

**Česká zemědělská univerzita v Praze**

**Provozně ekonomická fakulta**

**Katedra systémového inženýrství**



**Diplomová práce**

**Využití modelů teorie hromadné obsluhy v praxi**

**Bc. Jan Vaňous**

© 2013 ČZU v Praze

### Čestné prohlášení

Prohlašuji, že svou diplomovou práci " Využití modelů teorie hromadné obsluhy v praxi" jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce. Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že jsem v souvislosti s jejím vytvořením neporušil autorská práva třetích osob.

V Praze dne 12.1. 2012

---

## Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval doc. Ing. Ludmile Dömeové, CSc. za vedení a poskytnuté odborné rady při tvorbě diplomové práce., dále Ladislavu Hružovi za neocenitelné poznatky nápomocné při tvorbě diplomové práce a v neposlední řadě klubu HC Sparta Praha a.s. za poskytnutí dat a vstřícnost při zpracovávání této práce.

# Využití modelů teorie hromadné obsluhy v praxi

---

## Practical applications of Queuing Theory Models

### Souhrn

Tato práce se zabývá možnostmi optimalizace front na obsluhu u hokejových utkání HC Sparta Praha v TIPSPORT Aréně. Práce je rozdělena na 3 základní části, první z nich je literární rešerše, která poskytuje základní přehled o teoretických východiscích.

Druhá část této práce je věnována popisu vlastního problému a několika simulacím jeho řešení, tzn. nalezení vhodného modelu pro řešení vznikajících front, který splňuje dva základní předpoklady, což jsou snadná aplikace simulačního modelu do reálného systému a jeho co nejmenší finanční náročnost.

Závěrečná část se věnuje hodnocení simulačních modelů jak z hlediska přínosu zlepšení, tak i z hlediska možné realizace a její nákladnosti.

### Summary

This work deals with the possibilities of optimizing queues at the front HC Sparta Praha hockey game in TIPSPORT Arena. The work is divided into 3 parts, the first one is the literature review, which provides a basic overview of the theoretical background.

The second part is devoted to describing their queue problem and several simulations of the solution, ie. finding a suitable model to address emerging queues that meets two basic assumptions, first is that simulation model is easy applicable to the real system and meets minimal financial requirements.

The final part is the evaluation of simulation models, both in terms of benefit improvements, and in terms of its implementation and can it's expensiveness.

**Klíčová slova:** Model, Modelování, Fronta, Intenzita vstupů, Intenzita obsluhy, Intenzita provozu, Režim fronty, Virtuální fronta, Simulace, Časová analýza

**Keywords:** Model, Modeling, Queue, Arrival Rate, Service Time, Traffic Intensity, Queue Mode, Virtual Queue, Simulation, Time Analysis

## Obsah

Obsah .....	2
1. Úvod.....	3
2. Cíl a metodika.....	4
3. Teoretická východiska .....	5
3.1. MODEL A MODELOVÁNÍ .....	5
3.1.1. Klasifikace modelů .....	6
3.1.2. Analytické modely .....	6
3.1.3. Optimalizační modely.....	7
3.1.4. Simulační modely .....	7
3.2. SIMULACE .....	8
3.2.1. Struktura.....	8
3.2.2. Dynamické chování systému .....	9
3.2.3. Simulační proces.....	9
3.2.4. Konceptuální model.....	10
3.2.5. Simulační model .....	11
3.2.6. Validace a verifikace modelu .....	12
3.2.7. Provedení experimentu .....	13
3.2.9. Dokumentace .....	14
3.2.10. Implementace.....	15
3.2.11. Simulační nástroje.....	16
3.2.12. Aplikační oblast simulace.....	17
3.3. SYSTÉMY HROMADNÉ OBSLUHY .....	18
3.3.1. Typy modelů hromadné obsluhy .....	19
3.3.2. Základní pojmy teorie hromadné obsluhy .....	20
3.3.3. Model M/M/1 s čekáním.....	30
3.3.4. Virtuální fronty .....	33
4. Vlastní práce .....	34
4.1. Popis modelové situace.....	34
4.2. Varianty řešení: .....	37
4.3. Sběr dat .....	39
4.4. Empirický přístup .....	44
4.5. Simulace.....	46
4.5.1. Simulace 1.....	46
4.5.2. Simulace 2.....	52
4.5.3. Simulace 4.....	54
4.6. Nákladová analýza.....	55
5. Zhodnocení výsledků a doporučení .....	57
6. Závěr .....	59
7. Literatura.....	60

# 1. Úvod

Dnes již pravděpodobně neexistuje člověk, který by se za svůj život nesetkal s nějakou frontou. Fronty jsou nedílnou součástí našeho každodenního života a jistě tak tomu bude i nadále. Proto téma hromadné obsluhy bude pořád jedno z aktuálních témat doby. Teorie hromadné obsluhy je relativně staré technika původně vyvinutá na začátku dvacátého století pro telefonní ústředny dánským inženýrem Agnerem Erlangem, který hledal způsob jak umožnit co největšímu počtu volajících současný hovor.

Když byl v průběhu druhé světové války uveden v život operační výzkum, tak se teorie hromadné obsluhy stala jeho nedílnou součástí. V následujících letech se díky rozvoji výpočetní techniky výpočet stával čím dál tím jednodušší, rychlejší a také daleko přesnější. Operační výzkum zpracovává rozličné portfolio úloh, zejména úlohy ekonomické, logistické, organizační či úlohy vojenské. Operační výzkum a jeho součástí, jako je teorie front, je jedním z nástrojů pro rozhodovací proces, protože nám poskytuje aparát pro zkoumání reality a její simulaci.

Na následujících stránkách této práce se budeme věnovat teorii hromadné obsluhy jak v rovině teoretické, tak i v rovině praktické. Na konkrétním příkladu reálného světa bude provedeno několik druhů simulací za účelem nalezení přínosného řešení pro optimalizaci front před hokejovými utkáními klubu HC Sparta Praha. Výsledky z těchto simulací budou navrženy k implementaci přímo na reálný systém.

Práce je rozdělena do několika částí, kde je věnován prostor modelům a modelování, celkovému životnímu cyklu simulace a detailněji systémům hromadné obsluhy. Poslední část je věnována praktickým východiskům zkoumaného problému.

## 2. Cíl a metodika

Cílem této práce je na praktickém příkladu demonstrovat využití modelů teorie hromadné obsluhy při řešení simulačních metod a pomocí těchto metod navrhnout konkrétní řešení pro námi studovaný případ. Tato práce se bude snažit držet zásad metodického přístupu S.M.A.R.T..

Konkrétnost této práce je splněna zvolením systému z reálného světa. Tento problém nelze řešit jen pomocí analytických metod z důvodu své komplexnosti, pro splnění cíle bude využito několika simulací a jejich vzájemného porovnání a následného zhodnocení. Jak bylo zmíněno v úvodu, tak tato práce se snaží najít způsob řešení, který je finančně nenáročný a mohl by být bez větších nákladů implementován na reálný systém.

Zmíněný problém splňuje podmínku relevantnosti v několika aspektech, tím zřejmě nejdůležitějším je absence uplatnění některých z metod teorii hromadné obsluhy v praxi. Aktuální způsob řešení reálného systému je pouze pomocí empirických dat, která nejsou vždy úplně vypovídající.

Cíle této práce bude dosaženo pomocí aplikace simulačních modelů s použitím dat z reálného systému. V práci bude popsán kompletní životní cyklus simulačních metod definice problému, přes vlastní simulaci až po zhodnocení výsledků a návrhu na možnou implementaci.

Předpokládáme, že pomocí simulačních metod se nám podaří nelézt optimální řešení, případně řešení, které za splnění podmínky malé finanční náročnosti dokáže systém odbavení návštěvníků zefektivnit.

### **3. Teoretická východiska**

#### **3.1. MODEL A MODELOVÁNÍ**

Pro systémy hromadné obsluhy, které jsou součástí operačního výzkumu, je charakteristické používání modelů. Model nám slouží k zjednodušenému zobrazení systému reálného světa. Toto zjednodušení je nutné z důvodu nemožnosti přesně modelovat skutečný reálný systém, protože v reálném systému může existovat až nekonečně mnoho proměnlivých vlivů, které nelze v modelu obsáhnout. Je proto nutné vybírat jen takové vlastnosti, které jsou pro náš systém důležité, a které dokážeme nějakým způsobem definovat, tak aby se s nimi dalo dále pracovat.

Pro tvorbu modelů neexistuje nějaký přesný návod, spíš existují jen obecné rady, jak dobrý model sestavit. Pokud bude mít model například až moc vlastností, tak se může stát, že bude velice nepřehledný či velice těžko řešitelný. Pokud bude mít model naopak definováno příliš málo vlastností, tak nám nemusí podat odpovídající obraz o realitě.

V modelování je základní úloha nalézt rovnováhu mezi přespecifikovaným a příliš vágním modelem. Toho lze například experimentování s jednotlivými modely a hledání rovnováhy tak, aby nám model poskytl relevantní a co možná nejpřesnější informace o realitě.

Pokud již máme vytvořený model a vymodelovanou situaci je nutné také umět převést výsledky do reálného systému.

Možností modelování je několik a jsou zmíněny v další sekci práce.



### 3.1.1. Klasifikace modelů

Klasifikace modelů lze provést podle několika kritérií. Podle Daňka (Daněk, 2002) lze modely dělit na modely *fyzické*, modely *mentální* a modely *symbolické*.

Pojem *fyzický model* můžeme dále dělit podle jeho dynamiky na modely statické jako je třeba maketa a modely dynamické, jako je například prototyp. *Mentálním modelem* můžeme chápat určité myšlenkové pochody či určité vzory chování. *Simulační modely* se dále dělí na matematické a nematematické, jež se mohou dále dělit na mnoho nižších úrovní. Ne vždy je toto rozdělení odpovídající, mohou se vyskytnout výjimky, které nelze zařadit ani do jednoho ze zmíněných modelů, respektive mohou mít vlastnosti z různých typů modelů.

### 3.1.2. Analytické modely

Analytické modely jsou zpravidla zjednodušeným obrazem reality a lze jimi zachytit jen základní charakteristiky systému, jako jsou pro modely hromadné obsluhy například počet obslužných linek, intenzita příchodů či intenzita obsluhy. Tento přístup je jedním z nejjednodušších, protože nevyžaduje po analytikovi příliš mnoho práce, stačí jen dosadit příslušné parametry do předem známých rovnic a již má výsledky. Tento postup je vhodný pouze pro nejjednodušší modely, protože ze své podstaty není schopen zachytit komplikované modely a příslušně popsat obecné charakteristiky modelu například modelů s omezenou trpělivostí jednotek v systému (Jablonský, 2007) a podobně.

Analytické modely jsou většinou reprezentovány matematickými funkcemi, které vyjadřují vztahy mezi vstupními proměnnými. Jejich nespornou výhodou je jejich přesnost, při zachování předpokladu modelování jednoduchých modelů.

### 3.1.3. Optimalizační modely

Optimalizační modely slouží k nalezení nejlepšího, tzn. optimálního řešení. Toto modely se zpracovávají pomocí matematického aparátu a optimalizačních modelů.

Optimalizační modely procházejí několika fázemi hledání výsledku, tyto fáze jsou zmíněny níže:

- *Hledání přípustného řešení (množiny)*
- *Bazické řešení (definice přípustného řešení)*
- *Optimální řešení*
- *Alternativní řešení*

### 3.1.4. Simulační modely

Simulační modely se snaží o napodobení reálného systému, tak aby mohl být tento reálný systém prozkoumán. Účelem simulačních modelů bývá nalézání vhodných parametrů modelu, jehož reálná konstrukce může být nemožná či pomocí simulace napodobit reálný systém a tím snížit náklady na budování reálného systému, například letecké simulátory, simulátory v autoškole a tak podobně.

Pomocí simulačních metod se nesnažíme o stanovení přesného postupu řešení, ale pouze o simulaci tzn., co se stane, když se změní určité parametry a podobně. Umožňuje vyhodnotit důsledek rozhodnutí bez jeho realizace.

Simulační modely rozdělujeme na:

- *Počítačové*
- *Reálné*

*Počítačové simulační modely* jsou modely, jejichž výpočet je prováděn pomocí počítače. Jejich výhodou je to, že nezávisle kdy je možné sledovat průběh simulace přímo na počítačové obrazovce a je možné díky vysokému výpočetnímu výkonu provádět mnoho iterací za sebou a tím zpřesňovat výsledek simulace.

*Reálné modely* jsou modely, které jsou simulovány přímo v reálném prostředí. Snaží se být co nejvíce podobně realitě ve všech aspektech.

## 3.2. SIMULACE

### Definice

**Shannon:** Simulace je proces tvorby modelu reálného systému a provádění experimentů s tímto modelem za účelem dosažení lepšího pochopení chování studovaného systému či za účelem posouzení různých variant činnosti systému.

**Naylor:** Simulace je numerická metoda, která spočívá v experimentování s matematickými modely (dynamickými) reálných systémů na číslicových počítačích.

**Dahl:** Simulace je technika, která nahrazuje dynamický systém modelem s cílem získat informace o systému pomocí experimentů s modelem.

### 3.2.1. Struktura

Podle Dlouhého (Dlouhý a kol, 2007) existují 3 základní stavební prvky simulačního modelu: entity (objekty), aktivity (činnosti) a zdroje.

**Entity (objekty):** Entita je dynamický prvek z reálného světa, který se vstupuje do systému a je na ní realizována nějaká aktivita. Současně spotřebovává určité systémové zdroje, po vykonání činnosti systém opouští.

Příkladem entity může být návštěvník kulturní akce, který v určitý okamžik vstupuje do odbavovacího systému a požaduje obsluhu (aktivitu) a přitom spotřebovává zdroj (turniket). Po obslužení systém opouští.

**Aktivity (činnosti):** pod pojmem aktivita lze chápat činnost, která zpracovává požadavky od objektů. Několik činností, které spolu tvoří komplikovanější prvek můžeme pojmenovat jako *procesy*. Takto slučované činnosti do procesů se nazývá *hierarchické modelování* (Dlouhý a kol, 2007). Díky tomuto členění je umožněno uchovávat model přehledný tak, že větší detaily jsou řešeny až v nižších úrovních.

Jako příklad činnosti je použití odbavovacího turniketového systému.

**Zdroje:** zdroj je prvek, který je po určitou dobu využíván či spotřebováván objektem. Každý zdroj je ze své podstaty konečný a je tedy vyčerpatelný. Pokud k vyčerpání zdroje dojde, tak se objekt zařazuje do fronty k obsluze.

Turniket, který je schopen pojmuje pouze jeden požadavek na obsluhu v jeden okamžik je příkladem zdroje. Pokud objekt využívá tento zdroj, tak ho již žádný jiný využít nemůže.

## **3.2.2. Dynamické chování systému**

### **3.2.2.1. Modely se spojitým a disktrétním časem**

Na pojem času se můžeme dívat dvěma možnými způsoby. Můžeme chápat čas jako *spojitý* či jako *disktrétní*. Pokud uvažujeme čas jako *spojitý*, tak čas může nabývat jakýchkoliv hodnot. To znamená, že požadavek může přijít kdykoliv.

Modely s *disktrétním časem* mohou nabývat pouze disktrétních hodnot. Zpravidla jsou jako příklad udávány dlouhodobě sledované indexy vývoje určitých veličin, jako je kvartální vývoj ekonomiky.

### **3.2.2.2. Spojitá a disktrétní simulace**

Pro *disktrétní simulaci* je charakteristické, že proměny v modelu nastávají skokově. Příkladem může být areál TIPSPORT arény, kdy se počet zákazníků čekající na obsluhu mění skokově, podle toho, jestli přijede MHD či nikoliv. Pro *spojitou simulaci* je typické sledování spojitých jevů, které se mohou a nemusí v čase měnit, jako je teplota, výška, a tak podobně.

## **3.2.3. Simulační proces**

Simulační proces prochází několika fázemi.

### Stanovení cílů

Stanovené cílů je jeden z nejdůležitějších kroků pro simulační proces. Správné stanovení cílů je nicméně v některých projektech velice obtížné a dochází zde k určité vágnosti v zadání, čímž dochází k neúplným či úplně nesprávným výsledkům. Pro definici problému a jeho řešení je nutná těsná spolupráce mezi zadavatelem a řešitelem.

Dále je také nutné rozhodnout, zdali je simulování vhodným prostředkem k řešení vzniklé situace.

### 3.2.4. Konceptuální model

Základním konstruktem simulačního modelu je *model konceptuální*. Tento model nám přináší základní vhled do simulovaného systému, usnadňuje pochopení sledovaného problému. Jeho vlastností je, že má vysokou úroveň abstrakce. Konceptuální model by nám měl odpovědět na několik otázek (Gemino, Wand, 2004).

- *Co bude konceptuální model představovat*
- *Jak bude konceptuální model prezentován*
- *Kdo bude konceptuální model vytvářet nebo ho využívat*
- *Jak bude konceptuální model popisovat systém*
- *Na sledování čeho se bude konceptuální model zaměřovat*
- *Bude model účinný v popisovaném systému*

Pomocí konceptuálního modelu jsme schopni řešený problém zařadit do některé ze skupin typizovaných systému“. Tento postup nám posléze velice pomůže při řešení simulačního problému.

Při vytváření konceptuálního modelu je nutné si uvědomit, že čím vyšší míra abstrakce, tím má model vyšší náchylnost k podání nesprávných či zavádějících informací. Níže uvádíme několik možných problémů, které se mohou vyskytnout, pokud bude míra abstrakce příliš vysoká:

- *Složitá interpretace výsledků*
- *Časová náročnost vytváření modelu*
- *Nutnost velkého množství informací pro model*
- *Pomalost simulace z v důsledku velkého množství zpracovávaných parametrů*

### 3.2.5. Simulační model

Po vytvoření konceptuálního modelu je nutné vytvořit model simulační. Simulační model je již dodržuje formální anotace počítačového modelu a jeho logiku. Při vytváření tohoto modelu se projeví všechny případné nedostatky v konceptuálním modelu a je nutné přistoupit k jejich řešení. Dobře sestavený konceptuální model se již velice snadno převádí do simulačního modelu.

Existuje několik typů simulačních modelů, které se rozdělují podle sledovaných veličin. Sledované veličiny u simulačního modelu jsou dvojího druhu, podle času a podle hodnot sledovaných veličin.

#### Rozdělení podle času:

- *Modely se spojitým časem*
- *Modely s diskrétním časem*

#### Rozdělení podle sledované veličiny:

- *Modely se spojitou množinou hodnot*
- *Modely s diskrétní množinou hodnot*

Pro modely se *spojitým časem* může mít čas libovolné hodnoty. Příkladem může být hokejový areál, kdy návštěvníci mohou přicházet v kterýkoli okamžik.

Pro modely s *diskrétním časem* může mít čas jen diskrétní hodnoty. Příkladem může být sledování národního hospodářství za určité období, resp. k určitému datu.

Pro modely se *spojitou množinou hodnot* nám alespoň jedna z veličin může nabývat libovolné hodnoty. Příkladem může být teplota.

Pro modely s *diskrétní množinou hodnot* mohou nabývat pouze diskrétních hodnot. Příkladem může být velikost fronty před areálem.

	Spojitá hodnota stavů	Diskrétní hodnota stavů
Spojitý čas	Diferenciální rovnice	Simulace diskrétních událostí
Diskrétní čas	Diferenční rovnice	Markovské řetězce

Tabulka 1: Základní typy simulačních modelů (zdroj: Dlouhý a kol, 2007)

### 3.2.6. Validace a verifikace modelu

Tyto dva pojmy bývají často zaměňovány, případně slučovány do jednoho. Mezi těmito pojmy jsou však rozdíly, i když se oba týkají správnosti modelu

#### Validace

Pod pojmem *validace* můžeme chápat kontrolu modelu ve smyslu ověření správnosti shody s reálným systémem. Nejjednodušším způsobem kontroly validity (pokud je systém reálný) je porovnání výstupu reálného systému a vytvořeného modelu (Gilbert, Troitzsch, 2005). Existuje zde ovšem několik aspektů, které je nutné vzít v potaz. Podle Gilberta (Gilbert, Troitzsch, 2005) to jsou tyto:

- *Nelze předpokládat přesnou shodu z důvodu stochastického fungování obou systémů.*
- *Simulace závisí na vstupních parametrech, které se mohou od reálného systému lišit.*
- *Data získaná o reálném systému mohou být špatně či nepřesně interpretována.*
- *Model je modelován za použití určité úrovně abstrakce, proto nelze vždy dosáhnout dokonale přesného výsledku.*

#### Verifikace

Pod pojmem *verifikace* můžeme chápat ověření modelu a jeho shodu s konceptuálním modelem. Ve zkratce můžeme říct, že verifikace je kontrola správnosti zápisu konceptuálního modelu.

V případě simulačního procesu je verifikace ověřením, že vytvořený program dělá to, k čemu byl vytvořen (Gilbert, Troitzsch, 2005). Největším problémem při verifikaci je to, že simulační algoritmy pracují s náhodnými čísly, tudíž má každý experiment částečné rozdílné výsledky. Z toho důvodu je nutné provést několik experimentů a porovnat výsledky, tzn. verifikovat.

Běžně lze obě kontroly, jak validaci, tak i verifikace provést současně, pokud máme správně definovaný model a máme data z reálného systému, tak by mělo dojít při kontrole výsledků ke shodě.

### 3.2.7. Provedení experimentu

V tomto kroku přistupujeme již přímo k vlastnímu modelování simulačního modelu a získávání prvních výsledků.

Rozlišení experimentů může být trojího druhu (Shadish, 2001):

- *Náhodný experiment*
- *Kvazi experiment*
- *Přírodní experiment*

*Náhodný experiment* je takový experiment, který používá náhodný výběr, výběr předmětů a metod způsobem, který zabraňuje zkreslení ve výsledcích. Tato metoda je obzvláště důležitá, pokud se snažíme prokázat příčinný účinek. Tento druh experimentu byl poprvé použit v zemědělství, avšak posléze se rozšířil i do ostatních oblastí, protože nevyžadoval kontrolované prostředí, jako je například laboratoř (Shadish, 2001).

*Kvazi experiment* je takový typ experimentu, kdy pokusné objekty nejsou přiřazeny náhodně (randomizací), většinou se jedná o přirozeně vytvořené skupiny.

*Přirozený experiment* popisuje přirozeně se vyskytující kontrast mezi navrhovaným řešením a aktuálním stavem (například léčba pacientů a jejich aktuální stav). Tento druh experimentu získal vysoké postavení v ekonomii, nicméně dvě studie z oblasti účinků pracovních školení prokázali, že tyto úpravy vytvořily odhady, které byly velice rozdílné oproti výsledkům z *náhodných experimentů* a projevovaly nestabilitu při testech citlivosti (Shadish, 2001).



### 3.2.8. Analýza a validace

Tato část je jedna z nejdůležitějších částí simulace, při této části se data, která byla vytvořena simulací, promítají do reálného systému a tím se interpretují v prostředí reálného systému.

Tato fáze simulačního procesu bývá často přehlížena či je jí přikládán jen malý význam, což je velkou chybou. Zpravidla dostáváme ze simulačního modelu data, která se v čase mění a jsou autokorelována. Odstranění autokorelace lze provést několika způsoby (Dlouhý a kol, 2007):

- *Eliminace autokorelace u simulace s konečným horizontem*
  - *Replikační metoda*
- *Eliminace autokorelace u simulace s nekonečným horizontem*
  - *Replikační metoda s vynecháním přechodového stavu*
  - *Metoda skupinových průměrů*
  - *Regenerativní metoda*
- *Přesnost odhadu a počet experimentů*
- *Redukce rozptylu*
  - *Metoda společných náhodných čísel*

### 3.2.9. Dokumentace

Dokumentace k simulační úloze je další důležitou součástí, která bývá také často opomíjena. Dokumentace slouží ke zmapování jednotlivých kroků simulace. Jak bylo zmíněno výše, tak často dochází k jejímu zanedbávání, toto může mít podle Dlouhého (Dlouhý a kol, 2007) několik příčin:

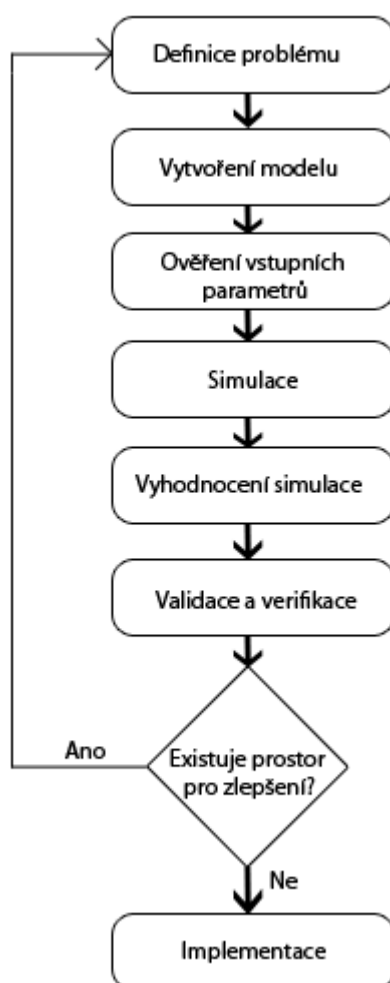
- *Nedostatek času.*
- *Simulovaný problém se zdá být jednoduchý, proto se dokumentace nevytváří.*
- *Dokumentace se zdá být zbytečná, protože nic nového nevytváří.*
- *Časté změny a nekonceptní přístup způsobí zastaralost dokumentace.*
- *Zpracováním dokumentace jsou pověřeni osoby, které na ni nemají zájem.*
- *Simulace byla zpracována nestandardně, proto není dokumentace žádoucí.*

Úlohu dokumentace můžeme chápat v několika aspektech. Zejména je to nejsnadnější způsob zaznamenání postupu simulační úlohy a dále také je to nejsnadnější nástroj pro začlenění nového člena týmu. Je vždy lepší, pokud se pro tvorbu dokumentace k jednotlivým projektům vytvoří nějaké schéma, které pak usnadňuje její vytváření a orientaci v ní.

### 3.2.10. Implementace

Implementace je poslední částí celého simulačního procesu, kdy se výsledky simulace uplatňují na reálný systém.

Implementace je jedním z faktorů, které pokud se zanedbají či neprovedou správně vedou k chybám či zcela nesprávnému chování systému do kterého je řešení implementováno.



Obrázek 1: Životní cyklus simulace (zdroj: autor)

### 3.2.11. Simulační nástroje

Níže je uveden stručný přehled nástrojů, které je možné použít pro simulaci úloh. Nejčastější simulační nástroje jsou kvůli své snadnější dostupnosti nástroje počítačové. Podle Dlouhého (Dlouhý a kol, 2007) existují 3 základní oblasti počítačových simulačních nástrojů.

#### Obecné programovací jazyky

V dnešní době existuje nepřehledné množství programovacích jazyků, pomocí kterých je možné provádět simulace. Nejrozšířenějšími jsou zřejmě programovací jazyky Java, C, C++. Tyto programovací jazyky jsou vzhledem ke své univerzálnosti jedním z nástrojů pro vytváření simulací všech druhů, avšak právě díky jejich univerzálnosti neexistují připravené modely a je tedy nutné je vytvořit zcela od začátku, což může být i pro zkušeného uživatele dlouhá záležitost. Z výše zmíněných důvodů se pro simulační metody moc často nepoužívají.

#### Simulační programovací jazyky

Tyto programovací jazyky jsou jakousi nadstavbou obecných programovacích jazyků a byly vytvořeny právě pro usnadnění tvorby simulačních modelů. Zpravidla je v nich tvorba simulačních modelů dělána tak, že mají grafickou nadstavbu, která podstatně vylepšuje přehlednost vytvořených modelů. Jedním z těchto nástrojů je i Java Modeling Tool, který je v praktické části této práce využíván. Tyto programy jsou velice sofistikované, což se odráží i na jejich vysoké pořizovací ceně.

#### Ostatní jazyky a programy

Nejznámějším zástupcem této skupiny ostatních jazyků je zřejmě tabulkový procesor Microsoft Excel, který také umožňuje vytvářet simulace. Existují samozřejmě i jiné programy, které se jsou zaměřeny na problematiku simulačních metod, ovšem nejsou natolik rozšířeny. Příklady ostatních programů uvedeme jen ve zkratce: @RISK, Crystall Ball, či Lotus Notes.

### 3.2.12. Aplikační oblast simulace

Simulační metody lze využít v několika různých oblastech operačního výzkumu. Členění několika základních úloh je podle Dlouhého (Dlouhý a kol, 2007) následující.

#### Teorie front

Teorie front nebo také teorie hromadné obsluhy je zaměřena na zkoumání systému, ve kterých dochází k interakci mezi zákazníky, kteří do systému vstupují a obsluhou, která zpracovává jejich požadavky. Podrobný popis teorie hromadné obsluhy je zmíněn v dalších kapitolách.

#### Modely řízení zásob

Tato oblast operačního výzkumu se snaží o minimalizaci vlastních zásob = jejich optimalizaci. Zpravidla se v oblasti řízení zásob zaměřujeme na její základní popisné charakteristiky, jako jsou velikost objednávky, objednávací lhůta. Jedná se o optimalizační úlohu s cílem eliminovat možné nedostatky na dodavatelské straně řetězce.

#### Projektové řízení

Oblast operačního výzkumu, který se zaměřuje na vytváření, plánování a řízení projektů pomocí jejich dělení na jednotlivé úkoly, které jsou ukotvené v čase a mají zpravidla omezené zdroje se kterými je potřeba počítat. Další nedílnou součástí řízení projektů je plánování nákladů.

Další oblastmi simulace uvedeme pouze ve zkratce, jsou to *rozhodovací modely*, *modelování finančních trhů*, *simulace trhů*.

### 3.3. SYSTÉMY HROMADNÉ OBSLUHY

Se systémy *hromadné obsluhy* se setkáváme v reálném životě, a tedy i v ekonomické sféře, velmi často. Jedná se o systémy, ve kterých dochází k realizaci obsluhy požadavků, které do systému za účelem této obsluhy přicházejí. V systémech hromadné obsluhy se v zásadě vyskytují dva druhy realizace obsluhy, a jednak **obslužná zařízení**, která tuto obsluhu zabezpečují. Je samozřejmé, že *obslužné linky* mají většinou omezenou kapacitu obsluhy a stejně tak *požadavky* přicházejí do systému s různou intenzitou. V závislosti na vztahu těchto dvou veličin, kapacity obslužných zařízení a intenzity příchodů požadavků může docházet před obslužnými linkami k hromadění požadavků a, k vytváření **front**. Od toho je také odvozen alternativní název této disciplíny operačního výzkumu – **modely front**. Cílem při zkoumání systému hromadné obsluhy je často jejich analýza s ohledem na efektivní fungování celého systému, tzn. s ohledem na to, aby se před obslužnými linkami nevytvářely příliš velké fronty čekajících požadavků, a na druhé straně aby nedocházelo k neefektivním prostojům při práci obslužných linek. V některých případech lze prostoje obslužných linek, jejich provoz nebo i čekání požadavků nákladově ohodnotit a v takových případech lze celý systém hromadné obsluhy optimalizovat vzhledem z celkovým nákladům, které souvisejí s jeho provozem (Jablonský, 2007).

Systém	Obslužné linky	Požadavky
Banka	Úředníci u přepážky	Klienti
Nádraží	Pokladny	Cestující
Telefonní centrála	Telefonní linky	Volající
Lyžařské středisko	Vleky	lyžaři

Tabulka 2: Ukázky systémů hromadné obsluhy (zdroj: Jablonský, 2007)

### 3.3.1. Typy modelů hromadné obsluhy

**Analytické** – činnost systému se modeluje soustavou funkcí, nejčastěji soustavou integrálních a diferenciálních funkcí, ze kterých se odvozují vzorce pro výpočet základních charakteristik. Do těchto vzorců se dosazují parametry systému. Nevýhodou je, že analytické postupy jsou použitelné pouze pro jednoduché případy. Skutečné systémy bývají tak složité, že příslušné vztahy nelze obecně odvodit a je třeba použít simulační postupy (Dömeová, Beránková, 2004).

**Simulační** – procesy se modelují v příslušném počítačovém modelu a na základě získaných dat lze odvodit charakteristiky zkoumaného systému (Dömeová, Beránková, 2004):.

Z hlediska počtu linek rozlišujeme podle:

- *Systémy s konečným počtem linek*
- *Systémy s nekonečným počtem linek*

Z hlediska obsluhy rozlišujeme podle:

- *Systémy s čekáním (požadavek čeká na obsluhu, vytváří se fronta)*
- *Systémy se ztrátami (požadavek nečeká na obsluhu, opouští systém bez obsluhy a fronty se nevytváří)*
- *Systémy smíšené*

### 3.3.2. Základní pojmy teorie hromadné obsluhy

#### 3.3.2.1. Zdroj požadavků

Jednu z důležitých charakteristik při analýze systému hromadné obsluhy hrají zdroje požadavků. Rozlišují se na **konečné**, například malá výrobní hala s několika stroji na správu a údržbu a **nekonečné**, například banka s několika tisíci klienty (Dömeová, Beránková, 2004).

#### 3.3.2.2. Příchod požadavků do systému

Příchod požadavků do systému lze popsat buď pomocí **intenzitou příchodů** (počet požadavků za časovou jednotku) nebo **intervalu mezi příchodem**  $\lambda X_1, X_2, \dots$  což je čas mezi dvěma po sobě jdoucími příchody (Dömeová, Beránková, 2004).

#### 3.3.2.3. Doba trvání obsluhy

Může být *deterministická* (stále stejné trvání obsluhy) nebo *pravděpodobnostní*, doba trvání obsluhy je různá, pro popis se nejčastěji používá exponenciální rozdělení (Jablonský, 2007).

#### 3.3.2.4. Režim fronty

Je souhrn pravidel, podle kterých vstupují jednotlivé požadavky do obsluhy (Macek, Mainzová, 1995). Existuje pět základních druhů:

1. **FIFO (first in / first out)** je nejčastější způsob obsluhy. Požadavek, který přišel jako první také jako první vstupuje do obsluhy.
2. **LIFO (last in / first out)** je opačný režim fronty, požadavky které přišly jako poslední jsou obsluhovány jako první. Dříve se používal například pro zpracování dat.
3. **SIRO (selection in random order)** je ryze náhodný přechod z fronty do obsluhy.
4. **PRI (priority)** je vstup do obsluhy podle priority. Například vážná zranění v nemocnici mají přednost před všemi ostatními ve frontě.
5. **Zpracovatelské dělení (processor sparing)** je dělení kapacit pro rychlejší obsluhu. Například procesory v počítačích dělí svůj výpočetní výkon na rychlejší zpracování požadavků (Adan, Resing, 2002).

### 3.3.2.5. Chování ve frontě

Zákazníci mohou být buďto **trpěliví** a ochotní čekat ve frontě neomezeně dlouhou dobu nebo mohou být **netrpěliví**, a pokud není v okamžiku jejich příchodu volný kanál obsluhy tak odejdou. Příkladem je třeba volání na zákaznickou linku, kdy zákazníci zavěsí, pokud se mu bude muset dlouho čekat, případně zkusí zavolat za chvíli (Dömeová, Beránková, 2004).

### 3.3.2.6. Počet a uspořádání obslužných linek

Systémy mohou mít různý počet stanic obsluhy, podle toho rozeznáváme systémy s jednou stanicí obsluhy a s více stanicemi obsluhy. Stanice mohou být řazeny vedle sebe tj. paralelně. Prvek je pak obslužen pouze u jedné z těchto stanic a odchází z obsluhy. Při sériovém uspořádání je prvek postupně obsluhován v těchto stanicích a systém opustí až poté co je obslužen v poslední z nich. U paralelního uspořádání vzniká fronta až tehdy, jsou-li obsazeny všechny kanály obsluhy. Naproti tomu u sériového uspořádání může fronta vznikat už při obsazení jedné stanice obsluhy (Macek, Mainzová, 1995).

### 3.3.2.7. Doba obsluhy

Obvykle se předpokládá, že doba obsluhy je identická a nezávisle distribuovaná a že je nezávislá na době příchodu. Například doba obsluhy může mít deterministické nebo exponenciální rozdělení. Může také nastat situace, že doba obsluhy bude závislá na délce fronty (Macek, Mainzová, 1995).

### 3.3.2.8. Výstup z obsluhy

Obslužné jednotky, které opouštějí kanál obsluhy vytvářejí tzv. **vystupující tok**. Tento tok může být vstupním tokem do jiného kanálu obsluhy. V uzavřených systémech je výstupní tok roven vstupnímu (Dömeová, Beránková, 2004).



### 3.3.2.9. Klasifikace modelů hromadné obsluhy

Modely hromadné obsluhy jsou klasifikovány podle jednotlivých základních charakteristik. Pro tuto klasifikaci se používá posloupnost šesti následujících symbolů podle:

**A/B/C/D/E/F**

Symbol	Význam	Může obsahovat
<b>A</b>	Typ pravděpodobnostního rozdělení intervalů mezi vstupy požadavků do systému	<b>M</b> - exponenciální rozdělení intervalů mezi vstupy <b>E<sub>k</sub></b> - Erlangovo rozdělení intervalů mezi vstupy požadavků <b>D</b> - pravidelné vstupy požadavků <b>G</b> - obecný případ, jakéhokoliv rozdělení
<b>B</b>	Typ pravděpodobnostního rozdělení doby trvání obsluhy	<b>M</b> – exponenciální rozdělení <b>E<sub>k</sub></b> - Erlangovo rozdělení intervalů mezi vstupy požadavků <b>D</b> - pravidelné vstupy požadavků <b>G</b> - obecný případ, jakéhokoliv rozdělení trvání obsluhy
<b>C</b>	Počet paralelních obslužných linek	1,2,...(celé kladné číslo)
<b>D</b>	Kapacita systému hromadné obsluhy, tj. místa v obsluze a ve frontě	Celé kladné číslo, pokud není omezena užívá se symbol $\infty$
<b>E</b>	Početnost zdroje požadavků	Celé kladné číslo nebo $\infty$
<b>F</b>	Režim fronty	<b>FIFO, LIFO, PRI, SIRO</b>

Tabulka 3: Kendallova tabulka (zdroj: Jablonský, 2007)

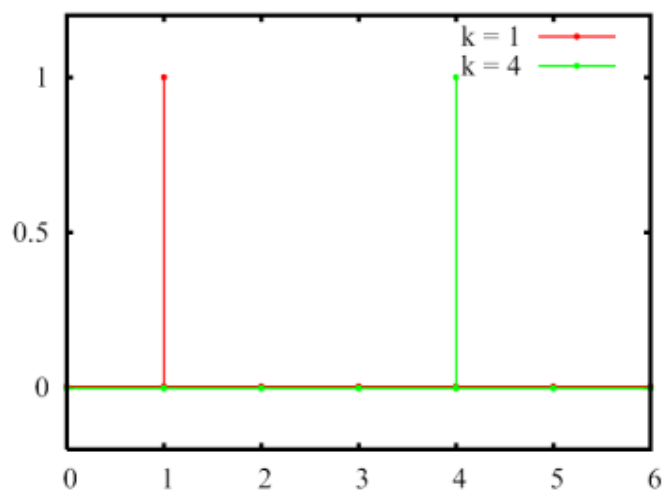
### 3.3.2.10. Náhodné veličiny a jejich rozdělení

#### Konstantní rozdělení

$\text{const}(k)$

Funkce hustoty pravděpodobnosti:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = k \\ 0 & x \neq k \end{cases}$$



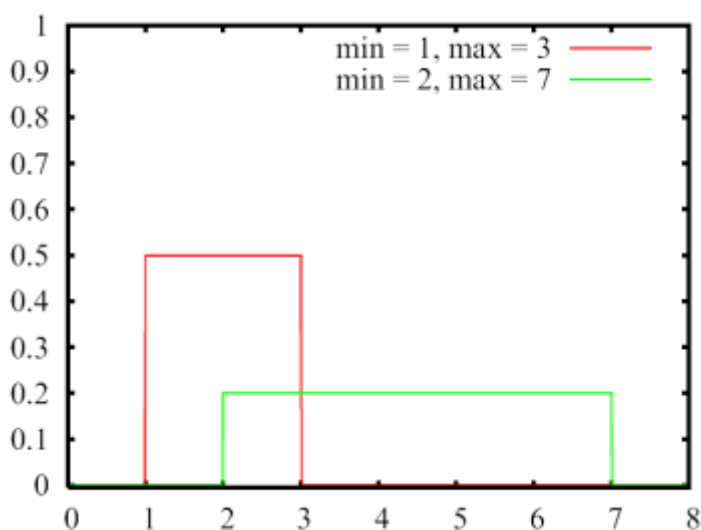
Průměr je roven  $k$ , což je parametr, který je nutné určit. Toto rozdělení popisuje konstantní tok zákazníků, kteří přijdou přesně každou  $k$  časovou jednotku.

#### Rovnoměrné rozdělení

$U(\min, \max)$

Funkce hustoty pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\max - \min}$$



Rovnoměrné rozdělení se také někdy nazývá obdélníkové, kvůli tvaru jeho hustoty funkce. Toto rozdělení popisuje náhodnou proměnnou, která může nabývat hodnot v rozmezí ( $\min$ ,  $\max$ ), charakterizující parametry, s konstantní pravděpodobností rovnající se  $1/(\max - \min)$ . Pravděpodobnost rovna 0 je mimo rozsah. Zvolíme-li tuto distribuci, můžeme buď zadat dvojici ( $\min$ ,  $\max$ ) nebo průměr  $m = (\max + \min)/2$  a rozptyl  $c = (\max - \min)^2/12$ .

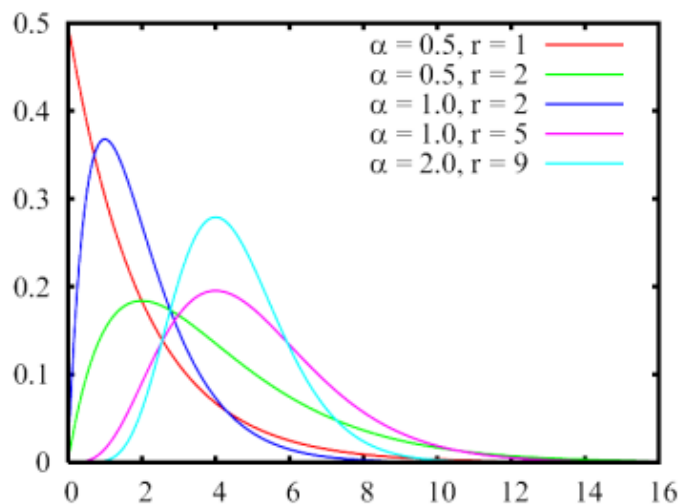
## Erlangovo rozdělení

**erl** ( $\alpha, r$ )

Funkce hustoty pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\alpha x}$$

$\Gamma(t)$  = Eulerova funkce



Erlangovo rozdělení je rozdělení spojité, se dvěma parametry: tvarem  $r$ , což je celé číslo, a mírou  $\alpha$ , což je reálné číslo. Jedná se o speciální případ gama distribuce, kde parametr  $r$  je celé číslo.

$\Gamma(t)$ , se nazývá Eulerova funkce a je definována jako:  $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$ , kde  $r$  je nenulové kladné celé číslo, což v případě Erlangovi distribuce redukuje Eulerovu funkci na  $\Gamma(r) = (r-1)!$ . Náhodná proměnná v Erlangově rozdělení řádu  $r$  můžeme získat jako sumu  $r$  exponenciálně rozdělených náhodných proměnných s průměrem  $1/\alpha$ .

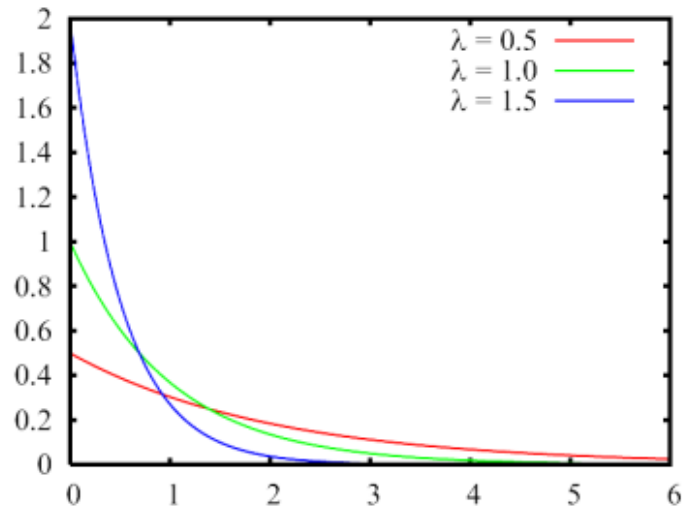
Pokud změním hodnoty  $\alpha$  a  $r$ , systém automaticky přizpůsobí průměr  $= r / \alpha$  a rozptyl  $\sigma^2 = r / \alpha^2$ . Skupina funkcí hustoty pravděpodobnosti, které ilustrují dopad různých párů  $(\alpha, r)$  je uveden výše.

## Exponenciální rozdělení

**exp ( $\lambda$ )**

Funkce hustoty pravděpodobnosti:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$



Jedná se o spojité rozdělení pravděpodobnosti, kde  $\lambda > 0$  je parametr distribuce, občas označován jako parametr tvaru, distribuce funkce náleží intervalu  $[0, \infty)$ .

Exponenciální rozdělení se používá k modelování Poissonovských procesů, popisující změny stavu systému, které nastanou s konstantní pravděpodobností  $\lambda$  za časový úsek. V tomto případě, je časový interval mezi dvěma po sobě následujícími změnami popsána náhodnou exponenciální proměnnou s parametrem  $\lambda$ . Proto, pokud je systém ve stavu A v čase  $t = 0$ , integrál  $f(t)$  od 0 do  $T$  nad  $t$  představuje pravděpodobnost, že systém je ve stavu B čase vždy když  $t = T$ .

Vyberete-li tuto distribuci, musíme zvolit parametr  $\lambda$  (reálné číslo), a průměr je počítán jako  $\lambda^{-1}$  a rozptyl je  $1/\lambda^2$

.

.

.

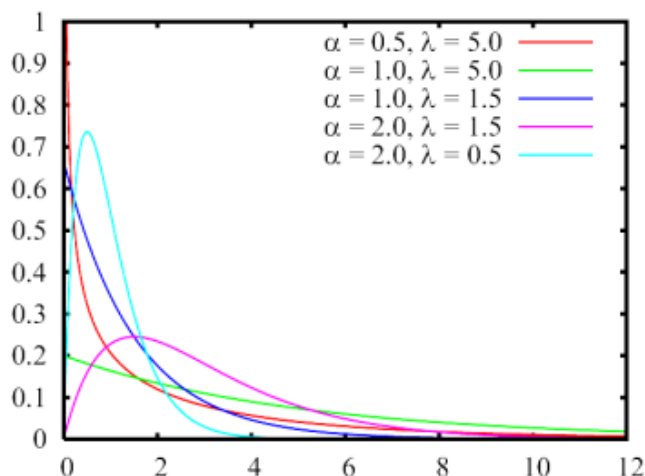
### Gamma rozdělení:

**gam** ( $\alpha, \lambda$ )

Funkce hustoty pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) * \lambda^\alpha} e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$\Gamma(t)$  = Eulerova funkce



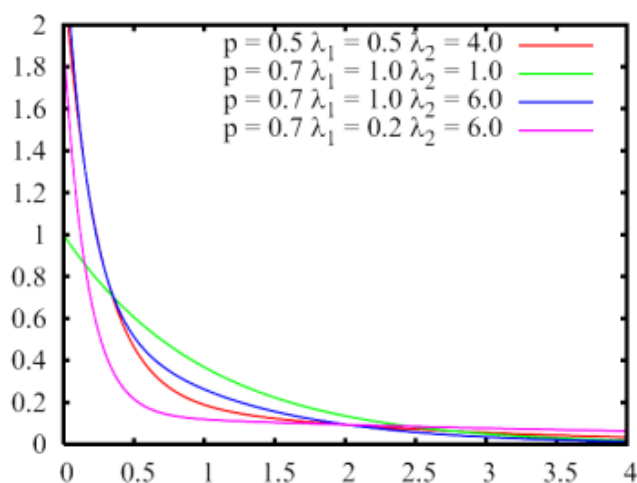
Jedná se o spojité rozdělení pravděpodobnosti. Tyto parametry jsou tvar  $\alpha$  a rozsah  $\lambda$ , obě reálná čísla. Pro Gamma rozdělení, můžete buď zadat  $\alpha$  a  $\lambda$  nebo distribuční průměr, rovnající se  $\alpha * \lambda$  a rozptyl  $\alpha * \lambda^2$ .

### Hyperexponenciální rozdělení

**hyp** ( $p, \lambda_1, \lambda_2$ )

Funkce hustoty pravděpodobnosti:

$$f(x) = p * \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + (1 - p) * \lambda_2 * e^{-\lambda_2 x}$$



Hyperexponenciální rozdělení popisuje náhodnou proměnnou podobně jako exponenciální, ale s větší variabilitou, neboť výsledkem je vážený součet dvou nezávisle exponenciálně rozdělných náhodných proměnných, s parametry  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ . Váha je pravděpodobnost  $P$ , že se náhodná proměnná chová jako exponenciální s parametrem  $\lambda_1$  a pravděpodobností  $1-P$ , že se chová jako exponenciální s parametrem  $\lambda_2$ .

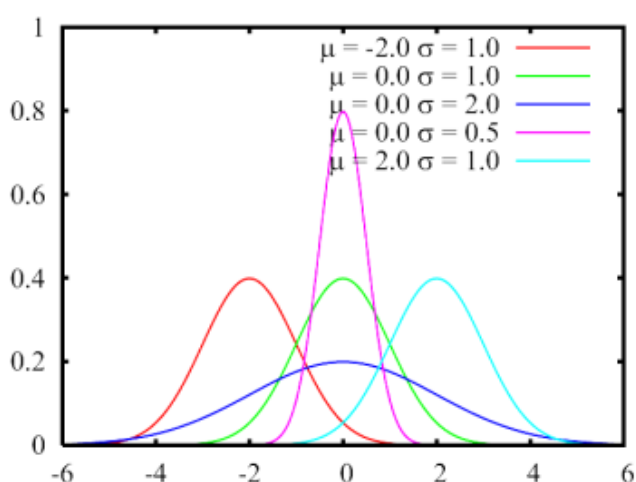
Pokud je tato distribuce použita k modelování času příchodu zákazníků na stanici obsluhy (nebo jako doba provozu na této stanici), tak s pravděpodobností P udává, že příští interval před příchodem (doba provozu) je distribuován jako horní větve na obrázku výše a s pravděpodobností 1-P bude distribuována jako spodní větev na obrázku.

### Normální rozdělení

**norm ( $\mu$ ,  $\sigma$ )**

Funkce hustoty pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



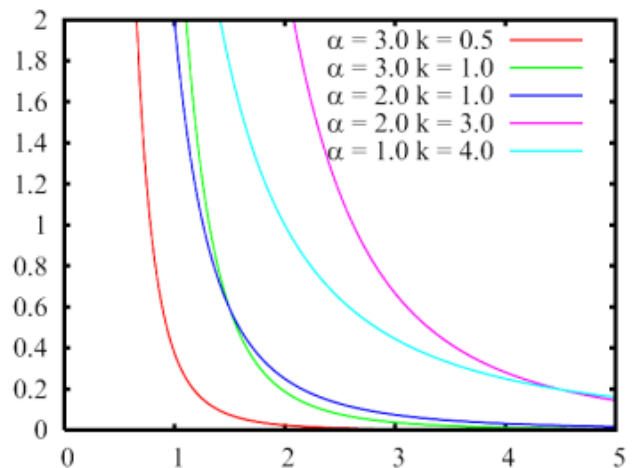
Normální rozdělení je také jinak nazýváno Gaussovo, protože jeho funkce hustoty pravděpodobnosti je Gaussova funkce. Je dobře známo, pro jeho tvaru zvonu. Dvěma parametry jsou  $\mu$  = umístění (reálné číslo, je střední hodnota rozdělení), a  $\sigma$  = měřítko (reálné číslo, je standardní odchylka rozdělení, tj. druhé odmocniny rozptylu). Hustota je symetrická kolem střední hodnoty. Standardní normální distribuce je normální rozdělení s  $\mu = 0$  a  $\sigma = 1$ . Na obrázku je znázorněna na zeleně.

### Paretové rozdělení

**par ( $\alpha, k$ )**

Funkce hustoty pravděpodobnosti:

$$f(x) = \alpha k^\alpha x^{-(\alpha+1)}$$



Toto rozdělení obvykle popisuje sociální a ekonomické jevy (například rozdělení majetku, kde malá část lidí vlastní větší část bohatství). Je charakterizováno podle parametrů umístění (reálné číslo)  $k > 0$  a tvaru (reálné číslo)  $\alpha > 0$ .

Když o zadání distribuční parametry, pokud  $k$  a  $\alpha$  jsou poskytovány, systém automaticky

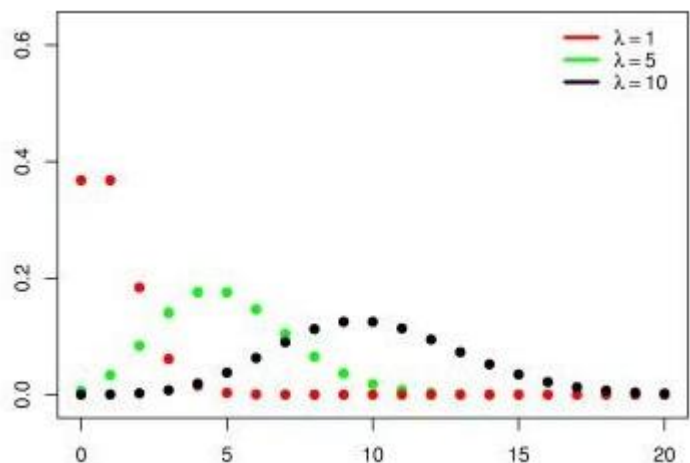
odvozuje průměrná  $m = k * \alpha / (\alpha - 1)$  pro  $k > 1$  a rozptyl  $c = \frac{\alpha^2 * x}{(x - 1)^2(x - 2)}$

### Poissonovo rozdělení

**poisson ( $\lambda$ )**

Funkce hustoty pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} * e^{-\lambda}$$



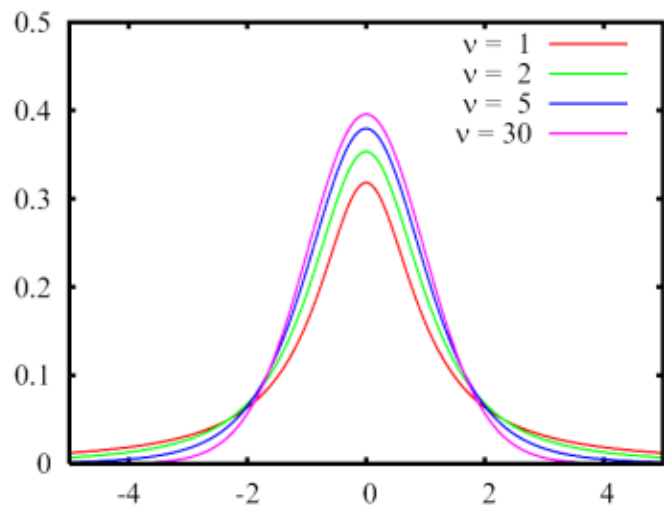
Poissonovo rozdělení popisuje počet událostí, které nastaly v daném časovém intervalu, tyto události jsou nezávislé na množství času, který uplyne, a vyskytují se ve stále stejném poměru. Toto diskrétní rozdělení je charakterizována jediným parametrem,  $\lambda$ , což je kladné reálné číslo, které je udává průměrný počet událostí za jednotku času a jeho rozptyl. To znamená, že pravděpodobnost výskytu v časovém intervalu  $(t, t + \Delta t)$  je  $\lambda \Delta t + O(\Delta t)$ , pravděpodobnost že existuje více než jeden výskyt ve stejném časovém intervalu je  $O(\Delta t)$ .

StudentT rozdělení  
**studT (v)**

Funkce hustoty pravděpodobnosti:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

$\Gamma(t)$  = Eulerova funkce



Studentovo rozdělení nebo je spojité rozdělení charakterizováno jedním parametrem  $\nu$ , což je reálné kladné číslo. Používá se v případech, kdy musí být určen průměr normálně rozdělené populace pouze z malého vzorku. Student-T rozdělení je primárně určeno k tomu, že se používá pro vyhodnocení statistické významnosti rozdílu mezi průměry dvou vzorků. Je to zvláštní případ zobecněného hyperbolické rozdělení. Pro  $\nu > 1$  je průměr 0 a rozptyl je  $\nu / (\nu - 2)$  pro  $\nu > 2$  (v jiném případě nekonečný).



### 3.3.3. Model M/M/1 s čekáním

Symbolický zápis, který značí, že v systému je jen jedna obslužná linka, intervaly mezi příchody požadavků lze popsat exponenciálním rozdělením s parametrem  $\lambda$ , doba trvání obsluhy je náhodná veličina s exponenciálním rozdělením s parametrem  $\mu$ , neomezená kapacita systému a režim fronty FIFO (Dömeová, Beránková, 2004).

#### 3.3.3.1. Vstup požadavků

Cílem jakékoliv obslužné soustavy je uspokojit požadavky na obsluhu. Proto je vstupní tok jedním z nejdůležitějších pojmů teorie hromadné obsluhy. Jsou to jednotky, které vstupují do kanálu obsluhy v určitém časovém intervalu (Dömeová, Beránková, 2004).

#### 3.3.3.2. Elementární vstupní tok (Dömeová, Beránková, 2004)

Elementárním nazýváme tok událostí, které mají následující vlastnosti:

##### Stacionárnost

Pro libovolné  $t > 0$  a celé  $k \geq 0$  pravděpodobnost, že za časový interval  $\langle a, a+t \rangle$  nastane  $k$  událostí, je stejná pro všechna  $a \geq 0$  a budeme ji označovat  $P_k(t)$ . Vzhledem k tomu, že nebudeme uvažovat jiné případy než takové, při nichž za konečný časový interval nastane s pravděpodobností jedna konečný počet událostí, bude platit pro libovolné  $t$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$$

Stacionárnost vstupního toku vyjadřuje jeho nezávislost na absolutním umístění na časové ose. V praxi je k dodržení tohoto předpokladu třeba často volit omezené časové období.

##### Beznáslednost (neexistence následných účinků)

Pravděpodobnost  $P_k(t)$ , že nastane  $k$  událostí za časový interval  $\langle a, a+t \rangle$  nezávisí na sledu událostí od okamžiku  $a$ . Podmínkou beznáslednosti je vstup požadavků, které jsou na sobe nezávislé.

### Ordinárnost

Požadavky musí přicházet jednotlivě, aby tato podmínka byla splněna musí být časový interval  $t$  nekonečně malý. Pravděpodobnost že v jednom okamžiku nastanou dvě události se rovná nule jen pokud je  $t$  nekonečně malé:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{k(t)}}{t} = 0, k \geq 2.$$

Pravděpodobnost  $P_k(t)$  můžeme vyjádřit:

$$P_k(t) = 1 - P_0(t) - P_1(t) = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(t)$$

### 3.3.3.3. Poissonovo rozdělení počtu vstupů za jednotku času

Zbývá stanovit tvar funkce  $P_k(t)$  a to vyhledáním distribučního zákona pro počet událostí za interval délky  $t$ . Tvar této funkce můžeme kromě  $\lambda$  odvodit z výše uvedených vlastností elementárního toku požadavků (Dömeová, Beránková, 2004).

#### Věta: „O elementárním toku požadavků“

Pro stacionární, beznásledný a ordinární vstupní tok požadavků je pravděpodobnost nastání  $k$  událostí za časový interval  $t$ , neboli počet událostí, které nastanou v elementárním vstupním toku za časový interval  $t$  je Poissonova náhodná proměnná s parametrem  $\lambda t$ .

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \lambda > 0$$

Další charakteristikou je střední počet vstupů za časový interval, což je střední počet událostí, které nastanou v toku náhodných událostí za jednotku času, nazýváme ji intenzita toku.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} = e^{-\lambda t} \cdot \lambda t \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^{k-1}}{k(k-1)!} = \lambda t$$

**Střední počet událostí za jednotku času se rovná  $\lambda$ .**

#### **3.3.3.4.        Obsluha**

Uvažujeme, že údaje o **trvání obsluhy** jsou nezávislé hodnoty náhodné proměnné, které mají stejné rozdělení pravděpodobnosti. **Kapacita obsluhy** je maximální počet požadavků, které mohou být obsluhovány současně. Pro  $m$  linek je kapacita rovna  $m$ . Další veličinou je **dostupnost obsluhy**, která podává údaje o dostupnosti. Pokud je obsluha volná, je systém plně dostupný (Dömeová, Beránková, 2004).

#### **3.3.3.5.        Markovské systémy**

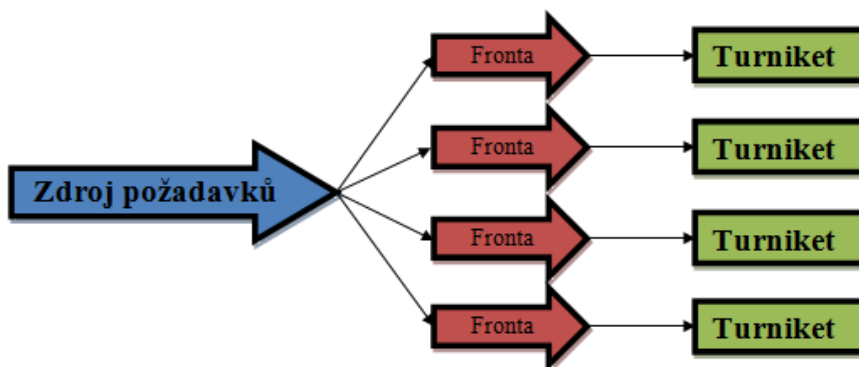
Pokud máme plně dostupný systém hromadné obsluhy s  $m \geq 1$  do něhož vstupuje elementární tok požadavků s intenzitou  $\lambda$ . Další předpoklad je exponenciální rozdělení s parametrem  $\mu$ . Lze dokázat, že se jedná o Markovský systém: v každém  $t$  je systém v určitém stavu, tj. ve frontě je určitý počet jednotek, obsazen určitý počet obslužných linek atp. (Dömeová, Beránková, 2004).

#### **3.3.3.6.        Intenzita provozu**

Tato hodnota udává současně pravděpodobnost, že požadavek, který do systému přijde, bude muset čekat na obsluhu ve frontě.

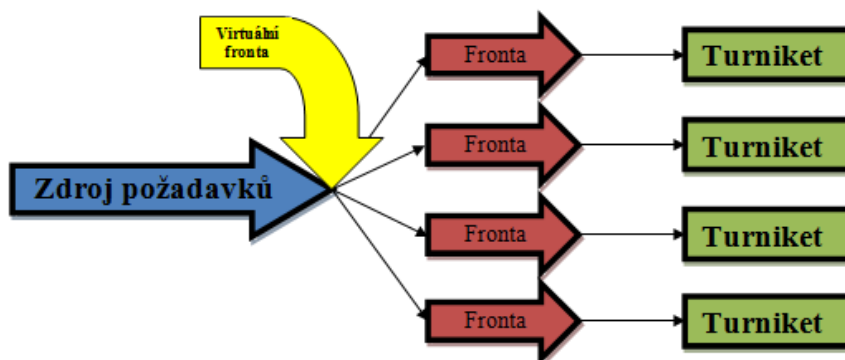
### 3.3.4. Virtuální fronty

Pojem virtuálních front se vyskytuje především v souvislosti s odbavením cestujících na letištích, respektive s bezpečnostní kontrolou před nástupem do letadla, avšak tento koncept je aplikovatelný na široké portfolio řešených úloh, včetně námi zpracovávaného odbavení návštěvníků hokejového utkání.



Obrázek 2: Klasické rozložení front (zdroj: de Lange et al, 2013)

Koncept virtuálních front předpokládá vytvoření mezistupně mezi zdrojem požadavků a vlastní frontou. Tento mezistupeň má plnit dvě základní role. První z nich je funkce sociální, přesně v souladu s měkkou systémovou metodologií. Toto si na zmíněném letištním příkladu můžeme představit jako zřízení prostoru pro cestující, kteří tak nemusí trávit čas přímo ve fyzické frontě. Druhou z nich je eliminace špiček v odbavovací kapacitě tak, že posune požadavky na odbavení na dobu kdy je k dispozici více odbavovacích kapacit



Obrázek 3: Rozložení front s využitím virtuální fronty (zdroj: de Lange et al, 2013)

## **4. Vlastní práce**

### **4.1. Popis modelové situace**

Předmětem této práce je návštěvnost sportovních a kulturně-společenských akcí TIPSPORT Arény v Praze a s tím úzce spojená optimalizace front. V dalších částech této práce bude věnována pozornost především návštěvnosti hokejových utkání domácího klubu HC Sparta Praha, které vykazují určitý trend v počtu návštěvnosti diváků. Charakteristické pro návštěvnost domácích hokejových utkání extraligových klubů jsou především aktuální výsledky klubu, postavení v extraligové tabulce, soupeř a také historie klubu, díky které má klub s jistou tradicí i svoje věrné fanoušky, kteří chodí na hokej vždy a za všech okolností. Nezanedbatelnou roli také jistě hraje bydliště fanoušků, které ovlivňuje, zda schopni a ochotni cestovat na domácí utkání svého oblíbeného klubu. Dalšími faktory, které mohou návštěvnost ovlivnit, jsou také průměrná cena vstupenek, která již několik sezon v podstatě stagnuje, nebo dochází jen k jejímu minimálnímu navýšení. To vše z důvodu snahy o udržení stávajícího počtu fanoušků a nalákání dalších na domácí utkání a tím i zvýšení vlastní prestiže. Což má právě spolu s návštěvností velký vliv na finanční stránku, protože velká návštěvnost láká velké sponzory, kteří jsou ochotni do klubové kasy přinést nemalé částky, které klub může investovat zpět do haly a její modernizace, což ve svém důsledku přinese spousty výhod a komfortu i pro fanoušky. Za tyto peníze se může hala vybavit např. ručními čtečkami pro autorizaci vstupenek na vchodech, kde nejsou zavedeny turnikety a zefektivnit tak celý proces rozšířením počtu vchodů. Typickým příkladem je vchod vyhrazený pro vozíčkáře a držitele průkazu ZTP, který na TIPSPORT Aréně při hokejových zápasech pražské Sparty využívají také členové fanklubu nesoucí na hokej např. chorea a bubny. Autorizace čtečkou potom výrazně zvyšuje efektivitu a snižuje čas potřebný pro odbavení jednoho fanouška, protože není třeba podávat tyto věci přes turnikety, případně turnikety úplně posouvat a opět je vracet zpět.

Snaha o predikci budoucího vývoje návštěvnosti domácích utkání HC Sparta Praha je velice obtížná, jelikož jak bylo zmíněno výše, je tato návštěvnost ovlivněna několika různými faktory a pokud se klubu nedaří, tak občasní návštěvníci mohou přestat chodit a využívat jiné prostředky jak zápasy vidět např. v televizi, nebo na internetu. Při odhadování počtu fanoušků, kteří navštíví utkání a určování počtu otevřených vchodů je tedy do jisté míry závislé i na těchto faktorech a současně je třeba využít i poznatky získané nejen z praxe, ale třeba i od soupeřova týmu. Je v podstatě pravidlem, že kluby na určité úrovni komunikují se svými fanoušky a získávají tak přehled o tom kolik fanoušků se na jaké venkovní zápas chystá vyjet.



Obrázek 4: TIPSport Aréna Praha (zdroj: here.com)

Na výše uvedeném obrázku je naznačeno, kde se před zápasem nejčastěji tvoří fronty. Tento stav, kdy se největší fronty vytváří u dvou vstupních bran je dán zejména dvěma přístupovými cestami, které návštěvníci nejčastěji využívají (tramvaj a metro). Z obrázku lze také vyčíst, že nejméně lidí se na zápasy dopravuje osobními automobily. Tito lidé využívají zejména středové vchody, které mají z parkoviště nejbližší.

Tato situace je zapříčiněna z části špatnou informovaností o počtu a umístění volných vchodů, které by mohli návštěvníci využít a z části psychologickým aspektem, kdy lidé, kteří přijdou později, se raději začlení do již vzniklé fronty, než aby aktivně vyhledávali volnější vchody. Tím podle jejich vnitřního pocitu eliminují riziko, že pokud by volný vchod nenašli, a tak by ve frontě v konečném důsledku strávili více času, než pokud a se zapojí do první fronty hned, protože by se ta fronta mohla prodloužit.

Díky výše zmíněným faktům je potřeba vymyslet zpracovat takový systém hromadné obsluhy, aby byly eliminovány hlavní problémové faktory, kterými zejména jsou:

#### Hlavní problémové faktory

- *2 hlavní koridory přístupu*
- *Špatná informovanost o volných vstupech*
- *Generování front*
- *Nedostatek času pro odbavení všech návštěvníků do začátku akce*

Stávající stav řešení modelů hromadné obsluhy ze strany HC Sparta Praha a vedení haly je dlouhodobě bez koncepce a vychází zejména z dlouhodobých zkušeností, které ale jsou ne vždy odpovídající situaci a jsou málo přizpůsobitelné nenadálým změnám v návštěvnosti, což v praxi občas přináší hodně problémů. Díky těmto situacím roste prostor pro možné stížnosti návštěvníků, které jsou nežádoucí z důvodu udržení určité úrovně zákaznické péče směrem k návštěvníkům zápasů.

Dalším typem akcí které se v TIPSPORT Aréně odehrávají jsou akce kulturně-společenské. Zde je situace ještě horší, protože počet otevřených vchodů a dobu jejich otevření určuje pořadatel kulturní akce a podle toho platí pronájem, což většinu pořadatelů nutí k otevření co nejmenšího počtu vchodů a riskují tak vznik front a tím způsobených problémů. Příklad kulturní akce bude uveden dále v práci.

V neposlední řadě je tento stav příčinou špatné optimalizace nákladů na odbavení, konkrétně naddimenzovaný či poddimenzovaný počet otevřených vchodů, které návštěvníci mohou využít. V současnosti ve většině případů vychází z faktu, že lepší je mít vchodů více a bez front, nežli vchodů otevřít méně a riskovat, že fronty budou vznikat. Což je jeden z mnoha možných pohledů na celou problematiku.

Tento princip fungování je ovšem z dlouhodobého hlediska neudržitelný a je tedy třeba zamyslet se nad problémem a navrhnout různé druhy opatření, které by dopomohli k optimalizaci, a alespoň částečně situaci vylepšily.

#### **4.2. Varianty řešení:**

Varianty řešení vycházejí z výše popsané situace

##### **Zachování stávajícího systému**

Tento přístup bude použit jako modelový pro sledování možných zlepšení na dalších simulovaných variantách.

##### **Použití poutače**

Pomocí tohoto řešení se budeme snažit o zkrácení celkové čekací doby zákazníků alespoň o 5 %.

##### **Tisk informace na vstupenku**

Pomocí tohoto řešení se budeme snažit o zkrácení celkové čekací doby zákazníků alespoň o 5 %.

##### **Interaktivní navigace**

Pomocí tohoto řešení se budeme snažit o zkrácení celkové čekací doby zákazníků alespoň o 10 %.

##### **Zavedení tzv. virtuálních front**

Pomocí tohoto řešení se budeme snažit o zkrácení celkové čekací doby zákazníků alespoň o 15 %.

Každá z těchto variant řešení bude posouzena za pomoci simulačních metod. Pouze pro první variantu řešení studovaného problému budou použity analytické a statistické metody pro následné posouzení zlepšení / zhoršení navrhovaných simulovaných variant.



## **Konceptuální model:**

Jaký podnikový systém modelujeme a kdo jsou jeho zákazníci?

Modeluje systém hromadné obsluhy pro odbavení návštěvníků domácích hokejových utkání HC Sparta Praha. Zákazníky zmíněného systému jsou všichni návštěvníci, kteří vyžadují obsluhu od odbavovacího systému.

Podle jakých kritérií je hodnocena efektivnost systému?

Kritéria pro hodnocení efektivnosti systému jsou *délka fronty, počet návštěvníků ve frontě, maximální čas strávený ve frontě a utilizace systému.*

Jak podrobná úroveň modelování je nutná?

Velké úroveň modelování u námi řešeného problému není nutná, postačí jen taková úroveň dostačující k zadání základních charakteristik systému.

Jaké objekty (entity), činnosti (aktivity) a zdroje modelovaný systém zahrnuje?

Objekt, který vstupuje do systému jsou návštěvníci, činnost, které modelovaný systém zahrnuje je obsluha, a zdroje jsou odbavovací turnikety.

Jaké požadavky vstupují do systému a jaká jsou pravidla pro jejich obsluhu?

Do systému vstupují pouze požadavky na obsluhu a jsou obsluhovány pomocí modelu FIFO, to znamená, že požadavek, který přijde do obsluhy jako první je také první obsloužen.

Jakým způsobem se přidělují omezené zdroje?

Zdroje jsou rozdělovány stejným principem jako v předchozím případě, to znamená ze požadavek, který přijde jako první tak mu bude přidělen zdroj.

### 4.3. Sběr dat

Sběr dat je nejdůležitější částí tvorby modelů hromadné obsluhy, základní získávání těchto dat můžeme rozdělit do tří základních částí, které jsou:

- *Empirie (dlouhodobá zkušenost)*
- *Turniketový systém HCS (přesná aktuální data o počtu a času požadavků)*
- *Pozorování (přímé pozorování odbavovacího procesu v TIPSPORT Aréně)*

Pro model hromadné obsluhy můžeme stanovit několik základních teorií hromadné obsluhy, které popisují sledovaný systém. Prvním z nich je zdroj požadavků, který je v našem případě otevřený, protože se návštěvníci po obslužení nevracejí zpět do systému. Je současně konečný, jelikož máme maximální kapacitu haly a díky tomu i prodaných vstupenek.

Vstupní tok požadavků k obsluze uvažujeme jako jednotlivý, z důvodu možnosti obsluhy pouze jednoho návštěvníka na jednom turniketu v jednu danou chvíli. Příchod požadavků je v našem případě smíšený, protože nelze říci, že vstupní tok je deterministický či náhodný. Čekací prostor pro návštěvníky je díky parametrům haly a přilehlých pozemků nenulový – systém neodmítá požadavky, které nemohou být hned obslouženy – a neomezený, protože areál dovoluje čekat v podstatě jakémukoliv počtu návštěvníků. Čekací prostor je beze ztrát, protože systém neodmítne žádný požadavek, který čeká na obslužení (uvažujeme-li situaci, kdy všichni návštěvníci mají platné vstupenky).

Frontový režim je u sledovaného systému FIFO, což znamená, že požadavek, který přijde do systému, jako první, bude také jako první obsloužen. Jinými slovy je nejdříve odbaven fanoušek, který přijde jako první.

Disciplína fronty je reálně částečně netrpělivá, většina návštěvníků není ochotná čekat neúměrně dlouhou dobu na obslužení. Pokud by byla fronta absolutně trpělivá, tak by například návštěvníci čekali na vpuštění do arény i po odehrání více než poloviny utkání, což vzhledem k charakteru akce není moc reálné, protože nikdo nechce zmeškat půlku zápasu a současně zaplatit za vstupenku plnou cenu.

Vezmeme li v úvahu čistě hypotetickou situaci, kdy lidé do vstupenek nevloží své peníze. Máme tedy dlouhou frontu a v ní lidi se vstupenkami, za které neplatili, pravděpodobně by došlo k situaci, že by právě tito lidé začali frontu opouštět jako první. Pokud by volné vstupenky měli všichni, tak by se fronta začala po určité době chovat systémem LIFO, což znamená, že by jako první odcházeli lidé, kteří přišli jako poslední a nestrávili by ve frontě žádný, nebo pouze krátký čas. Naopak ve frontě by zůstali ti, kteří tam již nějakou dobu stáli, protože do čekání investovali svůj čas.

Počet kanálů obsluhy je zcela určitě omezený, toto je dáno dispozicemi TIPSPORT Arény, a vícekánalový, protože zpracovává více požadavků najednou paralelně. Pro naše účely uvažujeme jednofázovou obsluhu, protože budeme slučovat dobu bezpečností kontroly s dobou obsluhy turniketem. Doba obsluhy je deterministická, což znamená, že je přesně určená a limitována technickými specifikacemi turniketů.

Níže uvedená tabulka udává základní informace o TIPSPORT Aréně, zvláště její maximální kapacitu pro hokejová utkání i kulturně-společenské akce.

<b>Rozměr kluziště</b>	<b>29 x 60 m</b>
Využitelná výška haly	14 m, světelný most 12 m, kostka 8 m
Lední hokej	10350 míst sezení (bez V.I.P. prostor), 1300 míst stání
Koncert	8000 míst (bez V.I.P. prostor, bez plochy)
Plocha k stání	až 5000 (podle umístění pódia)
Plocha k sezení	až 1600 (podle umístění pódia)
V.I.P. Prostory	1330 míst
<b>Celkem hokej :</b>	<b>12 980 míst</b>

Tabulka 4: Maximální využitelnost TIPSPORT Arény

### **Intenzita vstupů**

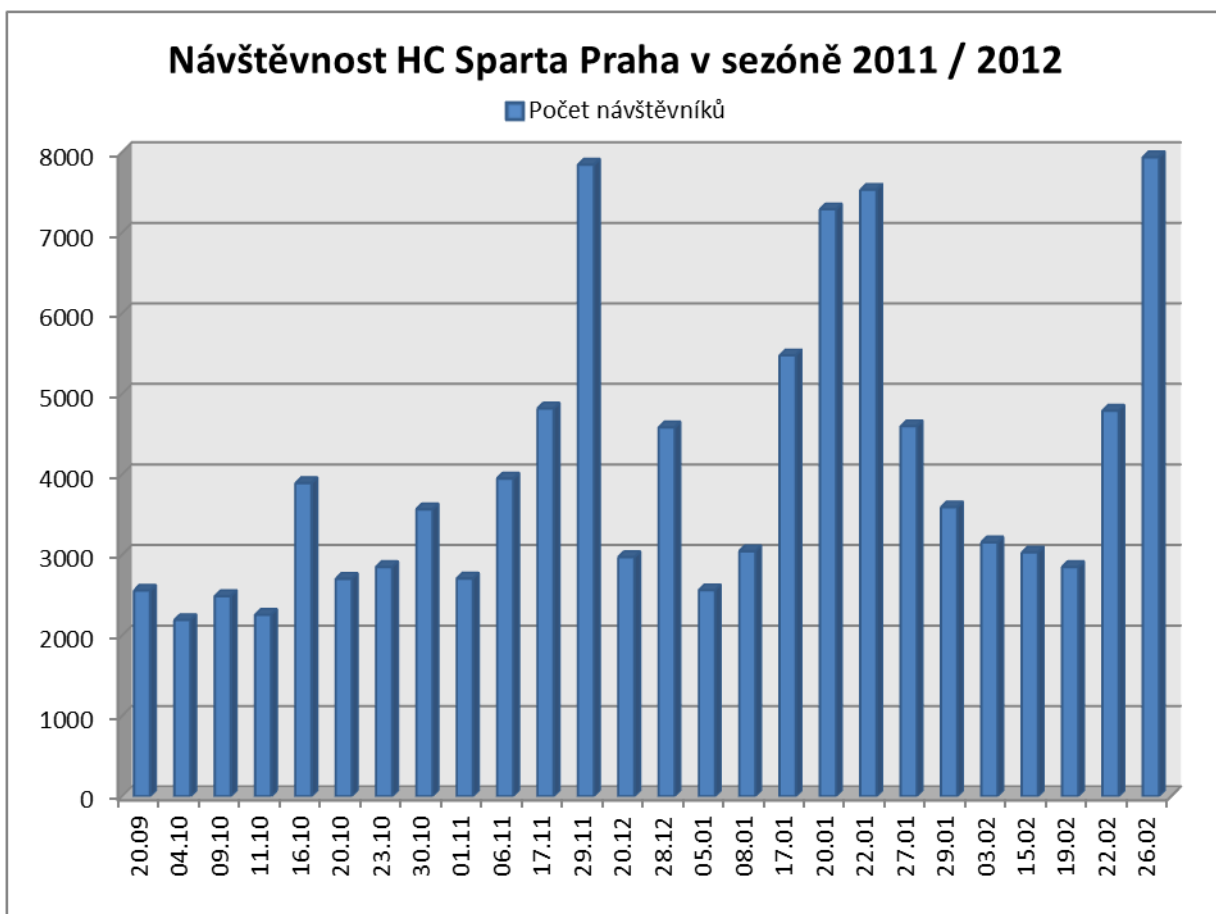
Intenzita vstupu se rovná počtu nově příchozích požadavků na vstupenku za jednu hodinu. V námi modelovaném systému budeme uvažovat intenzitu vstupů s Erlangovým rozdělením a parametry  $\alpha = 1$ ,  $r = 2$

### **Intenzita provozu**

Intenzita provozu se rovná poměru mezi intenzitou vstupů a intenzitou obsluhy, vyjadřuje vytíženost kanálů obsluhy. V našem modelu bohužel není možné jednoznačně určit intenzitu provozu, protože se pro různé sledované zápasy mění.

## Intenzita obsluhy

Intenzita obsluhy vyjadřuje čas potřebný k obslužení požadavku na obsluhu. V našem případě je tento čas složen ze dvou složek, což jsou bezpečnostní kontrola a vlastní průchod turniketem. Sledováním bylo naměřena průměrná doba obsluhy 8 vteřin. Což znamená, že jeden vchod (ostraha + turniket) je schopen obsloužit 7,5 návštěvníků za 1 minutu.



Graf 1: Návštěvnost HC Sparta Praha 2011/2012 (zdroj: HC Sparta Praha)

Datum	20.09	04.10	09.10	11.10	16.10	20.10	23.10	30.10	01.11	06.11	17.11	29.11	20.12
Počet návštěvníků	2555	2189	2485	2255	3891	2702	2848	3565	2705	3947	4817	7844	2971
Datum	28.12	05.01	08.01	17.01	20.01	22.01	27.01	29.01	03.02	15.02	19.02	22.02	26.02
Počet návštěvníků	4582	2560	3044	5476	7289	7533	4596	3590	3154	3029	2847	4789	7936

Tabulka 5: Návštěvnost HC Sparta Praha 2011/2012 (zdroj: HC Sparta Praha)

V předchozím grafu je zanesena návštěvnost hokejových utkání HC Sparta Praha v sezóně 2011 / 2012 v základní části TIPSPORT ELH. Z grafu zřetelně vyplývá, že návštěvnost jednotlivých utkání vykazuje značné výkyvy, které můžeme připsat několika faktorům, jako jsou například aktuální výsledky klubu, atraktivita soupeře, důležitost zápasu, či to jestli je ze zmíněného zápasu vysílán televizní přenos.

Z grafu lze dále vyčíst, že nejvyšší návštěvnost byla dosažena 29.11 2011 na zápase HC Sparta Praha - HC Slavia Praha, dále 22.1 2012 při utkání HC SPARTA - BÍLÍ TYGŘI LIBEREC a 26.2 2012 při utkání HC Sparta Praha - HC Slavia Praha což byl poslední zápas základní části a zároveň derby, které je divácky velice atraktivní.

### Vyřizování požadavků

Jedním z důležitých kroků bylo nutné zjistit, jak se vyřizují požadavky a jaké jsou na vyřizování požadavků časové požadavky. Tyto hodnoty byly zjišťovány pomocí pozorování na místě, protože bylo nutné podchytit různé odchylky od času vyřizování požadavku na obsluhu. Tyto požadavky na obsluhu byly klasifikovány do třech druhů:

- *rychlé (doba obsluhy průměrně 2 vteřiny)*
- *středně (dlouhé (doba obsluhy průměrně 8 vteřin)*
- *dlouhé (doba obsluhy průměrně 16 vteřin)*

Do doby vyřizování požadavků je nutné zahrnout dva časy, které v celkovém čase hrají roli. Je to bezpečnostní kontrola, které je nejvýznamnějším náhodným vlivem v celém procesu vyřizování požadavků a dále pak vlastní čas odbavení pomocí turniketů. Výrobce uvádí minimální dobu pro vyřízení požadavku 0.5 vteřiny, což bylo pozorováním upraveno na průměrnou hodnotu 3 vteřiny. Velkou úlohu v tomto hraje také, jestli je návštěvník již zvyklý používat odbavovací turniket nebo vyžaduje asistenci, která celou dobu odbavení prodlužuje.

Výsledné hodnoty doby obsluhy a jejich procentuální výskyt jsou uvedeny v tabulce níže.

	Doba vyřízení požadavku (s)	Procentuální výskyt
Krátké	2	18,30%
Střední	8	68,10%
Dlouhé	16	13,60%

**Tabulka 6: Výskyt požadavků (zdroj: autor)**

### Tvorba simulačního modelu

Tvorba simulačního modelu je další fází simulačního procesu. Simulační model je již přesně zapsán model konceptuální a již ho lze dále matematicky zpracovávat. Simulační modelování bylo prováděno pomocí grafické nadstavby programu *Java Modeling Tool*, který slouží nejen k modelování hromadné obsluhy. Níže zmíněný obrázek je obrázkem simulovaného modelu, který byl zpracováván v grafické nadstavbě programu *Java Modeling Tool*.

### Validace a verifikace modelu

Jelikož je modelovaný systém systémem reálným, tak byla validace a verifikace provedena porovnáním získaných dat z odbavovacího systému a z výsledků simulace. V tabulce níže jsou uvedeny data z reálného systému současně s daty ze systému simulovaného.

Není samozřejmě možné očekávat přesnou shodu mezi oběma systémy, což vyplývá z podstaty simulačních modelů, které pracují s náhodnými čísly, a dále také není vždy možné přesně definovat jednotlivé parametry, které hrají také velkou roli.

Z výsledků můžeme říci, že simulovaný model vykazuje takovou shodu, která může být brána jako důkaz, že systém byl definován dobře a že odpovídá reálnému systému.

#### 4.4. Empirický přístup

Empirický přístup je jeden z 3 možných přístupů k řešení problému, staví na základě předchozí zkušenosti a je tak v některých ohledech více než platným řešením. Tento přístup se nejčastěji používá u opakujících se akcí, které se ať již z hlediska složitosti či naopak jednoduchosti nevyplatí řešit pomocí komplexních modelů teorie hromadné obsluhy.

V našem konkrétním případě byla tato metoda uplatňována v dřívějších sezonách (< 2006/2007), kdy nebylo možné předpovědět možnou účast fanoušků, ale vycházelo se z historických zkušeností.

Před sezónou 2007/2008 se HC Sparta rozhodla pro instalaci turniketů na vstupy do haly. V tuto chvíli se musela začít uplatňovat úplně jiná pravidla pro otevírání vchodů pro návštěvníky a změnit celkový přístup k této problematice. Běžným postupem doposud bylo otevření 5 vstupů na jižní straně haly hodinu před začátkem zápasu. Pod pojmem autorizace si v tomto případě můžeme představit natrhávání vstupenek před vpuštěním fanouška do haly. Celá tato procedura trvala jen velmi krátkou dobu a nebylo tedy nutné zamýšlet se nad nějakým systémem, který by to celé urychlil. Po instalaci turniketů se ovšem potřebná doba pro odbavení jednoho fanouška několikanásobně zvýšila a v souvislosti s tím nastal problém vznikání front na vstupech. Důvodů bylo hned několik, prodloužení doby potřebné pro odbavení, technická limitace každého turniketu a to uvažujeme situaci, kdy nedojde k žádnému technickému výpadku sítě apod., v neposlední řadě napomáhal i příchod fanoušků přesně „na čas“.

Bylo tedy nutné analyzovat celou situaci a navrhnout nějaká opatření. V praxi to znamenalo zhruba to, že se začal sledovat pohyb fanoušků po cestě směrem na stadion a na základě tohoto pozorování vznikala první teorie. Bylo nutné optimalizovat místa, na kterých se vchody otevírají. Protože převážná část lidí přijížděla na zápas městskou hromadnou dopravou, metrem na stanici metra C – Nádraží Holešovice (směrem z východu) a tramvají na stanici Výstaviště (ze západní strany). Naopak nejméně lidí se do dějiště zápasu dopravovalo osobními automobily. Bylo jasné, že je třeba posílit krajní části haly, kde vznikaly největší fronty. Podpůrným opatřením se staly velké navigační cedule, které odkazovaly i na ostatní otevřené vstupy. Od tohoto se brzy odstoupilo, protože drtivá většina přichozích fanoušků je buď vůbec neregistrovala, nebo ignorovala a po té, co byly dvakrát ukradeny, bylo od tohoto systému upuštěno.

Takto nastavený systém se zdál být ideálním, ale čas a především prestižnější zápasy ukázaly, že je třeba ještě minimálně jedné korekce. Velkým problémem se staly poklady, které jsou situovány na jižní straně haly hned vedle vchodů na západní tribunu. Veškerá upozornění k využívání vstupů na správných stranách haly vyšly naprázdno a všichni využívali vchody, které byly od pokladen nejbližší. Tím došlo opět k přetížení vchodů na západní tribunu, protože k nim mířili nejen fanoušci jdoucí od tramvajové zastávky, ale i ostatní fanoušci od pokladen, kteří by jinak využili volné vchody na východní tribunu. Jenomže problém byl v tom, že všechny vchody, které bylo u pokladen možno otevřít, byly otevřeny. Na řadu tedy přišly vchody, které jsou přímo na západní straně haly, tedy za rohem od pokladen. Ačkoliv se tomuto řešení moc velké šance vzhled k nabytým zkušenostem nedávaly, tak skutečnost byla, že vchody ze západní strany začali využívat především fanoušci jdoucí přímo z tramvajové zastávky, nebo z výstaviště, kteří již měli zakoupené vstupenky z předprodeje. Tím se tedy uvolnili vchody vedle pokladen a všichni fanoušci se tedy do haly dostali v rámci možností včas a bez dlouhých front.

Trochu opačným způsobem se postupovalo při otevírání vchodů na koncerty. Nikdo nechtěl, aby vznikla situace, kdy budou lidé stát v dlouhých frontách a nestihnou začátek koncertu. Otevřít všechny vchody (bylo možno jich otevřít 19) otevřít nešly, protože to finančně náročné a promotér nebyl ochoten to financovat, na druhé straně ani hala nechtěla nést náklady s tím spojené. První kulturní akci s použitím odbavovacího systému bylo také nutné za pochodu upravovat, protože neexistovala předchozí relevantní zkušenost a odhady z návštěvnosti hokejových utkání se ukázaly býti liché, zejména z důvodu jiné mentality návštěvníků.

Zkušenosti nasbírané z přípravných zápasů a ze zápasů hokejové Extraligy se tedy zúročily a daly základ pro řešení problémů při koncertech konaných v budoucnosti.

Lze tedy říci, že všechna proběhlá pozorování a průzkumy byly nejcennějšími zdroji při tvorbě teorií a samotného systému.



## 4.5. Simulace

### 4.5.1. Simulace 1

#### Použití poutače

Pomocí tohoto řešení se budeme snažit o zkrácení celkové čekací doby zákazníků alespoň o 5 %.

Principem této metody je využití poutačů, které budou návštěvníky informovat o otevřených vchodech, které jsou pro ně připraveny. Tyto poutače byly umístěny na hlavních příchodových cest, to znamená ve směru od metra a ve směru od tramvaje.

Účelem těchto poutačů bylo rozmělnění front blízko dvou hlavních cest, kde se tvořili největší fronty.

Tato metoda již byla v minulosti použita, ještě před zavedení moderního elektronického odbavovacího systému.

Díky spolupráci s klubem HC Sparta Praha jsme tuto situaci simulovali při čtyřech domácích utkáních, která byla předem vybrána dle exponovanosti návštěvnosti.

- *Přípravné zápasy*
- *Derby (HC Sparta Praha – HC Slavia Praha)*
- *Play-OFF*
- *Běžné ligové utkání s celkem ve spodní části tabulky*

### Přípravné zápasy

Přípravné zápasy, jak z názvu vyplývá, jsou zápasy, které se odehrávají před vlastním zahájením sezóny a slouží klubům k nabrání zápasové kondice, tudíž v nich nejde ani tak o výsledky a prestiž. Tomu odpovídá i návštěvnost těchto utkání, která je v řádu stovek, proto se simulační situace s použitím poutače, který by fanoušky informoval o počtu a umístění otevřených vchodů minul účinkem. Dalším faktorem, který tomu napomohl, byl fakt, že většina návštěvníků těchto zápasů jsou držitelé permanentních vstupenek a jako takoví jsou znalý místních poměrů a ví, kdy na zápas přijít. Proto byly na tento zápas otevřeny pouze dva vchody směrem od metra na východní tribunu a všichni věděli, kam mají jít.

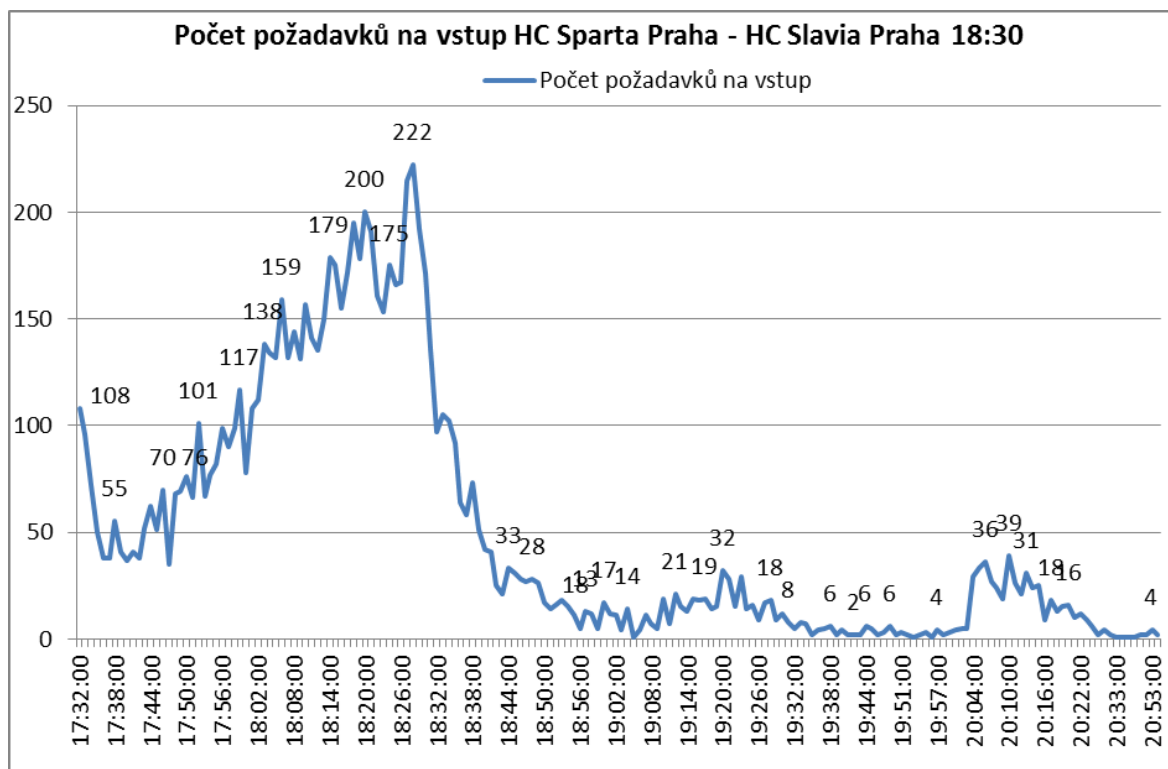
V době konání těchto přípravných utkání nevznikaly žádné, respektive zanedbatelné fronty, které není nutné řešit systémovým přístupem. Poutače v tomto případě plnily úplně jinou funkci, než bylo původně zamýšleno. Navigovaly příchozí fanoušky k otevřeným vchodům, aby je nemuseli hledat a neztráceli tak zbytečně čas.

### Derby

Derby mezi HC Sparta Praha a HC Slavia Praha bývá jeden z nejexponovanějších zápasů celé sezóny. Účast na těchto utkáních výrazně překračuje průměrnou návštěvnost ostatních zápasů hokejové Extraligy. V návaznosti na vysokou návštěvnost a rivalitu fanouškovských táborů je třeba mít na mysli, že celkové fronty ovlivní i činnost pořadatelské služby, která musí každého fanouška před tím, než projde do haly důkladně prohledat, aby u sebe neměl zakázané předměty, kterými by mohl narušit bezproblémový průběh utkání.

Níže uvedený graf ukazuje průběh požadavků na obsluhu v čase. Nejvíce těchto požadavků bylo zaznamenáno v čase 18:20 až 18:30. Z čehož lze vyvozovat závěry, že velká část fanoušků požaduje obsluhu až těsně před začátkem zápasu, což klade velké nároky na pořadatelskou službu a odbavovací systém, pokud chceme zachovat jednu z premis měkkého přístupu, to znamená, že řešení má být i sociálně šetrné. Ve zkratce můžeme říct, že zákazníky nechceme nechat čekat moc dlouho.

Tento graf reprezentuje počet požadavků na vstup po zavedení poutačů. V porovnání s ostatními společnými zápasy lze říci, že si je struktura grafu ve všech případech velice podobná a dává jasně najevo, že je český fanoušek nepoučitelný, protože velká část jich chodí vždy na poslední chvíli. Tím v podstatě uměle vytváří fronty v čase začátku zápasu minus přibližně 20 minut, které opadají se začátkem zápasu. Jediným rozdílem mezi tímto zápasem a ostatními společnými zápasy je čas, kdy fronty opadnou. Z grafu lze vyčíst, že pět minut po začátku jsou již všichni, kteří čekali frontu uvnitř haly. Tento rozdíl lze přičíst právě navigačním tabulím, které nově příchozí fanoušky upozorňovaly na možnost využití všech otevřených vchodů. Tím pádem se fanoušci rovnoměrně rozprostřeli a nenastala situace známá z historie, a to že u některých vchodů byly dlouhé fronty a naopak u jiných bylo téměř prázdno.



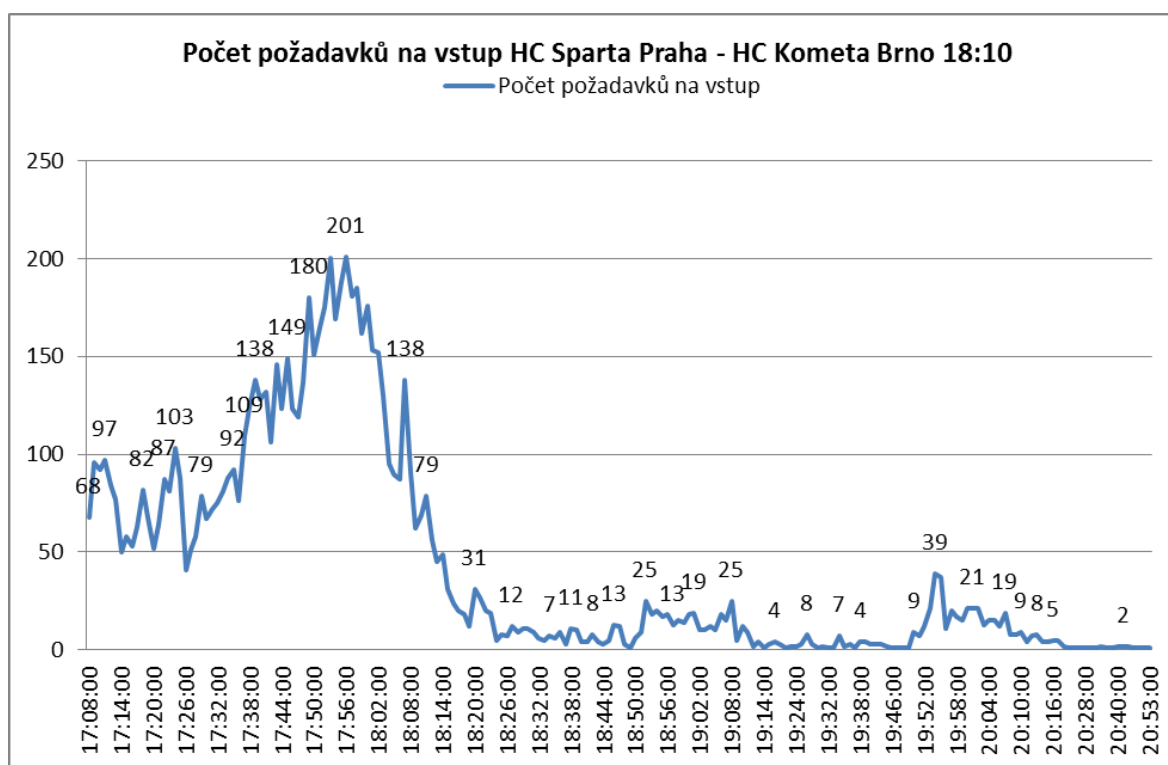
**Graf 2: HC Sparta Praha - HC Slavia Praha (zdroj: HC Sparta Praha)**

### Play OFF

PLAY OFF je podobný případ, jako bylo zmíněno výše, pokud se domácí klub dostane do PLAY-OFF, tak se zvýší i počet návštěvníků těchto utkání, kteří kladou vyšší požadavky na obsluhu. Dalším výrazným faktorem, který vstupuje do hry je i počet fanoušků týmu hostů. Tento počet vstupuje výrazně nejen do statistik návštěvnosti, ale také klade novou dosud neřešenou otázku „Jak takový počet fanoušků dostat nejen do haly, ale i do jim určených sektorů?“. Na „normálních“ zápasech je pro ně vyhrazen pouze sektor hostů za brankou a fanoušci většinou přijedou najednou autobusem, nebo vlakem v doprovodu policie a jsou do haly vpuštěni vchodem na severní straně mimo všechny ostatní vchody.

Na PLAY OFF jsou pro fanoušky hostů vyhrazeny i další sektory kolem jejich „kotle“ ne všichni jedou najednou. Proto byli pomocí informačních cedulí navigováni na pro ně otevřené vchody na západní straně stadionu, aby nedošlo ke zbytečným potyčkám na hlavních vchodech, ke kterým by mohlo značně přispět i čekání ve frontě.

Na následujícím grafu je znázorněn počet požadavků na obsluhu pro zápas HC Sparta Praha a HC Kometa Brno. Tento graf reprezentuje počet požadavků na vstup po zavedení poutačů. Z grafu je jasně patrné, že počet požadavků na obsluhu je nejvyšší právě 20 minut před oficiálním začátkem zápasu a dále pak postupně klesá. Celková návštěvnost na tento zápas byla 8311 návštěvníků, což je výrazně nad průměrem sezóny.



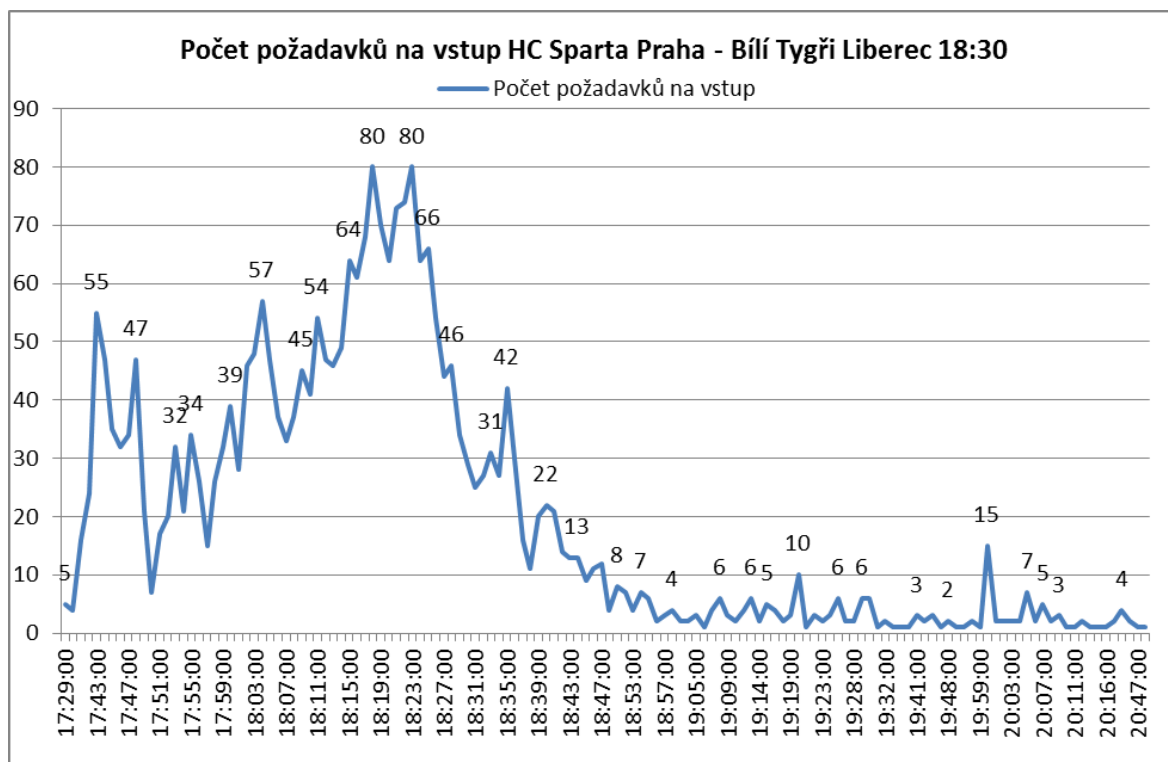
Graf 3: HC Sparta Praha – HC Kometa Brno (zdroj: HC Sparta Praha)

### Běžné ligové utkání s celkem ve spodní části tabulky.

Těchto zápasů se účastní primárně držitelé permanentních vstupenek a pravidelní návštěvníci. Najde se jen málo dalších lidí, kteří přijdou na takto obyčejné a pro ně mnohdy nezajímavé zápasy. S tímto je třeba počítat, protože fanoušci, kteří vědí, jak vše na stadionu chodí a co se po nich pro bezproblémový průchod požaduje, vzniká tedy předpoklad, že by vše mělo fungovat bez problémů a zbytečných komplikací.

Níže zobrazený graf reprezentuje počet požadavků na vstup po zavedení poutačů a potvrzuje původní premisu, že vše mělo proběhnout hladce. Z grafu lze také vyčíst, že největší nápor byl pět minut před začátkem zápasu, kdy většina fanoušků přišla na poslední chvíli. Nicméně všechny požadavky na odbavení byly uspokojeny téměř okamžitě, nevznikly tedy žádné fronty. Celé toto opatření tedy v tomto případě můžeme hodnotit jako úspěšné. Těchto zápasů se účastní primárně držitelé permanentních vstupenek a pravidelní návštěvníci. Najde se jen málo dalších lidí, kteří přijdou na takto obyčejné a pro ně mnohdy nezajímavé zápasy. S tímto je třeba počítat, protože fanoušci, kteří vědí, jak vše na stadionu chodí a co se po nich pro bezproblémový průchod požaduje, vzniká tedy předpoklad, že by vše mělo fungovat bez problémů a zbytečných komplikací.

Níže zobrazený graf reprezentuje počet požadavků na vstup po zavedení poutačů a potvrzuje původní premisu, že vše mělo proběhnout hladce. Z grafu lze také vyčíst, že největší nápor byl pět minut před začátkem zápasu, kdy většina fanoušků přišla na poslední chvíli. Nicméně všechny požadavky na odbavení byly uspokojeny téměř okamžitě, nevznikly tedy žádné fronty. Celé toto opatření tedy v tomto případě můžeme hodnotit jako úspěšné.



Graf 4: Počet požadavků na vstup HC Sparta Praha – Bílý Tygři Liberec (zdroj: HC Sparta Praha)

## 4.5.2. Simulace 2

### Tisk informace na vstupenku

Pomocí tohoto řešení se budeme snažit o zkrácení celkové čekací doby zákazníků alespoň o 10 %.

Tato metoda simulace spočívá v tisku informace o použití nejvhodnějšího vchodu do haly na vstupenku. Aréna je rozdělena na nakolik od sebe neoddělených a průchozích sekcí podle světových stran, kdy každá skupina sektorů je přiřazena určitým skupinám vchodů. Tento model se například používá pro domácí utkání AC Sparta Praha, kde bohužel do současné doby není zaveden automatizovaný odbavovací systém, a dále také například pro domácí utkání HC Energie Karlovy Vary v KV Aréně, kde nám posloužil jako inspirace, protože prostředí, ve kterém je využíván, je našemu případu nejbližší.

Simulace byla opět provedena na následujících typech zápasů, stejně, jako simulace první.

- *Přípravné zápasy*
- *Derby (HC Sparta Praha – HC Slavia Praha)*
- *Play-OFF*
- *Běžné ligové utkání s celkem ve spodní části tabulky*

Simulace 3

### **Zavedení tzv. virtuálních front**

Pomocí tohoto řešení se budeme snažit o zkrácení celkové čekací doby zákazníků alespoň o 15 %.

V praxi by to znamenalo umístit před halu stánky s občerstvením, kde by si příchozí mohli dát párek, či pivo, nebo nějaké reklamní stánky, jako např. fanshop. Tím by v podstatě došlo k rozdělení lidí do dvou front, na odbavení a na občerstvení, či zmíněný fanshop. Podobný systém využívá fotbalový klub Bohemians 1905, a.s. na svém mateřském stadionu v Ďolíčku v pražských Vršovicích. Po roční přestávce způsobené nuceným přesunem do Synot Tip Arény se opět vrátili a bylo jasné, že bude třeba řešit problém na české poměry nevídaný a to vysokou návštěvnost. Problém se rozhodli řešit právě cestou virtuální fronty, kdy před hlavní vchod umístili několik stánků s občerstvením a malý fanshop se šálami a dresy. V době front u vchodu si fanoušek zajde koupit párek a v klidu počká, až je na vchodech trochu volněji a o poté se teprve zařadí do fronty na odbavení.

Tento model simulace předpokládá využití odbavovacích kapacit, kdy o ně není tak velký zájem. Pomocí této změny můžeme docílit toho, že zákazníci stráví méně času ve frontě reálné. To znamená, že část poptávky po zdrojích je přesunuto na dobu, kdy je tato poptávka nízká, což ve výsledku sníží celkovou čekací dobu návštěvníků ve frontě.

Primárním účelem zavádění virtuálních front je redistribuce poptávky na dobu mimo špičku, kdy je tato poptávka nízká.



### **4.5.3. Simulace 4**

#### **Interaktivní navigace**

Pomocí tohoto řešení se budeme snažit o zkrácení celkové čekací doby zákazníků alespoň o 20 %.

Tato metoda simulace předpokládá vybudování informačních panelů nad vchody do arény, které budou návštěvníky informovat o aktuálně otevřených vchodech a jejich vytíženosti. Tohoto zobrazení bude docíleno zpětnou vazbou s odbavovacím systémem a v jeho softwarové části bude probíhat výpočet vytíženosti jednotlivých turniketů podle počtu a časů jednotlivých požadavků a podle maximální propustnosti turniketu.

## 4.6. Nákladová analýza

### Simulace 1

Její zavedení do praxe by s sebou neslo náklady spojené s výrobou a montáží navigačních cedulí. Vzhledem k tomu, že klub dlouhodobě preferuje spolupráci s partnery, kteří jsou ochotni přistoupit při tvorbě ceny k částečnému barteru za permanentní vstupenky a VIP vstupenky, které mohou nabídnout dále svým zaměstnancům jako určitý benefit a podpořit tak jejich motivaci a pracovní výkon. Je výsledná cena ponížena právě o dohodnutou částku v závislosti na počtu takto poskytnutých vstupenek. Konkrétní ceny v tomto případě jsou vidět z následující tabulky (ceny jsou počítány bez DPH).

Cena jedné cedule	Potřebný počet	Poskytnutá sleva na barter	Výsledná cena
500 Kč	20	200 Kč	6 000 Kč

Tabulka 7: Tabulka nákladů na simulaci 1 (zdroj: autor)

Výsledná spočítaná cena sice není nulová, ale v návaznosti na celosezónní rozpočet klubu ho nemůže nijak ovlivnit.

### Simulace 2

Předpokládané náklady na zavedení této teorie jsou brány jako zanedbatelné, protože se jedná pouze o tisk krátké informace na vstupenku. Při propočtu spotřebované barvy na jednu vstupenku, která je ve své podstatě v řádu jednotek zanedbatelná, se nějaké zvýšení nákladů projeví až při velmi velkém počtu, řádově v desetitisících. Navíc v situaci, že klub HC Sparta Praha čerpá spotřební materiál do tiskáren barterem od společnosti Dell.

### Simulace 3

Náklady na zavedení tohoto opatření jsou počítány jako nulové, protože umístění stánků před halu nestojí nic, kromě času zaměstnanců, kteří je přemístí. Prodávají v nich, jsou zaplacení ze vzniklých tržeb. Navíc by se jednalo nejspíše o dohodu mezi vedením HC Sparta Praha a cateringovou společností, která tyto stánky v prostorách haly provozuje. Takže by ani v případě, že by stánky nebyly ziskové, nedošlo k přenosu takto vzniklých nákladů na samotný klub.

#### Simulace 4

Náklady na zavedení této simulace jsou s ohledem na technickou stránku nejvyšší. Celková cena je jak je vidět v tabulce tvořena nejen poměrně vysokou cenou na pořízení samotných cedulí, ale ze 44,4% je tvořena cenou SW (ceny jsou počítány bez DPH). Ten je potřeba napsat na míru, protože je potřeba, aby byl plně kompatibilní s použitými turnikety a nedocházelo tak k chybám, které by snižovaly efektivitu tohoto opatření.

Cena jedné cedule	Potřebný počet	Poskytnutá sleva na barter	Potřebný SW	Výsledná cena
3 500 Kč	10	1 000 Kč	20 000 Kč	45 000 Kč

**Tabulka 8: Tabulka nákladů na simulaci 4 (zdroj: autor)**

V tomto případě je celková cena poměrně vysoká a je otázkou, zda by tato investice byla s přihlédnutím ke všem aspektům správnou volbou a klubu se vyplatila.

## 5. Zhodnocení výsledků a doporučení

Níže uvedená tabulka přehledně zobrazuje jednotlivé vlastnosti sledovaných simulačních modelů. Dále je pokračováno se slovním popisem jednotlivých simulačních modelů a jejich zhodnocení. Hodnotícím kritériem pro posouzení zlepšení je průměrná doba požadavku strávená ve frontě.

	Průměrný počet jednotek v systému	Průměrný počet jednotek ve frontě	Průměrná doba strávená požadavku v systému	Průměrná doba strávená požadavku ve frontě	Počet použitých turniketů	Utilizace	Zlepšení
	L	LQ	T	TQ	Tr		
Modelovaný systém	18,02	17,85	8,33	8,33	11	0.86	X
Simulace 1	17,43	17,17	8,16	8,16	12	0.87	2%
Simulace 2	11,90	11,78	5,49	5,49	16	0.90	12%
Simulace 3	16,55	16,36	7,65	7,65	12	0.89	8%
Simulace 4	12,96	12,84	5,98	5,98	14	0.92	16%

Tabulka 9: Vlastnosti modelovaných systému (zdroj: autor)

### Simulace 1

Po analýze výsledků z jednotlivých případů jsme usoudili, že navigační cedule mohou být určitým přínosem, ale zdaleka nedosahují 5% zlepšení, které jsme si kladly za cíl. A to zejména z psychologických důvodů, protože velká část lidí místo samostatného myšlení bezmyšlenkovitě následuje ostatní. Stačí tedy, aby se v jednom místě v určité chvíli vytvořila fronta a tato fronta se až do vyčerpání všech požadavků na odbavení bude neustále obnovovat lidmi, kteří se do ní bezmyšlenkovitě postaví namísto toho, aby využili některého z buď méně využitých, nebo úplně nevyužitých vchodů.

Největšího účinku nabývají v případě, že s jejich pomocí směřujeme fanoušky hostujícího týmu ke vchodům, které jsou pro ně speciálně připraveny. Hlavním důvodem, proč poutače působí především na hostující fanoušky je, že neznají stadion a jeho okolí jako většina fanoušků domácího celku. To je tedy to, proč poutače nejen sledují, ale i vnímají a řídí se podle nich.

Naopak bezcennými a naprosto zbytečnými se stávají na málo exponovaných zápasech, kdy fanoušci přesně vědí, kam mají jít, aby se vyhnuli zbytečnému zdržování se ve frontách.

### Simulace 2

Po přezkoumání výsledků této simulace jsme zjistili, že zvolený způsob tisku vchodů na vstupenky je mnohem účinnější, než předchozí systém navigačních cedulí a bez problému dosahuje stanoveného cíle zlepšení o 10%.

Každý fanoušek, který si vstupenku zakoupí, na ní má informaci, který vchod má pro vstup do haly použít a vzhledem k tomu, že si většina z nich zkontroluje, kde sedí, tak vidí i vchody, které mají použít. Což zajistí nejen optimální rozložení lidí ve frontách, ale samotným fanouškům to maximálně zefektivní cestu k jejich místům. Protože nebudou muset procházet celou halou z důvodu, že do haly vstoupili na západní straně a vstupenky by měli do sektoru na východní tribuně.

### Simulace 3

Na základě výsledků simulace je vidět, že toto řešení určité zlepšení přináší, ale nedosahuje stanoveného cíle 15%. Spíše se pohybuje okolo 8%, což je zhruba polovina předpokládaného vlivu, ale i to je vzhledem k náročnosti řešení dobrý výsledek, protože musíme mít na paměti, že takto „vysunuté stánky“ budou dosahovat určitých tržeb, tedy nebude problém s tím, že by byly zátěží v rozpočtu klubu.

### Simulace 4

Pro simulaci 4 máme výborné výsledky simulace, zlepšení oproti reálnému systému o 16 %. Nicméně je tato varianta řešení nepřijatelná hlavně z důvodu své vysoké pořizovací ceny a v poměru k tomu nízkému zlepšení. Tato varianta by přicházela v úvahu jen pokud by se majitel arény, což je HI. m. Praha rozhodl pro kompletní rekonstrukci, v rámci ní by zmíněná varianta byla již pravděpodobně zpracována, jak vypovídají studie na toto téma již zpracované.

## 6. Závěr

Cílem této práce bylo na praktických příkladech demonstrovat využití modelů teorie hromadné obsluhy při řešení simulačních metod a pomocí těchto metod navrhnout konkrétní řešení pro námi studovaný případ. Pro naplnění tohoto cíle byla zvolena optimalizace front pro hokejová utkání HC Sparta Praha v TIPSPORT Aréně. Klub HC Sparta Praha nebyl zvolen náhodou, ale zcela záměrně a to hned z několika důvodů. Jedním z těchto důvodů je dlouhodobá spolupráce firmy IRSnet CZ, ve které pracuji s tímto hokejovým klubem. V souvislosti s tím mám v klubu spoustu kontaktů, které mi byly užitečné při zpracovávání této práce. Tito lidé mi poskytli velice cenné postřehy z praxe a zároveň mi dovolili nahlédnout do interních materiálů, ke kterým bych se za normálních okolností nedostal.

V práci jsou navrženy čtyři způsoby možného zlepšení a pro každý z nich je vypočtený simulační model, který nám může pomoci s rozhodováním o případném nasazení či setrvání při stávajícím systému.

Většina simulačních modelů nenaplnila očekávané parametry zlepšení a například simulace 4 se ukázala být nákladově mimo akceptovatelné pásmo, protože při uvažování sociálního aspektu tohoto řešení nepřináší mnoho benefitů.

Jako nejvýhodnější a nejsnáze implementovatelnou simulaci jsme zvolili simulaci číslo 2, která se týká tisku informace o vhodném vchodu k použití na vstupenku. Náklady na toto řešení jsou prakticky nulové a přináší výrazné zlepšení.

Tato práce sloužila ke zhodnocení možných simulačních modelů, které by mohli zlepšit rychlost odbavení a tím přispět k optimalizaci front, které se vytvářejí prakticky před každým hokejovým utkáním v TIPSPORT Aréně.

## 7. Literatura

ADAN, I, RESING, J. Queueing Theory [online]. [2002] [cit. 2011-01-17]. Dostupný z WWW: <<http://www.win.tue.nl/~iadan/queueing.pdf>>.

DANĚK, J., Využití simulace jako inženýrského nástroje během životního cyklu výrobků a procesů [on line]. 2002 [cit. 2013-02-15]. Dostupné z: <<http://www2.humusoft.cz/www/pub/witness/ppt/inovacia2002/sld001.htm>>.

DE LANGE, Robert, Ilya SAMOILOVICH a Bo VAN DER RHEE. Virtual queuing at airport security lanes. European Journal of Operational Research. Překlad John Bester. 2013, roč. 225, č. 1, s. 153-165. ISSN 03772217. DOI: 10.1016/j.ejor.2012.09.025. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377221712006893>

DÖMEOVÁ, L., BERÁNKOVÁ, M.: Systémy hromadné obsluhy I, ČZU PEF, Praha, 2004, ISBN 80-213-1193-2.

FISHBURN, Peter C. Utility theory for decision making. USA, 1970. SBN 471-260060-6.

GEMINO, Andrew a Yair WAND. A framework for empirical evaluation of conceptual modeling techniques. Requirements Engineering. 2004, roč. 9, č. 4, s. 248-260. ISSN 0947-3602. DOI: 10.1007/s00766-004-0204-6. Dostupné z:

<http://link.springer.com/10.1007/s00766-004-0204-6> Gilbert, N., Troitzsch, K. G., *Simulation for the Social Scientist*. second edition, Berkshire: Open University Press, 2005

JABLONSKÝ, J.: Operační výzkum, kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování, Profesional Publishing, Praha, ISBN 978-80-86946-44-3

JINGJING, Xu a Liu DONG. Queuing Models to Improve Port Terminal Handling Service. *Systems Engineering Procedia*. 2012, roč. 4, s. 345-351. ISSN 22113819. DOI: 10.1016/j.sepro.2011.11.085. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2211381911002384>

KAMOON, Faouzi. Performance analysis of a non-preemptive priority queuing system subjected to a correlated Markovian interruption process. *Computer & Operations Research*. 2008, č. 35.

MACEK, J, MAINZOVÁ , E. Základní metody operační analýzy. 1995. ISBN 55-077-95. Dlouhý, M., Fábry, J., Kuncová, M., Hladík, T., *Simulace podnikových procesů.*, Brno: Computer Press., 2007

MITAL, K.M. Queuing analysis for outpatient and inpatient services: a case study. *Management Decision*. 2010, roč. 48, č. 3, s. 419-439. ISSN 0025-1747. DOI: 10.1108/00251741011037783. Dostupné z: <http://www.emeraldinsight.com/10.1108/00251741011037783>

NARENS, Joseph A. Virtual Queuing: Could it be a reality for airports?. *Industrial Engineer*. 2004, roč. 11, č. 36.

QUIRKE, Fiona a CHIPULU. Simulating Queuing Systems: A test of parameter change. *Acta technica corviniensis: Bulletin of Engineering*. 2012, č. 1. ISSN 2067-3809.

SHADISH, William R, Thomas D COOK a Donald T CAMPBELL. Experimental and quasi-experimental designs for generalized causal inference. Boston: Houghton Mifflin, 2001, xxi, 623 p. ISBN 978-0395615560



WILER, Jennifer L., Richard T. GRIFFEY a Tava OLSEN. Review of Modeling Approaches for Emergency Department Patient Flow and Crowding Research. *Academic Emergency Medicine*. 2011, roč. 18, č. 12, s. 1371-1379. ISSN 10696563. DOI: 10.1111/j.1553-2712.2011.01135.x. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1111/j.1553-2712.2011.01135.x>