UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Bc. Petra Kapusňaková

Kombinatorika a pravděpodobnost ve výuce na 2. stupni ZŠ

Olomouc 2018 vedoucí práce: Mgr. Květoslav Bártek, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a uvedla veškerou použitou literaturu a zdroje.

V Olomouci dne …………. ……………………………...

Petra Kapusňaková

Poděkování

Děkuji panu Mgr. Květoslavu Bártkovi, Ph.D. za odborné vedení diplomové práce, poskytování rad a materiálových podkladů k práci.

Obsah

Úvod

Jako téma své diplomové práce jsem si zvolila: "Kombinatorika a pravděpodobnost ve výuce na 2. stupni základních škol". Zajímalo mě, jestli se tyto úlohy v běžných školách vyskytují a zda jsou je žáci schopni řešit.

Žáci na 2. stupni základních škol nemají ponětí o tom, co je to kombinatorika nebo pravděpodobnost ani neovládají žádné složité vzorce a funkce. Díky tomu, musí zapojit svou fantazii a snažit se logicky, odhadem nebo nějakým experimentem či náčrtem příklady vyřešit.

Cílem mé diplomové práce bylo v teoretické části vytvořit celkový souhrn daného tématu a v praktické části zanalyzovat výsledky žáků z pracovních listů.

Jak už bylo v předchozím odstavci zmíněno, práce je rozdělena na dvě části: teoretickou a praktickou. Všechny poznatky v teoretické části jsem získala studiem odborné literatury. První kapitola teoretické části práce je zaměřena na matematiku v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání. Pro přehlednější uspořádání jsem si téma diplomové práce rozdělila na dva okruhy: kombinatorika a pravděpodobnost. V druhé kapitole se věnuji kombinatorice, kde se zabývám historií, kombinatorickým pravidlům, magickým čtvercům, binomické větě a kombinatorice ve škole. Další kapitola je věnována pravděpodobnosti. V ní nastiňuji axiomatické zavedení pravděpodobnosti, klasickou definice pravděpodobnosti, geometrickou a statistickou definici pravděpodobnosti, historii pravděpodobnosti a pravděpodobnost ve škole. Poslední čtvrtá kapitola se zaobírá výskytem kombinatorických a pravděpodobnostních úloh v matematických soutěžích na 2. stupni základních škol.

Důležitou částí diplomové práce je praktická část, která je založena na výzkumném šetření, které bylo realizováno na čtyřech různorodých školách v Opavě a okolí. Tohoto výzkumu se zúčastnili žáci 6. – 9. ročníku. Cílem bylo zjistit, jaké jsou počtářské kvality žáků při řešení nestandardních úloh (z oblasti kombinatoriky a pravděpodobnosti) a jaké strategie pro výpočet využijí. V další část se věnuju šetření, zda se tyto druhy úloh vyskytují v běžné výuce, či matematických soutěžích.

TEORETICKÁ ČÁST

1 RVP Základního vzdělávání[1]

Základní vzdělání má pomoci žákům utvářet a rozvíjet klíčové kompetence a poskytnout jim spolehlivý základ všeobecného vzdělání. Mělo by být orientované na situace blízké životu a na praktické jednání, proto usiluje o naplňování cílů, které jsou např.: umožnit žákům osvojit si strategie učení a motivovat je pro celoživotní učení; podněcovat žáky k tvořivému myšlení, logickému uvažování a k řešení problémů; vést žáky k všestranné, účinné a otevřené komunikaci; rozvíjet u žáků schopnost spolupracovat a respektovat práci a úspěchy vlastní i druhých; připravovat žáky k tomu, aby se projevovali jako svébytné, svobodné a zodpovědné osobnosti, uplatňovali svá práva a naplňovali své povinnosti; vytvářet u žáků potřebu projevovat pozitivní city v chování, jednání a v prožívání životních situací; rozvíjet vnímavost a citlivé vztahy k lidem, prostředí i k přírodě; učit žáky aktivně rozvíjet a chránit fyzické, duševní a sociální zdraví a být za ně odpovědný.

V základním vzdělávání by se mělo dbát na osvojování šesti klíčových kompetencí, které se navzájem prolínají: kompetence k učení, kompetence k řešení problémů, kompetence komunikativní, kompetence sociální a personální, kompetence občanské, kompetence pracovní.[2]

„*Klíčové kompetence představují souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti. Jejich výběr a pojetí vychází z hodnot obecně přijímaných ve společnosti a z obecně sdílených představ o tom, které kompetence jedince přispívají k jeho vzdělávání, spokojenému a úspěšnému životu a k posilování funkcí občanské společnost*."[3]

Další oblastí v RVP jsou vzdělávací oblasti, které se dělí do devíti základních skupin. Matematika je zařazena do vzdělávací oblasti – Matematika a její aplikace.

---

[1] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.10. 143 s. [online]. [cit. 2017-11-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

[2] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.10. 143 s. [online]. [cit. 2017-11-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

[3] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.10. 143 s. [online]. [cit. 2017-11-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

1.1 Matematika a její aplikace na 1. stupni základních škol [4]

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace na 1. stupni je rozdělen na čtyři tematické okruhy:

- Čísla a početní operace,
- Závislosti, vztahy a práce s daty,
- Geometrie v rovině a prostoru,
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

Ke každému okruhu jsou stanoveny očekávané výstupy, které jsou rozděleny do 1. a 2. období.

Očekávané výstupy tematických okruhů pro 1. stupeň základních škol:

Číslo a početní operace 1. období:

- *„Žák používá přirozená čísla k modelování reálných situací, počítá předměty v daném souboru, vytváří soubory s daným počtem prvků,*
- *Čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1000,*
- *Užívá lineární uspořádání, zobrazí číslo na číselné ose,*
- *Provádí zpaměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly,*
- *Řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace.“* [5]

Číslo a početní operace 2. období:

- *„Žák využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení,*
- *Provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel,*
- *Zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel,*

[4] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.10. 143 s. [online]. [cit. 2017-11-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

[5] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.31. 143 s. [online]. [cit. 2017-08-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

- *Řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel,*
- *Modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku,*
- *Porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel,*
- *Přečte zápis desetinného čísla a vyznačí na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty,*
- *Porozumí významu znaku „−" pro zápis celého záporného čísla a toto číslo vyznačí na číselné ose."*[6]

Učivo, které se v tomto okruhu probírá: přirozená čísla, celá čísla, desetinná čísla, zlomky; zápis čísla v desítkové soustavě a jeho znázornění (číselná osa, teploměr, model); násobilka; vlastnosti početních operací s čísly; písemné algoritmy početních operací

Závislosti, vztahy a práce s daty 1. období:

- *„Žák se orientuje v čase, provádí jednoduché převody jednotek času,*
- *Popisuje jednoduché závislosti z praktického života,*
- *Doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel."*[7]

Závislosti, vztahy a práce s daty 2. období:

- *„Žák vyhledává, sbírá a třídí data,*
- *Čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy."*[8]

Učivo, které se v tomto okruhu probírá: závislosti a jejich vlastnosti; diagramy, grafy, tabulky, jízdní řády.

Geometrie v rovině a prostoru 1. období:

- *„Žák rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci,*
- *Porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky,*

[6] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.31-32. 143 s. [online]. [cit. 2017-08-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

[7] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.31-32. 143 s. [online]. [cit. 2017-08-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

[8] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.31-32. 143 s. [online]. [cit. 2017-08-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

- *Rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině.“*[9]

Geometrie v rovině a prostoru 2. období:

- *„Žák narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce,*
- *Sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran,*
- *Sestrojí rovnoběžky a kolmice,*
- *Určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu,*
- *Rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru.“*[10]

Učivo třetího okruhu: základní útvary v rovině – lomená čára, přímka, polopřímka, úsečka, čtverec, kružnice, obdélník, trojúhelník, kruh, čtyřúhelník, mnohoúhelník; základní útvary v prostoru – kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec; délka úsečky; jednotky délky a jejich převody; obvod a obsah obrazce; vzájemná poloha dvou přímek v rovině; osově souměrné útvary.

Nestandardní aplikační úlohy a problémy 2. období:

- *„Žák řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky.“*[11]

Učivo posledního okruhu: slovní úlohy; číselné a obrázkové řady; magické čtverce; prostorová představivost.

Dle mého názoru s kombinatorikou a pravděpodobností nejvíce souvisí okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy a Závislosti, vztahy a práce s daty. Při řešení kombinatorických a pravděpodobnostních problémů žáci na prvním stupni hledají různé postupy a řešitelské strategie, které v běžných úlohách většinou nevyužívají. Poslední

---

[9] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.31-32. 143 s. [online]. [cit. 2017-08-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

[10] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.31-32. 143 s. [online]. [cit. 2017-08-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

[11] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.31-32. 143 s. [online]. [cit. 2017-08-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

okruh se zaměřuje na magické čtverce, které jsou jedny z nejpopulárnějších částí kombinatoriky. Více o čtvercích je napsáno v kapitol 2.3 Magické čtverce.

1.2 Matematika a její aplikace na 2. stupni základních škol [12]

„*Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě, a umožňuje tak získávat matematickou gramotnost.*“[13]

Důraz ve vzdělávání by měl být kladen na porozumění základních myšlenkových postupů a pojmů matematiky a jejich vzájemných vztazích. Žáci by si měli osvojit některé pojmy, algoritmy, terminologii, symboliku a způsoby jejich užití.

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru Matematika a její aplikace na 2. stupni je rozdělen na čtyři tematické okruhy:

- Číslo a proměnná,
- Závislosti, vztahy a práce s daty,
- Geometrie v rovině a v prostoru,
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy.

V tematickém okruhu Číslo a proměnná si žáci osvojují aritmetické operace v jejich třech složkách:

- dovednost provádět operaci,
- algoritmické porozumění (proč je operace prováděna předloženým postupem),
- významové porozumění (umět operaci propojit s reálnou situací).

Žáci se seznamují s pojmem proměnná a učí se získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním.

Druhý tematický okruhu Závislosti, vztahy a práce s daty si dává za cíl, že žáci budou schopni rozpoznávat určité typy změn a závislostí, které jsou projevem běžných

---

[12] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.10. 143 s. [online]. [cit. 2017-11-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

[13] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.31-32. 143 s. [online]. [cit. 2017-08-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

jevů reálného světa, a budou se seznamovat s jejich reprezentacemi. Žáci si budou uvědomovat změny a závislosti známých jevů, docházet k pochopení, že změnou může být růst i pokles a že změna může mít také nulovou hodnotu. Tyto změny a závislosti analyzují z tabulek, diagramů a grafů. V jednoduchých případech je žáci vykonstruují a vyjadřují matematickým předpisem nebo je podle možností vymodelují s využitím vhodného počítačového softwaru nebo grafických kalkulátorů.

Ve třetím okruhu Geometrie v rovině a v prostoru žáci:

- určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace,
- vyhledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují kolem nás,
- uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině a v prostoru,
- porovnávají, odhadují, měří délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem),
- zdokonalovat svůj grafický projev.

Žáky vedeme k řešení polohových a metrických úloh a problémů, se kterými se žáci setkají v běžném životě.

Pro nás velmi důležitou součástí matematického vzdělávání jsou Nestandardní aplikační úlohy a problémy, jejichž řešení může být nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky. Při řešení těchto úloh je nutné uplatnit logické myšlení.

Úlohy z tohoto tematického okruhu, by měly prolínat všemi předešlými tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání.

V této vzdělávací oblasti se žáci učí:

- řešit problémové situace a úlohy z běžného života,
- pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky,
- provádět situační náčrty či řešit optimalizační úlohy.

Učitel by měl obtížnost těchto logických úloh sestavovat podle míry rozumové vyspělosti žáků, avšak řešení a procvičování těchto úloh posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může motivovat i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.[14]

RVP ZV si dává za cíl: vést žáka k „*rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů.*" [15] Žák by měl užívat logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací, řešit úlohy na prostorovou představivost, aplikovat a kombinovat poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí.[16]

---

[14] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.30-40. 143 s. [online]. [cit. 2017-11-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

[15] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.30-40. 143 s. [online]. [cit. 2017-11-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

[16] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. str.30-40. 143 s. [online]. [cit. 2017-11-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

2 Kombinatorika

2.1 Kombinatorika obecně

„*Kombinatorika je matematická disciplína, která se zabývá rozdělováním, uspořádáváním, výběrem prvků z nějaké množiny. Klasická kombinatorika se zabývá otázkou výběru a rozmístění prvků do tzv. konfigurací daných prvků do skupin s určitými vlastnostmi*."[17] Nejjednoduššími typy konfigurací jsou variace, permutace, kombinace. V současné době se kombinatorika prudce rozvíjí. Využíváme ji v pravděpodobnosti, statistice, teorii informací, lineárním programování apod.

2.2 Historie kombinatoriky

Vznik kombinatoriky není pevně stanovený. První kombinatorické poznatky se objevili ve starověké Indii a Číně. Tady se kombinatorika liší od jiných matematických disciplín, které vznikly v Řecku. Skutečná kombinatorika se začala utvářet v 16. – 17. století.[18]

První náznaky kombinatoriky můžeme nalézt v čínské posvátné knize Kniha proměn kolem roku 2200 př. n. l.. V této knize se objevuje pojem „konfigurace" neboli zobrazení množiny prvků do konečné abstraktní množiny se zadanou strukturou.[19] Jedny z prvních kombinatorických úloh se objevily pravděpodobně v Indii. Čtenáři se mohli již v 6. století př. n. l. v lékařském spisu Susruta dočíst, že z šesti základních příchutí lze namíchat 63 různých chutí.[20]

„*Za počátek kombinatoriky v dnešním pojetí považují někteří autoři Pascalův spis Pojednání o aritmetickém trojúhelníku*."[21] Jiní autoři uvádějí spíše Leibnizův spis Ars combinatoria., který vyšel v roce 1666. Rozhodujícím předělem je kniha

---

[17] BLAŽKOVÁ, Růžena a Irena BUDÍNOVÁ. *Kombinatorika – možnosti využití v učivu matematiky na základní škole* [online]. In: . [cit. 2018-04-02]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/1441/jaro2012/MA2MP_PDM2/um/DM2P9.pdf

[18] HERMAN, Jiří, Radan KUČERA a Jaromír ŠIMŠA. *Seminář ze středoškolské matematiky*. 2., přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004. str. 3. ISBN 80-210-3528-5.

[19] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 9-11. ISBN 978-80-7494-017-0.

[20] PŘÍHONSKÁ, J.: Úvod do kombinatoriky. Tribun EU s r.o., Brno 2008, str. 3. ISBN 978-80-7399-456-3.

[21] MAČÁK, KAREL: Poznámky k formování kombinatoriky v 16. a 17. století.In: Bečvář, Jindřich (editor); Fuchs, Eduard (editor): Matematika v 16. a 17. století. Seminář Historie matematiky III, Jevíčko, 18.8.–21.8.1997. (Czech). Praha: Prometheus, 1999. str. 237–250. 80-7196-150-7.

Jakoba Bernoulliho Ars conjectandi vydána roku 1713, kterou můžeme brát jako knihu, která završila formování kombinatoriky. Další matematikové, kteří významně přispěli v oblasti kombinatoriky byli např.: Euler, de Moivre, Fermat či Nicholson. V roce 1901 vyšla v Lipsku první učebnice matematiky a jejím autorem byl německý matematik Eugen Netto. Ve 20. století s vývojem výpočetní techniky jsme mohli zaznamenat u kombinatoriky velký rozvoj. Dostala do popředí zájmu u mnoha matematiků a je v dnešní době je využívána v celé řadě jiných matematických disciplín.[22]

Kombinatorická problematika byla nejdříve studována v Číně a Indii, z toho by se dalo vyvozovat, že kombinatorika v Evropě vznikla jako důsledek přenosu matematických znalostí z Asie do Evropy. Domníváme se však, že tento názor není správný. Evropská kombinatorika má své vlastní myšlenkové kořeny, odlišné od těch asijských. Bezesporu docházelo k ovlivnění evropské matematiky arabskou a následně i matematikou asijskou. Předpokládáme, že docházelo k ovlivnění i při formulování a řešení kombinatorických úloh. Myslíme si ale, že se jednalo jen o ovlivnění již existujícího myšlenkového proudu, nikoli o jeho vytvoření. [23]

2.3 Magické čtverce

Bezpochyby jednou z velmi populárních částí kombinatoriky jsou magické čtverce, které lidstvo fascinují několik tisíc let. Tyto čtverce můžeme využít k rozvíjení logického myšlení či k zvýšení zájmu o matematiku.

Jednotlivé konfigurace obsahují skupiny bodů, z kterých, když je nahradíme čísly, získáme např. známé magické čtverce. Obecně vzato je magickým čtvercem nazýváno jakékoliv čtvercové schéma nejrůznějších objektů, nejčastěji čísel nebo písmen, rozmístěných podle nějakých pravidel.[24]

---

[22] VOGLOVÁ, Zuzana. *27. MEZINÁRODNÍ KONFERENCE - HISTORIE MATEMATIKY: HISTORIE KOMBINATORIKY* [online]. In: . 2006 [cit. 2018-04-02]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz//sborniky/sbornik-27.pdf

[23] MAČÁK, KAREL: Poznámky k formování kombinatoriky v 16. a 17. století.In: Bečvář, Jindřich (editor); Fuchs, Eduard (editor): Matematika v 16. a 17. století. Seminář Historie matematiky III, Jevíčko, 18.8.–21.8.1997. (Czech). Praha: Prometheus, 1999. str. 237 – 250. 80-7196-150-7.

[24] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 9. ISBN 978-80-7494-017-0.

„Magický čtverec je čtvercová tabulka čísel, která má v každém řádku, sloupci i na obou diagonálách členy se stejným součtem. Obvykle se každé číslo smí vyskytovat v tabulce pouze jednou.“[25]

Prvním příkladem magického čtverce je diagram Lo Shu z období starověké Číny. Jedná se o obrázkový záznam magického čtverce třetího řádu. [26]*„První písemnou zmínku nalézáme v Číně, kde byla v letech 650 př.* n. l. *sepsána legenda o Lo Shu. Podle tohoto starého čínského příběhu se magický čtverec objevil na zemi tak, že za obrovské potopy objevil císař Yu želvu, která měla na zádech vzor.“*[27]

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Obr. 1: Magický čtverec

Jakýkoliv magický čtverec o straně 3 lze za pomocí zrcadlení a rotace z Lo Shu čtverce vytvořit. Magické čtverce se objevily i v Perzii, ale i mezi Araby, kteří dokázali zkonstruovat čtverce o straně 5 a 6.[28] Ve 13. století př. n. l. byly konstruovány magické čtverce až 10. řádu, či magické kruhy, obdélníky a trojúhelníky.[29] První písemné zmínky v Evropě o těch to čtvercích pocházejí od Manuela Maschopula z roku 1300, Luca Paciolia z roku 1450 či z roku 1510 od Heiricha Corneliusa Agrippa.[30] S magickými čtverci se můžeme hojně setkávat v malířství nebo architektuře.

---

[25] ROSKOVEC, Tomáš. *Magické čtverce* [online]. In: . 2010 [cit. 2018-04-02]. Dostupné z: http://docplayer.cz/10826425-Magicke-ctverce-tomas-roskovec-uvod.html

[26] VOGLOVÁ, Zuzana. *27. MEZINÁRODNÍ KONFERENCE - HISTORIE MATEMATIKY: HISTORIE KOMBINATORIKY* [online]. In: . 2006 [cit. 2018-04-02]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz//sborniky/sbornik-27.pdf

[27] ROSKOVEC, Tomáš. *Magické čtverce* [online]. In: . 2010 [cit. 2018-04-02]. Dostupné z: http://docplayer.cz/10826425-Magicke-ctverce-tomas-roskovec-uvod.html

[28] ROSKOVEC, Tomáš. *Magické čtverce* [online]. In: . 2010 [cit. 2018-04-02]. Dostupné z: http://docplayer.cz/10826425-Magicke-ctverce-tomas-roskovec-uvod.html

[29] VOGLOVÁ, Zuzana. *27. MEZINÁRODNÍ KONFERENCE - HISTORIE MATEMATIKY: HISTORIE KOMBINATORIKY* [online]. In: . 2006 [cit. 2018-04-02]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz//sborniky/sbornik-27.pdf

[30] ROSKOVEC, Tomáš. *Magické čtverce* [online]. In: . 2010 [cit. 2018-04-02]. Dostupné z: http://docplayer.cz/10826425-Magicke-ctverce-tomas-roskovec-uvod.html

2.4 Pascalův trojúhelník

Součástí učiva kombinatoriky je Pascalův trojúhelník. Autorem je Blaise Pascal, který se narodil 19. července 1623 v Clermontu v rodině matematika Etienna Pascala. Od dětství vynikal matematickým nadáním.

V roce 1654 Pascal v dopisech s francouzským matematikem P. Fermatem a nizozemským matematikem a fyzikem Ch. Huygensem konzultoval problematiku hazardních her a velmi přínosně se zasloužil o rozvoj myšlenek teorie pravděpodobnosti. Zabýval se otázkami kombinatoriky a výpočty binomických koeficientů. V „Pojednání o aritmetickém trojúhelníku" vyslovil několik základních pouček teorie pravděpodobnosti a kombinatoriky. Prvky binomického rozdělení pravděpodobnosti dávají známý Pascalův trojúhelník. Toto trojúhelníkové uspořádání binomických koeficientů bylo již známo dříve, ale až pod názvem „Pascalův trojúhelník" se rozšířilo do Evropy.[31]

Pro výpočet binomických koeficientů pomocí kombinačních čísel slouží tzv. Pascalův trojúhelník kombinačních čísel.[32]

n = 0	$\binom{0}{0}$	1
n = 1	$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$	1 + 1
n = 2	$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$	1 + 2 + 1
n = 3	$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$	1 + 3 + 3 + 1
n = 4	$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$	1 + 4 + 6 + 4 + 1

Obr. 2: Pascalův trojúhelník

[31] PŘÍHONSKÁ, Jana. *SEPAROVANÉ MODELY PASCALOVA TROJÚHELNÍKA* [online]. In: . [cit. 2018-04-02]. Dostupné z: https://kmd.fp.tul.cz/images/stories/vyuka/prihonska-mat_pro_praxi1/Pascal_3uhelnik.pdf

[32] JANUROVÁ, Eva a Miroslav JANURA. *Matematika na dlani*. Olomouc: Rubico, 2002. Na dlani. str. 97- 100. ISBN 80-85839-73-3.

Příklad[33]:

Kolika různými způsoby při pohybu dolů a doprava od písmene k písmeni je možné přečíst slovo OBRÁZEK (viz. Obr. 3 obrázek k úloze – Pascalův trojúhelník)

O	B	R	Á	Z	E	K
B	R	Á	Z	E	K	
R	Á	Z	E	K		
Á	Z	E	K			
Z	E	K				
E	K					
K						

Obr. 3: obrázek k úloze – Pascalův trojúhelník

Řešení:

Při čtení slova můžeme postupovat pouze ve dvou směrech: dolů a doprava. Symbolicky můžeme tuto skutečnost znázornit pomocí šipek ↓, →. Abychom se od počátečního písmene dostali k poslednímu, je nutno provést šest přesunů z výchozí pozice. Hledáme tedy počet všech podmnožin základní množiny o šesti prvcích, které jsou dány uvedenými směry postupu. Dostaneme $2^6 = 64$ různých podmnožin, které odpovídají hledanému počtu, jak je možné přečíst slovo obrázek.

Pro zkreslení zjednodušeného plánu situace využijeme uzlový graf, ve kterém vrcholy představují jednotlivá písmena (uzly grafu), jejich spojnice (hrany grafu) představují jednotlivé možnosti postupu čtení daného slova, viz obr. 4 obrázek k úloze – Pascalův trojúhelník. Ve vrcholech získané sítě je vepsán počet cest, vedoucích od startu do daného vrcholu při pohybu ve směru šipek. Počet dostupných cest je dán součtem cest, které vedou do předchozích písmen.

[33] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 50. ISBN 978-80-7494-017-0

•1	•1	•1	•1	•1	•1	•1
•1	•2	•3	•4	•5	•6	
•1	•3	•6	•10	•15		
•1	•4	•10	•20			
•1	•5	•15				
•1	•6					
•1						

Obr. 4: obrázek k úloze – Pascalův trojúhelník

Sečteme-li všechny získané hodnoty u písmene K, dostaneme celkový počet možností.

1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = **64**

2.5 Binomická věta

Definice[34]:

Pro všechna reálná čísla *a, b* a pro přirozené číslo *n* platí:

$(a + b)^2 = \binom{n}{0} . a^n + \binom{n}{1} . a^{n-1} . b + \binom{n}{2} . a^{n-2} . b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} . a . b^{n-1} + \binom{n}{n} . b^n$

Jednotlivé sčítance nazýváme členy binomického rozvoje.

k-tý člen má tvar $\binom{n}{k-1} . a^{n-k+1} . b^{k-1}$ Kombinační čísla v rozvoji jsou tzv. binomické koeficienty.

[34] JANUROVÁ, Eva a Miroslav JANURA. *Matematika na dlani*. Olomouc: Rubico, 2002. Na dlani. str. 99. ISBN 80-85839-73-3.

Definice[35]:

Již ze základní školy je známe vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, který se odvodil:

$(a + b)^2 = (a + b) \bullet (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Nyní si vypočítáme mocniny $(a + b)^n$ pro n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, které porovnáme s Pascalovým trojúhelníkem.

$(a + b)^0 = 1$	1
$(a + b)^1 = a + b$	1 1
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1

Výše lze vidět, že jednotlivé řádky v Pascalově trojúhelníku odpovídají numerickým koeficientům v mnohočlenu, který vznikne umocněním dvojčlenu a + b na n-tou, kde n = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Příklad: Umocněte[36]:

$$(a + b)^3 = \binom{5}{0} . a^5 . 3^0 + \binom{5}{1} . a^{5-1} . 3 + \binom{5}{2} . a^{5-2} . 3^2 + \binom{5}{3} . a^{5-3} . 3^3 + \binom{5}{4} . a^{5-4} . 3^4 + $$

$$+ \binom{5}{5} . a^{5-5} . 3^5 = a^5 + \frac{5!}{4! . 1!} . a^4 . 3 + \frac{5!}{3! . 2!} . a^3 . 9 + \frac{5!}{2! . 3!} . a^2 . 27 + \frac{5!}{1! . 4!} . a . 81 + $$

$$243 = a^5 + 15 . a^4 + 90 . a^3 + 270 . a^2 + 405 . a + 243$$

[35] CALDA, Emil a Václav DUPAČ. *Matematika pro gymnázia*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). str. 64-65 ISBN 978-80-7196-365-3.
[36] JANUROVÁ, Eva a Miroslav JANURA. *Matematika na dlani*. Olomouc: Rubico, 2002. Na dlani. str. 99. ISBN 80-85839-73-3.

2.6 Kombinatorika ve škole

„*Kombinatorika hraje v rozvoji matematického myšlení výraznou roli. Její význam je zejména v rozvoji logického myšlení a obecných kombinačních schopností, v neposlední řadě ji lze považovat za základ pro následné řešení různých pravděpodobnostních problémů. Je učivem hlavně středních škol, kde se omezuje na klasickou problematiku vytváření skupin předmětů a určování počtů všech skupin, které splňují určité podmínky*."[37] Na druhém stupni ZŠ se kombinatorické úlohy řeší také, ale pouze intuitivně, úsudkem nebo dosazováním hodnot bez použití vzorců a obecných kombinatorických pravidel. Žáci základních škol se s ní setkávají na různých matematických olympiádách a jiných soutěžích.[38]

„*Kombinatorika je předpokladem k úspěšnému zvládnutí dalších témat učiva, např. pravděpodobnosti, statistiky, teorie čísel, teorie informací, kódování, šifrování aj.*"[39]

„*Úlohou učitele je najít co nejlepší metodu budování kombinatorického myšlení u dětí, nejdříve bez znalostí kombinatorických pojmů. Žáci umí řešit kombinatorické hry, hlavolamy či rébusy o hodně dříve, než se seznámí s kombinatorickými pojmy*."[40]

Důležitou složkou při řešení kombinatorických úloh je kombinační myšlení, u kterého jde především o naučení a rozvoj následujících schopností a dovedností:

• „*Vybírat ze skupiny podle určitého pravidla.*

• *Uvědomovat si, zda v dané skupině existují prvky požadovaných vlastností.*

• *Rozdělovat prvky dané skupiny na základě určitého požadavku.*

• *Provádět uspořádání prvků dané skupiny daným způsobem.*

• *Poznávat, zda se jedná o skupiny uspořádané nebo neuspořádané.*

---

[37] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorika: jak ji možná neznáme* [online]. In: . [cit. 2018-04-02]. Dostupné z: file:///C:/Users/Admin/Desktop/KOMBINATORIKA-prez.pdf

[38] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorika: jak ji možná neznáme* [online]. In: . [cit. 2018-04-02]. Dostupné z: file:///C:/Users/Admin/Desktop/KOMBINATORIKA-prez.pdf

[39] BLAŽKOVÁ, Růžena, Milena VAŇUROVÁ a Květoslava MATOUŠKOVÁ. *Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty)*. Brno: Masarykova univerzita, 2002. str. 2. ISBN 80-210-3022-4.

[40] ŽILKOVÁ, Monika. Kombinatorické hry v školskej matematike. Math.ku.sk. 2003. [online]. [cit. 2017-10-17]. Dostupné z: http://math.ku.sk/data/konferenciasub/pdf2003/Zilkova.pdf

• *Rozlišovat, zda se prvky ve skupinách mohou nebo nemohou opakovat.*

• *Hledat pravidlo pro vyhledávání všech skupin splňujících dané podmínky.“* [41]

Řešení kombinatorických úloh, bychom mohli rozpracovat na jednotlivé elementy.

Elementy řešení úloh z kombinatoriky[42]:

1. *Analýza textu a získání vhledu do situace úlohy (sleduje se porozumění textu úlohy),*
2. *Výběr vhodné metody a strategie řešení (pozornost je věnována okamžiku rozhodování a volbě postupu řešení),*
3. *Vyjmenování všech možností (nejběžnější metoda pro řešení kombinatorických problémů; pozornost je věnována kontrole a systematičnosti zápisu),*
4. *Propedeutika pro pravidla součinu (pozornost je věnována intuitivnímu využití pravidla),*
5. *Propedeutika pro pravidlo součtu – umění třídit (pozornost je věnována schopnosti žáků roztřídit prvky množiny do dvou navzájem disjunktních podmnožin na základě daného kritéria),*
6. *Kdy jsou dva objekty „stejné“? (sledován je problém „rovnosti“ v matematickém smyslu a chápání rovnosti v běžném životě; pozornost je věnována rozhodovací fázi o „rovnosti“),*
7. *Grafické znázornění (pozornost je věnována využití grafického znázornění při řešení kombinatorických úloh z hlediska fáze řešení a jeho smyslu využití – jako východiska řešení, doplňujícího faktoru či pouhé ilustrace),*
8. *Divergentní úlohy – rozvoj divergentního myšlení (pozornost je věnována divergentním myšlenkovým procesům – hledání, objevování řešitelských strategií, vytváření nových strategií, schopnosti přetvářet osvojené zkušenosti; sledovány jsou dosažené výsledky žáků),*
9. *Uspořádání versus neuspořádání (pozornost je věnována problémům v rozhodovací fázi o uspořádaném či neuspořádaném výběru daných možností),*

[41] BUDÍNOVÁ, Irena, Růžena BLAŽKOVÁ, Milena VAŇUROVÁ a Helena DURNOVÁ. *Úlohy z matematiky pro bystré a nadané děti prvního stupně ZŠ, jejich učitele a rodiče: škály pro identifikaci nadání, zkušenosti s nadanými žáky*. Brno: Edika, 2016. str. 72 ISBN 978-80-266-1012-0.

[42] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 118. ISBN 978-80-7494-017-0.

10. *Prvky v objektech – nejvýše jednou, právě jednou, nebo i vícekrát? (pozornost je věnována analýze úlohy problémů s opakováním konkrétních prvků ve vytvářených konfiguracích),*
11. *Organizace a systém (pozornost je věnována vytváření organizačních principů* a systémů *v řešení úloh – nalezení všech možností daného výběru),*
12. *Interpretace výsledků (pozornost je věnována správné interpretaci výsledku a v souvislosti s tím hledání formalizace v matematickém poznání žáka),*
13. *Vytvoření úloh (pozornost je věnována samostatnosti při vytváření jednoduchých úloh s uplatněním kombinatorického přístupu).*

2.7 Kombinatorika v matematice na Slovensku [43]

Podle Štátneho vzdělávacího programu by měli žáci v oblasti kombinatoriky umět systematicky uspořádat daný počet prvků podle určitého předpisu (s možností opakování a bez opakování prvků), nakreslit strom logických možností, zjistit počet všech možností, využívat pravidlo součtu a součinu.

Ve vyučování ještě nepoužíváme pojmy variace, permutace, kombinace, neučíme žáky zjišťovat možnosti pomocí vzorců. Na určité počty všech r-členů variací z m prvků si vystačíme i s kombinatorickým pravidlem součinu. Při určování počtu všech permutací z n prvků, resp. počtu všech n-členů variací z n prvků, si také vystačíme s kombinatorickými pravidly součinu. Při určování počtu všech kombinací si stačí uvědomit, že jejich počet je k! krát menší jako počet variací, a teda opět si vystačíme s kombinatorickým pravidlem součinu.

Místo počet dvouprvkových kombinací (variací) z pěti prvků říkáme počet dvouprvkových podmnožin z pětiprvkové množiny nebo počet neuspořádaných (uspořádaných) dvojic z pěti prvků. Existuje mnoho různých způsobů jako zjistit počet všech možností. Žákům by se mělo ukázat co nejvíc z nich. Při vypisování všech

[43] Volný překlad z knihy: FULIER, Jozef, Attila KOMZSÍK, Márie KMEŤOVÁ, et al. *Matematika: Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií žiakov základných škol-Zbierka problémových úloh bežného života*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Fakulta stredoevrópskych štúdií, 2014. str. 159. ISBN 978-80-558-0664-8.

možností dbáme na to. Aby žáci používali nějaký systém. Pomocí vhodného systému je možné dostatečně rychle zjistit počet všech možností i bez jejich vypisování.

2.8 Kombinatorická pravidla

V následující kapitole se budu zabývat pravidlem součtu a součin, se kterými se žáci na 2. stupni ZŠ setkávají v různých logických úlohách (aniž by věděli, že se jedná o tyto pravidla). Nastíním základní pravidla pro počítání variací, permutací a kombinací (bez opakování, s opakováním), i když se žáci nejspíš s těmito funkcemi na klasické ZŠ nesetkají. S těmito kombinatorickými funkcemi se mohou setkat žáci např. s rozšířenou výukou matematiky nebo studenti víceletých gymnázii.

2.8.1 Kombinatorika obecně

„*Kombinatorika zkoumá skupiny (podmnožiny) prvků vybraných z jisté základní množiny. Podle toho, zda se prvky v jednotlivých skupinách mohou či nemohou opakovat, rozdělujeme skupiny prvků na skupiny s opakováním a skupiny bez opakování. Dále rozlišujeme, zda jsou vybrané skupiny uspořádané či nikoli. Vybíráme tedy k prvků z n prvků konečné podmnožiny* $\boldsymbol{N}$ $(k \in \boldsymbol{N},\ n \in \boldsymbol{N})$ *všech přirozených čísel a tvoříme (ne)uspořádané k-tice.*“[44]

2.8.2 Kombinatorické pravidlo součtu:

„*Prvním pravidlem kombinatoriky je kombinatorické pravidlo součtu. To je možné použít tehdy, když se nám podaří rozdělit zkoumané prvky (skupiny prvků) do několika tříd (množin), přičemž každý prvek patří právě do jedné třídy.*“[45]

[44] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 15. ISBN 978-80-7494-017-0.
[45] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 15. ISBN 978-80-7494-017-0.

„Je pak zřejmé, že celkový počet prvků je roven součtu počtu prvků ve všech třídách (za podmínky, že ani jedna z uvažovaných prvků nepatří do dvou nebo více tříd, tzn., že třídy jsou disjunktní).“[46]

Definice[47]:

Jsou-li $A_1, A_2, \ldots A_k$ konečné množiny, které mají po řadě $n_1, n_2, \ldots, n_k$ prvků, a jsou-li každé tyto dvě množiny disjunktní, pak počet prvků množiny

$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$

je roven $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Definice[48]:

Jestliže množina A_1 obsahuje n_1 prvků, množina A_2 má n_2 prvků, ….., množina A_k má n_k prvků a jestliže každé dvě z množin $A_1, A_2, \ldots A_k$ jsou disjunktní (tzn. průnik libovolných dvou množin je prázdný)

tj. $A_i \cap A_j = \{\}$, pro i ≠ j, kde i,j = 1, 2, …, k,

pak počet všech prvků sjednocení množin $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k = \bigcup_1^k A_i$

je roven součtu $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Definice [49]:

Nechť $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ jsou podmnožiny konečné množiny A, které jsou po dvou disjunktní (tedy pro každé i, j ∈ {1,2,3,…n} platí $A_i \cap A_j = \{\}$, kdykoliv i ≠ j) a jejichž sjednocením je celá množina A ($A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$). Pak platí

$|A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| = \sum_{i=1}^{n} A_i$

Důkaz: každý prvek $a \in A$ patří dle předpokladu do jedné z podmnožin

A_i (i = 1, 2, …, n), proto se na každé straně rovnosti vyskytuje právě jednou.

---

[46] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 15-16. ISBN 978-80-7494-017-0.
[47] PŘÍHONSKÁ, J.: Úvod do kombinatoriky. Tribun EU s r.o., Brno 2008, str. 14-17. ISBN 978-80-7399-456-3.
[48] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 15-16. ISBN 978-80-7494-017-0.
[49] HERMAN, Jiří, Radan KUČERA a Jaromír ŠIMŠA. *Seminář ze středoškolské matematiky*. 2., přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004. str. 6. ISBN 80-210-3528-5.

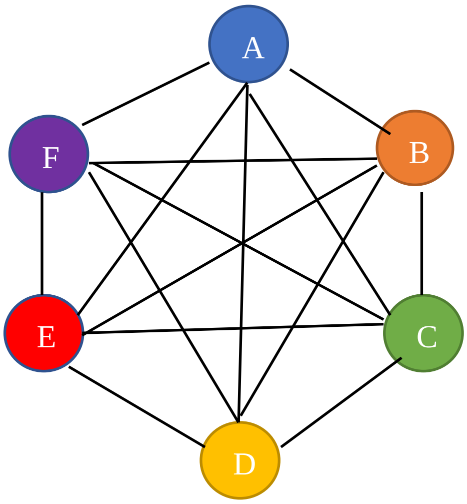
Příklad č.1[50]:

Tenisového turnaje se zúčastnilo 6 hráčů. Každý s každým hrál pouze jednou. Kolik her se odehrálo?

Řešení:

Hráči:	A, B, C, D, E, F
Výčtem prvků:	AB, AC, AD, AE, AF
	BC, BD, BE, BF
	CD, CE, CF
	DE, DF
	EF
Početně:	5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 her

Graficky:



Obr. 5: Uzlový graf

2.8.3 Kombinatorické pravidlo součinu

„Druhé pravidlo, které nazýváme kombinatorickým pravidlem součinu, je poněkud složitější. Při sestavování skupin o dvou prvcích je často známo, kolika způsoby můžeme vybrat první prvek a kolika způsoby prvek druhý, přitom počet způsobů výběru druhého prvku nezávisí na tom, jak byl vybrán první prvek. Nechť je první prvek možno

[50] JUSTOVÁ, Jaroslava. *Matematika pro 5. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 5. Praha: Alter, 2010. ISBN 9788072452125.

vybrat m *způsoby a druhý prvek* n *způsoby. Pak skupinu těchto prvků (*m, n*) lze vybrat* m • n *způsoby. Uvedenou vlastnost můžeme zobecnit pro výběr* k-*tic prvků.“*[51]

Definice[52]:

Jestliže množina A_1 obsahuje n_1 prvků, množina A_2 má n_2 prvků…, množina A_k má n_k prvků, pak počet všech možných uspořádaných k-tic, jejichž první složkou je libovolný prvek množiny A_1, druhou složkou libovolný prvek množiny A_2, …, k-tou složkou libovolný prvek množiny A_k, je roven součinu

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i.$$

Definice [53]:

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat právě n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu právě n_2 způsoby atd., až k-tý člen po výběru (k- 1) - ho členu právě n_k způsoby, je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$

Definice[54]:

Jestliže množina A_1 obsahuje n_1 prvků, množina A_2 má n_2 prvků, množina A_k má n_k prvků, pak počet všech možných uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby, … k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven součinu $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$

Definice[55]:

Pravidlo součinu je poněkud složitější. Při sestavování skupin o dvou prvcích je často známo kolika způsoby můžeme vybrat první prvek a kolika způsoby prvek druhý, přitom počet způsobů výběru druhého prvku nezávisí na tom, jak byl vybrán první prvek. Nechť první prvek je možno vybrat *m* způsoby a druhý prvek *n* způsoby. Pak dvojici těchto prvků lze vybrat *mn* způsoby.

[51] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 16. ISBN 978-80-7494-017-0
[52] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 16. ISBN 978-80-7494-017-0
[53] JIRÁSEK, František, Karel BRANIŠ, Stanislav HORÁK a Milan VACEK. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU*. 6. vydání. Praha: Prometheus, 2016. str. 47. ISBN 978-80-7196-349-3.
[54] PŘÍHONSKÁ, J.: Úvod do kombinatoriky. Tribun EU s r.o., Brno 2008, str. 14-17. ISBN 978-80-7399-456-3.
[55] VILENKIN, Naum Jakovlevič. Kombinatorika. Vyd. 1. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1977, str. 19-20. 298 s.

Důkaz pravidla součinu je velmi jednoduchý. Stačí si pouze uvědomit, že každé z *m* způsobu výběru objektu *A* můžeme zkombinovat s *n* způsoby výběru objektu *B*. A to nás vede k *mn* způsobům výběru dvojic (*A*, *B*).[56]

Pravidlo součinu názorně ilustruje tabulka:

$$
\begin{array}{ccc}
(A_1, B_{11}), & \dots, & (A_1, B_{1n}) \\
(A_2, B_{21}), & \dots, & (A_2, B_{2n}) \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
(A_i, B_{i1}), & \dots, & (A_i, B_{in}) \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
(A_m, B_{m1}), & \dots, & (A_m, B_{mn}).
\end{array}
$$

V této tabulce $A_1, \dots, A_m$ označují *m* způsoby výběru objektu A; $B_{i1}, \dots, B_{in}$ označují *n* způsobů výběru objektu *B* za předpokladu, že objekt *A* byl vybrán *i* – tým způsobem. Je zřejmé, že tabulka obsahuje všechny způsoby výběru dvojice (*A*, *B)* a skládá se z *mn* prvků.

Jestliže způsoby výběru objektu *B* nezávisí na tom, jak byl vybrán objekt *A*, pak místo uvedené tabulky dostaneme tabulku jednodušší:

$$
\begin{array}{ccc}
(A_1, B_1), (A_1, B_2), & \dots, & (A_1, B_n) \\
(A_2, B_1), (A_2, B_2), & \dots, & (A_2, B_n) \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
(A_m, B_1), (A_m, B_2), & \dots, & (A_m, B_n).
\end{array}
$$

[56] VILENKIN, Naum Jakovlevič. Kombinatorika. Vyd. 1. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1977, str. 19-20. 298 s.

Příklad č.2[57]:

Klára odjela na tábor a zabalila si s sebou 5 triček, 3 kalhoty a 2 sukně. Kolika způsoby se může Klára obléknout tak, aby měla vždy na sobě jiný pár: tričko a spodek- kalhoty nebo sukni

Řešení:

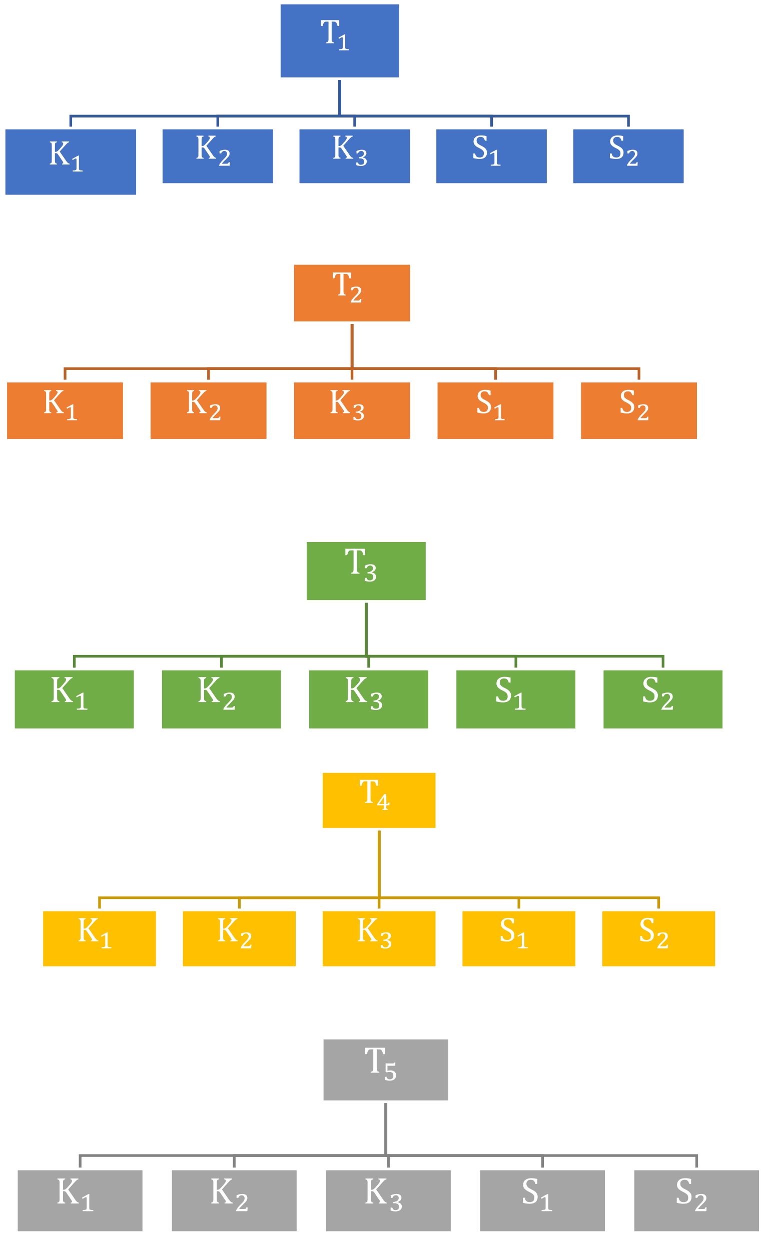
Výčtem prvků:

T_1K_1	T_2K_1	T_3K_1	T_4K_1	T_5K_1
T_1K_2	T_2K_2	T_3K_2	T_4K_2	T_5K_2
T_1K_3	T_2K_3	T_3K_3	T_4K_3	T_5K_3
T_1S_1	T_2S_1	T_3S_1	T_4S_1	T_5S_1
T_1S_2	T_2S_2	T_3S_2	T_4S_2	T_5S_2

Početně: $\mathbf{5 \cdot 5 = 25\ způsoby}$

[57] KOVÁČIK, Ján a Iveta SCHULZOVÁ. *Řešené příklady z matematiky pro základní školy a osmiletá gymnázia*. Praha: ASPI, 2004. ISBN 80-7357-039-4.

Graficky:



Obr. 6: vzorový příklad č. 2

2.8.4 Variace

„Variace je, podobně jako permutace, obměna pořadí. Je zde ovšem důležitý rozdíl. V permutaci máme k dispozici n prvků a vytváříme n*-členné skupiny. Vytváříme-li* variaci, *máme k* dispozici n *prvků a vytváříme* k*-členné skupiny. Jinými slovy vybíráme* k *prvků ve stanoveném pořadí z daných* n *prvků. Je tedy vidět, že permutace je speciální případ variace, kdy* k = n*.“*[58]

2.8.5 Variace bez opakování

Je charakteristická tím, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou. Buď prvek ve variace je, nebo tam není, ale nesmí tam být vícekrát. [59]

Definice[60]:

Každá uspořádaná *k*-tice vybraná z *n* prvků (k ≤ n) tak, že každý prvek se v dané k-tici vyskytuje nejvýše jednou, se nazývá variace k-té třídy z n prvků bez opakování.

Označení: $V_k(n)$

Počet variací k-té třídy z n prvků bez opakování:

$$V_k(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definice[61]:

Nechť k ≤ n a nechť A je konečná n-prvková množina. Libovolné pořadí z některé k-prvkové podmnožiny množiny A nazveme k-prvkovou variací z prvků n prvkové množiny A (stručně k-prvkovou variací z n prvků). Je to tedy uspořádaná *k*- tice $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ prvků z A, kde se každý prvek množiny A vyskytuje nejvýše jednou.

[58] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 27. ISBN 978-80-7494-017-0
[59] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 27. ISBN 978-80-7494-017-0
[60] JANUROVÁ, Eva a Miroslav JANURA. *Matematika na dlani*. Olomouc: Rubico, 2002. Na dlani. str. 97-100. ISBN 80-85839-73-3.
[61] HERMAN, Jiří, Radan KUČERA a Jaromír ŠIMŠA. *Seminář ze středoškolské matematiky*. 2., přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004. str. 10-16. ISBN 80-210-3528-5.

Definice[62]:

Pro počet k-členné variace bez opakování z n prvků budeme užívat symbol V(k, n).

k-členná variace z n prvků $k, n \in$ N, $k \leq n$ je každá uspořádaná k-tice sestavená z těchto *n* prvků tak, že všechny prvky v ní jsou různé (tj. neopakují se).

Počet všech takových variací V(k, n) určíme dle vzorce

$$V(k, n) = n \bullet (n - 1) \bullet (n - 2) \bullet \ldots \bullet (n - k + 1) = \frac{n \bullet (n-1) \bullet \ldots \bullet (n-k+1)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Definice[63]:

Nechť $k, n \in N, 1 \leqq k \leqq n$. Variace k-té třídy z n prvků je každá uspořádaná k- *p*rvková skupina sestavená pouze z těchto *n* prvků tak, že každá je v ní obsažen nejvýše jednou.

Variace k-té třídy z n prvků označujeme $V_k(n)$.

$V_k(n) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1)$

Tento vzorec se zapisuje častěji ve tvaru

$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$, kde n! čteme n faktoriál.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots (n-2)(n-1)n$

pro každé $n \in N$. Pro n = 0 definujeme 0! = 1.

62 PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 28. ISBN 978-80-7494-017-0

63 JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU*. 3. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1995, Učebnice pro střední školy. str. 49. ISBN 80-7196-012-8.

Příklad[64]: Kolik je možno sestavit trikolór z těchto barev: černá, modrá, zelená, žlutá? V každé trikoloře se může vyskytovat barva pouze jednou.

Výčtem prvků: ČMZ, ČZM, ČMŽ, ČŽM, ČZŽ, ČŽZ

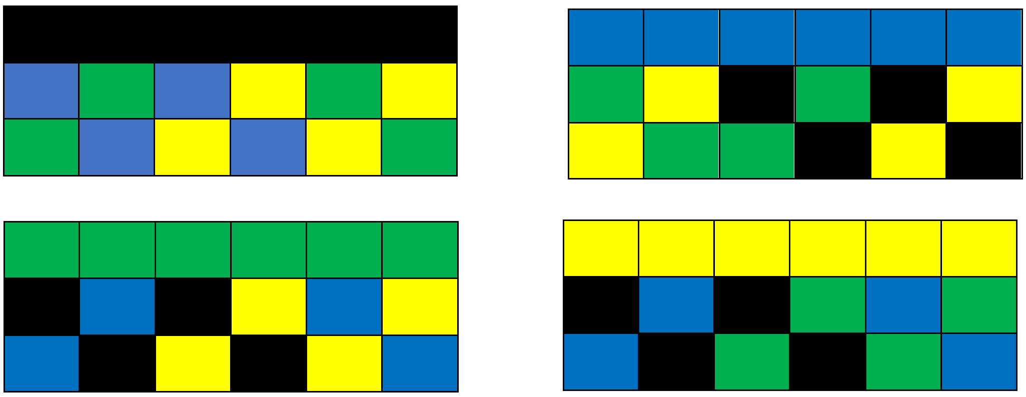
MZŽ, MŽZ, MČZ, MZČ, MČŽ, MŽČ

ZČM, ZMČ, ZČŽ, ZŽČ, ZMŽ, ZŽM

ŽČM, ŽMČ, ŽČZ, ŽZČ, ŽMZ, ŽZM

Početně: $V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Graficky:



Obr. 7: grafické znázornění vzorového příkladu

[64] JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU*. 3. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1995, Učebnice pro střední školy. str. 49. ISBN 80-7196-012-8.

2.8.6 Variace s opakováním

Definice[65]:

Každá uspořádaná k-tice vytvořena z n prvků tak, že každý prvek se může vyskytovat v dané k-tici vícekrát (nejvýše k-krát), se nazývá variace k-té třídy z n prvků s opakováním.

Označení: V_k' (n)

Počet variací k-té třídy z n prvků s opakováním: V_k' (n) = n^k, pro každé k, n ∈ N, kde k ≤ n.

Definice[66]:

Variace *k*-té třídy s opakováním z *n* prvků je každá uspořádaná *k*-prvková skupina sestavená pouze z těchto *n* prvků. Každé místo *k*-prvkové skupiny může být obsazeno *n* způsoby a všech *k* míst může být obsazeno $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{\text{k-krát}} = n^k$.

Počet variací k-té třídy s opakováním z n prvků, vypočteme podle vzorce

V_k' (n) = n^k.

[65] JANUROVÁ, Eva a Miroslav JANURA. *Matematika na dlani*. Olomouc: Rubico, 2002. Na dlani. str. 97- 100. ISBN 80-85839-73-3.
[66] JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU*. 3. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1995., str. 61. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-012-8.

Příklad: Kolik různých pěticiferných čísel lze vytvořit z číslic 4,7?

Výčtem prvků:

77777	77774	77747	77477	74777	47777
44444	44447	44474	44744	47444	74444
77744	77447	74477	44777	77444	74447
44477	44774	47744	47774	74747	47477
47774	74447	47744	44774	47474	74747
47447	74774				

Početně: $V_5{}'(2) = 2^5$.

2.8.7 Permutace

O permutaci se dá říct, že je to vlastně obměna pořadí.

2.8.8 Permutace bez opakování

„Obecně můžeme říct, že permutace z n prvků bez opakování je každá uspořádaná n-tice vybraná z n prvků, přičemž každý prvek se v této permutaci vyskytuje právě jednou.“[67]

Definice[68]:

Zvláštní případ variací, kdy n = k. Počet uspořádání konečného počtu prvků, kdy se každý prvek vyskytuje právě jednou, se nazývá permutace bez opakování.

Označení: P(n)

Počet permutací z n prvků bez opakování: P(n) = n!, pro každé n ∈ N.

[67] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 20. ISBN 978-80-7494-017-0
[68] JANUROVÁ, Eva a Miroslav JANURA. *Matematika na dlani*. Olomouc: Rubico, 2002. Na dlani. str. 97-100. ISBN 80-85839-73-3.

Definice[69]:

Permutace z *n* prvků je každá variace *n*-té třídy z těchto v prvků.

Počet všech permutací z *n* prvků označíme P(n*)*

$P(n) = V_n(n) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-n+1) = n(n-1)(n-2) \ldots 1$, tj. $P(n) = n!$

Příklad: Určete kolika způsoby lze na okno vedle sebe postavit 7 různých květináčů.

Možnosti uspořádání květináčů, určíme pomocí počtu permutací ze sedmi prvků bez opakování.

$P(7) = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5760$

Odpověď: Sedm různých květináčů můžeme vedle sebe na parapet postavit 5760 způsoby.

(příklad od autora DP)

[69] JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU*. 3. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro střední školy. str. 55. ISBN 80-7196-012-8.

2.8.9 Permutace s opakováním

Definice[70]:

Uspořádaná n-tice, která je sestavená tak, že mezi n prvky je k skupin, které mají $\mathrm{n_1}, \mathrm{n_2}, \dots, \mathrm{n_k}$ ($\mathrm{k} < \mathrm{n}$; $\mathrm{n_1} + \mathrm{n_2} + \dots + \mathrm{n_k} = n$) stejných elementů, se nazývá permutace s opakováním.

Označení: $\mathrm{P}'_{n_1,n_{2,\dots,}n_k}(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_{2!,\dots,}n_{k!}}$, pro každé k, n ∈ N, k < n.

Definice[71]:

Permutace n prvků s opakováním mohou být tvořeny ze dvou skupin prvků o r a n – r prvcích nebo z m skupin o $\mathrm{k_1}, \mathrm{k_2}, \dots, \mathrm{k_m}$ prvcích, kde $\mathrm{k_1} + \mathrm{k_2} + \dots + \mathrm{k_m} = n$. Počet všech permutací s opakováním z n prvků složených z $\mathrm{k_1}, \mathrm{k_2}, \dots, \mathrm{k_m}$ skupin

označíme $\mathrm{P}'_{\mathrm{k_1,k_2,\dots,k_m}}(n)$,

$\mathrm{P}'_{\mathrm{k_1,k_2,\dots,k_m}}(n) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2!,\dots,k_m!}$,

resp. pro dvě skupiny prvků

$\mathrm{P}'_{\mathrm{r},\ \mathrm{n-r}}(n) = \frac{n!}{\mathrm{r!(n-r)!}} = \binom{n}{r}$ (čti: n nad r)

Příklad[72]: Kolika způsoby lze ubytovat deset hostů do dvou třílůžkových a dvou dvoulůžkových pokojů? Přidělení hostů na jeden pokoj není ovlivněno tím, jak si tito hosté rozdělí postele.

Počet rozdělení určíme pomocí počtu permutací se skupinami, které obsahují 2, 2, 3 a 3 prvky.

$$\mathrm{P}'_{2,2,3,3}(10) = \frac{10!}{2!.2!.3!.3!} = \frac{10\,.\,9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3!}{3!\,.\,3!\,.\,2\,.\,2} = 25200$$

Odpověď: Hosty můžeme rozdělit 25200 způsoby.

---

70 JANUROVÁ, Eva a Miroslav JANURA. *Matematika na dlani*. Olomouc: Rubico, 2002. Na dlani. str. 97- 100. ISBN 80-85839-73-3.

71 JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU*. 3. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1995. str. 55-59, Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-012-8.

72 JANUROVÁ, Eva a Miroslav JANURA. *Matematika na dlani*. Olomouc: Rubico, 2002. Na dlani. str. 97- 100. ISBN 80-85839-73-3.

2.8.10 Kombinace

Kombinace se liší od permutací a variací a to tím, že v kombinacích nezáleží na pořadí prvků.

2.8.11 Kombinace bez opakování

Definice[73]:

k-členná kombinace bez opakování z n prvků je každá neuspořádaná k-tice (množina k prvků) vybraná z daných n prvků. V množině se žádné prvky neopakují (každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou).

Definice[74]:

Každá k-prvková podmnožina n-prvkové množiny (k ≤ n, každý prvek je v dané podmnožině zastoupen nejvýše jednou, na pořadí prvků nezáleží) se nazývá kombinace k-té třídy z n prvků bez opakování.

Označení: $\mathrm{C}_k(n)$

Počet kombinací k-té třídy z n prvků bez opakování:

$\mathrm{C}_k(n) = \frac{n!}{\mathrm{k}!\cdot(n-k)!}$, pro každé $k, n \in \mathrm{N}_0, k \leq \mathrm{n}$.

[73] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 33. ISBN 978-80-7494-017-0

[74] JANUROVÁ, Eva a Miroslav JANURA. *Matematika na dlani*. Olomouc: Rubico, 2002. Na dlani. str. 97-100. ISBN 80-85839-73-3.

Definice[75]**:** Kombinace K-té třídy z n prvků je každá k-prvková podmnožina množiny určené těmito n prvky.

Označujeme je $C_k(n)$.

$$C_k(n) = \binom{n}{k},$$

kde $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Příklad: Na písemné zkoušce z dějepisu je 16 žáků, z nichž čtyři jsou na zkoušku výborně připraveni. Polovina žáků má vždy stejné zadání úlohy. Kolika způsoby můžeme žáky rozdělit, aby v obou skupinách byli vždy dva výborně připravení žáci?

Řešení: Počet způsobů, kterými můžeme rozdělit čtyři výborně připravené žáky do dvou skupin po dvou žácích v každé skupině, je $C_2(4)$. Ke každé dvojici můžeme připojit 6 žáků $C_6(12)$ způsoby. Celkový počet způsobů, kterými žáky, můžeme rozdělit je:

$$n = C_2(4) \,.\, C_6(12) = \binom{4}{2} \,.\, \binom{12}{6} = 5544$$

Odpověď: Žáky můžeme rozdělit 5544 způsoby.

2.8.12 Kombinace s opakováním

Definice[76]**:**

K-členná kombinace s opakováním z n prvků (k, n ∈ N) je každá neuspořádaná k- tice (množina k prvků) sestavená (vybrána) z těchto n prvků, přičemž všechny prvky v ní nemusí být nutně různé (tj. mohou se opakovat).

[75]JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU*. 3. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1995. str. 49, Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-012-8.
[76] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 37. ISBN 978-80-7494-017-0

Definice[77]**:**

Skupiny s k prvky vybranými z n prvků ($k \leq$ n) tak, že každý prvek se může ve skupině vyskytovat vícekrát (nejvýše k-krát) a nezáleží na jejich pořadí, se nazývají kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním.

Označení: $C'_k(n)$

Počet kombinací k-té třídy z n prvků s opakováním:

$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$, pro každé k, n $\in$ N, $k \leq$ n.

Definice[78]**:**

Kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním je:

- k-prvková skupina prvků, vybraných z n-prvkové základní množiny Z tak, že se kterýkoliv prvek může ve skupině libovolněkrát opakovat,
- neuspořádaný výběr k prvků z n-prvkové základní množiny Z s vracením.

Počet kombinací k-té třídy z n prvků s opakováním: $C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$, n, k $\in N_0$

Definice[79]**:**

k-členná kombinace s opakování z n prvků (k, n $\in$ N) je každá neuspořádaná k- tice (množina k prvků) sestavená z těchto n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k-krát. Počet všech k-čleých kombinací s opakováním se značí C´(k, n).

Vzorec: C´ (k, n) = (n + k − 1 k)

---

[77]JANUROVÁ, Eva a Miroslav JANURA. *Matematika na dlani*. Olomouc: Rubico, 2002. Na dlani. str. 97-100. ISBN 80-85839-73-3.

[78] HRADECKÝ, Pavel, Matěj TURČAN a Anna MADRYOVÁ. *Pravděpodobnost*. 3. vyd. Ostrava: VŠB-Technická univerzita Ostrava, 2012. str. 1-29. ISBN 978-80-248-2617-2.

[79]CALDA, Emil a Václav DUPAČ. *Matematika pro gymnázia*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). str. 46. ISBN 978-80-7196-365-3.

Příklad: V obchodě měli čtyři různé druhy lízátek, které stojí 8 Kč za 1 ks. Kolika způsoby lze zakoupit lízátko, máme-li k dispozici 56 Kč? Každý nákup se skládá ze sedmi kusů a jednotlivé druhy lízátek mohou být zastoupeny vícekrát (max. 7x)

$$C'_7(4) = \binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\,.3!} = \frac{10\,.\,9\,.\,8\,.\,7!}{7!\,.\,3\,.\,2} = 5\,.\,3\,.\,8 = 120$$

Odpověď: Lízátka jde nakoupit 120 způsoby.

3 Pravděpodobnost

„Pravděpodobnost jevu je míra možnosti uskutečnění tohoto jevu.“ [80]

3.1 Náhodný pokus a náhodný jev

Pod pojmem pokus, si mnozí vybaví hodinu fyziky či chemie na základní škole či střední škole a s nimi spojené pokusy. Tyto pokusy většinou probíhali v laboratorních podmínkách a většinou byl výsledek pokusu znám. Ohlášený výsledek hodně záležel na dodržení podmínek pokusu, a pokud byly tyto podmínky dodrženy, očekávaný výsledek se dostavil. Výsledek pokusu byl tedy jednoznačně předurčen podmínkám, za kterými pokus probíhal.

Setkáváme se ale s velkým množstvím pokusů (obecně činností), jejichž výsledek může být různý, i když se snažíme dodržet veškeré podmínky pokusu. Důležitá slova jsou „snažíme dodržet“. Na rozdíl od laboratorních podmínek je těchto podmínek příliš mnoho a dodržet je bývá velmi obtížné. Znamená to, že tyto podmínky, které předurčují výsledek pokusu, jsou obtížně kontrolovatelné.

Pokud např. cestujeme každé ráno do práce stejným autobusem po stejné trase, ve stejný čas dle jízdního řádu, nikdy nejsme schopni určit, jak přesně dlouho pojedeme.

Náhodným pokusem tedy budeme rozumět takovou činnost, jejíž výsledek není jednoznačně předurčen podmínkami, za kterých pokus probíhá, a tento pokus je (alespoň teoreticky) mnohonásobně opakovatelný za stejných podmínek.[81]

„*Jedním z cílů teorie pravděpodobnosti je nahradit neurčitá tvrzení o výsledcích náhodných pokusů mírou početnosti výsledků těchto výsledků a dále zavést pravidlo pro počítání s těmito mírami*.“[82]

Lidstvo už od nepaměti zajímalo, jaké jsou šance na vítězství v některých jednoduchých hrách např.: házení mincí, losování z osudu, kostky, karetní hry apod.

---

[80] HRADECKÝ, Pavel, Matěj TURČAN a Anna MADRYOVÁ. *Pravděpodobnost*. 3. vyd. Ostrava: VŠB-Technická univerzita Ostrava, 2012. str. 1-29. ISBN 978-80-248-2617-2.
[81] MAREK, Luboš. *Pravděpodobnost*. Praha: Professional Publishing, 2012. str. 13-15. ISBN 978-80-7431-087-4.
[82] MAREK, Luboš. *Pravděpodobnost*. Praha: Professional Publishing, 2012. str. 13. ISBN 978-80-7431-087-4.

Počátky pravděpodobnosti jsou spjaty právě s těmito hrami. Jsou to hry, jejichž výsledky jsou výsledkem realizace náhodného pokusu. [83]

„Pokus, probíhající za stejných podmínek nebo přibližně stejných podmínek, u kterých nemůžeme určit jejich výsledek, se nazývá náhodný pokus."[84]

„Náhodným jevem je jakékoliv tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o kterém lze po uskutečnění pokusu jednoznačně rozhodnout, zda je při dané realizaci pokusu pravdivé či nepravdivé."[85]

„Výsledek náhodného pokusu, o kterém má smysl tvrdit, že nastal nebo nenastal, se nazývá náhodný jev."[86]

3.2 Náhodná veličina

Většina náhodných pokusů má výsledek vyjádřený reálným číslem. Ať již něco měříme např.: výška, váha člověka, váha zboží, rychlost nebo počítáme např.: počet událostí, počet voličů, počet zákazníků u pokladny, výsledek je číslo.

„I v případě, že výsledek náhodného pokusu je kvalitativní povahy (barva očí, stupeň dosaženého vzdělání, pohlaví apod.), stejně většinou výsledek převádíme na čísla – určujeme počet, relativní četnost atd.

V těchto případech tedy pracujeme s náhodným pokusem, jehož prostor elementárních jevů S je množina reálných čísel R nebo nějaká její podmnožina. Potom hodnotou náhodné veličiny X budeme rozumět výsledek náhodného pokusu, vyjádřený reálným číslem."[87]

[83] MAREK, Luboš. *Pravděpodobnost*. Praha: Professional Publishing, 2012. str. 13-15. ISBN 978-80-7431-087-4.
[84] JANUROVÁ, Eva a Miroslav JANURA. *Matematika na dlani*. Olomouc: Rubico, 2002. Na dlani. Str. 100. ISBN 80-85839-73-3.
[85] MAREK, Luboš. *Pravděpodobnost*. Praha: Professional Publishing, 2012. str. 13-15. ISBN 978-80-7431-087-4.
[86] JANUROVÁ, Eva a Miroslav JANURA. *Matematika na dlani*. Olomouc: Rubico, 2002. Na dlani. Str. 100. ISBN 80-85839-73-3.
[87] MAREK, Luboš. *Pravděpodobnost*. Praha: Professional Publishing, 2012. str. 41. ISBN 978-80-7431-087-4.

Definice[88]:

Mějme pravděpodobnostní pole $\{S, \Omega, P\}$. Náhodná veličina X je reálná funkce X(E) prvků E prostoru elementárních jevů S taková, že pro každé reálné x je množina $\{E \in S; X(E) \leq x\}$ náhodným jevem (tj. prvkem systému Ω).

3.3 Historie pravděpodobnosti

Pravděpodobnost chápeme v matematické teorii pravděpodobnosti jako vlastnost jevů okolního světa (tzv. objektivní pravděpodobnost), je ji ale také možné chápat jako vlastnost našich znalostí, našeho uvažování, jako míru naší jistoty o správnosti nějakého tvrzení (tzv. subjektivní pravděpodobnost). Obě tato pojetí nebyla v 17. a 18. století přesně oddělena. Co se týče druhého pojetí, stalo se postupně spíše doménou matematicky orientovaných filozofů např. Bolzan-Wissenschaftslehre, 1837 nebo Carnap-Logical Foundations of Probability, 1950. [89]

Od nepaměti se lidstvo setkávala s náhodnými jevy, ale k jejich matematickému zkoumání přikročilo až v novověku. Počátkem teorie pravděpodobnosti je všeobecně považována korespondence, kterou v roce 1654 spolu vedli Blaise Pascal a Pierre de Fermat. Příčin tohoto poměrně pozdního počátku matematického přístupu k jevu náhody je asi více, ale můžeme je rozdělit do dvou skupin:

1. Tuto skupinu by bylo možno nazvat příčinami epistemologickými. Příčiny spočívají v tom, že nikdo neviděl (nerozpoznal) žádnou souvislost mezi matematikou na straně jedné a náhodnými jevy na straně druhé. Co se matematiky týče, byla do ní tradičně zahrnována geometrie, aritmetika a algebra a zde se nic náhodného nevyskytovalo. Pokud se náhody týče, bylo k ní přistupováno v podstatě dvojím způsobem: 1. Náhoda byla jistým způsobem považovány za projev vůle tajemného božstva a jejich zkoumání náleželo do kompetence kněží, nikoli matematiků. 2. Náhoda

[88] MAREK, Luboš. *Pravděpodobnost*. Praha: Professional Publishing, 2012. str. 41. ISBN 978-80-7431-087-4.

[89] MAČÁK, KAREL: *Poznámky k formování teorie pravděpodobnosti v XVII. a XVIII. století.*, In: Bečvář, Jindřich (editor); Fuchs, Eduard (editor): *Historie matematiky. II. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 21. 8. – 24. 8. 1995, Sborník.* (Czech). Praha: Prometheus, 1997. str. 31 .80-7196-046-2

byla považována za synonymum pro neznalost všech příčin a kauzálních vazeb, což znamená odmítnutí objektivní existence.

2. Skupinu by bylo možno nazvat příčinami utilitaristickými. Tyto příčiny spočívají v tom, že matematické zkoumání náhodných jevů nebylo nutné. Nikdo ho totiž k ničemu nepotřeboval. „*Nutnost přesného popisu náhodných jevů se objevila v souvislosti s rozvojem např. mořeplavby, obchodu, moderního buržoazního státu a z toho plynoucího vzniku demografie a pojišťovnictví, jednak v souvislosti s rozvojem exaktních přírodních věd (hlavně astronomie a experimentální fyziky) a z toho plynoucí nutnosti zpracovávat výsledky měření zatížené náhodnými chybami.*[90] „

Tyto skutečnosti mohly být příčinou toho, že matematická teorie pravděpodobnosti začala vznikat v 16. století, i když její základní principy jsou velice jednoduché. Velmi významnou roli při jejím vzniku sehrály „odrazového můstku" hazardní hry a sázky, obzvláště hra v kostky. [91]

Za datum vzniku teorie pravděpodobnosti je tedy považován rok 1654. V té době už byly ustáleny dva typy problémů z oblasti hazardních her a sázek. Ty sloužily formující se teorii pravděpodobnosti jako základní materiál:

Prvním typem problémů bylo kombinatorické, které se týkalo např. toho, kolika způsoby může padnout jistý počet čísel při házení jednou, dvěma, třemi kostkami. Velmi podobného úlohy se objevují v teorii pravděpodobnosti i dnes.

„*Druhý typ problémů má dnes význam čistě historický a týkal se tzv. úlohy o rozdělení sázky, kterou lze formulovat v nejjednodušší podobě takto: Dva hráči hraji sérii her o nějakou částku A tuto částku získá ten hráč, který jako první vyhraje k her. Pravděpodobnost výhry v každé jednotlivé hře je pro oba hráče stejná (oba hráči jsou „stejně dobří"). Série her je předčasně ukončena ve chvíli, kdy jednomu hráči chybí do výhry m her, druhému hráči chybí do výhry n her. Jak má být spravedlivě rozdělena*

[90] MAČÁK, KAREL: Poznámky k formování teorie pravděpodobnosti v XVII. a XVIII. století. In: Bečvář, Jindřich (editor); Fuchs, Eduard (editor): *Historie matematiky. II. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 21. 8. – 24. 8. 1995, Sborník.* (Czech). Praha: Prometheus, 1997. str. 31 .80-7196-046-2
[91] MAČÁK, KAREL: *Poznámky k formování teorie pravděpodobnosti v XVII. a XVIII. století.*, In: Bečvář, Jindřich (editor); Fuchs, Eduard (editor): *Historie matematiky. II. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 21. 8. – 24. 8. 1995, Sborník.* (Czech). Praha: Prometheus, 1997. str. 31 .80-7196-046-2

částka A mezi hráče?[92]" Oba typy problémů lze formulovat bez použití pojmu „pravděpodobnost" a původně byly formulovány bez použití pravděpodobnosti.

3.4 Axiomatické zavedení pravděpodobnosti

Definice[93]:

Nechť $\boldsymbol{A}$ je jevové pole. Pravděpodobnost jevu $\mathbf{A} \in \boldsymbol{A}$ je reálné číslo P(A) splňující 3 axiomy:

1. $\mathrm{P(A)} \geq 0$ axiom nezápornosti,
2. P(I) = 1 axiom jednotky,
3. Jsou-li jevy A_1, A_2, ... navzájem neslučitelné, pak platí:
   $\mathrm{P}(A_1 + A_2 + \ldots) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) + \ldots$ axiom aditivity.

Uspořádaná trojice $[\Omega, \boldsymbol{A}, \mathrm{P}]$ se nazývá pravděpodobnostní prostor.

Definice[94]:

Nechť Ψ je pole náhodných jevů. Libovolnou reálnou množinou funkce *P*, definovanou na Ψ, nazveme pravděpodobností (pravděpodobnostní funkcí, pravděpodobnostní mírou, rozdělením pravděpodobnosti), jestliže splňuje tyto podmínky:

1. $A \in \Psi \Rightarrow \mathrm{P}(A) \geq 0$
2. P(S) = 1
3. $\{A_i\}_i \subset \Psi, A_i \cap A_j = \emptyset, \mathrm{i} \neq \mathrm{j} \Rightarrow \mathrm{P}(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.

Číslo *P(A)* nazýváme pravděpodobností náhodného jevu *A*.

Vztahům 1–3 říkáme axiomy pravděpodobnosti. Trojice (S, Ψ, P) se nazývá pravděpodobnostní prostor, někdy také pravděpodobnostní pole.

---

92 MAČÁK, KAREL: Poznámky k formování teorie pravděpodobnosti v XVII. a XVIII. století In: Bečvář, Jindřich (editor); Fuchs, Eduard (editor): *Historie matematiky. II. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 21. 8. – 24. 8. 1995, Sborník.* (Czech). Praha: Prometheus, 1997. str. 31 .80-7196-046-2

93 HRADECKÝ, Pavel, Matěj TURČAN a Anna MADRYOVÁ. *Pravděpodobnost*. 3. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2012. str. 1-29. ISBN 978-80-248-2617-2.

94 LINDA, Bohdan. *Pravděpodobnost*. Vyd. 2. Pardubice: Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, 2011. str. 11-36. ISBN 978-80-7395-430-7.

Definice [95]:

Předpokládáme, že $(\Omega\ , \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Prvky množiny Ω budeme nazývat elementární jevy a značit ω; prvky σ – algebry $\mathcal{A}$ budeme nazývat jev a značit je velkými písmeny se začátku abecedy.

Pravděpodobnost P je definována jako míra na $\mathcal{A}$ s vlastností

$\mathrm{P}\,(\Omega) = 1$, tj. P je množinová funkce na $\mathcal{A}$ s vlastnostmi:

- $\mathrm{P}\,(\mathrm{A}) \geq 0$, $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$;
- $\mathrm{P}\,(\Omega) = 1$, $\mathrm{P}\,(\emptyset) = 0$;
- $\mathrm{P}\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$, je-li $\{A_n\}$ posloupnost po dvou disjunktních jevů.

Trojice $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ se nazývá pravděpodobnostní prostor.

3.4.1 Klasická definice pravděpodobnost

Název klasická definice pravděpodobnosti vychází z toho, že byla první zformulovanou definicí pravděpodobnosti, vycházející z teoretických úvah o podstatě náhodného pokusu. Tuto definici lze použít jenom pro pokusy, mající konečný počet výsledků.[96] Zavedl ji statistik Laplace.

Definice[97]:

Nechť $[\Omega, \boldsymbol{A}, \mathrm{P}]$ je pravděpodobnostní prostor, kde základní prostor Ω obsahuje konečný prostor **n** stejně možných elementárních jevů. Pak **pravděpodobnost jevu A**, který se rozpadá na m elementárních jevů (přirozených jevu A), je:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}.$$

---

[95] DUPAČ, Václav a Marie HUŠKOVÁ. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. 2., upr. vyd. Praha: Karolinum, 2013. str. 8-12. ISBN 978-80-246-2208-8.
[96] LINDA, Bohdan. *Pravděpodobnost*. Vyd. 2. Pardubice: Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, 2011. str. 11-36. ISBN 978-80-7395-430-7.
[97] HRADECKÝ, Pavel, Matěj TURČAN a Anna MADRYOVÁ. *Pravděpodobnost*. 3. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2012. str. 1-29. ISBN 978-80-248-2617-2.

Klasická definice pravděpodobnosti splňuje všechny 3 axiomy:

- $P(A) = \frac{m}{n} \geq 0$, neboť $m \geq 0, n > 0$
- $P(1) = \frac{n}{n} = 1$
- $P(A+B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B)$

Definice[98]: Tento model předpokládá, že prostor všech elementárních jevů S má jenom konečný počet výsledků a každý elementární jev má stejnou možnost nastat po vykonání náhodného pokusu. Označíme-li N $[\cdot]$ počet elementárních jevů, kterými je tvořen náhodný jev uvedený v hranatých závorkách, tak potom pro pravděpodobnost P(A) libovolného náhodného jevu A platí:

$$P(A) = \frac{N\,[A]}{N\,[S]}\,.$$

Číslu N$[A]$ říkáme počet případů příznivých a číslu N$[S]$ počet případů všech možných.

Definice[99]:

Klasickou definici pravděpodobnosti můžeme použít pro konečný prostor elementárních jevů. Pokud má prostor elementárních jevů *n* prvků, které pokládáme za stejně možné, a jestliže jev A je sjednocením *m* elementárních jevů, pak je pravděpodobnost jevu A definována jako

$$P(A) = = \frac{m}{n}\,.$$

[98] LINDA, Bohdan. *Pravděpodobnost*. Vyd. 2. Pardubice: Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, 2011. str. 11-36. ISBN 978-80-7395-430-7.
[99] MAREK, Luboš. *Pravděpodobnost*. Praha: Professional Publishing, 2012. str. 22. ISBN 978-80-7431-087-4.

Definice[100]:

Jestliže jde o takový náhodný pokus, u něhož jsou výsledky stejně možné, je jich konečný počet a vzájemně se vylučují, potom pravděpodobnost jevu A určíme podle vzorce $P(A) = \frac{m}{n}$, kde m je počet výsledků, které mají za následek nastoupení jevu A, a n je počet všech možných výsledků.

Podmíněná pravděpodobnost $P(A|B)$ jevu A vzhledem k jevu B je dána vztahem

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, kde $P(B) \neq 0$.

Pravděpodobnost průniku $P(A \cap B)$ nezávislých jevů A a B je dána vztahem

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Pravděpodobnost sjednocení libovolných jevů je dána vztahem

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Pro neslučitelné jevy platí, že $P(A \cap B) = 0$.

Příklad:

Jaká je pravděpodobnost, že při jednom hodu jednou hrací kostkou padne

a) sudé číslo

b) čtyřku

c) deset

[100] JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU*. 3. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1995. str. 49, Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-012-8.

Řešení:

a)

počet všech možných výsledků je: n = 6

počet výsledků, kterých chceme dosáhnout je (sudá čísla: 2,4,6): m = 3

P(A) = $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$

P(A) = $\frac{3}{6}$ = 0,5

P(A) = 50 %

Pravděpodobnost, že hodím jednou kostkou sudá čísla je 50 %.

b)

počet všech možných výsledků je: n = 6

počet výsledků, kterých chceme dosáhnout je: m = 1

P(A) = $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$

P(A) = $\frac{1}{6}$ = 0,167

P(A) = 16,7%

Pravděpodobnost, že hodím jednou kostkou čtyřku je 16,7 %.

c)

počet všech možných výsledků je: n = 6

počet výsledků, kterých chceme dosáhnout je: m = 0 => je to nemožný jev, protože nemůžeme jednou kostkou hodit víc než 6.

P(A) = $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$

P(A) = $\frac{0}{6}$ = 0

P(A) = 0 %

Pravděpodobnost, že hodím jednou kostkou deset je 0 %.

3.5 Geometrická definice pravděpodobnosti

Definice[101] :

Nechť $[\Omega, \boldsymbol{A}, \mathrm{P}]$ je pravděpodobnostní prostor, kde základní prostor Ω obsahuje nekonečný počet stejně možných elementárních jevů.

Nechť v nějakém metrickém prostoru je:

A geometrický model jevu *A*∈ ***A*,**

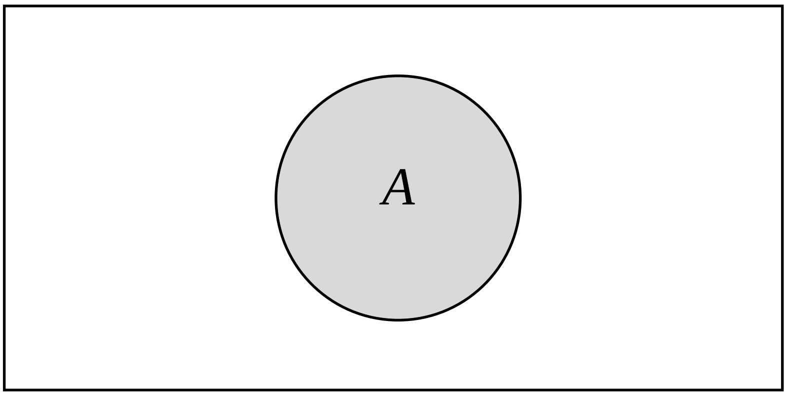
I geometrický model jevu jistého I,

|*A*| je míra geometrického modelu jevu A,

|*I*| je míra geometrického modelu jevu jistého I.

Pak **pravděpodobnost jevu A:**

$$\mathbf{P(A)} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{I}|}.$$



I

Geometrická pravděpodobnost splňuje všechny 3 axiomy:

1. P(A) = $\frac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{I}|} \geq 0$, neboť $|A| \geq 0$ a $|I| > 0$
2. P(I) = $\frac{|I|}{|I|} = 1$
3. P (A + B) = = $\frac{|\boldsymbol{A}| + |B|}{|\boldsymbol{I}|} = \frac{|\boldsymbol{A}|}{|\boldsymbol{I}|} + \frac{|\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{I}|}$ = P(A) + P(B)

[101] HRADECKÝ, Pavel, Matěj TURČAN a Anna MADRYOVÁ. *Pravděpodobnost*. 3. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2012. str. 1-29. ISBN 978-80-248-2617-2.

Definice[102]:

Geometrická definice pravděpodobnosti lze použít pro jistou třídu náhodných pokusů s nespočetně mnoha výsledky. Uvažujme náhodný pokus, mající nespočetně mnoho výsledků, které lze interpretovat jako body n-rozměrného reálného prostoru R_n. Body reprezentující prostor všech elementárních jevů S potom vytvoří v R_n geometrický útvar nenulové míry *m(S)* (Pod mírou množiny zde rozumíme délku v případě n = 1, plochu pro n = 2 a objem pro n = 3). Náhodné jevy jsou podmnožiny S a budou reprezentovány geometrickými útvary, ležící v *S*. Dále předpokládáme, že jestli $A \subset S$ je náhodný jev, tak možnost, že bod reprezentující výsledek náhodného pokusu bude ležet v množině *A*, je úměrná její míře *m (A)* bez ohledu na její tvar a polohu *S* (jedná se stejně jako v klasické definici o požadavek stejné možnosti nastání pro každý elementární jev). Potom pro pravděpodobnost náhodného jevu *A* platí:

$$\mathrm{P(A)} = \frac{m\,(A)}{m(S)}.$$

Definice[103]:

Nechť množina Ω je borelovská podmnožina $\mathbb{R}^n$ s kladnou a konečnou Lebesgueovou mírou μ (Ω) a nechť $\boldsymbol{A} = B^n(\Omega)$. Pravděpodobnost P definuje přepisem:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{\mu\,(\mathrm{A})}{\mu\,(\Omega)}, \quad A \in \boldsymbol{A}$$

Je vhodným modelem tam, kde výsledkům lze vzájemně jednoznačně přiřadit body

$\omega \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ a kde žádným výsledkům nelze apriori dát přednost před ostatními.

[102] LINDA, Bohdan. *Pravděpodobnost*. Vyd. 2. Pardubice: Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, 2011. str. 11-36. ISBN 978-80-7395-430-7.
[103] DUPAČ, Václav a Marie HUŠKOVÁ. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. 2., upr. vyd. Praha: Karolinum, 2013. str. 13. ISBN 978-80-246-2208-8.

Definice [104]:

Tuto definici získáme za pomocí modifikace klasické definice. Označme jako *E* prostor stejně možných elementárních jevů. Pokud je tento prostor geometrickou oblastí (libovolné dimenze), jejíž velikost (délka, obsah, objem,…) je konečná a je roven *V(E),* a část této oblasti představující jev *A* má velikost *V(A),* pak je pravděpodobnost jevu *A* rovna :

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(E)}.$$

Příklad: Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený meteor dopadne na pevnou část zeměkoule, když víme, že 149 mil. km² povrchu Země je pevnina a 361 mil. km² je moře?

Řešení:

$$|I| = 149 + 361 = 510$$

$$|A| = 149$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|I|} = \frac{149}{510} = 0{,}292$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný meteor dopadne na pevnou zem je 0,292.

3.6 Statistická definice pravděpodobnosti

Byla zavedena matematikem R. Misesem, který odmítal tzv. apriorní výpočet pravděpodobnosti – výpočet, který se provádí na základě teoretického poznání struktury náhodného pokusu, aniž by byl pokus proveden.[105]

[104] MAREK, Luboš. *Pravděpodobnost*. Praha: Professional Publishing, 2012. str. 22. ISBN 978-80-7431-087-4.
[105] LINDA, Bohdan. *Pravděpodobnost*. Vyd. 2. Pardubice: Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, 2011. str. 11-36. ISBN 978-80-7395-430-7.

Definice[106]:

Statistická definice pravděpodobnosti je založena na pojmu relativní četnosti výskytu hromadného jevy $A \in \boldsymbol{A}$ v n nezávislých pokusech.

Absolutní četnost $\boldsymbol{f_A}$ je počet výskytů jevu A při n pokusech.

Relativní četnost jevu A je $\frac{\boldsymbol{f_A}}{\boldsymbol{n}}$.

Pro rostoucí počet pokusů se relativní četnost stabilizuje, upřesňuje.

Statistická pravděpodobnost jevu A je číslo **P(A)**, k němuž se blíží relativní četnost jevu A pro n → + ∞:

$$\mathbf{P(A)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\boldsymbol{f_A}}{\boldsymbol{n}}.$$

Statistická definice pravděpodobnosti splňuje všechny 3 axiomy:

1. $P(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f_A}{n} \geq 0$, neboť $f_A \geq 0$, $n > 0$
2. $P(I) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f_I}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n} = 1$
3. $P(A + B) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f_A + f_B}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f_A}{n} + \lim_{n \to +\infty} \frac{f_B}{n} = P(A) + P(B)$

Definice[107]:

Opakujeme-li *n*-krát nezávisle náhodný pokus a bude-li relativní četnost jevu *A*,

$p(A) = \frac{n(A)}{n}$ (kde *n (A)* je počet pokusů při kterých nastal jev *A*) při rostoucím celkovém počtu pokusů *n* kolísat ve stále užších mezích kolem určitého čísla, můžeme předpokládat, že toto číslo je pravděpodobnost jevu *A*. Platí tedy, že $P(A) = \lim_{n \to \infty} p(A)$.

[106] HRADECKÝ, Pavel, Matěj TURČAN a Anna MADRYOVÁ. *Pravděpodobnost*. 3. vyd. Ostrava: VŠB- Technická univerzita Ostrava, 2012. str. 1-29. ISBN 978-80-248-2617-2.

[107] JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU*. 3. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1995. str. 55-59, Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-012-8.

Definice[108]:

Nechť n je počet opakování náhodného pokusu $\mathcal{P}$ a nechť m udává, kolikrát v dané sérii pokusů nastal náhodný jev A. Potom pravděpodobnost náhodného jevu A

$$\mathrm{P(A)} = \lim_{\mathrm{n} \to +\infty} \frac{m}{n}.$$

3.7 Pravděpodobnost ve škole

S pravděpodobností na základních školách je to stejné jako s kombinatorikou. Jedná se o nestandardní matematické úlohy. Prvky pravděpodobnosti na 2. stupni základních škol můžeme zaznamenat u vyšších ročníků.

Oblast pravděpodobnosti je dobré vyučovat deduktivních metodou vycházejíc ze zkušeností a poznatků žáků, které žáci získali v matematice, běžném životě nebo při základech statistiky. Žákům základních škole je důležité ukázat, že pravděpodobnost jevu je rovná podílu počtu příznivých výsledků a počtu všech možných výsledků náhodného pokusu, tzv. Laplaceova schéma. Žáci by měli dokázat pomocí tohoto vztahu určit pravděpodobnost událostí v mnoha jednoduchých i složitějších úlohách. Na lehčí, rychlejší a efektivnější zjišťování všech možných výsledků náhodného pokusu můžeme žákům představit stochastický strom a jeho využití. Po vyřešení několika příkladů žáci sami nacházejí zákonitosti, jimiž se řídí výpočet nějakého sledovaného jevu a vlastnosti pravděpodobnosti.

Žáci, kteří zvládli základní výpočty, můžeme seznámit s podmíněnou pravděpodobností, která se v praxi vyskytuje častěji. Žáky můžeme upozornit na to, jak lidé v praktickém životě často zaměňují pravděpodobnost jevu za podmíněnou pravděpodobnost a naopak.

Teorie pravděpodobnosti se dnes neučí vždy v souladu s pravidly didaktiky matematiky. V oblasti pravděpodobnosti se především na středních školách rozvíjí technika výpočtu bez aplikace výsledků pravděpodobnosti v reálném životě. Taková výuka je špatná. Podává nesprávný obraz o předmětu teorie pravděpodobnosti a o podstatě jejího využití.

---

[108] LINDA, Bohdan. *Pravděpodobnost*. Vyd. 2. Pardubice: Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, 2011. str. 28. ISBN 978-80-7395-430-7.

Podstatou výuky je, aby žák při popisování jemu blízkých situací dokázal samostatně a smysluplně formulovat otázky a problémy, samostatně je převedl do jazyka matematiky a hledal a nacházel prostředky k jejich řešení.

Podle polského matematika profesora Plocka, by řešení úloh z pravděpodobnosti mělo obsahovat tyto fáze:

- fáze matematizace
  V této fázi žák problém z reálného světa promítne do matematické abstrakce. Je to etapa konstruování pravděpodobnostního prostoru, tedy popis reálné situace pomocí schémat typických pro teorii pravděpodobnosti.
- fáze výpočtů a dedukcí
  Obsahuje matematické výpočty uvnitř pravděpodobnostního prostoru.
- fázi interpretace
  Obsahuje formulování závěru pro reálnou situaci na základě vypočtené pravděpodobnosti.

Při každé výuce je důležitá motivace. Úkoly s využitím pravděpodobnosti jsou nejsnáze inspirovány empirickými zkušenostmi žáků. Některé jevy se nám na první pohled zdají stejně pravděpodobné, ačkoli ve skutečnosti nejsou. Při takových jevech vzniká potřeba jejich matematického odůvodnění. Proces utváření pojmu pravděpodobnost jevu by se měl začít od kvalitativního ohodnocení. Žák by měl umět rozdělit jevy na nemožné, méně pravděpodobné, více pravděpodobné, stejně pravděpodobné, jisté. Kvantitativní ohodnocení pravděpodobnosti musí přijít ve výuce až později – tedy na středních školách.

Při získávání poznatků se v učebnicích uvádějí příklady, které na první pohled mají v reálném životě malý význam např.: hod mincí, hod kostkou, hry, ... Tyto příklady představují situace, na kterých se žáci seznamují s jednotlivými modely a výpočtem pravděpodobnosti. Mnohé úlohy z praxe pro fázi matematizace využívají právě tyto představované modelové situace. Proto není důležitá praktičnost samotného zadání příkladu ale modelu, který tento příklad představuje.

Pro žáky je přirozenější vytvářet modelové situace z jednoduchých her, neboť to vyhovuje mentalitě žáků. Přesto by měl učitel představit a přiblížit žákům situace z reálného života, ve kterých se používá výpočet pravděpodobnosti podle jednotlivých modelů, např.: kontrola kvality výrobků, ochrana utajovaných dat, zjišťování účinnosti léků, ověřování spolehlivosti nové technologie při výrobě součástek, pojišťovnictví apod.

Cílem vyučování pravděpodobnosti nemůže být jen soubor pojmů, definic a vět, ale i rozvoj techniky výpočtu pravděpodobnosti. Není důležité zavalit žáky množstvím vzorců, ale více rozvíjet logické uvažování žáků a ve výuce uplatňovat deduktivní metodu. [109]

3.8 Pravděpodobnost v matematice na Slovensku[110]

Podle Štátneho vzdělávacího programu by měli žáci v oblasti pravděpodobnosti realizovat pravděpodobnostní hry, pokusy, pozorování, zjišťovat počet náhodných událostí při pokusech, umět rozlišit větší či menší šanci události, vyjádřit relativní početnost události, vyjádřit pravděpodobnost a šanci náhodné události, rozpoznat možné a nemožné události.

Měl by se tedy kromě axiomatického přístupu používat ve výuce i frekvenční přístup. Nevýhodou klasického axiomatického přístupu k vyučování pravděpodobnosti je, že se žáci aktivně nezúčastňují objevování zákonitostí. U žáků jsou rozvíjené jen různé techniky výpočtu a né skutečné porozumění, či aplikace do reálných situací. Naopak výhodou frekvenčního přístupu je, že do vyučování přináší nové přístupy jako hry, pokusy, simulace. Je třeba mít na paměti, že realitní početnosti nám někdy (při malém množství pokusů) dávají nepřesný odhad neznámé pravděpodobnosti.

4. Kombinatorika a pravděpodobnost v matematických soutěžích

„Matematické soutěže jsou jednou z forem popularizace matematiky a zapojení talentované mládeže do řešení netradičních úloh a rozvíjení jejich matematických schopností.“[111]

[109] Volný překlad z: ÁCSOVÁ, Silvia. *Zborník príspevkov z konferencie Matematika v škole dnes a zajtra (6. ročník): Kedy a ako vyučovať pravdepodobnosť a štatistiku na ZŠ a SŠ* [online]. 2005. Ružomberok [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: math.ku.sk/data/konferenciasub/zbornik04.doc

[110] Volný překlad z knihy: FULIER, Jozef, Attila KOMZSÍK, Márie KMEŤOVÁ, et al. *Matematika: Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií žiakov základných škol-Zbierka problémových úloh bežného života*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Fakulta stredoevrópskych štúdií, 2014. str. 159. ISBN 978-80-558-0664-8.

[111] PŘÍHONSKÁ, Jana. *Dělení úloh - metody řešení: průvodce studiem pro výběrový seminář*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. str. 23. ISBN 978-80-7494-010-1.

S kombinatorikou a pravděpodobností jako se samostatnou kapitolou se v učebnicích často nesetkáváme. Jedná se spíše o rozšiřující učivo, které u žáků na ZŠ rozvíjí logické myšlení. Tyto úlohy se často vyskytují na různých matematických soutěžích. Pro žáky 2. stupně jde především o tyto soutěže:

- Matematický klokan,
  - v kategorii Benjamín (6.-7. třída ZŠ)
  - v kategorii Kadet (8.-9. třída ZŠ)
- Matematická olympiáda pro 2. stupeň ZŠ,
- Pythagoriáda,
- Dejte hlavy dohromady,
- různé korespondenční matematické soutěže pro 2. stupeň ZŠ – např. Pikomat,
- Online soutěže – např. Abaku.

Tyto soutěže jsou víceméně organizovány centrálně pro všechny školy v republice, nebo aspoň v některých regionech. Navíc na některých základních školách učitelé organizují místní soutěže, nebo dokonce jen ve třídách, kde učí.[112]

[112] ZHOUF, Jaroslav. *ZÁJMOVÉ ČINNOSTI ŽÁKŮ ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOL V MATEMATICE* [online]. 2008 [cit. 2018-02-10]. Dostupné z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_80.pdf

V matematickém Klokanovi se vyskytovala např. následující úloha:

„*Milada, Anežka a Natálie pracují ve školce. Každý den, od pondělí do pátku, chodí do práce právě dvě z nich. Milada pracuje 3 dny v týdnu a Anežka 4 dny v týdnu. Kolik dní v týdnu pracuje Natálie?*“[113]

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Řešení:

Po	A	N
Út	A	N
St	M	N
Čt	A	M
Pá	A	M

N = 3 (varianta C)

[113] *Matematický klokan 2016: kategorie Benjamín* [online]. 2016 [cit. 2018-02-10]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/phocadownload/sborniky/sbornik_klokan_2016.pdf

PRAKTICKÁ ČÁST

Praktická část diplomové práce se zabývá úspěšností žáků a metodami při řešení kombinatorických a pravděpodobnostních úloh v matematice na 2. stupni základních škol.

1. Cíl výzkumu

Cílem výzkumu bylo zjistit, jakou úspěšnost žáci dosahují při řešení kombinatorických a pravděpodobnostních úloh a jaké metody strategie při počítání využijí.

2. Metodologie

Pro svůj výzkumný projekt jsem si vytvořila pracovní list, který jsem následně vyhodnotila kvantitativním přístupem. Pro výzkum jsem použila 2 druhy pracovních listů. První pracovní list je zaměřený na 6. a 7. třídu a druhý pracovní list pro 8. a 9. třídu.

První pracovní list, který byl určen pro nižší ročníky 2. stupně základních škol se skládal z 5 úloh. Úlohy byly spíše kombinatorického charakteru, protože žáci v těchto ročnících nemají dostačující počtářské znalosti a dovednosti pro výpočet pravděpodobnosti. Druhý pracovní list byl vytvořen pro 8. a 9. ročník a obsahoval 4 slovní úlohy. Tyto úlohy již byly kombinací jak kombinatorický, tak pravděpodobnostních úloh. V obou pracovních listech se vyskytovaly dvě zcela shodné úlohy.

„*Kvantitativní přístup předpokládá, že fenomény sociálního světa (jeho různé aspekty, objekty, procesy), které činí předmětem zkoumání, jsou svým způsobem měřitelné, či nějak tříditelné, uspořádatelné. Informace o nich, získávané v jisté kvantifikovatelné a co nejvíce formálně porovnatelné podobě. Pak je analyzuje statistickými metodami se záměrem ověřit platnost představ o výskytu nějakých charakteristik, také o jejich vztazích k dalším objektům a jejich vlastnostem apod. Kvantitativní výzkum se využije v případě potřeby zodpovězení otázek CO? KOLIK? Jinými slovy zabývá se získáváním údajů o četnosti výskytu určitého jevu a vztahy mezi těmito jevy (proměnnými), ale zároveň však tyto proměnné nepopisuje. Aby bylo možné* *určit „sílu vztahů mezi jevy", statisticky přesněji řečeno „míru korelace mezi proměnnými", je zapotřebí sesbírat velký počet dat z různých zdrojů (od respondentů, z dokumentů). Sesbíraná data jsou poté vyhodnocena pomocí statisticko-matematických operací. V současné době se používá sofistikovaný software (MS-Excel, SPSS, Statistica, R a další).* „[114]

3. Výzkumný soubor

Do mého výzkumu se zapojily celkem 4 školy. Výzkumné šetření probíhalo v 6. – 9. třídě. Spektrum škol, na kterých jsem prováděla výzkum byly velmi rozmanité: vesnická škola, škola s rozšířenou výukou jazyků a dvě klasické městské školy.

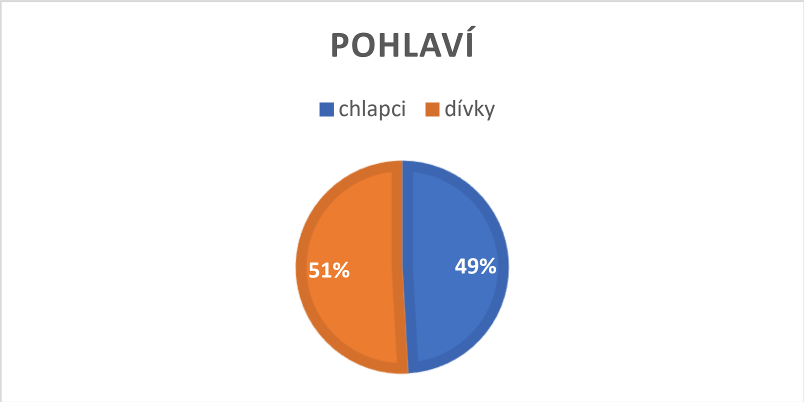
Celkový počet testovaných žáků činil 558 (285 dívek a 273 chlapců). První pracovní list řešilo 172 žáků 6. třídy (92 dívek a 80 chlapců), 153 žáků 7. třídy (76 dívek a 77 chlapců). Druhý pracovní list vyplňovalo 131 žáků 8. třídy (63 dívek a 68 chlapců) a 102 žáků 9. třídy (54 dívek a 48 chlapců).

Tab. 1: Počet žáků zapojených do výzkumu

1. pracovní list 6. + 7. třída			**2. pracovní list 8. + 9. třída**		
Dívky	Chlapci	Celkem	Dívky	Chlapci	Celkem
6. třída			**8. třída**		
92	80	172	68	63	131
7. třída			**9. třída**		
76	77	153	48	54	102
168	157	325	116	117	233

114 LINDEROVÁ, Ivica, Petr SCHOLZ a Michal MUNDUCH. *Úvod do metodiky výzkumu*. Jihlava: Vysoká škola polytechnická Jihlava, 2016. 40-48 s. ISBN 978-80-88064-23-7.

Na grafu můžeme vidět, že počet zúčastněných chlapců a dívek byl velmi vyrovnaný.



Graf 1: Složení respondentů podle pohlaví

4. Zadání pracovního listu

Zadání a vypracování pracovního listu zabralo v každé třídě jednu vyučovací hodinu. Před každou hodinou proběhla s vyučujícími konzultační schůzka, kdy jsem je seznámila s obsahem pracovního listu a s tím, jak si představuji realizaci výuky. V hodinách jsem měla možnost žákům vysvětlit smysl pracovního listu a blíže jim nastínit zadání.

Žáci měli možnost se v průběhu řešení pracovního listu ptát na potřebné informace. Větší část dětí tuto možnost využila. Nejčastěji se ptali na to („Bude se to známkovat?“, „Jak to mám počítat?“, „Máme tam psát jen odpověď nebo i výpočet?“, „Já tomu nerozumím.“, …). Řadu dotazů jsem jim zodpověděla, znovu jsem je ujistila, že pracovní listy jsou anonymní a budou sloužit pouze pro mé diplomové šetření. Žáci počítali zcela samostatně a nedávala jsem jim žádné rady k vyřešení příkladů, protože jsem potřebovala zcela neovlivněné výsledky.

4.1 Kritéria hodnocení

Jednotlivé kroky a úlohy jsem si obodovala a stanovila si kritéria hodnocení. Rozsah bodů v jednotlivých úlohách byl různý. Některá úloha byla obodována např. 3 body a jiná 10 body.

- Správně vyřešeno - toto kritérium žáci splnili, pokud získaly plný počet bodů (měli úlohu vyřešenou zcela správně),
- Polovina vyřešena správně – žáci museli získat minimálně polovinu bodů v daném příkladu,
- Nesprávně vyřešeno – do tohoto kritéria spadali žáci, kteří vyřešili méně než polovinu příkladu.

4.2 Pracovní list s řešením

První pracovní list, který byl určen pro nižší ročníky 2. stupně základních škol se skládal z 5 úloh. Druhý pracovní list byl vytvořen pro 8. a 9. ročník a obsahoval 4 slovní úlohy. V obou pracovních listech se vyskytovaly dvě shodné úlohy. Úloha č. 2 je stejná jako úloha č. 3 v pracovním listě pro 6. a 7. třídu a úloha č. 4 je shodná s úlohou č. 2 v pracovním listě pro 6. a 7. třídu.

4.2.1 Pracovní list s řešením pro 6. a 7. třídu

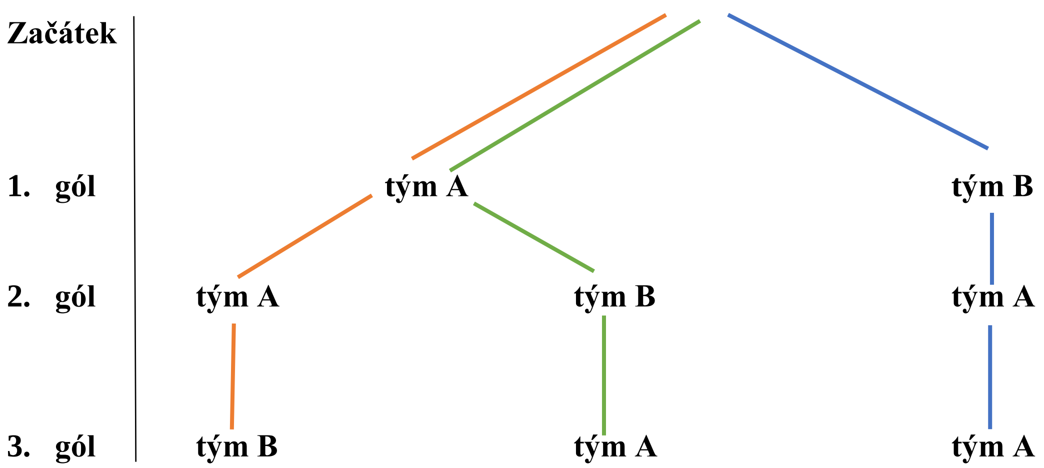
<u>Úloha č. 1</u> [115]

Zadání: *V hokejovém zápase padly 3 góly. Výsledek byl 2:1. Tým A dal 2 góly a tým B dal 1 gól, ale neznáš příběh zápasu.*

Jak mohl vypadat průběžný stav tohoto zápasu? Vypiš všechny možnosti, jak se mohl měnit stav zápasu. Jeden možný průběh zápasu byl: 0:0, 1:0, 2:0, 2:1

1. možnost: 0:0, 1:0, 2:0, 2:1

Řešení:



Graf. 2: grafické znázornění řešení úlohy č. 1

[115] Upraveno a volný překlad z knihy: FULIER, Jozef, Attila KOMZSÍK, Márie KMEŤOVÁ, et al. *Matematika: Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií žiakov základných škol-Zbierka problémových úloh bežného života*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Fakulta stredoevrópskych štúdií, 2014. str. 159. ISBN 978-80-558-0664-8.

1. **možnost:** 0:0, 1:0, 2:0, 2:1
2. **možnost**: 0:0, 1:0, 1:1, 2:1
3. **možnost**: 0:0, 0:1, 1:1, 2:1

Odpověď: Zápas se mohl odehrávat 3 způsoby.

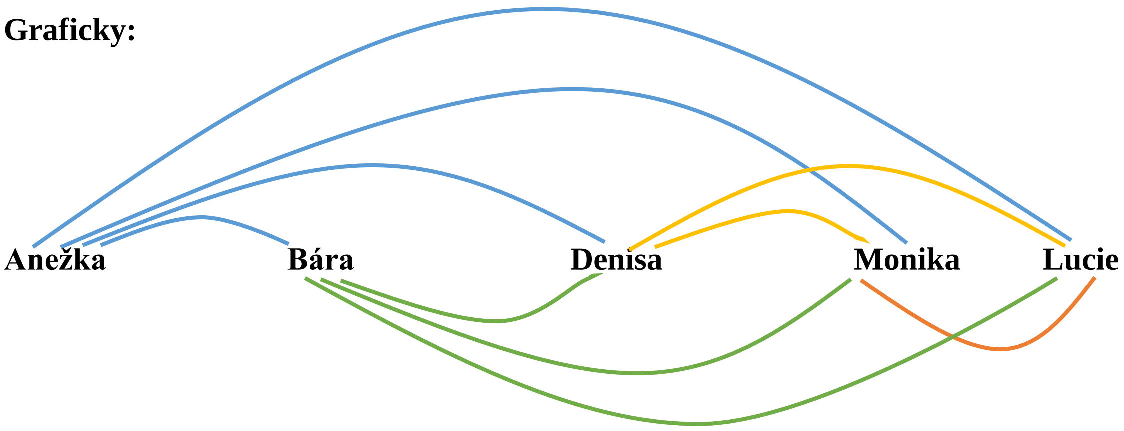
Úloha č. 2 [116]

Zadání: *Karin chtěla poslat sms kamarádkám: Anežce, Báře, Denise, Monice a Lucii.*

Zjistila však, že má kredit pouze na dvě sms zprávy. Zvažovala, kterým kamarádkám napíše a vypsala si nejprve všechny možnosti. Pokus se znázornit všechny možnosti. Kolik má Karin možností?

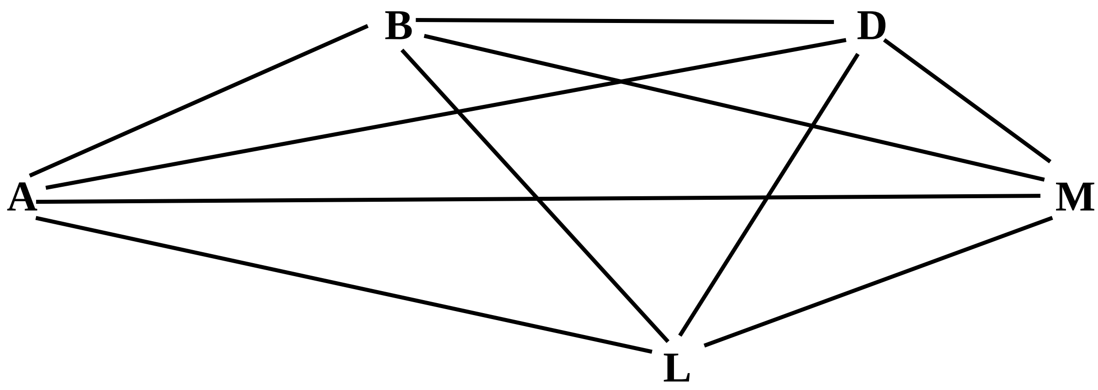
Řešení:

Graficky:



Graf. 3: grafické znázornění řešení úlohy č. 2

[116] Inspirováno a upraveno z knihy: FULIER, Jozef, Attila KOMZSÍK, Márie KMEŤOVÁ, et al. *Matematika: Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií žiakov základných škol-Zbierka problémových úloh bežného života*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Fakulta stredoeurópskych štúdií, 2014. str. 160-203. ISBN 978-80-558-0664-8.



Graf. 4: grafické znázornění řešení úlohy č. 2

Do tabulky:

Tab. 2: Výpočet úlohy č. 2 za pomocí tabulky

	Anežka	**Bára**	**Denisa**	**Monika**	**Lucie**
Anežka		•	•	•	•
Bára			•	•	•
Denisa				•	•
Monika					•
Lucie					

Tab. 3: Výpočet úlohy č. 2 za pomocí tabulky

možnost	**Anežka**	**Bára**	**Denisa**	**Monika**	**Lucie**
1.	•	•			
2.	•		•		
3.	•			•	
4.	•				•
5.		•	•		
6.		•		•	
7.		•			•
8.			•	•	
9.			•		•
10.				•	•

Výčtem prvků: AB, AD, AM, AL

BD, BM, BL

DM, DL

ML

Výpočet: 4 + 3 + 2 + 1 = 10

Odpověď: Karin má 10 možností.

Úloha č. 3 [117]

Zadání: *Jistá loterijní společnost vydává více druhů stíracích losů, mezi kterými jsou stírací losy s názvy Veselá čísla a Magické peníze. Počet losů vydaných v loterii Veselá čísla je 2 250000 kusů a v loterii Magické peníze 4 000 000 kusů. Na každém losu se nachází buď finanční výhra nebo žádná výhra. V tabulce jsou uvedené hodnoty finančních výher a počet losů, na kterých jsou výhry příslušné hodnoty.*

Tab. 4: Tabulka hodnot k příkladu č. 3

Výhra v korunách	**Počet výherních losů v ks**	
	Veselá čísla	**Magické Peníze**
20 Kč	500 000	780 000
40 Kč	0	180 000
60 Kč	50 000	0
100 Kč	20 000	78 000
300 Kč	15 000	0
400 Kč	0	9 740
600 Kč	6 000	8 000
1000 Kč	3 000	4 000
2000 Kč	300	2 000
10000 Kč	0	20
20000 Kč	10	15
200000 Kč	5	5

a) Ve které loterii je při zakoupení jednoho losu větší šance na výhru 20 000 Kč?

Výpočet: Šance na výhru 20 000 Kč v loterii Magické peníze je 15 : 3 999 985 = 1 : 266 665,66 a v loterii Veselá čísla 10 : 2 249 990 = 1 : 224 999.

Odpověď: Větší šanci máme v losech od loterie Veselá čísla.

[117] Inspirováno a upraveno z knihy: FULIER, Jozef, Attila KOMZSÍK, Márie KMEŤOVÁ, et al. *Matematika: Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií žiakov základných škol-Zbierka problémových úloh bežného života*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Fakulta stredoevrópskych štúdií, 2014. str. 160-203. ISBN 978-80-558-0664-8.

b) Ve které loterii je větší šance na výhru maximálně 100 Kč?

Výpočet: Magické peníze: 780 000 + 180 000 + 0 + 78 000 = 1 038 000

Veselá čísla: 500 000 + 0 + 50 000 + 20 000 = 570 000

Šance na výhru ve hře Magické peníze je 1 038 000 : 2 962 000 = 1 : 2,853 a ve hře Veselá čísla je 570 000 : 1 680 000 = 1 : 2,94.

Odpověď: Šance na výhru maximálně 100 Kč je větší ve hře Magické peníze.

c) Kdyby sis mohl vybrat jeden los zdarma, který by to byl a proč?

Mohli bychom si vybrat podle toho, ve které hře je větší šance na výhru. Postupujeme stejně jako v předešlé úloze.

Výpočet: Magické peníze: výherních losů: 1 061 780

celkem losů: 4 000 000

1 061 780 : 2 938 220 = 1: 2,767

Veselá čísla: výherních losů: 594 315

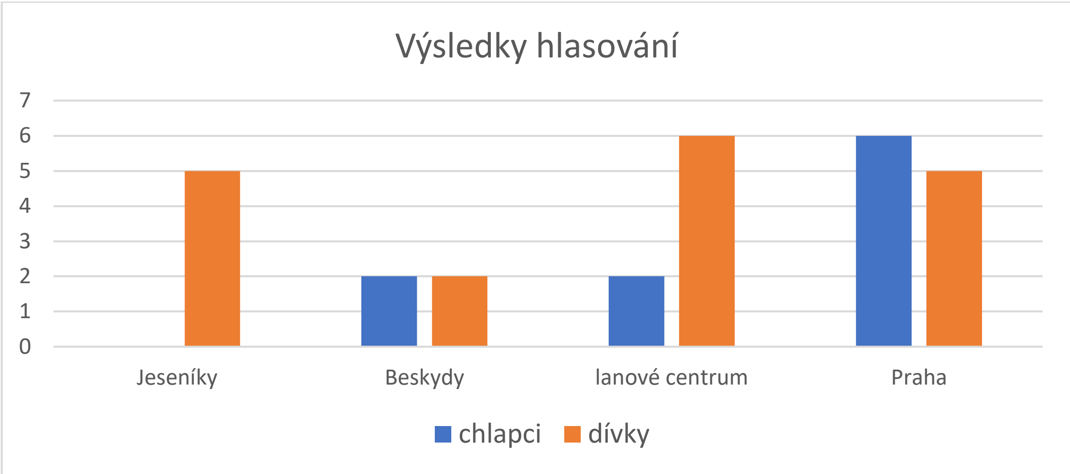
celkem losů: 2 250 000

594 315 : 1 655 685 = 1 : 2,785

Odpověď: Šance jsou velmi podobné, ale o trošku větší šanci na výhru bychom měli s losem Magické peníze.

Úloha č. 4 [118]

Zadání: *Ve 6.B. se žáci neuměli dohodnout, kam pojedou na konci školního roku na výlet. Hlasovali. Rozhodovali se mezi Jeseníky, Beskydami, Prahou a lanovým centrem. Třídu navštěvuje 32 žáků, avšak někteří byli v den hlasování nemocní. Následný graf vyjadřuje výsledek hlasování všech přítomných žáků.*



Graf. 5: graf hodnot k příkladu č. 4

a) **Na základě grafu doplň tabulku výsledků hlasování.**

Tab. 5: Výsledky příkladu č. 5

Místo výletu	Hlasů celkem
Jeseníky	5
Beskydy	4
Lanové centrum	8
Praha	11

[118] úloha autora

b) Kdyby ten den byli přítomni všichni žáci, mohli by jet žáci 6.B na výlet jinam?

Výpočet: V třídě bylo: 5 + 4 + 8 + 11 = 28 žáků

32 – 28 = 4 žáci

Rozdíl mezi počtem hlasů, které získal výlet na prvním místě a výlet na druhém místě, jsou 3 hlasy.

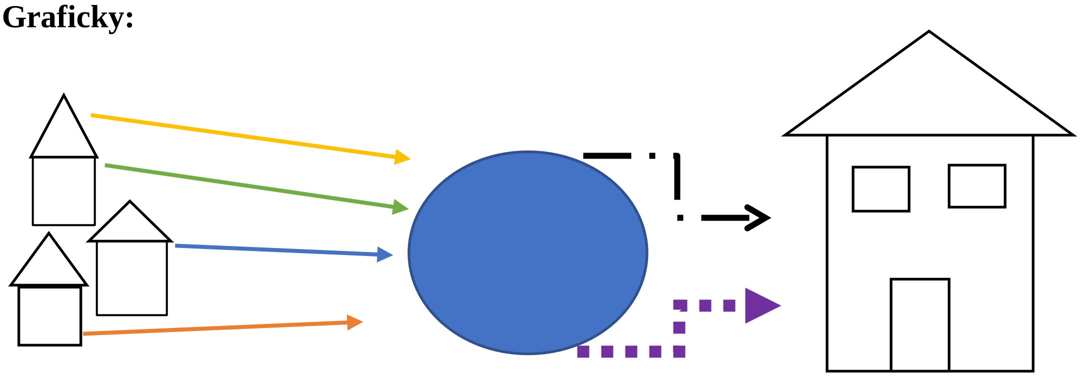
Odpověď: Kdyby byli přítomni všichni žáci, mohli by jet žáci 6.B jinam.

Úloha č. 5 [119]

Zadání: *Od chatek vedou k rybníku čtyři cesty. Od rybníku k domku vedou dvě cesty. Kolika způsoby se lze dojít od chatek přes rybník až k domků?*

Řešení:

Graficky:



Obr. 8: vzorový příklad č. 2

[119] HEJNÝ, Milan a Darina JIROTKOVÁ. *Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání: náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2010. ISBN 978-80-211-0612-3.

cesty od chatek k rybníku: A, B, C, D

cesty od rybníku k domku: a, b

Výčtem prvků: Aa, Ab, Ba, Bb, Ca, Cb, Da, Db

Výpočet: 4 * 2 = 8

Odpověď: Lze dojít 8 způsoby.

4.2.2 Pracovní list s řešením pro 8. a 9. třídu

Úloha č. 1 [120]

Zadání: *Pepa se rozhodl cestovat vlakem, ale zapomněl si koupit místenku. Ve vlaku, kterým cestoval, bylo v každém kupé 8 míst k sezení. Pepa si při nastupování vybral kupé, ve kterém zatím nikdo neseděl, ale 3 místa byly rezervované.*

a) Jaká je šance, že neobsadí místo, které má někdo rezervované? Jaká je pravděpodobnost, že neobsadí místo, které má někdo rezervované?

Výpočet: šance: 5 : 3

pravděpodobnost: 5/3 = 0,625 = 62,5 %

Odpověď: Šance, že Pepa neobsadí rezervované místo je 5 : 3. Pravděpodobnost, že Pepa neobsadí rezervované místo je 62,5 %.

b) Jaká je pravděpodobnost, že obsadí místo, které má někdo rezervované?

Výpočet: pravděpodobnost: 3/8 = 0,375 = 37,5 %

100 – 62,5 = 37,5 %

Odpověď: Pravděpodobnost, že Pepa obsadí rezervované místo je 37,5 %.

c) Porovnej, která pravděpodobnost z úlohy 1 a úlohy 2 je větší? Kolik míst by muselo být, aby byla pravděpodobnost stejná?

[120] Inspirováno a upraveno z knihy: FULIER, Jozef, Attila KOMZSÍK, Márie KMEŤOVÁ, et al. *Matematika: Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií žiakov základných škol-Zbierka problémových úloh bežného života*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Fakulta stredoevrópskych štúdií, 2014. str. 160-203. ISBN 978-80-558-0664-8.

Odpověď: Pravděpodobnost, že Pepa neobsadí nikomu místo je větší, než pravděpodobnost, že někomu místo obsadí.

Aby byla pravděpodobnost stejná, musely by být rezervované 4 míst.

<u>Úloha č. 3</u> [121]

Zadání: *Tomáš dostal na narozeniny nový mobilní telefon. Když chtěl zavolat svému kamarádovi Milanovi, tak zjistil, že jeho telefonní číslo nemá uložené v kontaktech. Předčíslí a prvních šest čísel si pamatoval, chybělo mu poslední trojčíslí.*

a) **Tomáš si vzpomněl, že na místě stovek hledaného trojčíslí je buď 3 nebo 5 a na místě desítek je buď 0 nebo 1. Kolik je takových telefonních čísel?**

Výpočet: Hledáme trojciferné číslo: **A B C**.

Na místo **stovek (A)** můžou být čísla 3, 5.

Ke každému tomuto číslo můžeme připsat na místo **desítek (B)** čísla 0, 1.

Na místo **jednotek (C)** můžou být čísla 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Výčte: 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309

310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319

500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509

510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519

Nebo 4 * 10 = 40 možností

Odpověď: Tomáš může vytvořit 40 různých telefonních čísel.

[121] Inspirováno a upraveno z knihy: FULIER, Jozef, Attila KOMZSÍK, Márie KMEŤOVÁ, et al. *Matematika: Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií žiakov základných škol-Zbierka problémových úloh bežného života*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Fakulta stredoevrópskych štúdií, 2014. str. 160-203. ISBN 978-80-558-0664-8.

b) Tomáš si ještě vzpomněl, že na místě jednotek je číslo větší než 5. O kolik možností se počet čísel snížil oproti úloze a)?

Výpočet: Hledáme trojciferné číslo: **A B C**.

Na místo **stovek (A)** můžou být čísla 3, 5.

Ke každému tomuto číslo můžeme připsat na místo **desítek (B)** čísla 0, 1.

Na místo **jednotek (C)** můžou být čísla 6, 7, 8, 9

Výčtem: 306, 307, 308, 309 506, 507, 508, 509

316, 317, 318, 319 516, 517, 518, 519

Nebo 4 * 4 = 16 možností

Odpověď: Počet čísel se snížil o 24 možností.

5. Výsledky a diskuse

5.1 Vyhodnocení výzkumu 6. + 7. třída

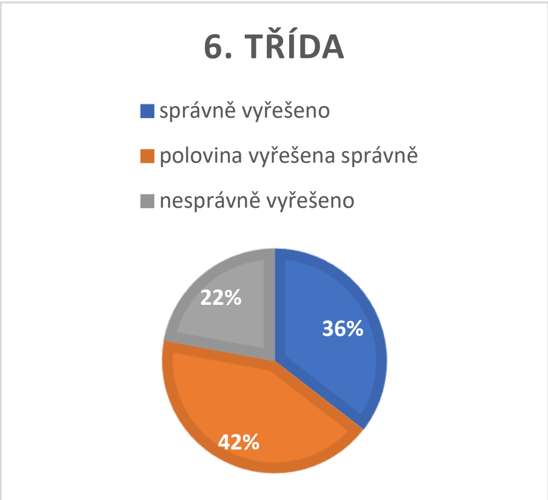
5.1.1 Úloha č. 1

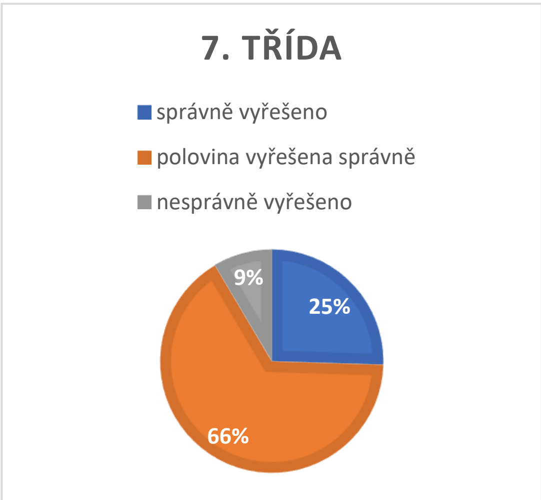
Úloha byla podle odborné literatury určená pro pátý ročník. V grafech můžeme vidět, že 6. ročník byl ve správném řešení lepší o 11 %, ale v nesprávném řešení horší o 13 %. Kritérium „polovina vyřešena správně“ je myšleno tak, že ze dvou možností žáci vypsali alespoň jednu správně. Velmi častá chyba byla v tom, že si žáci nezkontrolovali svoji možnost s možností, která jim byla v úvodu vypsaná. Úloha patřila mezi lehčí a toto nám potvrdily i výsledky. Všichni žáci řešili tuto úlohy pouze vypsáním možností.

Tab. 6: Správnost řešení 1. úlohy – žáci 6. a 7. třídy

6. třída		
	dívky	chlapci
Správně vyřešeno	31	30
Polovina vyřešena správně	41	32
Nesprávně vyřešeno	20	18

7. třída		
	dívky	chlapci
Správně vyřešeno	20	19
Polovina vyřešena správně	53	48
Nesprávně vyřešeno	3	10





Graf 6 a 7: Výsledky 1. úlohy žáků 6. a 7. třídy

5.1.2 Úloha č. 2

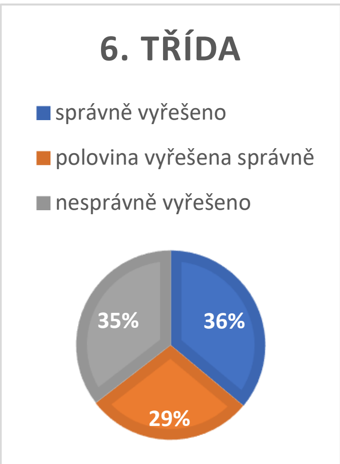
Doporučený ročník pro tuto úlohy byl šestý. Šlo o hledání počtu kombinací vypisováním prvků. Úloha se nacházela v obou pracovních listech. V této úloze dopadl lépe 7. ročník - správné řešení vypočítalo více než 55 % dětí, což je 20 % bodů více než v 6. ročníku. Kritérium „polovina vyřešena správně“ znamenala, že žáci měli správě vypsáno více než 5 kombinací. Pokud bychom toto kritérium přičetli k žákům, kteří úlohu vyřešili správně, zjistíme, že v 7. ročníku tuto úlohu zvládlo vyřešit více než $\frac{3}{4}$ a v 6. ročníku 65 % žáků. Tuto úlohu řešilo 75 % žáků výčtem prvků, 15 % žáků graficky a pouhých 5 % pomocí tabulky.

Část žáků tuto úlohu pojala velmi zajímavě. V odpovědích jsem se například dočetla: „Karin napíše sms Anežce a Anežka zavolá Barboře, Denise, Monice a Lucii.“, „Pošle sms pouze dvěma kamarádkám a napíše jim tam, aby sms přeposlaly ostatním.“, „Napíše sms Anežce ať ona zavolá Báře a Bára zavolá Denise a Denisa je sestra s Monikou a ony zavolají Lucii a dají si sraz.“.

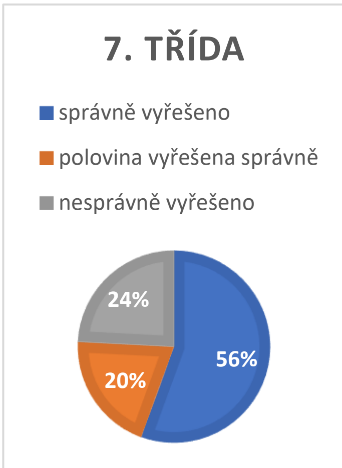
Tab. 7: Správnost řešení 2. úlohy – žáci 6. a 7. třídy

6. třída		
	Dívky	chlapci
Správně vyřešeno	43	19
Polovina vyřešena správně	16	33
Nesprávně vyřešeno	33	28

7. třída		
	Dívky	chlapci
Správně vyřešeno	41	44
Polovina vyřešena správně	20	11
Nesprávně vyřešeno	15	22



Graf 8 a 9: Výsledky 2. úlohy žáků 6. a 7. třídy



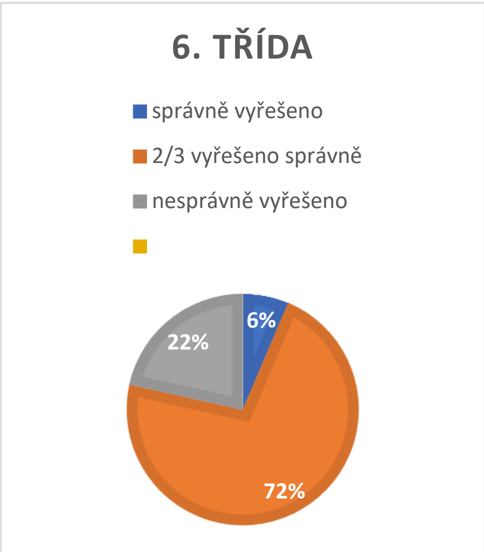
5.1.3 Úloha č. 3

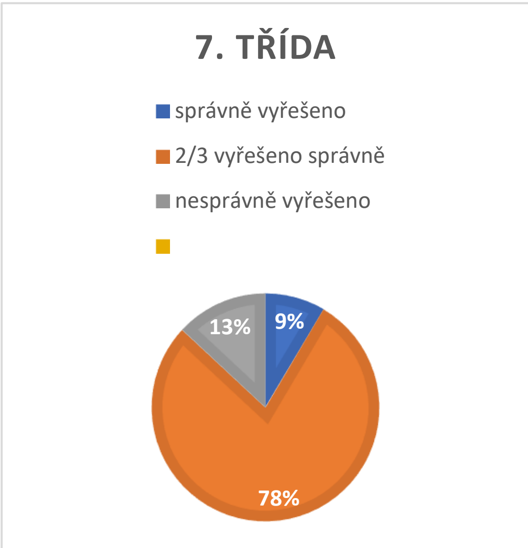
Tuto úlohu měli žáci 6. + 7. a 8. +9. ročníků totožnou. Když porovnáme 6. a 7. ročník, tak jsou výsledky velmi vyrovnané. Přestože je úloha vyrovnaná, o něco lépe dopadly 7. ročníky. Žáci nižšího ročníku velmi často uváděli, že si s úlohou nevěděli rady a výsledek pouze tipovali.

Tab. 8: Správnost řešení 3. úlohy – žáci 6. a 7. třídy

6. třída		
	Dívky	Chlapci
Správně vyřešeno	7	4
Polovina vyřešena správně	73	51
Nesprávně vyřešeno	12	25

7. třída		
	Dívky	Chlapci
Správně vyřešeno	11	2
Polovina vyřešena správně	50	70
Nesprávně vyřešeno	15	5





Graf 10 a 11: Výsledky 3. úlohy žáků 6. a 7. třídy

5.1.4 Úloha č. 4

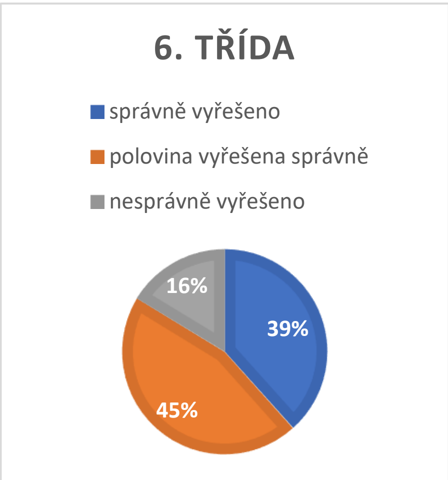
Tato úloha byla do pracovního listu pro 6. a 7. třídu zařazena, protože žáci v těchto třídách nemají ještě dostačující počtářské znalosti pro výpočet pravděpodobnosti. Jednalo se o lehčí úlohu, ale zařadila jsem ji do pracovního listu, protože mne zajímalo, jak žáci zvládají číst údaje z grafu.

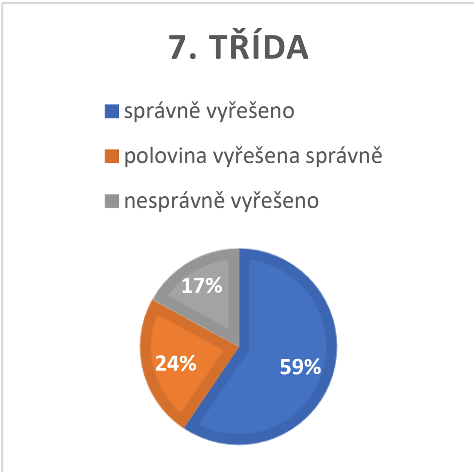
Podle zjištěných dat dopadla tato úloha velmi dobře. Žáci, kteří spadají pod kritérium „polovina vyřešena správně“, udělali většinou pouze drobné chyby v početních operacích. Úspěšné nebo částečně úspěšné řešení přesáhnou v obou ročnících 80 %.

Tab. 9: Správnost řešení 4. úlohy – žáci 6. a 7. třídy

6. Třída		
	Dívky	Chlapci
Správně vyřešeno	20	46
Polovina vyřešena správně	52	26
Nesprávně vyřešeno	20	8

7. Třída		
	Dívky	Chlapci
Správně vyřešeno	43	48
Polovina vyřešena správně	15	21
Nesprávně vyřešeno	18	8





Graf 12 a 13: Výsledky 4. úlohy žáků 6. a 7. třídy

5.1.5 Úloha č. 5

Poslední úloha mě nejvíce překvapila. Podle odborné literatury byla určená žákům 1. stupně a dopadla ze všech úloh nejhůř. Lépe dopadl 7. ročník, který má úspešnost 52 %. 6. ročník má úspěšnost pouze 36 %.

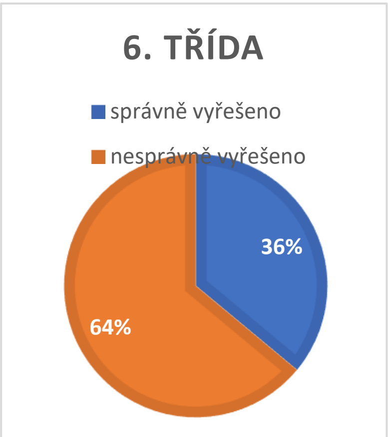
Dle mého názoru dopadla úloha špatně, protože v ní žáci hledali zbytečně složitosti. Žáků by při řešení úlohy pomohlo grafické znázornění, což velká část žáků neprovedla. Nejčastější odpovědí na tuto úlohu bylo číslo 6.

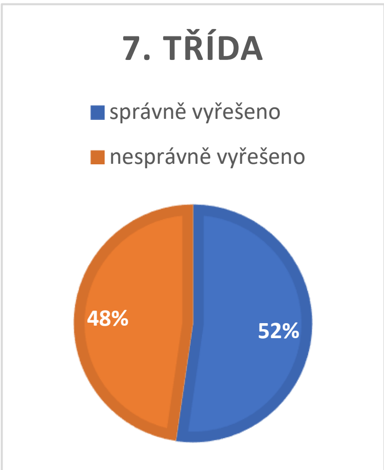
4 cesty + 2 cesty = 6

Tab. 10: Správnost řešení 5. úlohy – žáci 6. a 7. třídy

	6. Třída	
	Dívky	Chlapci
Správně vyřešeno	37	25
Nesprávně vyřešeno	55	55

	7. třída	
	Dívky	chlapci
Správně vyřešeno	37	43
Nesprávně vyřešeno	39	34





Graf 14 a 15: Výsledky 5. úlohy žáků 6. a 7. třídy

5.2 Vyhodnocení výzkumu 8. + 9. třída

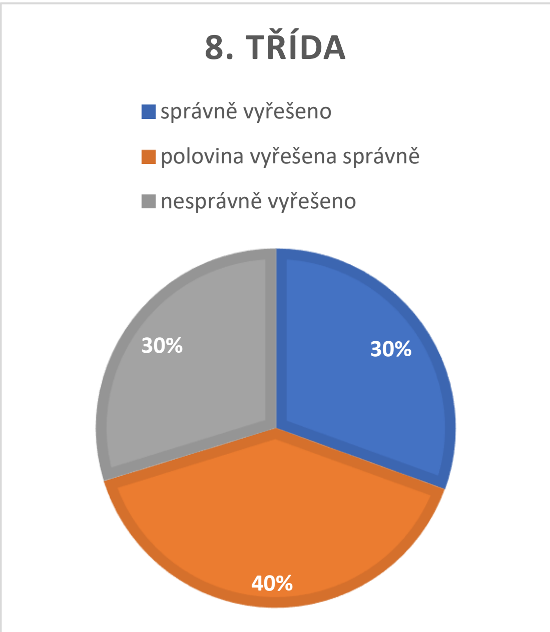
5.2.1 Úloha č. 1

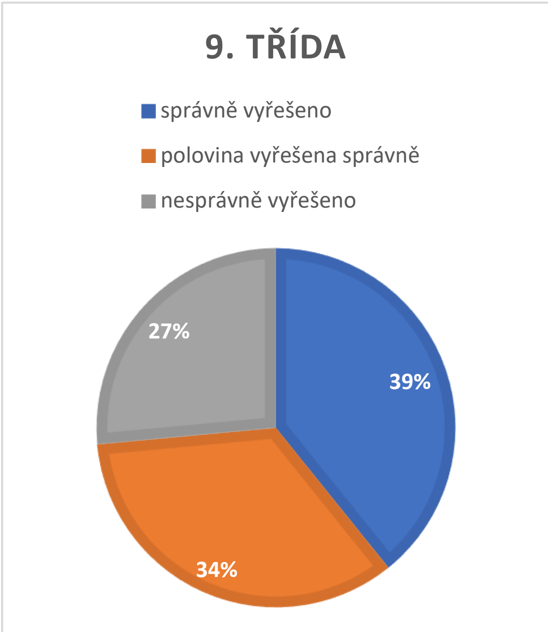
Úloha byla určená pro 8. ročník a zaměřena na výpočet pravděpodobnosti. Podle grafů byli úspěšnější v řešení žáci 9. ročníků. Tuto úlohu žáci řešili klasickým výpočtem.

Tab. 11: Správnost řešení 1. úlohy – žáci 8. a 9. třídy

8. třída		
	Dívky	chlapci
Správně vyřešeno	16	24
Polovina vyřešena správně	25	27
Nesprávně vyřešeno	22	17

9. třída		
	Dívky	chlapci
Správně vyřešeno	18	22
Polovina vyřešena správně	27	8
Nesprávně vyřešeno	9	18





Graf 16 a 17: Výsledky 1. úlohy žáků 8. a 9. třídy

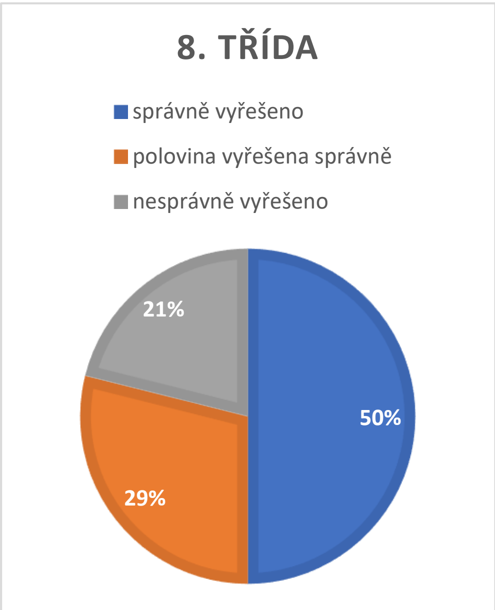
5.2.2 Úloha č. 2

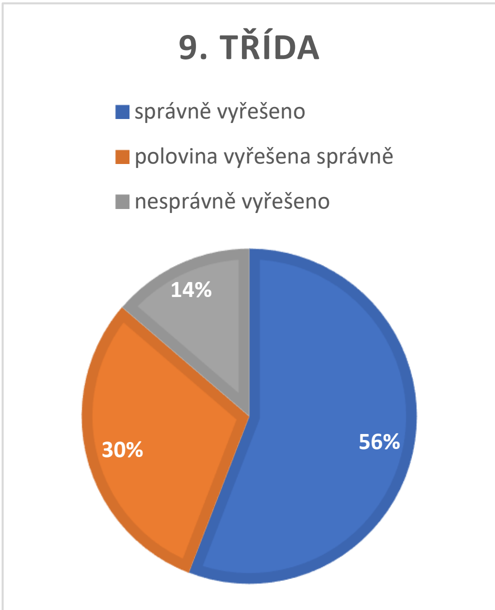
Tato úloha dopadla velmi dobře. V 8. ročníku správně vyřešilo úlohu 50 % studentů a v 9. ročníku dokonce 56 %. Neúspěšně řešilo úlohu 21 % žáků v 8. třídě a pouhých 14 % žáků v 9. třídě.

Tab. 12: Správnost řešení 2. úlohy – žáci 8. a 9. třídy

8. Třída		
	Dívky	chlapci
Správně vyřešeno	28	36
1/3 vyřešeno správně	18	19
Nesprávně vyřešeno	17	13

9. Třída		
	Dívky	chlapci
Správně vyřešeno	29	28
1/3 vyřešeno správně	16	15
Nesprávně vyřešeno	9	5





Graf 18 a 19: Výsledky 2. úlohy žáků 8. a 9. tříd

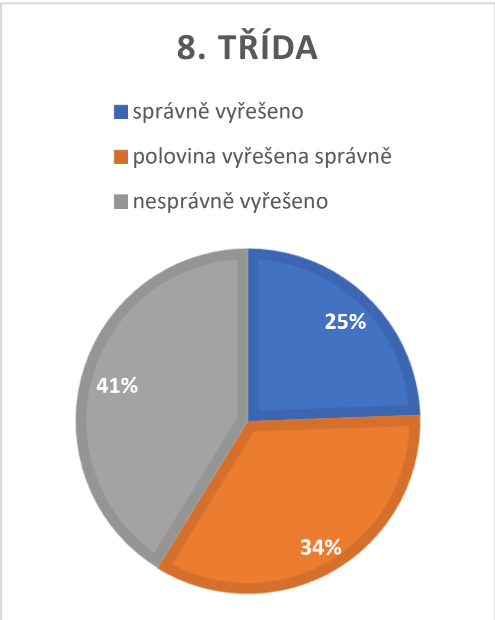
5.2.3 Úloha č. 3

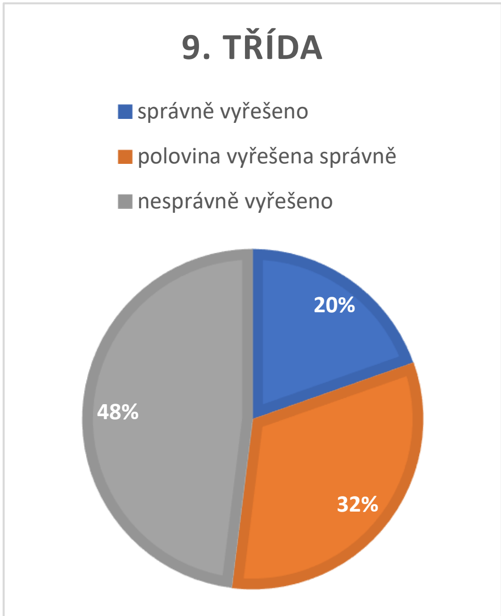
V této úloze byl lepší 8. ročník. Správně úlohu vyřešilo 25 % žáků, což je o 5 % více než v 9. ročníků. Alespoň jednu ze dvou podotázek vyřešilo okolo 32 % žáků v obou ročnících. 85 % žáků řešilo tuto úlohu výčtem prvků.

Tab. 13: Správnost řešení 3. úlohy – žáci 8. a 9. třídy

8. třída		
	Dívky	chlapci
Správně vyřešeno	18	14
Polovina vyřešena správně	23	22
Nesprávně vyřešeno	22	32

9. třída		
	Dívky	chlapci
Správně vyřešeno	11	9
Polovina vyřešena správně	16	17
Nesprávně vyřešeno	27	22





Graf 20 a 21: Výsledky 3. úlohy žáků 8. a 9. třídy

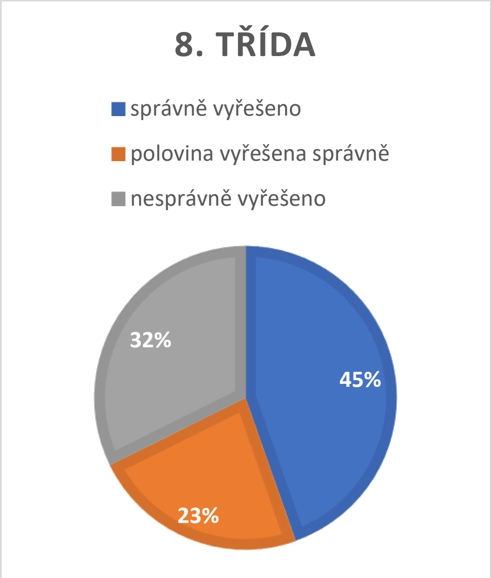
5.2.4 Úloha č. 4

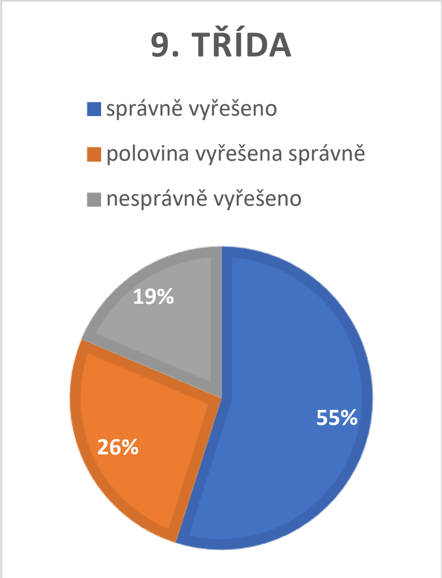
Poslední úlohu vyřešilo správně 45 % žáků v 8. ročníku a 55 % v 9. ročník i v kritériu „polovina vyřešena správně“ byl úspěšnější 9. ročník. Tento ročník dosáhl 26 %, což bylo o pouhé 3 procenta lepší výsledek oproti nižšímu ročníku. Tuto úlohu řešilo výčtem prvků 55 % žáků, pomocí tabulky 35 % žáků a zbývajících 10 % ji řešila graficky.

Tab. 14: Správnost řešení 4. úlohy – žáci 8. a 9. třídy

8. třída		
	Dívky	chlapci
Správně vyřešeno	27	31
Polovina vyřešena správně	12	18
Nesprávně vyřešeno	23	19

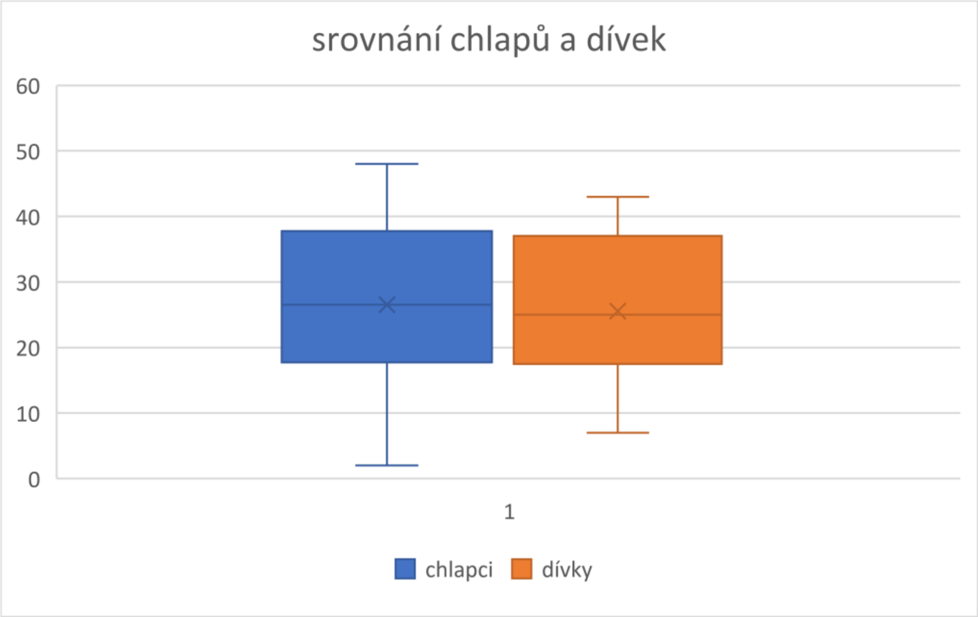
9. třída		
	Dívky	chlapci
Správně vyřešeno	23	33
Polovina vyřešena správně	19	8
Nesprávně vyřešeno	12	7





Graf 22 a 23: Výsledky 4. úlohy žáků 8. a 9. třídy

V následujícím krabicovém grafu můžeme vidět srovnání chlapců a dívek. Chtěla jsem vědět, zda jsou lepšími řešiteli příkladů chlapci nebo dívky, nebo jsou výsledky srovnatelné.



Graf 24: krabicový graf – srovnání chlapců a dívek

Hypotéza:

H0: Počty chlapců a dívek jsou srovnatelné.

Ha: Výsledky nejsou srovnatelné.

Abychom mohli použít dvouvýběrový t-test musíme ověřit ještě shodu rozptylů. Tu nezamítáme a shodu středních hodnot tedy testujeme dvouvýběrovým t-testem, který navíc zohledňujeme shodu rozptylů. Výsledná p-value je 0,825 a shodu středních hodnot tedy nezamítáme. Můžeme tedy říct, že počet chlapců a dívek je srovnatelný.

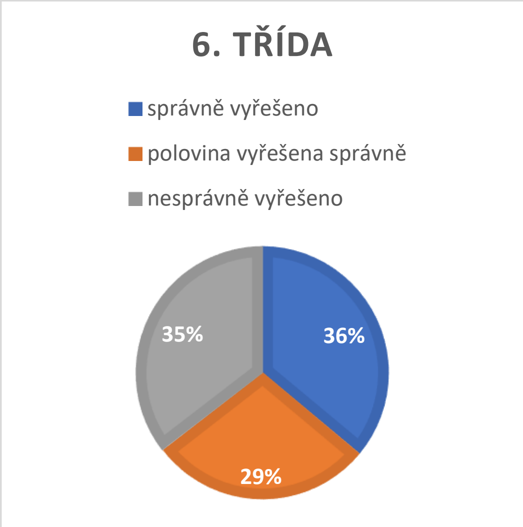
5.3 Porovnání shodných příkladů z 1. a 2. pracovního listu

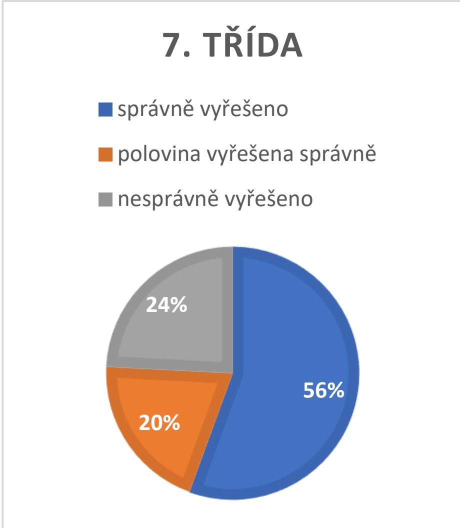
Jak už bylo výše zmíněno v obou pracovních listech se vyskytovaly dvě totožné úlohy. Úloha č. 2 v pracovním listě pro nižší ročníky byla stejná jako úloha č. 4 v listě pro 8. a 9. třídu a úloha č. 3 byla shodná s úlohou č. 2 v pracovním listě pro 8. a 9. třídu. Níže si porovnáme výsledky jednotlivých ročníků. Jednalo se o tuto **úlohu:**

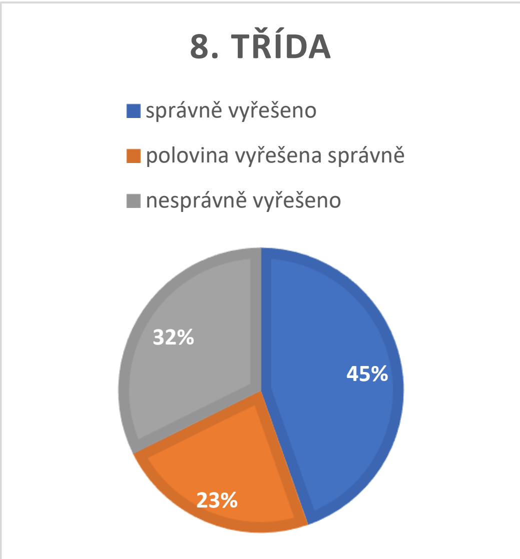
Karin chtěla poslat sms kamarádkám: Anežce, Báře, Denise, Monice a Lucii. Zjistila však, že má kredit pouze na dvě sms zprávy. Zvažovala, kterým kamarádkám napíše a vypsala si nejprve všechny možnosti. Pokus se znázornit všechny možnosti. Kolik má Karin možností?[122]

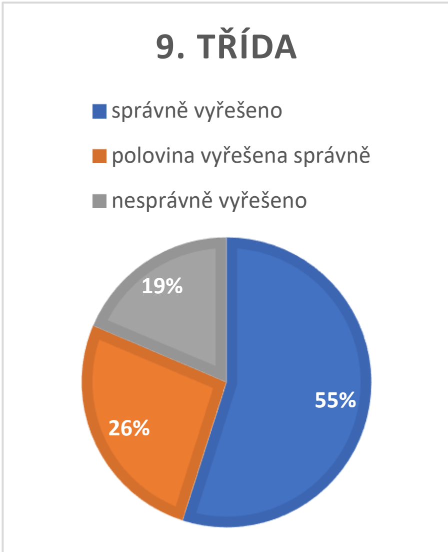
Z grafů je zřejmé, že nejhoršími řešiteli byli žáci 6. tříd, kteří dosáhli 36 %. Zajímavé však je, že žáci 7. ročníku byli výrazně lepší v řešení úlohy, než žáci 8. ročníku. U 7. a 9. tříd nevyřešilo úlohu okolo 20 %, kdežto v 6. a 8. třídě se pohybovalo okolo 30 %. Nejlepších výsledků dosáhl 9. ročník.

[122] Inspirováno a upraveno z knihy: FULIER, Jozef, Attila KOMZSÍK, Márie KMEŤOVÁ, et al. *Matematika: Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií žiakov základných škol-Zbierka problémových úloh bežného života*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Fakulta stredoevrópskych štúdií, 2014. str. 160-203. ISBN 978-80-558-0664-8.


6. TŘÍDA
správně vyřešeno
polovina vyřešena správně
nesprávně vyřešeno
35%
36%
29%


7. TŘÍDA
správně vyřešeno
polovina vyřešena správně
nesprávně vyřešeno
24%
56%
20%


8. TŘÍDA
správně vyřešeno
polovina vyřešena správně
nesprávně vyřešeno
32%
45%
23%


9. TŘÍDA
správně vyřešeno
polovina vyřešena správně
nesprávně vyřešeno
19%
55%
26%

Graf. 8, 9, 22, 23

Druhá úloha, která se v listech shodovala byla tato:

Jistá loterijní společnost vydává více druhů stíracích losů, mezi kterými jsou stírací losy s názvy Veselá čísla a Magické peníze. Počet losů vydaných v loterii Veselá čísla je 2 250000 kusů a v loterii Magické peníze 4 000 000 kusů. Na každém losu se nachází buď finanční výhra nebo žádná výhra. V tabulce jsou uvedené hodnoty finančních výher a počet losů, na kterých jsou výhry příslušné hodnoty.[123]

Tab. 4: Tabulka hodnot k příkladu č. 3

Výhra v korunách	Počet výherních losů v ks	
	Veselá čísla	**Magické Peníze**
20 Kč	500 000	780 000
40 Kč	0	180 000
60 Kč	50 000	0
100 Kč	20 000	78 000
300 Kč	15 000	0
400 Kč	0	9 740
600 Kč	6 000	8 000
1000 Kč	3 000	4 000
2000 Kč	300	2 000
10000 Kč	0	20
20000 Kč	10	15
200000 Kč	5	5

a) Ve které loterii je při zakoupení jednoho losu větší šance na výhru 20 000 Kč?

b) Ve které loterii je větší šance na výhru maximálně 100 Kč?

c) Kdyby sis mohl vybrat jeden los zdarma, který by to byl a proč?

[123] Inspirováno a upraveno z knihy: FULIER, Jozef, Attila KOMZSÍK, Márie KMEŤOVÁ, et al. *Matematika: Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií žiakov základných škol-Zbierka problémových úloh bežného života*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Fakulta stredoevrópskych štúdií, 2014. str. 160-203. ISBN 978-80-558-0664-8.

V této úloze byly velmi rozdílné výsledky. Žáci nižších ročníků na 2. stupni ZŠ byli výrazně horší ve správném řešení úlohy, než žáci 8. a 9. ročníků. Úspěšnost, ale dohnali v kritériu „polovina vyřešena správně“ zde je úspěšnost těchto tříd okolo 72-75 %. Opět se na tomto příkladu ukázalo, že lepšími řešiteli příkladů jsou starší ročníky – u nižších ročníků 2. stupně je to 7. třída a u vyššího ročníku je to 9. třída. Myslím si, že celkově příklad dopadl velmi dobře.

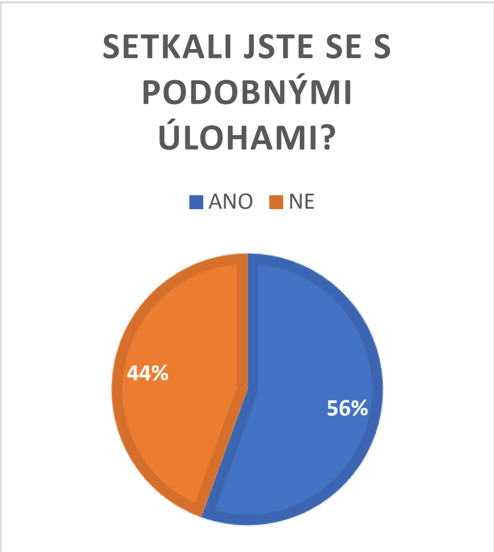
Graf: 9, 10, 11, 18

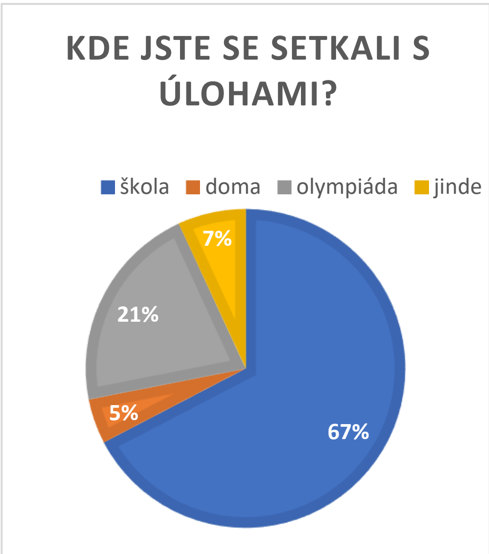
5.4 Vyhodnocení ostatních otázek

Součástí pracovního listu byly také 3 otázky:

- Setkal(a) ses už někdy s podobnými úlohami?
    - Ano
    - Ne
- Pokud jsi odpověděl ano, kde to bylo?
    - Škola
    - Doma
    - Matematická olympiáda
    - Jinde:
- Měl(a) jsi s nějakou úlohou problém? Pokud ano, která to byla?

Výsledky první otázky byly velmi zajímavé více než 55 % dotazovaných zodpověděla, že ano. Pro ty, kteří označili odpověď ano následovala otázka „Kde jste se s úlohami setkali?“ Více než 65 % žáků odpovědělo „škola“. Toto číslo mě velmi překvapilo, myslím si, že se jedná o velmi velký počet. Zajímavé bylo také zjištění, že velká část žáků, která zakroužkovala možnost „jinde“ se s příklady setkala v přípravných kurzech na přijímací zkoušky nebo v knížkách s logickými úlohami. Jeden žák se s příklady dokonce setkal na škole v Anglii. Skoro jedna čtvrtina se setkala s úlohami v matematických olympiádách, kde se skutečně tyto úlohy často vyskytují. Jen 5 % žáků odpovědělo „doma“.

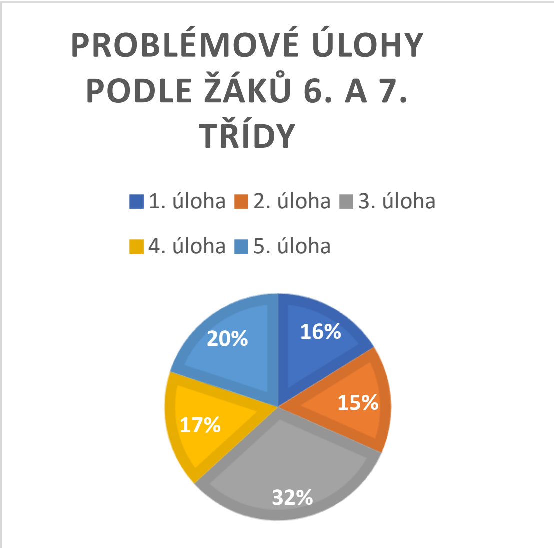


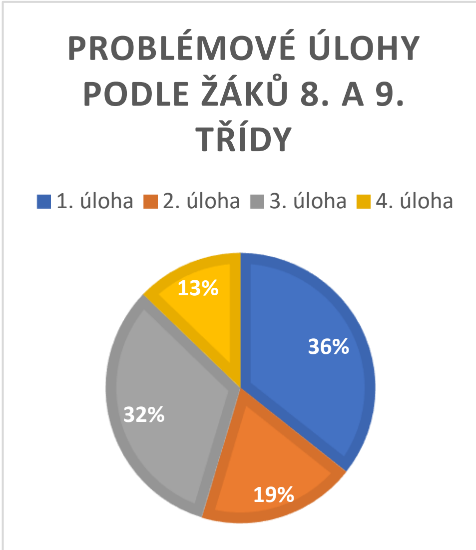


Graf 25 a 26: Výsledky ostatních otázek, které byly součástí pracovního listu

Velmi zajímavé výsledky jsem získala v poslední otázce. U 6. a 7. ročníku se za nejobtížnější otázky jeví č. 3 a č. 5. Tyto odpovědi nám potvrdily výsledky z pracovního listu. Ostatní úlohy se pohybovaly v rozmezí 15-17 %.

U 8. a 9. ročníku byly výsledky už více rozdílné. Dle žáků byly obtížnější úlohy č. 1 a č. 3, které se pohybovaly okolo 34 %. Opět nám tyto potvrdily výsledky jednotlivých úloh.





Graf 27 a 28: Výsledky úloh, které žáci určili za problémové

Závěr

Cílem diplomové práce bylo vytvořit ucelený souhrn poznatků o kombinatorice a pravděpodobnosti ve výuce na základních školách. Tyto poznatky jsem uváděla i na příkladech pro snadnější pochopení.

V praktické části jsem výsledky z pracovních listů zpracovala a následně zanalyzovala. Výsledky úloh, které žáci řešili, jsem opravila a zpracoval do tabulek a grafů. Následně jsem u některých příkladů roztřídila a zanalyzovala strategie a postupy řešení úloh. Nejčastější metodou se ukázal výčet prvků a grafické znázornění. I když byla úloha velmi snadná, dělali žáci ve výpočtech velké množství chyb. Závěrem jsem porovnávala, zda se žáci již s podobnými úlohami setkali nebo která z úloh jim dělala obtíže.

Některé výsledky a způsoby řešení mě velmi překvapily. Z výzkumu vyplývá, že lepšími řešiteli jsou vyšší ročníky.

Pro začínajícího učitele je velmi přínosné zjisti, že právě pomocí těchto úloh může žákům ukázat, že se s kombinatorikou a pravděpodobností, často nevědomky, se setkávají už od dětství. Tento typ úloh slouží nejen pro rozvíjení logického myšlení, ale napomáhá také učitelům zatraktivnit matematiku. Dětí více zaujmeme a upoutáme, když použijeme příklady z jejich běžného života. Mají pak možnost objevovat, zkoumat a ukázat jejich kreativní myšlení.

Tento výzkum mi jako začínajícímu učiteli dal hodně. Ukázal mi, jak stavět slovní úlohy, různé typy úloh, se kterými lze žáky zaujmout a rozvíjet jejich logické myšlení. Ve své praxi budu určitě podobné úlohy zařazovat do výuky.

Souhrn

Diplomová práce se zabývá kombinatorikou a pravděpodobností na 2. stupni základní školy. Teoretická část práce se zabývá, jak je kombinatorika a pravděpodobnost zařazena v Rámcovém vzdělávacím programu základních škol, ale i historií kombinatoriky a pravděpodobnosti, vymezením základních kombinatorických a pravděpodobnostních pravidel.

Praktická část se věnuje výzkumu. Žáci 6. až 9. ročníků řešili různé kombinatorické a pravděpodobnostní úlohy.

Klíčové slova: kombinatorika, pravděpodobnost, základní kombinatorické pravidla, pravděpodobnostní pravidla, kombinatorické úlohy, pravděpodobnostní úlohy, kombinatorika v Rámcovém vzdělávacím programu, pravděpodobnost v Rámcovém vzdělávacím programu.

Summary

This Master's Degree thesis examines how combinatorics and probability is perceived and taught at the 2nd level of Elementary school Education. The theoretic part is concerned with the history of both combinatorics and probability and it states the basic combinatoric and probability rules and principles. The theoretic part also further states how the combinatorics and probability is classified and how it is incorporated into the Czech Framework Educational Programme for Elementary Education.

The practical part focuses on research of students between 6th and 9th grade of elementary schools and their approach while solving various combinatoric and probability tasks.

Key words: Combinatorics, probability, basic combinatorial rules, basic probability rules, combinatorial tasks, probability tasks, combinatorics in the Framework Education Programme, probability in the Framework Education Programme.

Referenční seznam

Literatura

1. BLAŽKOVÁ, Růžena, Milena VAŇUROVÁ a Květoslava MATOUŠKOVÁ. *Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty)*. Brno: Masarykova univerzita, 2002. 84 s. ISBN 80-210-3022-4.
2. BUDÍNOVÁ, Irena, Růžena BLAŽKOVÁ, Milena VAŇUROVÁ a Helena DURNOVÁ. *Úlohy z matematiky pro bystré a nadané děti prvního stupně ZŠ, jejich učitele a rodiče: škály pro identifikaci nadání, zkušenosti s nadanými žáky*. Brno: Edika, 2016. 96 s. ISBN 978-80-266-1012-0.
3. CALDA, Emil a Václav DUPAČ. *Matematika pro gymnázia*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 2008. Učebnice pro střední školy (Prometheus). 170 s. ISBN 978-80-7196-365-3.
4. DUPAČ, Václav a Marie HUŠKOVÁ. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. 2., upr. vyd. Praha: Karolinum, 2013. 162 s. ISBN 978-80-246-2208-8.
5. FULIER, Jozef, Attila KOMZSÍK, Márie KMEŤOVÁ, et al. *Matematika: Zvyšovanie kľúčových matematických kompetencií žiakov základných škol- Zbierka problémových úloh bežného života*. Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, Fakulta stredoevrópskych štúdií, 2014. 230 s. ISBN 978-80-558-0664-8.
6. HEJNÝ, Milan a Darina JIROTKOVÁ. *Matematické úlohy pro druhý stupeň základního vzdělávání: náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2010. ISBN 978-80-211-0612-3.
7. HERMAN, Jiří, Radan KUČERA a Jaromír ŠIMŠA. *Seminář ze středoškolské matematiky*. 2., přeprac. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2004. 51 s. ISBN 80-210-3528-5.
8. HRADECKÝ, Pavel, Matěj TURČAN a Anna MADRYOVÁ. *Pravděpodobnost*. 3. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2012. 168 s. ISBN 978-80-248-2617-2.
9. JANUROVÁ, Eva a Miroslav JANURA. *Matematika na dlani*. Olomouc: Rubico, 2002. Na dlani. 116 s. ISBN 80-85839-73-3.

10. JIRÁSEK, František, Karel BRANIŠ, Stanislav HORÁK a Milan VACEK. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU*. 6. vydání. Praha: Prometheus, 2016. 362 s. ISBN 978-80-7196-349-3.
11. JIRÁSEK, František. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU*. 3. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1995, Učebnice pro střední školy. 470 s. ISBN 80-7196-012-8.
12. JUSTOVÁ, Jaroslava. *Matematika pro 5. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 5. Praha: Alter, 2010. 64 s. ISBN 9788072452125.
13. KOVÁČIK, Ján a Iveta SCHULZOVÁ. *Řešené příklady z matematiky pro základní školy a osmiletá gymnázia*. Praha: ASPI, 2004. ISBN 80-7357-039-4.
14. LINDA, Bohdan. *Pravděpodobnost*. Vyd. 2. Pardubice: Univerzita Pardubice, Fakulta ekonomicko-správní, 2011. 140 s. ISBN 978-80-7395-430-7.
15. LINDEROVÁ, Ivica, Petr SCHOLZ a Michal MUNDUCH. *Úvod do metodiky výzkumu*. Jihlava: Vysoká škola polytechnická Jihlava, 2016. 62 s. ISBN 978-80-88064-23-7.
16. MAČÁK, KAREL: Poznámky k formování kombinatoriky v 16. a 17. století.In: Bečvář, Jindřich (editor); Fuchs, Eduard (editor): Matematika v 16. a 17. století. Seminář Historie matematiky III, Jevíčko, 18.8.–21.8.1997. (Czech). Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-150-7.
17. MAČÁK, KAREL: Poznámky k formování teorie pravděpodobnosti v XVII. a XVIII. století In: Bečvář, Jindřich (editor); Fuchs, Eduard (editor): *Historie matematiky. II. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 21. 8. – 24. 8. 1995, Sborník.* (Czech). Praha: Prometheus, 1997. ISBN 80-7196-046-2
18. MAREK, Luboš. *Pravděpodobnost*. Praha: Professional Publishing, 2012. 288 s. ISBN 978-80-7431-087-4.
19. PŘÍHONSKÁ, J.: Úvod do kombinatoriky. Tribun EU s r.o., Brno 2008, 104 s. ISBN 978-80-7399-456-3.
20. PŘÍHONSKÁ, Jana. *Dělení úloh - metody řešení: průvodce studiem pro výběrový seminář*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. ISBN 978-80-7494-010-1.
21. PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorické problémy: aplikace a metody řešení*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2014. ISBN 978-80-7494-017-0.

22. VILENKIN, Naum Jakovlevič. Kombinatorika. Vyd. 1. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1977, 298 s.

Kurikulární dokument

1. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání, upravený se zapracovanými změnami. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2017. 143 s. [online]. [cit. 2017-11-17]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/318/

Internetové zdroje

1. ÁCSOVÁ, Silvia. *Zborník príspevkov z konferencie Matematika v škole dnes a zajtra (6. ročník): Kedy a ako vyučovať pravdepodobnosť a štatistiku na ZŠ a SŠ* [online]. 2005. Ružomberok [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: math.ku.sk/data/konferenciasub/zbornik04.doc
2. BLAŽKOVÁ, Růžena a Irena BUDÍNOVÁ. *Kombinatorika – možnosti využití v učivu matematiky na základní škole* [online]. In: . [cit. 2018-02-02]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/1441/jaro2012/MA2MP_PDM2/um/DM2P9.pdf
http://matematickyklokan.net/phocadownload/sborniky/sbornik_klokan_2016.pdf
3. *Matematický klokan 2016: kategorie Benjamín* [online]. 2016 [cit. 2018-02-10]. Dostupné z:
4. PŘÍHONSKÁ, Jana. *Kombinatorika: jak ji možná neznáme* [online]. In: . [cit. 2018-02-02]. Dostupné z: file:///C:/Users/Admin/Desktop/KOMBINATORIKA-prez.pdf
5. PŘÍHONSKÁ, Jana. *SEPAROVANÉ MODELY PASCALOVA TROJÚHELNÍKA* [online]. In: [cit. 2018-04-02]. Dostupné z: https://kmd.fp.tul.cz/images/stories/vyuka/prihonska-mat_pro_praxi1/Pascal_3uhelnik.pdf
6. ROSKOVEC, Tomáš. *Magické čtverce* [online]. In: [cit. 2018-02-02]. Dostupné z: http://docplayer.cz/10826425-Magicke-ctverce-tomas-roskovec-uvod.html

7. VOGLOVÁ, Zuzana. *27. MEZINÁRODNÍ KONFERENCE - HISTORIE MATEMATIKY: HISTORIE KOMBINATORIKY* [online]. In: . 2006 [cit. 2018-02-02]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz//sborniky/sbornik-27.pdf
8. ZHOUF, Jaroslav. *ZÁJMOVÉ ČINNOSTI ŽÁKŮ ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOL V MATEMATICE* [online]. 2008 [cit. 2018-02-10]. Dostupné z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/Download/Volne/SUMA_80.pdf
9. ŽILKOVÁ, Monika. Kombinatorické hry v školskej matematike. Math.ku.sk. 2003. [online]. [cit. 2017-10-17]. Dostupné z: http://math.ku.sk/data/konferenciasub/pdf2003/Zilkova.pdf

Seznam zkratek

+	plus
-	mínus
=	rovná se
.	krát
/	děleno
%	procenta
$\binom{n}{k}$	kombinační číslo *n* nad *k*
$A_i \cap A_j$	průnik dvou množin
$A_i \cup A_j$	sjednocení dvou množin
A_i	množiny prvků
N_0	množina přirozených čísel včetně nuly
$P'_{n_1, n_2, \ldots, n_k}(n)$	permutace s opakováním z *n* prvků
$\sum_{i=1}^{k} n_i$	součet prvků $n_1, n_2, \ldots, n_k,$
$\prod_{i=1}^{k} n_i.$	součin prvků $n_1, n_2, \ldots, n_k,$
{}	prázdná množina
$\in$	je prvkem
$\notin$	není prvkem
aj.	a jiné
atd.	a tak dále
C(*k*, *n*)	kombinace *k* prvků z daných *n* prvků
C´(*k*, *n*)	kombinace s opakováním *k* prvků z daných *n* prvků
č.	číslo
k, n	proměnné
N	množina přirozených čísel
n!	faktoriál čísla n

např.	například
obr.	obrázek
P(n)	permutace čísla n
př. n. l.	před naším letopočtem
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání
RVP	Rámcový vzdělávací program
s., str.	strana
tab.	tabulka
tj.	to je
tzv.	tak zvaný
V(k, n)	variace k-třídy z daných n prvků
V´(k, n)	variace s opakováním k-třídy z daných n prvků
ZŠ	základní škola

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam grafů

Seznam příloh

Příloha č. 1	Pracovní listy k diplomové práci
Příloha č. 2	CD- ROM

Příloha č. 1

6. třída/ 7. třída (zakroužkuj)

chlapec/dívka (zakroužkuj)

PRACOVNÍ LIST

1) V hokejovém zápase padly 3 góly. Výsledek byl 2:1. Tým A dal 2 góly a tým B dal 1 gól, ale neznáš příběh zápasu. Jak mohl vypadat průběžný stav tohoto zápasu? Vypiš všechny možnosti, jak se mohl měnit stav zápasu. Jeden možný průběh zápasu byl: 0:0, 1:0, 2:0, 2:1.

1. možnost: 0:0, 1:0, 2:0, 2:1

2) Karin chtěla poslat sms svým kamarádkám: Anežce, Barboře, Denise, Monice a Lucii. Zjistila však, že má kredit pouze na dvě sms zprávy. Zvažovala, kterým kamarádkám napíše a vypsala si nejprve všechny možnosti. Pokus se znázornit všechny možnosti.

3) Jistá loterijní společnost vydává více druhů stíracích losů, mezi kterými jsou stírací losy s názvy Veselá čísla a Magické peníze. Počet losů vydaných v loterii Veselá čísla je 2 250000 kusů a v loterii Magické peníze 4 000 000 kusů. Na každém losu se nachází buď finanční výhra nebo žádná výhra. V tabulce jsou uvedené hodnoty finančních výher a počet losů, na kterých jsou výhry příslušné hodnoty.

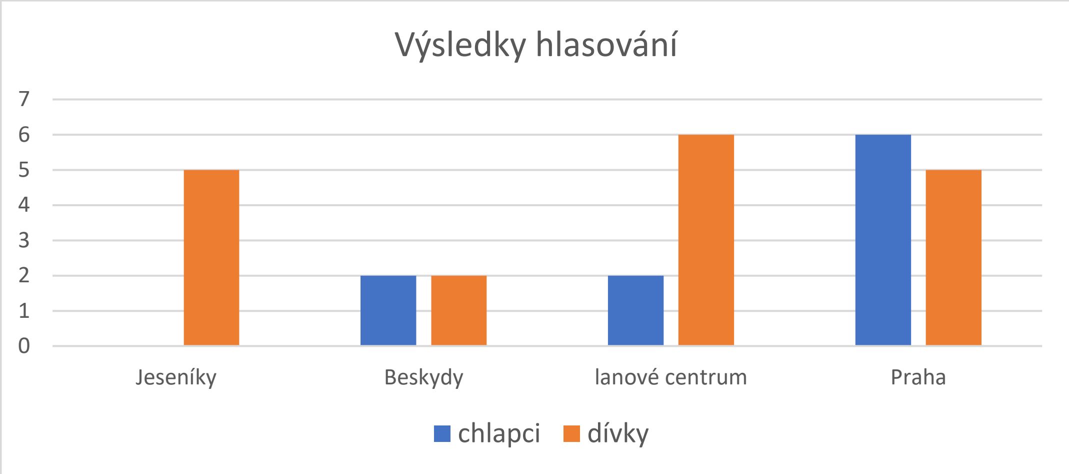
Výhra v korunách	**Počet výherních losů v ks**	
	Veselá čísla	**Magické Peníze**
20 Kč	500 000	780 000
40 Kč	0	180 000
60 Kč	50 000	0
100 Kč	20 000	78 000
300 Kč	15 000	0
400 Kč	0	9 740
600 Kč	6 000	8 000
1000 Kč	3 000	4 000
2000 Kč	300	2 000
10000 Kč	0	20
20000 Kč	10	15
200000 Kč	5	5

a) Ve které loterii je při zakoupení jednoho losu větší šance na výhru 20 000 Kč?

b) Ve které loterii je větší šance na výhru maximálně 100 Kč?

c) Kdyby sis mohl vybrat jeden los zdarma, který by to byl a proč?

4) Ve 6.B. se žáci neuměli dohodnout, kam pojedou na konci školního roku na výlet. Hlasovali. Rozhodovali se mezi Jeseníky, Beskydami, Tatralandií a Prahou. Třídu navštěvuje 32 žáků, avšak někteří byli v den hlasování nemocní. Následný graf vyjadřuje výsledek hlasování všech přítomných žáků.



a) Na základě grafu doplň tabulku výsledků hlasování.

Místo výletu	Hlasů celkem

b) Kdyby ten den byli přítomni všichni žáci, mohli by jet žáci 6.B na výlet jinam?

5) Od chatek vedou k rybníku čtyři cesty. Od rybníku k domku vedou dvě cesty. Kolika způsoby se lze dojít od chatek přes rybník až k domků?

- Setkal(a) ses už někdy s podobnými úlohami?
    - ANO
    - NE
- Pokud ANO, kde to bylo?
    - ve škole
    - doma
    - matematická olympiáda
    - jinde:……………………………………………………….
- Měl(a) jsi s nějakou úlohou problém? Pokud ano, která to byla?
  ………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………….

8. třída/9. třída (zakroužkuj)

chlapec/dívka (zakroužkuj)

PRACOVNÍ LIST

1. Pepa se rozhodl cestovat vlakem, ale zapomněl si koupit místenku. Ve vlaku, kterým cestoval, bylo v každém kupé 8 míst k sezení. Pepa si při nastupování vybral kupé, ve kterém zatím nikdo neseděl, ale 3 místa byly rezervované.
    a) **Jaká je šance, že neobsadí místo, které má někdo rezervované? Jaká je pravděpodobnost, že neobsadí místo, které má někdo rezervované?**
    b) **Jaká je pravděpodobnost, že obsadí místo, které má někdo rezervované?**
    c) **Porovnej, která pravděpodobnost z úlohy 1 a úlohy 2 je větší? Kolik míst by muselo být, aby byla pravděpodobnost stejná?**

2. Jistá loterijní společnost vydává více druhů stíracích losů, mezi kterými jsou stírací losy s názvy Veselá čísla a Magické peníze. Počet losů vydaných v loterii Veselá čísla je 2 250000 kusů a v loterii Magické peníze 4 000 000 kusů. Na každém losu se nachází buď finanční výhra nebo žádná výhra. V tabulce jsou uvedené hodnoty finančních výher a počet losů, na kterých jsou výhry příslušné hodnoty.

Výhra v korunách	**Počet výherních losů v ks**	
	Veselá čísla	**Magické Peníze**
20 Kč	500 000	780 000
40 Kč	0	180 000
60 Kč	50 000	0
100 Kč	20 000	78 000
300 Kč	15 000	0
400 Kč	0	9 740
600 Kč	6 000	8 000
1000 Kč	3 000	4 000
2000 Kč	300	2 000
10000 Kč	0	20
20000 Kč	10	15
200000 Kč	5	5

a) Ve které loterii je při zakoupení jednoho losu větší šance na výhru 20 000 Kč?

b) Ve které loterii je větší šance na výhru maximálně 100 Kč?

c) Kdyby sis mohl vybrat jeden los zdarma, který by to byl a proč?

3. Tomáš dostal na narozeniny nový mobilní telefon. Když chtěl zavolat svému kamarádovi Milanovi, tak zjistil, že jeho telefonní číslo nemá uložené v kontaktech. Předčíslí a prvních šest čísel si pamatoval, chybělo mu poslední trojčíslí.
   a) Tomáš si vzpomněl, že na místě stovek hledaného trojčíslí je buď 3 nebo 5 a na místě desítek je buď 0 nebo 1. Kolik je takových telefonních čísel?
   b) Tomáš si ještě vzpomněl, že na místě jednotek je číslo větší než 5.

4. Karin chtěla poslat sms svým kamarádkám: Anežce, Barboře, Denise, Monice a Lucii. Zjistila však, že má kredit pouze na dvě sms zprávy. Zvažovala, kterým kamarádkám napíše a vypsala si nejprve všechny možnosti. Pokus se znázornit všechny možnosti.

- Setkal(a) ses už někdy s podobnými úlohami?
  - ANO
  - NE
- Pokud ANO, kde to bylo?
  - ve škole
  - doma
  - matematická olympiáda
  - jinde:……………………………………………………….
- Měl(a) jsi s nějakou úlohou problém? Pokud ano, která to byla?
  ………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………….

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Petra Kapusňaková
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Květoslav Bártek, Ph.D.
Rok obhajoby:	2018

Název práce:	Kombinatorika a pravděpodobnost ve výuce matematiky na 2. stupni ZŠ
Název v angličtině:	COMBINATORICS AND PROBABILITY AT OWER-SECONDARY SCHOOL
Anotace práce:	Diplomová práce se zabývá kombinatorikou a pravděpodobností na 2. stupni základní školy. Teoretická část práce se zabývá, jak je kombinatorika a pravděpodobnost zařazena v Rámcovém vzdělávacím programu základních škol, ale i historií kombinatoriky a pravděpodobnosti, vymezením základních kombinatorických a pravděpodobnostních pravidel. V praktické části žáci 6. až 9. ročníků řešili různé kombinatorické a pravděpodobnostní úlohy.
Klíčová slova:	kombinatorika, pravděpodobnost, matematika, kombinatorika a pravděpodobnost v Rámcovém vzdělávacím programu
Anotace v angličtině:	This Master's Degree thesis examines how combinatorics and probability is perceived and taught at the 2nd level of Elementary school Education. The theoretic part is concerned with the history of both combinatorics and probability and it states the basic combinatoric and probability rules and principles. The theoretic part also further states how the combinatorics and probability is classified and how it is incorporated into the Czech Framework Educational Programme for Elementary Education. The practical part focuses on research of students between 6th and 9th grade of elementary schools and their approach while solving various combinatoric and probability tasks.

Klíčová slova v angličtině:	Combinatorics, probability, Mathematics, combinatorics in the Framework Education Programme, probability in the Framework Education Programme.
Přílohy vázané v práci:	Příloha č.1 – Pracovní listy k diplomové práci Příloha č. 2 – CD-ROM
Rozsah práce:	94 stran
Jazyk práce:	Český jazyk