



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

DISKRÉTNÍ EPIDEMIOLOGICKÉ MODELY

DISCRETE EPIDEMIC MODELS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Tomáš Nečesaný

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. Viera Štoudková Růžičková, Ph.D.

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Tomáš Nečesaný**
Studijní program: Matematické inženýrství
Studijní obor: bez specializace
Vedoucí práce: **Mgr. Viera Štoudková Růžičková, Ph.D.**
Akademický rok: 2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Diskrétní epidemiologické modely

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Diskrétní populační dynamické systémy mají ve srovnání se spojitými modely výhodu v tom, že epidemiologická data jsou diskrétní a je tedy jednodušší porovnat hodnoty získané modelem se skutečnými daty.

V některých případech může i jednoduchý matematický model pomoci při prevenci přenosu infekčních chorob.

Cíle bakalářské práce:

1. Seznámení se se základy teorie diferenčních rovnic
2. Analýza vybraného diskrétního epidemiologického modelu
3. Ilustrace modelu na konkrétním příkladu

Seznam doporučené literatury:

ELAYDI, S. An Introduction to Difference Equation: Undergraduate Texts in Mathematics. 3. New York: Springer, 2005. ISBN 978-0-387-27602-1

MURRAY, J. D. Mathematical Biology. Berlin: Springer-Verlag, 1989. Biomathematics.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Práce se zabývá teorií diferenčních rovnic a jejich soustav. Dále se v práci nachází přehled základních diskrétních epidemiologických modelů. Detailně je rozebrán diskrétní SIR model a je ilustrován na příkladech a grafech.

Summary

This thesis deals with the theory of difference equations and their systems. The second chapter of the thesis contains a list of basic discrete epidemic models. Discrete SIR model is analysed in detail and it is illustrated with examples and graphs.

Klíčová slova

diferenční rovnice, soustava diferenčních rovnic, epidemiologické modely, SIR model, stabilita

Keywords

difference equation, system of difference equations, epidemic models, SIR model, stability

NEČESANÝ, Tomáš. *Diskrétní epidemiologické modely*. Brno, 2022. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/139647>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Viera Štoudková Růžičková.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Diskrétní epidemiologické modely* vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Viery Štoudkové Růžičkové, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu použité literatury.

Tomáš Nečesaný

Chtěl bych poděkovat své vedoucí Mgr. Věře Štoudkové Růžičkové, Ph.D. za velkou trpělivost, přínosné konzultace a veškerou pomoc, kterou mi poskytla při psaní bakalářské práce.

Tomáš Nečesaný

Obsah

Úvod	2
1 Úvod do diferenčních rovnic	3
1.1 Diferenční rovnice	3
1.2 Ekvilibrium	3
1.3 Soustavy lineárních rovnic 1. řádu	4
1.4 Nelineární rovnice a jejich soustavy	5
1.5 Stabilita	5
1.6 Aplikace diferenčních rovnic na epidemiologické modely	6
2 Přehled epidemiologických modelů	7
2.1 Modely s neměící se populací	8
2.1.1 SI model	8
2.1.2 SIR model	9
2.1.3 SIS model	10
2.2 Modely s měící se populací	11
2.2.1 SI a SIS model	11
2.2.2 SIR a SIRS model	11
2.3 Další modely	15
3 Analýza SIR modelu	16
3.1 Obecné vlastnosti modelu	17
3.1.1 Reprodukční číslo	18
3.1.2 Ekvilibrium	19
3.2 Analýza stability modelu	20
3.2.1 Odvození podmínky stability	21
3.2.2 Odhady hodnot linearizací	24
3.2.3 Příklad rovnosti koeficientů, jiná ekvilibria	25
3.3 Porovnání se spojitým modelem	26
4 Ilustrace SIR modelu na příkladech	27
4.1 Model se vznikem epidemie	27
4.2 Model nesplňující podmínky	28
4.3 Model s útlumem epidemie	29
4.4 Utlučený model s vypočtenými stabilními hodnotami	30
4.5 Model s rovností parametrů	32
4.6 Upravený SIR model	34
Závěr	36
Reference	37
Apendix	38

Úvod

Epidemiologické modely jsou základním stavebním kamenem studia a výpočtů šíření přenosných chorob v populaci. O to důležitější se tyto modely staly po vypuknutí pandemie viru SARS-CoV-2 a nemoci covid-19, kdy modelování epidemií začalo být velmi aktuálním a důležitým tématem.

Tyto modely se v zásadě dělí na dvě velké skupiny, a to modely diferenciální (spojité) a diferenční (diskrétní). Základní motivace pro používání diskretních modelů je nespojitost získávaných dat o již proběhlých epidemiích, a proto se modelace pomocí diskretních modelů v tomto smyslu více blíží reálným datům, jelikož ty také poskytují informace jen v předem daných diskretních časových okamžicích.

Tato práce se zabývá základními diferenčními epidemiologickými modely, podrobnější analýzou vybraného diskretního modelu a ilustrací tohoto modelu na příkladech.

V první kapitole bude zaveden potřebný matematický aparát ke studiu diferenčních rovnic a jejich soustav. V druhé kapitole si uvedeme přehled několika základních epidemiologických modelů a základní podmínky, které pro tyto modely zavádíme. Třetí kapitola je věnovaná podrobné analýze modelu SIR, studiu jeho reprodukčního čísla, ekvilibrií a stability těchto ekvilibrií. Ve čtvrté kapitole jsou uvedeny konkrétní příklady modelu SIR, které jsou modelovány pomocí softwaru Matlab.

1 Úvod do diferenčních rovnic

Na začátku uvedeme matematický aparát, který je nutný k výpočtům samotných modelů, což jsou zejména soustavy diferenčních rovnic. Proto je první kapitola teoretická, seznámíme se v ní s diferenčními rovnicemi, jejich soustavami a dalšími pojmy nutnými k pochopení dané problematiky. Podrobnější informace o teorii difference a diferenčních rovnic lze nalézt zejména v pracích [2, 3, 6].

1.1 Diferenční rovnice

Diferenční rovnice vyjadřují vývoj proměnné (fyzikální veličiny, velikost populace atp.) v čase. Avšak na rozdíl od diferenciálních rovnic, které uvažují spojité funkce a spojitý časový interval, diferenční rovnice zkoumají tuto proměnnou jen v určitých diskrétních časových okamžicích. Obecný tvar rovnice vypadá takto:

$$x_{n+1} = f(n, x_n, x_{n-1}, \dots), \quad (1)$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$. Terminologie je podobná jako u diferenciálních rovnic, pokud je závislost x_{n+1} na x_n, x_{n-1}, \dots lineární, hovoříme o lineární diferenční rovnici, pokud je nelineární, pak o nelineární diferenční rovnici. Skutečnost, na kolika předchozích hodnotách závisí x_{n+1} , určuje řád rovnice. V případě diferenční rovnice 1. řádu je hodnota x_{n+1} funkcí hodnoty x_n . Rovnice také dělíme podle toho, jaké koeficienty má, a to na rovnice s konstantními a nekonztantními koeficienty.

Pokud pravá strana rovnice nezávisí na n , tedy

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, \dots), \quad (2)$$

hovoříme o autonomní rovnici, v opačném případě mluvíme o neautonomní rovnici.

Lineární rovnice 1. řádu

$$x_{n+1} = a_n x_n + g_n$$

můžeme rozdělit na homogenní ($g = 0$) a nehomogenní, neboli s nenulovou pravou stranou ($g \neq 0$).

Podobně jako u diferenciální rovnice, i u té diferenční hledáme její řešení. Tímto řešením budeme rozumět reálnou posloupnost $\{x_n\}_{n=c}^N$, definovanou pro všechna $n \in \mathbb{Z}_c$, kde $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, která bude splňovat zadání rovnice (1).

Množina \mathbb{Z}_c pro $c \in \mathbb{Z}$ značí množinu všech celých čísel, které jsou větší než c . Množinově zapsáno:

$$\mathbb{Z}_c = \{m \in \mathbb{Z} \mid c \leq m\}.$$

1.2 Ekvilibrium

Definice 1.1. Bod x^* z definičního oboru funkce f nazveme ekvilibriem rovnice (2), jestliže je to pevný bod této funkce, tedy $f(x^*) = x^*$.

Ekvilibrium uvažujeme pouze u autonomní rovnice (2). Jinými slovy, x^* je konstantní řešení rovnice (2).

Pro diferenční rovnice platí jeden fenomén, který u diferenciálních rovnic nemá obdoby:

Tvrzení 1.2. ([3], kap. 1.3, str. 9) Je možné, aby řešení nebylo ekvilibriem, ale v konečném počtu iterací k ekvilibriu došlo.

Důkaz, neboli nalezení příkladu pro který tvrzení platí, je triviální. Stačí jako funkci f vzít konstantní funkci, např. $f(x_n) = 0$, a jako počáteční hodnotu x_0 jinou hodnotu, než je hodnota této funkce, např. $x_0 = 1$. Pak x_0 jistě není ekvilibriem, ale všechna další x_n už ekvilibia jsou.

1.3 Soustavy lineárních rovnic 1. řádu

Soustavami vyšších řádů, než je první řád, se nebudeme hlouběji zabývat. Pouze v kapitole 4.6 uvedeme jeden upravený model. Ten bude soustavou vyššího řádu, nebudeme ho však nijak podrobně zkoumat.

Nejprve se ale zaměříme pouze na lineární případ a pro jednoduchost budeme uvažovat soustavu dvou lineárních diferenčních rovnic 1. řádu pro dvě závislé proměnné. Ta má tvar

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= a_{11}x_n + a_{12}y_n + b_1, \\y_{n+1} &= a_{21}x_n + a_{22}y_n + b_2,\end{aligned}\tag{3}$$

kde koeficienty $a_{ij} = a_{ij(n)}$, $b_i = b_{i(n)}$ pro $i, j = 1, 2$ jsou reálné posloupnosti definované pro všechna $n \in \mathbb{Z}_c$. Matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

nazveme maticí koeficientů soustavy rovnic, a vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

vektorem pravé strany. Pak můžeme soustavu rovnic (3) psát v maticové podobě

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n + \mathbf{b}_n,$$

kde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Soustavu samozřejmě můžeme rozšířit na k závislých proměnných.

Obdobně jako jednoduché rovnice, i soustavy uvažujeme s konstantními koeficienty a_{ij} a také autonomní soustavy, pokud a_{ij} ani b_i nezávisí na n .

Pokud platí $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, pak hovoříme o homogenní soustavě rovnic.

Řešením soustavy nazveme každou reálnou vektorovou funkci $\mathbf{x} = (x_k, y_k)$, definovanou na množině \mathbb{Z}_c , která splňuje soustavu (3). Soustava (3) má však obecně nekonečně mnoho řešení. Abychom mohli určit řešení jednoznačně, musíme zadat počáteční podmínky, nejčastěji stav v nějakém počátečním čase $n = n_0$. Označme $\mathbf{x}(n_0) = \mathbf{x}_0$, kde \mathbf{x}_0 je vektor hodnot řešení \mathbf{x} v počátečním okamžiku n_0 . Pak hledáme řešení počáteční Cauchyovy úlohy, která má tvar

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}(n_0) = \mathbf{x}_0.$$

1.4 Nelineární rovnice a jejich soustavy

Nelineární rovnice je kterákoliv rovnice typu (2), kde funkce f je nelineární kombinace jejích argumentů (může obsahovat mocninné a exponenciální funkce, jejich inverze atd.). Autonomní nelineární rovnice prvního řádu pak má tvar

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

kde f je nelineární funkce.

Soustava dvou nelineárních rovnic 1. řádu obecně vypadá takto:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\y_{n+1} &= g(x_n, y_n),\end{aligned}\tag{4}$$

kde f, g jsou nelineární funkce a x, y závislé proměnné.

1.5 Stabilita

U diferenčních rovnic i jejich soustav, které mají alespoň jedno ekvilibrium, zkoumáme stabilitu tohoto ekvilibria. Stabilita ekvilibria obecně znamená, zda malá odchylka v počátečních podmínkách způsobí výrazné odchýlení řešení od ekvilibria (tedy zda se porucha v podmínkách bude řešením dále šířit).

Definice 1.3. Uvažujme obecnou soustavu rovnic $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$. Ekvilibrium \mathbf{x}^* této soustavy je:

1. Stabilní, pokud pro všechna $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ a index n_0 tak, že platí $\|f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}^*)\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon$ pro všechna $n > n_0$.
2. Asymptoticky stabilní, pokud je stabilní, a navíc platí $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}^*\| = 0$.
3. Nestabilní, jestliže není stabilní.

Věta 1.4. Nechť x^* je ekvilibrium obecné autonomní rovnice 1. řádu $x_{n+1} = f(x_n)$, kde f je spojitě diferencovatelná v x^* . A jestliže

1. $|f'(x^*)| < 1$, pak ekvilibrium x^* je asymptoticky stabilní.
2. $|f'(x^*)| > 1$, pak ekvilibrium x^* je nestabilní.

Věta 1.5. Nechť \mathbf{x}^* je ekvilibrium autonomní homogenní soustavy rovnic 1. řádu $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}_n \mathbf{x}_n$. Pak je \mathbf{x}^* :

1. Stabilní, jestliže platí $\rho(\mathbf{A}) \leq 1$, kde $\rho(\mathbf{A}) = \max |\lambda_i(\mathbf{A})|$ je spektrální poloměr matice \mathbf{A} (λ_i jsou vlastní čísla matice \mathbf{A}), a zároveň Jordanovy bloky matice \mathbf{J} Jordanova rozkladu matice \mathbf{A} , příslušné vlastním číslům s jednotkovou normou, jsou diagonální.
2. Asymptoticky stabilní, jestliže platí $\rho(\mathbf{A}) < 1$.

Důkazy vět 1.4 a 1.5 jsou uvedeny v [3] v kapitole 1.5, respektive v kapitole 4.3.2.

Pro analýzu stability nelineárních soustav rovnic používáme linearizaci pomocí Taylova polynomu, jak je uvedeno v [2], kap. 2.7. V témž zdroji je uvedeno a odvozeno také tvrzení uvádějící podmínku asymptotické stability pro rovnici druhého řádu (kap. 2.8, rovnice (32)):

$$2 > 1 + c > |b|,$$

kde b, c jsou koeficienty charakteristického polynomu matice \mathbf{A} .

Pro nelineární soustavy obecně platí následující věta:

Věta 1.6. Nechť \mathbf{x}^* je ekvilibrium nelineární soustavy rovnic (4) a matice vzniklá linearizací této soustavy má spektrální poloměr $\rho(\mathbf{A})$. Pak pokud

1. $\rho(\mathbf{A}) < 1$, ekvilibrium \mathbf{x}^* je asymptoticky stabilní.
2. $\rho(\mathbf{A}) > 1$ a vektor pravé strany \mathbf{b} je nulový pro $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$, ekvilibrium \mathbf{x}^* je nestabilní.
3. $\rho(\mathbf{A}) = 1$, ekvilibrium \mathbf{x}^* může být stabilní nebo nestabilní.

Důkaz věty lze nalézt v [3], jako důkazy důsledku 4.34 a věty 4.38.

1.6 Aplikace diferenčních rovnic na epidemiologické modely

Diferenční rovnice a jejich soustavy se významně uplatňují při modelování biologických problémů, situací a vztahů. V následujících kapitolách se budeme zabývat výlučně epidemiologickými modely, tedy modely zkoumajícími určitou populaci, ve které se šíří daná nemoc s předem danými parametry chování.

Pro tyto modely budeme využívat nelineární autonomní diferenční rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty. V následující kapitole si uvedeme přehled základních modelů, jak vypadají a některé jejich základní vlastnosti. V další části se pak budeme zabývat podrobně jedním konkrétním modelem.

Ve všech modelech se omezíme pouze na obor reálných čísel \mathbb{R} , modely s komplexními čísly se nebudeme vůbec zabývat.

2 Přehled epidemiologických modelů

V této kapitole si uvedeme základní přehled diskrétních epidemiologických modelů, uvedeme si jejich možné modifikace a také si uvedeme a dokážeme několik tvrzení o parametrech modelů.

Všechny uvedené modely pracují s předpokladem, že pravděpodobnost kontaktu a přenosu nákazy mezi každými dvěma jedinci je stejná, nemoc nemá latentní období (jedinec začne být infekční v okamžiku nákazy) a že počet jedinců N v populaci je konstantní. Konstantnost N lze u každého modelu ověřit sečtením příslušných rovnic, ve všech případech po následné úpravě dostaneme $N_{n+1} = N_n$, kde n vyjadřuje stav v čase $n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$, Δt je doba mezi jednotlivými stavy. Pro ilustraci je u prvního modelu ověření konstantnosti provedeno.

Modely pracují s několika skupinami jedinců. Tyto skupiny jsou vzájemně disjunktní a součet jedinců ve všech skupinách je celé N , tedy každý jedinec patří právě do jedné z těchto skupin. Jsou to skupiny S, I a R.

Skupina S (z anglického *susceptibles*) jsou jedinci náchylní k onemocnění. Ve skupině I (z angl. *infected*) jsou jedinci nakažení, a tedy schopní nemoc přenášet. Jedinci ve skupině R (z angl. *recovered* či *resistant*) již mají proti nemoci imunitu. Nemusí nutně platit že všichni jedinci ze skupiny R nemocí prošli, již na počátku může být počet jedinců v R nenulový, tedy předem uvažujeme v populaci imunní jedince.

V modelech použijeme také koeficienty α , β , γ a δ , které budeme považovat za konstantní. Tyto koeficienty jsou vždy nezáporné.

- Koeficient α je průměrný počet zdravých jedinců, se kterými měl nakažený dostatečně dlouhý sociální kontakt na přenesení infekce během časového kroku Δt . V modelech ovlivňuje, jaká část skupiny S se přesune do skupiny I.
- Koeficientem β budeme označovat porodnost a úmrtnost (poměr narozených, respektive zemřelých na celkový počet jedinců N). Přestože jsou to v populaci dva různé jevy, hodnoty těchto koeficientů budeme pokládat za shodné, abychom zachovali konstantní celkový počet jedinců, a proto je označíme stejným písmenem. V modelech β určuje, jaká část skupin I, R opustí tyto skupiny (zemře) a zároveň kolik jedinců přibude do skupiny S (narodí se, předpokládáme, že se jedinci rodí bez imunity vůči nemoci).
- Koeficient γ je míra uzdravení neboli pravděpodobnost, že nakažený jedinec se uzdraví během času Δt a přejde buď do skupiny R nebo S (podle typu modelu).
- Koeficient δ je míra ztráty imunity vůči infekci čili pravděpodobnost, že jedinec s imunitou ji během času Δt ztratí a přesune se ze skupiny R zpět do skupiny S.

Díky povaze koeficientů β (poměr zemřelých ku celku) a γ , δ (pravděpodobnosti vyléčení a ztráty imunity), tyto koeficienty mohou nabývat hodnot pouze mezi nulou a jedničkou:

$$0 \leq \beta \leq 1, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad 0 \leq \delta \leq 1.$$

Nechť S_0 je počet zdravých jedinců, I_0 počet nakažených jedinců a R_0 počet imunních jedinců v čase $t = 0$, S_n , I_n a R_n jsou počty jedinců ve skupinách S, I, R v čase $t = n\Delta t$.

V modelech však budeme tyto počty uvažovat i neceločíselné, nebudeme zaokrouhlovat hodnoty na celá čísla. Všechny modely pak uvažují jen taková řešení soustav, která mají smysl. Termínem *řešení má smysl* rozumíme taková řešení, která jsou reálně interpretovatelná, tedy počet jedinců v žádné skupině nepřesáhne celkový počet jedinců ve zkoumané skupině. Jinak řečeno v každém čase $n\Delta t$, včetně $t = 0$, musí platit

$$\begin{aligned} 0 \leq S_n, \quad 0 \leq I_n, \quad 0 \leq R_n, \\ S_n + I_n + R_n = N. \end{aligned} \tag{5}$$

Z uvedeného také okamžitě plyne, že počet jedinců v každé skupině je menší nebo roven N .

2.1 Modely s neměnicí se populací

Tyto modely uvažují konstantní počet jedinců v populaci, kde se nikdo nerodí a zároveň ani nikdo neumírá. Budeme používat pouze koeficienty α a γ . Podrobnější informace o těchto modelech lze nalézt v [1, 9].

2.1.1 SI model

SI model je ten nejjednodušší model, ve kterém uvažujeme pouze jedince náchylné k onemocnění S a již nakažené, infekční jedince I . Jedinci se z nemoci nemohou vyléčit ani získat imunitu. Výpočet S , I v následujícím kroku z hodnot předešlých má tento tvar:

$$S_{n+1} = S_n \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{N} I_n \right), \tag{6}$$

$$I_{n+1} = I_n \left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{N} S_n \right). \tag{7}$$

Číslo N je celkový počet jedinců v populaci, který, jak už bylo řečeno, se nemění v čase, tedy $S_n + I_n = N$, pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Pravdivost výroku je vidět z rovnic (6), (7), kdy při jejich prostém sečtení (6) + (7) dostáváme

$$\begin{aligned} S_{n+1} + I_{n+1} &= S_n - \frac{S_n\alpha\Delta t I_n}{N} + I_n + \frac{I_n\alpha\Delta t S_n}{N}, \\ S_{n+1} + I_{n+1} &= S_n + I_n. \end{aligned}$$

Tedy $N = S + I$ je konstantní v jakémkoli čase t .

Tvrzení 2.1. Nutná a postačující podmínka, aby řešení rovnic (6) a (7) mělo smysl pro přípustné hodnoty S_n , I_n podle (5), je

$$\Delta t \leq \frac{1}{\alpha},$$

tedy časový krok Δt musí být menší než průměrný čas nutný k přenosu nemoci na jednoho jedince. Tvrzení je uvedeno v [1] bez důkazu, zde uvádíme i důkaz.

Důkaz. Vyjdeme z rovnice (7), a z podmínky pro I z (5). Dostáváme výraz

$$I_n \left(1 + \frac{\alpha \Delta t}{N} S_n \right) \leq N.$$

Ten dále s pomocí vlastnosti $S_n = N - I_n$ upravíme do tohoto tvaru:

$$I_n \left(1 + \frac{\alpha \Delta t}{N} (N - I_n) \right) \leq N.$$

Po podělení nerovnice N a roznásobením vnitřní závorky $\frac{1}{N}$ dostaneme

$$\frac{I_n}{N} \left(1 + \alpha \Delta t \left(1 - \frac{I_n}{N} \right) \right) \leq 1.$$

Po roznásobením vnější závorky nyní dostáváme

$$\frac{I_n}{N} + \frac{I_n \alpha \Delta t}{N} \left(1 - \frac{I_n}{N} \right) \leq 1.$$

Nyní odečteme $\frac{I_n}{N}$ a podělíme výrazem v závorce (za předpokladu $I_n \neq N$) a zlomkem $\frac{I_n}{N}$:

$$\alpha \Delta t < \frac{1 - \frac{I_n}{N}}{\frac{I_n}{N} \left(1 - \frac{I_n}{N} \right)}.$$

Výraz v závorce můžeme zkrátit a po odstranění složeného zlomku nám vyjde tato nerovnice:

$$\alpha \Delta t < \frac{N}{I_n}.$$

Navíc, pro $I_n = N$ platí rovnost. Toto musí platit pro všechna I_n . Jelikož $I_n \in \langle 0, N \rangle$, pak $\alpha \Delta t \leq 1$. \square

2.1.2 SIR model

Tento model oproti SI modelu uvažuje kromě skupin S a I navíc skupinu jedinců R, ve které jsou jedinci imunní vůči nákaze, ať už vlivem prodělání nemoci či vlivem přirozené imunity, kterou do modelu můžeme vložit pomocí počáteční podmínky $R_0 > 0$. Soustava diferenčních rovnic pak má tento tvar:

$$S_{n+1} = S_n \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{N} I_n \right), \quad (8)$$

$$I_{n+1} = I_n \left(1 - \gamma \Delta t + \frac{\alpha \Delta t}{N} S_n \right), \quad (9)$$

$$R_{n+1} = R_n + \gamma \Delta t I_n. \quad (10)$$

Tvrzení 2.2. Nutná a postačující podmínka, aby řešení rovnic (8), (9), (10) mělo smysl, je

$$\Delta t \leq \min \left\{ \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\alpha} \right\}, \quad (11)$$

tedy že časový krok musí být menší než průměrný čas potřebný pro přenos nemoci mezi jedinci i menší než průměrná doba infekce, jak je uvedeno v [1].

Důkaz. Nejdříve zdůrazněme, že dokazovaná vlastnost je ekvivalentní s vlastností $\max\{\alpha\Delta t, \gamma\Delta t\} \leq 1$.

Začneme s výrazem $\gamma\Delta t \leq 1$. Tato podmínka je zřejmá z rovnice (10), jelikož člen $\gamma\Delta t I_n$ v této rovnici vyjadřuje počet jedinců ze skupiny I_n , který je v kroku $n+1$ přesunut do R . Tento počet ale nemůže být vyšší než celkový počet jedinců I_n . Vyjádřeno matematicky:

$$\begin{aligned}\gamma\Delta t I_n &\leq I_n, \\ \gamma\Delta t &\leq 1.\end{aligned}$$

V druhé části důkazu ukážeme, že je nutná také podmínka $\alpha\Delta t \leq 1$. Z podmínek (5) a rovnice (8) plyne

$$S_n \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{N} I_n\right) \geq 0.$$

Za předpokladu $S_n \neq 0$ tím můžeme vydělit a dostaneme

$$1 - \frac{\alpha\Delta t}{N} I_n > 0.$$

Po převedení zlomku na druhou stranu nerovnice a vynásobením $\frac{I}{N}$ máme

$$\frac{N}{I_n} > \alpha\Delta t.$$

Navíc pro $I_n = N$ (a tedy $S_n = 0$) platí rovnost. Tedy, pokud by neplatilo $\alpha\Delta t \leq 1$, pak pro nějaké $I \in \langle 0, N \rangle$ by neplatila ani nerovnice $\frac{N}{I_n} > \alpha\Delta t$.

Dohromady tedy víme, že platí $\alpha\Delta t \leq 1$ i $\gamma\Delta t \leq 1$, a ekvivalence těchto dvou vlastností s původním výrazem $\max\{\alpha\Delta t, \gamma\Delta t\} \leq 1$ je již zřejmá. \square

2.1.3 SIS model

V tomto modelu jedinci nemají permanentní imunitu proti nemoci, proto zde neexistuje skupina R , ale vyléčení se přesouvají zpět do skupiny S . Stávají se z nich tedy zdraví jedinci, kteří mohou opět onemocnět. Diferenční rovnice pro SIS model pak vypadají takto:

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= S_n \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{N} I_n\right) + \gamma\Delta t I_n, \\ I_{n+1} &= I_n \left(1 - \gamma\Delta t + \frac{\alpha\Delta t}{N} S_n\right).\end{aligned}$$

Tvrzení 2.3. Pro požadované podmínky (5) řešení mají smysl pouze pokud jsou splněny nerovnosti:

$$\gamma\Delta t \leq 1 \quad \text{a zároveň} \quad \alpha\Delta t < \left(1 + \sqrt{\gamma\Delta t}\right)^2.$$

Důkaz tohoto tvrzení je uveden v práci [1], označen je jako Lemma 2.

Pokud bychom v tomto modelu položili $\gamma = 0$, odstraníme možnost se z nemoci uzdravit a model přejde do tvaru uvedeného v kapitole 2.1.1, tedy na SI model.

2.2 Modely s měnící se populací

Tyto modely také předpokládají konstantní počet jedinců v populaci, ale uvažují i narození a smrt jedinců. Aby byl zaručen nemění se počet jedinců, položíme hodnotu koeficientu porodnosti rovnu hodnotě koeficientu úmrtnosti a oba koeficienty tedy můžeme označit stejným písmenem β . Jak již víme, hodnota je omezena nerovnostmi $0 \leq \beta \leq 1$.

Problematiku těchto modelů hlouběji rozebírá práce [9], která navíc uvažuje exponenciální tvar soustav diferenčních rovnic.

2.2.1 SI a SIS model

Oba tyto modely lze vyjádřit jednou soustavou diferenčních rovnic:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{N} I_n \right) + (\gamma + \beta) \Delta t I_n, \\ I_{n+1} &= I_n \left(1 - (\gamma + \beta) \Delta t + \frac{\alpha \Delta t}{N} S_n \right). \end{aligned}$$

Pokud položíme $\gamma = 0$, dostaneme SI model, pro $\gamma > 0$ jde o SIS model. Pokud položíme $\beta = 0$, dostaneme SI, popř. SIS model bez změn populace uvedený v podkapitole 2.1.

Tvrzení 2.4. Pro podmínky (5) řešení mají smysl pouze pokud jsou splněny nerovnosti:

$$(\gamma + \beta) \Delta t \leq 1 \quad \text{a zároveň} \quad \alpha \Delta t < \left(1 + \sqrt{(\gamma + \beta) \Delta t} \right)^2.$$

Důkaz. Matematicky je model shodný s modelem SIS v kapitole 2.1.3, pouze koeficient γ je nahrazen součtem $\gamma + \beta$, proto i tvrzení je upravené pouze s touto substitucí a jeho důkaz bude rovněž analogicky stejný. \square

2.2.2 SIR a SIRS model

Oproti předchozímu SIR modelu, zde zahrnujeme změny populace, tj. $\beta > 0$. Pro přechod mezi SIR a SIRS modelem přidáváme také koeficient δ . Již je nám známo, že platí $0 \leq \delta \leq 1$.

Pro SIR model pokládáme $\delta = 0$, pro SIRS $\delta > 0$. V SIRS modelu tedy jedinci s imunitou, kteří nemoc již prodělali, mohou svou imunitu ztratit a přesunout se zpět do skupiny S. Diferenční rovnice pak vypadají takto:

$$S_{n+1} = S_n \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{N} I_n \right) + \beta \Delta t I_n + R_n (\delta + \beta) \Delta t, \quad (12)$$

$$I_{n+1} = I_n \left(1 - (\gamma + \beta) \Delta t + \frac{\alpha \Delta t}{N} S_n \right), \quad (13)$$

$$R_{n+1} = R_n (1 - (\delta + \beta) \Delta t) + \gamma \Delta t I_n. \quad (14)$$

Pokud v tomto modelu položíme $\beta = 0$ i $\delta = 0$, dostaneme SIR model z podkapitoly 2.1.2.

Tvrzení 2.5. Pro podmínky (5) řešení mají smysl pouze pokud jsou splněny zároveň všechny tyto nerovnosti:

$$\begin{aligned}(\delta + \beta) \Delta t &\leq 1, \\(\gamma + \beta) \Delta t &\leq 1, \\ \alpha \Delta t &\leq \beta \Delta t + 1 + 2\sqrt{\beta \Delta t}.\end{aligned}$$

Důkaz. Pro nalezení podmínek interpretovatelnosti pro tento model budeme muset ověřit, pro jaké hodnoty parametrů jsou splněny požadavky (5). Znamená to zjistit podmínky kladené na zadávané parametry, aby hodnoty S , I , R byly vždy větší než 0.

Nejprve vyjdeme z rovnice (14) pro R a s použitím podmínek (5) dostaneme nerovnici

$$R_n (1 - (\delta + \beta) \Delta t) + \gamma \Delta t I_n \geq 0.$$

Tato nerovnice musí platit pro každé $I_n \in \langle 0, N \rangle$, $R_n \in \langle 0, N \rangle$. Když položíme $I_n = 0$ a $R_n > 0$, můžeme vydělit R_n a nerovnice se zjednoduší:

$$1 - (\delta + \beta) \Delta t \geq 0.$$

Odsud je okamžitě vidět omezení pro koeficienty δ , β :

$$(\delta + \beta) \Delta t \leq 1.$$

Je snadné ukázat, že pro $R_n = 0$ je nerovnice splněna vždy a pro $I_n > 0$ a $R_n > 0$ již nedostaneme žádnou silnější podmínku než je tato uvedená.

Dále použijeme rovnici (13). Opět s použitím podmínek (5) dostaneme nerovnici

$$I_n \left(1 - (\gamma + \beta) \Delta t + \frac{\alpha \Delta t}{N} S_n \right) \geq 0.$$

Tato nerovnice musí platit pro každé $I_n \in \langle 0, N \rangle$, $S_n \in \langle 0, N \rangle$. Když položíme $I_n > 0$ a $S_n = 0$, můžeme vydělit I_n a nerovnice se zjednoduší:

$$1 - (\gamma + \beta) \Delta t \geq 0.$$

Odsud je okamžitě vidět omezení pro koeficienty γ , β :

$$(\gamma + \beta) \Delta t \leq 1.$$

Je opět snadné ukázat, že pro $I_n = 0$ je nerovnice splněna vždy a pro $I_n > 0$ a $S_n > 0$ již nedostaneme žádnou silnější podmínku než je tato uvedená.

Nakonec použijeme rovnici (12). Opět vycházíme z příslušné nerovnice

$$S_n \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{N} I_n \right) + \beta \Delta t I_n + R_n (\delta + \beta) \Delta t \geq 0.$$

Nyní použijeme rovnici $R_n = N - S_n - I_n$, nahradíme R_n a na levou stranu nerovnice se podíváme jako na funkci dvou proměnných S , I . Abychom mohli určit podmínku pro parametry, potřebujeme nejdřív najít globální minimum této funkce na naší

uvažované oblasti (označme Ω), která je určena podmínkami (5), tedy $\Omega = \{(S, I) \in \langle 0, N \rangle \times \langle 0, N \rangle ; S + I \leq N\}$. Máme tedy funkci

$$f(S, I) = S \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{N} I \right) + \beta \Delta t I + (N - S - I) (\delta + \beta) \Delta t.$$

Abychom určili, zda se na naší oblasti nachází lokální minimum, spočteme nejprve, zda má funkce f nějaké stacionární body a jestli tyto body leží uvnitř naší oblasti. To určíme tak, že funkci zderivujeme podle jedné proměnné a položíme derivaci rovnu nule, a pak totéž provedeme pro derivaci podle druhé proměnné. Začneme s derivací podle I :

$$f'_I = -S \frac{\alpha \Delta t}{N} + \beta \Delta t - (\delta + \beta) \Delta t = 0.$$

Z této rovnice nám vyplyne S -ová souřadnice stacionárního bodu $S_{st} = -\frac{\delta N}{\alpha}$. Koeficienty jsme zavedli nezáporné, proto vidíme že stacionární bod neleží v oblasti Ω a proto v Ω neleží ani žádný lokální extrém funkce f . Vyšetříme tedy funkční hodnoty na hranici oblasti Ω , abychom určili na Ω globální minimum.

Oblast Ω je rovinný trojúhelník, budeme tedy postupně zkoumat jeho tři strany. Začneme svislou odvěsnou, na které leží body se souřadnicemi $[0, I]$. Funkce f pro tyto body vypadá následovně:

$$f(0, I) = \beta \Delta t I + N (\delta + \beta) \Delta t - I (\delta + \beta) \Delta t.$$

Víme, že hledáme ohrazení pro parametry tak, aby platilo $f \geq 0$. Po úpravě výrazu dostaneme

$$f(0, I) = N \beta \Delta t + (N - I) \delta \Delta t \geq 0.$$

Vidíme, že oba sčítance jsou vždy nezáporné, proto je nerovnice vždy splněna a tato hranice nepřinesla žádné omezení.

Prověříme tedy druhou odvěsnu trojúhelníku Ω , na které leží body se souřadnicemi $[S, 0]$. Funkce f pro tyto body vypadá následovně:

$$\begin{aligned} f(S, 0) &= S + N (\delta + \beta) \Delta t - S (\delta + \beta) \Delta t \\ &= S + (N - S) (\delta + \beta) \Delta t \geq 0. \end{aligned}$$

Vidíme, že jsme opět dostali součet dvou vždy nezáporných čísel, což nám opět nepřinese žádné nové omezení pro parametry.

Zbývá nám přepona trojúhelníku Ω , na které leží body se souřadnicemi $[S, N - S]$. Funkce f pak vypadá takto:

$$\begin{aligned} f(S, N - S) &= S - S (N - S) \frac{\alpha \Delta t}{N} + \beta \Delta t (N - S) + \\ &\quad + (N - S - (N - S)) (\delta + \beta) \Delta t. \end{aligned}$$

Po úpravě funkčního výrazu dostáváme

$$g(S) = S \left(1 + \alpha \Delta t \left(\frac{S}{N} - 1 \right) \right) + (N - S) \beta \Delta t,$$

kde jsme označili funkci $g(S) = f(S, N - S)$. Nyní chceme vyšetřit extrémy této funkce. To provedeme derivací podle S , kterou položíme rovnu nule. Dostáváme

$$g' = 1 + \frac{2S\alpha\Delta t}{N} - \alpha\Delta t - \beta\Delta t = 0.$$

Z toho vyjádříme souřadnici stacionárního bodu S_m :

$$S_m = \frac{(\alpha\Delta t + \beta\Delta t - 1) N}{2\alpha\Delta t}. \quad (15)$$

Jelikož druhá derivace g'' je kladná, jde o lokální minimum. Výraz (15) dosadíme zpět do původní funkce g a určíme podmínku, pro jaké hodnoty parametrů je $g(S_m)$ nezáporné. Po dosazení, roznásobení všech závorek a úpravách výrazu dostáváme nerovnici

$$g(S_m) = \left(-(\alpha\Delta t + \beta\Delta t - 1)^2 + 4\alpha\beta(\Delta t)^2 \right) N \geq 0.$$

Vidíme, že můžeme vydělit N . Ve zbylém výrazu roznásobíme mocninu a vypadne nám tato nerovnice:

$$(\alpha\Delta t)^2 + (\beta\Delta t)^2 - 2\alpha\beta(\Delta t)^2 - 2\alpha\Delta t - 2\beta\Delta t + 1 \leq 0.$$

Aby nejvyšší mocniny byly kladné, bylo otočeno znaménko nerovnosti. Tento výraz pak dále upravíme na konečný tvar:

$$\left(\alpha\Delta t - \left(\beta\Delta t + 1 + 2\sqrt{\beta\Delta t} \right) \right) \cdot \left(\alpha\Delta t - \left(\beta\Delta t + 1 - 2\sqrt{\beta\Delta t} \right) \right) \leq 0.$$

Je jasné vidět, že tato nerovnice platí, pokud

$$\left(\beta\Delta t + 1 - 2\sqrt{\beta\Delta t} \right) \leq \alpha\Delta t \leq \left(\beta\Delta t + 1 + 2\sqrt{\beta\Delta t} \right). \quad (16)$$

Nyní se podívejme, jak se bude chovat funkce g pro $S_m \in \langle 0, N \rangle$ a $S_m \notin \langle 0, N \rangle$.

Všimněme si, že pokud S_m je mimo tento interval $\langle 0, N \rangle$, tak funkce g je vždy kladná a nerovnice pro g je splněna vždy, jelikož jde o lokální minimum, a v koncových bodech intervalu $\langle 0, N \rangle$ již máme ověřeno, že funkce kladná je. Tento případ nastane buď pro $(\alpha\Delta t + \beta\Delta t - 1) < 0$, z čehož nám hned plyne jedno omezení hodnot parametrů

$$(\alpha + \beta) \Delta t < 1,$$

nebo pro $(\alpha\Delta t + \beta\Delta t - 1) > 2\alpha\Delta t$. Tato varianta ale nemůže nastat, protože by muselo platit $\beta\Delta t > \alpha\Delta t + 1$, a my víme že $\beta\Delta t \in \langle 0, 1 \rangle$ a α i Δt jsou nezáporné.

Pokud ale S_m je uvnitř intervalu $\langle 0, N \rangle$, tak $(\alpha\Delta t + \beta\Delta t - 1) \geq 0$, z čehož plyne $\alpha\Delta t \geq 1 - \beta\Delta t \geq \beta\Delta t + 1 - 2\sqrt{\beta\Delta t}$. První nerovnice z (16) je tedy splněna vždy pro tento případ.

Dohromady tedy dostáváme poslední podmínku pro parametry α a β , která má tvar

$$(\alpha + \beta) \Delta t \geq 1 \quad \wedge \quad \alpha\Delta t \leq \left(\beta\Delta t + 1 + 2\sqrt{\beta\Delta t} \right).$$

Když spojíme tyto dvě části podmínky pro α a β , dostaneme podmínku

$$\left[(\alpha + \beta) \Delta t \geq 1 \wedge \alpha \Delta t \leq \left(\beta \Delta t + 1 + 2\sqrt{\beta \Delta t} \right) \right] \vee [(\alpha + \beta) \Delta t < 1].$$

Výraz $\alpha \Delta t \leq \left(\beta \Delta t + 1 + 2\sqrt{\beta \Delta t} \right)$ platí však vždy pro $(\alpha + \beta) \Delta t < 1$, proto nemusíme podmínku rozdělovat na dva případy podle hodnoty součtu $\alpha + \beta$, a stačí ověřit pouze tuto podmínku, která je poslední částí dokazovaného tvrzení:

$$\alpha \Delta t \leq \left(\beta \Delta t + 1 + 2\sqrt{\beta \Delta t} \right).$$

□

Poznámka 2.6. Všimněme si, že poslední podmínka z předcházejícího tvrzení je ekvivalentní podmínce v tvrzení 2.3, jen γ je nahrazena koeficientem β . To vychází z tvaru jednotlivých modelů, jelikož je vidět, že rovnice pro S je v SIRS modelu s β stejná jako v SIS bez β , až na to, že v SIRS se navíc připočítává člen s R_n , a právě koeficient γ je nahrazen koeficientem β . Při následném dokazování vlastnosti tento člen s R_n vypadne (vynuluje se) ve výpočtu funkce f na přeponě trojúhelníku Ω , a proto má výsledná podmínka stejný tvar, jen s jiným koeficientem.

2.3 Další modely

Existují i další epidemiologické modely a další modifikace uvedených modelů, jako je například uvažování nekonstantních koeficientů α , β , γ , δ nebo vynechání předpokladu $N = konst.$, tedy $N = N(n)$. Existují modely uvažující vakcinaci jedinců v pozorované skupině (SIV) nebo zahrnující latentní období nemoci (SEIS). Samostatnou kapitolou jsou pak uvedené modely vyjádřené pomocí exponenciálních funkcí namísto lineárních a kvadratických závislostí. Více se těmito modely zabývají [4, 7, 9].

3 Analýza SIR modelu

Jedním z cílů práce je analyzovat vybraný model. Budeme analyzovat model z kapitoly 2.1.2, tedy základní SIR model, bez změn v populaci a bez vakcinace.

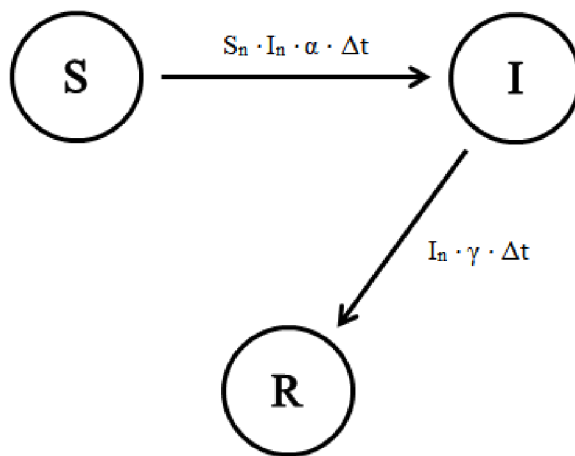
Na začátek si připomeňme, jak jsme jej zavedli dříve. Model uvažuje populaci o N jedincích, které rozděluje do tří skupin, S, I, R. Změny počtu jedinců v jednotlivých skupinách vyjadřují rovnice

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{N} I_n \right), \\ I_{n+1} &= I_n \left(1 - \gamma \Delta t + \frac{\alpha \Delta t}{N} S_n \right), \\ R_{n+1} &= R_n + \gamma \Delta t I_n. \end{aligned} \tag{17}$$

Pro model zavádíme také následující omezení, abychom mohli výsledky aplikovat na reálnou populaci:

$$\begin{aligned} 0 \leq S_n, \quad 0 \leq I_n, \quad 0 \leq R_n, \\ S_n + I_n + R_n = N. \end{aligned} \tag{18}$$

Pro názornější ukázkou toho, jak se jedinci přesouvají mezi skupinami, poslouží následující obrázek:



Obrázek 1: Znázornění přesunů v SIR modelu

V této kapitole bylo čerpáno z prací [1, 9], které se SIR modelem zabývají podrobněji. Obecně stabilitě rovnic se více věnuje [2, 3].

3.1 Obecné vlastnosti modelu

Nejprve se zaměříme obecně na model a jeho vlastnosti.

- Když si model prohlédneme pozorně, zjistíme, že počet jedinců ve skupině S je vždy nerostoucí a v případě $I_n \neq 0$ je klesající. Naopak počet ve skupině R je vždy neklesající a pro $I_n \neq 0$ je rostoucí.
- Jak už víme z kapitoly 2.1.2 a tvrzení 2.2, aby tento model splňoval námi požadované vlastnosti (18), je nutné při volbě koeficientů a časového kroku dodržet nerovnosti $\alpha\Delta t \leq 1$, $\gamma\Delta t \leq 1$. Pokud je nedodržíme, nebudeme moci výsledky aplikovat na skutečnou populaci. Graficky si to ukážeme v kapitole 4.2 (viz obrázek č. 3).
- Model tak, jak jsme ho zavedli, obsahuje jednu zvláštnost, a to že pracuje s neceločíselnými hodnotami. Pro dostatečně velké N je tato skutečnost zanedbatelná a pro interpretaci vždy můžeme hodnoty konkrétní iterace zaokrouhlit na celá čísla, ačkoliv model pak bude dál pokračovat s původními hodnotami. Díky tomu platí následující tvrzení.

Tvrzení 3.1. Za předpokladu $S_0 \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$S_n \neq 0. \tag{19}$$

Důkaz. Chceme ukázat, že $S_n \neq 0 \Rightarrow S_{n+1} \neq 0$. Pokusíme se to ukázat sporem, předpokládejme tedy nějaké n , pro které platí

$$S_n \neq 0 \quad \wedge \quad S_{n+1} = 0.$$

Pak vyjdeme z rovnice pro S_{n+1} :

$$S_{n+1} = S_n \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{N} I_n \right).$$

Po dosazení $S_{n+1} = 0$ a podělením S_n , dostaneme

$$\frac{\alpha\Delta t}{N} I_n = 1.$$

Víme, že platí $I_n \leq N$ a $\alpha\Delta t \leq 1$. Z toho plyne, že rovnice je splněna pouze pro $I_n = N$ a $\alpha\Delta t = 1$, což je ale spor s naším předpokladem $S_n \neq 0$, jelikož z (18) víme, že $S_n + I_n \leq N$.

Z toho plyne že nenajdeme takové n a platí implikace

$$S_n \neq 0 \Rightarrow S_{n+1} \neq 0.$$

□

Obdobnou konstrukcí lze také ukázat, že pro všechna n (za předpokladu $I_0 \neq 0$) platí

$$I_n \neq 0. \quad (20)$$

- Důkaz, že i po skončení epidemie nějaká část populace zůstane ve skupině S, tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_\infty > 0$, lze nalézt v [1], Lemma 1.
- Další důležitou vlastností modelu je jeho reprodukční číslo, okamžité a základní. To si rozebereme důkladněji v podkapitole 3.1.1.
- Neméně důležitou charakteristikou kteréhokoliv systému diferenčních rovnic je jeho (případné) ekvilibrium. Tím se budeme zabývat v podkapitole 3.1.2, kde ukážeme, že tento model má nekonečně mnoho ekvilibrií a že tento model nemůže dosáhnout ekvilibria v konečném čase, pokud již počáteční podmínky nebyly ekvilibriem.

3.1.1 Reprodukční číslo

Reprodukční číslo charakterizuje chování epidemie (modelu) v příští iteraci. Reprodukční číslo \mathcal{R} odvodíme z rovnice pro I_{n+1} , ze které chceme zjistit, kdy nastane $I_{n+1} = I_n$:

$$I_{n+1} = I_n \left(1 - \gamma \Delta t + \frac{\alpha \Delta t}{N} S_n \right).$$

Dosadíme $I_{n+1} = I_n$ a vydělíme jím:

$$1 = 1 - \gamma \Delta t + \frac{\alpha \Delta t}{N} S_n.$$

Odečteme jedničky a převedeme výraz $\gamma \Delta t$ na druhou stranu:

$$\gamma \Delta t = \frac{\alpha \Delta t}{N} S_n.$$

Nakonec zkrátíme Δt a podělíme γ :

$$1 = \frac{S_n \alpha}{N \gamma}.$$

Výraz na pravé straně nazveme obecným reprodukčním číslem \mathcal{R} . Vztah, který jsme pro něj odvodili, pak vypadá takto:

$$\mathcal{R} = \frac{S_n \alpha}{N \gamma}.$$

Z odvození je pak hned patrné, proč nás u reprodukčního čísla zajímá zejména jeho porovnání s hodnotou 1. Pokud je reprodukční číslo větší než 1, pak epidemie bude silít a počet jedinců ve skupině I bude růst ($I_{n+1} > I_n$). Pokud bude naopak menší nebo rovno jedné, epidemie slábne a bude platit $I_{n+1} \leq I_n$. Čím vyšší reprodukční číslo bude, tím strmější bude nárůst epidemie a naopak.

Jelikož \mathcal{R} je funkcí pouze S_n (vše ostatní jsou konstanty), je zřejmé, že \mathcal{R} je striktně klesající pro $S_n \neq 0$, obdobně jako S . Proto je užitečné znát také reprodukční číslo

vypočtené z počátečních hodnot pro $n = 0$, které nazýváme základním reprodukčním číslem modelu, a spočteme jej pomocí vzorce

$$\mathcal{R}_0 = \frac{S_0 \alpha}{N \gamma}.$$

Základní reprodukční číslo určuje chování modelu v počátku epidemie a platí pro něj stejné vlastnosti jako pro to obecné. Pokud nebude vyšší než 1, pak epidemie nevznikne. Pokud naopak bude vyšší než jedna, tak čím větší bude, tím rychlejší nástup epidemie bude mít (za předpokladu $I_0 \neq 0$).

Číslo \mathcal{R} je klesající, a klesá tím rychleji, čím bližší je hodnotě jedna, proto vždy najdeme v modelu n takové, že $\mathcal{R} < 1$ a epidemie začne ustupovat.

Z výrazu pro \mathcal{R} lze také určit, kolik jedinců se musí v součtu nakazit, aby epidemie při daných parametrech začala ustupovat. Tento počet získáme úpravou výrazu

$$1 = \frac{S_s \alpha}{N \gamma}.$$

Pak platí

$$\frac{N \gamma}{\alpha} = S_s.$$

Hodnota S_s je počet zdravých, náchylných jedinců při reprodukčním čísle $\mathcal{R} = 1$, z toho tedy jasně určíme kumulativní součet jedinců $I_s = N - R_0 - S_s$. Musí se nakazit I_s jedinců, aby epidemie překonala svůj vrchol a utlumila se.

3.1.2 Ekvilibrium

Z definice 1.1 víme, že pro ekvilibrium platí $f(x) = x$. V našem modelu to tedy znamená

$$S_{n+1} = S_n, \quad I_{n+1} = I_n, \quad R_{n+1} = R_n.$$

Vezměme například první rovnici pro S a dosadíme z rovnosti výše:

$$S_n = S_n \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{N} I_n \right).$$

Předpokládejme, že $S_0 \neq 0$ a díky vlastnosti (19) můžeme vydělit S_n a dostaneme

$$1 = 1 - \frac{\alpha \Delta t}{N} I_n.$$

Po odečtení 1 a přenásobení -1 dostáváme

$$0 = \frac{\alpha \Delta t}{N} I_n.$$

Jelikož α , Δt i N jsou nenulové konstanty, rovnice bude platit pouze pro $I_n = 0$. Díky (20) můžeme říct, že pokud $I_n = 0$ pro nějaké n , pak zároveň toto platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To v důsledku znamená, že žádná epidemie se nekoná a jedinci jsou rozděleni do skupin R a S podle počátečních podmínek. Z toho plyne, že model má nekonečně mnoho ekvilibrií lišících se pouze počátečními podmínkami, tedy hodnotami S a R. Pro všechna ekvilibria platí $I = 0$.

3.2 Analýza stability modelu

Když se pozorněji podíváme na náš model (17), zjistíme, že je to soustava dvou diferenčních rovnic. Třetí rovnice je lineárně závislá na ostatních dvou vztahem $R = N - S - I$. Proto budeme dále v této podkapitole vynechávat třetí rovnici pro R a pracovat budeme jen s prvními dvěma rovnicemi pro S a I .

Uvedli jsme, že model má nekonečně mnoho ekvilibrií, jejichž hodnota však závisí pouze na počátečních podmínkách. Uvažujme tedy podmínky $S_0 = S^* = N$, $I_0 = I^* = 0$, $R_0 = R^* = 0$, které splňují definici ekvilibria, a ověřme jeho stabilitu.

Tuto stabilitu určíme podle chování malých odchylek od tohoto stavu. Uvažujme tedy naši soustavu rovnic

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{N} I_n \right) = f(S, I), \\ I_{n+1} &= I_n \left(1 - \gamma \Delta t + \frac{\alpha \Delta t}{N} S_n \right) = g(S, I). \end{aligned}$$

Dále vezměme $S_n = S^* + \bar{S}_n$ a $I_n = I^* + \bar{I}_n$ kde S^* , I^* symbolizuje hodnotu v ekvilibriu a \bar{S}_n , \bar{I}_n malé odchylky od tohoto stavu v n -té iteraci.

Pro tyto malé odchylky platí následující soustava rovnic (viz [2], kap. 2, (26)):

$$\begin{aligned} \bar{S}_{n+1} &= a_{11} \bar{S}_n + a_{12} \bar{I}_n, \\ \bar{I}_{n+1} &= a_{21} \bar{S}_n + a_{22} \bar{I}_n, \end{aligned} \tag{21}$$

kde

$$a_{11} = f'_S(S^*, I^*), \quad a_{12} = f'_I(S^*, I^*), \quad a_{21} = g'_S(S^*, I^*), \quad a_{22} = g'_I(S^*, I^*).$$

Výrazy f'_S , f'_I , g'_S , g'_I znamenají parciální derivace příslušné funkce podle příslušné proměnné.

Z koeficientů a_{ij} můžeme sestavit matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Uvědomme si, že uvažujeme ekvilibrum $S^* = N$, $I^* = 0$, $R^* = 0$.

Značení 3.2. Pro zjednodušení výpočtů zavedme následující značení: $\tilde{\gamma} = \gamma \Delta t$, $\tilde{\alpha} = \alpha \Delta t$.

Pak spočteme koeficienty a_{ij} pomocí parciálních derivací takto:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial}{\partial S} \left[S_n \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}}{N} I_n \right) \right] = 1 - \frac{\tilde{\alpha}}{N} I_n = 1, \\ a_{12} &= \frac{\partial}{\partial I} \left[S_n \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}}{N} I_n \right) \right] = -\frac{\tilde{\alpha}}{N} S_n = -\frac{\tilde{\alpha}}{N} N = -\tilde{\alpha}, \\ a_{21} &= \frac{\partial}{\partial S} \left[I_n \left(1 - \tilde{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}}{N} S_n \right) \right] = \frac{\tilde{\alpha}}{N} I_n = 0, \\ a_{22} &= \frac{\partial}{\partial I} \left[I_n \left(1 - \tilde{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}}{N} S_n \right) \right] = 1 - \tilde{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}}{N} S_n = 1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha}. \end{aligned}$$

Máme tedy matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\alpha} \\ 0 & 1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Pro další výpočty potřebujeme vypočítat vlastní čísla této matice, abychom mohli dále vypočítat také spektrální poloměr matice a z něj usoudit, zda je ekvilibrium asymptoticky stabilní, stabilní či nestabilní. K následným výpočtům pak budeme potřebovat také vlastní vektory příslušné spočteným vlastním číslům.

Vlastní čísla matice λ_i spočteme pomocí vzorce

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0,$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice stejného rozměru jako \mathbf{A} . Dále počítáme

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -\tilde{\alpha} \\ 0 & 1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Po spočtení tohoto determinantu a vyřešení rovnice nám vyjdou vlastní čísla matice \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, \\ \lambda_2 &= 1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha}. \end{aligned} \tag{22}$$

Vlastní vektory \mathbf{v} musí splňovat rovnici $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Pak snadno spočteme vlastní vektory příslušné spočteným vlastním číslům:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\gamma} - \tilde{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Z lineární algebry je také známo, že vlastní vektory jsou určeny jednoznačně až na násobek.

Díky větě 1.6 víme, že pro asymptotickou stabilitu ekvilibria je potřeba splnit $\rho(\mathbf{A}) < 1$. Z výsledků výpočtu (22) jasně vidíme, že jedno z vlastních čísel je rovno 1, a proto naše ekvilibrium není asymptoticky stabilní.

Ze stejné věty také víme, že pro $\rho(\mathbf{A}) > 1$ je ekvilibrium nestabilní a pro $\rho(\mathbf{A}) = 1$ o stabilitě neumíme rozhodnout. Spektrální poloměr matice \mathbf{A} bude menší nebo roven jedné pro $\tilde{\gamma} \geq \tilde{\alpha}$. Po dosazení za $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\alpha}$ tak dostaneme nutnou podmínku stability

$$\gamma \geq \alpha.$$

Jelikož podle zmíněné věty o stabilitě nemůžeme rozhodnout, pokusíme se stabilitu určit výpočtem.

3.2.1 Odvození podmínky stability

Značení 3.3. Značením S_∞ , I_∞ , \bar{S}_∞ , \bar{I}_∞ rozumějme tyto limity:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, & I_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} I_n, \\ \bar{S}_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n, & \bar{I}_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{I}_n. \end{aligned}$$

Tyto limity existují, neboť obě posloupnosti jsou ohraničené zdola i shora. Navíc víme, že S je nerostoucí a I je pro $\mathcal{R} > 1$ vždy rostoucí a pro $\mathcal{R} < 1$ vždy klesající (viz kapitola 3.1.1 o reprodukčním čísle).

Vyjdeme z definice 1.3 pro stabilitu ekvilibrí. Podle ní je ekvilibrium stabilní, pokud při předem známých parametrech α , γ , Δt jsme vždy schopní zvolit \bar{S}_0 , \bar{I}_0 tak, aby konečná odchylka $|\bar{S}_\infty|$ a $|\bar{I}_\infty|$ byla menší než dané požadované ϵ .

Pokusíme se tedy odhadnout tyto odchylky \bar{S} , \bar{I} , abychom mohli s jistotou říct, že jsou menší než nějaká námi známá hodnota. Tato hodnota by navíc měla být závislá na počátečních odchylkách \bar{S}_0 , \bar{I}_0 , abychom v souladu s definicí byli schopní ovlivnit limitní odchylky \bar{S}_∞ , \bar{I}_∞ .

Vyjdeme z původních rovnic pro S_{n+1} a I_{n+1} :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}}{N} I_n \right), \\ I_{n+1} &= I_n \left(1 - \tilde{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}}{N} S_n \right). \end{aligned}$$

Nejprve se podívejme na druhou rovnici pro I_{n+1} . Vidíme, že poslední člen závorky obsahuje podíl $\frac{S_n}{N}$, pro který platí, že je menší nebo roven 1. Odstraněním tohoto zlomku tedy celý výraz zvětšíme, a platí:

$$I_{n+1} = I_n \left(1 - \tilde{\gamma} + \frac{\tilde{\alpha}}{N} S_n \right) \leq I_n (1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha}). \quad (24)$$

Jelikož $I_{n+1} \leq I_n (1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})$ bez ohledu na volbu n , jistě můžeme také říct, že

$$I_n \leq I_{n-1} (1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha}). \quad (25)$$

Pokud však dosadíme z (25) za I_n do (24), dostaneme

$$I_{n+1} \leq I_{n-1} (1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha}) (1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha}).$$

Stejným způsobem můžeme nahradit i I_{n-1} , následně I_{n-2} a tak dále, až dostaneme odhad

$$I_{n+1} \leq I_0 (1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})^{n+1} \quad (26)$$

Nyní se podívejme na rovnici pro S_{n+1} . Stejně jako u rovnice pro I i zde se nachází zlomek $\frac{S_n}{N}$. Pomocí tohoto zlomku provedeme, obdobně jako před chvílí, odhad hodnoty

$$S_{n+1} = S_n \left(1 - \frac{\tilde{\alpha}}{N} I_n \right) \geq S_n - \tilde{\alpha} I_n.$$

Znaménko nerovnosti \geq je tam díky tomu, že v této rovnici se zanedbaný zlomek odečítá, a tedy po jeho zanedbání se bude odečítat větší číslo. Nejprve dosadíme za I_n již nám známou nerovnici (26):

$$S_{n+1} \geq S_n - \tilde{\alpha} I_0 (1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})^n.$$

Toto si můžeme dovolit, neboť víme, že dosazený výraz je větší než I_n , a tím pádem nijak neovlivní naši nerovnici. Následně můžeme prohlásit, obdobně jako u rovnice pro I , že nerovnice pro S_{n+1} jistě platí i pro S_n , a proto za něj dosadíme a dostaneme

$$S_{n+1} \geq S_{n-1} - \tilde{\alpha} I_{n-1} - \tilde{\alpha} I_0 (1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})^n.$$

Dále opět jen opakujeme postup dosazování za S a I a zjistíme, že na konci dostáváme nerovnici

$$S_{n+1} \geq S_0 - \tilde{\alpha} I_0 \sum_{k=0}^n (1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})^k. \quad (27)$$

Je lehce vidět, že řada je to geometrická, a proto je konvergentní pro $(1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha}) < 1$. Z toho nám plyne podmínka konvergence řady z nerovnice (27)

$$\tilde{\gamma} > \tilde{\alpha}. \quad (28)$$

Nyní můžeme vyjádřit součet geometrické řady pomocí vzorce:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})^k = \frac{1}{1 - (1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})} = \frac{1}{\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}}.$$

Díky tomu nerovnice (27) pro $n \rightarrow \infty$ přejde do tvaru

$$S_{\infty} \geq S_0 - I_0 \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}}.$$

Z podmínky pro konvergenci řady (28) a nerovnice (26) navíc vidíme, že platí

$$I_{\infty} = 0.$$

Nyní jen přepočteme hodnoty S a I na \bar{S} a \bar{I} pomocí našeho ekvilibria: $\bar{S}_n = S_n - N$, $\bar{I}_n = I_n - 0$. Dostáváme nerovnice

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\infty} &\geq \bar{S}_0 - \bar{I}_0 \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}}, \\ \bar{I}_{\infty} &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

čímž dostáváme přesně takový odhad, jaký jsme na začátku požadovali. Je třeba si uvědomit, že nerovnice pro S z (29) je v pořádku - pokud se vychýlíme z našeho ekvilibria, bude to vždy směrem dolů (abychom dodrželi podmínky (18)), a v takovém případě náš odhad funguje tak, jak potřebujeme. Odchylka totiž bude s rostoucím n čím dál více záporná, ale my víme, kterou hodnotou je zdola ohraničená (\bar{S}_0 je záporné a odečteme od něj kladné číslo).

Tyto odhady platí za podmínky $\tilde{\gamma} > \tilde{\alpha}$. Když dosadíme $\tilde{\gamma} = \gamma \Delta t$, $\tilde{\alpha} = \alpha \Delta t$ a pokrátíme Δt , dostaneme postačující podmínku stability ekvilibria

$$\gamma > \alpha.$$

Tato podmínka zaručuje stabilitu díky tomu, že odchylka \bar{I} se v limitě dostane na 0, což odpovídá hodnotě ekvilibria. Hodnota odchylky \bar{S} se sice nezmenší na nulu, ale jsme schopní ji zdola ohraničit předem známou hodnotou, závislou na volbě počátečních odchylek \bar{S}_0 , \bar{I}_0 . Díky tomu jsou splněny podmínky stability ekvilibria podle definice 1.3, jelikož při předem známých parametrech α , γ , Δt jsme vždy schopní zvolit \bar{S}_0 , \bar{I}_0 tak, aby konečná odchylka $|\bar{S}_{\infty}|$ byla menší než dané požadované ϵ .

3.2.2 Odhady hodnot linearizací

Odhady hodnot \bar{S}_∞ , \bar{I}_∞ se dají získat také pomocí linearizace modelu. Linearizaci jde použít vždy, pokud $|\rho(\mathbf{A})| < 1$. Pro $|\rho(\mathbf{A})| = 1$ lze linearizaci použít pouze v případě, že linearizovaný model odchylky pomocí odhadu zvětší oproti skutečnému modelu. Obecně to tak být nemusí, ale v našem modelu tomu tak je. Linearizace pomocí matice \mathbf{A} totiž zanedbává jen malé členy zmenšující výsledné výrazy. Pro porovnání spočteme odhady těchto odchylek také pomocí linearizace modelu.

K tomu budeme nejprve potřebovat určit Jordanův rozklad matice \mathbf{A} pro následující výpočet mocniny této matice.

Je známo, že pokud všechny vlastní vektory matice jsou lineárně nezávislé, pak právě tehdy je matice v Jordanově tvaru diagonální. Jak je vidět z (23), matice \mathbf{A} má dva lineárně nezávislé vlastní vektory za podmínky $\tilde{\gamma} \neq \tilde{\alpha}$.

Použijeme Jordanův rozklad

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1}. \quad (30)$$

Matice \mathbf{V} je matice, jejíž sloupce jsou vlastní vektory matice \mathbf{A} . Matice \mathbf{J} je Jordanova matice. Spočteme inverzi matice \mathbf{V} a když vše dosadíme do vzorce (30), tak dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{\alpha} \\ 0 & \tilde{\gamma} - \tilde{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\tilde{\alpha}}{\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}} \\ 0 & \frac{1}{\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\tilde{\alpha} \\ 0 & 1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

Vidíme, že po roznásobení nám vyjde původní matice \mathbf{A} a Jordanova matice je skutečně diagonální. Dále připomeňme, že pro malé odchylky od ekvilibria platí soustava (21):

$$\begin{pmatrix} \bar{S}_{n+1} \\ \bar{I}_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \bar{S}_n \\ \bar{I}_n \end{pmatrix}.$$

Jednoduše vidíme, že tento zápis je ekvivalentní následujícímu:

$$\begin{pmatrix} \bar{S}_{n+1} \\ \bar{I}_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{n+1} \begin{pmatrix} \bar{S}_0 \\ \bar{I}_0 \end{pmatrix}.$$

Rozepíšeme matici \mathbf{A} pomocí rozkladu (30):

$$\begin{pmatrix} \bar{S}_{n+1} \\ \bar{I}_{n+1} \end{pmatrix} = (\mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1})^{n+1} \begin{pmatrix} \bar{S}_0 \\ \bar{I}_0 \end{pmatrix}.$$

Jelikož $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{E}$, můžeme rovnici upravit:

$$\begin{pmatrix} \bar{S}_{n+1} \\ \bar{I}_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{V}\mathbf{J}^{n+1}\mathbf{V}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{S}_0 \\ \bar{I}_0 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení za matice \mathbf{V} , \mathbf{J} , \mathbf{V}^{-1} a roznásobení dostáváme

$$\begin{pmatrix} \bar{S}_{n+1} \\ \bar{I}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{S}_0 + \bar{I}_0 \left(\frac{-\tilde{\alpha}}{\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}} \right) \left(1 - (1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})^{n+1} \right) \\ \bar{I}_0 (1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})^{n+1} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Nyní chceme vědět, jak se budou odchylky chovat pro $n \rightarrow \infty$. Aby ekvilibrium bylo stabilní, je nutné, aby platilo

$$|\bar{S}_\infty| < \infty \quad \wedge \quad |\bar{I}_\infty| < \infty.$$

Z rovnice pro \bar{I}_{n+1} v (31) okamžitě vidíme, že pro platnost nerovnice výše pro \bar{I}_∞ je nutná podmínka $\tilde{\gamma} > \tilde{\alpha}$. Je zřejmé, že za tohoto předpokladu platí $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tilde{\gamma} + \tilde{\alpha})^{n+1} = 0$. Potom rovnice pro \bar{S}_{n+1} v (31) přejde do tvaru

$$\bar{S}_\infty = \bar{S}_0 + \bar{I}_0 \left(\frac{-\tilde{\alpha}}{\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}} \right).$$

Hodnoty \bar{S}_0 , \bar{I}_0 , $\tilde{\alpha}$ a $\tilde{\gamma}$ jsou známé konstanty, \bar{S}_∞ má tedy konečnou hodnotu, čehož jsme chtěli docílit.

Po dosazení $\tilde{\gamma} = \gamma \Delta t$, $\tilde{\alpha} = \alpha \Delta t$ a pokrácení Δt dostáváme

$$\begin{aligned} \bar{S}_\infty &= \bar{S}_0 + \bar{I}_0 \left(\frac{-\alpha}{\gamma - \alpha} \right), \\ \bar{I}_\infty &= 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Tímto výpočtem jsme ukázali, že i podle linearizovaného modelu platí, že ověřované ekvilibrium je stabilní pro hodnoty parametrů $\gamma > \alpha$. V linearizovaném případě nám vyšla rovnice, zatímco odvozením v kap. 3.2.1 nerovnice.

Hodnoty získané v rovnici (32) z linearizovaného modelu však nemůžeme prohlásit za přesné hodnoty pro \bar{S}_∞ , \bar{I}_∞ , jelikož jsme provedli zjednodušení modelu a jedná se opět jen o odhady těchto hodnot.

Je také nutné poznamenat, že pro $|\rho(\mathbf{A})| = 1$ je ne vždy možné použít linearizovaný model.

3.2.3 Příklad rovnosti koeficientů, jiná ekvilibria

Nyní zbývá pouze vyšetřit případ, kdy $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha}$. Odhad pomocí odvození z původních rovnic nám nijak nepomůže, jelikož z členu $(1 - \gamma + \alpha)$ se stane pouze 1 a tím pádem nás nikam v úvaze neposune. Linearizaci v tomto případě také není možné použít.

Výše uvedenými způsoby se nám nepodařilo nijak odhadnout hodnotu odchylek ani určit, zda ekvilibrium bude pro tyto parametry stabilní či nestabilní. Ani podle věty 1.6 není možné o stabilitě rozhodnout. Nicméně podle výsledků naprogramovaného kódu v Matlabu pro tento typ hodnot parametrů to vypadá, že konkrétně náš model by mohl být stabilní i pro $\gamma = \alpha$, pokud jsou dodrženy podmínky (18). Grafy pro rovnost koeficientů jsou ukázány dále v kapitole 4.5.

Poznámka 3.4. Pokud bychom uvažovali jiné ekvilibrium než naše zvolené $S_0 = N$, $I_0 = 0$, $R_0 = 0$, pak jen klesne počet jedinců ve skupině S a vzroste o tento počet skupina R. V takovém případě použijeme stejný výpočet a porovnání jako výše, jen upravíme počet $N_{nové} = N - R_0$ a přepočteme hodnotu $\alpha_{nové} = \alpha \frac{N - R_0}{N}$.

3.3 Porovnání se spojitým modelem

V krátkosti uvedme podobnosti a rozdíly našeho diskrétního SIR modelu a spojitého SIR modelu. Jak je uvedeno v [5, 8], první spojitý SIR model publikovali Kermack a McKendrick už v roce 1927. Byl to tento nejjednodušší model, který se používá dodnes:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -rSI, \\ \frac{dI}{dt} &= rSI - aI, \\ \frac{dR}{dt} &= aI,\end{aligned}$$

kde r je parametr infekčnosti (angl. *infection rate*) a a parametr uzdravení (*removal rate*). Je zde na první pohled patrná analogie spojitého a diskrétního modelu. Podobný význam mají parametry r ve spojitém a $\alpha\Delta t$ v diskrétním modelu, stejně tak parametry a a $\gamma\Delta t$. Obdobná je i dodatečná rovnice, omezující stav ve skupinách:

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0 \Rightarrow S(t) + I(t) + R(t) = N.$$

Největší rozdíl mezi modely je zřejmý. Zatímco Kermackův-McKendrickův je diferenciální (spojitý) model, a tedy je to soustava diferenciálních rovnic, náš model je diferenční (diskrétní). Proto pracujeme s časovým krokem Δt a diskrétními hodnotami jednotlivých skupin S, I, R.

Ve způsobu výpočtu (základního) reprodukčního čísla je u obou typů jen velmi malý rozdíl. Reprodukční číslo diskrétního SIR modelu, označme pro jednoznačnost \mathcal{R}_d , jsme dříve odvodili jako

$$\mathcal{R}_d = \frac{S_n \alpha}{N \gamma}.$$

V diferenciálním (spojitým) případě vypadá reprodukční číslo \mathcal{R}_s velmi podobně, jak je odvozeno v [5]:

$$\mathcal{R}_s = \frac{Sr}{a}.$$

Jeho odvození je principiálně velmi podobné diskrétnímu případu, opět hledáme případ, kdy $\frac{dI}{dt} = 0$. Z druhé rovnice pro I nám pak okamžitě vypadne výraz pro \mathcal{R}_s .

4 Ilustrace SIR modelu na příkladech

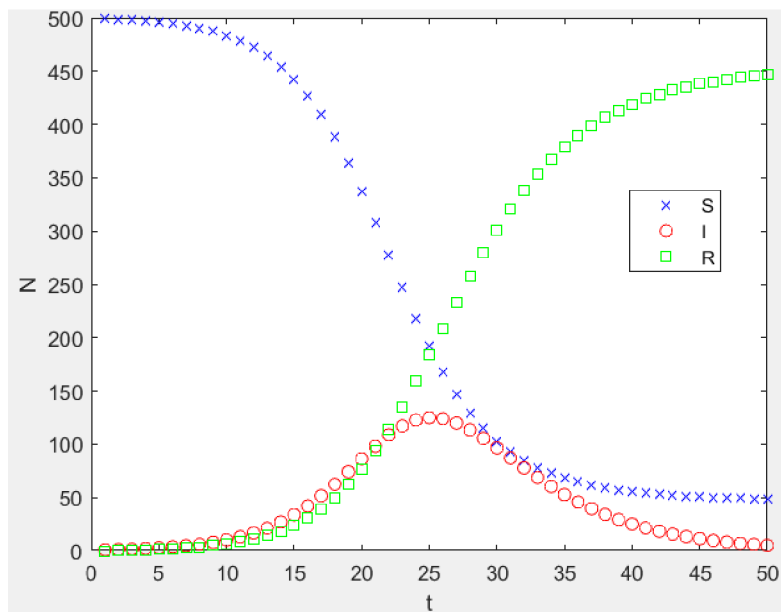
V této kapitole si ukážeme graficky průběhy řešení pro různé volby parametrů modelu.

V každé podkapitole u každého modelu jsou uvedeny také hodnoty, které v něm byly nastaveny. Modelace byla provedena v softwaru Matlab, zdrojový kód je uveden v appendixu.

4.1 Model se vznikem epidemie

Začneme s nejtýpčtějším průběhem řešení, který dostaneme pro počáteční podmínky splňující (18) a pro takovou kombinaci parametrů α, γ , aby základní reprodukční číslo $\mathcal{R}_0 > 1$. V modelu byly použity hodnoty $\alpha = 0,5, \gamma = 0,2, \Delta t = 1, I_0 = 1, R_0 = 0, N = 500, n_{max} = 50$. Základní reprodukční číslo

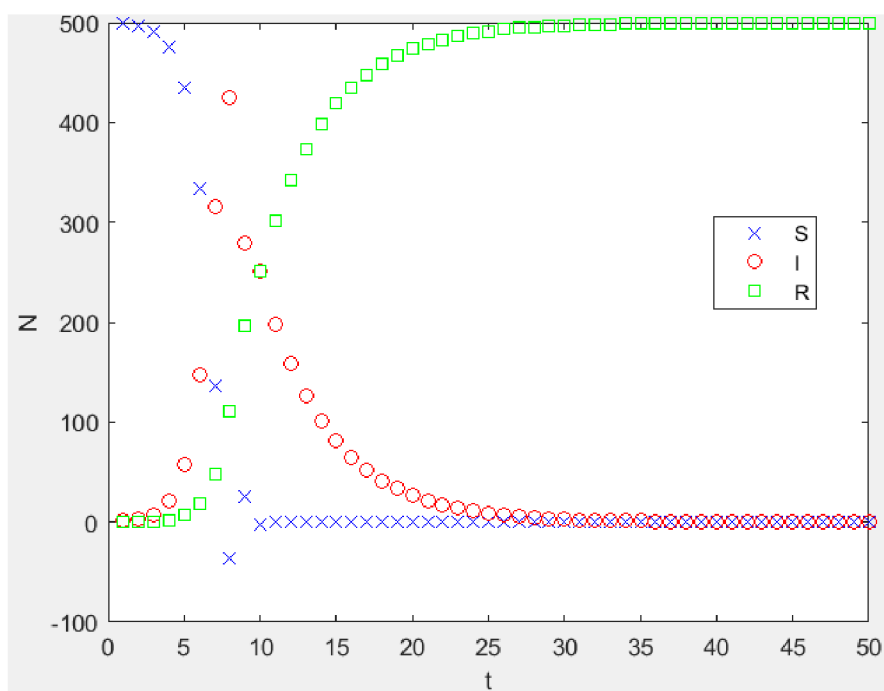
$$\mathcal{R}_0 = \frac{\alpha S_0}{\gamma N} = \frac{0,5 \cdot (500 - 2 - 0)}{0,2 \cdot 500} = 2,495.$$



Obrázek 2: SIR model - klasický průběh

4.2 Model nesplňující podmínky

V následujícím modelu jsou nastaveny parametry tak, aby $\alpha\Delta t > 1$, což je v rozporu s podmínkami (11). Díky tomu očekáváme, že hodnoty modelu nebudou splňovat požadavky (18). Na obrázku 3 pak okamžitě vidíme, že je skutečně nesplňují a hodnota $S_8 < 0$. V modelu byly použity hodnoty $\alpha = 2, \gamma = 0,2, \Delta t = 1, I_0 = 1, R_0 = 0, N = 500, n_{max} = 50$.

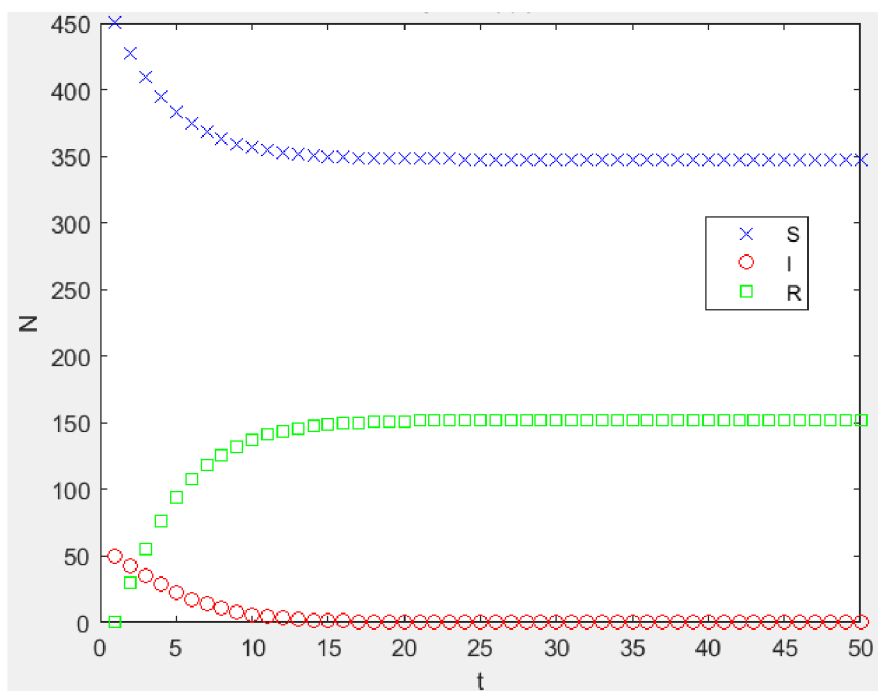


Obrázek 3: SIR model - porušení podmínek

4.3 Model s útlumem epidemie

Na obrázku č. 4 je vidět, jak bude model reagovat, pokud parametry nastavíme tak, aby základní reprodukční číslo modelu $\mathcal{R}_0 < 1$. Aby bylo zřetelněji vidět utlumení epidemie, byl nastaven vysoký počet nakažených na začátku I_0 . V modelu byly použity hodnoty $\alpha = 0,5, \gamma = 0,6, \Delta t = 1, I_0 = 50, R_0 = 0, N = 500, n_{max} = 50$. Základní reprodukční číslo

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\alpha S_0}{\gamma N} = \frac{0,5 \cdot (500 - 50 - 0)}{0,6 \cdot 500} = 0,75.$$



Obrázek 4: SIR model - utlumení

4.4 Utlumený model s vypočtenými stabilními hodnotami

Tento model bude principem stejný jako v kapitole 4.3, tedy základní reprodukční číslo bude menší než jedna a útlum epidemie nastane ihned po spuštění modelu. V této kapitole ale spolu s modelem také odhadneme, na jakých hodnotách by se měl model ustálit, proto jej uvádíme zvlášť. Využijeme k tomu výpočty provedené v kapitole 3.2. Hodnoty I_0 , α byly kvůli odhadům zvoleny nízké, z toho důvodu je graf upraven přerušením y-osy a rozdělením do dvou podgrafů tak, aby jednotlivé křivky byly v grafu lépe čitelné. V tomto modelu byly použity hodnoty $\alpha = 0,3$, $\gamma = 0,8$, $\Delta t = 1$, $I_0 = 2$, $R_0 = 0$, $N = 500$, $n_{max} = 50$. Základní reprodukční číslo

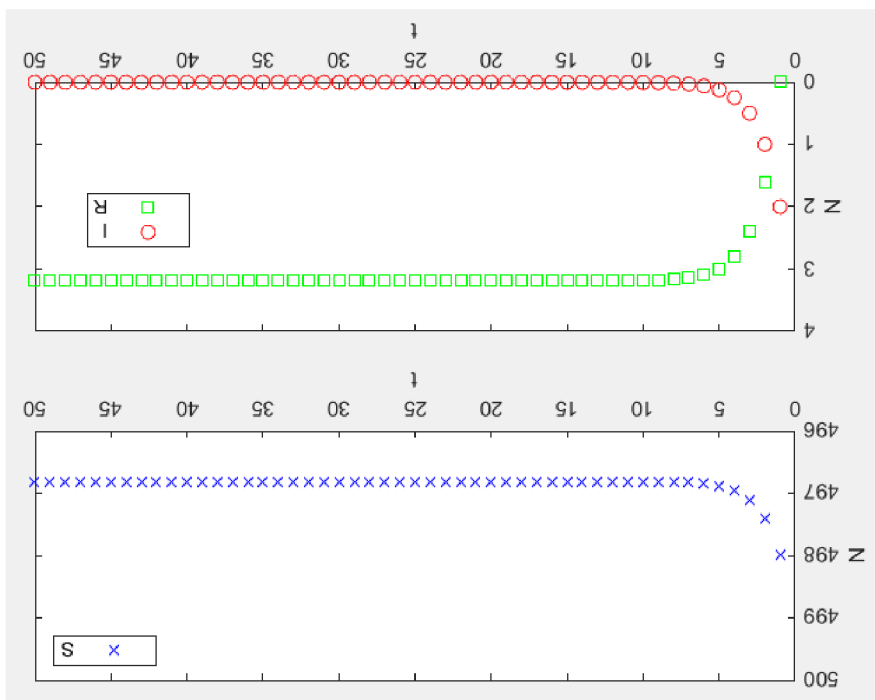
$$\mathcal{R}_0 = \frac{\alpha S_0}{\gamma N} = \frac{0,3 \cdot (500 - 2 - 0)}{0,8 \cdot 500} = 0,3735.$$

Uvažujeme ekvilibrium $S^* = N$, $I^* = 0$, $R^* = 0$. Pak z hodnot výše dostáváme $\bar{S}_0 = -2$, $\bar{I}_0 = 2$. Podle vzorců (29) pak spočteme

$$\begin{aligned}\bar{S}_\infty &\geq \bar{S}_0 + \bar{I}_0 \left(\frac{-\alpha}{\gamma - \alpha} \right) = -2 + 2 \cdot \left(\frac{-0,3}{0,8 - 0,3} \right) = -3,2, \\ \bar{I}_\infty &= 0.\end{aligned}$$

Z toho dostáváme konečné hodnoty $S_\infty = S^* + \bar{S}_\infty \geq 500 - 3,2 = 496,8$ a $I_\infty = I^* + \bar{I}_\infty = 0$. V Matlabu po modelování nám vyšlo $S_{50} = 496,8092$ a $I_{50} = 2,9523 \cdot 10^{-15}$. Z toho je vidět, že náš výpočet koresponduje s modelem v Matlabu a odhady konečných hodnot jsou docela přesné.

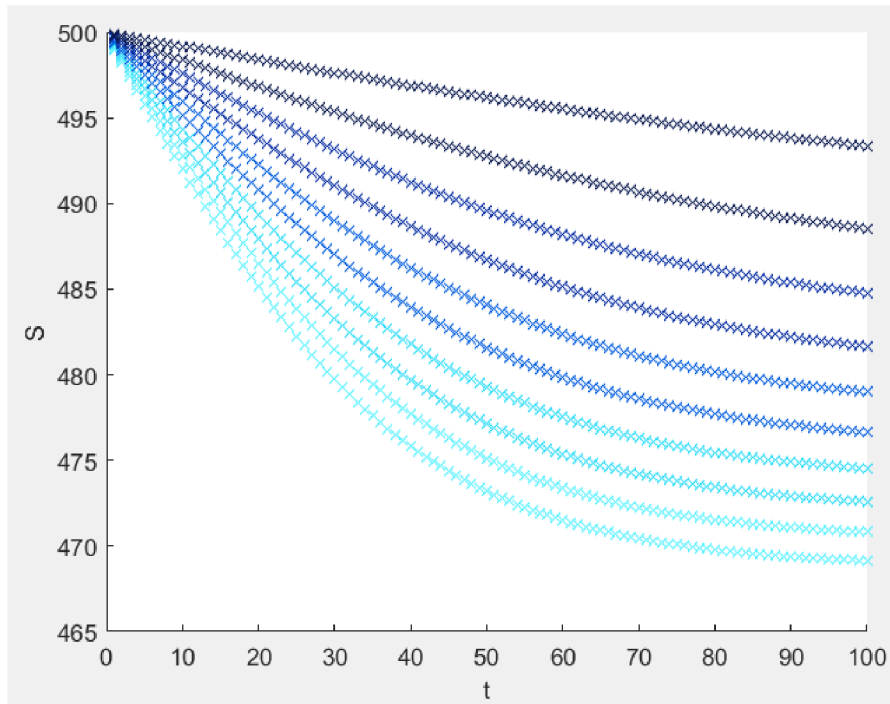
Obrazek 5: Utlmenny SIR model pro ilustraci stabilnich hodnot



4.5 Model s rovností parametrů

V kapitole 3.2 jsme uvedli, že pokud $\alpha = \gamma$, tak nedokážeme rozhodnout o stabilitě ekvilibria. Podle grafů na obr. č. 6 a obr. č. 7 to vypadá, že ekvilibrium by stabilní být mohlo.

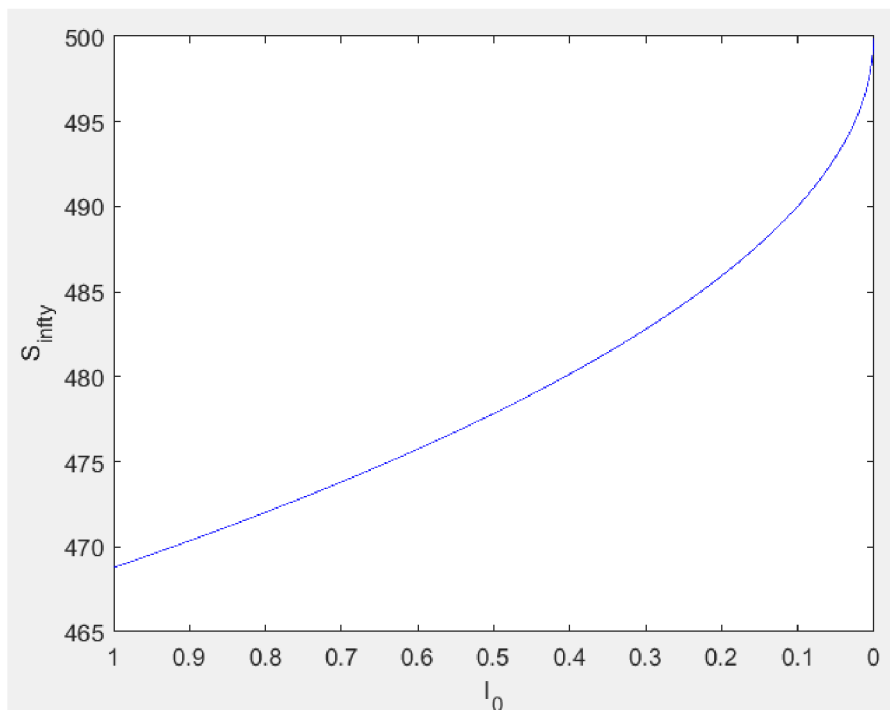
Obrázek č. 6 ukazuje křivky S pro různé hodnoty I_0 , která začíná na hodnotě 1 a postupně se snižuje o 0,1, až na poslední hodnotu 0,1. Dále bylo nastaveno $\alpha = 0,8$, $\gamma = 0,8$, $\Delta t = 1$, $R_0 = 0$, $N = 500$, $n_{max} = 100$.



Obrázek 6: Graf S křivek pro různé I_0

Čím tmavší křivka je, tím menší I_0 bylo zvoleno. Je tedy vidět, že čím menší I_0 zvolíme, tím větší pak bude S_∞ . Z toho můžeme usuzovat, že by model mohl být stabilní, jelikož jsme schopni zvolit dostatečně malé I_0 tak, abychom konečnou hodnotu S_∞ dostali nad požadovanou hranici $N - \epsilon$.

To dokládá i obrázek č. 7, který ukazuje křivku závislosti S_∞ na I_0 . Tedy pro každé nastavené I_0 byla zaznamenána poslední spočtená hodnota S , kterou jsme prohlásili za dostatečnou aproximaci S_∞ . Pro co největší přesnost byl nastaven vysoký počet iterací $n_{max} = 1000$. Dále bylo nastaveno $\alpha = 0,8$, $\gamma = 0,8$, $\Delta t = 1$, $R_0 = 0$, $N = 500$.



Obrázek 7: Graf S_{∞} pro měnící se I_0

Je vidět, že se snižujícím se I_0 se také snižuje \bar{S}_{∞} , což se v grafu projevuje rostoucím charakterem S_{∞} , když se I_0 blíží nule. Pro větší názornost byla v grafu invertována vodorovná osa pro I_0 .

Uvedené grafy jsou modelovány pro $\alpha = \gamma = 0,8$. Pro jiné hodnoty těchto koeficientů (splňující (11)) dostáváme velmi podobné obrázky.

4.6 Upravený SIR model

Jako poslední uvedeme SIR model, upravený podle [10]. Ten vypadá následovně:

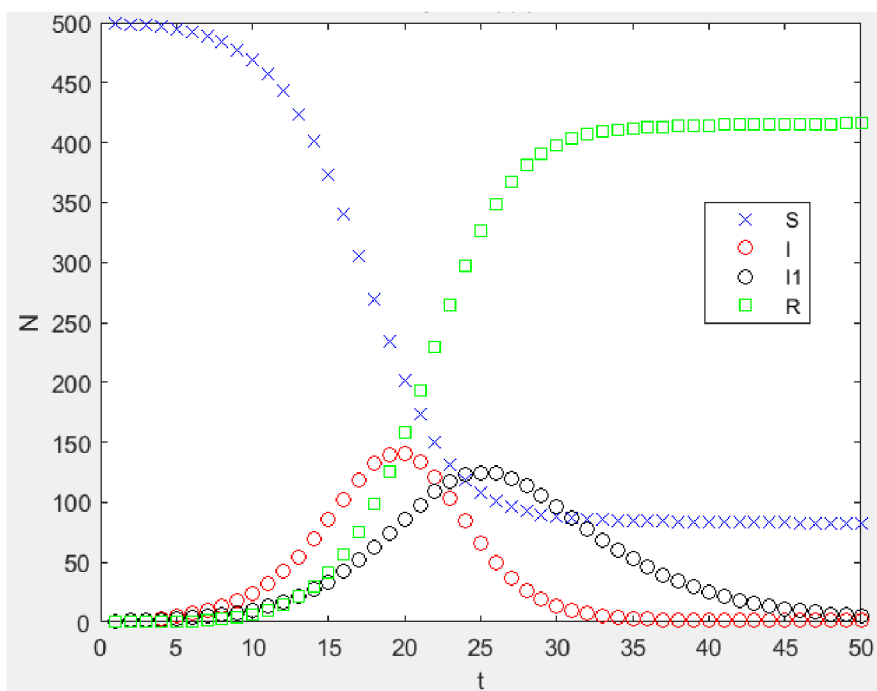
$$\begin{aligned}S_{n+1} &= S_n \left(1 - \frac{\alpha \Delta t}{N} I_n \right), \\I_{n+1} &= I_n \left(1 + \frac{\alpha \Delta t}{N} S_n \right) - (S_{n-L} - S_{n+1-L}), \\R_{n+1} &= R_n + (S_{n-L} - S_{n+1-L}).\end{aligned}$$

Jak je vidět, tento model oproti našemu klasickému SIR modelu neuvažuje koeficient γ , ale pomocí čísla $L \in \mathbb{N}$ stanovuje, jak dlouho přesně trvá nemoc u každého jedince, a tedy kdy se daný jedinec přesune z infekční skupiny I do rezistentní R.

Hodnoty v simulaci byly navoleny tak, aby nejvyšší počet nakažených v jednom okamžiku co nejvíce odpovídal modelu na obrázku 2, aby bylo možné porovnat výsledky. Zároveň do obrázku byla přidána křivka I_1 , nebo-li hodnoty I z klasického modelu na obr. 2, aby porovnání bylo okamžitě vidět. Nastaveny byly v modelech tyto hodnoty: $\alpha = 0,5, \gamma = 0,2, \Delta t = 1, I_0 = 1, R_0 = 0, N = 500, n_{max} = 50, L = 5$.

Z obrázku č. 8 je vidět, že v tomto upraveném modelu (při nastavení $L = 5$, tedy že se jedinec uzdraví po pěti dnech - časových krocích), je nástup epidemie rychlejší a zhruba stejný počet jedinců se nakazí již o 5 dní dříve. Počet nejvíce nakažených v jeden okamžik v obou modelech je okolo 120-130. Zároveň s rychlým nástupem jde ale ruku v ruce i rychlejší ústup epidemie než v původním modelu. Je vidět, že i ve 40. den epidemie je rozdíl v I skupině mezi původním a upraveným modelem pořád patrný a epidemie v původním modelu se utlumuje výrazně pomaleji.

Na obrázku je vidět, že červená křivka má vrchol o něco výš než černá. Přesnější nařizování hodnot není možné z důvodu požadavku celočíselnosti L .



Obrázek 8: Upravený SIR model v porovnání s klasickým

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se s teorií diferenčních rovnic a získané poznatky uplatnit při studiu základních diferenčních epidemiologických modelů.

Teorie diferenčních rovnic byla zpracována v první kapitole. Byly definovány a vysvětleny základní pojmy jako je autonomní a homogenní rovnice, řešení, ekvilibrium a stabilita.

V druhé kapitole bylo uvedeno několik základních druhů epidemiologických modelů, včetně důkazů tvrzení o podmínkách pro parametry modelu. Modely byly rozděleny do dvou velkých skupin podle toho, zda se v modelu uvažuje změna populace či nikoliv a bylo lehce nastíněno možné rozšíření výčtu o modely s exponenciálními funkcemi, modely s vakcinací či latentním obdobím.

Ve třetí kapitole byl detailně rozebrán diferenční SIR model beze změn populace a bez ztráty imunity. Bylo odvozeno reprodukční číslo modelu a také základní reprodukční číslo. Poté jsme také vyšetřili ekvilibria modelu. V kapitole 3.2 jsme poté detailně rozebrali stabilitu SIR modelu a byla také odvozena nutná podmínka stability $\gamma \geq \alpha$. Pomocí odhadů byla odvozena postačující podmínka stability $\gamma > \alpha$. Závěrem této kapitoly jsme uvedli, že pro případ $\gamma = \alpha$ pomocí metod uvedených v práci neumíme určit, zda je model stabilní nebo nestabilní. Analýza tohoto hraničního případu by mohla být předmětem dalšího zkoumání.

Ve čtvrté kapitole jsme ilustrovali SIR model na konkrétních hodnotách. Byla zde ilustrována nutnost podmínky dokázané v tvrzení 2.2 a také zde byl krátce představen modifikovaný SIR model, kde místo parametru γ bylo předem určeno, po jakém počtu dní se jedinec uzdraví. Také zde byly ověřeny výsledky výpočtů z kapitoly 3.2.

Reference

- [1] ALLEN, Linda J.S. *Some Discrete-Time SI, SIR and SIS Epidemic Models* [online]. In: *Mathematical Biosciences*, volume 124, pp. 83-105. 1994. Dostupné z: [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(94\)90025-6](https://doi.org/10.1016/0025-5564(94)90025-6)
- [2] EDELSTEIN-KESHET, Leah. *Mathematical Models in Biology*. Philadelphia: SIAM, 2005. ISBN 978-0-898715-54-5
- [3] ELAYDI, Saber. *An Introduction to Difference Equations*, 3rd ed. New York: Springer, 2005. ISBN 0-387-23059-9
- [4] HUI, Cao, YICANG, Zhou. *The Basic Reproduction Number of Discrete SIR and SEIS Models With Periodic Parameters* [online]. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, volume 18, pp. 37-56. 2013. Dostupné z: <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2013.18.37>
- [5] MURRAY, J.D. *Mathematical Biology I: An Introduction*, 3rd ed. New York: Springer, 2002. ISBN 0-387-95223-3
- [6] NAGY, Jozef. *Diferenční rovnice*. ČVUT: Praha 1998.
- [7] PARSAMANESH, Mahmood, ERFANIAN, Majid, MEHRSHAD, Saeed. *Stability and Bifurcations in a Discrete-time Epidemic Model With Vaccination and Vital Dynamics* [online]. In: *BMC Bioinformatics*, 21, 525. 2020. Dostupné z: <https://doi.org/10.1186/s12859-020-03839-1>
- [8] PATHAK, S., MAITI, A., SAMANTA, G.P. *Rich dynamics of an SIR epidemic model* [online]. In: *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, volume 15, pp. 71-81. 2010. Dostupné z: <https://doi.org/10.15388/NA.2010.15.1.14365>
- [9] SUMPTER, Kristin Joy. *The Dynamics of Some Epidemic Models* [online]. Dostupné z: <https://ttu-ir.tdl.org/bitstream/handle/2346/13898/31295009462895.pdf?sequence=1>. Masters Degree Thesis. Texas Tech University. 1995
- [10] SWITKES, Jennifer. *A Modified Discrete SIR Model* [online]. In: *The College Mathematical Journal*, volume 34, pp. 399-402. 2003. Dostupné z: <https://doi.org/10.2307/3595827>

Apendix - zdrojový kód MATLAB

```
% zadani pocatecnich hodnot
alfa = 0.3; % contact rate
gamma = 0.8; % recovery rate
Delta_t = 1; % casovy usek
N = 500; % lide
n = 50; % pocet dni
I_0 = 2; % pocet nakazenych na zacatku
R_0 = 0;
S_0 = N - I_0 - R_0; % pocet zdravych na zacatku

% inicializace
S = zeros(1,n);
I = zeros(1,n);
R = zeros(1,n);
x = (1:n);
S(1) = S_0;
I(1) = I_0;
R(1) = R_0;
clf;

% SIR
for b = 2:n
S(b) = S(b-1)*(1-(alfa*Delta_t*I(b-1))/N);
I(b) = I(b-1)*(1-gamma*Delta_t+(alfa*Delta_t*S(b-1))/N);
R(b) = R(b-1)+gamma*Delta_t*I(b-1);
end
figure(1)
plot(x, S, 'Color', 'blue', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'x')
hold on
plot(x, I, 'Color', 'red', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'o')
hold on
plot(x, R, 'Color', 'green', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'square')
xlabel('t')
ylabel('N')
h1 = legend('S','I','R');
pozice1 = [0.8, 0.6, 0, 0];
set (h1, 'Position', pozice1)

% upraveny SIR
L = 5;
S1 = zeros(1,n);
I1 = zeros(1,n);
S1(1) = S(1);
```



```

I1(1) = I(1);
for b1 = 2:L
S(b1) = S(b1-1)*(1-(alfa*Delta_t*I(b1-1))/N);
I(b1) = I(b1-1)*(1+(alfa*Delta_t*S(b1-1))/N);
S1(b1) = S1(b1-1)*(1-(alfa*Delta_t*I1(b1-1))/N);
I1(b1) = I1(b1-1)*(1-gamma*Delta_t+(alfa*Delta_t*S1(b1-1))/N);
R(b1) = R(b1-1);
end
for b1 = L+1:n
S(b1) = S(b1-1)*(1-(alfa*Delta_t*I(b1-1))/N);
I(b1) = I(b1-1)*(1+(alfa*Delta_t*S(b1-1))/N)-(S(b1-L)-S(b1+1-L));
S1(b1) = S1(b1-1)*(1-(alfa*Delta_t*I1(b1-1))/N);
I1(b1) = I1(b1-1)*(1-gamma*Delta_t+(alfa*Delta_t*S1(b1-1))/N);
R(b1) = R(b1-1)+(S(b1-L)-S(b1+1-L));
end
hold on
figure(2)
plot(x, S, 'Color', 'blue', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'x')
hold on
plot(x, I, 'Color', 'red', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'o')
hold on
plot(x, I1, 'Color', 'black', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'o')
hold on
plot(x, R, 'Color', 'green', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'square')
xlabel('t')
ylabel('N')
h1 = legend('S','I','I1','R');
pozice1 = [0.8, 0.6, 0, 0];
set (h1, 'Position', pozice1)

% SIR model - subploty pro lepsi citelnost
for b = 2:n
S(b) = S(b-1)*(1-(alfa*Delta_t*I(b-1))/N);
I(b) = I(b-1)*(1-gamma*Delta_t+(alfa*Delta_t*S(b-1))/N);
R(b) = R(b-1)+gamma*Delta_t*I(b-1);
end
lim = zeros(1,2);
lim(2) = round(min(S)-1);
lim(1) = max(round(max(R)+1),I(1)+1);
hold on
figure(3)
subplot(2,1,1)
plot(x, S, 'Color', 'blue', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'x')
xlabel('t')
ylabel('N')

```

```

legend('S')
ylim([lim(2),500]);
subplot(2,1,2)
plot(x, I, 'Color', 'red', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'o')
hold on
plot(x, R, 'Color', 'green', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'square')
xlabel('t')
ylabel('N')
ylim([0,lim(1)])
h1 = legend('I','R');
pozice1 = [0.8, 0.3, 0, 0];
set (h1, 'Position', pozice1)

%S krivky pro ruzne I_0
k = linspace(1,0.1,10);
for i = 1:length(k)
I(1) = k(i);
S(1) = N - I(1) - R(1);
for b = 2:n
S(b) = S(b-1)*(1-(alfa*Delta_t*I(b-1))/N);
I(b) = I(b-1)*(1-gamma*Delta_t+(alfa*Delta_t*S(b-1))/N);
R(b) = R(b-1)+gamma*Delta_t*I(b-1);
end
figure(4)
switch i
case 1,2
hold on
plot(x, S, 'Color', '#57F2FF', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'x')
case 3,4
hold on
plot(x, S, 'Color', '#2BDDF9', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'x')
case 5,6
hold on
plot(x, S, 'Color', '#015CE0', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'x')
case 7,8
hold on
plot(x, S, 'Color', '#062DA2', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'x')
case 9,10
hold on
plot(x, S, 'Color', '#0B1A51', 'LineStyle', 'none', 'Marker', 'x')
end
end
xlabel('t')
ylabel('S')

```

```

% zavislost S_infty na I_0
k = linspace(1,0.0001,10000);
Si = zeros(1,length(k));
for i = 1:length(k)
I(1) = k(i);
S(1) = N - I(1) - R(1);
for b = 2:n
S(b) = S(b-1)*(1-(alfa*Delta_t*I(b-1))/N);
I(b) = I(b-1)*(1-gamma*Delta_t+(alfa*Delta_t*S(b-1))/N);
R(b) = R(b-1)+gamma*Delta_t*I(b-1);
end
Si(i) = S(end);
end
figure(5)
plot(k, Si, 'Color', 'blue')
xlabel('I_0')
ylabel('S_infty')
set(gca,'xdir','reverse')

```