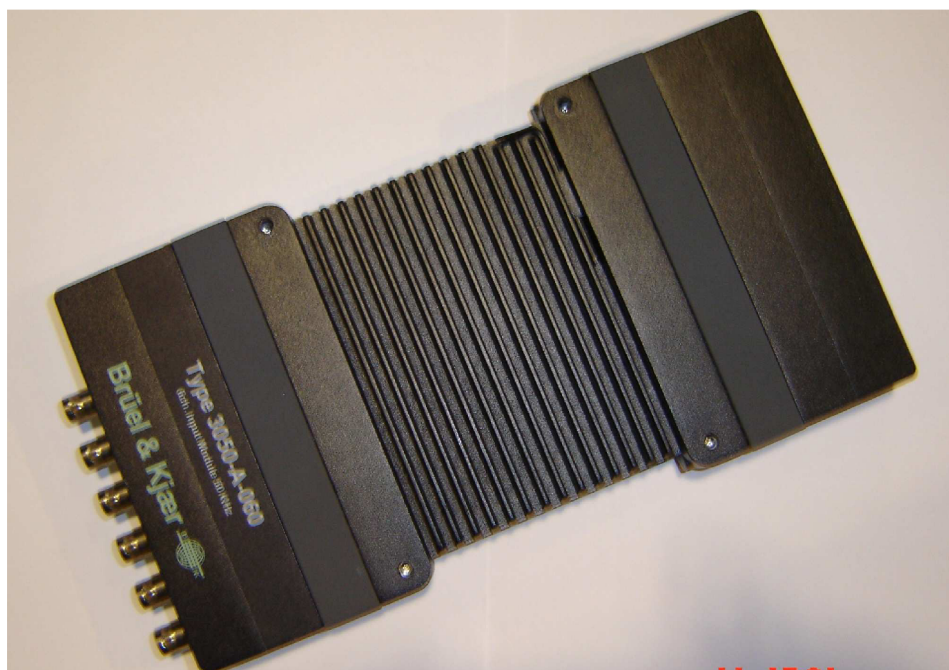
Obr. 4.3 Rázové kladívko

Delta Tron akcelerometr Type 4394 pro rozsah frekvencí 1-25000Hz, obr. 4.4.



Obr. 4.4 Piezoelektrický akcelerometr

Hardware pro propojení notebooku s klávkem a akcelerometrem Brüel&Kjaer, type 3050-A-060, input module 50Hz, obr. 4.5



Obr. 4.5 Propojovací zařízení Brüel&Kjaer

Notebook ASUS s vyhodnocovacím softwarem Pulse LabShop Version 13.5.0 od firmy Brüel&Kjaer, obr. 4.6.

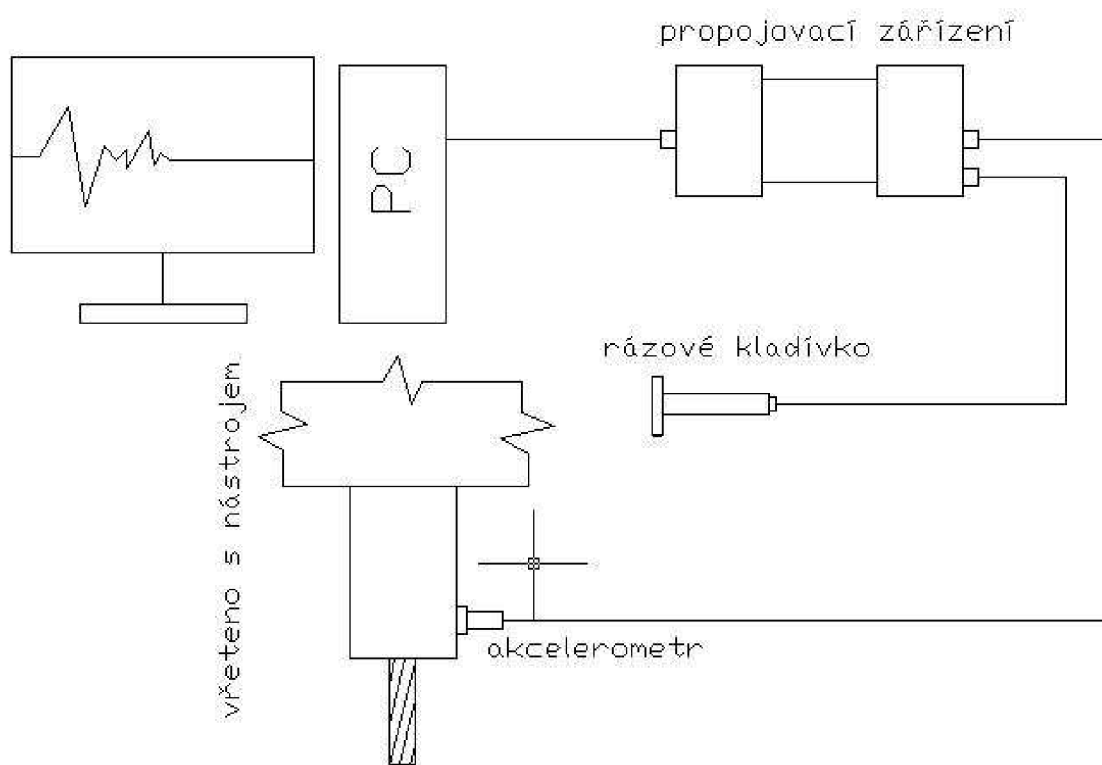


Obr. 1.6 Notebook s vyhodnocovacím software

5 PRŮBĚH EXPERIMENTU

5.1 Připojení měřicí soustavy k počítači a frézce

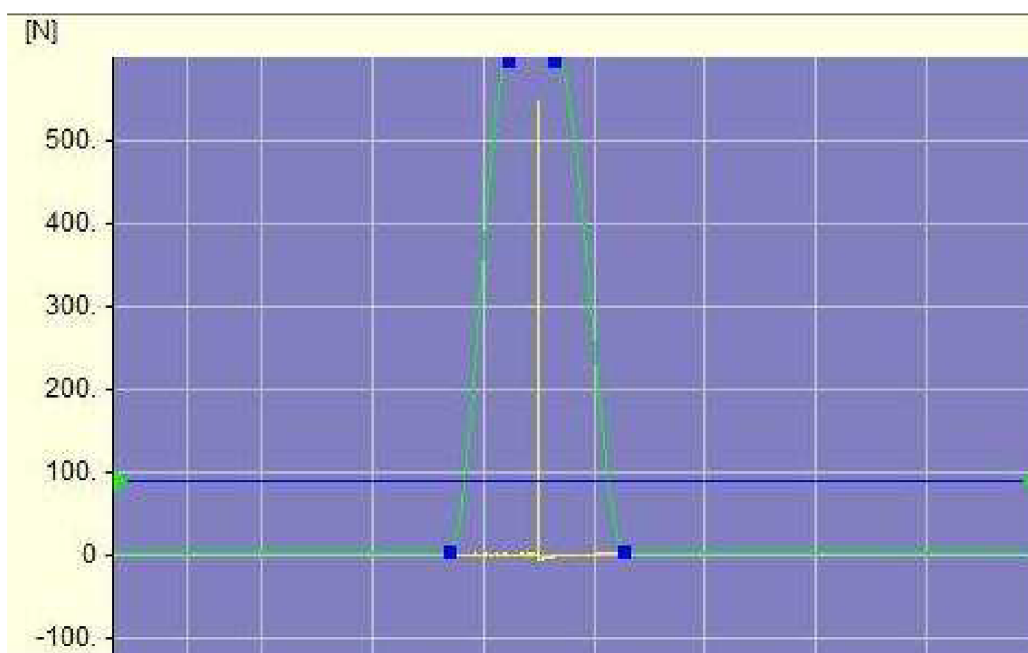
Notebook byl propojen kabelem s propojovacím zařízením, k němuž bylo následně připojeno kladívko a akcelerometr, který byl pomocí magnetové hlavičky připnut na vřeteno frézky. Schéma zapojení je znázorněno na obr. 5.1.



Obr. 5.1 Schéma zapojení měřicí soustavy ke frézce

5.2 Měření silového impulsu

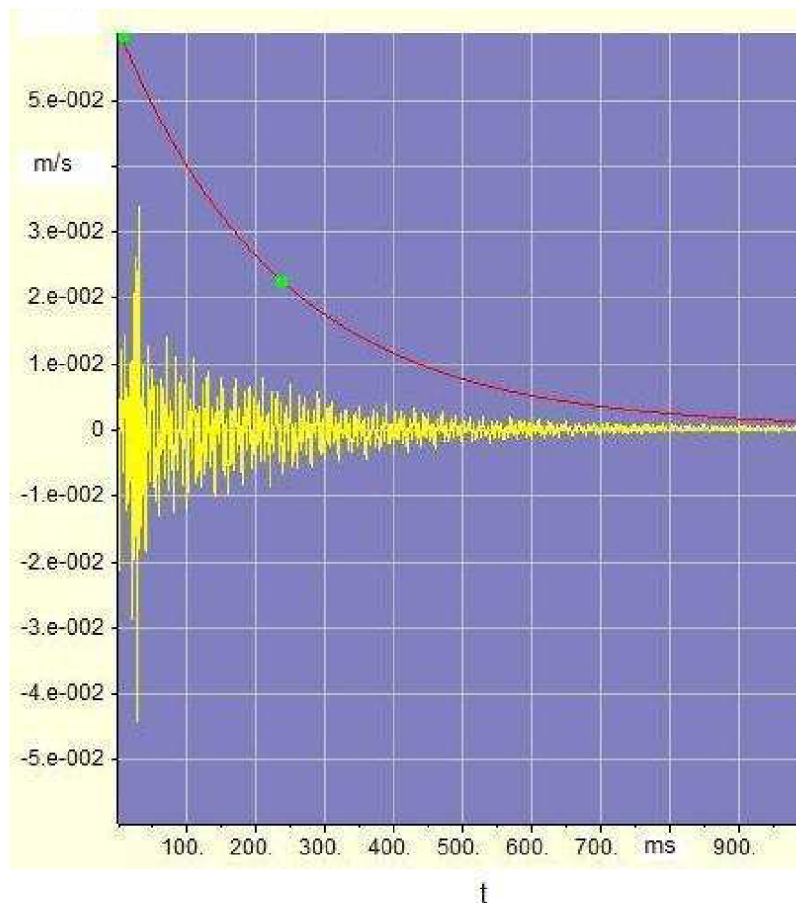
Nastavení softwaru pro měření probíhalo následně. Nejdřív bylo nutné určit, při jakém silovém impulsu bude měřící soustava schopna zaznamenat odezvu systému na tento impuls. Bylo provedeno několik poklepů rázovým kladívkem v oblasti vřetena v průběhu času a z nich vybrán jeden silový impuls viz obr. 5.2.



Obr. 5.2 Stanovení impulsu síly, při kterém systém změří odezvu.

5.3 Stanovení odezvy na silový impuls

Pokud je nastavena velikost síly, při které se spustí měření odezvy, pak tuto odezvu stanovíme pomocí jednoho poklepu kladívka na vřeteno frézky. Pomocí softwaru změříme odezvu obr. 5.3. Tato odezva se nachází pod exponenciální křivkou, aby bylo lépe vidět, jak dochází k jejímu útlumu.

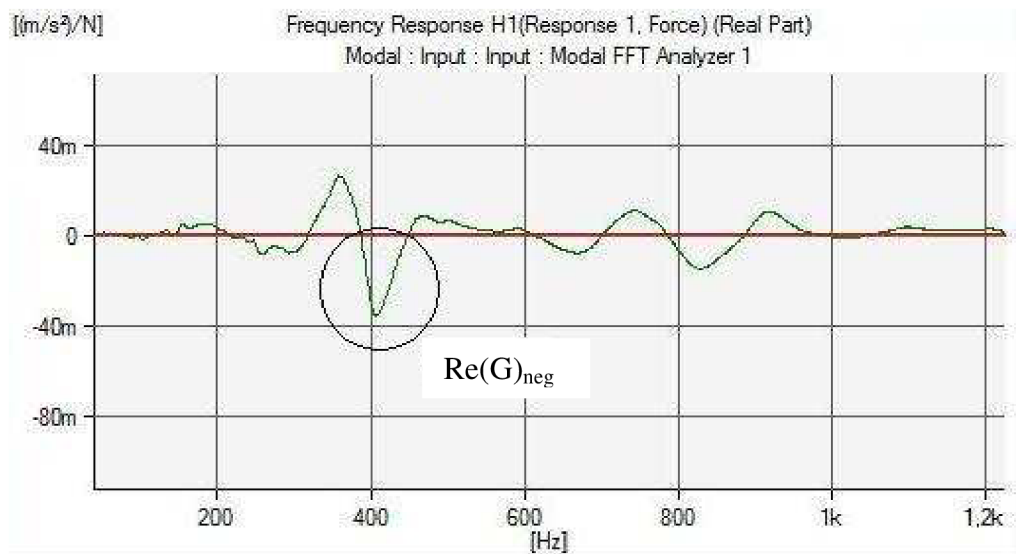


Obr. 5.3 Odezva vřetena frézky s nástrojem na poklep rázového kladívka

5.4 Měření frekvenční odezvové funkce

Po provedení předešlých měření bylo přistoupeno k záznamu frekvenční odezvové funkce na obr. 5.4. Pro korektní průběh je třeba zvolit více poklepů pro částečnou eliminaci nežádoucí zvuku a otřesů způsobených vlivem prostředí.

Z odezvové funkce se zaměříme pouze na negativní část nejpoddanějšího, dominantního tvaru kmitu.



Obr. 5.4 Frekvenční odezvová funkce

5.5 Vyhodnocení získaných závislostí

Z programu extrahujeme data frekvenční odezvové funkce získaná z měření. Pro další zpracování byl použit program Microsoft excel. Na vypracování diagramu stability jsou určena data ze záporné části reálné složky odezvové funkce, viz obr. 5.4.

Po nalezení maximální negativní hodnoty $Re G(f)_{min}$ byla vypočítána kritická hodnota šířky třísky $b_{lim,cr}$ dle rov. 1.11:

- $b_{lim,cr} = 0,32mm$.

Hodnota rezného odporu K_s byla určena pro reálné podmínky obrábění a pro tloušťku třísky h .

Uvažovaný polotovar je z oceli 15 260 s obsahem uhlíku $C=0,25-0,55\%$, tvrdost HB 150. Pro výpočet K_s byly použity hodnoty z tab. 5.1.

Tab. 5.1. Materiálové charakteristiky oceli 15 260

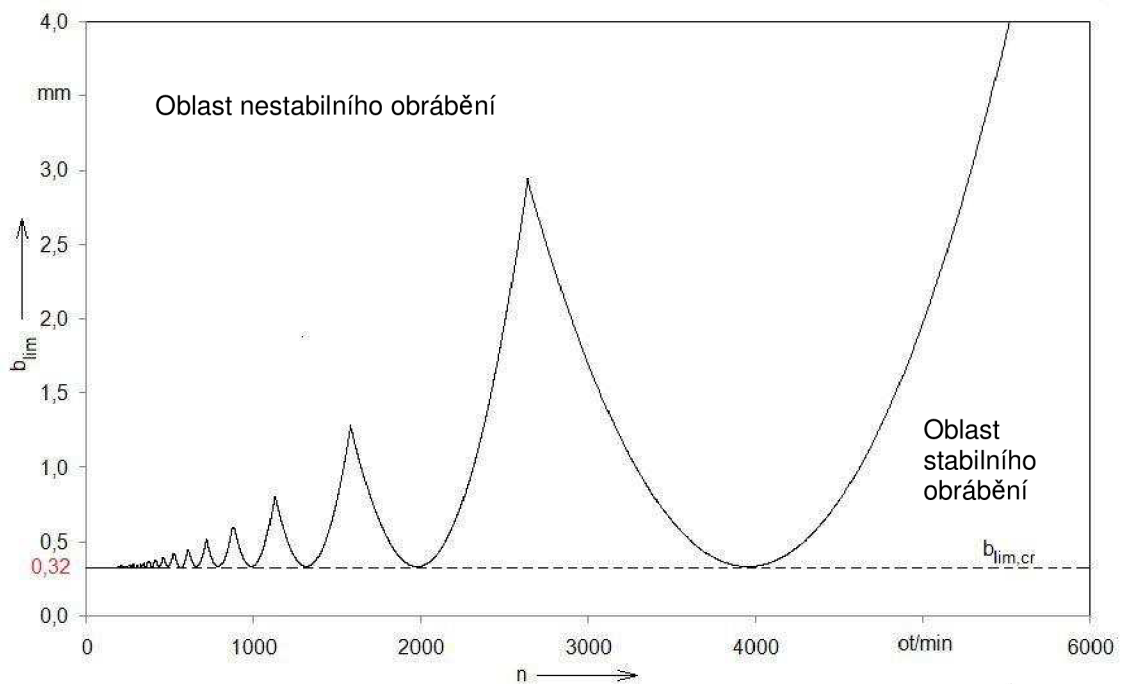
15 260	$k_{c1}[MPa]$	$m_e[-]$	$h[mm]$
	1600	0,25	0,02

pak

$$K_s = \frac{k_{c1}}{h^{m_e}} \quad (5.1)$$

$$K_s = \frac{1600}{0,02^{0,25}} = 4254 MPa . \quad (5.2)$$

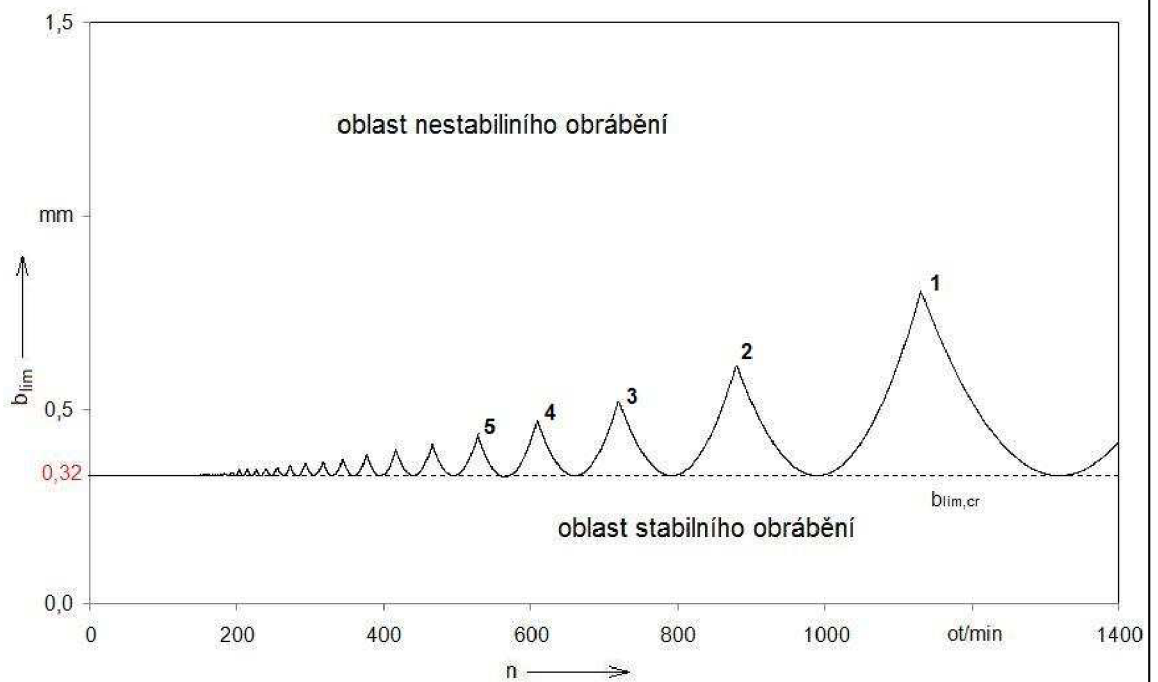
Pomocí hodnot získaných z průběhu odezvové funkce vypočítáme limitní šířky b_{lim} dle rov. 1.12 a jim odpovídající otáčky vřetena dle rov. 1.7. Šířka třísky b_{lim} je v digramu na ose y a otáčky vřetene n jsou na ose x. Z této závislosti stanovíme diagram stability.



Obr. 5.4 Diagram stability sestavený z naměřených dat z provedeného experimentu

Diagram stability, viz obr. 5.4, je sestaven pro všechny negativní hodnoty odezvové funkce. V praxi se však vyskytují omezení, které nedovolují využít tento diagram v plném rozsahu. V tomto případě je obrábění limitováno maximálními otáčkami včetně frézky, na které byl experiment proveden.

Základní řada otáček nastavitelných pro frézku FGH 32 je v rozsahu 31,5-1400 ot/min. diagram bude tedy upraven pro tento rozsah obr. 5.5:



Obr. 5.5 Diagram stability pro rozsah otáček frézky FGH 32

Z takto upraveného diagramu lze vyčíst, při jakých otáčkách vřetene bude frézování stabilní při co možná nejvyšší hodnotě šířky třísky b_{lim} . Ostatní limitní hodnoty otáček a šířek třísky lze najít pomocí průsečíků jednotlivých "lobů". Hodnoty prvních pěti jsou uvedeny v tabulce 5.2.

Tab. 5.2 Hodnoty otáček a limitních šířek třísky

	n [1/min]	b_{lim} [mm]
1	1124	0,81
2	877	0,62
3	718	0,52
4	607	0,46
5	527	0,42

Měření pomocí rázového kladívka lze provádět na jakémkoliv obráběcím stroji. Je však třeba dbát na skutečnost, že přesné měření může být dosaženo pouze v prostředí, kde nedochází k pravidelným otřesům, které získané závislosti značně znehodnocují.

ZÁVĚR

Cílem diplomové práce byla analýza vibrací a jejich vliv na obrábění kovů. Teoretický rozbor byl ověřen experimentem, jehož provedením a vyhodnocením byly stanoveny parametry testované soustavy, na jejichž základě byly určeny mezní hodnoty pro stabilní obrábění. Po provedení experimentu pomocí rázového kladívka byla získána data pro sestrojení diagramu stability pro zvolenou frézku FGH 32. Diagram stability byl sestaven, jak pro celý rozsah dat získaných v průběhu experimentu, tak pro rozsah otáček frézky 31,5 – 1400 ot/min, čímž byly stanoveny okrajové podmínky pro tento graf. Experiment byl proveden za klidového stavu frézky. Měřeno bylo na vřetenu frézky, kde byla upnuta válcová čelní fréza $\varnothing d=32mm$ se zuby ve šroubovici. Pro výpočet a stanovení limitních hodnot šířky třísky byl uvažován jako obráběný materiál 15 260 a pro obrábění zvolena hodnota ekvivalentní tloušťky třísky $h=0,02mm$, pro kterou byl dopočítán měrný řezný odpor $K_s = 4254MPa$.

Pro zvolený typ frézy (zuby do šroubovice) tloušťka třísky h není konstantní, proto bylo zavedeno zjednodušení a byla uvažována fréza se zuby přímými, kde hodnota h nabývá konstantní hodnoty během řezu.

Byla vypočítána kritická limitní šířka třísky $b_{lim,cr} = 0,32mm$, která určuje hranici mezi obráběním stabilním a nestabilním. Bude-li zvolena hodnota $b < b_{lim,cr}$, pak je splněna podmínka pro stabilní obrábění pro jakékoliv zvolené otáčky v rozsahu. Experiment byl proveden v prostorách dílny VUT v podmínkách, kdy byl vždy v chodu alespoň jeden další stroj. Lze tedy předpokládat, že naměřená data mohou být ovlivněna vibracemi ostatních strojů a nadměrným hlukem. Pokud by probíhala další měření a to i na jiných strojích, pak by bylo vhodné zajistit, aby v prostorách dílny nebyl v provozu žádný další stroj.

Testovací souprava byla zapůjčena pro provedení experimentu od firmy Brüel&Kjaer. Měření pomocí rázového kladívka je praktické a práce s vyhodnocovacím softwarem je velmi intuitivní. Hodnota nám zapůjčené soupravy je přibližně 500 tis. korun. Cena se může zdát vysoká, avšak po

instruktáži zabírající pouze několik hodin je možné provádět měření na profesionální úrovni.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] TLUSTÝ, J; KROENIGSBERGER, F. *Specifications and Tests of Machine Tools*. Manchester : UMIST, April, 1970.
- [2] BACH, P. *Perspektivy vývoje frézovacích vreten.* [s.l.], 2006. 26 s. Prednáška.
- [3] TLUSTÝ, J. *Manufacturing processes and equipment*. New York : Prentice Hall , 1999. 928 s.
- [4] TLUSTÝ, J; M. POLÁČEK. *Stability of the Machine Tool Against Self Excited Vibration in Machining*. Pord. Eng. Res. Conf. ASME, Pittsburgh, 1963
- [5] MERRIT, H.E. *Tudory of Self-Excited Machina Tool Chatter*. ASME J. for Eng. In industry 87 (1965): 447-54
- [6] TLUSTÝ, J. *Machine Dynamics*. Chapter 4 in Handbook of High-Speed Machining Technology. Ed. R. I. King. New York: Chapman and Hall, 1985.
- [7] TLUSTÝ, J.; F. ISMAIL. *Special Aspects of Chatter in Milling*. Trans. ASME, J. of Vib, Stress, and Reliability in Des. 105 (Jan. 1983): 24-32
- [8] KOČMAN, K.; PROKOP, J. *Technologie obrábění. druhé. Vysoké učení technické: AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM, s.r.o. Brno, 2005. 270 s. ISBN 80-214-3068-0*
- [9] PÍŠKA, M.; HUMÁR, A. *Testování řezivosti nových nástrojových materiálu*. MM Prumyslové spektrum - Speciální vydání. Zář 2004. ISSN 1212-2572., s. 98-110
- [10] TOBIAS, S.A. *Machine Tool Vibrations*. London : Blackie & Son, 1965. 24 s.
- [11] TOBIAS, S.A; FISHWICK, W. *The Chatter of Lathe Tools under Orthogonal Cutting Conditions*. Transactions of the ASME 1958. 80,1079 s.
- [12] A. YOUSSEF, H.; EL-HOFY, H. *Machining technology: machine tools and operations* [online]. New York : CRC Press, 2008 [cit. 2010-05-19]. Dostupné z WWW: <<http://books.google.cz/books>

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

Zkratka/Symbol	Jednotka	Popis
FRF	-	Frekvenční odezвовá funkce
TR	-	Přenosová funkce
FFT	-	Rychlá Fourierova transformace
A	mm	amplituda pohybu
n	ot/min	otáčky
b	mm	šířka třísky
b_{lim}	mm	limitní šířka třísky
$b_{lim,cr}$	mm	kritická limitní šířka třísky
b_{cum}	mm	Úhrnná šířka třísky pro všechny zuby v záběru
h	mm	tloušťka třísky
h_m	mm	střední tloušťka třísky
Y	mm	změna tloušťka třísky v probíhajícímu řezu
Y_0	mm	změna tloušťka třísky v předchozím řezu
v_f	m/min	rychlost posuvu
v_c	m/min	řezná rychlost
a_p	mm	axiální hloubka třísky
P_{fe}	-	pracovní rovina
f_d	s^{-1}	přirozenou tlumicí frekvencí soustavy
m	kg	hmotnost
c	kg/s	tlumicí koeficient
k	N/m	tuhost
\dot{x}	m/s	rychlost
\ddot{x}	m/s^2	zrychlení
x	m	dráha
x_0	m	vychýlení
t	s	čas
φ	rad	fázový posun
f	s^{-1}	frekvence
f_n	s^{-1}	přirozená frekvence
f_F	s^{-1}	frekvence síly
A	mm	amplituda pohybu
F_0	N	amplituda síly
F	N	síla
F_{dyn}	N	dynamická síla
F_{stat}	N	Statická řezná síla
X	mm	velikost vibrace
X_0	mm	amplituda vibrace
F_v	N	proměnná síla
F_s	N	stálá síla
ε	rad	úhel posunutí
p	-	celkový počet vln
N	-	počet celých vln
f_{ch}	s^{-1}	frekvence chvění

m	-	počet zubů nástroje
$X_{j,k}$	-	směr vibračního módu
K_s	MPa	řezný odpor
$Re(G)_{neg}$	$(m/s^2)/N$	negativní hodnota reálného frekvenčního přenosu
$Re(G)_{min}$	$(m/s^2)/N$	minimální negativní hodnota reálného frekvenčního přenosu
$Re(G)$	-	reálná složka frekvenčního přenosu
$Im(G)$	-	imaginární složka frekvenčního přenosu
f_z	s^{-1}	zubová frekvence
f_z	mm	Posuv na zub
ω	rad/s	úhlová rychlost
ω_n	rad/s	Přirozená úhlová frekvence
T	s	Perioda pohybu
d	mm	průměr nástroje
r	mm	poloměr nástroje
ϕ	rad	úhel záběru
ϕ_s	rad	počáteční úhel záběru
ϕ_e	rad	koncový úhel záběru
ϕ_c	rad	řezný úhel
β	rad	úhel sklonu šroubovice
ψ	rad	rozsah záběru zubu
$T_{1,2,3}$	-	zuby nástroje
T_{is}	-	počáteční pozice zubu v záběru
T_{ie}	-	pozice zubu vycházejícího ze záběru
ϕ_p	-	rozteč
ΔF_c	N	element řezné složky síly
ΔF_{cN}	N	element normálové složky síly
F_x	N	síla v ose x
F_y	N	síla v ose y
ζ	Nsm^{-1}	poměrný útlum
G	m/N	přenosová funkce soustavy
H	m/s	frekvenční odezvová funkce
k_{c1}	MPa	měrná řezná síla
me	-	
z	-	tlumicí poměr