Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Fakulta pedagogická

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Množiny bodů daných vlastností

Vypracoval: Andrea Dvořáková

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Pavel Pech, CSc

Externí konzultant: Mgr. Vejsada Marek

České Budějovice 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracoval(a) samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to – v nezkrácené podobě – v úpravě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných fakultou – elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejich internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne (datum) ....

(jméno a příjmení)

Poděkování

Chtěla bych poděkovat panu Prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc. za odborné vedení a věcné připomínky během psaní této bakalářské práce. Také bych chtěla poděkovat panu Mgr. Vejsadovi za pomoc při gramatické a odborné kontrole práce a za cenné rady, které mi pomohly tuto práci zkompletovat.

Anotace

Práce se zaměřuje na popis množin bodů s danou vlastností a jejich využití při řešení jednoduchých úloh středoškolské matematiky. Je rovněž zaměřena na rozbor složitějších problémů vedoucích převážně ke kuželosečkám. Tyto problémy jsou řešeny planimetrickou nebo analytickou formou. Je uvedena i kapitola zabývající se osovou afinitou, která učivo na gymnáziu rozšiřuje.

Klíčová slova:

matematika, geometrie, množiny bodů daných vlastností, kuželosečky

Annotation

This bachelor thesis focuses on the description of the loci of given properties and its use in solving of the simple tasks in high schools. It is also focused on the analysis of more difficult problems related to the conic sections. These problems are solved in planimetric or analytic form. There is also a chapter dealing with the axial affinity. It extends the curriculum at high schools.

Key words:

mathematics, geometry, loci of given properties, conic sections

OBSAH

Úvod

Již na gymnáziu jsem měla v oblibě geometrii, zvláště pak množiny bodů s danou vlastností. Rozhodla jsem se, že bych na znalosti získané na střední škole ráda navázala svou bakalářskou prací. Chtěla jsem si v tématu, které mě zajímá, rozšířit obzory.

Přístup k tomuto tématu je v dnešní době značně usnadněn možností používat dynamický software GeoGebra. Nejenom, že mi práce s tímto programem pomohla dané množiny bodů identifikovat, ale dynamika konstrukcí mi umožnila snáze provádět jednotlivé důkazy. Práce s GeoGebrou provází celou mou práci.

Práci jsem rozdělila na 2 oblasti. V první části zmiňuji, v jakých ročnících na osmiletých gymnáziích se látka týkající se množin bodů vyskytuje, a jaké konkrétně množiny bodů jsou zde probírány. Tato část obsahuje i vzorové příklady, které se na gymnáziích a středních školách probírají.

Ve druhé části se zabývám rozborem konkrétních příkladů k tématu množin bodů, které mě zaujaly, popřípadě které mi byly doporučeny vedoucím bakalářské práce nebo externím konzultantem. Tyto příklady pak řeším planimetrickou nebo analytickou formou.

Poslední kapitola mé bakalářské práce je věnována osové afinitě, jejíž problematika se sice na gymnáziích povinně nevyučuje, ale vede k zajímavé úloze, která souvisí s množinou bodů hledanou pomocí úsekového úhlu.

Za cíl své práce považuji uvedení stručného přehledu výskytu tohoto tématu v kurikulech gymnázia, ale hlavně bych ráda seznámila případného čtenáře se zajímavými konstrukcemi, které by se mohly použít jako rozšiřující učivo na gymnáziích např. v odborných seminářích.

1. Množiny bodů s danou vlastností na gymnáziu

V této kapitole jsou obsaženy základní postřehy týkající se výuky geometrie na gymnáziu s přihlédnutím na množiny bodů s danou vlastností. Zmíním stručně tu část Rámcových vzdělávacích programů, které se této partie geometrie týkají.

Součástí této kapitoly budou i vybrané příklady, které v řešení obsahují množiny bodů s danou vlastností.

1.1. Geometrie na gymnázium – obecný úvod

V Rámcovém vzdělávacím programu Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy, lze vyčíst tyto obecné informace týkající se geometrie množin bodů s danou vlastností, které každá škola začleňuje do svých Školních vzdělávacích programů.

1.1.1. Cílové zaměření vzdělávací oblasti a očekávané výstupy

Nejdůležitějším zaměřením geometrie je rozvíjení geometrického vidění a prostorové představivosti. S ohledem na téma množin bodů s danými vlastnostmi bych zmínila tyto očekávané výstupy týkající se žáka:

1.1.1.1. Žák používá geometrické pojmy, zdůvodňuje a využívá vlastnosti geometrických útvarů v rovině a v prostoru, třídí útvary dle vlastností

1.1.1.2. Žák určuje vzájemnou polohu lineárních útvarů, vzdálenosti a odchylky

1.1.1.3. Žák využívá náčrt při řešení rovinného problému

1.1.1.4. Žák řeší polohové a nepolohové konstrukční úlohy užitím všech bodů dané vlastnosti

1.1.1.5. Žák řeší planimetrické problémy motivované praxí

1.1.1.6. Žák využívá charakteristické vlastnosti kuželoseček k určení analytického vyjádření

1.1.1.7. Žák z analytického vyjádření (z osové nebo vrcholové rovnice) určí základní údaje o kuželosečce

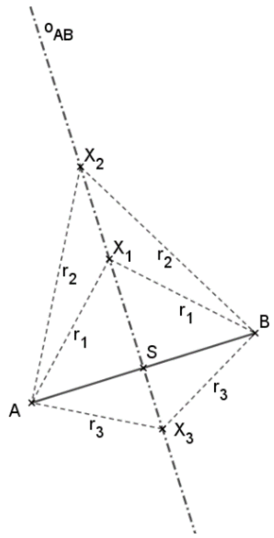
1.1.1.8. Žák řeší analyticky úlohy na vzájemnou polohu přímky a kuželosečky [1, s.27]

1.2. Množiny bodů s danou vlastností na gymnáziu

1.2.1. Nižší gymnázium nebo druhý stupeň ZŠ

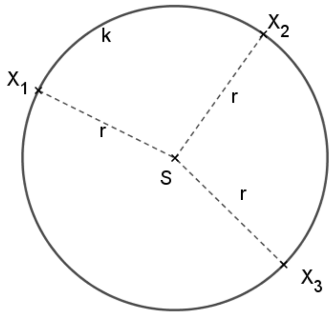
Při studiu látky týkající se množin bodů s danou vlastností na nižším gymnáziu nebo na druhém stupni základních škol, se žák postupně seznamuje s následujícími znalostmi:

1.2.1.1. ***Osa úsečky*** jako množina všech bodů, které mají od krajních bodů dané úsečky stejnou vzdálenost:



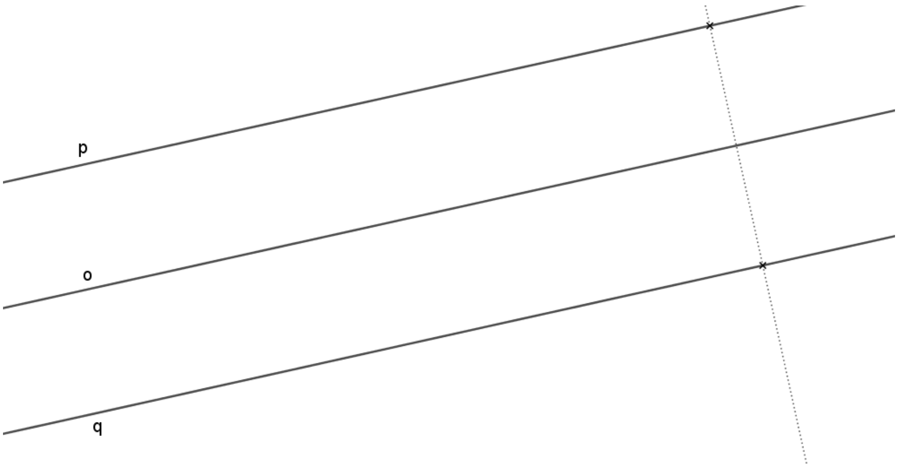
Obrázek 1.2.1.1.-1. Osa úsečky

1.2.1.2. ***Kružnice*** jako množina všech bodů, které mají od daného bodu v rovině stejnou danou vzdálenost:



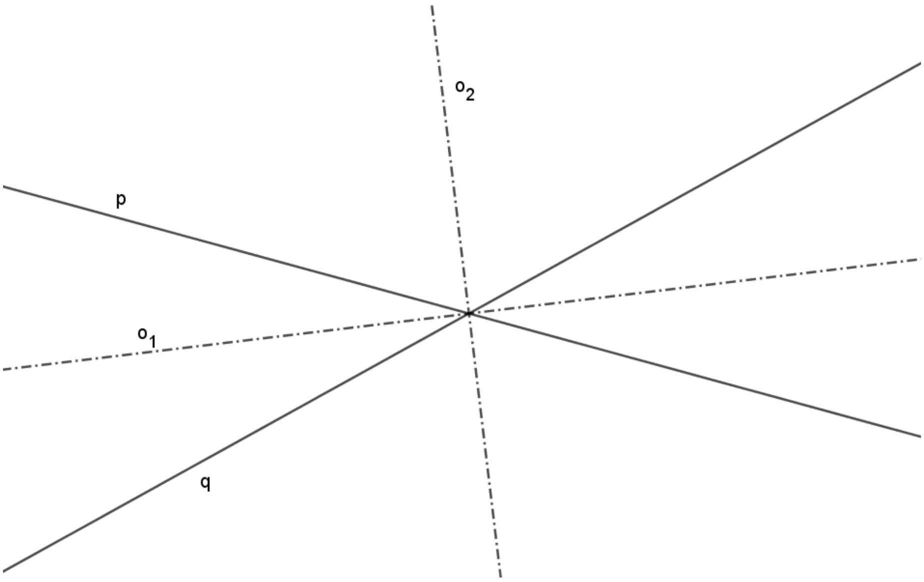
Obrázek 1.2.1.2.-1. Kružnice

1.2.1.3. ***Osa pásu (o)*** jako množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných rovnoběžek (*p*, *q*):



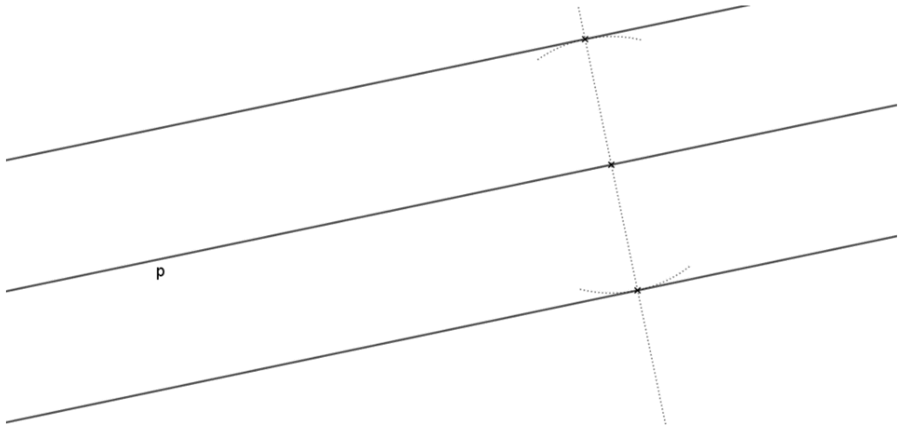
Obrázek 1.2.1.3.-1. Osa pásu

1.2.1.4. ***0sa různoběžných přímek*** jako množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různoběžek, a s tím související osa úhlu.



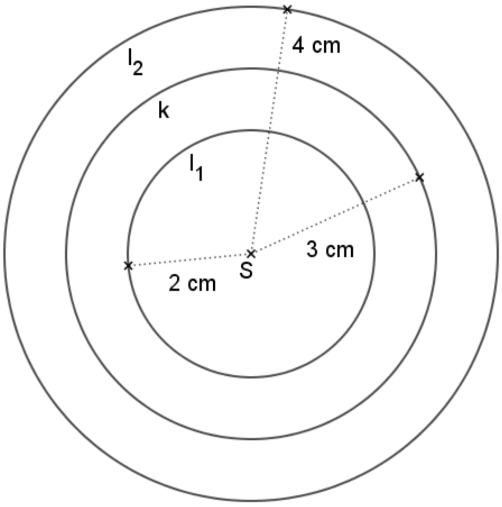
Obrázek 1.2.1.4.-1. Osa různoběžných přímek

1.2.1.5. ***Rovnoběžníkový pás*** jako množina všech bodů, které mají stejnou danou vzdálenost od dané přímky *p*.



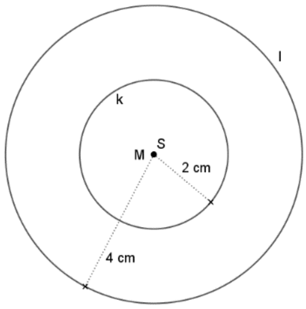
Obrázek 1.2.1.5.-1. Rovnoběžníkový pás

1.2.1.6. ***Dvě kružnice*** $(\boldsymbol{l_1}, \boldsymbol{l_2})$ ***soustředné s danou kružnicí*** jako množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dané kružnice *k*, přičemž je tato vzdálenost menší než poloměr dané kružnice.



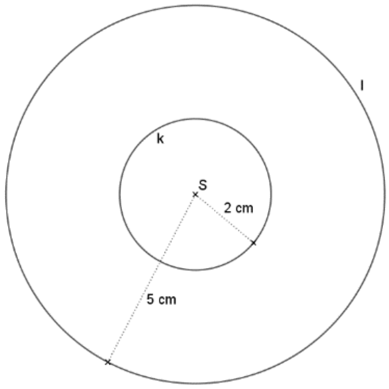
Obrázek 1.2.1.6.-1. Dvě kružnice soustředné s danou kružnicí

1.2.1.7. ***Bod (M) a soustředná kružnice (l) s danou kružnicí*** jako množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dané kružnice *k*, přičemž je tato vzdálenost rovna poloměru dané kružnice.



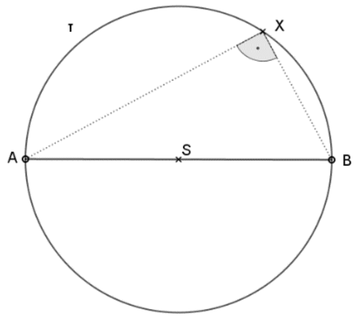
Obrázek 1.2.1.7.-1. Bod a soustředná kružnice s danou kružnicí

1.2.1.8. ***Soustředná kružnice (l) s danou kružnicí*** jako množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dané kružnice *k*, přičemž je tato vzdálenost větší než poloměr dané kružnice.



Obrázek 1.2.1.8.-1. Soustředná kružnice s danou kružnicí

1.2.1.9. ***Thaletova kružnice*** jako množina všech bodů, které tvoří vrcholy pravoúhlých trojúhelníků s přeponou totožnou s danou úsečkou.



Obrázek 1.2.1.9.-1. Thaletova kružnice

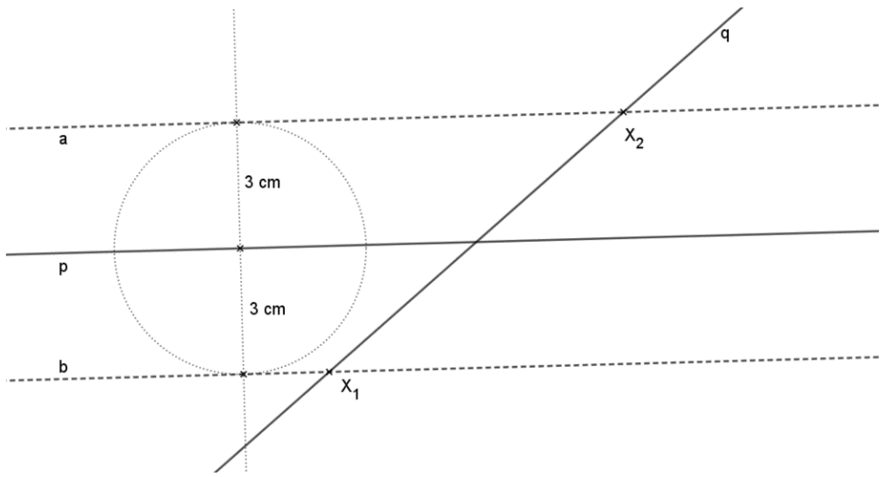
1.2.2. Ukázky úloh na množiny bodů – druhý stupeň ZŠ a nižší gymnázium

Dobré osvojení předchozích pojmů a zvládnutí jejich použití při řešení jednoduchých úloh je důležité pro pochopení navazujících témat množin bodů na vyšším gymnáziu. V další části textu uvedu několik základních úloh:

1.2.2.1. Jsou dány dvě různoběžky *p* a *q*. Narýsujte všechny bod, které náleží přímce *q* a mají od přímky *p* vzdálenost 3 cm. [2]

Řešení:

Pro nalezení hledaných bodů použiji množinu všech bodů, které mají od přímky *p* vzdálenost 3 cm, což je rovnoběžníkový pás (*a*, *b*), jehož šířka je 6 cm a jehož ose je daná přímka *p*. Úloha má dvě řešení.



Obrázek 1.2.2.1.-1. Řešení úlohy 1.2.2.1.

1.2.2.2. Je dána úsečka *AB* délky 2,5 cm. Narýsujte kružnici *k* se středem v bodě *A*, která prochází bodem *B*.

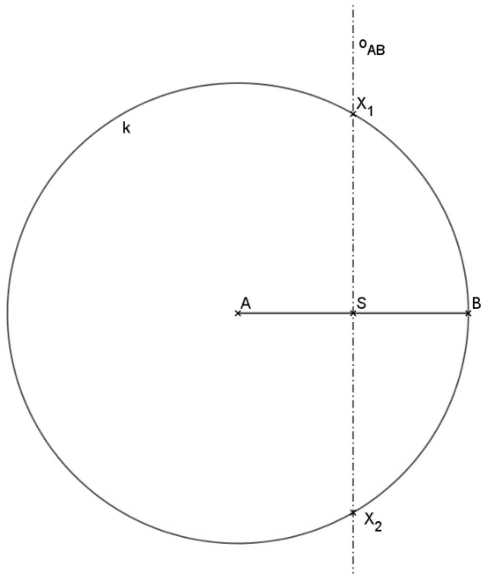
a) Narýsujte všechny body *X* kružnice *k*, které mají stejnou vzdálenost od bodů *A*, *B*.

b) Jaké vlastnosti má trojúhelník *ABX*? [2]

Řešení:

Hledané body mají mít stejnou vzdálenost od krajních bodů úsečky *AB*. Proto musí náležet ose této úsečky. Hledám tedy průsečík osy úsečky *AB* s kružnicí *k*. Úloha má dvě řešení.

a)



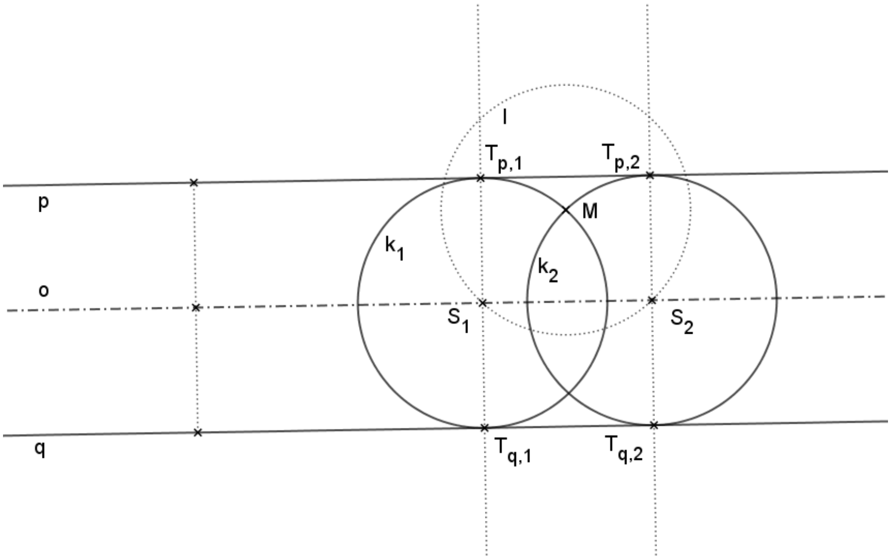
Obrázek 1.2.2.2.-1. Řešení úlohy 1.2.2.2. – a)

b) Trojúhelník *ABX* je rovnostranný.

1.2.2.3. Jsou dány dvě rovnoběžky *p* a *q*, jejichž vzdálenost je 3 cm, a mezi nimi bod *M*. Narýsujte všechny kružnice *k*, které procházejí bodem *M* a dotýkají se přímek *p* a *q*. [2]

Řešení:

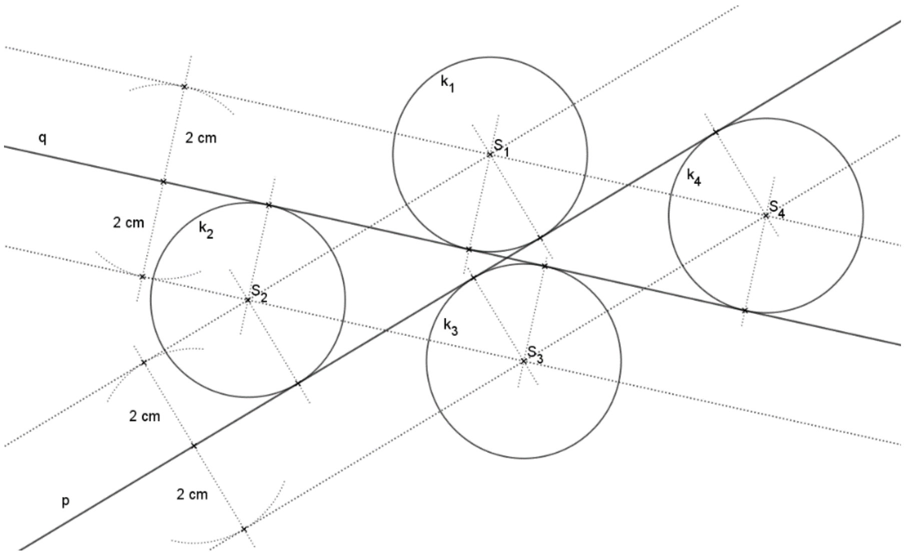
Střed hledané kružnice *S* musí mít stejnou vzdálenost od obou rovnoběžek. Proto musí náležet ose pásu *o*, který tyto rovnoběžky tvoří. Navíc musí mít bod *S* stejnou vzdálenost i od bodu *M*. Musí tedy náležet kružnici *l* se středem v bodě *M* a poloměrem, který je dán poloviční vzdáleností rovnoběžek *p* a *q*. Budu tedy hledat bod *S* v průsečíku kružnice *l* a osy pásu *o*. Nesmíme zapomenout na konstrukci bodů dotyku před konstrukcí hledané kružnice *k*. Úloha má dvě řešení.



Obrázek 1.2.2.3.-1. Řešení úlohy 1.2.2.3.

1.2.2.4. Jsou dány dvě různoběžky *p* a *q*. Narýsujte všechny kružnice, jejichž poloměr je 2 cm, a které se dotýkají obou přímek *p* a *q*. [2]

Řešení:



Obrázek 1.2.2.4.-1. Řešení úlohy 1.2.2.4

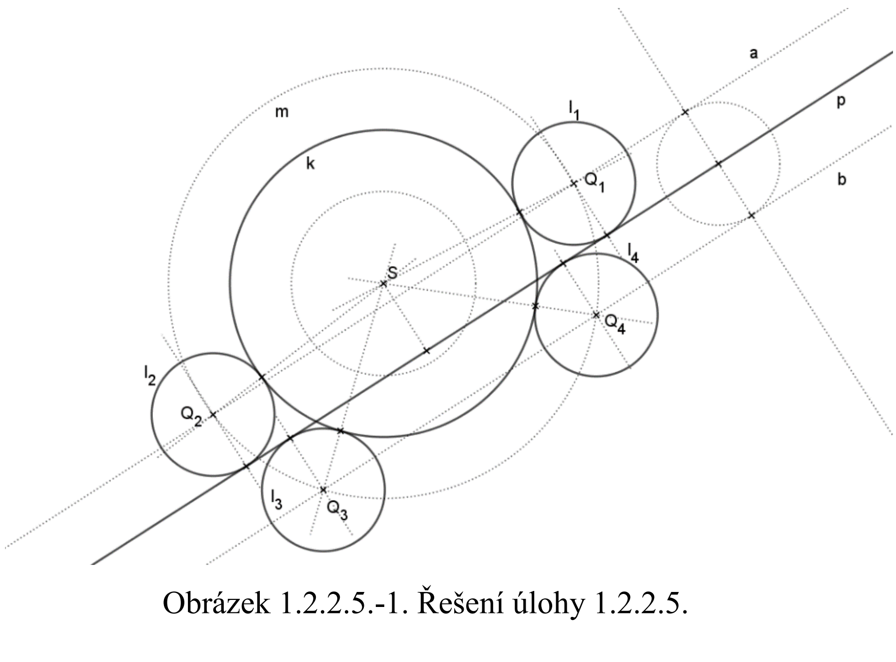
Komentář k úloze 1.2.2.4:

Hledaný střed kružnice *S* musí mít stejnou vzdálenost od obou zadaných přímek. Jedna z možností, jak úlohu vyřešit, je narýsovat množinu bodů, které mají stejnou vzdálenost 2 cm od různoběžek *p* a *q*. To jsou rovnoběžné přímky tvořící pás, jehož šířka je 4 cm a osa pásu je přímka *p* (přímka *q*). Než narýsuji hledané kružnice, musím ještě sestrojit body dotyku. Úloha má čtyři řešení.

1.2.2.5. Je dána kružnice *k* se středem *S* a poloměrem 2,5 cm a přímka *p*, jejíž vzdálenost od bodu *S* je 1,3 cm. Narýsujte všechny kružnice, které mají poloměr 1,5 cm a dotýkají přímky *p*, navíc mají s kružnicí *k* vnější dotyk. [2]

Řešení:

Hledaný střed *Q* kružnice *l* má stejnou vzdálenost 1 cm jak od kružnice *k*, tak od přímky *p*. Bude proto náležet průsečíku množiny bodů majících od kružnice *k* vzdálenost 1 cm (kružnice *m*) s množinou bodů, které mají vzdálenost 1 cm od přímky *p* (pás *a*, *b*). Podle zadání úlohy mě zajímají pouze ty kružnice, které mají s kružnicí *k* vnější dotyk. Opět nutno sestrojit body dotyku. Úloha má čtyři řešení.

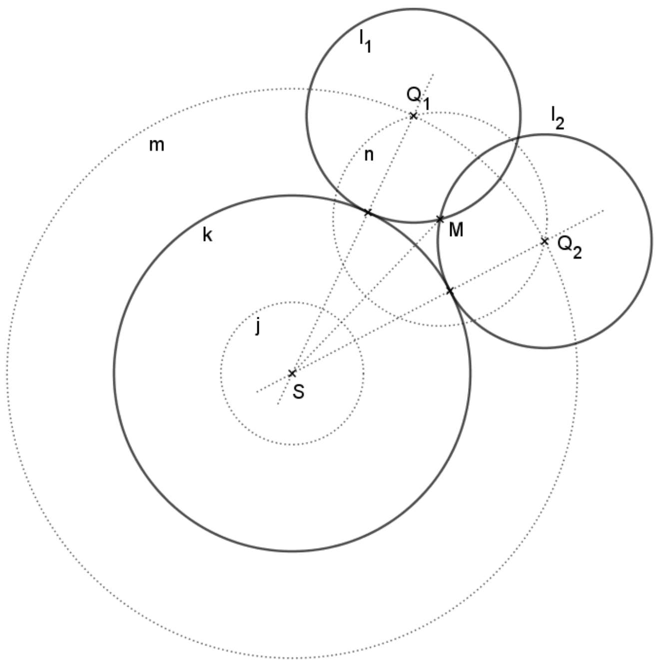


Obrázek 1.2.2.5.-1. Řešení úlohy 1.2.2.5.

1.2.2.6. Je dána kružnice *k* se středem *S* a poloměrem 2,5 cm a bod *M*, jehož vzdálenost od bodu *S* je 3 cm. Narýsujte všechny kružnice, které mají poloměr 1,5 cm, prochází bodem *M* a dotýkají se kružnice *k*. [2]

Řešení:

Budu hledat bod Q, střed hledané kružnice l. Ten leží v průsečíku množiny bodů mající od S vzdálenost 4 cm (kružnice[1] $n(S; r = 4\text{ cm})$ s množinou bodů, které mají stejnou vzdálenost od bodu M (kružnice $m(M; r = 1{,}5\text{ cm})$). Nutno sestrojit body dotyku. Úloha má dvě řešení.



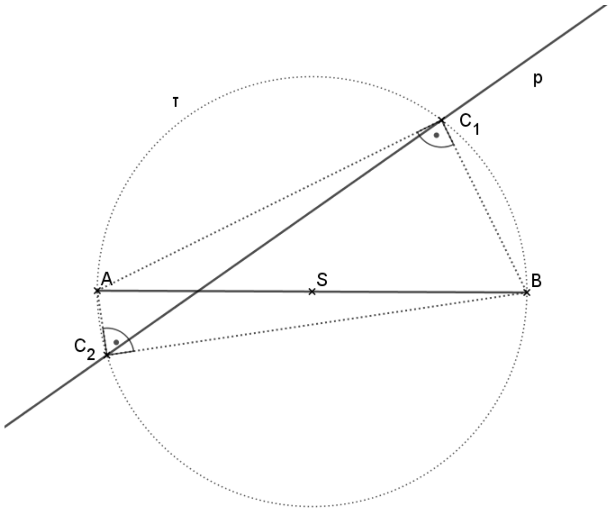
Obrázek 1.2.2.6.-1. Řešení úlohy 1.2.2.6.

1.2.2.7. Narýsujte úsečku *AB* a přímku *p*, která tuto úsečku protíná ve vnitřním bodě. Narýsujte na přímce *p* všechny body *C* tak, aby trojúhelník *ABC* byl pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu *C*. [2]

[1] Druhá část množiny bodů, splňující danou podmínku, je kružnice *j* se středem *S* a poloměrem 1 cm. Ta ovšem nemůže přinést žádné další řešení, protože neprotne kružnici *n*.

Řešení:

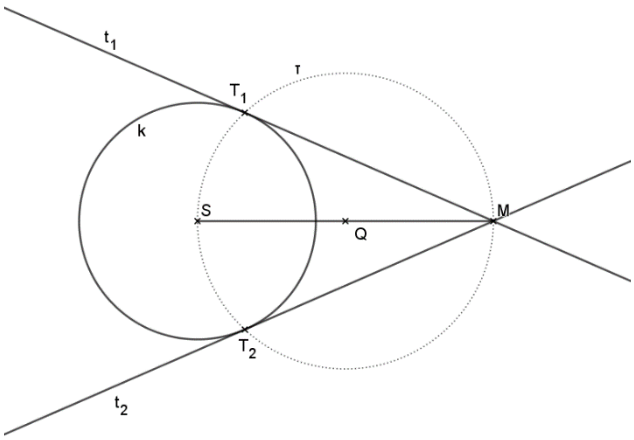
Hledaný bod *C* musí náležet Thaletově kružnici τ sestrojené nad úsečkou *AB*, protože tato kružnice tvoří množinu všech vrcholů pravoúhlých trojúhelníků sestrojených nad přeponou *AB*. Průsečík této kružnice s přímkou *p* je bod *C*. Úloha má dvě řešení.



Obrázek 1.2.2.7.-1. Řešení úlohy 1.2.2.7.

1.2.2.8. Je dána úsečka *SM*, jejíž délka je 5 cm a kružnice *k* se středem *S* a poloměrem 2 cm. Narýsujte tečny kružnice *k* procházející bodem *M*. [2]

Řešení:



Obrázek 1.2.2.8.-1. Řešení úlohy 1.2.2.8.

Komentář k úloze 1.2.2.8:

Body dotyku tečen vedených z bodu *M* ke kružnici *k* jsou vrcholy pravoúhlých trojúhelníků sestrojených nad úsečkou *SM*. Proto sestrojím Thaletovu kružnici nad průměrem *SM*. Hledané body dotyku budou náležet průsečíku zadané kružnice *k* s Thaletovou kružnicí. Úloha má dvě řešení.

1.2.3. Vyšší gymnázium

K množinám bodů vyučovaných na druhém stupni základních škol nebo na nižším gymnáziu, jsou na vyšším gymnáziu připojeny následující útvary:

1.2.3.1. ***kružnicový oblouk nad danou úsečkou*** jako množina všech bodů, ze kterých je daná úsečka viděna pod daným úhlem (tedy množina bodů, které tvoří vrcholy trojúhelníku, jehož jedna strana je daná úsečka a velikost úhlu proti této straně je dán); jedná se o zobecnění věty o Thaletově kružnici.

1.2.3.2. ***kuželosečky***

Podrobnější informace o kuželosečkách budou uvedeny v druhé části bakalářské práce. Zde uvedu pouze základní informace.

a) ***kružnice*** viz nižší gymnázium
b) ***elipsa*** jako množina všech bodů, které mají od daných dvou různých bodů stejný součet vzdáleností
c) ***parabola*** jako množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od dané přímky jako od bodu, který na této přímce neleží
d) ***hyperbola*** jako množina bodů, které mají od daných dvou různých bodů stejnou absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností

1.2.4. Ukázky jednoduchých úloh – užití množin bodů s danou vlastností

V této části uvedu dva příklady k tématu 1.2.3.1. Úlohami na množiny bodů týkající se kuželoseček se zabývám v dalších částech mé bakalářské práce.

1.2.4.1. Je dána úsečka *AB*, jejíž délka je 5 cm. Narýsujte množinu všech bodů *X* takových, aby velikost úhlu $\sphericalangle AXB$ byla rovna: [2]

a) 50^o

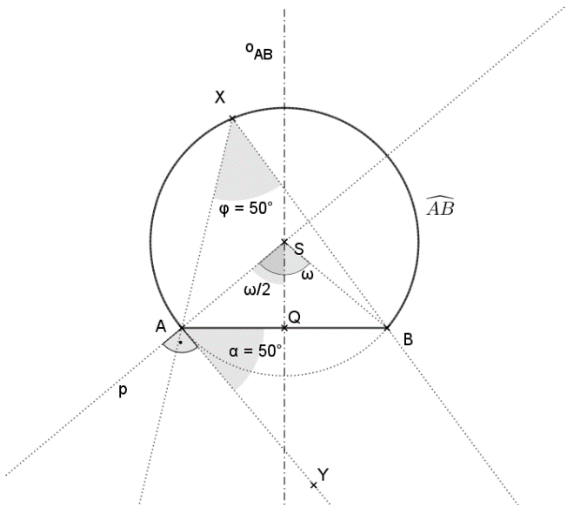
b) 130^o

Řešení:

a) Konstrukci provedu pomocí úsekového úhlu $\alpha = 50^o$. Narýsuji polopřímku AX tak, aby velikost úhlu $\sphericalangle BAX$ byla rovna 50^o. Narýsuji přímku p kolmou na polopřímku AX procházející bodem A a osu úsečky AB. V průsečíku přímky p a osy o_{AB} vznikne bod S, střed hledaného kružnicového oblouku $\widehat{AB}$, jehož poloměr je určen délkou úsečky AS. Zdůvodnění konstrukce:

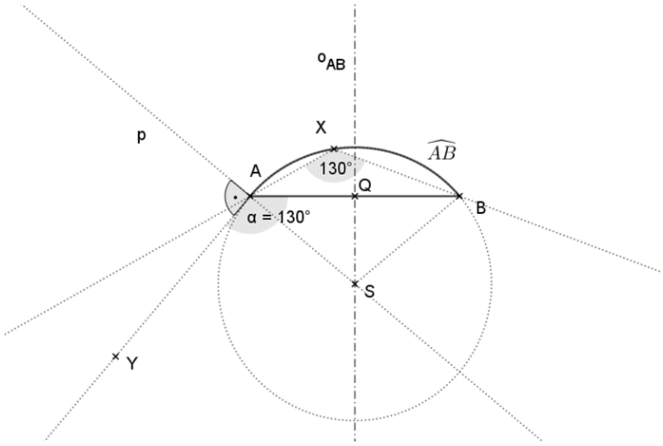
Úhel $\omega = \sphericalangle ASB$ je středový úhel, úhel $\varphi = \sphericalangle AXB$ je obvodový úhel příslušný stejné tětivě AB. Úhel ω má tedy dvakrát větší velikost, než úhel φ a úhel $\sphericalangle ASQ$ musí mít proto stejnou velikost jako zadaný úhel φ. Tzv. úsekový úhel $\sphericalangle SAY$ má stejnou velikost jako úhel $\frac{\omega}{2} = \varphi$. Tento fakt mohu zdůvodnit např. tak, že porovnám velikost vnějšího úhlu při vrcholu A trojúhelníku SAQ se součtem velikostí vnitřních úhlů při vrcholu S a Q:

$$\alpha + 90^o = \frac{\omega}{2} + 90^o \Rightarrow \alpha = \frac{\omega}{2} = \varphi.$$



Obrázek 1.2.4.1.-1. Řešení úlohy 1.2.4.1. – a)

b) Řešení tohoto úkolu provedu analogicky k řešení úlohy a). Řešení je uvedeno na následujícím obrázku.

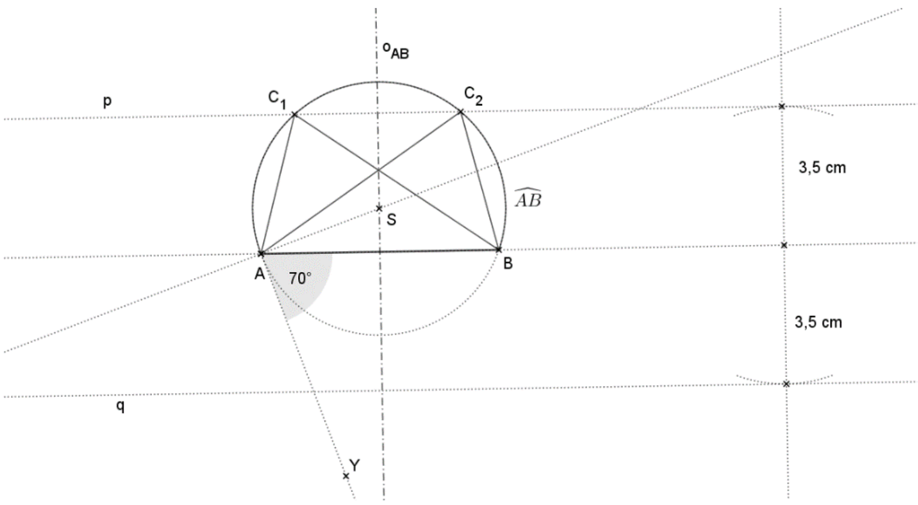


Obrázek 1.2.4.1.-2. Řešení úlohy 1.2.4.1. – b)

1.2.4.2. Je dána úsečka *AB* délky 6 cm. Sestrojte všechny trojúhelníky *ABC*, má-li výška na stranu c délku 3,5 cm a úhel γ při vrcholu *C* velikost 70^o. [2]

Řešení:

Narýsuji stranu *AB* délky 6 cm. Bod *C* má od přímky *AB* vzdálenost 3,5 cm, musí tedy náležet množině bodů, které mají od přímky *AB* zmíněnou vzdálenost (rovnoběžníkový pás p, q). Navíc je bod *C* vrcholem trojúhelníku *ABC* s velikostí úhlu 70^o při *C*, takže narýsuji kružnicový oblouk nad tětivou *AB* pomocí úsekového úhlu. Bod *C* najdu v průsečíku těchto dvou množin bodů. Úloha má v polorovině určené přímkou *AB* a středem oblouku *AB* dvě řešení.



Obrázek 1.2.4.2.-1. Řešení úlohy 1.2.4.2.

Další příklad na užití množiny bodů, ze kterých je daná úsečka viděna pod určitým úhlem, uvedu v kapitole 8.

2. Příklad 1.

2.1. Zadání příkladu

Je dána kružnice *k* a bod *M*. Chci najít množinu bodů, středů kružnic, které procházejí bodem *M* a dotýkají se kružnice *k*. [3]

2.2. Řešení

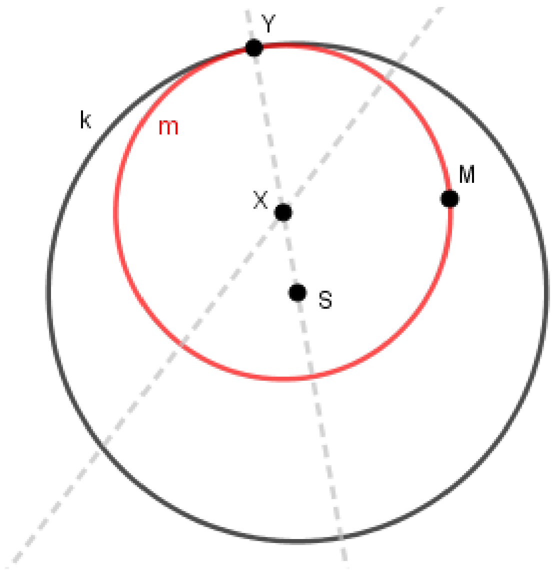
Úlohu si rozdělím na tři případy. První případ vznikne tehdy, leží-li bod *M* na kružnici *k*. Druhý případ nastane, když bod *M* leží uvnitř kružnice *k* a třetí případ, pokud bod *M* leží vně kružnice *k*.

2.2.1. Bod *M* náleží kružnici *k*

Pokud bod *M* leží na kružnici *k*, je zřejmé, že množina středů kružnic, které procházejí bodem *M* a dotýkají se kružnice *k*, je střed kružnice *k*, tedy jeden bod.

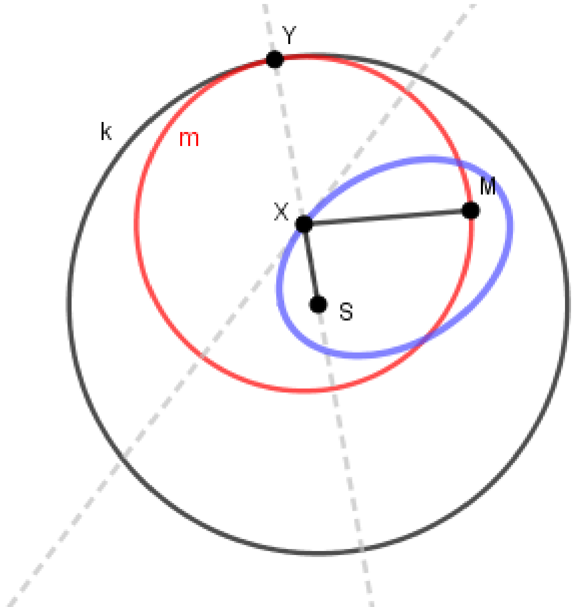
2.2.2. Bod *M* leží uvnitř kružnice *k*

Kružnici, která prochází bodem *M* a zároveň se dotýká kružnici *k*, získám sestrojením bodu *Y* libovolně na kružnici *k*. Dále vedu přímku středem kružnice *k* a bodem *Y*. Střed hledané kružnice se nachází v průsečíku přímky *SY* a osy úsečky *MY*, pojmenuji ho *X* a kružnici *m* (Obr. 2.2.2.-1.).



Obrázek 2.2.2.-1.Bod *M* leží uvnitř kružnice *k*

Pohybem bodu Y po kružnici k je možno pozorovat, že bod X se pohybuje po elipse (Obr. 2.2.2.-2.), což je množina bodů, kterou jsem chtěla najít. Body S a M jsou ohniska této elipsy.



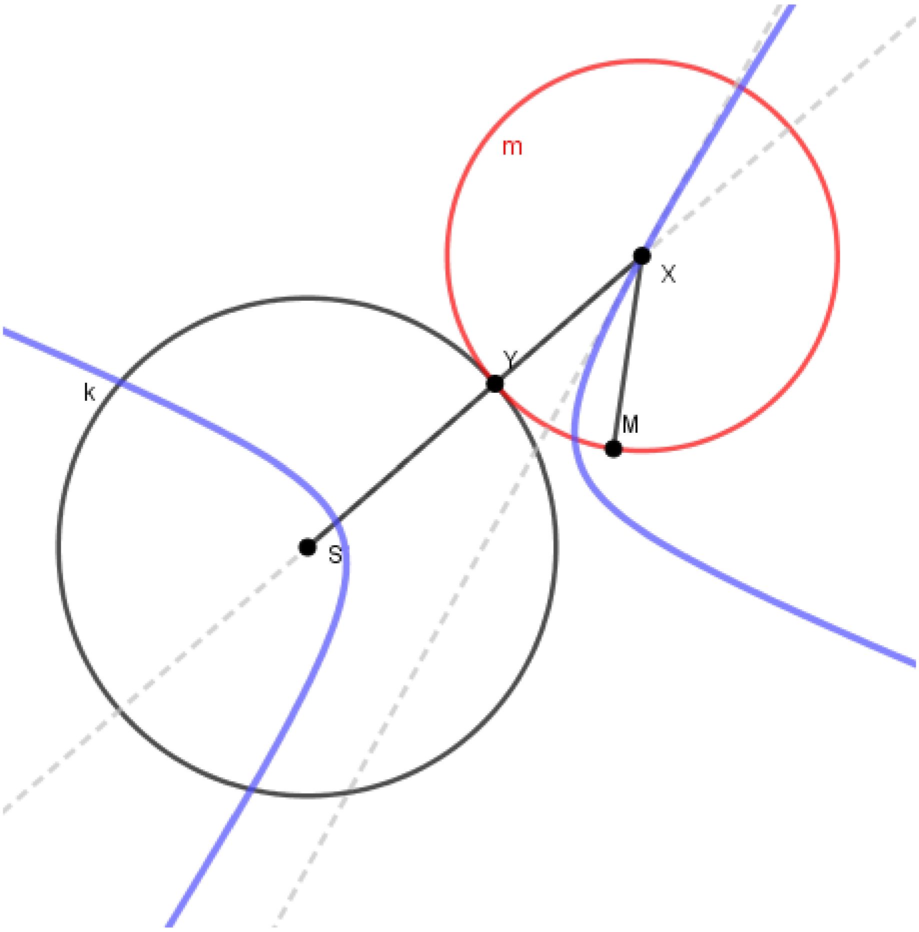
Obrázek 2.2.2.-2. Hledaná množina bodů - elipsa

2.2.2.1. Důkaz

Z definice elipsy je známo: „*Elipsa je množina bodů v rovině, jejichž součet vzdáleností od daných bodů je konstantní*." [4, s. 8]. Chci tedy dokázat, že $|SX| + |MX| = l$, kde l je konstantní. Vím, že vzdálenost $|SX| + |YX| = r$, kde r je poloměr kružnice k. Jak je z obrázku zřejmé $|MX| = |YX|$, protože bod M i bod Y leží na kružnici m se středem v bodě X. Mohu psát $|SX| + |MX| = r$ a tato vzdálenost je konstantní.

2.2.3. Bod M leží vně kružnice k

Kružnici procházející bodem M a dotýkající se kružnice k dostanu stejným postupem jako v předchozím případě. Pohybem bodu Y po kružnici k lze vidět, že bod X se pohybuje po hyperbole s ohnisky v bodech S a M (Obr. 2.2.3.-1.).



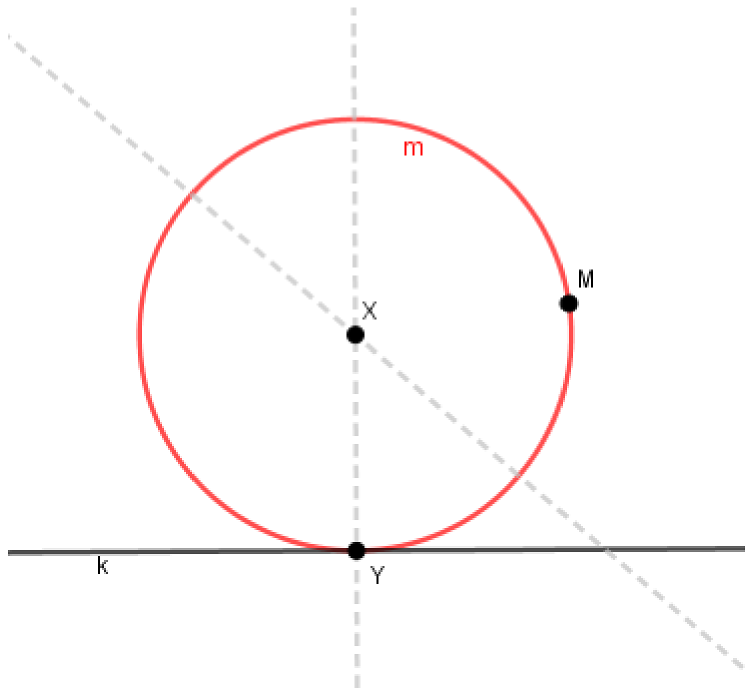
Obrázek 2.2.3.-1. – Hledaná množina bodů – hyperbola

2.2.3.1. Důkaz

Nyní dokáži, že se jedná o hyperbolu. Z definice hyperboly: „*Hyperbola je množina bodů v rovině, jejichž rozdíl vzdáleností od daných bodů je konstantní.*“ [4, s. 26]. To znamená, že $|SX| - |MX| = l$, kde l je konstantní. Jak je vidět, $|MX| = |YX|$, protože bod M i bod Y leží na kružnici m, která má střed v bodě X. A protože $|SY| = r$, kde r je poloměr kružnice k, a body X i Y leží na jedné přímce, platí $|SX| - |YX| = r$, což je konstanta, a to bylo dokázat.

2.2.4. Jak získat parabolu?

Parabolu získám tak, když objekt, na kterém leží bod Y, není kružnice, ale přímka. Narýsuji kružnici m, která se dotýká přímky k a prochází bodem M. Nejprve sestrojím bod dotyku Y.



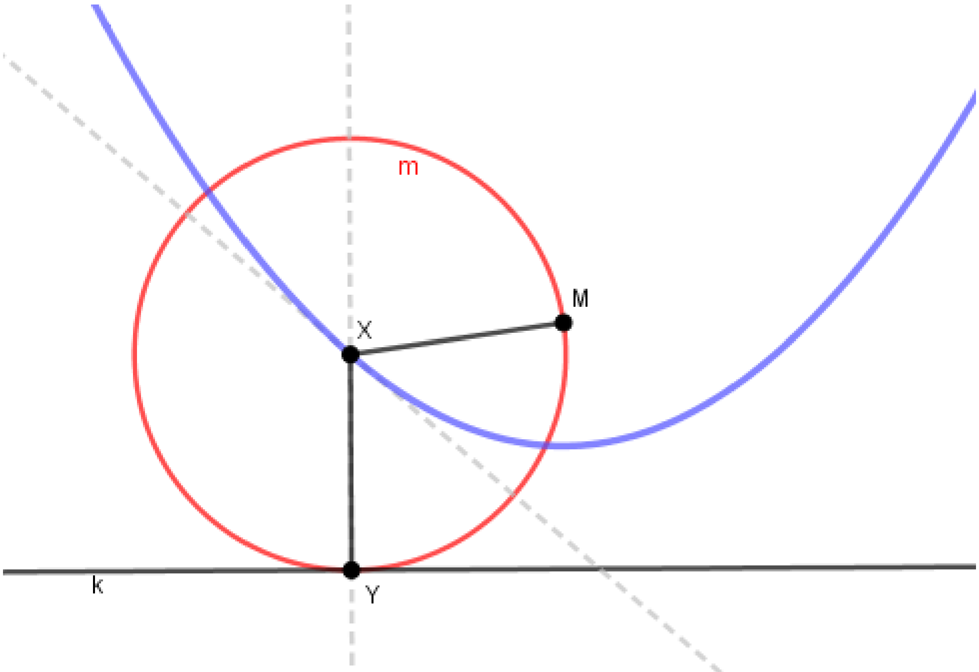
Obrázek 2.2.4.-1. přímka *k* místo kružnice

Střed kružnice *m* leží v průsečíku osy úsečky *MY* a kolmice k přímce *k*, která prochází bodem *Y*. Střed kružnice *m* pojmenuji *X*.

Nyní lze pozorovat, že při pohybu bodu *Y* po přímce *k*, se bod *X* pohybuje po parabole (Obr. 2.1.1.-1.).

2.2.4.1. Důkaz

Definice paraboly říká: „*Parabola je množina bodů v rovině, které mají od daného bodu a dané přímky stejnou vzdálenost*.“ [4, s. 45]. V tomto případě je zmiňovanou danou přímkou přímka *k* a daným bodem je *M*. Chci dokázat, že pro bod paraboly *X* platí $|MX| = |YX|$, což je na první pohled zřejmé, protože bod *X* je středem kružnice *m* a bod *Y* i bod *M* na kružnici *m* leží.



Obrázek 2.1.1.-1. Hledaná množina bodů – parabola

3. Příklad 2

3.1. Zadání

Krajní body úsečky s pevně danou délkou se pohybují po osách. Po jakých křivkách se pohybují vybrané vnitřní body této úsečky?

Sestrojím si úsečku *AB* tak, aby její krajní body ležely na osách *x*, *y*. Délka této úsečky se nemění. Pohybuji bodem *A* po ose *x*, bod *B* se pohybuje po ose *y*. Každý bod dané úsečky se pohybuje po nějaké křivce. V této kapitole se zabývám tvarem zmiňovaných křivek. [5]

3.2. Řešení

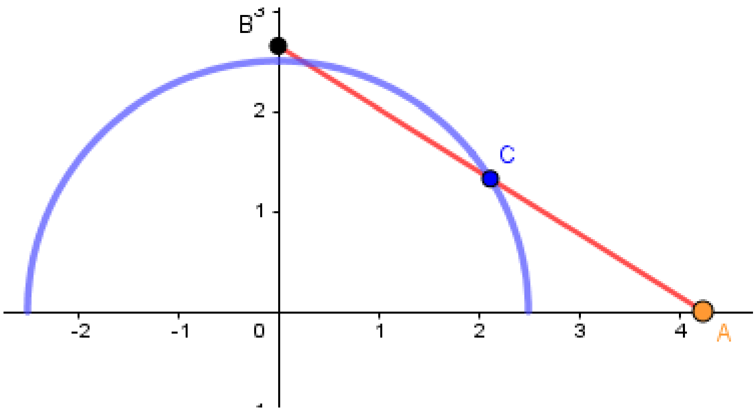
Bod na úsečce *AB*, jehož pohyb zkoumám, jsem si pojmenovala *C* a pomocí programu GeoGebra jsem zjistila, že platí:

- Pokud $|BC| = |AC|$, pak se jedná o kružnici.
- Pokud $|BC| < |AC|$, pak se jedná o elipsu s hlavní osou rovnoběžnou s osou *y*.
- Pokud $|BC| > |AC|$, pak se jedná o elipsu s hlavní osou rovnoběžnou s osou *x*.

3.2.1. Střed úsečky *AB*

(situace $|BC| = |AC|$)

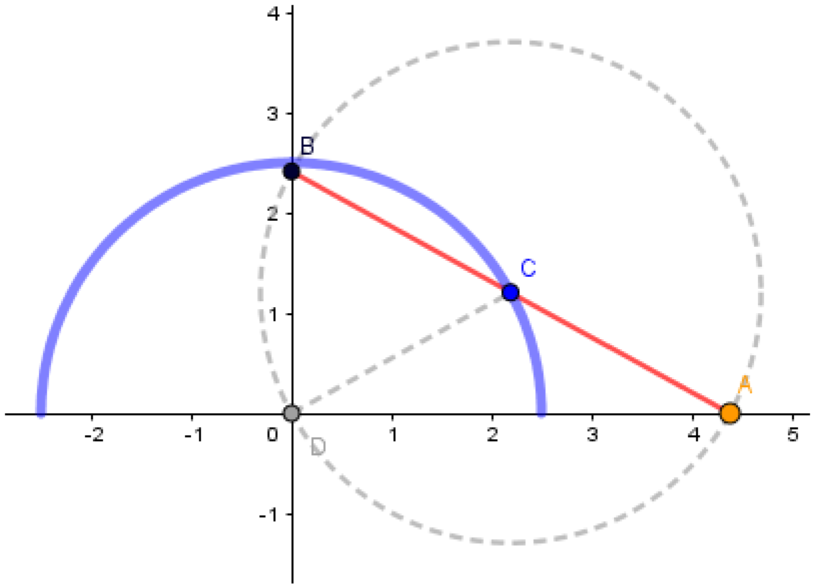
Situace na obrázku je znázorněna jen pro první a druhý kvadrant. Z obrázku je zřejmé, že střed úsečky *AB* se pohybuje po kružnici (Obr. 3.2.1.-1).



Obrázek 3.2.1.-1. Střed úsečky *AB*

3.2.1.1. Důkaz

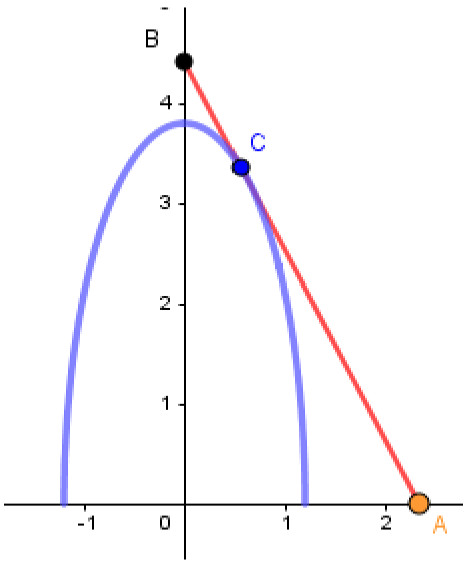
Z věty o Thaletově kružnici je známo, že pravoúhlému trojúhelníku lze opsat kružnici, která má střed v bodě, který je středem přepony tohoto trojúhelníku. V tomto případě lze opsat kružnici trojúhelníku *ABD* (Obr. 3.2.1.1.-1), kde bod *D* leží v průsečíku os souřadnic. Středem této kružnice je bod *C*, který je střed úsečky *AB*. Z toho plyne, že pro poloměr r této Thaletovy kružnice, platí $r = |BC| = |CD|$, tedy tato vzdálenost je neměnná a množina bodů, po které se střed úsečky pohybuje, je kružnice.



Obrázek 3.2.1.1.-1. Thaletova kružnice nad úsečkou *AB*

3.2.2. Bod *C* úsečky *AB*, pro který platí $|BC| < |AC|$

Pokud bod *C* není krajním bodem úsečky ani jejím středem, pak se při pohybu úsečky *AB* po osách, bude pohybovat po elipse. Pokud navíc platí, že $|BC| < |AC|$, jedná se o elipsu s hlavní osou rovnoběžnou s osou y ($o_H \parallel o_y$). Situace je znázorněna na obrázku 3.2.2.-1.



Obrázek 3.2.2.-1. Bod *C* se pohybuje po elipse, $o_H \parallel o_y$

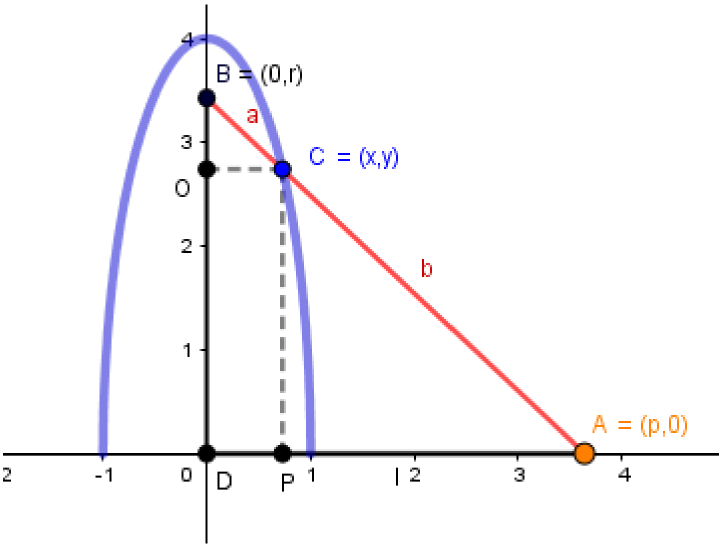
3.2.2.1. Důkaz

Určím si souřadnice bodů. $A[p,0]$, $B[0,r]$, $C[x,y]$. (Obr. 3.2.2.1.-1.) Z podobnosti trojúhelníků *ADB*, *COB* a *APC* plyne

$$\frac{p}{x} = \frac{a+b}{a}\,, \qquad \frac{r}{y} = \frac{a+b}{b}$$

A odtud

$$p = \frac{a+b}{a}x\,, \qquad r = \frac{a+b}{b}y$$



Obrázek 3.2.2.1.-1. Souřadnice bodů

Podle Pythagorovy věty platí

$$r^2 + p^2 = (a+b)^2$$

Nyní dosadím za *p* a *r* do rovnice plynoucí z Pythagorovy věty

$$\left(\frac{a+b}{b}y\right)^2 + \left(\frac{a+b}{a}x\right)^2 = (a+b)^2$$

$$\left(\frac{a+b}{b}y\right)^2 \cdot \frac{1}{(a+b)^2} + \left(\frac{a+b}{a}x\right)^2 \cdot \frac{1}{(a+b)^2} = 1$$

$$\left(\frac{(a+b)^2}{b^2}y^2\right) \cdot \frac{1}{(a+b)^2} + \left(\frac{(a+b)^2}{a^2}x^2\right) \cdot \frac{1}{(a+b)^2} = 1$$

$$\left(\frac{y^2}{b^2}\right) + \left(\frac{x^2}{a^2}\right) = 1$$

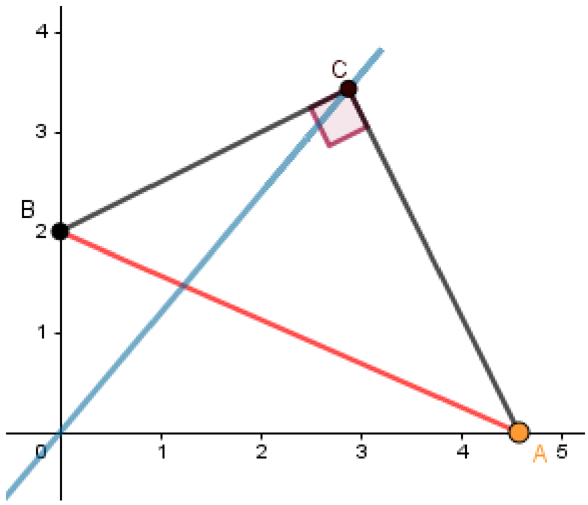
Získám rovnici elipsy. Z toho vyplývá, že bod *C* se pohybuje po elipse. [4. s. 13]

3.2.3. Bod C úsečky AB, pro který platí $|BC| > |AC|$

V tomto případě se jedná o elipsu s hlavní osou rovnoběžnou s osou *x* ($o_H \parallel o_x$). Důkaz se provádí stejně jako v předchozím případě.

3.2.4. Vrchol při pravém úhlu trojúhelníku *ABC*

Nad úsečkou *AB* si sestrojím bod *C*, tak aby trojúhelník *ABC* byl pravoúhlý a pravý úhel se nacházel při vrcholu *C*. Délky všech úseček, které tento trojúhelník tvoří, se při pohybu bodu *A* po ose *x* nemění. Úhly při vrcholech *A* a *B* jsou pevně dané. Při pohybu bodem *A* zjišťuji, že bod *C* se pohybuje po úsečce.

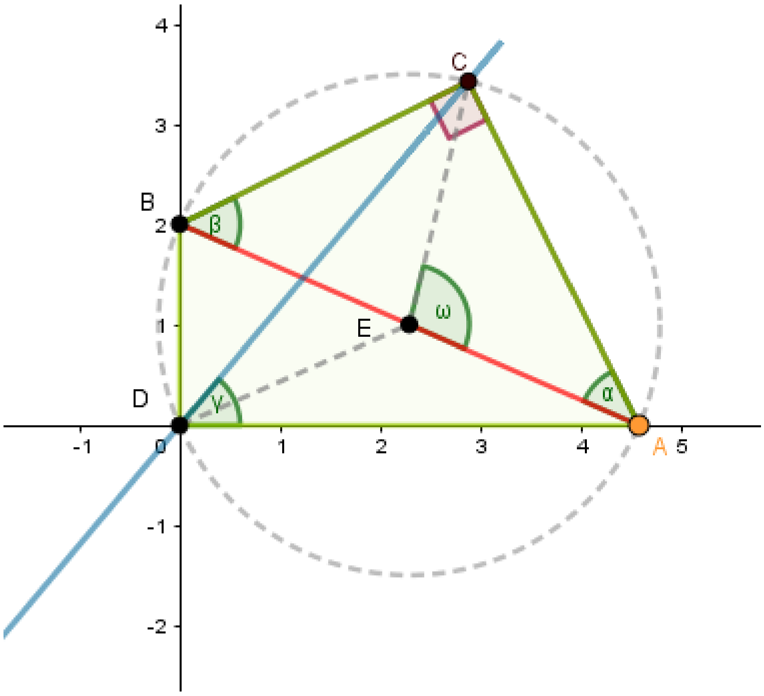


Obrázek 3.2.4.-1. Bod *C* se pohybuje po úsečce

3.2.4.1. Důkaz

Sestrojím si Thaletovu kružnici nad úsečkou *AB*. Bod *C* na ji náleží, jelikož úhel ∡*ACB* je pravý. Dále vím, že bod *D* na kružnici leží také, protože úhel ∡*ADB* je také pravý. Z toho plyne, že čtyřúhelník *ACBD* je tětivový. Dokáži, že pro libovolnou polohu bodu *A* je γ, úhel $\measuredangle ADC$, konstantní, tedy že přímka *CD* svírá s osou *x* stále stejný směr.

Střed úsečky *AB* pojmenuji *E*. Úhel $\measuredangle AEC$ označím ω. Z věty o středových a obvodových úhlech je známo, že velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného témuž oblouku. Jelikož ω je středový úhel oblouku, jemuž je úhel β obvodovým, je velikost úhlu ω rovna dvojnásobku velikosti úhlu β. Úhel ω je taktéž středovým úhlem pro stejný oblouk, jemuž je úhel γ obvodovým úhlem, jak je zřejmé z obrázku 3.2.4.1.-1. Z toho plyne, že velikost úhlu γ je rovna polovině velikosti úhlu ω, tedy $\gamma = \beta$. A protože úhel β byl zadán s konstantní velikostí, je zřejmé, že přímka *CD* svírá s osou *x* stále stejný směr, což bylo dokázat.

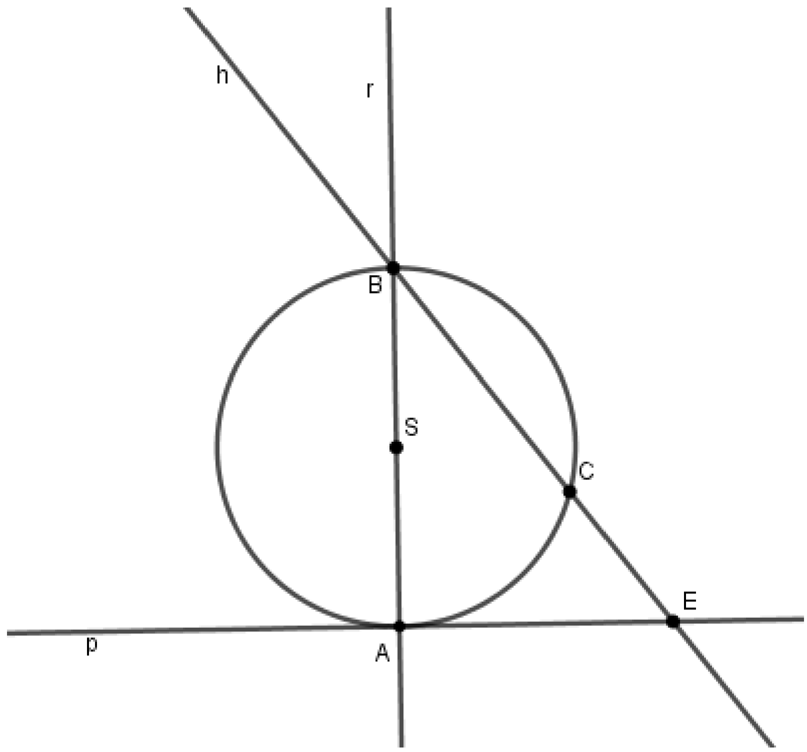


Obrázek 3.2.4.1.-1. Středové a obvodové úhly v tětivovém čtyřúhelníku

4. Příklad 3

4.1. Zadání

Jsou zadány dvě na sebe kolmé přímky $r \perp p$. V průsečíku těchto přímek leží bod *A*, kterým prochází kružnice *k*. Ta má střed *S* na přímce *r*. V druhém průsečíku kružnice *k* a přímky *r* leží bod *B*. Tímto bodem je vedena přímka *h*, která protíná kružnici *k* ve dvou bodech, ve zmiňovaném bodu *B* a v bodu *C*. Úkolem je určit množinu bodů, po které se pohybuje bod *C*, při pohybu středu kružnice *k* po přímce *r*. (Obr. 4.1.-1.) [6]



Obrázek 4.1.-1. Zadání příkladu 3

4.2. Řešení

4.2.1. Planimetrické řešení

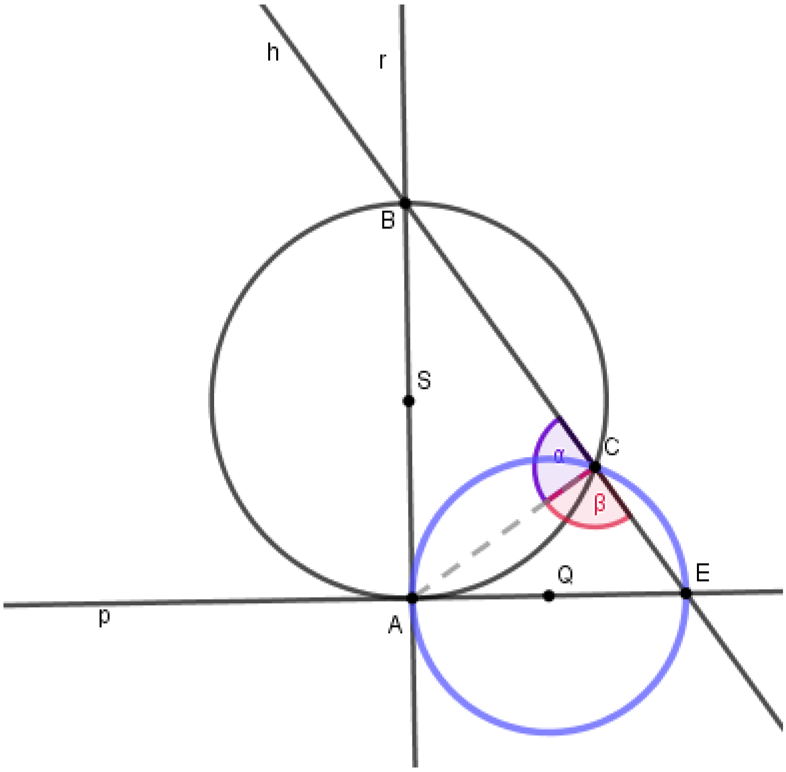
Je zřejmé, že bod *C* leží na Thaletově kružnici, kterou je kružnice *k*. Tedy $\measuredangle ACB$ je pravý (úhel $\measuredangle ACB$ pojmenuji α a úhel $\measuredangle ECA$ pojmenuji β). Zároveň vím, že bod *C* leží na přímce h, takže:

$$18O^0 - \alpha = \beta$$

$$\beta = 180^0 - 90°$$

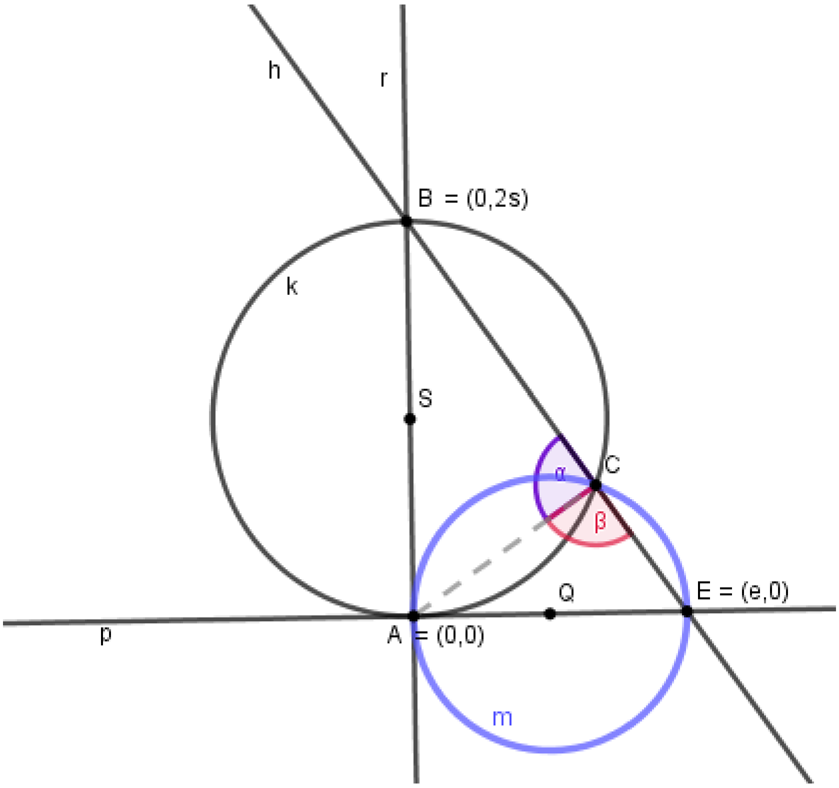
$$\beta = 90^0$$

To znamená, že bod C musí být prvkem Thaletovy kružnice nad úsečkou *AE*. Hledanou množinou bodů je kružnice, jejíž střed je střed úsečky *AE* (bod *Q*) s poloměrem $|AQ|$, bez krajních bodů *A* a *E*, protože ty nemohou tvořit vrchol trojúhelníku.



Obrázek 4.2.-1. Řešení příkladu 3

4.2.2. Analytické řešení



Obrázek 4.2.2.-1. Souřadnice bodů

Nejprve zvolím vhodné souřadnice

- $A[0; 0]$
- $B[0; 2s]$
- $E[e; 0]$, $e \neq 0$

Napíši rovnici kružnice *k*:

Předpis $$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

$$x^2 + (y-s)^2 = s^2$$

$$x^2 + y^2 - 2sy + s^2 = s^2$$

Rovnice (4.2.2.-1.) $$2sy = x^2 + y^2$$

Dále vyjádřím rovnici přímky *h* v obecném tvaru:

Předpis $$ax + by + c = 0$$

$$\overrightarrow{s_h} = B - E$$

$$\overrightarrow{s_h} = [0; 2s] - [e; 0]$$

$$\overrightarrow{s_h} = (-e; 2s)$$

$$\overrightarrow{n_h} = (2s; e)$$

$$2sx + ey + c = 0$$

Dosazením bodu *B* do této rovnice dostanu.

$$c = -2se$$

Rovnice (4.2.2.-2.) $$2sx + ey - 2se = 0$$

Vyjádřím *y*:

$$y = \frac{2se - 2sx}{e}$$

$$y = 2s\left(1 - \frac{x}{e}\right)$$

Určím $k \cap h$:

Musím vydělit rovnici (4.2.2-1.) rovnicí (4.2.2.-2.), abych se zbavila parametru *s*

$$\frac{2ys}{2s\left(1 - \frac{x}{e}\right)} = \frac{x^2 + y^2}{y}$$

$$\frac{y}{1 - \frac{x}{e}} = \frac{x^2 + y^2}{y}$$

$$y^2 = (x^2 + y^2) \cdot \left(1 - \frac{x}{e}\right)$$

Rovnice (4.2.2.-3.) $$y^2 = x^2 + y^2 - \tfrac{x}{e}(x^2 + y^2)$$

$x = 0 \Rightarrow$ dostanu bod *B*

$x \neq 0 \Rightarrow$ Rovnici (4.2.2.-3.) vydělím *x*

$$ex = x^2 + y^2$$

Doplním na čtverec:

$$x^2 - ex + \left(\frac{e}{2}\right)^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2 + y^2 = 0$$

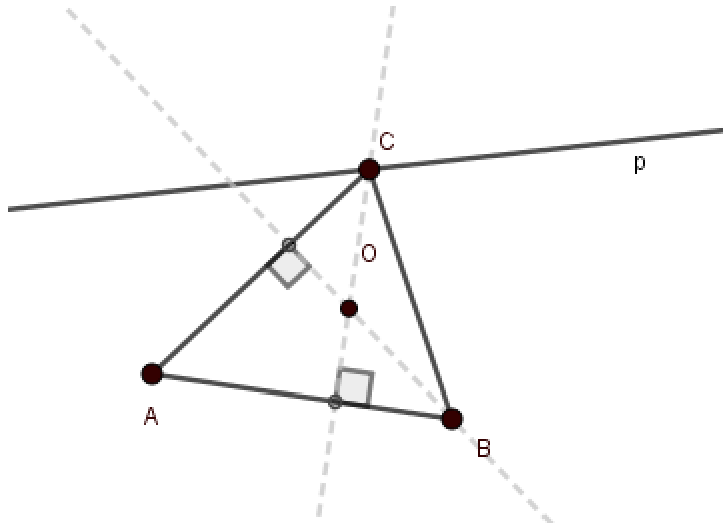
$$\left(x - \frac{e}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2$$

Výsledná rovnice je rovnicí kružnice se středem v bodě $\left[\frac{e}{2}; 0\right]$ a poloměru $\frac{e}{2}$, což bylo dokázat.

5. Příklad 4

5.1. Zadání

Je dána úsečka *AB* a přímka *p*, na níž neleží úsečka *AB*. Na přímce *p* se nachází bod *C*. Po jaké křivce se pohybuje ortocentrum *O* trojúhelníku *ABC*, při pohybu bodem *C* po přímce *p*? (Obr 5.1.-1.) [6]



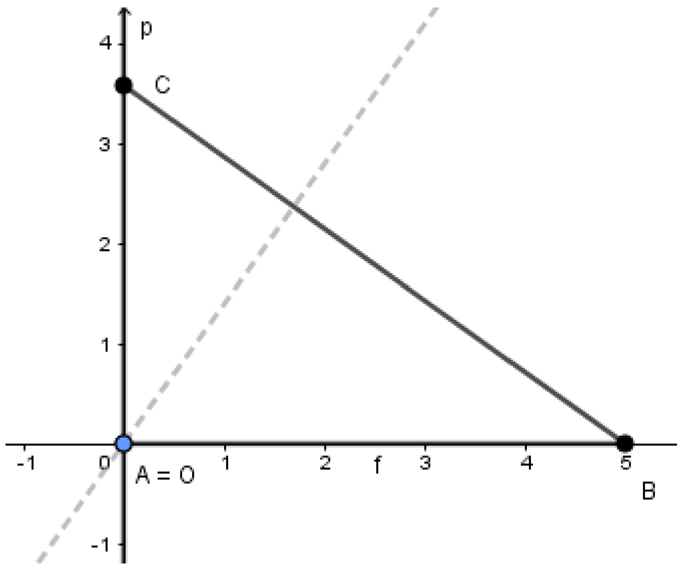
Obrázek 5.1.-1. Zadání příkladu 4

5.2. Řešení

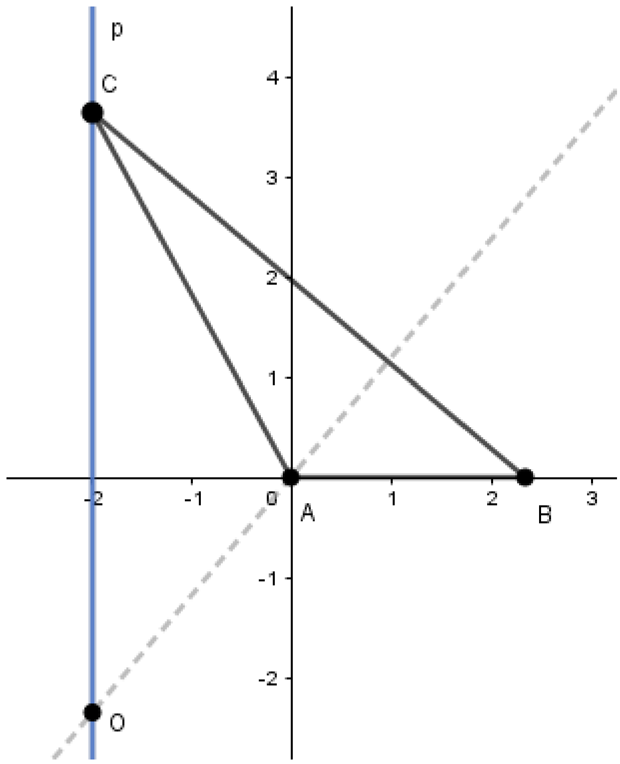
Důkaz jsem se rozhodla provést analyticky, protože mě nenapadlo vhodné planimetrické řešení. Bod *A* jsem umístila do počátku soustavy souřadné a bod *B* na osu *x*. Přímku *p* jsem vyjádřila ve směrnicovém tvaru, takže předpokládám, že není rovnoběžná s osou *y*. Pokud by byla, mohou nastat dvě situace:

- Pokud přímka *p* prochází bodem *A* nebo bodem *B*, jsou hledanými množinami bodů právě tyto body, vrcholy pravoúhlých trojúhelníků. Na obrázku 5.2.-1. je znázorněna situace, kdy přímka *p* prochází bodem *A*.
- Pokud přímka *p* neprochází body *A* a *B*, bude hledanou množinou bodů přímka *p*, jak je vidět na obrázku 5.2.-2.

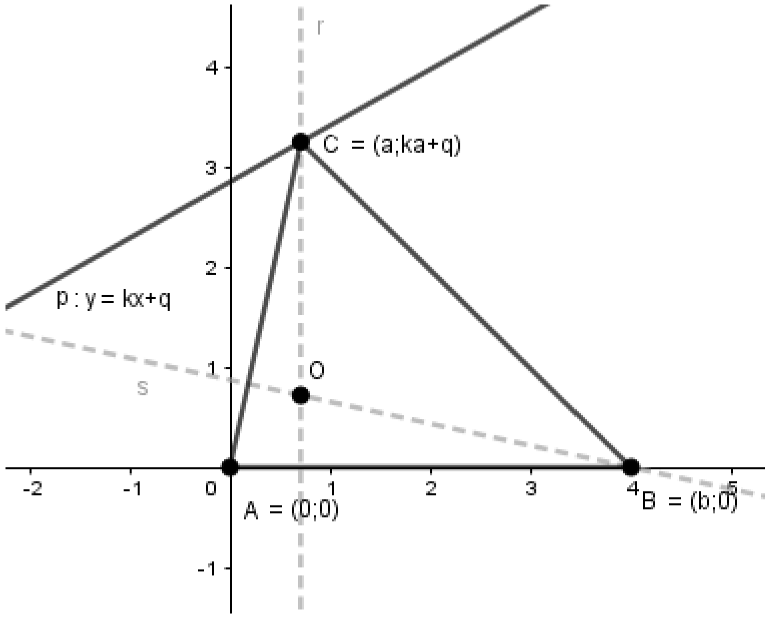
Výšky trojúhelníku vyjádřím obecnou rovnicí. Budu pracovat s výškou trojúhelníku procházející bodem *C*, tu pojmenuji *r* a s výškou procházející bodem *B*, tu pojmenuji *s*. (Obr. 5.2.-3.)



Obrázek 5.2.-1. Přímka *p,* kolmá na osu *x*, prochází bodem *A*



Obrázek 5.2.-2. Přímka *p,* kolmá na osu *x*, neprochází body *A* a *B*



Obrázek 5.2.-3. Volba souřadnic

- $A[0; 0]$
- $B[b; 0]$
- $p: y = kx + q$
- *C*: Potřebuji pohybovat bodem *C* po přímce *p*, proto jsem si označila

souřadnici *x* bodu *C* jako proměnnou a. Změnou proměnné a, bude bod *C* měnit polohu na přímce p. $C[a; ka + q]$

- *r*: Přímka *r* je výškou ke straně *c*, tedy je kolmá na osu *x*, proto $r: x = a$
- s: Přímka *s* je výškou ke straně *b*. K tomu abych určila normálový vektor

přímky *s*, potřebuji směrový vektor přímky *b*

$$\overrightarrow{s_b} = \overrightarrow{n_s}$$

$$\overrightarrow{s_b} = C - A$$

$$\overrightarrow{s_b} = [a; ka + q] - [0; 0]$$

$$\overrightarrow{s_b} = (a; ka + q) = \overrightarrow{n_s}$$

$$s: ax + (ka + q)y + c = 0$$

Protože *s* prochází bodem *B*, mohu psát:

$$a \cdot b + (ka + q) \cdot 0 + c = 0$$

$$c = -ab$$

Rovnice přímky *s* je:

$$s: ax + (ka + q)y - ab = 0$$

- O: Bod O je ortocentrem trojúhelníku ABC a jeho souřadnice jsou určené průsečíkem přímky r a s.

$$\begin{cases} s: ax + (ka + q)y - ab = 0 \\ r: x = a \end{cases}$$

- $r \cap s$

$$a^2 + (ka + q)y - ab = 0$$

$$(ka + q)y = ab - a^2$$

$$y = \frac{a \cdot (b - a)}{ka + q}$$

$$x = a$$

Bod O má souřadnice:

$$O\left[a; \frac{a \cdot (b - a)}{ka + q}\right]$$

Nyní provedu záměnu proměnné $a \leftrightarrow x$

$$y = \frac{x \cdot (b - x)}{kx + q}$$

$$kyx + yq = bx - x^2$$

(5.2.-1.) $$x^2 - bx + kyx + yq = 0$$

Každou kuželosečku lze vyjádřit touto rovnicí:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

a poté lze zjistit, pomocí determinantu kuželosečky a pomocí determinantu kvadratických členů (malý determinant), o jakou kuželosečku se jedná. Rovnice (5.2.-1.) je takovou rovnicí. Přepíši ji do determinantu a následně determinant vypočítám.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{k}{2} & -\frac{b}{2} \\ \frac{k}{2} & 0 & \frac{q}{2} \\ -\frac{b}{2} & \frac{q}{2} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{k}{2}\cdot\frac{q}{2}\cdot\left(-\frac{b}{2}\right)\right) + \left(\frac{k}{2}\cdot\frac{q}{2}\cdot\left(-\frac{b}{2}\right)\right) - \left(\frac{q}{2}\cdot\frac{q}{2}\right) =$$

$$= \left(-\frac{kqb}{8}\right) + \left(-\frac{kqb}{8}\right) - \left(\frac{q^2}{4}\right) = \left(-\frac{2kqb}{8}\right) - \left(\frac{q^2}{4}\right) =$$

$$= \left(-\frac{kqb + q^2}{4}\right) = \left(-\frac{q\cdot(kb+q)}{4}\right)$$

- $\Delta = 0 \iff q = 0 \vee q = -kb$

Pokud je velký determinant kuželosečky roven nule, jedná se o singulární kuželosečku.

- $\Delta \neq 0 \iff q \neq 0 \wedge q \neq -kb$

Pokud je velký determinant kuželosečky různý od nuly, jedná se o regulární kuželosečku

Nyní vypočítám malý determinant kuželosečky:

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{k^2}{4}$$

- $\delta = 0 \Leftrightarrow k = 0$

1. **Situace 1** - Když $\Delta = 0$ i $\delta = 0$, pak se jedná o singulární nestředovou kuželosečku.

2. **Situace 2** - Když $\Delta \neq 0$ a $\delta = 0$, pak se jedná o regulární nestředovou kuželosečku. Jediná kuželosečka, který je regulární a nestředová je parabola.

- $\delta < 0 \Leftrightarrow k \neq 0$

3. **Situace 3** - Když $\Delta = 0$ a $\delta < 0$, jedná se o singulární středovou kuželosečku – dvě různoběžky

4. **Situace 4** - Když $\Delta \neq 0$ a $\delta < 0$, jedná se o hyperbolu

5.2.1. Situace 1

Situace 1 nastane, když $\Delta = 0$ i $\delta = 0$

$$\Delta = 0 \;\Leftrightarrow q = 0 \lor q = -kb \text{ a } \delta = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

Je zřejmé, že tuto situaci není možno řešit, protože q i k má být nula a pro q i k rovno nule, je přímka *p* totožná s osou *x*, to znamená, že trojúhelník *ABC* vůbec nevznikne.

5.2.2. Situace 2

Situace nastane, když $\Delta \neq 0$ a $\delta = 0$

$$\Delta \neq 0 \;\Leftrightarrow q \neq 0 \land q \neq -kb \text{ a } \delta = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

Dosadím do rovnice (5.2.-1.):

$$x^2 - bx + y \cdot 0 \cdot x + yq = 0$$

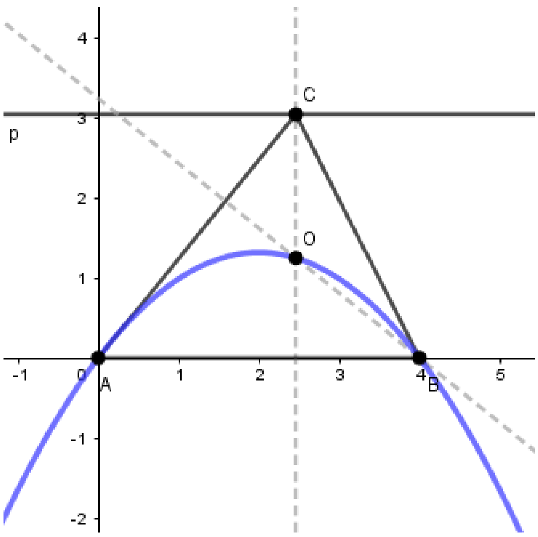
$$x^2 - bx + yq = 0$$

$$yq = bx - x^2$$

$$y = \frac{bx - x^2}{q}$$

$$y = \left(-\frac{1}{q} \cdot x^2\right) + \frac{b}{q} \cdot x$$

Pro $k = 0$ je přímka *p* rovnoběžná s osou *x*, a protože úsečka *AB* (základna trojúhelníku *ABC*) leží na ose *x*, je přímka *p* rovnoběžná se základnou trojúhelníku *ABC* a množinou bodů, po které se pohybuje ortocentrum trojúhelníku, je konkávní parabola procházející body *A* a *B*.



Obrázek 5.2.2.-1.Pro $p \parallel AB$ je hledanou množinou bodů parabola

5.2.3. Situace 3

Situace 3 nastane, když je $\Delta = 0$ a $\delta < 0$

$$\Delta = 0 \ \Leftrightarrow q = 0 \vee q = -kb \text{ a } \delta < 0 \Leftrightarrow k \neq 0$$

Dosadím do rovnice (5.2.-1.) nejprve $q = 0$

$$x^2 - bx + kyx + y \cdot 0 = 0$$

Jedná se o singulární středovou kuželosečku hyperbolického typu, to znamená, že kuželosečka se skládá ze dvou různoběžek, které se protnou v jednom bodě.

Vypočítám souřadnice tohoto bodu *S:*

$$\begin{cases} x + \frac{k}{2}y - \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{k}{2}x = 0 \end{cases}$$

$$x = 0$$

$$y = \frac{b}{k}$$

Souřadnice bodu *S* jsou:

$$S\left[0; \frac{b}{k}\right]$$

Substituce:

$$x = x'$$

$$y = y' + \frac{b}{k}$$

Nyní uvedu rovnici kuželosečky v čárkované soustavě souřadné:

$$a_{11}{x'}^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}{y'}^2 = 0$$

$$x'^2 + kx'y' = 0 /: {y'}^2 ; y' \neq 0$$

$$\left(\frac{x'}{y'}\right)^2 + \frac{kx'}{y'} = 0$$

$$\frac{x'}{y'} \cdot \left(\frac{x'}{y'} + k\right) = 0$$

$$\left(\frac{x'}{y'}\right)_1 = 0 \Rightarrow x' = 0$$

$$\left(\frac{x'}{y'}\right)_2 = -k \Rightarrow y' = -\frac{1}{k} \cdot x'$$

Provedu zpětnou substituci:

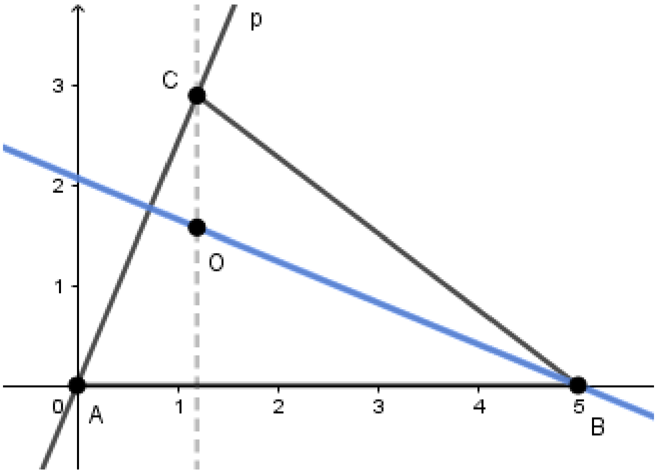
$$x' = x \ \Rightarrow x = 0$$

$$y = y' + \frac{b}{k} \Rightarrow y = \frac{b}{k} - \frac{1}{k}x$$

Pro *x* rovno nule, nedává řešení geometrický smysl, výsledkem je tedy přímka:

$$y = \frac{b}{k} - \frac{1}{k}x$$

Přímka je znázorněna na obrázku 5.2.3.-1.



Obrázek 5.2.3.-1. Řešení situace 3, pro $q = 0$

Nyní dosadím do rovnice (5.2.-1.) za $q = -kb$

$$x^2 - bx + kyx + y \cdot (-kb) = 0$$

Jako v předchozím případě se jedná o singulární středovou kuželosečku hyperbolického typu, to znamená, že kuželosečka se skládá ze dvou různoběžek, které se protnou v jednom bodě.

Vypočítám souřadnice tohoto bodu *S*:

$$\begin{cases} x + \frac{k}{2}y - \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{k}{2}x - \frac{kb}{2} = 0 \end{cases}$$

$$x = b$$

$$y = -\frac{b}{k}$$

Souřadnice středu *S* jsou:

$$S\left[b; -\frac{b}{k}\right]$$

Substituce:

$$x = x' + b$$

$$y = y' - \frac{b}{k}$$

Nyní uvedu rovnici kuželosečky v čárkované soustavě souřadné:

$$x'^2 + kx'y' = 0/: y'^2;\ y' \neq 0$$

$$\left(\frac{x'}{y'}\right)^2 + \frac{kx'}{y'} = 0$$

$$\frac{x'}{y'} \cdot \left(\frac{x'}{y'} + k\right) = 0$$

$$\left(\frac{x'}{y'}\right)_1 = 0 \ \Rightarrow x' = 0$$

$$\left(\frac{x'}{y'}\right)_2 = -k \Rightarrow y' = -\frac{1}{k} \cdot x'$$

Provedu zpětnou substituci:

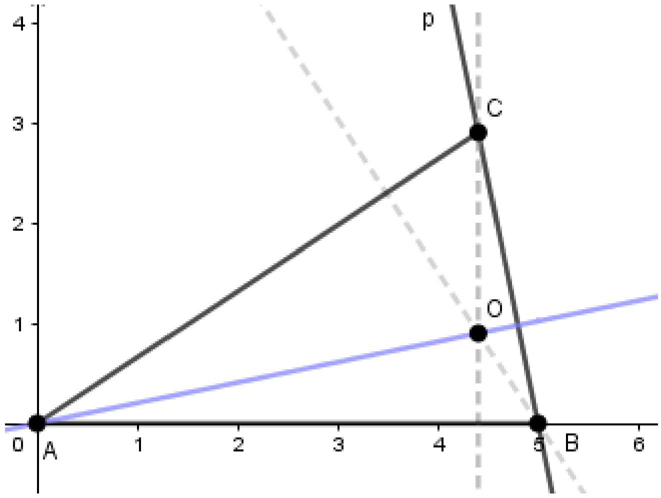
$$x' = x - b \ \Rightarrow x = b$$

$$y = y' - \frac{b}{k} \Rightarrow y = -\frac{x-b}{k} - \frac{b}{k} = -\frac{1}{k} \cdot x$$

Pro přímku $x = b$, nedává řešení geometrický smysl, řešením je tedy přímka:

$$y = -\frac{1}{k} \cdot x$$

Situace je znázorněna na obrázku 5.2.3.-2.



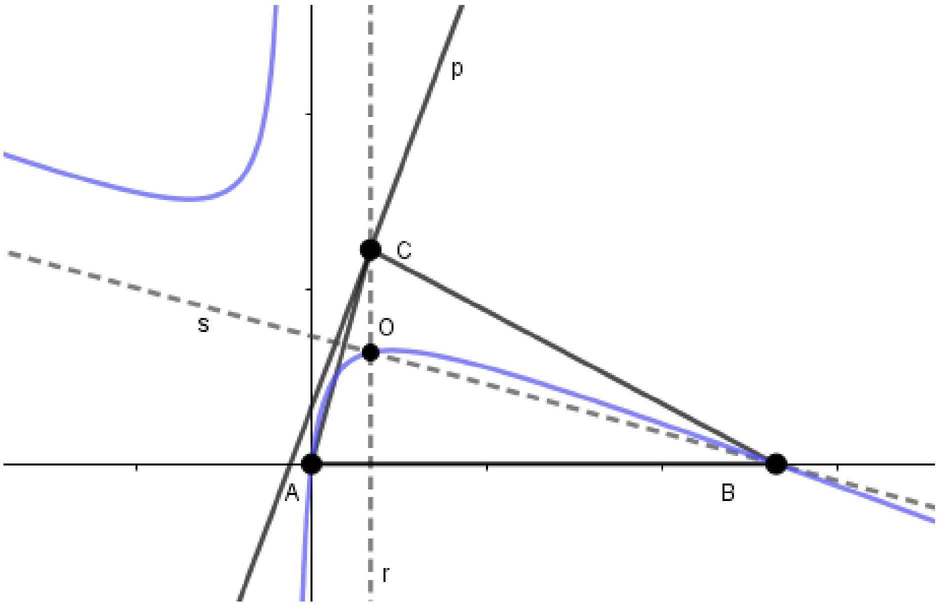
Obrázek 5.2.3.-2. Řešení situace 3, pro $q = -kb$

5.2.4. Situace 4

Situace 4 nastane, když je $\Delta \neq 0$ a $\delta < 0$

$$\Delta \neq 0 \;\Leftrightarrow q \neq 0 \wedge q \neq -kb \text{ a } \delta < 0 \Leftrightarrow k \neq 0$$

Pro tuto situaci je výslednou křivkou hyperbola



Obrázek 5.2.4.-1. Situace 4 - hyperbola

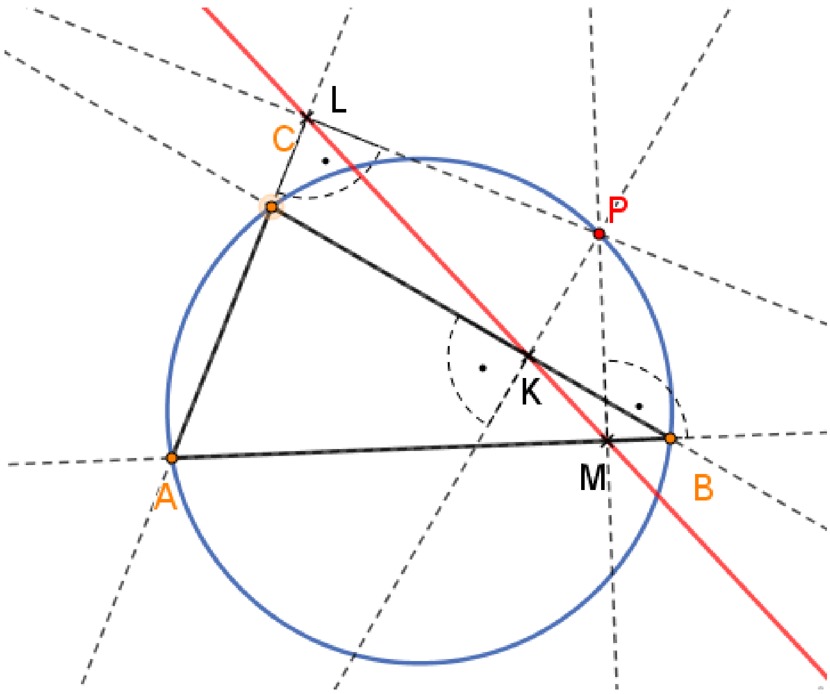
6. Simsonova – Wallaceova věta

Tento příklad je zaměřen na jedinečnou vlastnost kružnice opsané danému trojúhelníku. Pro každý bod *P*, který leží na této kružnici platí, že paty kolmic z *P* k prodlouženým stranám trojúhelníku leží na jedné přímce, tedy jsou kolineární. Přímce se říká Simsonova přímka, nebo též Wallaceova přímka. Skotský matematik Robert Simson se tímto problémem zabýval jako první, ale do dnešní podoby větu zformuloval a dokázal William Wallace, a to až 30 let po Simsonově smrti. Z tohoto důvodu se větě říká Simsonova – Wallaceova. [7, s.1]

6.1. Znění Simsonovy – Wallaceovy věty:

Věta Simsonova – Wallaceova

Paty kolmic *K, L, M* z bodu *P* k přímkám *AB, BC, CA* leží na jedné přímce (jsou kolineární), právě když bod *P* leží na kružnici opsané trojúhelníku *ABC*. [7, s.2]



Obrázek 6.1.-1. Simsonova – Wallaceova věta

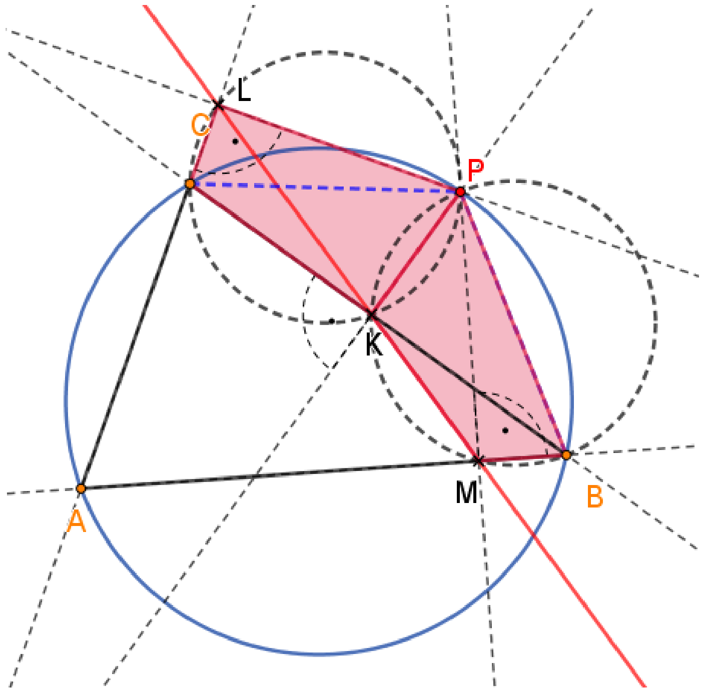
6.2. Důkaz

Věta má tvar ekvivalence, tudíž je nutno důkaz provést pro obě dvě strany.

6.2.1. První část důkazu

V první části důkazu předpokládám, že body *K, L, M* leží na jedné přímce. Pokud některé dva z bodů *K, L, M* splývají, pak je bod *P* jedním z vrcholů trojúhelníku, tudíž leží i na kružnici opsané trojúhelníku a tvrzení platí. Nyní předpokládám, že žádné dva z bodů *K, L, M* nesplývají. [7, s.2]

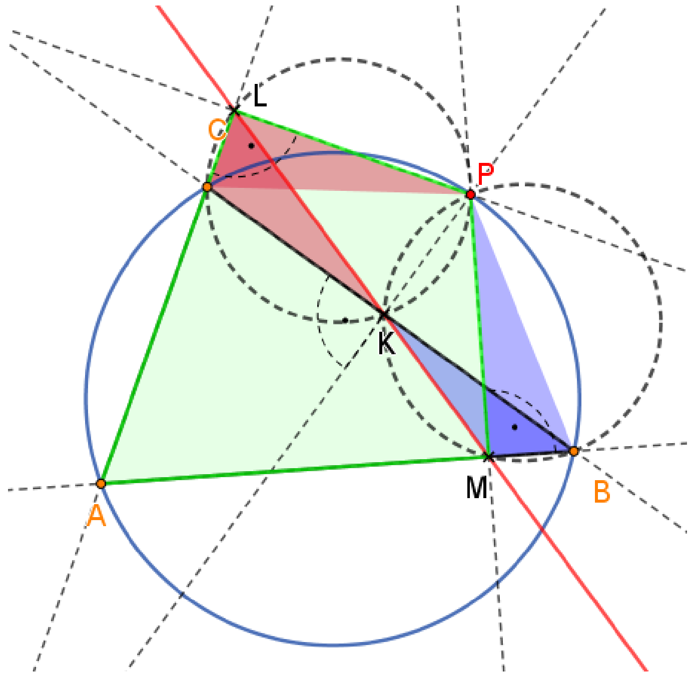
Budu se snažit dokázat, že čtyřúhelník *ABPC* je tětivový, tedy, že mu lze opsat kružnici. Nejprve sestrojíme Thaletovu kružnici nad úsečkou *PC*.



Obrázek 6.2.1.-1. - *PKCL* a *PBMK* jsou tětivové

Tato kružnice prochází body *K, L*. Stejně tak sestrojím Thaletovu kružnici i nad úsečkou *PB*. Tato kružnice prochází body *K, M*. To znamená, že čtyřúhelníky *PKCL* a *PBMK* jsou tětivové (Obr.6.2.1.-1.). Nyní označím úhel při vrcholu *A* jako úhel *α*. Úhel při vrcholu *P* u čtyřúhelníku *AMPL* je roven $360 - (\alpha + 90 + 90)$. Čtyřúhelníku *AMPL* lze opsat kružnici, protože platí, že velikost protilehlých úhlů tohoto čtyřúhelníku, je rovna 180^0. Dále vím, že úhly ∡*LKC* a ∡*MKB* jsou shodné (vrcholové) a úhly∡ *LPC* a ∡*LKC* jsou shodné také, protože se jedná o úhly obvodové. To stejné platí i pro úhly ∡*BPM* a ∡*BKM*. Z toho plyne, že úhly ∡*LPM* a ∡*CPB* jsou shodné.

A protože čtyřúhelníku *AMPL* lze opsat kružnici, pak i čtyřúhelníku *ABPC* lze opsat kružnici, a tedy bod *P* leží na kružnici opsané trojúhelníku *ABC*.



Obrázek 6.2.1.-2. úhly *LPM* a *CPB* jsou shodné

6.2.2. Druhá část důkazu

V druhé části důkazu předpokládám, že bod *P* je libovolným bodem kružnice opsané trojúhelníku *ABC*. Pokud *P* splývá s některým z bodů, které tvoří trojúhelník, je tvrzení zřejmé. Dále předpokládám, že bod *P* nesplývá s žádným vrcholem trojúhelníku. Chci dokázat, že body *K, L, M* leží na jedné přímce, tedy jsou kolineární. Chci ukázat, že úhly ∡*MKB* a ∡*LKC* jsou shodné. Pokud by shodné nebyly, nemohly by body *K, L, M* ležet na jedné přímce. Čtyřúhelníku *MBPK* lze opsat kružnici. Odtud podle věty o obvodových úhlech vím, že úhly ∡*MKB* a ∡*MPB* mají stejnou velikost. Ze stejného důvodu platí, že úhly ∡*LPC* = ∡*LKC*. Dále vím, že čtyřúhelník *AMPL* je tětivový a pro úhel pří vrcholu *P* platí: $360^0 - (90^0 + 90^0 + \alpha)$, což je: $180^0 - \alpha$. Z předpokladu vím, že čtyřúhelník *ABPC* je tětivový, takže musí platit, že součet velikosti úhlu α a úhlu při vrcholu *P* se rovná 180^0,takže pro velikost úhlu při vrcholu *P* platí $180 - \alpha$. Z toho plyne, že si velikosti úhlů ∡*MPB* a ∡*LPC* musí být rovny a tím pádem musí být rovny i velikosti úhlů ∡*LKC* a ∡*MKB*, což bylo dokázat. [srov. 7, s.4]

7. Heronova úloha a modelování kuželoseček skládáním papíru

Heron Alexandrijský byl významným fyzikem alexandrijského období (10-70 n. l.). Byl ředitel Múseia v Alexandrii, matematik, optik, mechanik a autor mnoha vynálezů. Mimo jiné zkoumal také odraz světla od rovinných zrcadel, válcových zrcadel a kuželových zrcadel. Při popisu tohoto jevu vycházel z principu nejkratšího paprsku. Předpokládal, že světlo se šíří vždy tak, aby jeho trajektorie měla minimální délku. [8]

Tento princip nejkratší dráhy použil k vyřešení problému, v jakém místě na zrcadle se musí světelný paprsek odrazit, má-li se odrazem dostat z bodu *A* do bodu *B*. S tímto jevem souvisí matematická úloha zvaná Heronova. [9, s. 10]

7.1. Formulace Heronovy úlohy

Nechť A, B jsou různé body ležící ve stejné polorovině vyťaté přímkou p. Najděte bod $X \in p$ tak, aby součet $|AX| + |BX|$ byl minimální.

Stejnou situaci popisuje následující úloha
Jezdec na koni, který se nachází na planině v místě *A*, má namířeno do místa *B*. Nejdříve však musí napojit koně někde u řeky, kterou na obrázku představuje přímka *p*. Chci najít místo na řece (bod *X*), kde má jezdec koně napojit, aby urazil co nejkratší vzdálenost.
[9, s. 10], viz obrázek 7.2.-1.

7.2. Řešení Heronovy úlohy

V případě, že každý z bodů leží v jiné polorovině určené přímkou *p*, je řešení jasné a tedy to, že nejkratší vzdálenost z bodu *A* do bodu *B* je spojnice těchto dvou bodů a bod *X* leží v průsečíku *AB* s přímkou *p*. Pokud oba body leží ve stejné polorovině určené přímkou p (Obr. 7.2.-1.), využíváme osové souměrnosti. *A'* si označím obraz bodu *A* v souměrnosti podle přímky *p*. Zvolím *X* jako průsečík přímky *p* a úsečky *A'B*. Vyznačím si na přímce *p* bod *E* různý od bodu *X*. Z osové souměrnosti plyne rovnost:

$$|A'E| + |EB| = |AE| + |EB|$$

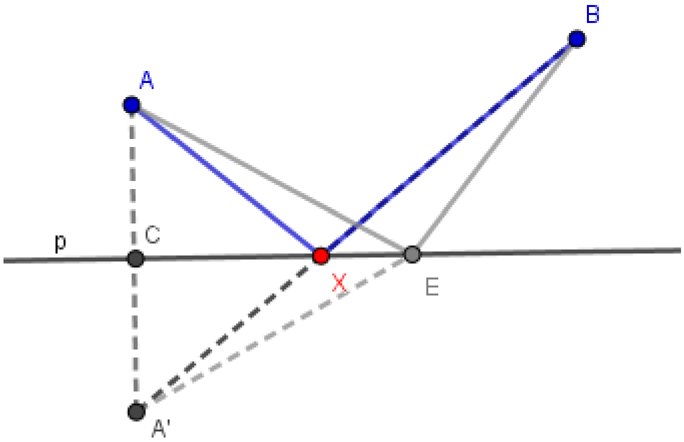
Z trojúhelníkové nerovnosti trojúhelníku *BA'E* dostanu:

$$|A'E| + |EB| > |A'B|$$

A protože *X* leží na *A'B* s pomocí osové souměrnosti zjistím, že

$$|A'B| = |A'X| + |XB| = |AX| + |XB|$$

Z toho plyne, že jakákoliv jiná vzdálenost z bodu A' do bodu B, nežli přes bod X, je větší. Tedy cesta přes bod X je nejkratší možná. [9, s. 10]



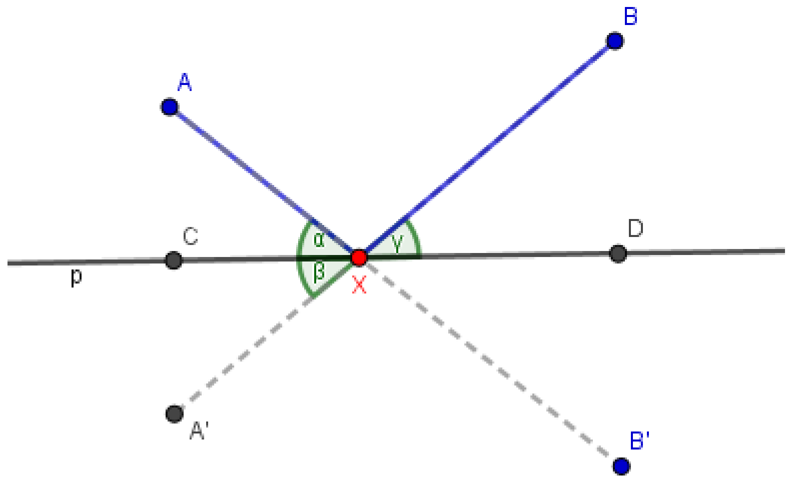
Obrázek 7.2.-1. Body *A* a *B* leží ve stejné polorovině

Právě bylo dokázáno, že cesta přes bod *X* je nejkratší možná. V úvodu této kapitoly jsem zmínila tzv. princip nejkratšího paprsku, to znamená, že světlo se šíří vždy tak, aby jeho trajektorie měla minimální délku. Podle zákonu odrazu světla je úhel dopadu roven úhlu odrazu. Ráda bych nyní ověřila, že $\measuredangle CXA = \measuredangle DXB$. (Obr. 7.2.-2.) Z osové souměrnosti plyne, že trojúhelník *A'XA* je rovnoramenný, stejně tak i trojúhelník *BXB'* a body *C* a *D* jsou středy základen těchto trojúhelníků, proto úhly $\measuredangle CXA$ a $\measuredangle A'XC$ jsou shodné. Úhly $\measuredangle A'XC$ a $\measuredangle DXB$ jsou vrcholové, proto mají také stejnou velikost, jak je vidět na obrázku 7.2.-2.

Tedy:

$$|\measuredangle A'XC| = |\measuredangle CXA| = |\measuredangle B'XD| = |\measuredangle DXB|,$$

což bylo dokázat.



Obrázek 7.2.-2. Shodnost úhlů

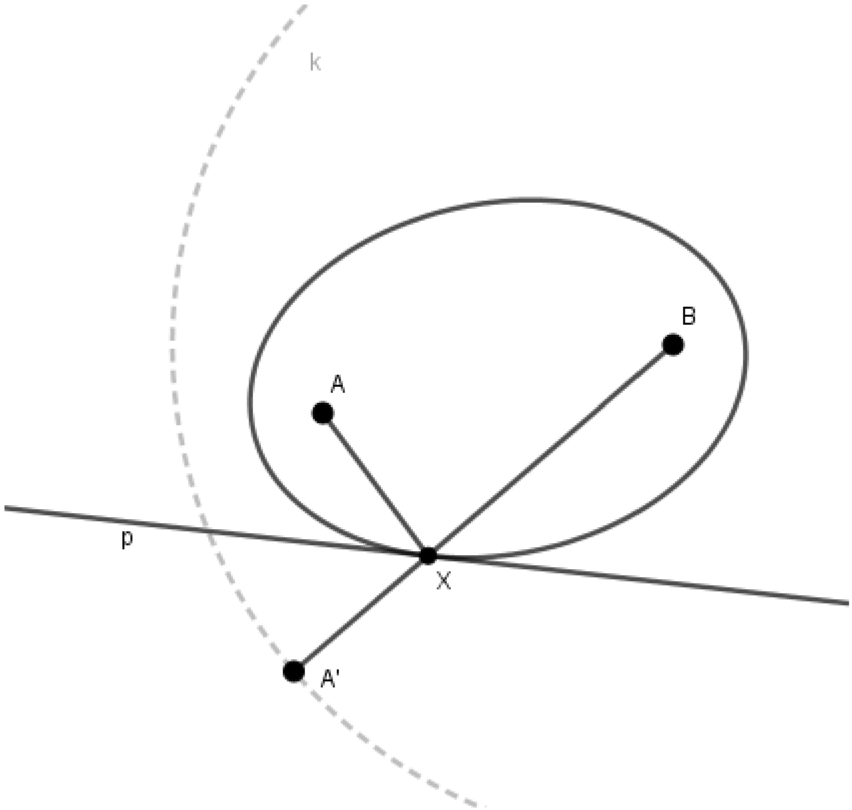
7.3. Jak souvisí Heronova úloha s konstrukcí kuželoseček?

V Heronově úloze byly pevně zvoleny body A, B, přímka p a úkolem bylo najít bod X a velikost s. Nyní je zadání pozměněno [9, s. 11].

7.3.1. Elipsa

Pevně je zvolena hodnota $s = |AX| + |BX|$, kdežto poloha bodu X a v důsledku toho i přímky p je proměnná. Z podmínky $s = |A'X|$ plyne, že bod A' leží na kružnici k se středem v bodě B a poloměrem s. Ke každému bodu A' pak lze sestrojit přímku p, která je osou úsečky AA' a bod X je průsečíkem úsečky $A'B$ s přímkou p. Tento bod X je bodem elipsy a body AB jsou jejími ohnisky (Obr. 7.3.1.-1.), [9, s. 11].

Z definice elipsy je známo, že elipsa je množina všech bodů roviny, které mají konstantní součet vzdáleností od dvou pevně daných bodů (od ohnisek). Velikost s je pevně dána a je rovna $|AX| + |BX|$, tato elipsa je tedy množinou všech možných bodů X a všechny takové přímky p, které jsou osou úsečky AA', a na kterých leží bod X, jsou tečny elipsy a tuto elipsu obalují. Cílem této úvahy bylo ukázat souvislost Heronovy úlohy s větou, která říká, že tečna elipsy půlí vnější úhly průvodičů dotykového bodu.



Obrázek 7.3.1.-1. Souvislost Heronovy úlohy s konstrukcí elipsy

Postup konstrukce:

1. A, B; A, B dáno
2. k; $k(B; s)$
3. A'; $A' \in k$ libov.
4. p; $p\ je\ osa\ |A'A|$
5. $|A'B|$
6. X; $X \in p \cap |A'B|$
7. Elipsa jejíž ohniska jsou body A, B a $X \in$ této elipse

7.3.2. Hyperbola

V předchozí situaci bylo s rovno velikosti $|AX| + |BX|$. Nyní se budu zabývat situací, kdy $0 < s < |AB|$. V tomto případě lze bod X sestrojit jako průsečík přímky $A'B$ s osou úsečky AA'.

Z trojúhelníkové nerovnosti:

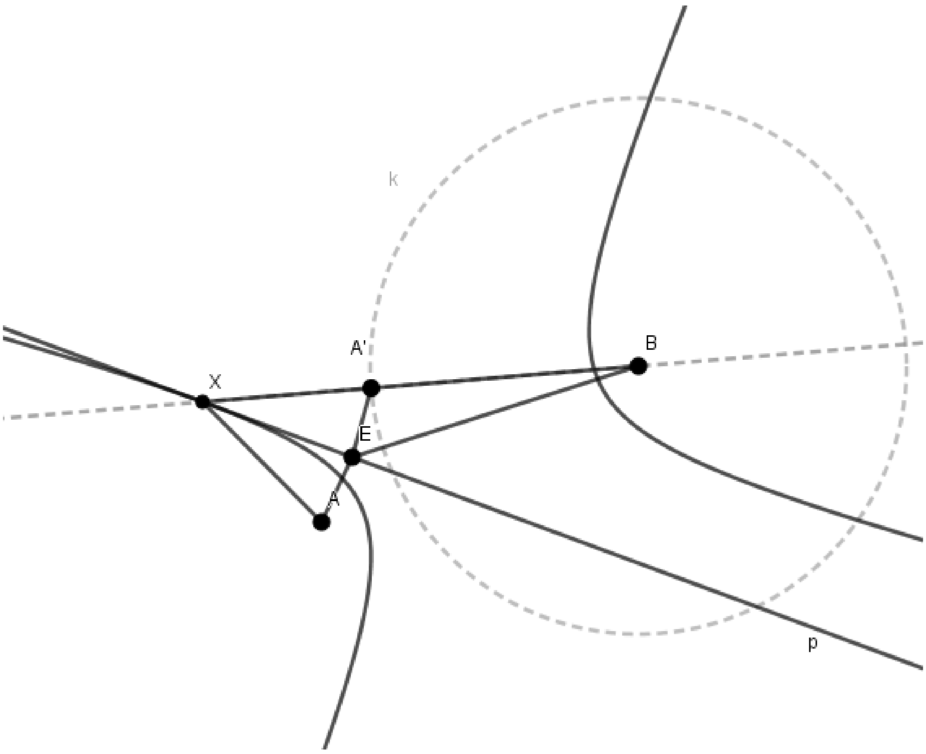
$$|A'B| > |A'E| - |EB|$$

a z osové souměrnosti lze zjistit, že:

$$s = \left||AX| + |XB|\right| > ||AE| - |EB||$$

pro všechna E, která leží na přímce p a zároveň platí, že E není rovno X [9, s. 12].

Z definice hyperboly je známo, že hyperbola je množina všech bodů v rovině, jejichž absolutní hodnota rozdílu vzdáleností od daných dvou bodů (ohnisek) je konstantní. Tato vzdálenost je pevně dána (s). Všechny přímky p nyní obalují hyperbolu, která je množinou všech možných bodů X.



Obrázek 7.3.2.-1. Souvislost Heronovy úlohy s konstrukcí hyperboly

7.4. Modelování kuželoseček skládáním papíru

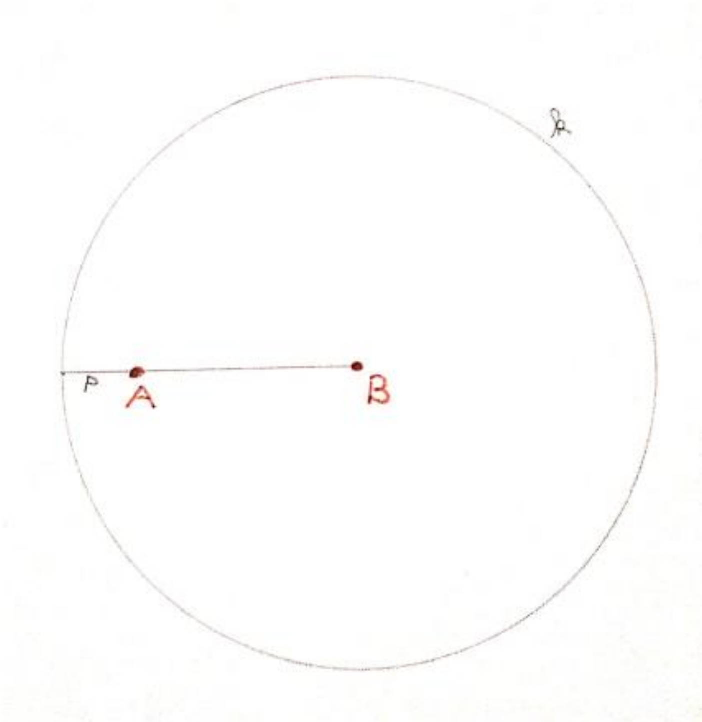
Dle mého názoru, modelování kuželoseček pomocí skládání papíru není úplně přesné, ale mohlo by představovat určitou didaktickou pomůcku k vyučování kuželoseček. Studentům by mohlo pomoci s lepším představením si dané situace a s pochopením poznatků o vlastnostech kuželoseček, které se běžně v matematice probírají jen formou vět a dokazováním těchto vět. Například věta, která říká, že tečna v bodě elipsy půlí příslušný vnější (vnitřní) úhel průvodičů, nebo věta o řídící kružnici:

Množina všech bodů souměrně sdružených s jedním ohniskem elipsy podle jejích tečen je řídicí kružnice elipsy o středu ve druhém ohnisku a poloměru $2a$. [10]

Pokusila jsem se tedy vytvořit podrobný návod, který popisuje, jak pomocí papíru kuželosečky vymodelovat.

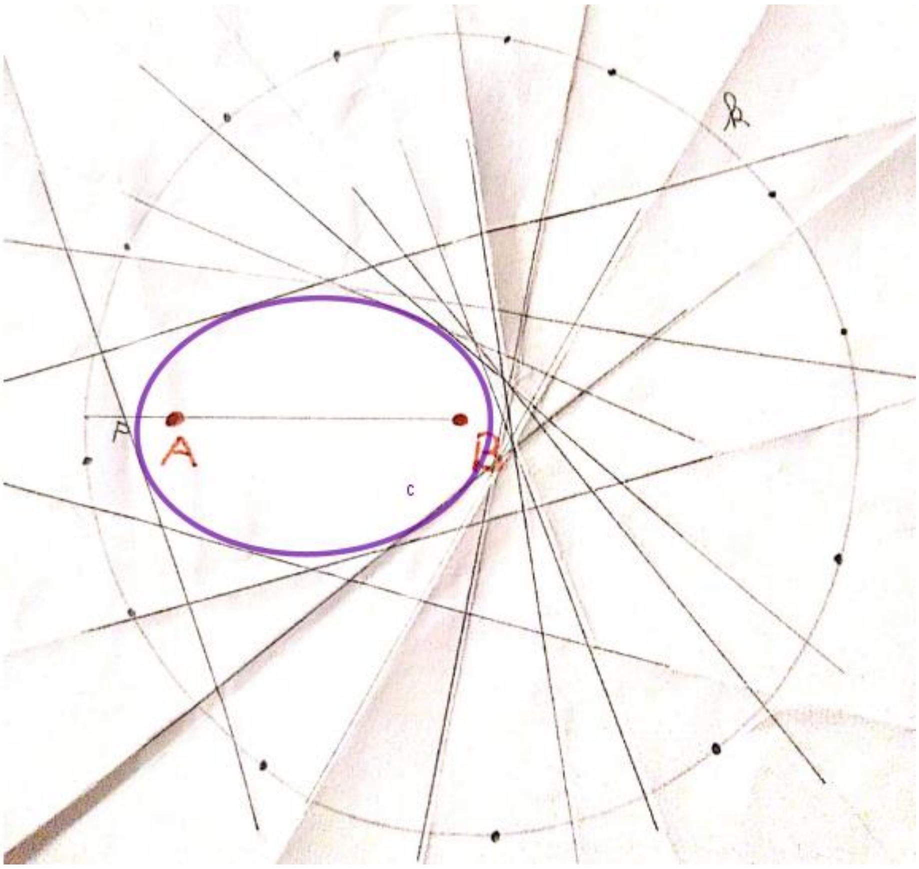
7.4.1. Modelování elipsy:

Narýsuji si na papír body A a B, které jsou pevně dány a délka s také, ta udává poloměr řídící kružnice k se středem v bodě B. Bod A musí ležet uvnitř této kružnice.



Obrázek 7.4.1.-1. Zadání pro modelování elipsy pomocí skládání papíru

Nyní budu ohýbat papír tak, aby vždy ohnutá část kružnice k procházela bodem A. Každý ohyb papíru tvoří tečnu elipsy. Takových ohybů papíru lze udělat libovolně mnoho a všechny tyto ohyby obalují elipsu s ohnisky A, B. Každý ohyb vytváří model osy úsečky $A'A$.



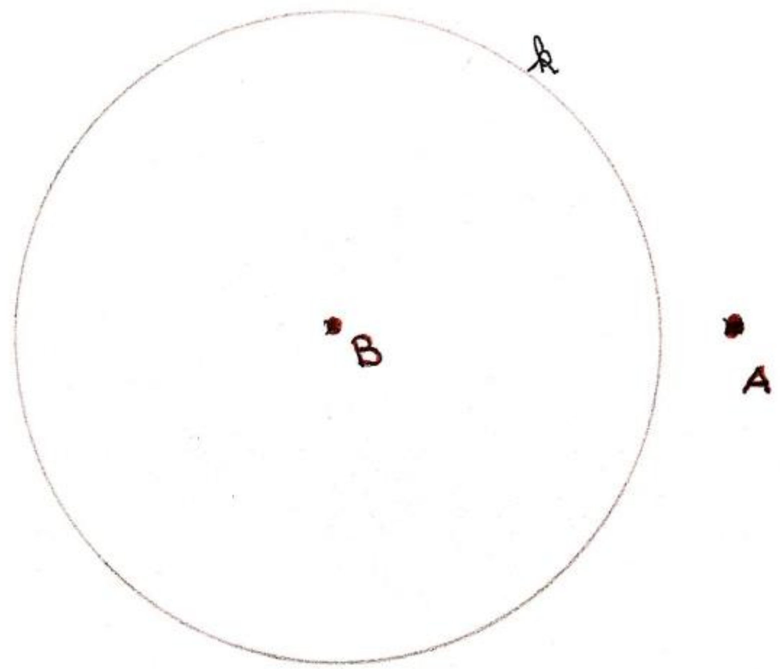
Obrázek 7.4.1.-2. Elipsa vzniklá skládáním papíru

Vytvořila jsem si na kružnici k body („tmavé puntíky“). (Obr. 7.4.1.-2.), které představují body A' a ty pak postupně přehýbám tak, aby se zobrazily na bod A. Jelikož na fotografii nejsou ohyby dobře viditelné, obtáhla jsem je tužkou. Výslednou elipsu jsem vyznačila fialovou barvou.

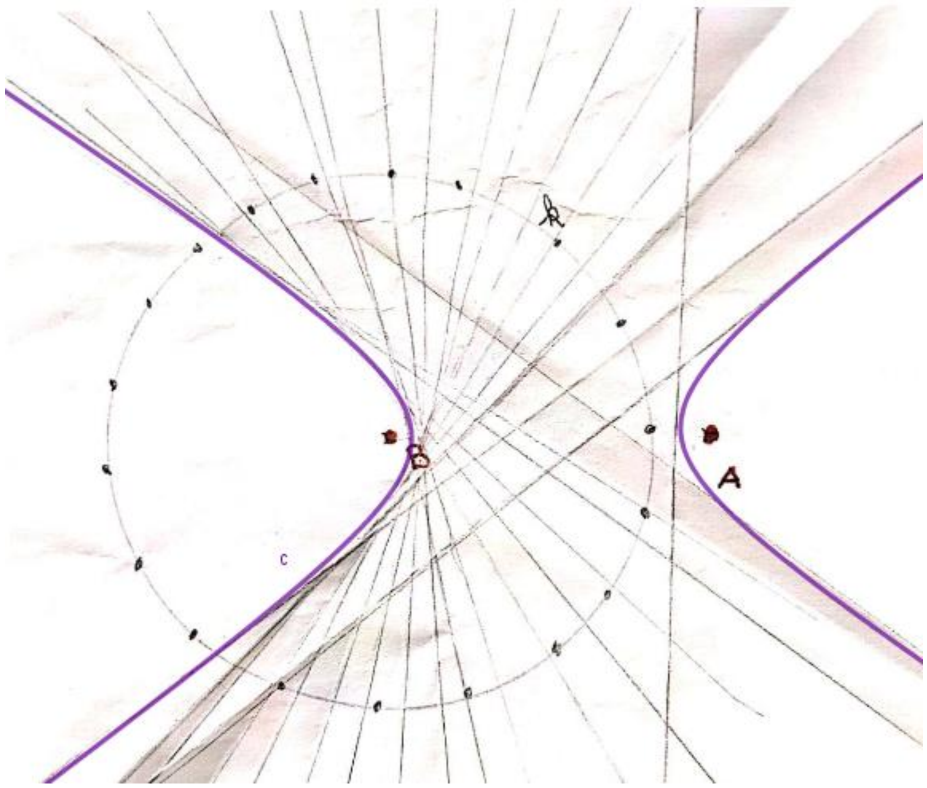
7.4.2. Modelování hyperboly:

Stejně jako v předchozím případě mám zde zadány body A a B a délku s. Zde platí $0 < s < |AB|$. To znamená, že bod A se bude nacházet vně řídící kružnice k a ne uvnitř jako u elipsy.

Hyperbolu získám stejně jako u předchozího případu. Papír ohnu tak, aby vždy ohnutá část kružnice k procházela bodem A. Každý ohyb tvoří tečnu hyperboly. Výslednou hyperbolu jsem vyznačila fialovou barvou



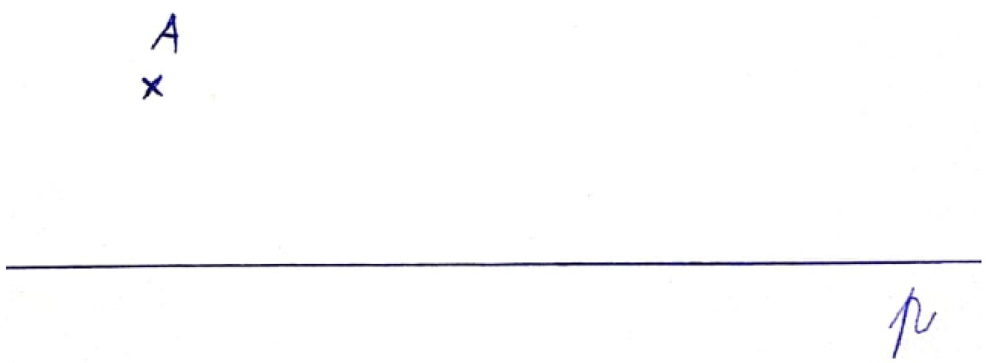
Obrázek 7.4.2.-1. Zadání pro modelování hyperboly pomocí skládání papíru



Obrázek 7.4.2.-2. Hyperbola vzniklá skládáním papíru

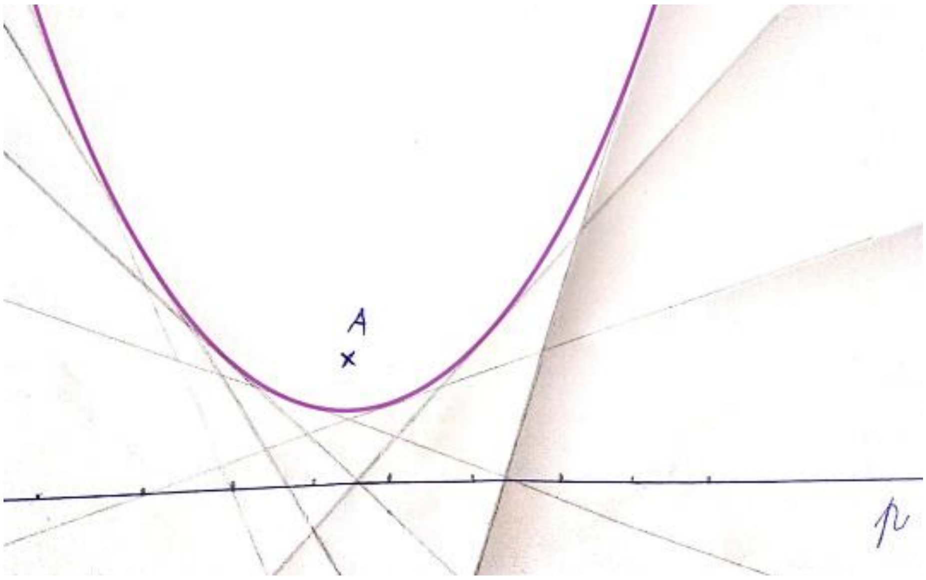
7.4.3. Modelování paraboly

V předchozích úlohách byly vždy zadány dva body a vzdálenost (poloměr řídící kružnice). Na této kružnici se pak nacházely body A', které jsem postupně zobrazovala na bod A pomocí přehýbání papíru. Nyní je dána přímka a bod, který na této přímce neleží.



Obrázek 7.4.3.-1. Zadání pro modelování paraboly pomocí skládání papíru

Vyznačím si na přímce (pojmenuji ji p) body, kterých může být libovolně mnoho a tyto body opět přehnutím papíru zobrazím na bod, který je pevně dán (Pojmenuji ho A). Parabola je množina bodů roviny, které jsou stejně vzdáleny od dané přímky (řídicí přímky) jako od daného bodu, který na této přímce neleží (ohnisko). Každý ohyb tvoří tečnu paraboly a body dotyku tvoří parabolu.



Obrázek 7.4.3.-2. Parabola vzniklá skládáním papíru

8. Osová afinita a úsekový úhel

8.1. Úvod

V Rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia [1] není téma týkající se osové afinity obsaženo. Existuje však zajímavá souvislost mezi množinou bodů, ze kterých je daná úsečka viděna pod daným úhlem (kpt. 1.2.3.) a právě zmíněnou osovou afinitou. Protože mě tato souvislost zaujala, rozhodla jsem se do své práce zařadit kapitolu, ve které zmiňuji základní vlastnosti osové afinity a jednoduché konstrukce uvedené pro lepší pochopení tohoto zobrazení. Následuje úloha, která pro své řešení vyžaduje konstrukci pomocí úsekového úhlu. Zajímavé jsou podle mého také důsledky řešení této úlohy. Tato problematika by mohla být použita jako doplňková aktivita na středních odborných školách. Zde se látka týkající se osové afinity může probírat v rámci výuky předmětu deskriptivní geometrie.

8.2. Zavedení osové afinity a její základní vlastnosti

Osová afinita je rovinné zobrazení, které je určeno přímkou (osou afinity) a párem odpovídajících si bodů A, A' (dvojice vzor – obraz). Zapisujeme např. (o, A, A'), [11, s.1]

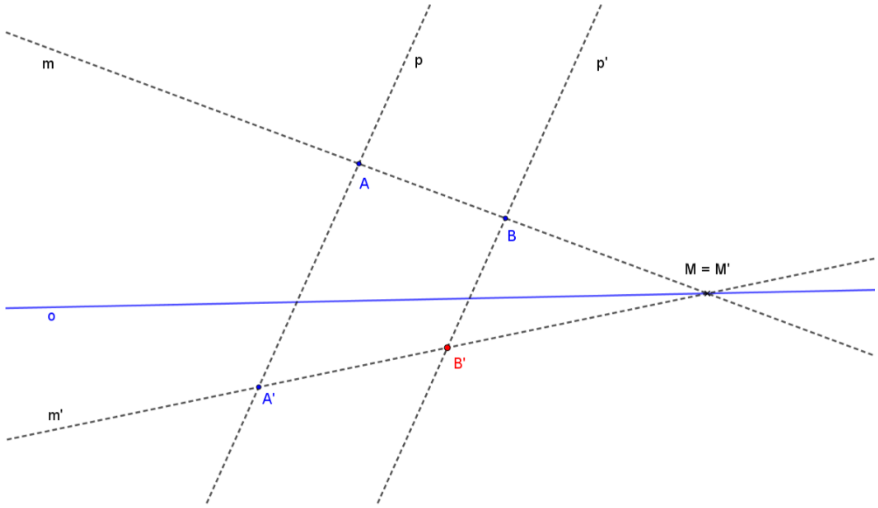
Poznámka:

a) Pokud dvojice vzor – obraz tvoří přímku rovnoběžnou s osou afinity, jedná se o elaci.

b) Dvojice vzor – obraz definuje směr afinity

Příklady zobrazení bodu**:** $(o, A, A'): B \rightarrow B'$:

Zadané prvky budou značeny modře pro rychlejší orientaci v úlohách.

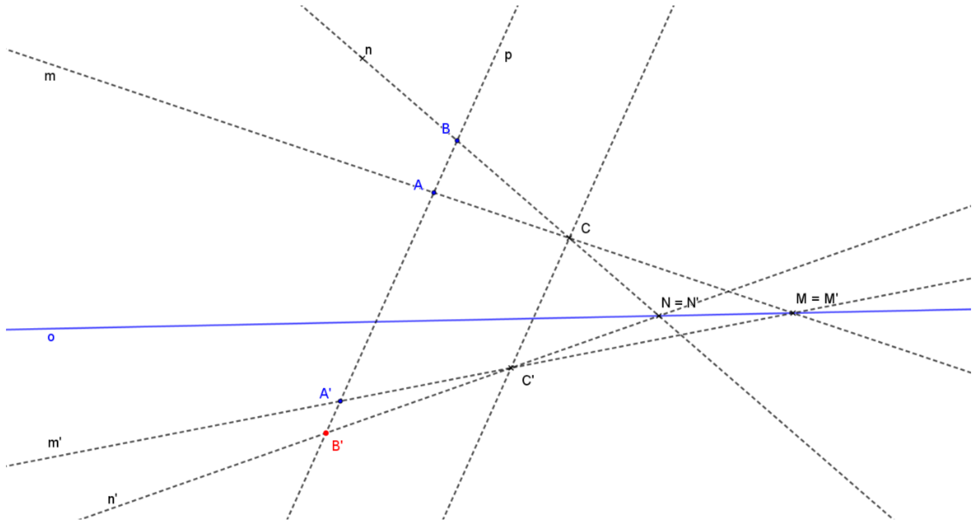


Obrázek 8.2.-1. Obraz bodu (o,A,A'): $B \rightarrow B'$, [2]

Postup konstrukce:

1. A, B, o, A'
2. $m; A \in m \wedge B \in m$
3. $M; M \in m \cap o$
4. $m'; M \in m' \wedge A' \in m'$
5. $p; A \in p \wedge A' \in p$
6. $p'; p \| p' \wedge B \in p'$
7. $B'; B' \in p' \cap m'$

V následujícím příkladu lze při řešení zvolit pomocný bod C a najít jeho obraz stejným postupem jako v předchozím příkladu.

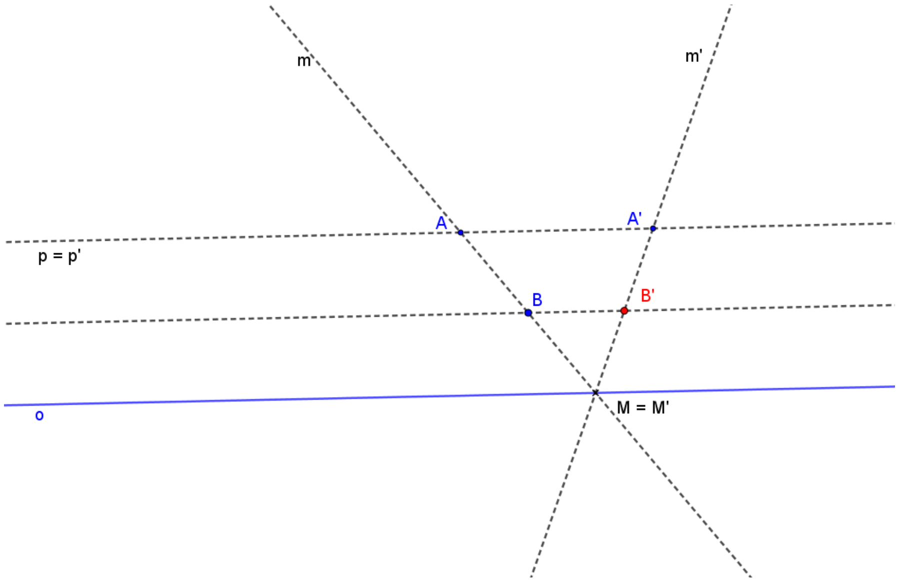


Obrázek 8.2.-2. Obraz bodu (o, A, A'): $B \to B'$, [2]

Postup konstrukce:

1. A, B, A', o
2. Pomocný bod C
3. $m; A \in m \wedge C \in m$
4. $M; M \in m \cap o$
5. $m'; M \in m' \wedge A' \in m'$
6. $p; A \in p' \wedge A' \in p$
7. $p'; p \| p' \wedge C \in p'$
8. $C'; C' \in m' \cap p'$
9. $n; B \in n \wedge C \in n$
10. $N;\ N \in n \cap o$
11. $n'; N \in n' \wedge C' \in n'$
12. $B';\ B' \in p \cap n'$

Následující příklad je případ elace (směr afinity je rovnoběžný s osou afinity):



Obrázek 8.2.-3. Obraz bodu (o, A, A'): $B \rightarrow B'$, elace

8.2.1. Samodružné prvky osové afinity

- silně samodružné jsou body na ose afinity
- slabě samodružné jsou všechny přímky rovnoběžné se směrem afinity (taková přímka se sice zobrazí sama na sebe, ale jednotlivé body přímky se zobrazí do jiných bodů na této přímce) [11, s.1]

8.2.2. Dělící poměr

Nechť *A*, *B*, *C*; $A \neq B, C \neq B$ jsou tři kolineární body. Dělícím poměrem bodu *C* vzhledem k bodům *A*, *B* rozumíme reálné číslo λ, které zapisujeme (*ABC*), a pro jehož absolutní hodnotu platí:

$$|(ABC)| = |AC|/|BC|$$

Přitom pro bod *C* ležící vně úsečky *AB* je $(ABC) > 0$ a pro bod ležící uvnitř úsečky *AB* je $(ABC) < 0$. Pro $A = C$ je $(ABC) = 0$. [12]

8.2.3. Vlastnosti osové afinity

- afinita zachovává rovnoběžnost
- afinita zachovává dělící poměr, zejména středu úsečky odpovídá střed úsečky na rovnoběžce s osou afinity se zachovává délka úsečky [11, s.1]

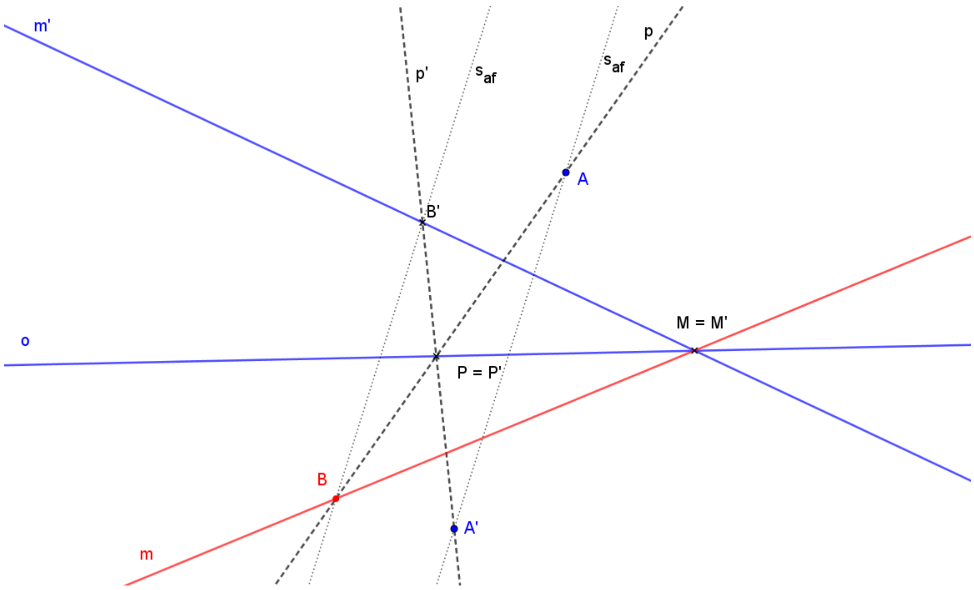
- nezachovává se velikost úhlu
- zachovává se incidence
- sobě odpovídající přímky (tedy dvojice vzor – obraz) se protínají na ose afinity (v samodružném bodě)
- zachovává se poměr obsahů obrazců [12, s.3]

8.3. Jednoduché vzorové příklady na osovou afinitu

Úvod:

Jak jsem již uvedla v úvodu kapitoly, tato část mojí práce je určena spíše jako doplněk učiva planimetrie na vyšším gymnáziu. Proto nyní uvedu jednoduché řešené příklady na osovou afinitu pro snadnější pochopení tohoto zobrazení. Některé postupy při řešení těchto úloh budu dále používat.

a) Je dána přímka m'. Narýsujte m tak, aby $(o, A, A'): m \rightarrow m'$. [11, s.2]



Obrázek 8.3.-1. Řešení příkladu 8.3. a)

Postup konstrukce:

1.$B'; B' \in m'$

2. $p'; p' = A'B'$

3. $P, P'; P, P' \in o \cap p'$

4. $p; p = AP$

5. $s_{af}; s_{af} \parallel AA' \wedge B' \in s_{af}$

6. $B; B \in s_{af} \cap p$

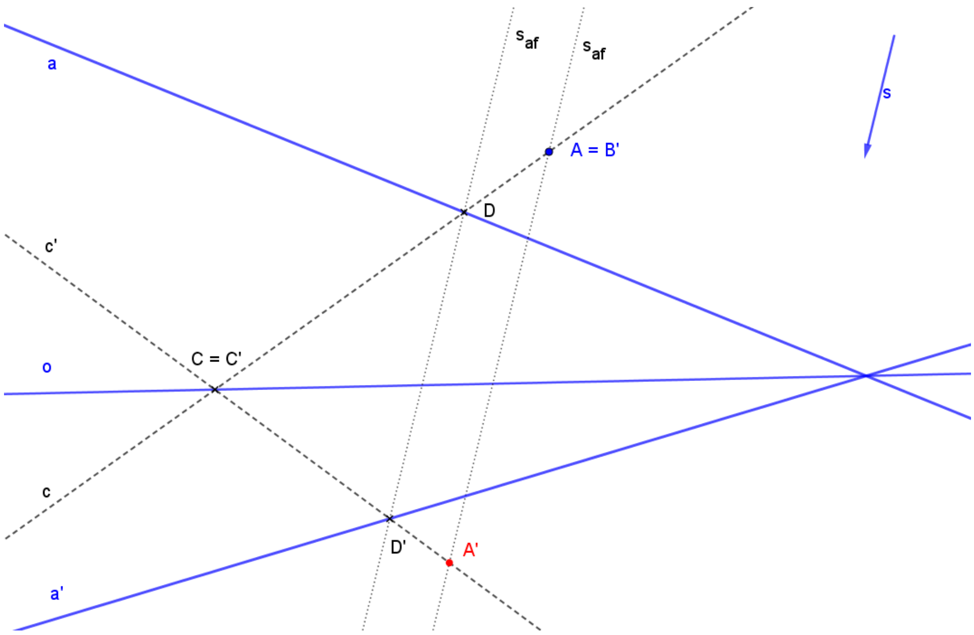
7. $M', M; M', M \in m' \cap o$

8. $m; m = MB$

b) Afinita je daná osou o, směrem s a přímkami $a \rightarrow a'$. Narýsujte body A', B, které odpovídají danému bodu $A = B'$. [11, s.2]

Nejprve je nutno najít obraz bodu A:

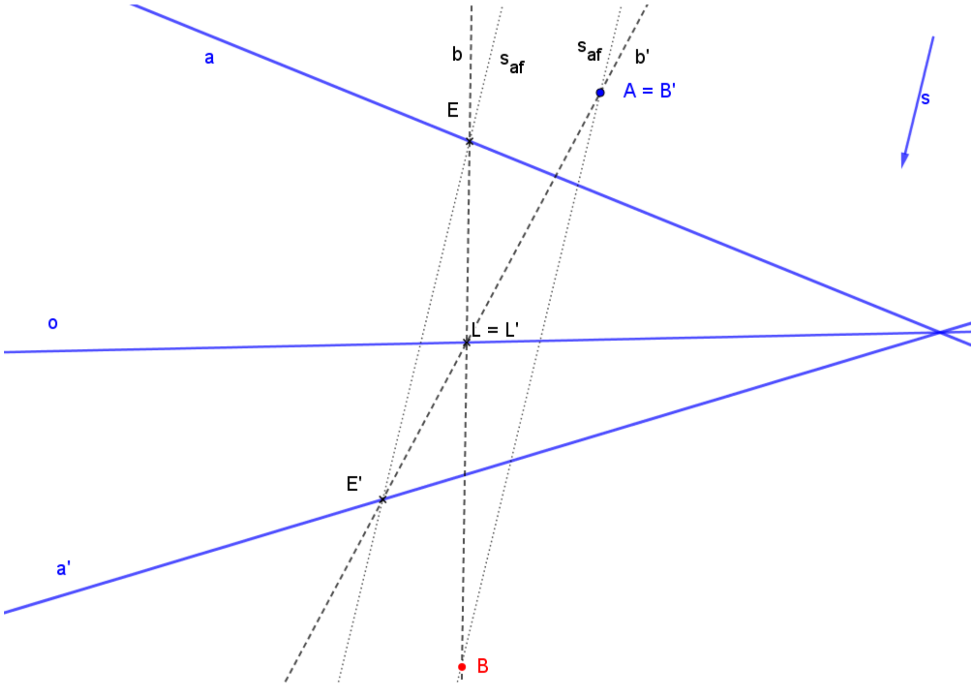
Zvolím na přímce a libovolný bod D a sestrojím pomocnou přímku c, určenou body A a D. Najít obraz přímky c je jednoduché – přes samodružný bod na ose o – a pomocí směru afinity je obraz bodu A jasný. Jak lze vidět na obrázku 8.3.-2.



Obrázek 8.3.-2. Řešení příkladu 8.3. b), první část

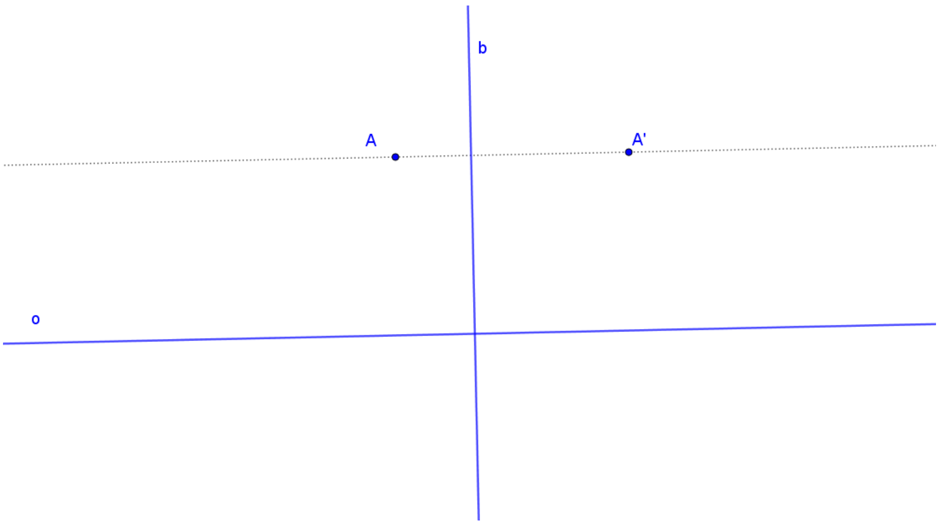
Nyní najdu vzor pro bod B':

Postupuji analogicky, ale od obrazu. Začnu tím, že na přímce a' zvolím libovolný bod E'. Spojnice $E'B'$ definuje přímku b', která protne osu afinity v samodružném bodě $L = L'$. Nyní najdu vzor pro bod E' - ten musí ležet na rovnoběžce se směrem afinity a samozřejmě na přímce a, neboť afinita zachovává incidenci. A když mám bod E a L, je k dispozici přímka b a nakonec pomocí směru afinity naleznu bod B:



Obrázek 8.3.-3. Řešení příkladu 8.3. b), druhá část

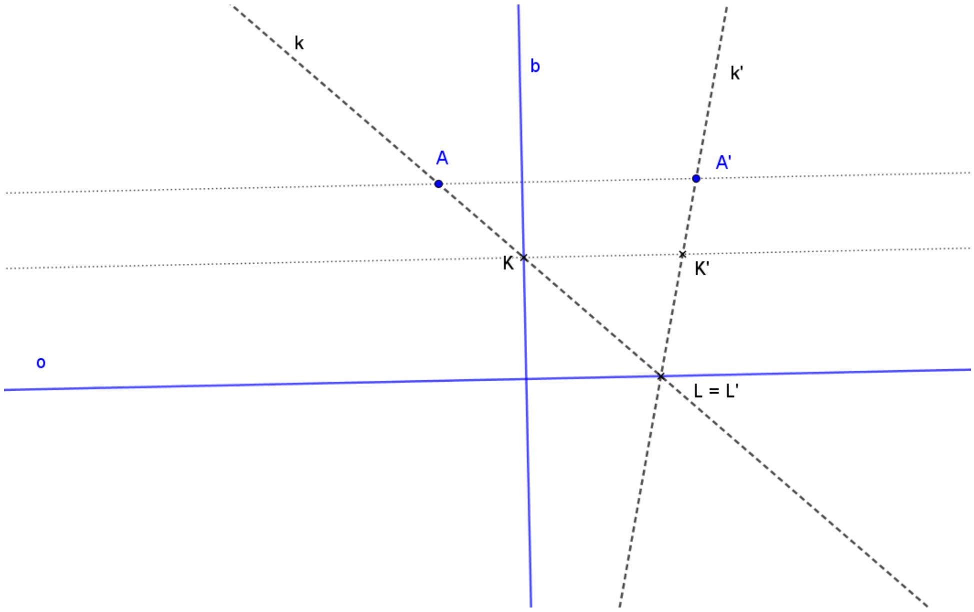
c) V afinitě $(o, A, A'), AA' \parallel o$[2] sestrojte přímku b', která odpovídá dané přímce $b \perp o$. [11, s.2]



Obrázek 8.3.-4. Zadání příkladu 8.3. c)

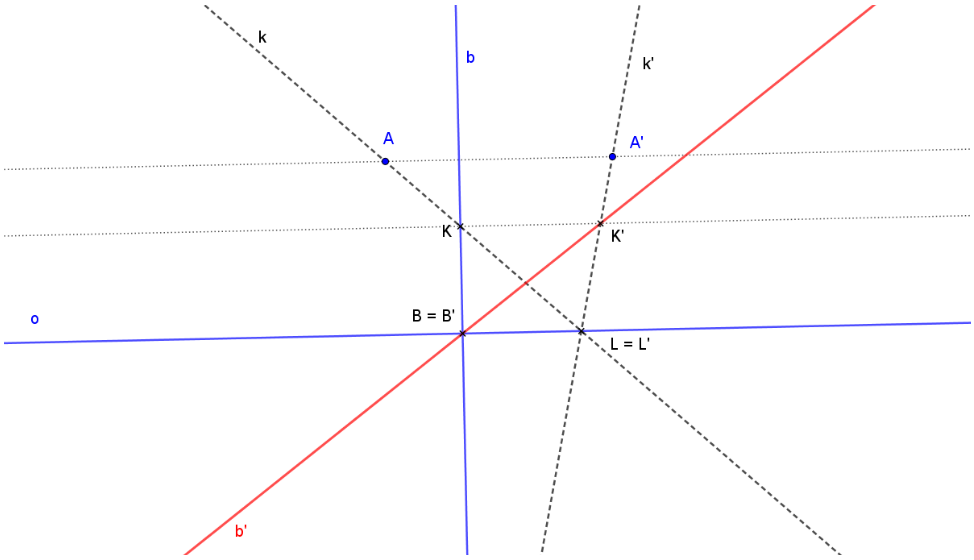
[2] Jedná se o elaci.

Je potřeba zvolit na přímce b bod K a najít jeho obraz přesně podle úlohy z obrázku číslo 8.2.-3.



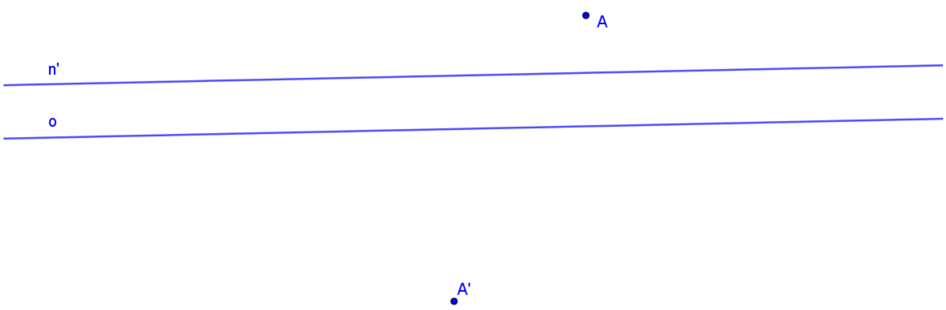
Obrázek 8.3.-5. Řešení příkladu 8.3. c), první část

Obraz přímky b musí procházet bodem K', protože incidence se v osové afinitě zachovává viz. kapitola 8.2.3., a také samodružným bodem $B = B'$:



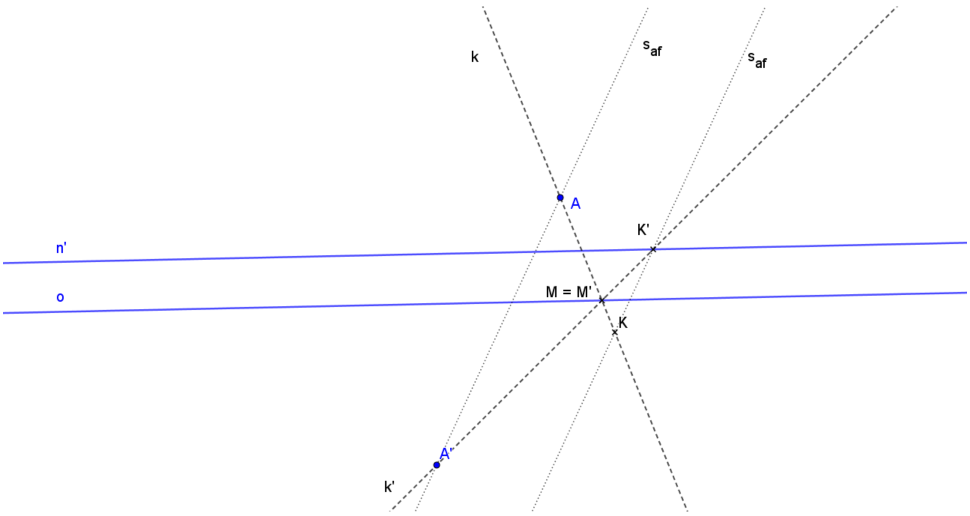
Obrázek 8.3.-6. Řešení příkladu 8.3. c), druhá část

d) V afinitě (o, A, A') sestrojte přímku n, která odpovídá dané přímce $n' \parallel o$. [11, s.3]



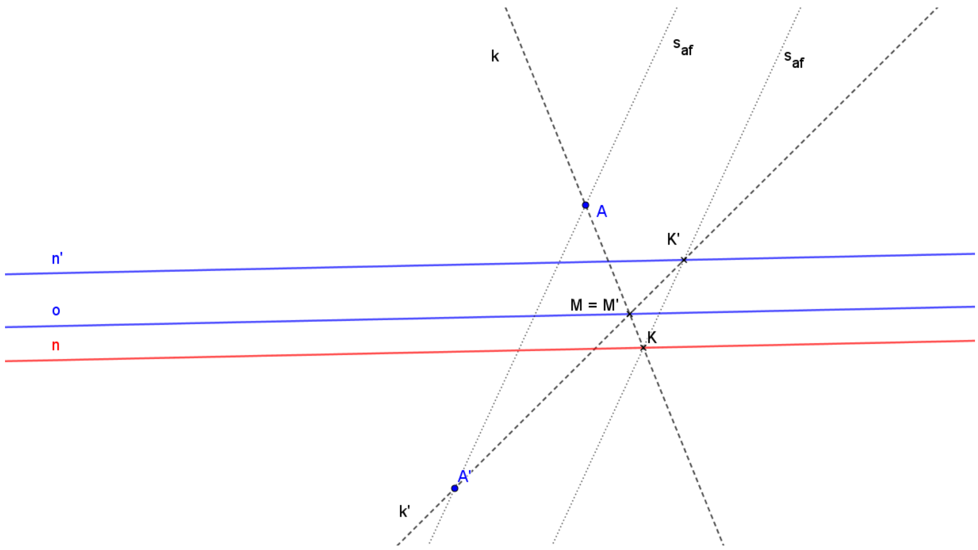
Obrázek 8.3.-7. Zadání příkladu 8.3. d)

Sestrojím vzor pro bod K', který byl libovolně zvolen na přímce n':



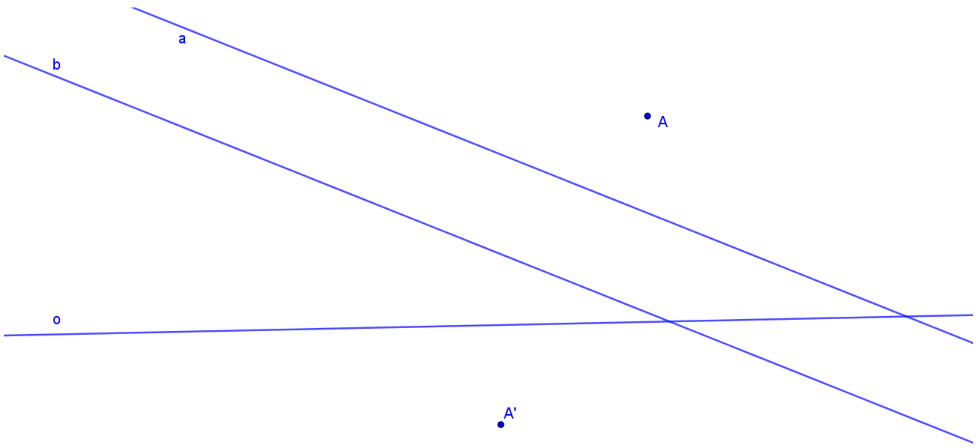
Obrázek 8.3.-8. Řešení příkladu 8.3. d), první část

Podle vlastnosti osové afinity (afinita zachovává rovnoběžnost), sestrojím hledanou přímku n jako rovnoběžku s osou o tak, aby procházela bodem K:



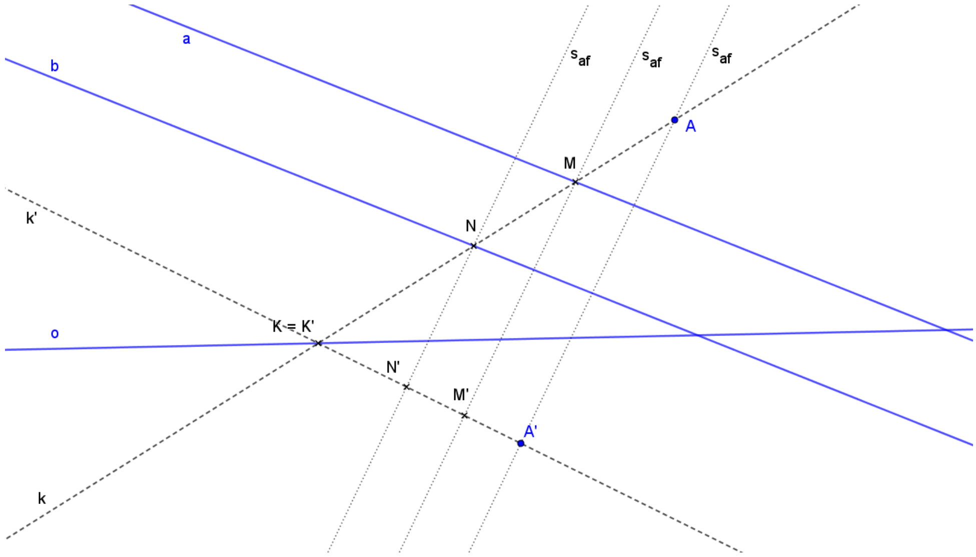
Obrázek 8.3.-9. Řešení příkladu 8.3. d), druhá část

e) V afinitě(o, A, A') sestrojte přímky a', b', které odpovídají daným přímkám a, b; $a \parallel b$. [11, s.3]



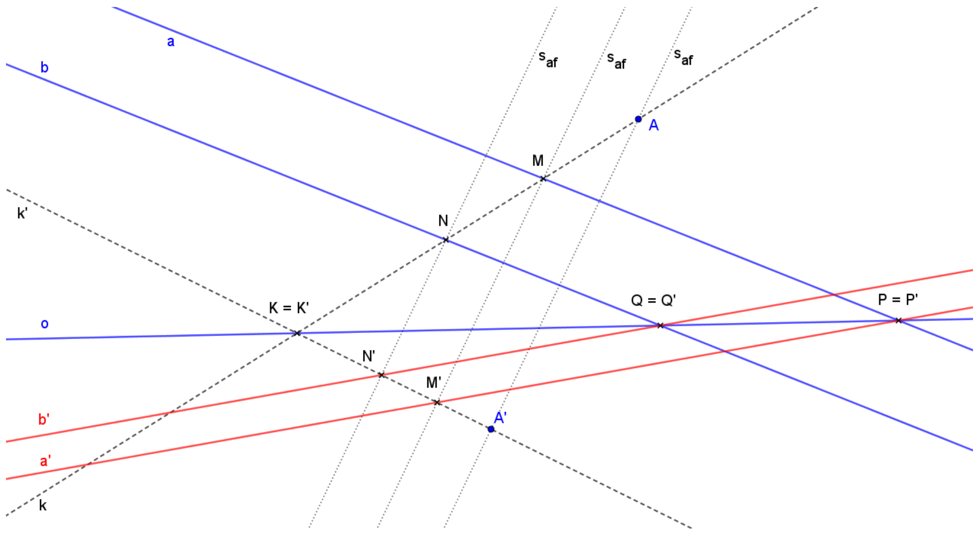
Obrázek 8.3.-10. Zadání příkladu 8.3. e)

Zvolím přímku k tak, aby protínala přímky a a b po řadě v bodech M a N. Zobrazím body M a N pomocí přímky k':



Obrázek 8.3.-11. Řešení příkladu 8.3. e), první část

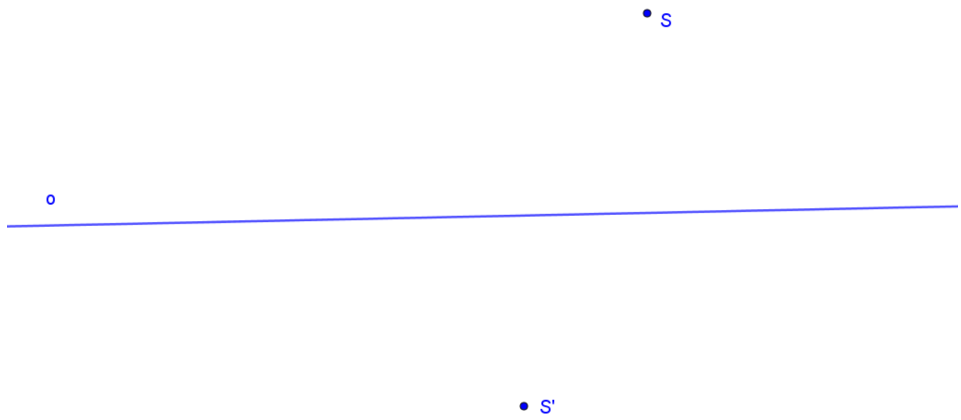
Na závěr využiji samodružných bodů Q a P a vlastnosti, že afinita zachovává rovnoběžnost



Obrázek 8.3.-12. Řešení příkladu 8.3. e), druhá část

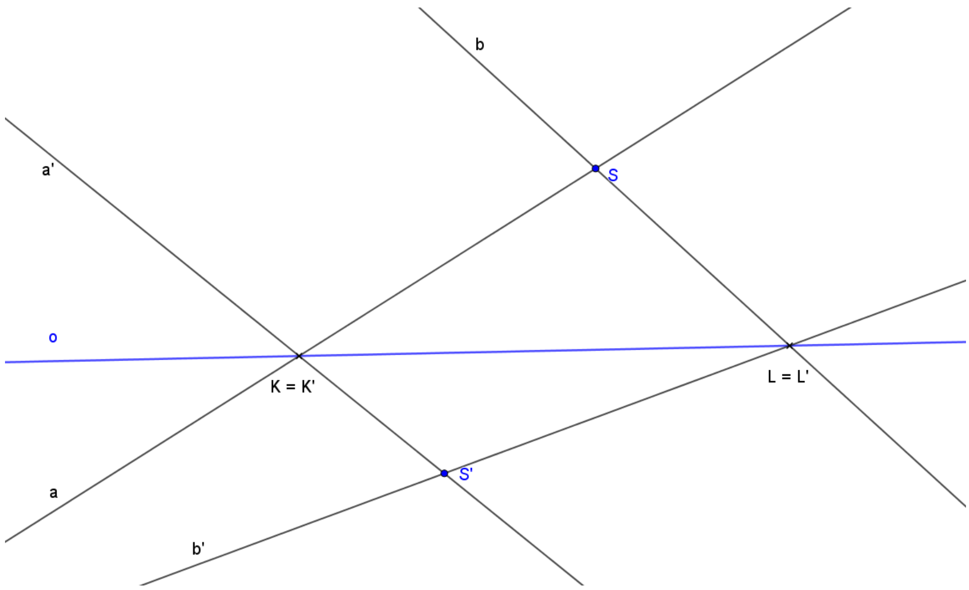
f) V afinitě (o, S, S') veďte bodem S přímky a, b tak, aby $a' \perp b'$. [11, s.3]

Zadání úlohy bude vypadat takto:



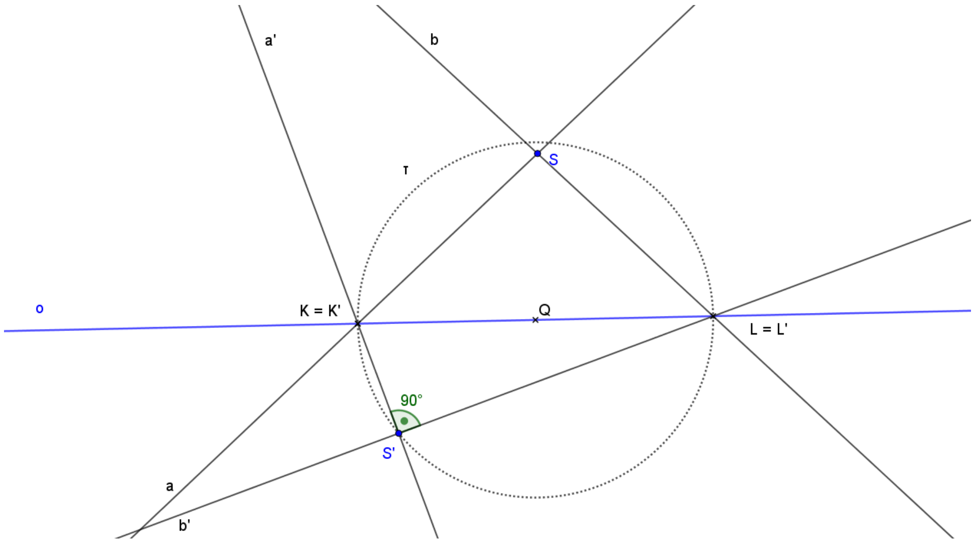
Obrázek 8.3.-13. Zadání příkladu 8.3. f)

Zde je znázorněna situace, pokud by nebyla dána podmínka kolmosti přímek a' a b':



Obrázek 8.3.-14. Návodná situace příkladu 8.3. f)

Je nutno si uvědomit, že přímky a' a b' budou na sebe kolmé. To znamená, že samodružné body přímek a' a b' (po řadě K'a L') tvoří s bodem S' pravoúhlý trojúhelník, jemuž lze opsat Thaletova kružnice. Její střed Q bude muset ležet na ose o, protože přepona pravoúhlého trojúhelníku leží rovněž na ose afinity. Postupuji tedy tak, že na ose afinity zvolím bod Q a narýsuji Thaletovu kružnici se středem ve zvoleném bodě Q a poloměrem $|QS'|$. Tato kružnice definuje na ose samodružné body K'a L'. Přímky $a' = K'S'$ a $b' = L'S'$ jsou na sebe kolmé, což splňuje podmínky úlohy:



Obrázek 8.3.-15. Řešení příkladu 8.3. f)

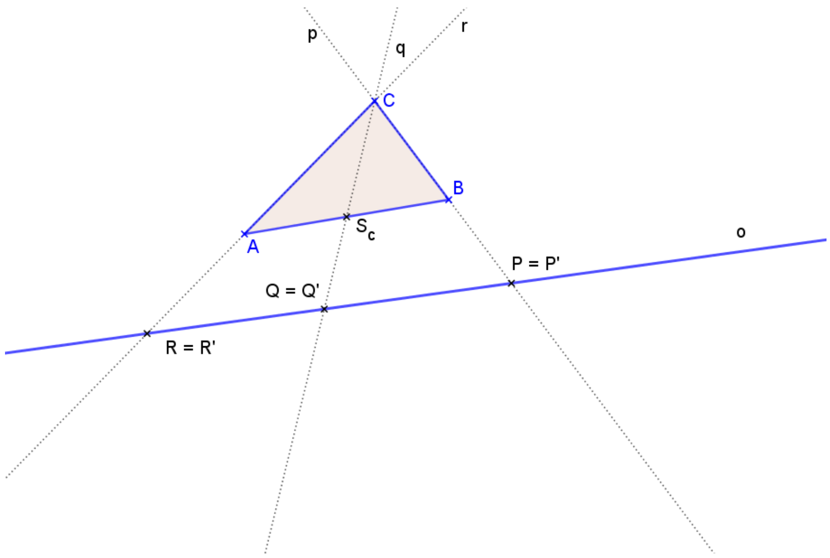
8.4. Speciální úloha na úsekový úhel a její důsledky

8.4.1. Formulace úlohy

Je dán libovolný trojúhelník *ABC* a přímka *o*, osa osové afinity. Najděte obraz $A'B'C'$ trojúhelníku *ABC* v takové osové afinitě s osou *o*, aby byl trojúhelník $A'B'C'$ rovnostranný. [12, s.3]

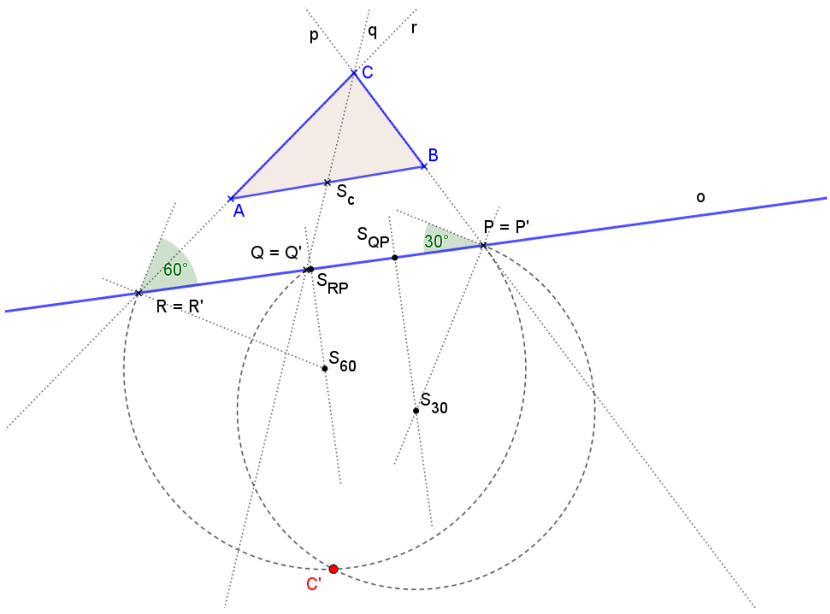
8.4.2. Řešení úlohy

Nejprve je potřeba sestrojit dvojic bodů vzor – obraz a získat tak směr afinity. Budu hledat obraz bodu C tak, aby byl bod C' vrcholem rovnostranného trojúhelníku. To znamená, že podle obrázku 8.4.2.-1. musí být velikost úhlu $\sphericalangle P'C'R'$ rovna 60^o a současně velikost úhlu $\sphericalangle P'C'Q'$ se musí rovnat 30^o. Využívám té vlastnosti afinity, že se střed úsečky S_c strany AB zobrazí na střed $S_c{}'$ strany $A'B'$.



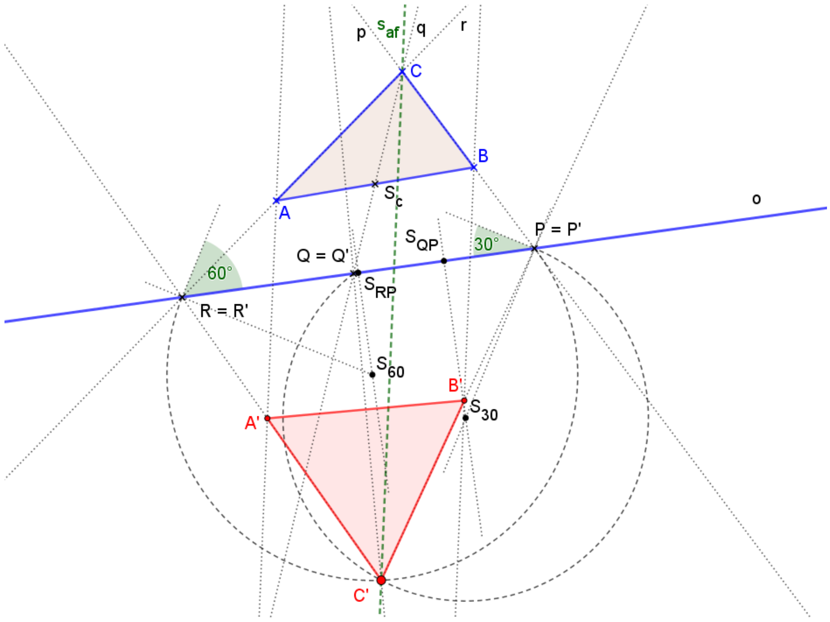
Obrázek 8.4.2.-1 K základní myšlence řešení

Podle předchozí úvahy narýsuji nad úsečkou $P'R'$ kružnicový oblouk jako množinu bodů, z nichž je tato úsečka viděna pod úhlem 60^o (střed tohoto oblouku jsem označila S_{60}) a podobně nad úsečkou $P'Q'$narýsuji kružnicový oblouk s příslušným úsekovým úhlem 30^o (jeho střed jsem označila S_{30}). V průsečíku těchto kružnicových oblouků vznikne bod C', jak je patrné z obrázku 8.4.2.-2.



Obrázek 8.4.2.-2. Nalezení bodu C'

Konstrukcí bodu C' mám nyní k dispozici dvojici bodů vzor – obraz v afinitě určené osou o, tedy směr afinity. Narýsovat zbývající obrazy vrcholů trojúhelníku už není problém:

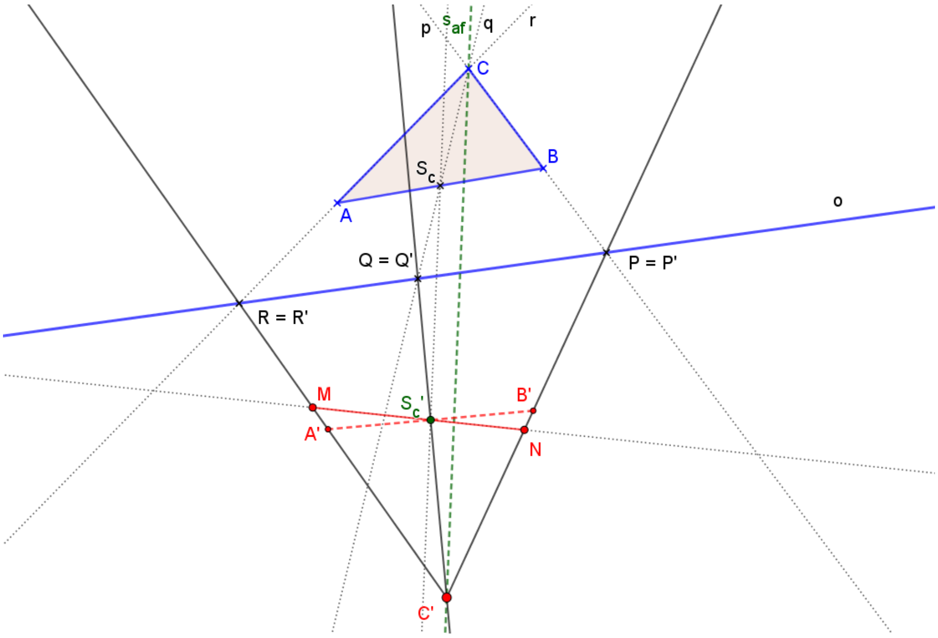


Obrázek 8.4.2.-3. Konstrukce obrazů zbývajících vrcholů A' a B'

Podle obrázku 8.4.2.-3. sestrojím přímku $s_{af} = CC'$ (směr afinity) a vedu s tímto směrem rovnoběžky procházející vrcholy trojúhelníku A a B. Dále narýsuji polopřímky $C'R'$ a $C'P'$ jako obrazy polopřímek CR a CP. Podle pravidel osové afinity získám body A' a B' v průsečících těchto polopřímek s odpovídajícími rovnoběžkami se směrem afinity.

Na závěr se zamyslím, zda je obrazem skutečně rovnostranný trojúhelník nebo pouze trojúhelník s úhlem 60^o při vrcholu C'. Ukáži, že velikosti zbývajících úhlů při vrcholech A' a B' jsou také rovny 60^o.

Použiji k tomu střed úsečky AB, bod S_c. Ten se zobrazí na střed úsečky $A'B'$, na bod $S_c{}'$. Současně musí body A' a B' náležet po řadě polopřímkám $C'R'$ a $C'P'$. Mají-li být všechny zmíněné podmínky splněny, musí být úsečka $A'B'$ kolmá k polopřímce $C'Q'$, čímž je zajištěno, že trojúhelník $A'B'C'$ je rovnoramenný s hlavním úhlem o velikost 60^o, tedy že je rovnostranný. Na obrázku 8.4.2.-4. je zachycena situace, ve které jsou body M a N incidentní po řadě s polopřímkami $C'R'$ a $C'P'$, ale bod $S_c{}'$ není středem úsečky MN. Nejsou tedy splněny všechny požadavky. [srov. 2]



Obrázek 8.4.2.-4. K úvaze o rovnostrannosti trojúhelníku $A'B'C'$

8.4.3. Závěr

V této kapitole bylo odvozeno, že ke každému trojúhelníku ABC existuje osová afinita, ve které se tento trojúhelník zobrazí na rovnostranný trojúhelník $A'B'C'$. Odtud plyne, že pro libovolný trojúhelník je možné najít osovou afinitu, v níž je tento trojúhelník obrazem nějakého trojúhelníku rovnostranného.

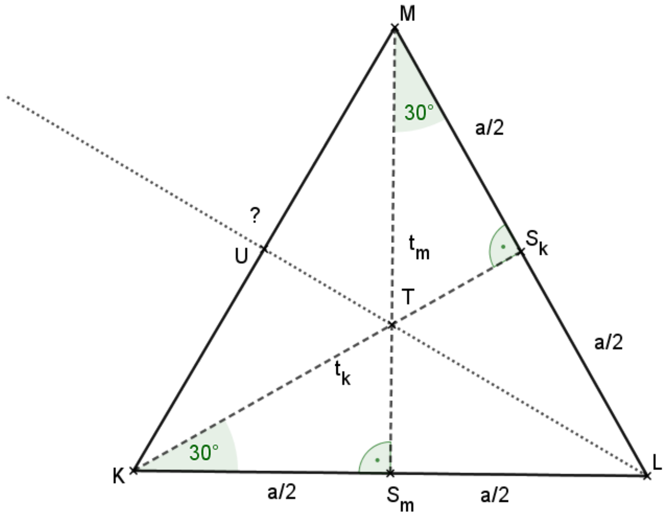
8.4.4. Důsledek úlohy

Přípravná část:

8.4.4.1. Průsečík těžnic v rovnostranném trojúhelníku

V tomto odstavci ověřím fakt, že se těžnice v rovnostranném trojúhelníku protínají v jednom bodě.

Nechť existuje rovnostranný trojúhelník KLM podle následujícího obrázku.



Obrázek 8.4.4.1.-1. K důkazu průsečíku těžnic rovnostranného trojúhelníku

Průsečík těžnice t_k vedené z vrcholu K s těžnicí t_m vedené z vrcholu M označím T. Chci dokázat, že polopřímka LT protne stranu KM v bodě U, který je středem strany KM. Postup:

Trojúhelník KS_mT je shodný s trojúhelníkem MS_kT podle věty (usu), jak je patrné z předchozího obrázku. Takže úsečky S_mT a S_kT mají stejnou délku. Proto je čtyřúhelník S_mLS_kT deltoid. Deltoid je osově souměrný podle své úhlopříčky, v tomto případě podle úhlopříčky LT. Proto úhlopříčka LT půlí úhel při vrcholu L a tudíž polopřímka LT musí obsahovat těžnici t_l vedenou z vrcholu L. Bod U je tudíž středem strany KM, což bylo dokázat.

8.4.4.2. Těžiště v rovnostranném trojúhelníku

V této kapitole dokáži, že těžiště v rovnostranném trojúhelníku dělí těžnici tohoto trojúhelníku v poměru 1: 2. [12, s.4]

Vyjdu opět z předchozího obrázku, zaměřím se na trojúhelník KS_mT. Tento trojúhelník je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu S_m.

Je tedy:

$$\sin 30^o = \frac{|S_mT|}{|KT|} = \frac{1}{2}$$

Z této rovnosti plyne, že $|S_m T|:|KT| = 1:2$. A protože trojúhelník $KS_m T$ je shodný s trojúhelníkem $MS_k T$ podle věty (usu), je jasné, že $|KT| = |MT|$. Je tedy $|S_m T|:|MT| =$ $= 1:2$, což bylo dokázat.

8.4.4.3. Důsledek úlohy 8.4.1:

Podle závěru 8.4.3. platí, že pro libovolný trojúhelník je možné najít osovou afinitu, v níž je tento trojúhelník obrazem nějakého trojúhelníku rovnostranného.

Důsledek 1:

V libovolném trojúhelníku se těžnice protínají v jediném bodě.

Podle předchozího závěru najdu k danému trojúhelníku pomocí afinity trojúhelník rovnostranný. V něm platí, že se všechny těžnice protínají v jednom bodě. Jak plyne z vlastností osové afinity, osová afinita zachovává incidenci, takže zobrazením rovnostranného trojúhelníku afinitou na daný trojúhelník obecný zůstává průsečík těžnic v jediném bodě právě i u tohoto trojúhelníku obecného.

Důsledek 2:

V libovolném trojúhelníku dělí těžiště těžnici v poměru $1:2$.

Využiji opět předchozí závěr a skutečnost, že osová afinita zachovává dělící poměr úsečky (jak plyne z vlastností). Takže stačí dokázat, že dokazovaná vlastnost platí v rovnostranném trojúhelníku a pomocí zmíněné osové afinity „přenést“ tento fakt do příslušného daného trojúhelníku obecného.

Závěr

V bakalářské práci jsem v první kapitole stručně uvedla přehled množin bodů s danou vlastností vyučovaných na nižším a vyšším gymnáziu v hodinách geometrie. Každou z těchto množin jsem vykreslila v programu GeoGebra. Uvedla jsem jednoduché vzorové příklady. V jejich řešení používám uvedené množiny bodů, aby si čtenář mohl vytvořit představu o jejich užití.

Ve druhé kapitole jsou uvedeny konkrétní příklady týkající se tématu množin bodů s danou vlastností, které mi byly doporučeny nebo mě zaujaly. V řešení se v těchto mnohdy obtížnějších úlohách často vyskytují kuželosečky, které jsou probírány na vyšším gymnáziu. Proto jsem konkrétní příklady v úvodní kapitole na tuto oblast neuváděla. Pokud mě při řešení obtížnějších příkladů nenapadlo vhodné planimetrické řešení, použila jsem postup analytický.

V úvodu jsem zmínila snahu uvést v práci téma, které by rozšířilo rozsah požadavků na výuku geometrie na gymnáziu. Proto jsem zařadila kapitolu týkající se osové afinity a její souvislost s množinou bodů hledanou pomocí úsekového úhlu. Uvedla jsem základy tohoto zobrazení podrobněji, s poměrně velkým počtem řešených ilustračních příkladů. Osová afinita by mohla tvořit právě toto rozšíření, které by mohlo být využito jako doplňující látka například v nějaké formě výběrových seminářů.

Myslím si, že práce splnila svůj účel. Minimálně v tom ohledu, že jsem si rozšířila obzory v té oblasti geometrie, která mě zajímá a baví.

Seznam zdrojů

[1] MŠMT, Rámcový vzdělávací program pro gymnázia, [online] [cit. 8.4.2019]

Dostupné z http://www.nuv.cz/file/159, stáhnout soubor.

[2] VEJSADA, Marek, soukromý archiv příkladů ze dne 11.4. 2019

[3] VEJSADA, Marek, náměty z konzultace ze dne 21.11.2018

[4] PECH, Pavel. Kuželosečky. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2004. 80-7040-755-7

[5] PECH, Pavel, náměty z konzultace ze dne 9.10.2018

[6] PECH, Pavel, náměty z konzultace ze dne 19.3.2019

[7] PECH, Pavel a BLAŽEK, Jiří. Simsonova–Wallaceova věta [online] [cit. 8.12.2018] Dostupné z: http://mfi.upol.cz/files/25/2503/mfi_2503_173_184.pdf

[8] REICHL, Jaroslav a VŠETIČKA, Martin. Heron Alexandrijský [online] [cit. 11.3.2018]

Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1433-heron-alexandrijsky

[9] SAMKOVÁ, Libuše a LEISCHNER, Pavel. Od řešení Heronovy úlohy k modelům kuželoseček [online] [cit. 12.3.2018]

Dostupné z: http://mfi.upol.cz/files/23/2301/mfi_2301_009_014.pdf

[10] DOLEŽAL, Jiří. Elipsa, [online] [cit. 12.3.2018]

Dostupné z: http://mdg.vsb.cz/jdolezal/StudOpory/Geometrie/Krivky/Kuzelosecky/Elipsa/Elipsa.html

[11] Mendelova univerzita, Osová afinita, [online], [cit. 5.1.2019]

Dostupné z: http://user.mendelu.cz/provazni/priklady_kg/osova_afinita.pdf

[12] Jihočeská univerzita, Deskriptivní geometrie 1 - KDM, Roman Hašek [online], [cit 5.1.2019]

Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/DG2/P1/Osova_afinita_text(GEO3).pdf