



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

**ANALOGIE V DYNAMICE TEKUTIN: VÍR JAKO
ČERNÁ DÍRA**

ANALOGIES IN FLUID DYNAMICS: VORTEX AS A BLACK HOLE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

ŠIMON STAŇO

Ing. JAKUB ILLÍK

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav: Energetický ústav
Student: **Šimon Staňo**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Jakub Illík**
Akademický rok: 2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.1111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Analogie v dynamice tekutin: vír jako černá díra

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Při studiu mechaniky tekutin si lze všimnout nápadných podobností některých rovnic a jevů s jinými fyzikálními zákony. Mezi nejznámější patří elektrohydraulická analogie aplikovatelná na obvody či podobnost vztahů popisujících proudění tekutin s Maxwellovými rovnicemi v elektromagnetismu. Určité podobnosti lze najít také v kvantovém světě, nebo naopak v makroskopickém měřítku. Analogie rotující černé díry s hladinovým vírem může sloužit k lepšímu pochopení gravitačního vlivu těchto objektů a jejich interakce s okolím.

Cíle bakalářské práce:

Cílem bakalářské práce bude rešerše shrnující analogie spojené s dynamikou tekutin. Experimentální část bude zaměřena na konkrétní analogický příklad (výtokový vír simulující černou díru). Na téma je možné navázat prací diplomovou, která by obsahovala detailnější matematicko-fyzikální popis problému doplněný numerickou simulací.

Seznam doporučené literatury:

BOKULICH, A.: Maxwell, Helmholtz, and the unreasonable effectiveness of the method of physical analogy. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, [online]. 2015, roč. 50, č. 1, s. 28-37 [2021-09-24]. ISSN 1879-2510. DOI: 10.1016/j.shpsa.2014.09.012.

BRDIČKA, M.; SAMEK, L.; SOPKO, B.: *Mechanika kontinua*. 3. vydání. Praha: Academia, 2005. ISBN 80-200-1344-X.

BURDA, R.: *Studie vtokových vírů*. Brno, 2017. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce: Martin Hudec.

COUDER, Y.; FORT, E.: Single-particle diffraction and interference at a macroscopic scale. *Physical Review Letters*, [online]. 2006, roč. 97, č. 15, s. 154101(4) [2021-09-24]. ISSN 0031-9007. DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.154101.

OH, K. W.; LEE, K.; AHN, B. & FURLANI, E. P.: Design of pressure-driven microfluidic networks using electric circuit analogy. *Lab on a Chip*, [online]. 2012, roč. 12, č. 3, s. 515-545 [2021-09-24]. ISSN 1473-0189. DOI: 10.1039/c2lc20799k.

PATRICK, S.: *On the analogy between black holes and bathtub vortices*. Nottingham, 2019. Dizertační práce. University of Nottingham. School of Mathematical Sciences. Vedoucí práce: Silke Weinfurter.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Táto bakalárska práca pojednáva o rôznych analogických súvislostiach dynamiky tekutín s oblasťami elektriny, elektromagnetizmu, kvantovej mechaniky a gravitácie. Zvláštna pozornosť bola sústredená na určitú podobnosť medzi rotujúcimi čiernymi dierami a výtokovým vírom. Na prvý pohľad odlišné javy, ktoré je možné simuláciou známeho javu preskúmať. Správanie v okolí skutočných čiernych dier môže byť, s určitým zjednodušením, skúmané v rámci hydraulického laboratória. Priekopníkom tejto myšlienky je W. G. Unruh, na ktorého prácu nadviazala a pokračovala s výskumom Silke Weinfurtnerová. Jej výskum bol inšpiráciou pre preskúmanie danej oblasti v tejto bakalárskej práci. Je možné vizualizovať horizont udalostí čiernej diery alebo hranice ergosféry, taktiež je možné pozorovať komplexnejšie javy ako sú superradiancia, spätná reakcia alebo splynutie čiernych dier. Analógia nie je úplne presná, ale dovoľuje skúmať veľmi zložitý systém pomocou jednoduchého experimentu a môže viesť k lepšiemu pochopeniu každého z javov. Jednoduchá experimentálna zostava bola vytvorená v laboratóriu Odboru fluidného inžinierstva Viktora Kaplana.

Kľúčové slová

Fyzikálne analógie, elektrohydraulická analógia, rotujúca čierna diera, výtokový vír, superradiancia

Abstract

This bachelor thesis discusses the various analogous connections of fluid dynamics with the fields of electricity, electromagnetism, quantum mechanics and gravity. Particular attention has been focused on a certain similarity between rotating black holes and the draining bathtub vortex. At first sight different phenomena that can be explored by simulating known phenomena. The behaviour around real black holes can, with some simplification, be studied within the hydraulic laboratory. The pioneer of this idea is W. G. Unruh, whose work was followed up and continued with research by Silke Weinfurtner. Her research served as the inspiration for the exploration of this field in this bachelor thesis. It is possible to visualize the event horizon of a black hole or the boundaries of the ergosphere, it is also possible to observe more complex phenomena such as superradiance, backreaction or ringdown. The analogy is not completely precise, but it allows a very complex system to be studied with a simple experiment and can lead to a better understanding of these phenomena. A simple experimental setup was created in the laboratory of Victor Kaplan's Department of Fluid Engineering.

Keywords

Physical analogies, electric-hydraulic analogy, rotating black hole, bathtub vortex, superradiance

Bibliografická citácia

STAŇO, Šimon. *Analogie v dynamice tekutin: vír jako černá díra*. [online] Brno, 2022. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/140046>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce Ing. Jakub Illík

Prehlásenie

Prehlasujem, že som toto pojednanie vypracoval samostatne pod vedením Ing. Jakuba Illíka. Uviedol som všetky literárne pramene, publikácie a ďalšie zdroje, z ktorých som čerpal.

.....

Brno

.....

Šimon Staňo

PodĎakovanie

Ďakujem Ing. Jakubovi Illíkovi, za vyjadrenú dôveru, za poskytnutie dôležitých informácií pri spracovávaní tejto práce, ako aj výraznú pomoc pri príprave a realizácii experimentu v laboratórnom prostredí. Taktiež ďakujem mojej rodine za podporu počas celého štúdia.

Obsah

| | |
|---|-----------|
| Úvod | 9 |
| 1 Hydrodynamika/Elektrina | 10 |
| 1.1 Podobné správanie v jednoduchých obvodoch | 10 |
| 1.2 Hydraulický odpor | 11 |
| 2 Hydrodynamika/Elektromagnetizmus | 14 |
| 2.1 Vektorové pole a divergencia | 14 |
| 2.2 Rotácia | 16 |
| 2.3 Maxwellove rovnice | 17 |
| 3 Hydrodynamika/Kvantová mechanika | 19 |
| 3.1 Obraz analógií | 19 |
| 3.2 Walker a teória riadiacej vlny | 19 |
| 3.3 Spojenie analógií | 24 |
| 4 Hydrodynamika/Gravitácia | 25 |
| 4.1 Koncept | 25 |
| 4.2 Akustický horizont | 26 |
| 4.3 Horizonty čiernej diery | 27 |
| 4.4 Superradiančný rozptyl | 29 |
| 4.5 Spätná reakcia | 30 |
| 4.6 Ringdown | 31 |
| 4.7 Oblasti čiernych dier | 31 |
| 5 Experiment - Vír ako Čierna diera | 33 |
| 5.1 Zakrivenie priestoru a tvorba víru | 33 |
| 5.2 Druhy pozorovaných výtokových vírov a ergosféra | 35 |
| 5.3 Zaujímavé vírové štruktúry | 37 |
| Záver | 39 |
| Zoznam použitých zdrojov | 41 |
| Zoznam použitých skratiek a symbolov | 44 |
| Zoznam obrázkov | 45 |

Úvod

Analógie v rôznych vedeckých odvetviach prispievajú k porozumeniu a zjednodušeniu výskumu rozličných neznámych javov vďaka podobnosti s už známymi dejmi. Je preto vhodné uľahčiť si zložité javy pomocou týchto analógií. Poznávanie nových konceptov, ako aj prinášanie nových teórií do rôznych vedných oblastí je týmto analogickým procesom značne zjednodušené.

Štúdium mechaniky tekutín odhaľuje podobnosti fyzikálnych javov a niektorých rovníc v iných vedeckých odvetviach. Či na experimentálnej báze, ako tomu je pri výskume fyzikálnych javov v hydraulických odvodoch v závislosti na elektrických obvodoch. Je možné použitie analógií aj na iné zvláštne javy, pre ktoré je potrebné objasnenie.

Práca zahŕňa konkrétne podobnosti javov v oblasti elektriny. Rovnice, ktoré vyjadrujú vzťahy medzi napätím a prúdom zamenené za tlak a prietok ukazujú bližšie podobnosti v prípade náhrady elektrického obvodu s hydraulickým obvodom. Taktiež kvantitatívne zhody pri počítaní odporov v oboch odvetviach.

Podobne tak aj v prípade elektromagnetizmu je možné lepšie pochopiť pomerne abstraktné vzťahy Maxwellových rovníc vďaka zjednodušeniu veličín na úroveň viditeľného. Zaujímavosť predstavuje paralelu v oblasti kvantovej mechaniky, kde k pochopeniu javov bol využitý experimentálny prístup z oblasti dynamiky tekutín. Výrazná podobnosť sa ukazuje v použití „chodiacej kvapky“ (tzv. *walkera*) po hladine vody namiesto častice elektrónu v dvojštrbinovom experimente. Vlnky na hladine si je možné predstaviť ako rozloženie hustoty pravdepodobnosti. Taktiež tzv. „kvantový korál“ známy z kvantovej fyziky je možné demonštrovať na oscilujúcej kvapke v uzavretom priestore.

Najvýraznejšie sa práca venuje konceptu čiernych dier a gravitácie. Zložité javy a pojmy z tejto oblasti sa za využitia zjednodušených modelov dajú ľahšie pochopiť. Interakcia rotujúcej čiernej diery s okolím pri analogickej náhrade za rotujúci výtokový vír preukazuje, že je možné skúmať javy v malej mierke a neskôr aplikovať poznatky vo väčšej škále.

1 Hydrodynamika/Elektrina

Vzťahy elektrických obvodov voči hydraulickým obvodom vravia o podobných vzťahoch medzi ich jednotlivými veličinami. Analogické správanie tlaku kvapaliny a elektrického napätia, hydraulického odporu a elektrického odporu ako aj prietoku kvapaliny a elektrického prúdu je možné využiť pri komplexnejších návrhoch sústav a ich výpočtoch. Prípadne pomáhajú pochopeniu princípu pri vysvetľovaní tém z oboch vedných odborov.

1.1 Podobné správanie v jednoduchých obvodoch

Rôzne javy v elektrických obvodoch sú do istej miery podobné javom, ktoré sa dejú v mechanike tekutín. Experimentálne je možné získať obraz o tom, že niektoré jednoduché rovnice a vzťahy sa v týchto odvetviach podobajú.

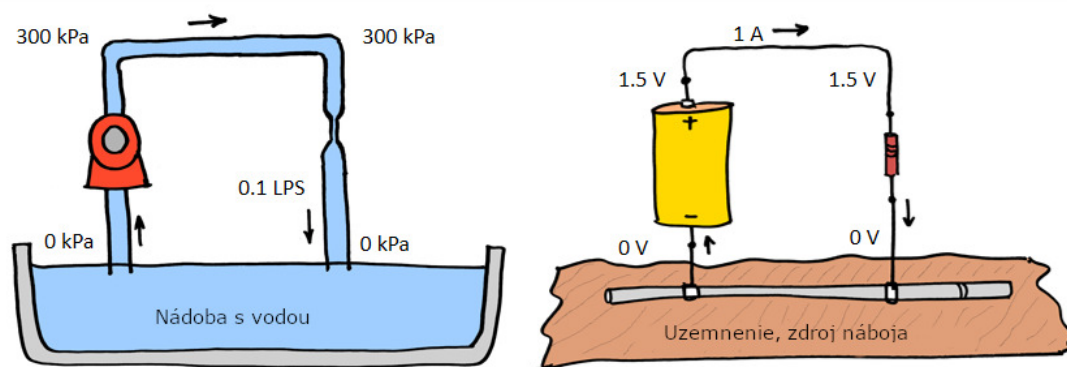
Intuitívne je možné tok kvapaliny nahradiť elektrickým prúdom, čo pozostáva z náhrady veličín z jednej oblasti do druhej pri zachovaní analogických vzťahov. Vďaka tejto náhrade je možné vopred predpokladať určité chovanie medzi danými veličinami. V jednoduchom jednosmernom elektrickom obvode je jednou z elementárnych rovníc rovnica na výpočet elektrického výkonu P_e (1.1), ktorá po úprave vyjadruje vzťah medzi elektrickým napätím U a elektrickým prúdom I . [18] Analogicky vzaté v hydraulickom obvode je možné popísať rovnicou pre P_h (1.2), predstavujúcou vzťah medzi tlakom p a prietokom kvapaliny Q . [18]

$$P_e = \frac{W}{t} = \frac{UIt}{t} = UI \quad (1.1)$$

$$P_h = p \frac{V}{t} = pQ \quad (1.2)$$

Bližšie podobnosti medzi elektrickým napätím a tlakom kvapaliny, ako aj obdobné správanie elektrického prúdu a prietoku kvapaliny, si je možné všimnúť pri porovnaní jednoduchých obvodov z oboch odvetví, viď (obr.1.1).

V hydraulickom obvode je nádoba s vodou a relatívnym tlakom 0 kPa , za pomoci čerpadla, ktoré koná prácu, sa bez zmeny priemeru potrubia zmení tlak vody na 300 kPa. Pričom vďaka zmene potrubia, respektíve drsnosti v mieste zúženia, vznikne v mieste hydraulický odpor. Energia sa premení na teplo a ďalej klesne pretlak späť na 0 kPa v mieste, kde obvod ústí späť do nádoby. V prípade, že prietok sa rovná hodnote 0,1 litra za sekundu, za predpokladu ideálnych podmienok vychádza, že výkon, ktorý je potreba dodať pre prúdenie obvodom za daných podmienok je 30 W. V mieste odporu je potom celá hodnota energie premenená na tepelnú energiu.

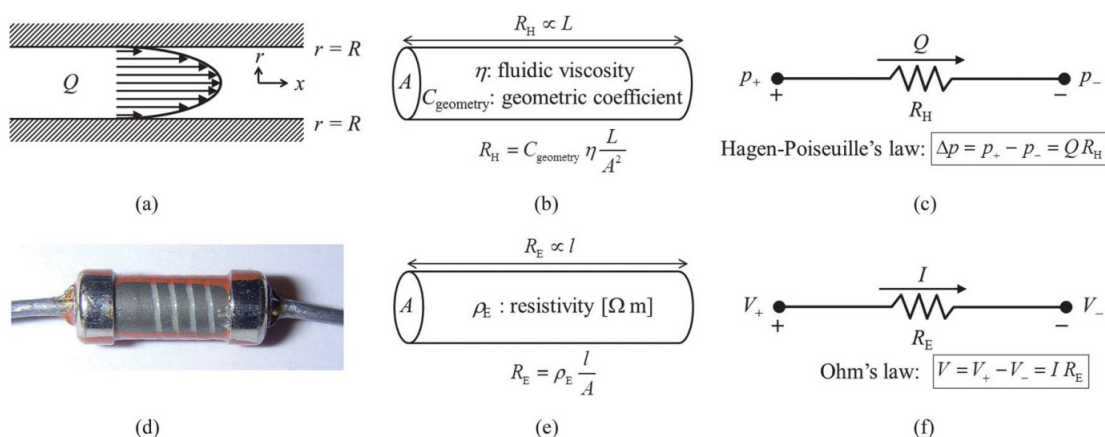


Obr. 1.1: Hydraulický a elektrický obvod.[5]

Rovnaké správanie sa vyskytuje v elektrickom obvode. Počiatočná hodnota napätia je 0 V. Batéria ju zvýši na 1,5 V, analogicky ako čerpadlo zvýšilo tlak vody v predošlom obvode. Elektrický prúd prúdi do rezistora, ktorý svojim odporom zníži napätie na 0 V. Všetka energia je aj v tomto prípade premenená na tepelnú. Preto je možné tvrdiť, že rezistor a hydraulický odpor vykazujú obdobné správanie. Podobne aj čerpadlo a batéria ako zdroj tlaku, respektíve napätia.

1.2 Hydraulický odpor

Vyňatím jedného prvku, rezistora, je možné porovnať správanie elektrického prúdu, ktorý prúdi cez rezistor s prúdením kvapaliny v potrubí. Vyjadrenie z Hagen-Poiseuillovho zákona predstavuje správanie kvapaliny prúdiacej potrubím kruhového prierezu a poklesu jej tlaku.[20] Obdobne Ohmov zákon vysvetľuje pokles elektrického napätia pri prechode rezistorom viď (obr.1.2).[21]



Obr. 1.2: Podobnosti medzi Hagen - Poiseullovým a Ohmovým zákonom a) laminárne prúdenie kvapaliny, b) hydraulický odpor v potrubí, c) schéma hydraulického odporu a Hagen-Poiseuillov zákon, d) rezistor, e) elektrický odpor v rezistore, f) schéma elektrického odporu a Ohmov zákon.[21]

Musia byť však splnené isté podmienky, aby toto analogické vyjadrenie mohlo byť použité. Predpoklad vlastností kvapaliny je jej nestlačiteľnosť, laminárne prúdenie¹ a musí sa jednať o viskóznu kvapalinu². Rovnice sú použiteľné najmä v oblasti mikrofluidiky. Na obrázku 1.2 je možné vidieť vzťahy z oboch vedných odborov a ich podobnosť.

Výpočet celkového odporu v elektrickom obvode pri sériovom zapojení rezistorov sa rovná súčtu ich jednotlivých odporov R . Pre n rezistorov vyzerá vzťah nasledovne:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n \quad (1.3)$$

Vzhľadom na hydraulický odpor, ktorý predstavuje straty v systéme platí pre R_h rovnaký vzťah aj pri zapojení n hydraulických odporov v sérii:

$$R_h = R_{h1} + R_{h2} + R_{h3} + \dots + R_{hn} \quad (1.4)$$

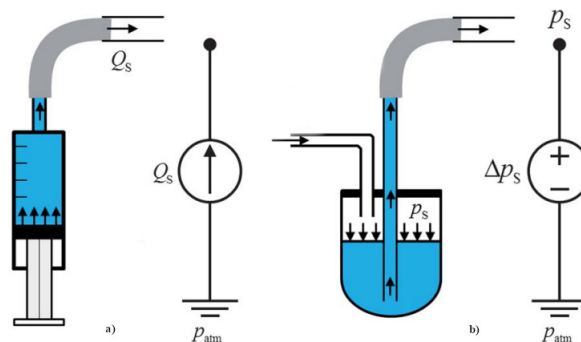
Za využitia rovnakých pravidiel taktiež platí analogická rovnica pre paralelné zapojenie n hydraulických odporov. Pre R_h pri paralelnom zapojení platí:

$$\frac{1}{R_h} = \frac{1}{R_{h1}} + \frac{1}{R_{h2}} + \frac{1}{R_{h3}} + \dots + \frac{1}{R_{hn}} \quad (1.5)$$

¹Zaistuje ustálené prúdenie kvapaliny analogicky s prúdením elektrického prúdu cez vodič

²Predstavuje vnútorné trenie, silové pôsobenie medzi časticami vo vnútri kvapaliny

Identicky je možné postupovať aj v prípade prietoku a elektrického prúdu, ktorých analógia bola spomenutá vyššie (viď kapitola 2.1).



Obr. 1.3: Hydraulické schéma zdroju konštantného prietoku a konštantného tlaku, obrázok vedľa je ekvivalentom v schematickom značení a) schémy s konštantným prietokom, b) schémy s konštantným tlakom.[17]

Na obrázku 1.3 je obdobne symbolicky zakreslený v prípade a) zdroj elektrického prúdu na schéme zapojenia ako prietok a smer elektrického prúdu ako smer toku, v prípade b) zdroj elektrického napätia ako reprezentácia tlaku v kvapaline.

Ďalej je možné využiť Kirchhoffove zákony [15]. Pre prvý Kirchhoffov zákon platí, že súčet prúdov v akomkoľvek uzle obvodu je rovný nule. Z toho vyplýva vzťah, súčet prúdov vstupujúcich do uzla je rovný súčtu prúdov vychádzajúcich z uzla. To isté je platné pre prietoky v hydraulickom obvode, kde súčet prietokov v akomkoľvek uzle hydraulického obvodu je rovný nule. A súčet prietokov vstupujúcich do uzla je rovný súčtu prietokov vychádzajúcich z uzla (rovnica kontinuity). Druhý Kirchhoffov zákon ktorý znie, že súčet napätí na svorkách spotrebičov a na svorkách zdrojov v uzavretom obvode sa rovná nule. Týmto je platný zákon o zachovaní energie. Znova platí obdobná závislosť pre hydraulický obvod.

V prípade využitia prvého Kirchhoffovho zákona a náhrady veličiny elektrického prúdu prietokom vznikne vzťah ktorý popisuje konštantný prietok v hydraulickom obvode. Konštantný prietok v hydromechanike vyjadruje dôležitý vzťah a je popísaný rovnicou kontinuity. Tá je veľmi dôležitou a neoddeliteľnou súčasťou výpočtov v tomto vednom odvetví.

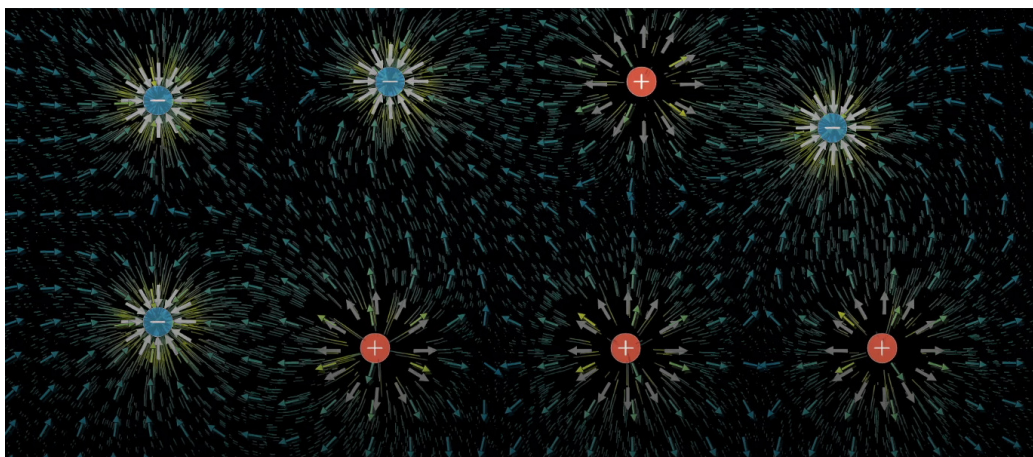
2 Hydrodynamika/Elektromagnetizmus

Modely elektromagnetizmu a hydrodynamiky využívajú analogické matematické rovnice, z ktorých je vďaka ich využitiu podávané vysvetlenie javov a objasnenie daného problému. Podobné operátory sa využívajú pri Maxwellových rovniciach a hydrodynamike [3].

2.1 Vektorové pole a divergencia

Pre zistenie správania jedného fyzikálneho fenoménu je niekedy jednoduchšie použiť iné fyzikálny fenomén na jeho vysvetlenie. Predstava vektorového pola je pomerne abstraktný jav. Vektory magnetickej indukcie kopírujúce magnetické siločiarly je možné nahradiť intuitívnejším konceptom. Preto je jednoduchšie vektory zameniť za vektory rýchlosti prúdenia kvapaliny. Takáto náhrada je jednoduchšia na pochopenie správania neviditeľného viditeľným a zjavným. Taktiež ich vlastnosti popisujúce správanie tohto javu. Pre účel tejto analógie sa bude jednať o vektorové pole dvoj-dimenzionálne a statické.

Analogicky vektory prúdenia kvapaliny môžu byť ďalej nahradené ešte jednoduchšie za použitia vektorov zobrazujúcich gradient určitého kopca alebo níziny. Vďaka využitiu gradientu je možné hovoriť o spáde alebo sklone danej roviny, teda v tomto prípade kopca. Pričom v mieste, kde by sa teoreticky nachádzal vrchol tohoto kopca budú vektory smerovať od jeho vrcholu. Naopak v najnižšom mieste by vektory smerovali k najnižšiemu bodu v danej oblasti.



Obr. 2.1: Vektorové pole a divergencia, červené častice sú pozitívne nabité, modré častice sú negatívne nabité, farby šípok reprezentujú rýchlosť, biele šípky predstavujú smer prúdenia kvapaliny.

Na obrázku 2.1 je možné predstaviť viacero konceptov spomenutých vyššie. Pozitívne nabité častice sa správajú ako zdroj/žriedlo hypotetickej kvapaliny a negatívne nabité častice ako miesto odtoku kvapaliny (prepad) [16]. Samotné prúdenie je znázornené farebnými šípkami. Škála pre predstavu zobrazuje pomalšie prúdenie modrou farbou a rýchlejšie žltou farbou. Kde dochádza k presunu od kladného k zápornému náboju podobne ako by sa jednalo pri magnetických póloch severu a juhu po siločiarach.

Na tomto príklade je možné analyticky zaznamenať ako veľmi imaginárna tekutina prúdi do, alebo z daného bodu v tomto poli. To je možné matematicky vyjadriť pomocou diferenciálneho operátora divergencia. V tomto prípade by kladná divergencia predstavovala miesto odkiaľ vychádza kvapalina, respektíve miesto s kladným nábojom. Na druhej strane záporná divergencia predstavuje odtok kvapaliny, miesto, kde viac kvapaliny vteká ako odteká. V elektromagnetizme teda pôjde o miesto záporného náboja.

Divergencia tohto vektorového poľa je daná bodom v tomto poli, výsledok ale závisí na tom, ako sa správa veľmi malé okolie okolo tohto bodu. Hovorí o tom, či sa dané miesto správa viac ako zdroj alebo ako odtok. O tom rozhodne konkrétna hodnota vypočítanej divergencie. Rýchlosť hraje taktiež rolu pri hodnote divergencie. V prípade, že do bodu vchádza kvapalina pomalšie ako z neho vychádza bude divergencia väčšia ako nula. Teoreticky vzaté, zmena ktorá tam nastala by bola spôsobená nejakým „zdrojom“ v danom bode. Analogicky v opačnom prípade by bola hodnota záporná. Tieto vzťahy platia pre zvolenú imaginárnu kvapalinu.

Vzhľadom na matematické vyjadrenie divergencie je za potreby využiť vetu Gauss-Ostrogradského. Tá vraví, že plošný integrál vektorového poľa cez uzatvorenú plochu sa rovná objemovému integrálu divergencie daného vektoru. Vďaka tejto rovnosti je možné využiť výpočet z integrálu objemového na plošný. Pre viskóznú kvapalinu, ktorá je predmetom pre túto analógiu, platí vzťah, kde sa divergencia rovná nule.[1][19] Vyplýva to z obecnej rovnice kontinuity v tvare 2.1

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.1)$$

Kde \vec{v} vyjadruje rýchlosť prúdenia kvapaliny. Za predpokladu, že hustota ρ je konštantná v čase t , a priestore (je možné vytknúť ρ) potom platí:

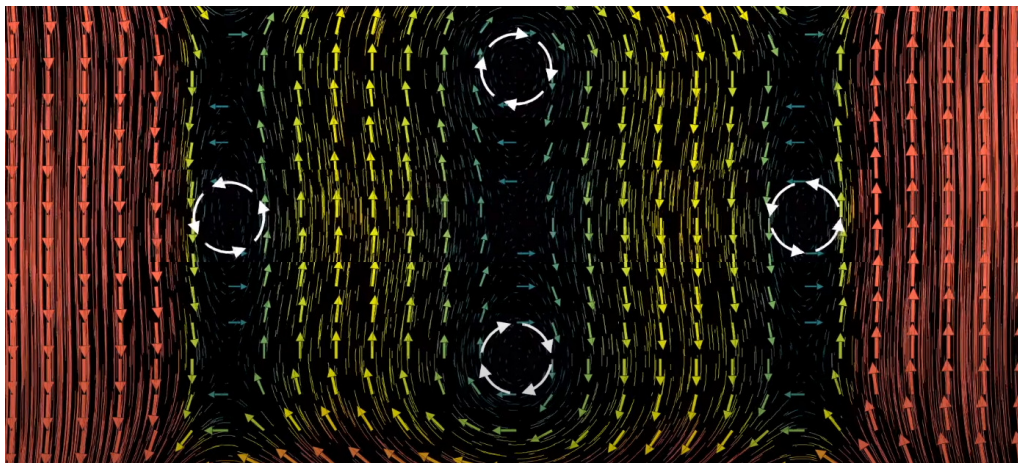
$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.2)$$

Tento predpoklad vedie k značnému zjednodušeniu pri výpočtoch rovníc.

2.2 Rotácia

Rotácia predstavuje jav, ktorý sa dá vyjadriť ako miera rotácie okolo lokálne stanovenej stredy vďaka príspevkom od vektorov rýchlosti kvapaliny v okolí daného stredy. Konvencia vraví, že rotácia proti smeru hodinových ručičiek má kladné znamienko. Rotácia po smere hodinových ručičiek má znamienko záporné. Vizualizácia rotácie je vidieť na obrázku 2.2. V tomto prípade je možné použiť známe pravidlo pravej ruky[7].

Podobne ako v prípade divergencie, rýchlejšie prúdenie a pomalšie prúdenie v tom istom smere spôsobujú zmenu znamienka rotácie [1]. Vzhľadom na lokálny stred otáčania bude potom znamienko definované v tom istom smere ako je vektor rýchlejšie prúdiacej kvapaliny. Oba doteraz popísané koncepty sú založené na prúdení kvapalín, no ich využitie je opodstatnené v rámci riešenia analogického správania a vzťahov v oblasti elektromagnetizmu.



Obr. 2.2: Vektorové pole a rotácia, biele šípky predstavujú smer rotácie a farebné šípky rýchlosť prúdenia kvapaliny

2.3 Maxwellove rovnice

Maxwellove rovnice, zákony makroskopickej teórie elektromagnetického poľa, je možné zapísať v integrálnom a diferenciálnom tvare. Integrálny tvar opisuje elektromagnetické pole v oblasti a diferenciálny tvar v určitom bode v tejto oblasti. Vďaka statickému vektorovému poľu je možné niektoré vzťahy upraviť vzhľadom na definovanie izotropného prostredia ako bude vidieť na vzťahoch neskôr. Taktiež je potrebné aby veličiny ε_0, μ_0 neboli závislé na čase, kvôli úprave vzťahov do daných podôb. Jednou z týchto rovníc je tretia Maxwellova rovnica známa tiež ako Gaussov zákon elektrostatiky alebo skrátene Gaussov zákon. Využitie upraveného vzťahu, ktorý popisuje závislosť divergencie intenzity elektrického poľa a podielu hustoty náboja a permitivity vákua predstavuje rovnica (2.3) [1]:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}. \quad (2.3)$$

Kde \vec{E} vyjadruje intenzitu elektrického poľa, ρ_e je objemová hustota elektrického náboja a ε_0 je permitivita vákua. V tomto tvare je možné povedať, že divergencia intenzity elektrického poľa je priamo úmerná hustoty náboja v danom bode. Intuitívne vysvetlenie tohto javu poskytuje teória z podkapitoly 2.1 Respektíve kladne nabité častice sa správajú analogicky ako zdroj kvapaliny a záporne nabité častice sa správajú ako „odtok“ v danom bode. Prúdenie v mieste, kde nie je žiaden náboj spôsobuje presné analogické správanie ako v prípade viskóznej kvapaliny, viď posledný odsek

kapitoly 2.1. Táto imaginárna kvapalina by prúdila nestlačiteľne, teda s rovnakým výsledkom divergencie rovnej nule.

Ďalším významným vzťahom pre túto analógiu je diferenciálny tvar štvrtej Maxwellovej rovnice o zákone spojitosti magnetického indukčného toku 2.4.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

Táto rovnica predstavuje nulovú hodnotu divergencie v každom bode „kvapaliny“, respektíve ak tok kvapaliny predstavuje magnetickú indukciu \vec{B} , tak vďaka analógii sa tam nebudú nachádzať žiadne zdroje ani odtoky. To znamená žiadne „kladne nabité častice“ a ani „záporne nabité častice“. Toto prúdenie tiež vyvracia hypotézu, ktorá vraví o magnetických monopóloch, ktorá pojednáva o existencii izolovaných severných a južných pólach magnetov.[19]

Posledné dve rovnice ukazujú vzťahy medzi zmenou poľa v závislosti na rotácii iného poľa. Vzťahy stoja za zmienku, ale pojednáva sa o nich v troj-dimenzionálnych poliach a v závislosti na čase, a to nie je hlavným predmetom tejto analógie.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (2.6)$$

Kde μ_0 vyjadruje permeabilitu vákua a \vec{J} hustotu prúdu. Z tejto analógie vyplýva, že podobnosti v prúdení kvapalín a v oblasti elektromagnetizmu sú nie len viditeľné vo fyzikálnych vzťahoch. Na rovnici (2.6) pri zámene za $\nabla \times \vec{V}$, vieme ukázať podobnosť s vektorom vírivosti $\vec{\Omega}$, ktorý je analogický s \vec{J} .

3 Hydrodynamika/Kvantová mechanika

V tejto kapitole je opísaný jav chodiacej kvapky (tzv. „walker“), na ktorom je možné ukázať analogické správanie v týchto rôznych vedných odvetviach. Popisuje spoločné charakteristiky a vykazuje rovnaké paradoxy v ich správaní.

3.1 Obraz analógií

Jedna z najjednoduchších fyzikálnych analógií predstavuje model slnečnej sústavy. Obiehajúce planéty okolo lokálne určeného pevného bodu, v tomto prípade Slnka, prezentujú Rutherfordov model atómu ¹ pre lepšiu vizualizáciu konceptu usporiadania jadra atómu a obiehajúcich elektrónov okolo neho. Podobne tak pri modeli molekúl je možné si vizuálne pomôcť modelom guľôčky na pružine. Kde samotné guľôčky reprezentujú atómy žiadaných prvkov a pružiny väzby medzi nimi. Okrem týchto konkrétnych, značne zjednodušených analógií existuje mnoho zložitejších a menej známych, ako napríklad analógia kvapky, známa pod menom walker, v preklade chodiaca kvapka [8].

Aj napriek tomu majú analógie svoje hranice, preto je možné si nimi dopomôcť, ale samotné skúmanie týchto javov zastrešujú konkrétne vedné odbory. Vzťahy a správanie musia byť analogicky nahradené príznačnými veličinami alebo médiami a prvkami [4]. Vedný odbor zastrešujúci túto kapitolu sa nazýva kvantová mechanika.

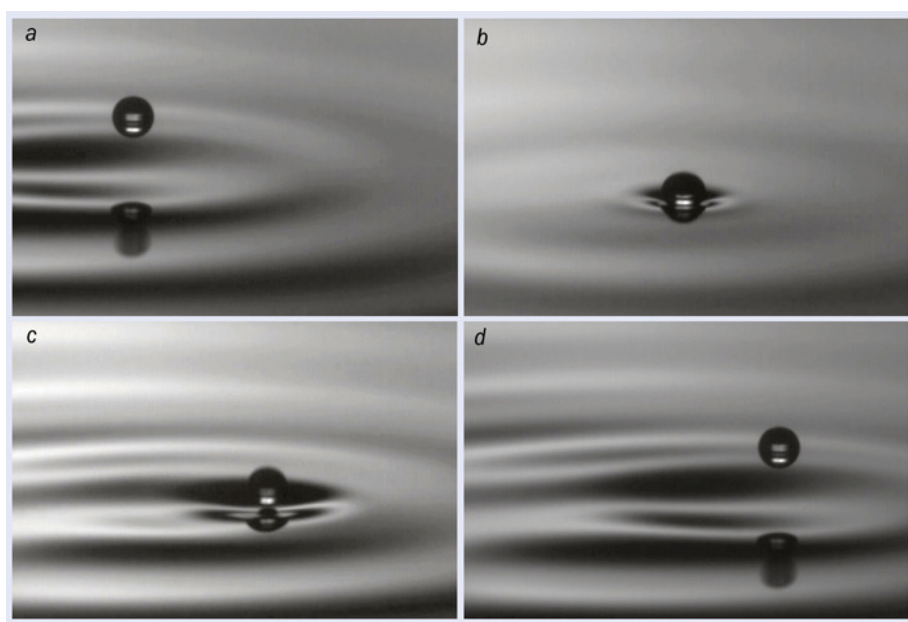
3.2 Walker a teória riadiacej vlny

Kvantová mechanika popisuje javy a správanie častíc na nanoskopickej úrovni a ich správanie. Veľkosti sa pohybujú na škále medzi 10^{-6} a 10^{-13} metra. Venuje sa atómom, molekulám, atómovým jadrom a podobným časticiam na tejto škále. Pre účely analógie sa bude jednať o elektrón. Elektróny sú častice, ktoré nie sú viditeľné za bežných podmienok okom, a preto niektoré ich správania sú ťažko pochopiteľné, nakoľko

¹Jednoduchšie pre pochopenie, ale je limitovaná presnosťou

je zložitá ich vizualizácia. Porozumeniu vie pomôcť jednoduchá kvapka reprezentujúca nanoskopickú časticu. Túto časticu využijeme v nasledujúcom experimente.

Jedná sa o experiment, ktorý je známy už od 70-tych rokov minulého storočia [8]. Kde sa za použitia reproduktora rozvibruje nádoba obsahujúca silikónový olej, je možné použiť aj iné médium, napríklad vodu. Za použitia tenkého predmetu, napríklad ihly, sa vytvorí na povrchu kvapka. Kvapka začne veľmi rýchlo oscilovať a zostane na povrchu oleja. Vďaka vrstve vzduchu, medzi kvapkou a povrchom hladiny oleja, ktorá sa nezmenší pod hodnotu 100 nanometrov, nedôjde k spojeniu kvapky a hladiny. Tento fenomén pôsobí na pozorovateľa ako keby sa kvapka správala hydrofobicky voči hladine [8].



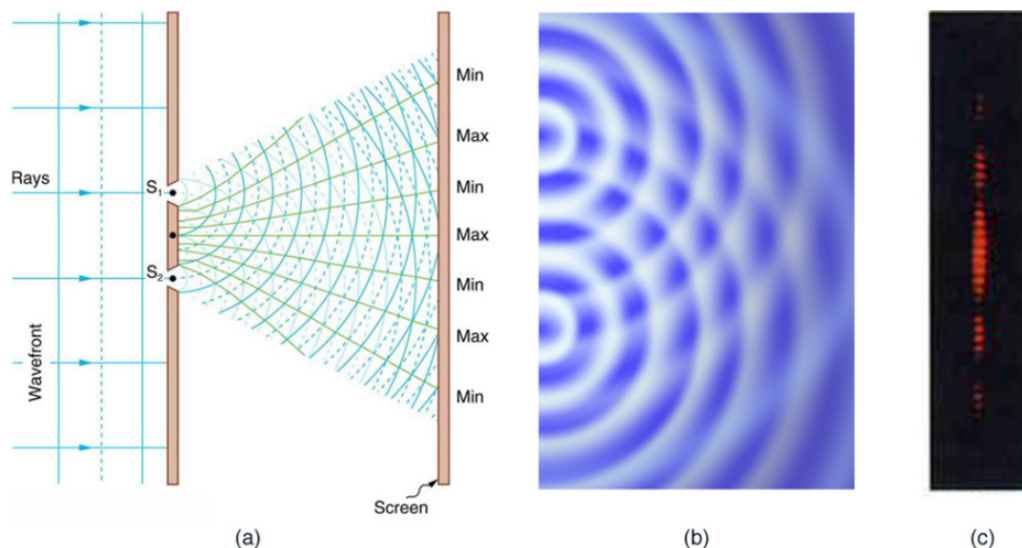
Obr. 3.1: Kvapka „walker“ a) pozícia nad okrajom vlny, b) dopad na hladinu, c) vytvorenie ďalšej vlny, d) posuv v smere dopadu na predošlú vlnu [13].

Pri oscilácii, presnejšie pri dotyku kvapky a hladiny vzniká stojatá vlna, ktorá osciluje v kolmom smere na povrch hladiny. Interakcia kvapky a takto vytvorenej vlny spôsobuje jej pohyb po hladine. Pokiaľ kvapka synchronizovane osciluje s vlnou, dopadá na jej kraj a pohybuje sa v danom smere po hladine. Vzhľadom na tento špecifický pohyb dostala svoj názov „walking droplet“, z angličtiny chodiaca kvapka, ďalej len „walker“ [8].

Ako už bolo vyššie spomenuté, nejedná sa o kvantovú mechaniku priamo, nakoľko sa veľkosti častíc pohybujú vo vyšších rádoch. Náhrada kvapky za kvantovú časticu,

napríklad elektrón, pomôže vidieť súvislosti v ďalších experimentoch z oblasti kvantovej mechaniky.

Experiment ktorý vykazuje podobné správanie sa nazýva Youngov pokus, známy tiež ako dvojštrbinový experiment. Ten spočíva vo vyslaní paprsku elektrónov na dve úzke štrbiny, ako je vidieť na obrázku 3.2.

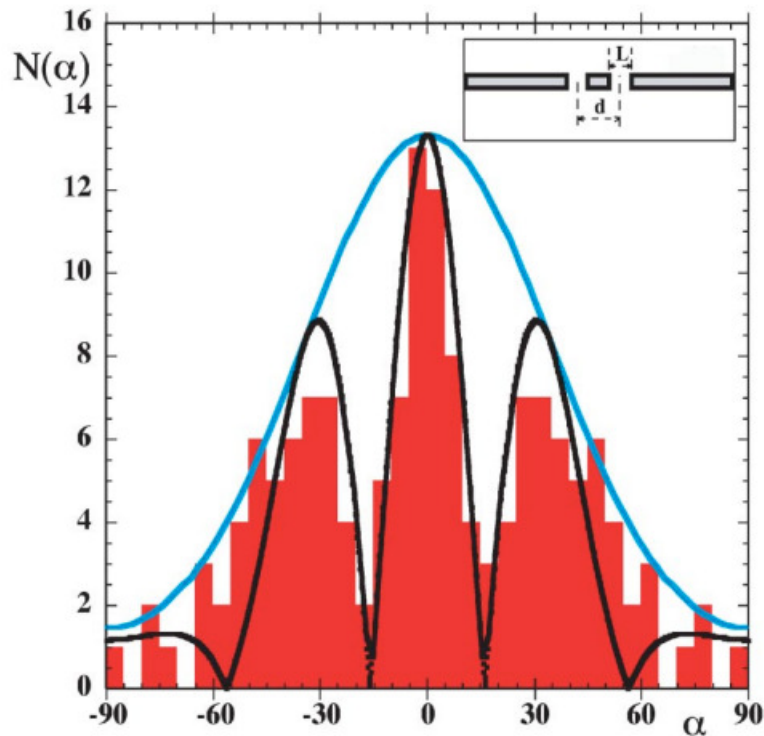


Obr. 3.2: Dvojštrbinový experiment a) vizualizácia experimentu b) obraz interakcie vln c) výsledok po dopade.[6]

Vďaka časticovo-vlnovému dualizmu sa elektrón správa zároveň ako vlna aj ako častica. Podobne ako tomu je pri pohybe po vlně v prípade „walkera“, vlny za dvoma štrbinami interagujú navzájom a skladajú sa [4]. Výsledkom tak potom bude suma ich vlnových dĺžok, tiež známa ako zložená vlna. V jednom prípade sa amplitúda zväčší pokiaľ majú obe vlny rovnakú vlnovú dĺžku a sú rovnako vzdialené od miesta dopadu. Takýto jav nazývame konštruktívnou interferenciou. Naopak pokiaľ sú v opačných fázach pričom amplitúda pôvodných vln zostane rovnaká, sumou týchto vln dostaneme vlnu s nulovou amplitúdou. Takzvaná deštruktívna interferencia. Potom to, čo vidíme za dvoma štrbinami zodpovedá obrazcu, ktorý sledujeme po dopade [4].

V prípade kvapky, „walkera“, v rovnakej situácii vlna, známa tiež ako „pilot-wave“, prvýkrát popísaná v kvantovej mechanike Louisom de Brogliem, prechádza oboma štrbinami a vzájomne interferuje medzi jednotlivými vlnami, no kvapka prechádza len jednou štrbinou [8]. Pohyb kvapky priestorom je definovaný interakciou vln a miestom, kde pri oscilácii na vlnu dopadá. Obraz miest, kde pri mnohých iterá-

ciách kvapka skončila sa výrazne podobá, ak nie je úplne rovnaký ako interferenčný obrazec z dvojštrbinového experimentu.

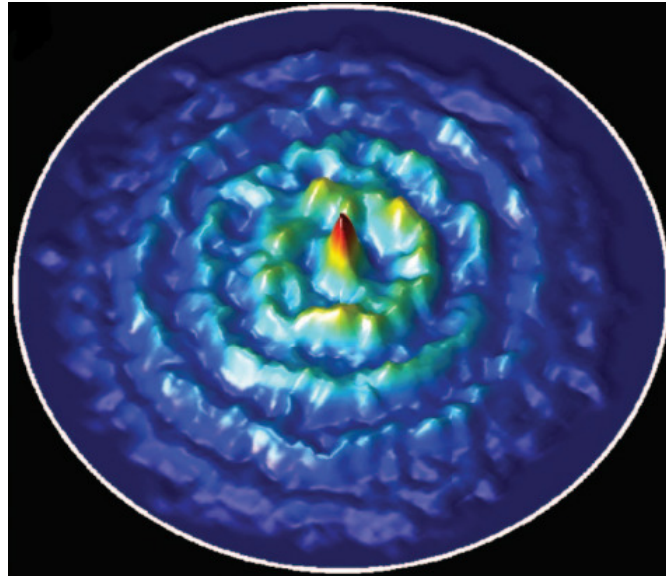


Obr. 3.3: Interferenčný obrazec.[8]

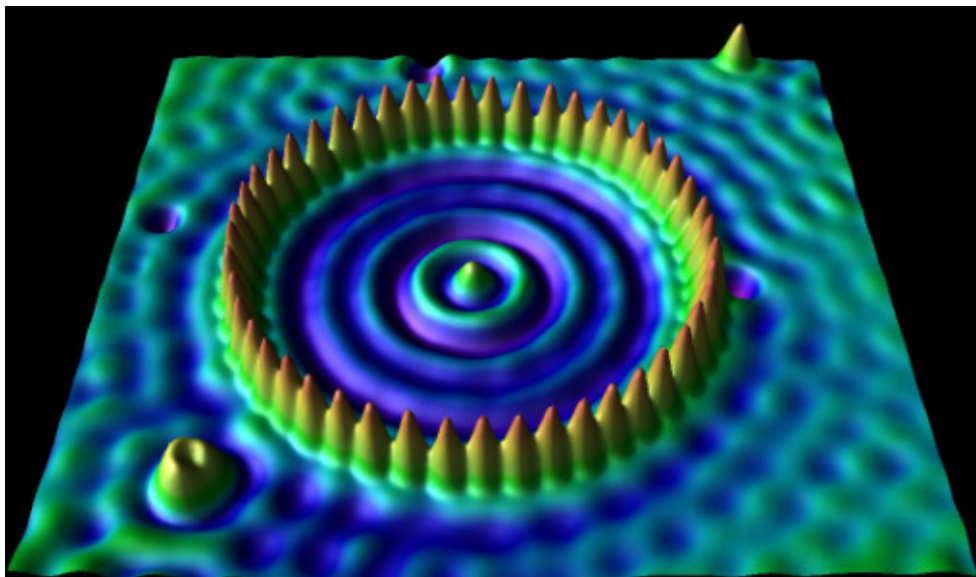
V prípade, že analógiu rozšírime na ďalšie javy kvantovej mechaniky, zistíme, že podobné správanie nastáva vo viacerých fenoménoch tohto vedného odboru. Kvantové tunelovanie alebo tunelový efekt predstavuje schopnosť častice prejsť bariérou, ktorou by za bežných okolností vďaka svojej nízkej energii prejsť nemala [4]. Pričom z hľadiska klasickej fyziky tento jav nie je možný, kvôli nedostatku energie na prekonanie potenciálnej bariéry. V kvantovej mechanike však existuje pravdepodobnosť, že toto tunelovanie nastane. V prípade experimentu s „walkerom“ bola vytvorená nízka a úzka bariéra okolo hladiny, ktorú táto kvapka nie je schopná prekonať a pohybuje sa iba vo vnútri tejto bariéry. Zriedka však kvapka túto bariéru prekoná a je schopná prejsť cez objekt, ktorý predstavuje istú hranicu rovnako, ako v kvantovom tunelovaní [10]. Pravdepodobnosť prechodu sa znižuje v závislosti na šírke bariéry, rovnako tomu tak je pri tunelovom jave [4].

Podobnosti správania je možné vidieť aj v oblasti kvantového chaosu [14]. V tomto chaose existuje istá „kvantová fatamorgána“ [12], ktorá predstavuje hustotu kvantovej pravdepodobnosti. Vďaka ktorej môžeme s najväčšou pravdepodobnosťou určiť, kde

sa v daný moment bude častica nachádzať. Pokiaľ ohraničíme priestor „walkera“ na kruhovú hladinu, bude pohyb rovnako chaotický ako predtým, napriek tomu po dlhšom zaznamenávaní dráhy chaotického pohybu začne vznikať veľmi podobný vzor, ako pozorovaní hustoty pravdepodobnosti častice v kvantovej mechanike.



Obr. 3.4: Hustota pravdepodobnosti „walkera“[4].



Obr. 3.5: Hustota pravdepodobnosti elektrónu.[11].

3.3 Spojenie analógií

V roku 1927 Louis de Broglie priniesol do kvantovej mechaniky predpoklad, ktorý odkazuje na to, že kvantové častice majú svoju vlastnú vlnu, ktorá určuje ich pohyb a je tvorená osciláciou týchto častíc. Známu ako „pilot-wave theory“ [4]. Každá častica má svoju vlnovú funkciu na základe ktorej je možné určiť pravdepodobnú hodnotu vymedzenej veličiny, ktorú je potrebné kalkulovať. Tento jav a správanie potvrdzuje analógie medzi časticami a walkerami vysvetlené v predchádzajúcich častiach tejto kapitoly.

V prípade dvojštrbinového experimentu vlnová funkcia častice predstavuje presun častice oboma štrbinami. Respektíve daná funkcia je superpozíciou prechodu oboma štrbinami zároveň. Vzhľadom na súčet dvoch vln je možné určiť pravdepodobnosť dopadu častice za štrbinami. Experiment s walkerom nám ale ukazuje, že častica neprešla oboma štrbinami zároveň. Nakoľko kvapka prešla len jednou štrbinou, ale interakcia vln, ktoré vznikli osciláciou kvapky na povrchu hladiny vytvorila viac vln, ktoré prešli oboma štrbinami. Ich súčet stanoví distribúciu pravdepodobnosti, kde je možné kvapku nájsť po dopade za štrbinami. Z pozorovania je jasné, že kvapka musí prejsť iba jednou štrbinou. Aj napriek tomu je však možné pozorovať interferenčný obrazec 3.3. Tento jav teda potvrdzuje teóriu riadiacej vlny.

Chovanie kvantových častíc je veľmi zložitá a nie úplne prebádaná. Napriek tomu za pomoci jednoduchého experimentu s dvojštrbinou, pôvodne určeného k skúmaniu javov v oblasti kvantovej mechaniky, je možné sledovať podobné správanie pre kvapku walker. Tým je demonštrovaná analógia medzi mechanikou tekutín a kvantovou mechanikou.

4 Hydrodynamika/Gravitácia

Dynamika tekutín poskytuje taktiež náhľad na javy spojené s pôsobením gravitácie. Jednoduchý koncept hľadania súvislostí z bežnej praxe a každodenného života môžu byť kľúčom k bádaniu v oblasti gravitácie a fenoménov čiernych dier.

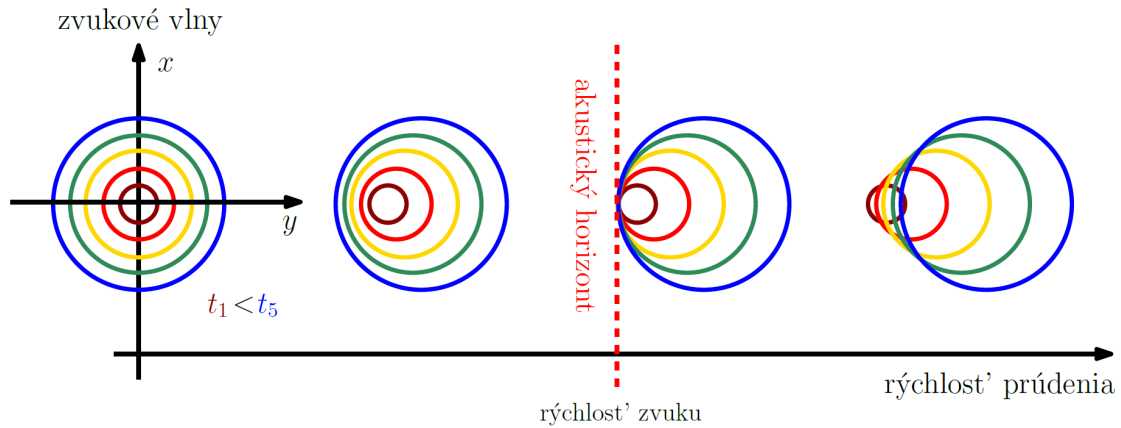
Základy analógie gravitácie položil ako priekopník v tomto vednom odvetví William G. Unruh, ktorý chcel priblížiť poznanie čiernej diery, nie len akademickej obci, ale aj širšiemu publiku, ktoré nie je priamo zoznámené s danou problematikou.

4.1 Koncept

Ako koncept pre vysvetlenie bol zvolený model vodopádu [22]. Využil pri tom dve oblasti prúdenia kvapaliny vo vodopáde. Časť, ktorá prúdi vyššou rýchlosťou ako je rýchlosť zvuku, to jest supersonická. A časť ktorá prúdi nižšou rýchlosťou, subsonická. Pomedzie týchto dvoch častí argumentoval existenciou akustického horizontu. Respektíve jednostrannou membránou, ktorá dovoľuje prejsť iba vlnám, ktoré sú supersonické. Nedovoľujúc prechodu subsonických vln, ktoré sa priblížia tejto hranici späť. Toto tvrdenie bolo ďalej analogicky prirovnávané k horizontu udalostí v rámci čiernej diery. Nakoľko jednostranná membrána vďaka jej správaniu nedovoľuje spätnému prechodu a opusteniu média.

Základným kameňom pre porovnávanie sa stalo prúdenie kvapaliny. V predpoklade, že kvapalina prekoná hranicu supersonickej rýchlosti a dostane sa do oblasti, ktorá prúdi taktiež supersonicky, nebude možné, aby sa dostala proti prúdu späť v smere toku [25]. To prikladá dôveryhodnosti existencie zvukovej čiernej diery, anglicky referovanej ako „dumb hole“. Tá tvorí, rovnako ako pri čiernej diere a svetle, oblasť, z ktorej nemôže uniknúť zvuk. Využitie vyššie uvedených javov vedie k otázke o akustických vlnách. Pre jednoduchšiu predstavu je táto otázka zodpovedaná a popísaná v nasledujúcej podkapitole, ktorá priamo naväzuje na analógiu gravitácie.

4.2 Akustický horizont



Obr. 4.1: Akustický horizont. Zľava sa zvyšuje prietok

Na obrázku je využitý nasledovný predpoklad prúdiacej kvapaliny zľava smerom doprava. Kvapalina na začiatku toku vykazuje nulový prietok, respektíve prietok blízky nule. V smere prúdenia sa zvyšuje. Nutný predpoklad tohoto teoretického toku znie, že je možné zrýchliť prietok kvapaliny bez problémov nad rýchlosť zvuku. Ďalší predpoklad pre vlastnosti kvapaliny hovorí o tom, že kvapalina je nestlačiteľná, neviskózna a nerotuje. V prípade zvolenia ľubovoľného bodu v toku za subsonickej rýchlosti je možné hovoriť o tom, že zvukové vlny na hladine sa budú šíriť ako aj po smere rýchlosti toku, tak aj proti jeho smeru. Rýchlejšie sa však budú šíriť v smere, v ktorom sa zvyšuje rýchlosť kvapaliny. V prípade prekročenia hranice, ktorá je označená ako akustický horizont nastáva zmena rýchlosti zo subsonickej na supersonickú. Z daného vyplýva, že po zmene rýchlosti nad hranicu rýchlosti zvuku, sa vlny šíria výhradne v smere tejto rýchlosti. A nenastane žiadne šírenie v opačnom smere [2].

Analógia gravitácie je v tomto zmysle braná ako pomôcka ku skúmaniu vzťahov na experimentálnej úrovni. Najmä pri rôznych javoch, ktoré sa objavujú v hydrodynamických systémoch a taktiež pri skúmaní čiernej diery. Predovšetkým pri skúmaní rôznych oblastí horizontov.

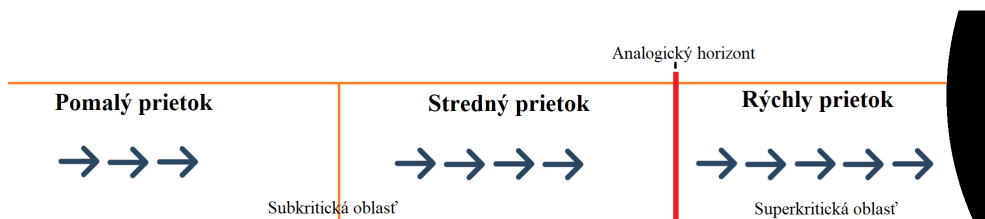
Za využitia výtokového víru so ustáleným odtokom a udržaním stálej hladiny v systéme, bolo priblížené správanie okolia čiernej diery. Vďaka odtoku kvapaliny, ktorý dodáva moment hybnosti výtokovému víru je možné hovoriť o rotujúcej čiernej diere. Toto zostavenie experimentu bolo a stále ešte je využívané na simuláciu čiernej diery.

Skúmanie vplyvu vzruchov na ergosféru a horizont udalostí, ako aj proces superradiančného rozptylu, vďaka ktorému je možné získať energiu z čiernej diery, je zásluhou Silke Weinfurtnerovej [22]. Tá za pomoci svojho tímu, laboratória a špeciálneho vybavenia skonštruovaného priamo na tento účel študuje analogické správanie čiernej diery a výtokového víru v rôznych štúdiách. Zásluhou toho je priama motivácia pre experiment v tejto práci.

Takémuto výtokovému víru sa v angličtine hovorí „bathtub vortex“, v doslovnom preklade vaňový vír, alebo vír vo vani. Experiment je možné relatívne jednoducho zostrojiť a preto je vhodný na účel skúmania analogického správania dynamiky tekutín v spojení s čiernymi dierami.

4.3 Horizonty čiernej diery

Situácia, v ktorej je rýchlosť prúdenia kvapaliny v systéme prekonaná rýchlosťou vzruchov, teda vlniek, dáva za vznik analogickému horizontu, ktorý bol naznačený v podkapitole 4.2, ale pre intuitívnejšiu predstavu je lepšie vysvetlený na nasledujúcom obrázku.



Obr. 4.2: Analogický horizont čiernej diery, pomalý prietok a stredný prietok vyjadrujú subkritickú oblasť, rýchly prietok zasa superkritickú oblasť, miesto na pomedzí oblastí je analogický horizont čiernej diery pre vlnky

Na obrázku sa nachádzajú tri oblasti s rôznou rýchlosťou. V prípade čiernej diery sú pomyselné rozdelené pôsobením gravitácie v danej vzdialenosti od nej. Pre potreby analógie sú však, ako je na obrázku znázornené, rozdelené na tri rovnako veľké plochy. V skutočnosti sa nejedná o plochy, dôvodom tohto rozdelenia je lepšie znázornenie. Analógia je zostavená v jednej dimenzii a dôležitým parametrom je rýchlosť v smere, ktorý udávajú šípky. Plochy sú zoradené podľa rýchlosti prúdenia kvapaliny. Od najnižšej po najvyššiu v smere k čiernej diere [22].

Tieto plochy je možné interpretovať ako hladinu a smery ako rýchlosti prúdenia kvapaliny. Na tejto hladine je možné pozorovať vzruchy, ktoré v tomto prípade odkazujú na vlnky, vznikajúce pri bežnom pohybe kvapaliny na jej povrchu. Malé vlnky

reprezentujú informáciu v systéme. Tie je možné presúvať po hladine s predpokladom, že nie sú schopné dosiahnuť samostatne rýchlosť najrýchlejšieho prúdenia. Rovnako to platí pre informáciu, ktorú analogicky prezentujú.

Existuje viacero situácií, ktoré nastanú vzhľadom na usporiadanie. Prechod vzruchu v regióne najpomalšieho prúdenia je obojsmerný, nakoľko rýchlosť nezabraňuje presunu v žiadnom zo smerov. Z miesta pomalého prúdenia je možné vlnku vyslať po hladine do regiónu so strednou rýchlosťou prúdenia. V opačnom smere je taktiež možné vzruch poslať proti prúdu, keďže sa vie pohybovať vyššou rýchlosťou, ako je rýchlosť prúdenia kvapaliny. V týchto dvoch regiónoch je odosielanie informácie bezproblémové v oboch smeroch a nazýva sa subkritická oblasť. Iné správanie nastáva v prípade, že sa vzruch nachádza v oblasti rýchleho prúdenia, ktoré prevyšuje rýchlosť, ktorú môže vlnka dosiahnuť. Presun informácie v smere prúdu do tohto regiónu je možný. Avšak opačný prenos nie je dosiahnuteľný vzhľadom na smer a rozdiel rýchlostí. Informácia vo vzruchu nie je možná tento priestor opustiť a je ďalej unášaná v smere prúdenia, čiže do čiernej diery, bez možnosti úniku. Vďaka správaniu v tejto oblasti a jednosmernému prechodu sa nazýva superkritická. Pomedzie subkritickéj a superkritickéj oblasti v prípade vyslania vlnky po hladine proti prúdu a jej najvyššej možnej rýchlosti, predstavuje miesto, kde informácia zostáva bez pohybu. A tvorí hranicu medzi obojsmerným a jednosmerným prenosom informácie. Preto sa nazýva analogickým horizontom čiernej diery.

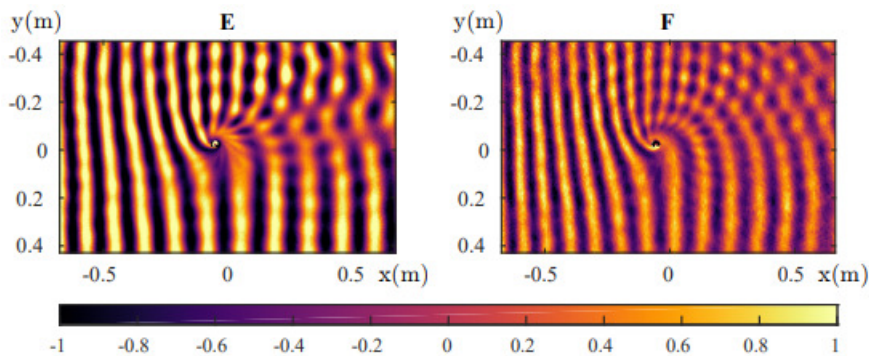
Experimentálny systém je zložitejší. Nejedná sa o jednodimenzionálny systém, ako je popísané vyššie, ale o dvojdimenzionálny. Pohyb nie je spôsobený iba rýchlosťou v jednom smere, ale obsahuje dve rôzne zložky. Radiálnu rýchlosť spôsobenú odtokom víru a tangenciálnu zložku vzhľadom na rotačný pohyb. Je možné hovoriť o dvoch rôznych horizontoch. Jeden sa nazýva ergo horizont a to v prípade, že celková rýchlosť zložená z oboch zložiek je vyššia ako rýchlosť vzruchov. To znamená, že vlnky, ktoré sa do tejto oblasti dostanú, začnú rotovať okolo čiernej diery, no nebudú vtiahnuté dnu, pretože stále je teoreticky prípustný ich únik. V druhom prípade je iba radiálna rýchlosť väčšia ako rýchlosť vlniek na hladine. Ten má názov analogický horizont udalostí [22].

Medzi týmito dvoja horizontami sa deje proces rozptýlenia. Nastáva najmä v okolí rotujúcich čiernych dier. A nazýva sa superradiačné rozptýlenie.

4.4 Superradiančný rozptyl

Superradiancia v rotujúcich systémoch bola prvotne skúmaná v rámci elektromagnetických systémov [26]. Neskôr bol tento mechanizmus aplikovaný na extrakciu energie z rotácie v ergosfére rotujúcej čiernej diery [23]. Vo svojej podstate je tento jav použiteľný v prípade vln. Dopadajúca vlna sa čiastočne rozptyľuje a čiastočne odráža od prekážky. Keďže objekt, ktorý spôsobil interakciu vlny, časť dopadajúcej energie absorbuje, odrazená vlna nesie menej energie, ako dopadajúca. V prípade, že bola vlna superradiačne zosilnená, teda energia bola vzatá z rotácie čiernej diery, odrazená časť má viac energie, ako dopadajúca vlna. V dôsledku zachovania energie v systéme, musí mať dopadajúca vlna zápornú energiu, respektíve takú hodnotu, aby znížila celkovú energiu v systéme. Nastáva superradiačný mód, schopnosť získať energiu zo systému [22].

Pre jednoduchšie vysvetlenie tohoto procesu je uvažovaná častica, letiaca vesmírom. Častica sa priblíži rotujúcej čiernej diere tak, že jej trajektória smeruje k ergosfére tohto telesa. V prípade, že sa častica v tejto oblasti rozdelí na dve časti, jednu pohltí čierna diera a druhá časť je katapultovaná von z tejto oblasti, daná častica získa energiu z čiernej diery, aby mohla opustiť ergosféru. Rovnaký dej je možné aplikovať na vlny. Teda vlnové správanie svetla. Experiment, potvrdzujúci toto správanie bol zosnovaný za využitia analógie vlnovej zložky svetla a akustických vln [9]. Superradiancia bola testovaná na vyslaní vln smerom k rotujúcemu telesu a zaznamenávaní vlnovej dĺžky počas experimentu.



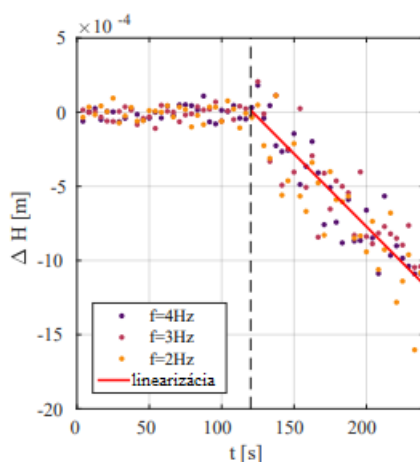
Obr. 4.3: Interakcia dopadajúcej a rozptýlenej vlny z experimentu [22] E) vyššia frekvencia vlniek F) nižšia frekvencia vlniek

Na základe rotujúceho telesa bola zaznamenaná znižujúca sa vlnová dĺžka až do miery, kedy bola senzorom zaznamenaná záporná vlnová dĺžka. V tomto bode bola

schopná získať energiu z rotácie. Absorbujúca časť teda vďaka rotácii mala väčšiu energiu, s akou do experimentu vošla. Akákoľvek častica, ktorá je deflektovaná čiernou dierou, získa energiu vďaka tomuto procesu.

4.5 Spätná reakcia

V rôznych systémoch sú v prípade experimentu dané podmienky pre testovaný subjekt v takej podobe, ktorá skúma priamo daný objekt bez ohľadu na možnú reakciu, smerujúcu a ovplyvňujúcu samotný systém. V prípade experimentu, spomínanom vyššie, bolo takéto chovanie poznačené a bol naň vzatý zreteľ. V prípade, že nejakým štýlom samotný testovaný subjekt ovplyvňuje okolie, nie je zanedbateľný, dá sa preskúmať a vyvodit z toho záver, respektíve vzťah.



Obr. 4.4: Spätná reakcia vln. Kde H vyjadruje výšku hladiny a t čas.

Spätná reakcia v tomto prípade ukazuje efekt, ktorý napodobňuje spôsob, ktorým sa „odparujú“ čierne diery. V analogickom modeli predstavuje túto reakciu povrchová vlna, ktorá znižuje hladinu v systéme. Vzhľadom na zachovanie hmotnosti v systéme by sa hladina meniť zákonite nemala. V tomto prípade je ale nie je zachovaná hmotnosť globálne [22]. V experimente bolo využité zaznamenávanie výšky hladiny so zanedbaním niektorých ostatných veličín. Za účelom zjednodušenia výsledku boli zanedbané polia rýchlostí. Odhady sú použiteľné na experimenty v malej mierke a musia byť do značnej miery ďalej skúmané pre použitie vo väčších systémoch. Za predpokladu nerotujúceho prúdenia v kvapaline s plytkou hladinou a rovinným povrchom je možné uvažovať horizont hladiny. Zaznamenaná výška hladiny na začiatku

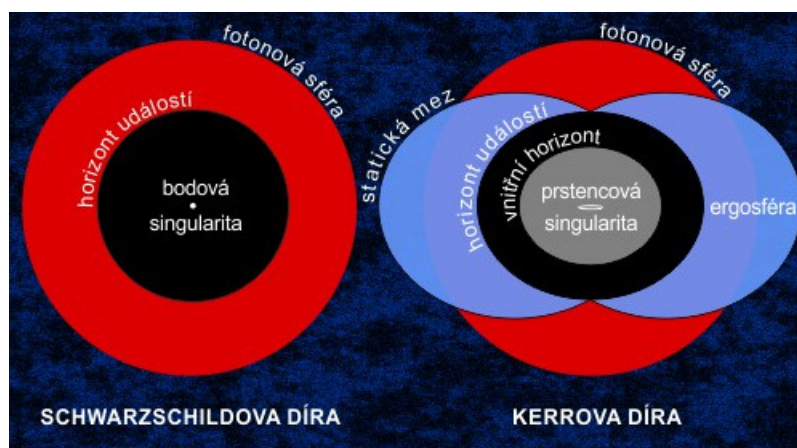
pokusu poukázala na nulové vzruchy na voľnej hladine. Pri vysielaní vln v rôznych frekvenciách po hladine po určitý čas bola hladina pozorovaná. Postupom opakovaných experimentov bolo zistené, že vďaka vlnám sa hladina znižuje v závislosti na čase. Klesanie hladiny je rôzne v závislosti na frekvencii vln.

4.6 Ringdown

Predstavuje odpoveď čiernej diery na vzruchy v systéme. Vzruch predstavuje napríklad splývanie binárneho systému, teda dvoch okolo seba rotujúcich čiernych dier. Na začiatku tohoto procesu okolo seba rotujú čierne diery a postupne sa približujú. Zvyšuje sa ich rýchlosť rotácie a znižuje vzdialenosť medzi nimi. Tesne pred úplným splynutím, už jednej čiernej diery, disipuje táto sústava gravitačné vlny. S poslednou gravitačnou vlnou dosiahne uvoľnenú fázu [22].

4.7 Oblasti čiernych dier

Existencia stabilných orbitov okolo čiernej diery nie je neznámy pojem. Znamená to ale to, že existuje pomerne stabilný orbit v okolí čiernej diery. Čož nie je ale celkom pravda vzhľadom na vyžarujúce gravitačné vlny, ktoré objekt v konečnom dôsledku do vnútra vtiahnu. Je ale možné ich nazvať kvázistabilným orbitom. Samotná čierna diera má ale týchto okolí viac. Podľa charakteru pohybu je nutné ale rozlíšiť, či sa jedná o rotujúcu čiernu dieru alebo nerotujúcu.

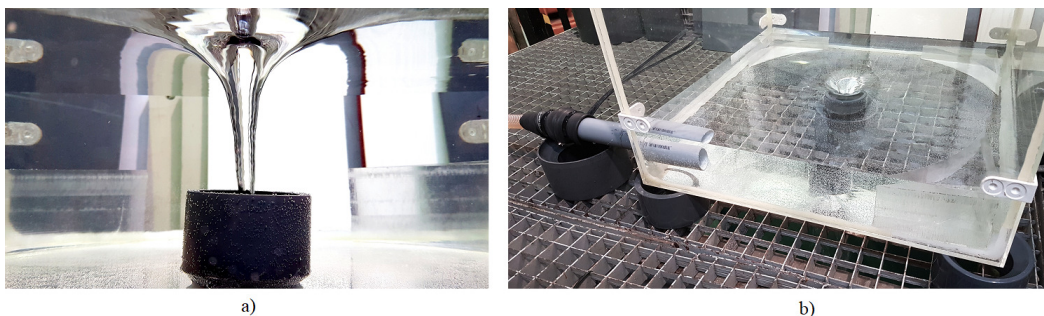


Obr. 4.5: Schwarzschildova diera a Kerrova diera [24]

V súvislosti s obrázkom 4.5 je označená nerotujúca čierna diera ako Schwarzschildova diera a rotujúca ako Kerrova. V oboch prípadoch schéma obsahuje horizont udalostí, ktorý má jednotnú vzdialenosť od „stredú“, singularity, čiernej diery. Vzdialenosť, respektíve polomer, nakoľko sa jedná o kruhovú alebo eliptickú dráhu sa nazýva Schwarzschildov polomer. V jeden a pol násobku sa potom nachádza fotónová sféra. Orbit, v ktorom môžu podľa teórie rotovať častice svetla. Ten je nestabilný a platí tu rovnaká možnosť vtiahnutia do čiernej diery ako v prípade vyššie uvedenom. Singularity ako bod s nekonečnou hustotou je miesto, ktoré je nemožné preskúmať, vzhľadom na to, že svetlo je dávno predtým pohlcované gravitáciou. Reálne čierne diery sú rotujúce telesá, preto sa jedná o Kerrove diery. Vyznačená statická mez predstavuje koniec ergosféry z pohľadu zvnútra. Medzi horizontom udalostí a statickou medzou situuje ergosféra. Ostatné vyznačené oblasti nie sú pre potreby poznania k tejto kapitole dôležité, no je možné sa nimi zaoberať ďalej. Kerrova diera, za využitia ergosféry, môže slúžiť k získaniu energie z jej rotácie. Tento jav sa nazýva Penroseov mechanizmus a bol bližšie vysvetlený v kapitole 4.4 [24].

5 Experiment - Vír ako Čierna diera

Experimentálna časť bola vykonávaná v laboratóriu Odboru fluidného inžinierstva Viktora Kaplana. Bola zostrojená nádoba z plexiskla s rozmermi 50x50x50 cm. Výtok v strede dna nádoby bol prvotne vyvrtaný v priemere 3,5 cm, neskôr bol zmenšený osadením plastového potrubia s priemerom výtoku 3 cm a bol docielený za pomoci gravitácie. V prípade udržiavania stabilnej hladiny bola výška hladiny vzhľadom na podstavu vo výške 30 cm. Do nádoby bola zavedená rúra s prítokom.



Obr. 5.1: Zostava experimentu. a) výtokový vír b) zostava pre udržiavanie výšky hladiny

V ďalších pokusoch bola prítoková diera u zatvorená a nejednalo sa o udržiavanie hladiny. Vykonávaním opakovaných vypúšťaní vody z nádrže boli skúmané rôzne javy poukazujúce na podobnosti výtokového víru s čiernou dierou.

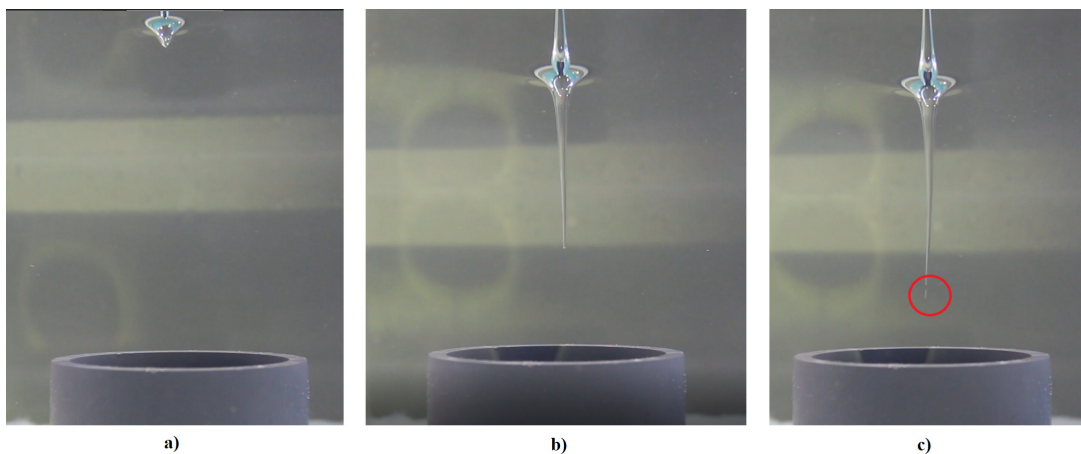
5.1 Zakrivenie priestoru a tvorba víru

Najzreteľnejší jav predstavuje zakrivenie priestoru, ktoré je spôsobené obrovskou hustotou čiernej diery, jej gravitáciou. Respektíve v prípade víru zakrivenie mriežky, ktorá sa nachádza pod nádržou. Rovné čiary na mriežke pôsobia prepadnuto, rovnako ako priestor, ktorý „ohýba“ gravitácia.



Obr. 5.2: Zakrivenie priestoru výtokovým vírom.

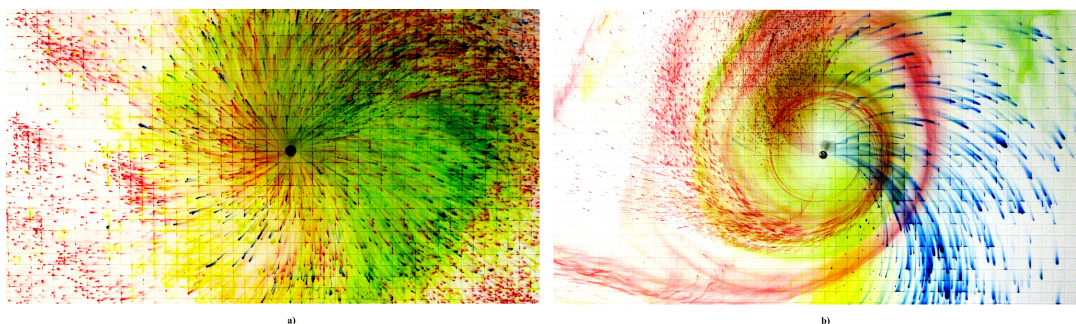
V rámci ďalších pokusov bol upravený výtok z nádrže a na pevno nainštalovaná odtoková časť z plastovej rúry. To pomohlo zaisteniu ideálneho prietoku pre tvorenie stabilného výtokového víru. Na obrázku 5.3 je viditeľná tvorba víru so zväčšujúcim sa prepacom hladiny, ktorý naväzuje na analogický prepád priestoru spôsobený gravitáciou čiernej diery. Tvar je pomerne stabilný, pripomínajúci ihlicu. So zvyšujúcou sa rýchlosťou rotácie sa vír stáva menej stabilným a v určitom momente, na obrázku vyznačené červeným kruhom, sa začínajú vzduchové bubliny odtrhávať zo špičky víru. Sú strhávané okolitým prúdením smerom k odtoku. Za stále zvyšujúcej sa rýchlosti rotácie sa neskôr zrýchľuje tento odtrh vzduchových bublín až do vytvorenia vzduchového „jadra“ víru. To znamená, že v blízkom okolí osy víru je vytvorený kuželovitý priestor vzduchu po celej dĺžke, od hladiny až po spodný koniec. Obrázec vznikajúci nad hladinou je spôsobený odrazom nad voľnou hladinou.



Obr. 5.3: Tvorba víru. a) začiatok prepadu hladiny, b) postupné zrýchľovanie rotácie a predlžovanie v zvislom smere, c) začiatok odtrhu vzduchových bublín

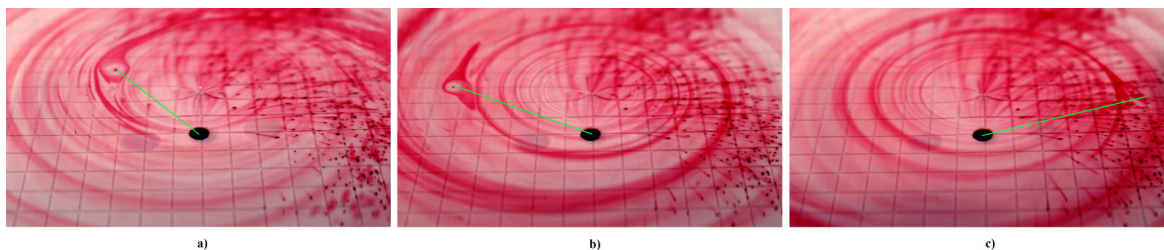
5.2 Druhy pozorovaných výtokových vírov a ergosféra

Vzhľadom na existenciu dvoch druhov čiernych dier, rotujúcich a nerotujúcich, bola využitá rozdielna experimentálna sústava. Za pomoci plytkej nádoby s otvorom v strede jej dna bolo pomocou potravinárskeho farbiva vizualizované prúdenie kvapaliny. V jednom prípade sa jedná o čisto radiálne zložky rýchlosti prúdenia. Analogicky sa jedná o nerotujúcu čiernu dieru vzhľadom na nulovú zložku rotácie. V druhom prípade vír rotoval a rýchlosti prúdenia sa skladali z radiálnej zložky a zložky od momentu hybnosti.



Obr. 5.4: Nerotujúci a rotujúci vír. a) nerotujúci vír, b) rotujúci vír

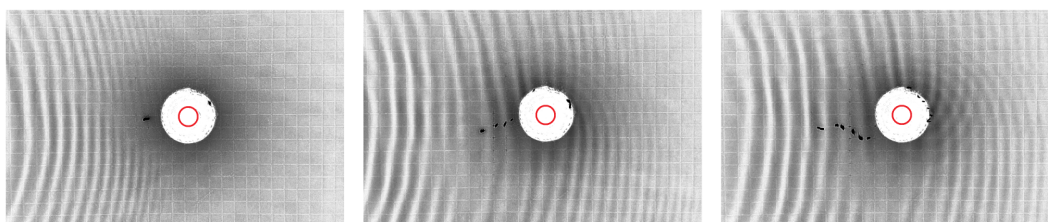
Charakter čiernych dier určuje ich vlastnosti. Pre oba prípady platí, že sa jedná o husto koncentrovaný materiál vo veľmi malom objeme. Pre oba prípady existuje horizont udalostí. No v prípade rotujúcej diery existuje ergosféra, oblasť popísaná v predošlej kapitole. Vďaka tejto oblasti môže častica získať energiu z rotácie čiernej diery. Pripravenie podmienok v analogickom experimente pre tento prípad je značne náročné. Aj napriek tomu po rôznych pokusoch bolo možné simulovať podobné správanie pri prechode tejto zóny na zisk energie z rotácie.



Obr. 5.5: Získanie energie častice. a) a b) častica rotujúca okolo analogickej čiernej diery, c) častica po rozpade

Spojnice (úsečka zelenej farby) predstavuje vzdialenosť častice od stredu víru, ktorá vďaka povrchovému napätiu zostala na hladine rotovať okolo neho. Dokončila celé tri rotácie dookola a v poslednom obrázku prišlo k jej „rozpadu“, povrchové napätie, vďaka ktorému sa správala po dobu rotácie hydrofobicky nebolo dostatočné, aby zostala v jednom kuse na povrchu hladiny. Prišlo k stretu kvapaliny s časticou farbiva a pri tejto príležitosti opustila svoj orbit a pri zafarbení bola získaná energia z „čiernej diery“, ktorá ďalej poslala časticu na dlhšiu dráhu. Tento analogický model predstavuje obraz o tom, ako by sa správal materiál obiehajúci okolo rotujúcej čiernej diery v ergosfére za predpokladu získania energie z rotácie tejto čiernej diery.

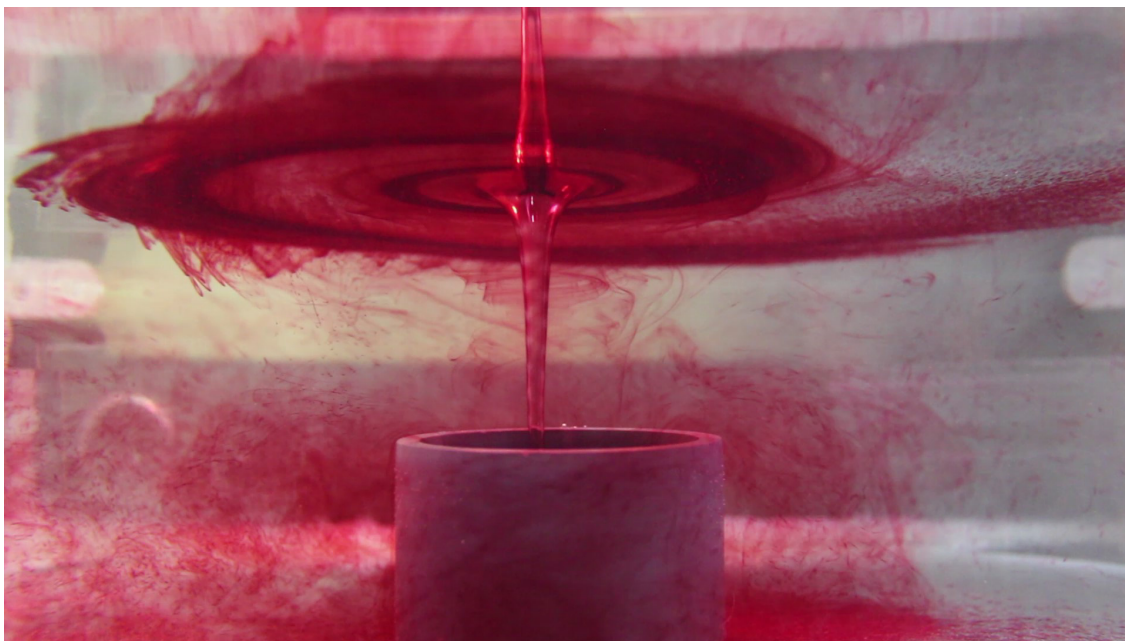
Samotný superradiančný rozptyl a interferenciu vlny dopadajúcej a rozptýlenej bolo zložité zaznamenať systémom, ktorý bol použitý. Preto v rámci experimentálneho overenia javu z podkapitoly 4.4, kde je popísaný, bol pre túto prácu poskytnutý obrázok z laboratória.



Obr. 5.6: Superradiančný rozptyl.

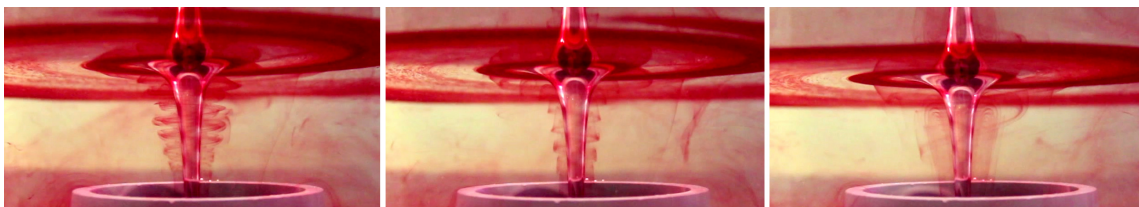
Červeným kruhom je vyznačený výtokový vír. Na prvom obrázku je možné pozorovať vlnu vyslanú z ľavej strany. Postupne sa šíri až sa začne na druhom obrázku ohýbať za vírom. Na poslednom snímku je možné vidieť interferenčný obrazec vln, ktoré sú ohýbané s vlnami, ktoré dopadajú z ľavej strany.

5.3 Zaujímavé vírové štruktúry



Obr. 5.7: Veľký výtokový vír.

Azda najlepšia vizualizácia rôznych aspektov čiernej diery vznikla za pomoci prvej experimentálnej sústavy. Na hladine sa nachádza ekvivalent akrečného disku. Jedná sa o disk materiálu s vysokou rýchlosťou a teplotou, ktorý predstavuje materiál obiehajúci okolo čiernej diery. Ten postupom času padá do čiernej diery a zvyšuje jej hmotnosť, teda gravitáciu a v konečnom dôsledku reprezentuje akési palivo pre čiernu diery. Samotný vír predstavuje zakrivenie priestoru v oblasti, kde pôsobí mohutná gravitácia čiernej diery. V predpoklade, že hladina bez vzruchov predstavuje nezakrivený priestor, potom spodný koniec víru analogicky ukazuje miesto, kde sa nachádza singularita a tvar víru zasa zakrivenie priestoru.



Obr. 5.8: Vírové štruktúry.

Vďaka farbivu bolo možné pozorovať aj komplexné štruktúry prúdenia. Vďaka rýchlejšej rotácii média na hladine vznikne pri podstave nádoby takzvaná Ekmanova vrstva. Častice farbiva, ktoré sa tu nachádzajú sú ovplyvnené trením medzi „vrstvami“ kvapaliny. Postupujú od stien nádoby smerom k miestam nižšieho tlaku a po stenách výtoku k víru, kde vytvárajú špirálu a napokon opustia nádobu výtokom.

Záver

Práca opisuje rôzne analogické modely, ktoré pomáhajú pri hľadaní súvislostiach z rôznych vedeckých odborov. Či už sa jedná o podobnosti veličín vo vzorcoch, alebo sa jedná o konkrétne javy v praxi. Hlavným cieľom bolo vypracovať obraz o analógiách spojených s dynamikou tekutín. Využitý bol analogický prístup pri konkrétnych odboch.

V oblasti elektriny boli spracované podobnosti na báze malých hydraulických obvodov a analogické modely správania tlaku, prietoku kvapaliny, napätia a elektrického prúdu. Takisto boli preskúmané hydraulické a elektrické odpory. Elektromagnetizmus predstavoval kapitolu ktorá využíva jednoduchšie javy z dynamiky tekutín na lepšie pochopenie pomerne abstraktných veličín v Maxwellových rovniciach. Kvantová mechanika sprevádzaná experimentom s oscilujúcou kvapkou a Youngovým experimentom priniesla pohľad na vedeckú oblasť, ktorú voľným okom nie je možné vidieť. Vzhľadom na zámenu rádovo menšej kvantovej častice kvapkou bolo možné vidieť súvislosti v správaní jasnejšie. Podobne bolo v kapitole načrtnuté kvantové tunelovanie a teória riadiacej vlny.

Hlavnou kapitolou pre túto prácu sa stala kapitola gravitácie. Vzhľadom na potrebné pochopenie teórie suplovala dôležitú úlohu popri experimente. Tvorí sprievodcu analógie pre čiernu dieru ako takú, ako aj oblasti v jej okolí. Bol v nej vysvetlený koncept priekopníka v tejto oblasti W. G. Unruha, ktorý nadväzoval na koncept akustického horizontu na hladine toku rieky. Následne ako inšpirácia k experimentu bola predstavená práca S. Weinfurtnerovej, ktorá skúma podobnosti čiernych dier a výtokového víru. Vďaka týmto poznatkom bolo možné pokračovať k zaujímavému skúmaniu čiernej diery. Horizont udalostí, ergosféra, ako aj procesy superradiancie, spätnej reakcie a ringdownu vytvárali otázku, či je možné dosiahnuť týchto analógií v na jednoduchšej zostave v laboratóriu.

Počas experimentálnej časti boli pozorované podobnosti už od začiatku. Napríklad zakrivenie svetla, ktoré predstavuje vo veľmi zjednodušenom modeli zakrivenie priestoru. Taktiež bola pozorovaná tvorba víru a odtrh vzduchových bublín pri zrých-

lenej rotácii. Nerotujúce aj rotujúce čierne diery boli vizualizované za pomoci farbiva a jeho čiastočky tvorili obraz o trajektórii materiálu v jej blízkosti. Experimentom sa podarilo zachytiť častice, ktoré opustili vplyv čiernej diery a teoreticky získali energiu. Mohlo by sa jednať o opustenie ergosféry. Taktiež interakciu dopadajúcich a odrazených vln. Týmto bolo možné predpokladať, že je možné získať energiu z rotujúcej čiernej diery. Počas experimentu bolo možné taktiež sledovať zaujímavé vírové štruktúry. Vzhľadom na vybavenie experimentu nebolo možné detekovať úplne všetky vlastnosti.

Zoznam použitých zdrojov

- [1] ARBAB, A. I. The analogy between electromagnetism and hydrodynamics. *Physics Essays*. 2011, sv. 24, č. 2, s. 254 [2022-05-20]. ISSN 0836-1398.
- [2] BARCELÓ, C., LIBERATI, S. a VISSER, M. Analogue gravity. *Living reviews in relativity*. Springer. 2011, sv. 14, č. 1, s. 1–159 [2022-05-20]. ISSN 1433-8351.
- [3] BOKULICH, A. Maxwell, Helmholtz, and the unreasonable effectiveness of the method of physical analogy. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*. Elsevier. 2015, sv. 50, s. 28–37 [2022-05-20]. ISSN 0039-3681.
- [4] BUSH, J. W. Pilot-wave hydrodynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*. Annual Reviews. 2015, sv. 47, s. 269–292 [2022-05-20]. ISSN 1545-4479.
- [5] CHANG, G. *Electric Circuits and the Hydraulic Analogy For Physics Engineering Students* [2022-05-20]. Dostupné z: <https://ataridogdaze.com/science/hydraulic/index.html>.
- [6] COLLEGE, O. *Young's Double Slit Experiment* [2022-05-20]. Dostupné z: <https://courses.lumenlearning.com/physics/chapter/27-3-youngs-double-slit-experiment/>.
- [7] CONTI, S., DOLZMANN, G. a MÜLLER, S. The div–curl lemma for sequences whose divergence and curl are compact in $W^{-1, 1}$. *Comptes Rendus Mathématique*. Elsevier. 2011, sv. 349, 3-4, s. 175–178 [2022-05-20]. ISSN 1778-3569.
- [8] COUDER, Y. a FORT, E. Single-particle diffraction and interference at a macroscopic scale. *Physical review letters*. APS. 2006, sv. 97, č. 15, s. 154101–1–154101–4 [2022-05-20]. ISSN 1079-7114.
- [9] CROMB, M., GIBSON, G. M., TONINELLI, E., PADGETT, M. J., WRIGHT, E. M. et al. Amplification of waves from a rotating body. *Nature Physics*.

- Nature Publishing Group. 2020, sv. 16, č. 10, s. 1069–1073 [2022–05–20]. ISSN 1745-2481.
- [10] EDDI, A., SULTAN, E., MOUKHTAR, J., FORT, E., ROSSI, M. et al. Information stored in Faraday waves: the origin of a path memory. *Journal of Fluid Mechanics*. Cambridge University Press. 2011, sv. 674, s. 433–463 [2022–05–20]. ISSN 0022-1120.
- [11] EIGLER, D. *Scientific Image - Quantum Corral (top view)* [2022-05-20].
Dostupné z: <https://www.nisenet.org/catalog/scientific-image-quantum-corral-top-view>.
- [12] FIETE, G. A. a HELLER, E. J. Colloquium: Theory of quantum corrals and quantum mirages. *Reviews of Modern Physics*. APS. 2003, sv. 75, č. 3, s. 933 [2022–05–20]. ISSN 1539-0756.
- [13] FORT, E. *Classically quantum* [2022-05-20]. Dostupné z: <https://physicsworld.com/a/classically-quantum/>.
- [14] GUTZWILLER, M. C. *Chaos in classical and quantum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2013. ISBN 978-0387971735.
- [15] HAYT JR, W. H., KEMMERLY, J. E. a DURBIN, S. M. *Engineering Circuit Analysis (Eighth Edition)*. New York: McGraw-Hill Higher Education, 2006. ISBN 9780073529578.
- [16] JAMATI, F. Analogy between vortex waves and EM waves. *Fluid Dynamics Research*. IOP Publishing. 2018, sv. 50, č. 6, s. 065511 [2022–05–20]. ISSN 0169-5983.
- [17] LASER, D. J. a SANTIAGO, J. G. A review of micropumps. *Journal of micromechanics and microengineering*. IOP Publishing. 2004, sv. 14, č. 6, s. R35 [2022–05–20]. ISSN 0960-1317.
- [18] LEE, K., KIM, C., AHN, B., PANCHAPAKESAN, R., FULL, A. R. et al. Generalized serial dilution module for monotonic and arbitrary microfluidic gradient generators. *Lab on a Chip*. Royal Society of Chemistry. 2009, sv. 9, č. 5, s. 709–717 [2022–05–20]. ISSN 1473-0189.
- [19] MALAMENT, D. B. Reading natural philosophy: essays in the history and philosophy of science and mathematics. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*. 2002, sv. 36, s. 194–199. ISSN 1879-2502.

- [20] MUNSON, B. R., YOUNG, D. F. a OKIISHI, T. H. Fundamentals of fluid mechanics. *Oceanographic Literature Review*. 1995, sv. 10, č. 42, s. 831.
- [21] OH, K. W., LEE, K., AHN, B. a FURLANI, E. P. Design of pressure-driven microfluidic networks using electric circuit analogy. *Lab on a Chip*. Royal Society of Chemistry. 2012, sv. 12, č. 3, s. 515–545 [2022–05–20]. ISSN 1473-0197.
- [22] PATRICK, S. *On the analogy between black holes and bathtub vortices*. Nottingham, 2019. 150 s. Diplomová práce. University of Nottingham. Vedoucí práce WEINFURTNER, S.
- [23] PENROSE, R. a FLOYD, R. Extraction of rotational energy from a black hole. *Nature Physical Science*. Nature Publishing Group. 1971, sv. 229, č. 6, s. 177–179 [2022–05–20]. ISSN 2058-1106.
- [24] PETR, K. Jak díry přicházejí o energii. *Alderbaran Bulletin*. AGA(Alderbaran Group of Astrophysics). 2019, 27 [2022-05-20]. ISSN 1214-1674.
- [25] UNRUH, W. The analogue between Rimfall and black holes. In: *Quantum Analogues: From Phase Transitions to Black Holes and Cosmology*. Springer, 2007, s. 1–4. ISBN 9781280852299.
- [26] ZEL'DOVICH, Y. B. Generation of waves by a rotating body. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*. 1971, sv. 14, s. 180 [2022–05–20]. ISSN 1063-7761.

Zoznam použitých skratiek a symbolov

| Symbol/skratka | Názov | Jednotka |
|-----------------|-----------------------------|----------------------------------|
| P_e | elektrický výkon | W |
| P_h | hydraulický výkon | W |
| W | práca | J |
| t | čas | s |
| U | elektrické napätie | V |
| I | elektrický prúd | A |
| p | tlak | Pa |
| V | objem | m^3 |
| Q | prietok | $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ |
| R | elektrický odpor | Ω |
| R_h | hydraulický odpor | Ω |
| \vec{v} | vektor rýchlosti | $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| ρ | hustota | $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ |
| ρ_e | objemová hustota el. náboja | $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$ |
| \vec{E} | intenzita elektrického poľa | $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ |
| \vec{B} | magnetická indukcia | T |
| \vec{J} | hustota el. prúdu | $\text{A} \cdot \text{m}^2$ |
| ε_0 | permitivita vákua | $\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$ |
| μ_0 | permeabilita vákua | $\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$ |

Zoznam obrázkov

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Hydraulický a elektrický obvod | 11 |
| 1.2 | Podobnosti medzi Hagen-Poiseullovým a Ohmovým zákonom | 12 |
| 1.3 | Hydraulické schéma zdroju konštantného prietoku a konštantného tlaku | 13 |
| 2.1 | Vektorové pole a divergencia | 15 |
| 2.2 | Vektorové pole a rotácia | 17 |
| 3.1 | Kvapka „walker“ | 20 |
| 3.2 | Dvojštrbinový experiment | 21 |
| 3.3 | Interferenčný obrazec | 22 |
| 3.4 | Hustota pravdepodobnosti „walkera“ | 23 |
| 3.5 | Hustota pravdepodobnosti elektrónu | 23 |
| 4.1 | Akustický horizont | 26 |
| 4.2 | Analogický horizont čiernej diery | 27 |
| 4.3 | Interakcia dopadajúcej a odrazenej vlny z experimentu | 29 |
| 4.4 | Spätná reakcia vln. | 30 |
| 4.5 | Schwarzschildova diera a Kerrova diera | 31 |
| 5.1 | Zostava experimentu. | 33 |
| 5.2 | Zakrivenie priestoru výtokovým vírom | 34 |
| 5.3 | Tvorba víru | 34 |
| 5.4 | Nerotujúci a rotujúci vír | 35 |
| 5.5 | Zisk energie častice | 36 |
| 5.6 | Superradiančný rozptyl | 36 |
| 5.7 | Veľký výtokový vír | 37 |
| 5.8 | Vírové štruktúry | 37 |