



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

POROVNÁNÍ METOD ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH DYNAMICKÝCH SOUSTAV

COMPARISON OF METHODS FOR NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS SOLUTION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

JAROSLAV KREJČÍ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. DANIEL DUŠEK, Ph.D.

BRNO 2013

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Jaroslav Krejčí

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Porovnání metod řešení nelineárních dynamických soustav

v anglickém jazyce:

Comparision of methods for nonlinear dynamic sytems solution

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Většina dynamických soustav v reálném prostředí je více či méně nelineární. Přímé analytické řešení takovýchto soustav je ve většině případů nemožné, nebo možné pouze za určitých zjednodušujících předpokladů.

Cíle bakalářské práce:

Pro daný typ nelineární dynamické soustavy o 1 stupni volnosti provést řešení pomocí různých přibližných analytických metod a provést jejich vzájemné srovnání.

Seznam odborné literatury:

Slavík, J., Stejskal, V., Zeman, V., Základy dynamiky strojů, ČVUT Praha, Praha, 1997.

Kratochvíl, C., Slavík, J., Dynamika, VUT Brno, Brno, 1997.

Brepta, R., Půst, L., Turek, F., Mechanické kmitání, Sobotáles, Praha, 1994.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Daniel Dušek, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 19.11.2012

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

Abstrakt

Cílem této práce je provést řešení pro daný typ nelineární dynamické soustavy o jednom stupni volnosti pomocí různých přibližných analytických metod a provést jejich vzájemné srovnání. V úvodu práce jsou popsány základní charakteristiky nelineárních dynamických soustav, způsoby jejich modelování a stručný popis základních analytických metod řešení. V další části je řešení zadané soustavy pomocí popsaných metod a srovnání získaných výsledků. V závěru práce jsou dané metody řešení porovnány s metodou konečných prvků programem ANSYS.

Klíčová slova

Mechanické kmitání, nelineární soustava, analytické řešení, porovnání metod

Abstract

The aim of this work is to make a solution of nonlinear dynamic system with one degree of freedom using various approximate analytical methods and perform their comparison. The beginning of the work describes the basic characteristics of nonlinear dynamic systems, methods of modelling and a description of the basic analytical methods of solution. In the following part is the solution of the system using described methods and comparing of results. In conclusion the methods are compared with final element method by program ANSYS.

Key words

Mechanical oscillation, nonlinear system, analytical solution, comparison of methods

Bibliografická citace

KREJČÍ, J. *Porovnání metod řešení nelineárních dynamických soustav*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 33 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Daniel Dušek, Ph.D.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně, za použití uvedených zdrojů a pod odborným vedením Ing. Daniela Duška, Ph.D.

V Brně dne 15. 5. 2013

.....
Jaroslav Krejčí

Poděkování

Tímto chci poděkovat vedoucímu práce panu Ing. Danielu Duškovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a připomínky při tvorbě této bakalářské práce.

Obsah

1. Úvod.....	10
2. Mechanické kmitání.....	11
2.1 Kmitání lineárních soustav	11
3. Kmitání nelineárních soustav.....	11
3.1 Vznik nelinearity v mechanických soustavách.....	11
3.2 Modelování nelineárních soustav	12
4. Vlastnosti nelineárních soustav	12
4.1 Závislost vlastních frekvencí na amplitudě kmitů	12
4.2 Víceznačnost řešení a oblasti nestability	13
4.3 Přechodové charakteristiky	14
4.4 Nelineární resonance.....	14
5. Přehled metod řešení.....	15
5.1 Metoda malého parametru	15
5.2 Metoda přímé linearizace.....	16
5.3 Metoda ekvivalentní linearizace	17
6. Model zadané soustavy	18
7. Řešení.....	19
7.1 Zadání a)	19
7.1.1 Řešení metodou malého parametru.....	19
7.1.2 Řešení metodou přímé linearizace	22
7.1.3 Řešení metodou ekvivalentní linearizace	22
7.1.4 Porovnání výsledků.....	23
7.2 Zadání b).....	24
7.2.1 Řešení metodou přímé linearizace.....	24
7.2.2 Řešení metodou ekvivalentní linearizace	24
7.2.3 Porovnání výsledků.....	25
7.3 Zadání c)	26
7.3.1 Řešení metodou přímé linearizace	26
7.3.2 Řešení metodou ekvivalentní linearizace	27
7.3.3 Porovnání výsledků.....	27
7.4 Porovnání s metodou konečných prvků.....	28
8. Závěr	30
Literatura.....	31
9. Seznam použitých zkratk a symbolů.....	32
10. Seznam příloh	33

1. Úvod

V dynamických soustavách vzniká, většinou jako nežádoucí účinek, mechanické kmitání. To může způsobovat nadměrnou hlučnost, opotřebení až porušení jednotlivých částí stroje. Řešení dynamických soustav spočívá v nalezení amplitudo-frekvenční charakteristiky, která je potřebná k popisu kmitání soustavy. Z této charakteristiky se určují tzv. vlastní frekvence, tedy frekvence, při kterých soustava nejvíce kmitá a kterým je potřebné se při provozu vyhnout. Amplituda a frekvence tohoto kmitání závisí na vlastnostech a zatížení soustavy. Při řešení kmitání soustav se používá několik metod. Nejjednodušší je předpoklad lineárního kmitání, ten ale vždy nemusí odpovídat skutečným výsledkům. Nelineární systémy jsou natolik různorodé, že neexistuje univerzální metoda pro jejich popis. Proto se pro různé nelineární soustavy používají různé metody, které se stále vyvíjejí. Vzhledem ke složitosti teorie nelineárního kmitání budou popsány pouze metody pro řešení nelineárních soustav s jedním stupněm volnosti. Tyto metody jsou většinou přibližné a přesnost každé z nich závisí na druhu nelinearity v soustavě.

2. Mechanické kmitání

Pro správný popis kmitání dynamické soustavy se mechanické kmitání rozlišuje z různých hledisek. Vytvářejí se buď mechanické modely s diskrétními parametry, které mají konečný počet stupňů volnosti, nebo modely se spojitě rozloženými parametry s nekonečným počtem stupňů volnosti. Podle vzniku dělíme kmitání na volné, buzené a samobuzené. Podle disipované energie soustavy na kmitání netlumené a tlumené. Dále podle druhu matematického modelu se rozlišuje kmitání lineární a nelineární. Toto dělení je pouze základní a lze jej dále zpřesňovat.[1]

2.1 Kmitání lineárních soustav

Řešení lineárních soustav je relativně jednoduché především proto, že se zde může použít princip superpozice. Vlastní frekvence takové soustavy je konstantní a závisí pouze na hmotnosti a tlumení soustavy. Všechny reálné mechanické soustavy jsou ale více či méně nelineární. Lineární soustava však může často dobře aproximovat nelineární, a proto se při řešení nejprve předpokládá linearita soustavy a teprve když se výsledky liší od skutečnosti, doplní se pohybové rovnice nelineárními členy. Lineární teorii lze často použít, pokud se zajímáme pouze o oblast, většinou velmi malou, ve které přibližně platí lineární vztahy mezi příslušnými veličinami. *Většinou tato lineární oblast leží při malých deformacích a rychlostech a nelinearity se objevují až při větších výchylkách, někdy však naopak výrazné nelinearity jsou typické pro malé odchylky od rovnovážného stavu a při větších výchylkách se soustava blíží lineární soustavě.* (převzato z [3])

3. Kmitání nelineárních soustav

Mechanická soustava, která obsahuje alespoň jeden prvek, jehož charakteristika je popsána nelineárními rovnicemi, je nelineární. Taková soustava je potom popsána nelineárními diferenciálními rovnicemi, jejíž řešení bývá obtížné, často ani analytické řešení neexistuje. U nelineárních soustav se nemůže použít princip superpozice, což způsobuje mnoho problémů při jejich řešení, protože se jednotlivé složky kmitání vzájemně ovlivňují a nelze je jednoduše sečíst. Například u vynuceného kmitání nelze získat řešení nehomogenní diferenciální rovnice součtem řešení homogenní a partikulární části. Z těchto důvodů mají tyto soustavy na rozdíl od lineárních soustav speciální vlastnosti, jako je například víceznačnost řešení či vlastní frekvence závislá na amplitudě kmitů.

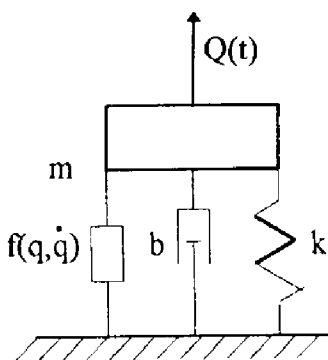
3.1 Vznik nelinearity v mechanických soustavách

Nelinearitu mechanických soustav mohou způsobovat nelineární pružné síly závislé na velikosti výchylky, tlumící síly závislé na rychlostech, nebo síly smíšené, které jsou závislé jak na výchylce, tak na rychlosti. Příčinou nelinearity může být například použití pružin s proměnným stoupáním závitu, tvarových pružin, pružných spojek, kapalinových tlumičů nebo nekovových materiálů. Výrazný vliv mají také vůle v uloženích pohybujících se částí stroje. Stroje bývají vybaveny různými regulačními a řídicími prvky, což jsou často silně nelineární členy a mají velký vliv na chování celé soustavy. Proto se vždy mechanická soustava musí řešit jako celek jak s pasivními, tak s těmito tzv. aktivními prvky, vnášejícími energii do soustavy.

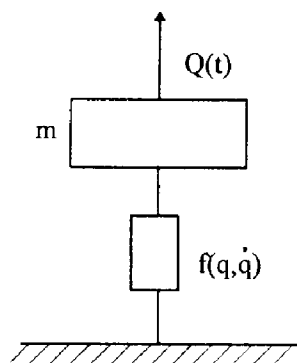
3.2 Modelování nelineárních soustav

Model nelineární mechanické soustavy se může vytvořit různými způsoby. K lineárním členům přidáme člen nelineární, jak je zobrazeno na obrázku 3.1 a výsledná pohybová rovnice pak bude mít tvar

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + kq + f(q, \dot{q}) = Q(t) . \quad (3.1)$$



Obr. 3.1: Model nelineární soustavy [2]



Obr. 3.2: Model nelineární soustavy [2]

Další způsob je pak zahrnutí lineárních i nelineárních členů do jedné nelineární funkce, jako na obrázku 3.2. Výsledná pohybová rovnice má potom tvar

$$m\ddot{q} + f(q, \dot{q}) = Q(t) . \quad (3.2)$$

Nelineární funkce v předchozí rovnici se někdy vyjádří jako součet nelineární části pružiny a tlumiče a platí

$$f(q, \dot{q}) \doteq f_b(\dot{q}) + f_k(q) . \quad (3.3)$$

Potom se $f_b(\dot{q})$ nazývá charakteristika tlumiče a $f_k(q)$ charakteristika pružiny. Pro symetrickou charakteristiku platí vztah

$$f(q) = -f(-q) . \quad (3.4)$$

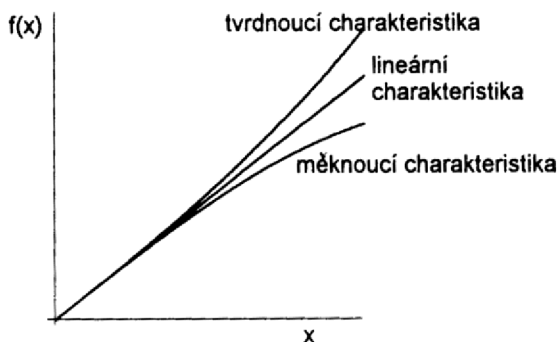
4. Vlastnosti nelineárních soustav

Nelinearity mechanických soustav se projevují některými vlastnostmi, které se u lineárních soustav neobjevují. Mezi tyto vlastnosti patří například neplatnost zákona superpozice, závislost vlastní frekvence na amplitudě, existence vyšších harmonických složek, existence samobuzeného kmitání, oblast nestability nebo víceznačnost řešení. Některé nejdůležitější vlastnosti jsou podrobněji uvedeny v této kapitole.

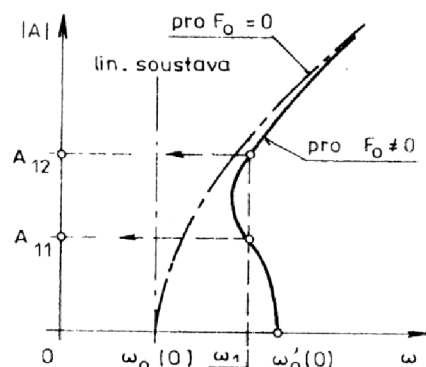
4.1 Závislost vlastních frekvencí na amplitudě kmitů

U nelineárních soustav není vlastní frekvence konstantní jako u lineárních, ale je závislá na amplitudě kmitů. Tuto závislost vyjadřuje tzv. skeletová křivka. Zda je křivka skloněna na jednu nebo na druhou stranu určuje typ pružné deformace, který může být

měkký, lineární, nebo tvrdý. Je-li $\frac{d^2 f_k(q)}{dq^2} > 0$, pak je charakteristika pružné vazby tvrdnoucí, v opačném případě vzniká měknoucí charakteristika. Pokud je předchozí výraz roven 0, pak je pružná vazba lineární. Pokud na soustavu působí konstantní síla, dojde nejen ke změně rovnovážné polohy, ale také ke změně odezvy soustavy. Skeletová křivka bude mít složitější tvar a jedné vlastní frekvenci mohou odpovídat dvě amplitudy kmitání. Tento vliv je zobrazen na obr. 4.2.



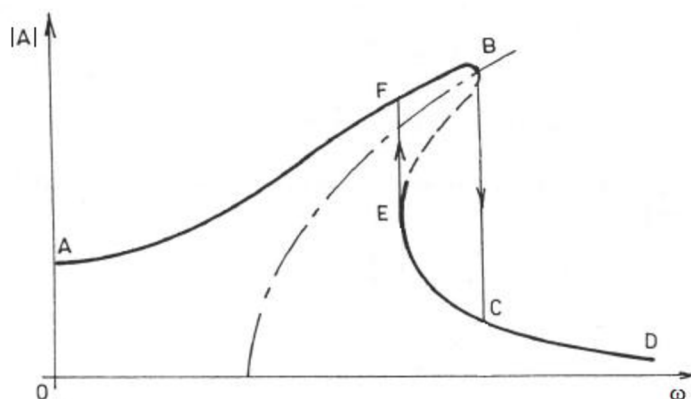
Obr. 4.1: Druhy charakteristik [2]



Obr. 4.2: Vliv konstantní síly na tvar skeletové křivky [1]

4.2 Víceznačnost řešení a oblasti nestability

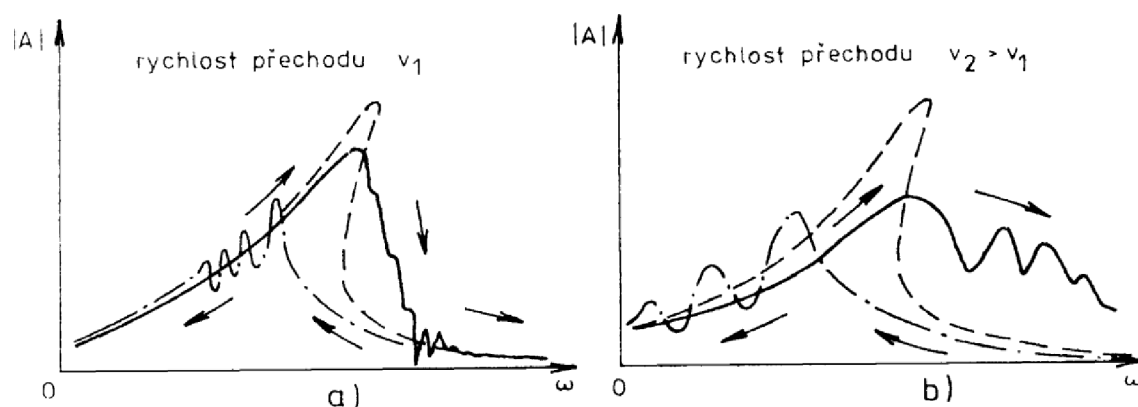
Vlivem nelinearity se amplitudo-frekvenční charakteristika deformuje v závislosti na tvaru skeletové křivky. V některých případech může dojít vlivem nelinearity soustavy dokonce ke vzniku další větve. V důsledku toho vznikají v určitých pásmech budících frekvencí oblasti nestability, kdy jedné frekvenci odpovídá více amplitud kmitání. Obrázek 4.3 zobrazuje změnu amplitudy při velmi pomalé změně budící frekvence. Narůstá-li frekvence pomalu, mění se amplituda podél křivky z bodu A do bodu B, kde se skokově změní na hodnotu bodu C a dále se mění podél křivky do bodu D. Jestliže budící frekvence pomalu klesá, amplituda se mění podobně a ke skokové změně hodnoty amplitudy dojde z bodu E do bodu F. Úsek křivky mezi body B a E, kde se hodnoty fáze a amplitudy neustálí, se nazývá nestabilní větev. Hodnota amplitudy v oblasti nestability tedy závisí na tom, z jaké strany se mění budící frekvence.[2]



Obr. 4.3: Změna amplitudy při pomalé změně budící frekvence [2]

4.3 Přechodové charakteristiky

Skokové změny v oblasti nestability jsou závislé na rychlosti změny budící frekvence. Po přejetí prvního maxima dochází vlivem interference vynucených a vlastních kmitů k pulzacím amplitud a fází, které jsou tím výraznější, čím je rychlost přechodu rezonančního vrcholu vyšší. (převzato z [1]) S rostoucí rychlostí přechodu této oblasti se snižuje velikost rezonančního vrcholu, ale zároveň se rozšiřuje oblast zvýšených výchylek. Přechodové charakteristiky jsou popsány na obrázku 4.4.



Obr. 4.4: a) Přechodové charakteristiky při malé rychlosti přechodu [1]

b) Přechodové charakteristiky při vysoké rychlosti přechodu [1]

4.4 Nelineární resonance

Vynucené kmitání není čistě harmonické, ale obsahuje více složek s vyššími i nižšími frekvencemi než je budící frekvence ω . Díky nelinearitám dochází ke vzájemnému ovlivňování jednotlivých složek a ke vzniku více druhů rezonancí než u lineárních soustav. U nelineárních soustav s jedním stupněm volnosti pak vznikají tyto základní typy rezonancí, které se rozlišují podle poměru budící a vlastní frekvence, kde r a s jsou malá celá čísla: [3]

- hlavní $\omega/\Omega = 1$
- subharmonická $\omega/\Omega = r$
- ultraharmonická $\omega/\Omega = 1/s$
- subultraharmonická $\omega/\Omega = r/s$

5. Přehled metod řešení

5.1 Metoda malého parametru

Tato metoda předpokládá, že nelineární část pohybové rovnice mechanické soustavy je ve srovnání s lineární částí malá a je analytickou funkcí parametrů q a \dot{q} . Pohybová rovnice (3.1) se převede pomocí substituce do tzv. normalizovaného tvaru, kde vystupuje malý parametr μ a vlastní frekvence Ω . Při výpočtech se také zavádí vhodná transformace času ve formě $\tau = \Omega t$. Poté musí platit

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{\Omega dt} = (\quad)' . \quad (5.1)$$

Pohybová rovnice pro volné kmitání se zahrnutím tlumícího členu do členu nelineárního je potom ve tvaru

$$\Omega^2 q'' + \omega_0^2 q + \mu f(q, \Omega q') = 0 . \quad (5.2)$$

Tato forma pohybové rovnice se někdy také nazývá normalizovaný tvar. Řešení této rovnice hledáme ve tvaru mocninné řady malého parametru μ

$$q(\tau) = q_0(\tau) + \mu q_1(\tau) + \mu^2 q_2(\tau) + \dots, \quad (5.3)$$

kde q_0, q_1, q_2, \dots jsou neznámé funkce transformovaného času τ . Do mocninné řady se rozloží také vlastní frekvence Ω

$$\Omega = \omega_0 + \mu \omega_1 + \mu^2 \omega_2 + \dots, \quad (5.4)$$

kde $\omega_1, \omega_2, \dots$ jsou neznámé konstanty. Po dosazení rovnic (5.3) a (5.4) do rovnice (5.2) je možné převést nelineární diferenciální rovnici na soustavu obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. S využitím počátečních podmínek se určí q_0, q_1, q_2, \dots jako známé funkce transformovaného času τ a konstant $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$. Neznámé konstanty se určí z podmínek, aby řešení bylo periodické, tj. neobsahovalo tzv. sekulární výrazy obsahující funkce $\sin(\tau)$ a $\cos(\tau)$, které by způsobovaly růst amplitud kmitavého pohybu lineárně s časem. Tyto členy však nelze vždy vyloučit a použitelnost metody je pak omezena na krátký časový úsek.

Protože parametr μ je malé číslo, stačí pro dostatečnou přesnost v rovnicích (5.3) a (5.4) počítat pouze se členy do prvního až druhého řádu mocninné řady. Pro vyšší přesnost se jednoduše počítá se členy vyšších řádů.

Při řešení soustavy s vynuceným kmitáním je nutné postup výpočtu rozdělit na řešení v nerezonančním případě, kdy nemůže vzniknout žádná hlavní ani vedlejší rezonance, a na řešení v rezonančním případě, kdy se poměr ω/Ω blíží poměru malých celých čísel, jak je uvedeno v podkapitole 4.4. U slabě nelineárních soustav je možné nahradit frekvenci Ω vlastní frekvencí lineární části $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

5.2 Metoda přímé linearizace

Výhodou metody přímé linearizace je to, že nelineární charakteristiky pružiny a tlumiče nemusí být analytickými funkcemi svých parametrů, ale mohou být zadávány i tabelárně. Nelineární funkce $f_k(q)$ se lineárně aproximuje. Nahradí se přímkou $f^*(q) = k^*q$, kde k^* je hledaný parametr linearizované tuhosti. V intervalu předpokládaných amplitud se hledá minimum středně kvadratických odchylek mezi skutečným průběhem funkce $f_k(q)$ a její lineární aproximací. Při větších výchylkách mají odchylky větší váhu, proto se pro středně kvadratickou odchylku používá hodnota $[f_k(q) - k^*q]q$. Hledá se tedy minimum integrálu

$$I = \int_{-A}^{+A} \{[f_k(q) - k^*q]q\}^2 dq . \quad (5.5)$$

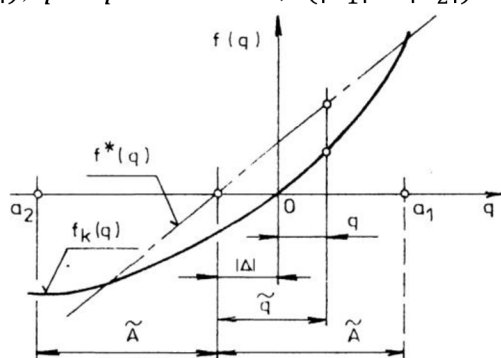
Minimum tohoto integrálu v závislosti na parametru k^* je určeno pomocí rovnice

$$\frac{\partial I}{\partial k^*} = \frac{\partial}{\partial k^*} \int_{-A}^{+A} \{[f_k(q) - k^*q]q\}^2 dq = 0 . \quad (5.6)$$

Z této rovnice se určí vztah pro parametr k^* , který je pro symetrické charakteristiky $f_k(q)$ ve tvaru

$$k^*(A) = \frac{5}{A^5} \int_0^A f_k(q)q^3 dq . \quad (5.7)$$

U nesymetrické charakteristiky nejsou amplitudy výchylek od rovnovážné polohy stejné na obě strany a linearizaci provedeme kolem tzv. střední polohy odchýlení od počátku souřadnic, okolo které soustava kmitá se stejnou amplitudou \tilde{A} , viz obr. 5.1, kde $\tilde{A} = 0,5(|a_1| + |a_2|)$, $\tilde{q} = q - \Delta$ a $\Delta = 0,5(|a_1| - |a_2|)$.



Obr. 5.1: Linearizace nesymetrické charakteristiky [1]

Vztah pro parametr k^* pro nesymetrické charakteristiky je potom ve tvaru

$$k^*(\tilde{A}) = \frac{5}{2\tilde{A}^5} \int_{-\tilde{A}}^{+\tilde{A}} f_k(\tilde{q} + \Delta)\tilde{q}^3 d\tilde{q} . \quad (5.8)$$

Koeficient b^* se získá prohozením q a $f_k(q)$ za \dot{q} a $f_b(\dot{q})$ v předchozích vztazích.

5.3 Metoda ekvivalentní linearizace

Metoda ekvivalentní linearizace převádí nelineární pohybovou rovnici na lineární rovnici s ekvivalentními součiniteli tlumení a tuhosti. Nelineární dynamická soustava s vynuceným pohybem má pohybovou rovnici (3.1). V porovnání s pružnými a setrvačnými silami jsou u většiny soustav tlumící síly velmi malé. Proto se tlumení zahrne do nelineárního členu a pohybová rovnice bude potom ve tvaru

$$m\ddot{q} + kq + f(q, \dot{q}) = Q_0 \cos \omega t . \quad (5.9)$$

Řešení předchozí rovnice se předpokládá podobné jako řešení její lineární části, tedy harmonické s úhlovou frekvencí budící síly a bude přibližně platit

$$q \doteq A \cos(\omega t + \varphi), \quad \dot{q} \doteq -\omega A \sin(\omega t + \varphi) . \quad (5.10)$$

Nelineární člen pohybové rovnice lze rozvinout pomocí Fourierovy řady za předpokladu jeho periodického charakteru. Pro jednoduchost řešení za cenu jeho nižší přesnosti se berou pouze první harmonické složky a pro nelineární člen platí vztah

$$f(q, \dot{q}) = C_1 \cos(\omega t + \varphi) + D_1 \sin(\omega t + \varphi) . \quad (5.11)$$

Po dosazení rovnic (5.10) do (5.11) platí

$$f(q, \dot{q}) = \frac{D_1}{-\omega A} \dot{q} + \frac{C_1}{A} q = b_e(A) \dot{q} + k_e(A) q . \quad (5.12)$$

Členy $b_e(A)$ a $k_e(A)$ v předchozí rovnici představují tzv. ekvivalentní součinitel tlumení a ekvivalentní součinitel lineární tuhosti. Koeficienty C_1 a D_1 se určí z Fourierovy řady jako koeficienty u prvních harmonických členů a pro ekvivalentní tlumení a tuhost tedy platí následující vztahy:

$$b_e(A) = \frac{-D_1}{\omega A} = \frac{-1}{\pi A \omega} \int_0^{2\pi} f(q, \dot{q}) \sin(\omega t + \varphi) d(\omega t) , \quad (5.13)$$

$$k_e(A) = \frac{C_1}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(q, \dot{q}) \cos(\omega t + \varphi) d(\omega t) . \quad (5.14)$$

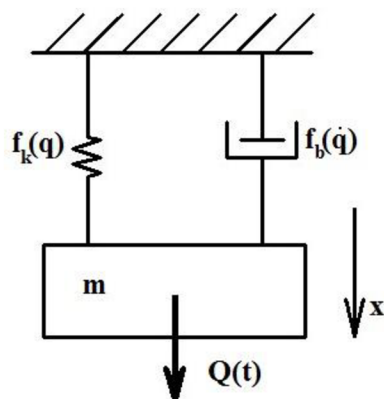
Pomocí těchto součinitelů se původní nelineární pohybová rovnice může nahradit ekvivalentní linearizovanou rovnicí

$$m\ddot{q} + b_e(A) \dot{q} + [k + k_e(A)]q = Q_0 \cos \omega t . \quad (5.15)$$

Tato rovnice se dále řeší formálně jako lineární.

6. Model zadané soustavy

Zadaná soustava je jednoduchá nelineární dynamická soustava s jedním tlumičem a jednou pružinou, jejichž charakteristiky jsou zadány pomocí nelineárních funkcí a která je buzená harmonickou silou. Model zadané soustavy je na obrázku 6.1.



Obr. 6.1: Model zadané soustavy

Tato soustava má jeden stupeň volnosti. Zobecněná souřadnice q se tedy volí jako posuv x a zobecněné působení $Q(t)$ se volí jako síla $F(t)$. Hmotnost tělesa je $m = 1\text{ kg}$.

Řešení zadané soustavy metodou malého parametru je obtížné nebo omezené, protože v některých případech nelze vyloučit sekulární člen. Proto bude touto metodou řešena pouze dynamická soustava, jejíž kmitání je volné a obsahuje pouze pružinu s nelineární charakteristikou. Vlastností takové soustavy jsou zadány následujícími rovnicemi:

$$\text{a) } f_k(x) = kx + \mu k_3 x^3; f_b(\dot{x}) = 0\text{ N}; k = 100\text{ Nm}^{-1}; k_3 = 200\text{ Nm}^{-3}; \\ (\text{pro větší nelinearitu pružiny: } k_3 = 1000\text{ Nm}^{-3}); \mu = 0,5; F_0 = 0\text{ N}$$

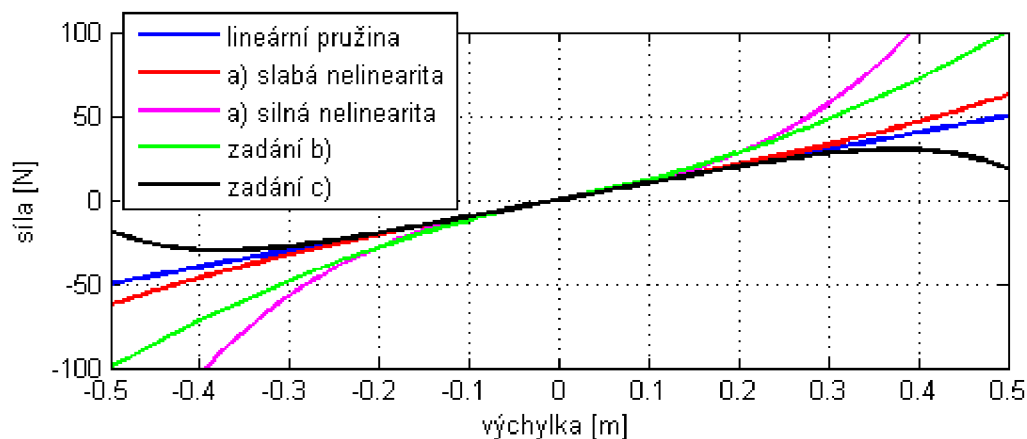
Pro ostatní metody bude dále řešena soustava, jejíž kmitání je buzeno harmonickou silou zadanou rovnicí $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$, kde $F_0 = 3\text{ N}$. Aby bylo možné porovnat metody řešení takovýchto soustav, budou charakteristiky pružiny a tlumiče zadány více způsoby:

$$\text{b) } f_k(x) = kx + k_2 x|x|; f_b(\dot{x}) = b\dot{x}; k = 100\text{ Nm}^{-1}; k_2 = 200\text{ Nm}^{-2}; \\ b = 1\text{ Nsm}^{-1}$$

$$\text{c) } f_k(x) = kx - k_5 x^5; f_b(\dot{x}) = b_2 \dot{x}|\dot{x}|; k = 100\text{ Nm}^{-1}; k_5 = 1000\text{ Nm}^{-5}; \\ b_2 = 2\text{ Ns}^2\text{m}^{-2}$$

Charakteristiky pružiny jednotlivých zadání jsou na obrázku 6.2. Na tomto obrázku je vidět, že charakteristika pružiny v zadání a) se slabou nelinearitou se nejvíce blíží charakteristice své lineární části po celém intervalu předpokládaných výchylek. Charakteristika pružiny v zadání a) s větší nelinearitou je od ní naopak nejvíce odchýlena. Pružina v zadání b) se odchyluje už při malých výchylkách. Naopak

v zadání c) je charakteristika pružiny při malých výchylkách téměř shodná s lineární částí, ale u větších výchylek se značně liší a pružina je silně nelineární.



Obr. 6.2: Charakteristiky pružiny

7. Řešení

7.1 Zadání a)

Pohybová rovnice zadané soustavy má tvar

$$m\ddot{x} + kx + \mu k_3 x^3 = 0. \quad (7.1)$$

7.1.1 Řešení metodou malého parametru

Pro normalizovaný tvar pohybové rovnice (7.1) bude podle rovnice (5.2) platit

$$\Omega^2 x'' + \omega_0^2 x + \mu \frac{k_3}{m} x^3 = 0, \quad (7.2)$$

přičemž $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. U rovnic (5.3) a (5.4) se bude počítat pouze se členy do prvního řádu mocninné řady. Očekávané řešení a vlastní frekvence je tedy

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau), \quad \Omega = \omega_0 + \mu \omega_1. \quad (7.3)$$

Po dosazení rovnic (7.3) do rovnice (7.2) a po vynechání členů se druhou mocninou malého parametru μ , bude získána rovnice ve tvaru

$$\omega_0^2 x_0'' + \omega_0^2 x_0 + \mu \left(\omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 + 2\omega_0 \omega_1 x_0'' + \frac{k_3}{m} x_0^3 \right) = 0. \quad (7.4)$$

Rovnice (7.4) bude splněna pouze tehdy, budou-li společně platit rovnice

$$\mu^0: \quad x_0'' + x_0 = 0, \quad (7.5)$$

$$\mu^1: \quad x_1'' + x_1 = -2 \frac{\omega_1}{\omega_0} x_0'' - \frac{k_3}{m} \frac{1}{\omega_0^2} x_0^3. \quad (7.6)$$

7.1 ZADÁNÍ A)

Počáteční podmínky pro tuto soustavu rovnic jsou: $x_0(0) = A, \quad x_0'(0) = 0,$
 $x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0.$ (7.7)

Řešení rovnice (7.5) je s využitím počátečních podmínek ve tvaru $x_0 = A \cos(\tau)$. Po dosazení do rovnice (7.6) a po úpravě vznikne tvar

$$x_1'' + x_1 = \left(2 \frac{\omega_1}{\omega_0} A - \frac{3k_3}{4m\omega_0^2} A^3 \right) \cos(\tau) - \frac{k_3}{4m\omega_0^2} A^3 \cos(3\tau). \quad (7.8)$$

Tento tvar obsahuje sekulární člen, který se odstraní pomocí podmínky, že výraz v závorce před členem $\cos(\tau)$ bude roven 0. Pro konstantu ω_1 bude tedy platit

$$\omega_1 = \frac{3k_3}{8m\omega_0} A^2 \quad (7.9)$$

a rovnice (7.8) bude mít nový tvar

$$x_1'' + x_1 = -\frac{k_3}{4m\omega_0^2} A^3 \cos(3\tau). \quad (7.10)$$

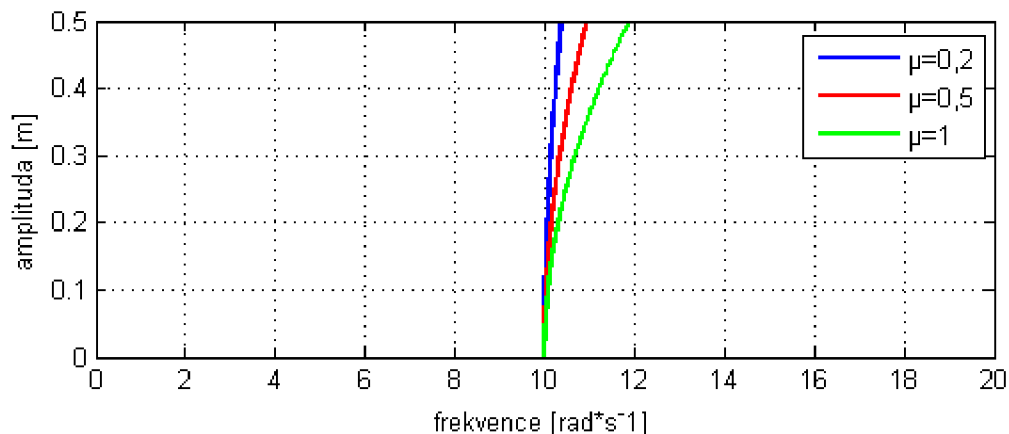
S využitím počátečních podmínek je řešení $x_1 = (k_3 A^3 / 32m\omega_0^2) (\cos(3\tau) - \cos(\tau))$. S ohledem na rovnice (7.3) bude vlastní frekvence zadané soustavy dána rovnicí

$$\Omega(A) = \omega_0 + \frac{3\mu k_3}{8m\omega_0} A^2 \quad (7.11)$$

a řešení pohybové rovnice bude po zpětné transformaci času

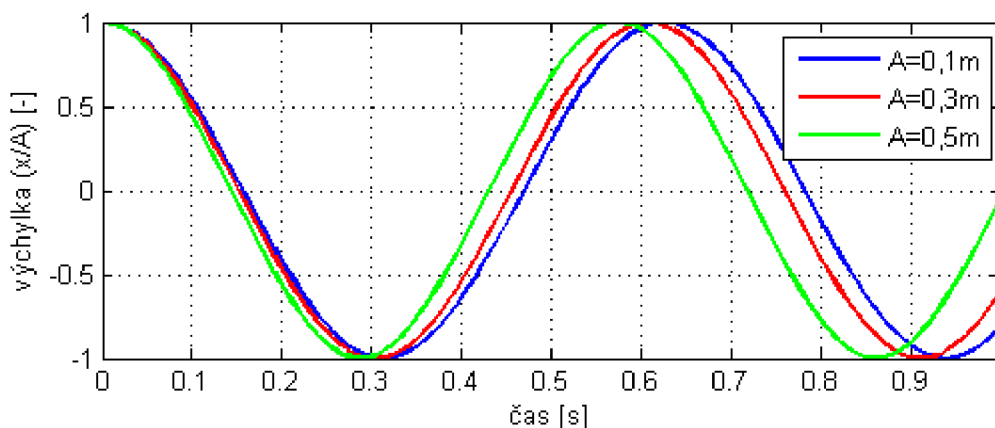
$$x(t) = A \cos(\Omega t) + \frac{\mu k_3 A^3}{32m\omega_0^2} (\cos(3\Omega t) - \cos(\Omega t)). \quad (7.12)$$

Rovnice (7.11) je rovnice skeletové křivky. Čím větší je nelinearita systému, tím více je tato křivka prohnutá. Míru nelinearity ovlivňuje poměr mezi koeficienty před nelineárními a lineárními členy v pohybové rovnici. Na obrázku 7.1 jsou proto zobrazeny skeletové křivky pro různé hodnoty parametru μ .



Obr. 7.1: Skeletové křivky

Frekvence kmitání této soustavy je tedy závislá na amplitudě kmitů. Řešení rovnice (7.12) pro různé hodnoty amplitudy A je zobrazeno v diagramu na obrázku 7.2, ze kterého je patrné, že se s rostoucí amplitudou zkracuje perioda kmitů.



Obr. 7.2: Průběhy výchylek

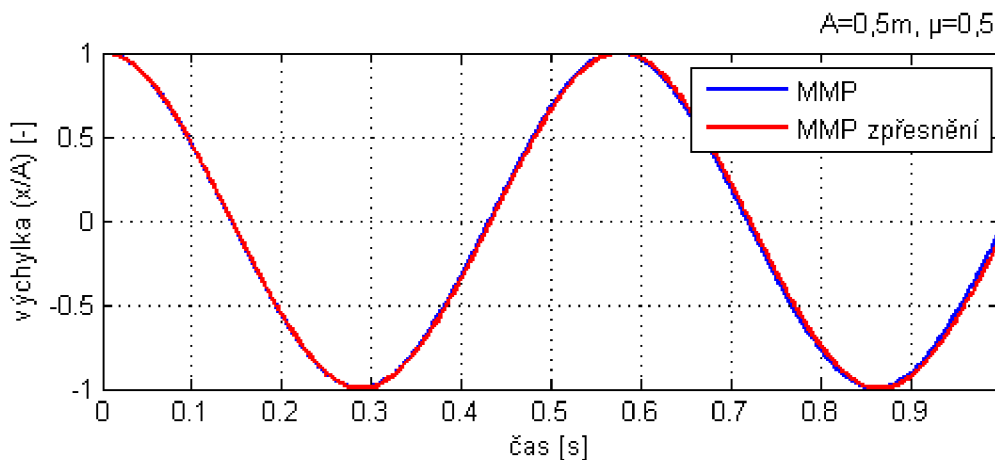
Pokud se bude pro větší přesnost počítat v rovnicích (5.3) a (5.4) se členy do druhého řádu, pro rovnici skeletové křivky bude platit vztah

$$\Omega(A) = \omega_0 + \frac{3\mu k_3}{8m\omega_0} A^2 - \frac{21\mu^2 k_3^2}{256m^2\omega_0^3} A^4 \quad (7.13)$$

a pro řešení pohybové rovnice

$$x(t) = \left(A - \frac{\mu k_3}{32m\omega_0^2} A^3 + \frac{23\mu^2 k_3^2}{1024m^2\omega_0^4} A^5 \right) \cos(\Omega t) + \left(\frac{\mu k_3}{32m\omega_0^2} A^3 - \frac{3\mu^2 k_3^2}{128m^2\omega_0^4} A^5 \right) \cos(3\Omega t) + \frac{\mu^2 k_3^2}{1024m^2\omega_0^4} A^5 \cos(5\Omega t). \quad (7.14)$$

Obrázek 7.3 zobrazuje průběhy výchylek při různých přesnostech výpočtu. Z porovnání vyplývá, že u přesnějšího výpočtu je délka periody přibližně o 0,5% větší.



Obr. 7.3: Průběhy výchylek při různých přesnostech výpočtu

Tato odchylka je zobrazena pro amplitudu $A=0,5\text{m}$ a parametr $\mu = 0,5$. Pro menší amplitudy nebo nelinearity se průběhy výchylek téměř neliší a rozdíl mezi nimi je rozeznatelný až při delším časovém intervalu. Lze tedy říct, že rozdíl mezi výsledky ve zpřesněném a méně přesném výpočtu metodou malého parametru je tím více zanedbatelný, čím menší jsou amplitudy kmitání a čím více se soustava blíží lineární.

7.1.2 Řešení metodou přímé linearizace

Charakteristika pružiny je symetrická a po dosazení do vztahu (5.7) platí

$$k^*(A) = \frac{5}{A^5} \int_0^A (kx + \mu k_3 x^3) x^3 dx = k + \frac{5}{7} \mu k_3 A^2 . \quad (7.15)$$

Pohybová rovnice původní nelineární soustavy se nahradí linearizovanou

$$m\ddot{x} + k^*(A)x = m\ddot{x} + \left(k + \frac{5}{7} \mu k_3 A^2\right)x = 0 \quad (7.16)$$

a vlastní frekvence se získá ze vztahu pro lineární soustavu, tedy

$$\Omega = \sqrt{\frac{k^*(A)}{m}} = \sqrt{\frac{k + \frac{5}{7} \mu k_3 A^2}{m}} . \quad (7.17)$$

7.1.3 Řešení metodou ekvivalentní linearizace

Pro nelineární člen platí vztah

$$f(x, \dot{x}) = \mu k_3 x^3 . \quad (7.18)$$

Dosazením do rovnice (5.14) platí pro $x = A \cos(\omega t)$ vztah

$$k_e(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \mu k_3 (A \cos(\omega t))^3 \cos(\omega t) d(\omega t) = \frac{3}{4} \mu k_3 A^2 . \quad (7.19)$$

Podle rovnice (5.15) bude potom ekvivalentní linearizovaná soustava dána rovnicí

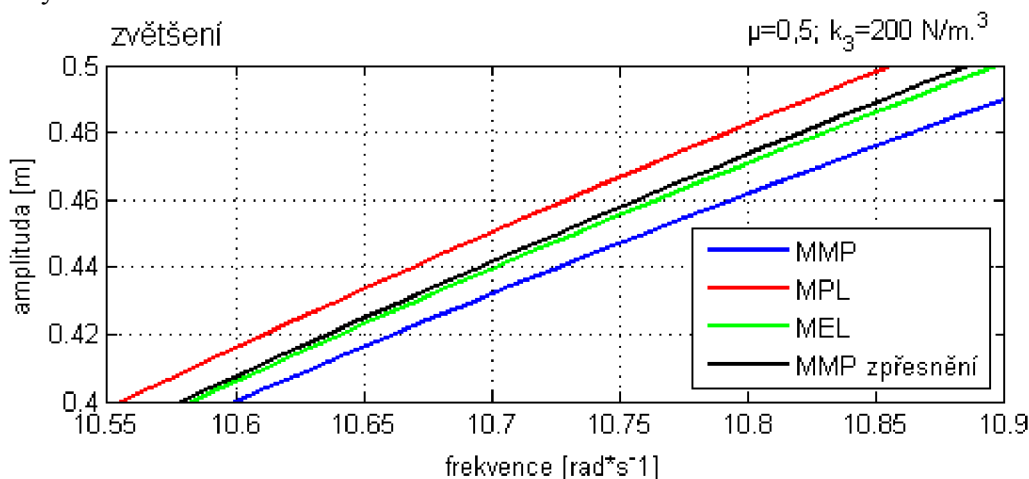
$$m\ddot{x} + \left[k + \frac{3}{4} \mu k_3 A^2\right]x = 0 . \quad (7.20)$$

Pro vlastní frekvenci ekvivalentní soustavy platí vztah

$$\Omega = \sqrt{\frac{k + k_e(A)}{m}} = \sqrt{\frac{k + \frac{3}{4} \mu k_3 A^2}{m}} . \quad (7.21)$$

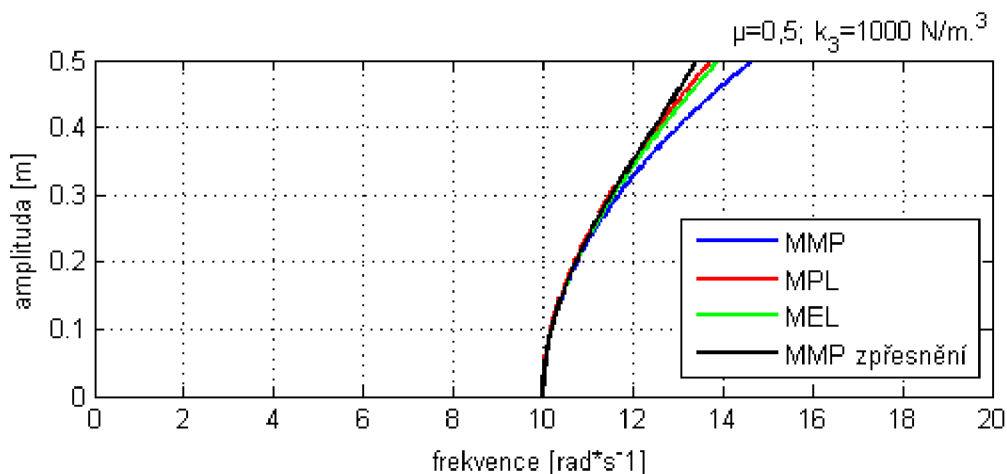
7.1.4 Porovnání výsledků

Pro skeletovou křivku byly zjištěny čtyři různé vztahy, které jsou zaneseny do diagramů. Na obrázku 7.4 je zobrazeno porovnání výsledků pro malý parametr $\mu = 0,5$ a $k_3 = 200 \text{ Nm}^{-3}$. Skeletové křivky se téměř překrývají a rozdíl mezi nimi je znatelný až ve zvětšeném pohledu, ve kterém je vidět, že výsledky získané pomocí zpřesněného výpočtu metodou malého parametru se nejvíce blíží výsledkům získaným pomocí metody ekvivalentní linearizace.



Obr. 7.4: Skeletové křivky pro $\mu = 0,5; k_3 = 200 \text{ Nm}^{-3}$

Pokud však bude nelinearita systému větší, metoda malého parametru bude dávat více odlišné výsledky od linearizačních metod. Na obrázku 7.5 je zobrazeno porovnání skeletových křivek pro malý parametr $\mu = 0,5$ $k_3 = 1\,000 \text{ Nm}^{-3}$.



Obr. 7.5: Skeletové křivky pro $\mu = 0,5; k_3 = 1\,000 \text{ Nm}^{-3}$

Při větších výchylkách se výsledky metody malého parametru značně liší od linearizačních metod. Čím větší je nelinearita systému, tím jsou rozdíly rozpoznatelnější při menších výchylkách. Z předchozích obrázků je ale patrné, že čím vyšší je zpřesnění výpočtu metodou malého parametru, tím jsou rozdíly od linearizačních metod relativně malé pro větší interval amplitud kmitání.

7.2 Zadání b)

Pohybová rovnice zadané soustavy má tvar

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx + k_2x|x| = F_0 \cos(\omega t) . \quad (7.22)$$

7.2.1 Řešení metodou přímé linearizace

Po dosazení zadání do vztahu (5.7) platí pro parametr k^*

$$k^*(A) = \frac{5}{A^5} \int_0^A (kx + k_2x|x|)x^3 dx = k + \frac{5}{6}k_2|A| . \quad (7.23)$$

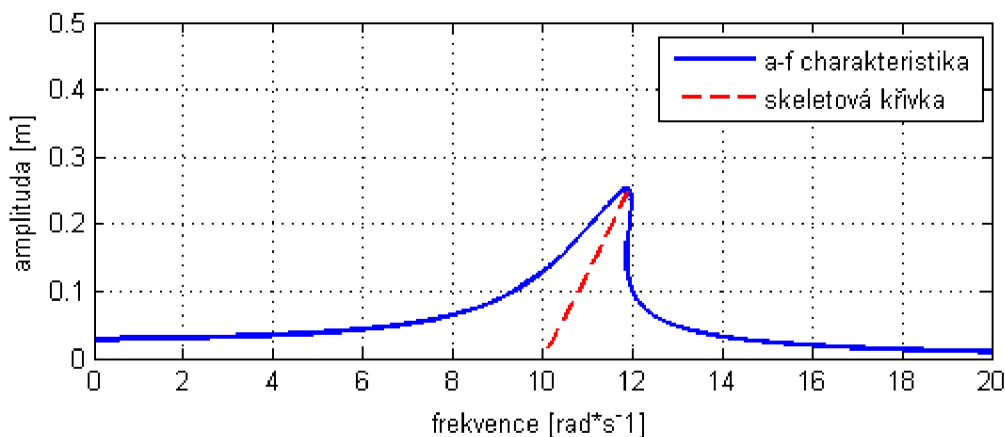
Pro parametr b^* platí $b^* = b$ a vlastní frekvence linearizované soustavy bude dána rovnicí

$$\Omega = \sqrt{\frac{k + \frac{5}{6}k_2|A|}{m}} . \quad (7.24)$$

Amplitudo-frekvenční charakteristika se určí podobně jako u lineární soustavy, tedy

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k^* - m\omega^2)^2 + b^{*2}\omega^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{(k + \frac{5}{6}k_2|A| - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} . \quad (7.25)$$

Amplitudo-frekvenční charakteristika je společně se skeletovou křivkou na obrázku 7.6.



Obr. 7.6: Amplitudo-frekvenční charakteristika

7.2.2 Řešení metodou ekvivalentní linearizace

Pro ekvivalentní součinitel tuhosti platí

$$k_e(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} k_2 A \cos(\omega t) |A \cos(\omega t)| \cos(\omega t) d(\omega t) = \frac{8k_2|A|}{3\pi} . \quad (7.26)$$

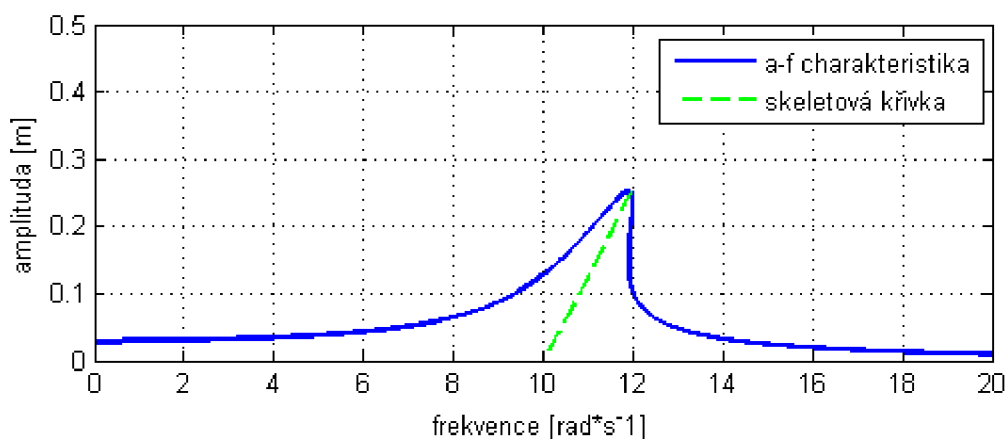
Ekvivalentní součinitel tlumení zůstane stejný jako v původní soustavě a pro vlastní frekvenci ekvivalentní soustavy platí vztah

$$\Omega = \sqrt{\frac{k + k_e(A)}{m}} = \sqrt{\frac{k + \frac{8}{3\pi} k_2 |A|}{m}}. \quad (7.27)$$

Amplitudo-frekvenční charakteristika se získá stejně jako u metody přímé linearizace a bude dána rovnicí

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k + k_e - m\omega^2)^2 + b_e^2 \omega^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{(k + \frac{8k_2|A|}{3\pi} - m\omega^2)^2 + b^2 \omega^2}}. \quad (7.28)$$

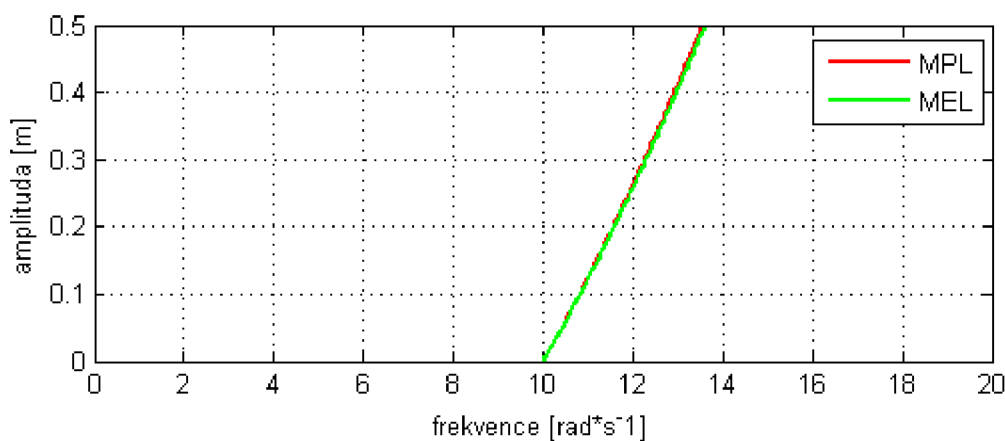
Amplitudo-frekvenční charakteristika získaná metodou ekvivalentní linearizace a skeletová křivka je na obrázku 7.7.



Obr. 7.7: Amplitudo-frekvenční charakteristika

7.2.3 Porovnání výsledků

Skeletové křivky získané pomocí linearizačních metod jsou porovnány na obrázku 7.8. Mezi získanými křivkami je pouze malý rozdíl.



Obr. 7.8: Skeletové křivky

7.3 Zadání c)

Pohybová rovnice zadané soustavy má tvar

$$m\ddot{x} + b_2\dot{x}|\dot{x}| + kx - kx^5 = F_0 \cos(\omega t) . \quad (7.29)$$

7.3.1 Řešení metodou přímé linearizace

Po dosazení zadání do vztahu (5.7) platí pro parametry b^* a k^*

$$b^*(A) = \frac{5}{A^5} \int_0^A (b_2\dot{x}|\dot{x}|)\dot{x}^3 d\dot{x} = \frac{5}{6} b_2 |A| , \quad (7.30)$$

$$k^*(A) = \frac{5}{A^5} \int_0^A (kx - k_5x^5)x^3 dx = k - \frac{5}{9} k_5 A^4 . \quad (7.31)$$

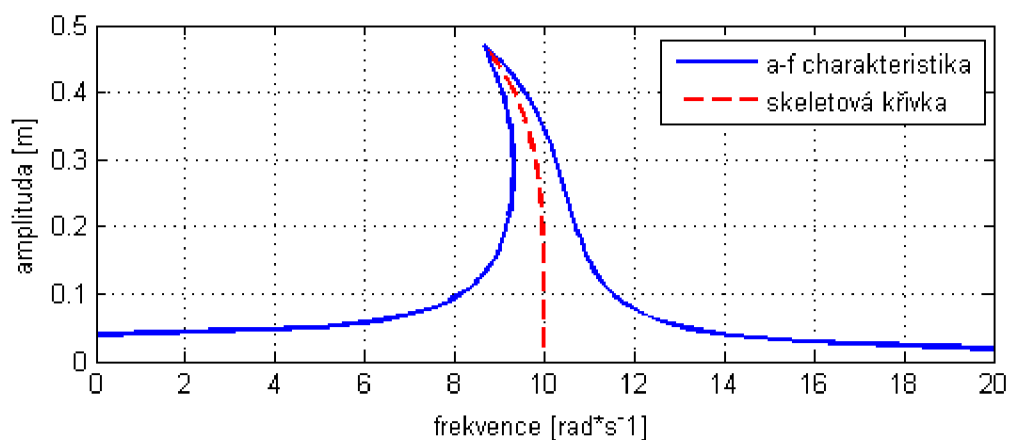
Vlastní frekvence bude dána rovnicí

$$\Omega = \sqrt{\frac{k - \frac{5}{9} k_5 A^4}{m}} . \quad (7.32)$$

Amplitudo-frekvenční charakteristika se určí ze vztahu pro lineární soustavu

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \frac{5}{9} k_5 A^4 - m\omega^2)^2 + (\frac{5}{6} b_2 |A|)^2 \omega^2}} . \quad (7.33)$$

Amplitudo-frekvenční charakteristika je zobrazena společně se skeletovou křivkou na obrázku 7.9. Jak je patrné z obrázku, tato soustava má měknoucí charakteristiku pružiny.



Obr. 7.9: Amplitudo-frekvenční charakteristika

7.3.2 Řešení metodou ekvivalentní linearizace

Pro ekvivalentní součinitele tlumení a tuhosti podle vztahů (5.10), (5.13) a (5.14) platí

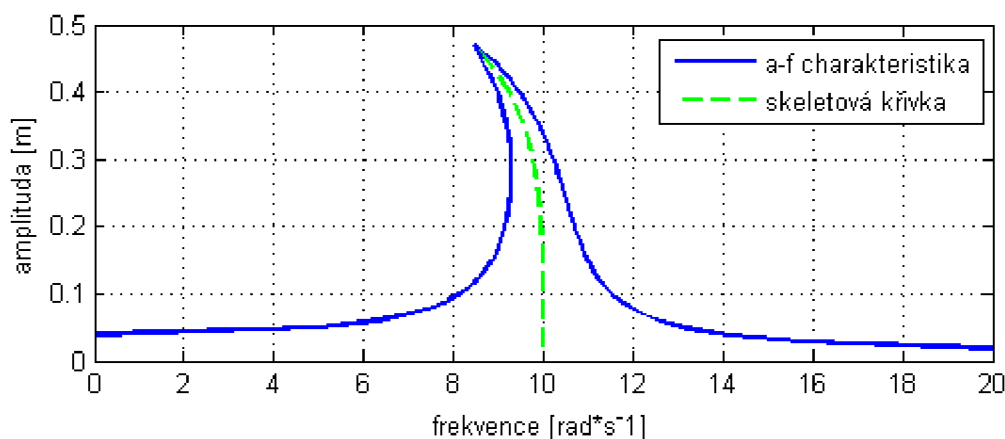
$$b_e(A) = \frac{b_2}{\pi A \omega} \int_0^{2\pi} (\omega A \sin(\omega t)) |\omega A \sin(\omega t)| \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{8b_2|A|}{3\pi}, \quad (7.34)$$

$$k_e(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} -k_5 (A \cos(\omega t))^5 \cos(\omega t) d(\omega t) = -\frac{5k_5 A^4}{8}. \quad (7.35)$$

Získaná amplitudo-frekvenční charakteristika je dána vztahem

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - \frac{5k_5 A^4}{8} - m\omega^2\right)^2 + \left(\frac{8b_2|A|}{3\pi}\right)^2 \omega^2}}. \quad (7.36)$$

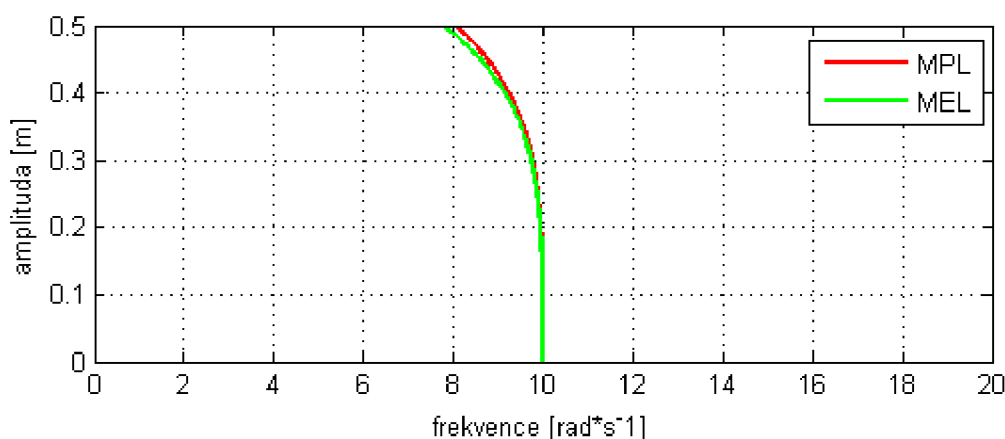
Na obrázku 7.10 je tato charakteristika zobrazena se skeletovou křivkou.



Obr. 7.10: Amplitudo-frekvenční charakteristika

7.3.3 Porovnání výsledků

Skeletové křivky získané pomocí obou linearizačních metod jsou na obrázku 7.11.



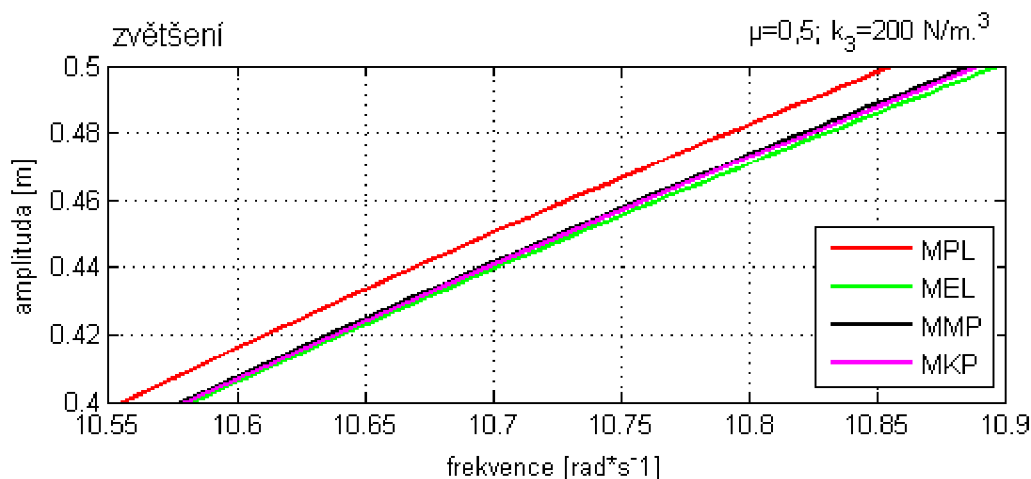
Obr. 7.11: Skeletové křivky

Skeletové křivky získané pomocí obou linearizačních metod se výrazněji liší od amplitudy 0,3m a výše. Při těchto výchylkách je charakteristika pružiny silně nelineární, což je patrné z obrázku 6.2.

7.4 Porovnání s metodou konečných prvků

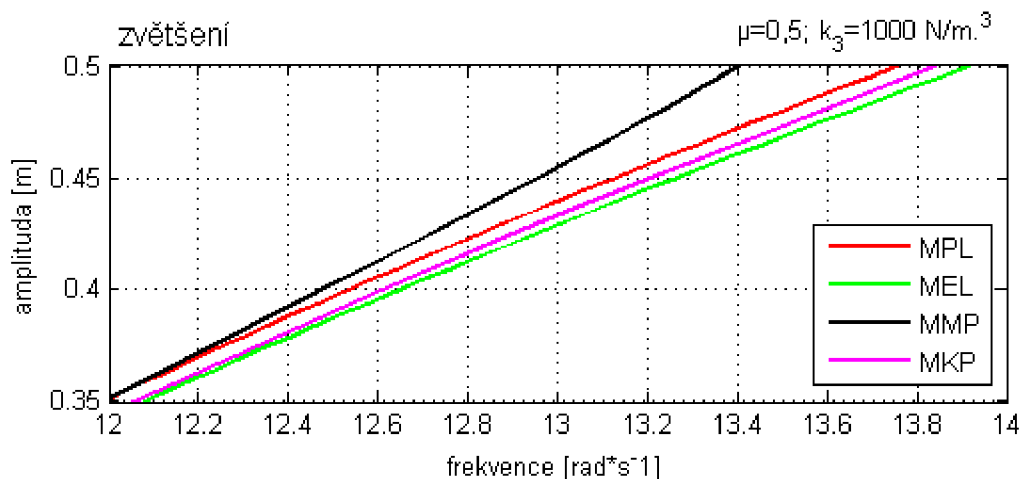
V dnešní době je díky výkonné výpočetní technice možné provést řešení i složitějších soustav pomocí numerických metod. Jedna z nejpoužívanějších numerických metod je metoda konečných prvků. Tuto metodu využívá systém ANSYS, ve kterém jsou pro porovnání řešeny předchozí soustavy. Přesto, že je tato metoda numerická, lze výsledky získané pomocí MKP považovat za nejvíce přesné.

Na obrázku 7.12 je porovnání skeletových křivek získaných v zadání a) s MKP pro malou nelinearitu. MKP dává výsledky nejbližší zprůměrnému výpočtu metodou malého parametru.



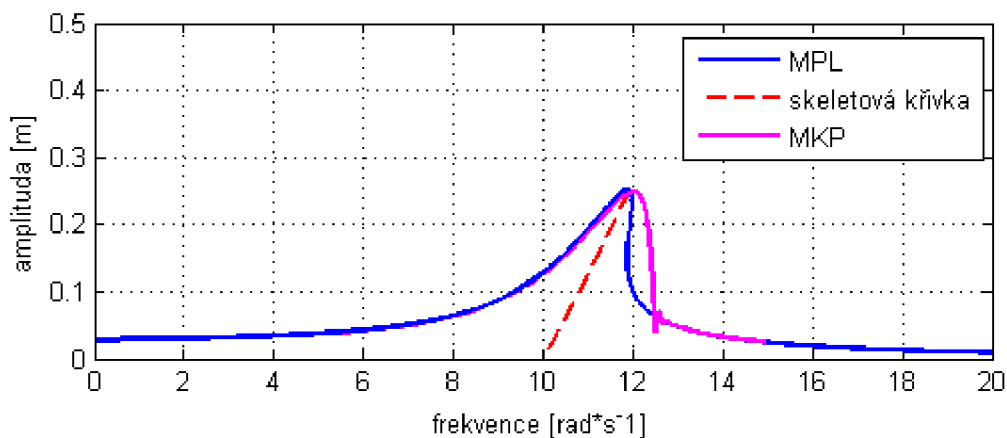
Obr. 7.12: Porovnání s MKP – malá nelinearita

Pro větší nelinearitu je porovnání na obrázku 7.13. Skeletová křivka získaná pomocí MKP leží mezi křivkami získanými linearizačními metodami nejbližší k metodě ekvivalentní linearizace.



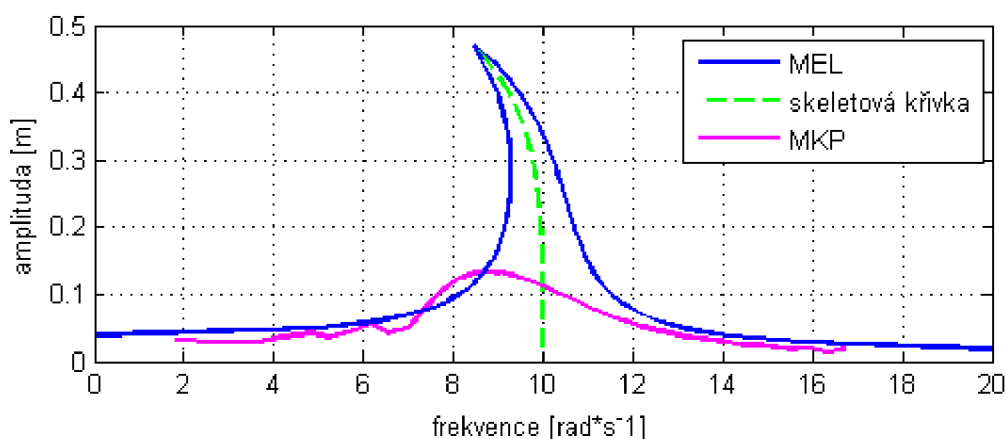
Obr. 7.13: Porovnání s MKP – velká nelinearita

Pomocí systému ANSYS, který řeší kmitání dynamické soustavy v čase, je možné získat přechodové charakteristiky při různých rychlostech změny budící frekvence. Na obrázku 7.14 je zobrazena změna budící frekvence od $5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ do $15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ za 200 sekund získaná pomocí MKP a porovnána s amplitudo-frekvenční charakteristikou vypočtenou metodou přímé linearizace. Tato charakteristika odpovídá pomalé rychlosti přechodu z podkapitoly 4.3.



Obr. 7.14: Přechodová charakteristika – pomalý nárůst frekvence

Přechodová charakteristika při rychlejší změně budící frekvence se více odchyluje od amplitudo-frekvenční charakteristiky dané soustavy. Na obrázku 7.15 je přechodová charakteristika porovnána s metodou ekvivalentní linearizace. Pokles budící frekvence ze $17 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ na $2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ trval 20 sekund. To odpovídá vysoké rychlosti přechodu z podkapitoly 4.3.



Obr. 7.15: Přechodová charakteristika – rychlý pokles frekvence

8. Závěr

V práci byly popsány metody přímé a ekvivalentní linearizace a metoda malého parametru. Všechny tyto metody byly použity na různé nelineární dynamické soustavy a porovnány jak mezi sebou tak s metodou konečných prvků. Z porovnání vyplývá, že vhodnost použití daných metod se různí podle složitosti a míry nelinearity soustavy. Nejvýhodnější řešení zejména složitých nelineárních dynamických soustav je pomocí metody konečných prvků. Tato metoda je mezi popisovanými metodami považována za nejpřesnější. Vždy je ale dobré ověření získaných výsledků některou z analytických metod.

V zadání se slabou nelinearitou byla nejpřesnější metoda malého parametru, ale výpočet touto metodou byl oproti linearizačním metodám náročný. Proto je někdy výhodnější použít metodu ekvivalentní linearizace, která dávala také velmi přesné výsledky u slabých nelinearit.

U soustavy se silně nelineární charakteristikou byla metoda malého parametru příliš nepřesná. Pro vyšší přesnost této metody by byl výpočet velice složitý. Odchytky mezi linearizačními metodami byly větší, než u slabě nelineárního systému. V takovém případě je dobré použití obou popsaných linearizačních metod. Přesné řešení dané soustavy bude ležet v intervalu vymezeném právě těmito metodami.

Pro detailnější porovnání daných metod by bylo nutné provádět výpočty u většího množství soustav s různými vlastnostmi, jako jsou například hmotnost, budící síla, více stupňů volnosti a podobně. I tak je z této práce možné získat základní představu o vlastnostech nelineárních soustav a metodách jejich řešení a podrobnější popis by mohl na tuto práci navazovat.

Literatura

- [1] KRATOCHVÍL, Ctirad, SLAVÍK, Jaromír. *Mechanika těles: Dynamika*. 4.vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3446-2
- [2] SLAVÍK, Jaromír, STEJSKAL, Vladimír, ZEMAN Vladimír. *Základy dynamiky strojů*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1997. ISBN 80-01-01622-6.
- [3] BREPTA, Rudolf, PŮST Ladislav, TUREK, František. *Mechanické kmitání*. Praha: Sobotáles, 1994. ISBN 80-901684-8-5
- [4] HLAVÁČ, Zdeněk: *Úvod do nelineárního kmitání soustav s jedním stupněm volnosti* [online], 9. 1. 2013 [cit. 8. 3. 2013], dostupný z: <<http://www.kme.zcu.cz/download/predmety/432-fst10.pdf>>

9. Seznam použitých zkratek a symbolů

MEL	Metoda ekvivalentní linearizace	
MKP	Metoda konečných prvků	
MMP	Metoda malého parametru	
MPL	Metoda přímé linearizace	
A	amplituda kmitání	[m]
\tilde{A}	amplituda výchylky od střední polohy odchýlení	[m]
a_1	amplituda kmitání u nesymetrické charakteristiky	[m]
a_2	amplituda kmitání u nesymetrické charakteristiky	[m]
b	koeficient lineární části tlumení	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$
b_2	koeficient nelineární části tlumení	$[N \cdot s^2 \cdot m^{-2}]$
b^*	parametr linearizovaného tlumení	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$
b_e	ekvivalentní součinitel tlumení	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$
C_1	koeficient Fourierovy řady	[N]
D_1	koeficient Fourierovy řady	[N]
F	budící síla	[N]
F_0	amplituda budící síly	[N]
f_b	charakteristika tlumiče	[N]
f_k	charakteristika pružiny	[N]
I	integrál	$[N^2 \cdot m^3]$
k	koeficient lineární části tuhosti	$[N \cdot m^{-1}]$
k_2	koeficient nelineární části tuhosti	$[N \cdot m^{-2}]$
k_3	koeficient nelineární části tuhosti	$[N \cdot m^{-3}]$
k_5	koeficient nelineární části tuhosti	$[N \cdot m^{-5}]$
k^*	parametr linearizované tuhosti	$[N \cdot m^{-1}]$
k_e	ekvivalentní součinitel tuhosti	$[N \cdot m^{-1}]$
m	hmotnost	[kg]
Q	zobecněné působení	[N]
Q_0	amplituda zobecněného působení	[N]
q	zobecněná souřadnice	[m]
q_i	zobecněná funkce transformovaného času	[m]
\tilde{q}	zobecněná souřadnice u nesymetrické charakteristiky	[m]
r	celé číslo	[-]
s	celé číslo	[-]
t	čas	[s]
x	výchylka	[m]
x_i	funkce transformovaného času	[m]
ω	frekvence buzení	$[rad \cdot s^{-1}]$
ω_0	vlastní frekvence lineární části kmitání	$[rad \cdot s^{-1}]$
ω_i	koeficienty mocninné řady vlastní frekvence	$[rad \cdot s^{-1}]$
Ω	vlastní frekvence nelineárního kmitání	$[rad \cdot s^{-1}]$
μ	malý parametr	[-]
τ	transformovaný čas	[rad]
φ	fázový posuv	[rad]
Δ	odchylka nesymetrické charakteristiky	[m]

10. Seznam příloh

Přiložené CD:

bakalarska_prace.pdf
a_slaba_nelinearita.db
a_slaba_nelinearita.txt
a_silna_nelinearita.db
a_silna_nelinearita.txt
b_pomaly_rust.db
b_pomaly_rust.txt
c_rychly_pokles.db
c_rychly_pokles.txt
nelinearni_kmitani.m
vypocty.mw

elektronická verze ve formátu PDF
soubor příkazů pro systém ANSYS
soubor příkazů pro systém ANSYS
soubor příkazů pro systém ANSYS
soubor příkazů pro systém ANSYS
soubor příkazů pro systém ANSYS
soubor příkazů pro systém ANSYS
soubor příkazů pro systém ANSYS
soubor příkazů pro systém ANSYS
soubor příkazů pro systém MATLAB
soubor příkazů pro systém MAPLE