

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA EXPERIMENTÁLNÍ FYZIKY

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Sbírka řešených úloh z elektřiny  
a magnetismu modelovaných v programu  
Wolfram SystemModeler



Vypracovala:	<b>Hana Pecúchová</b>
Studijní program:	B1701 Fyzika
Studijní obor:	1701R003 Fyzika
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí bakalářské práce:	Mgr. Jan Říha, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	srpen 2016

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem předloženou bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Jana Říhy, Ph.D., a že jsem použila zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 8. srpna 2016

.....

Hana Pecůchová

## **Poděkování**

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce Mgr. Janu Říhovi, Ph.D. za odborné vedení, trpělivost a ochotu, kterou mi v průběhu zpracování bakalářské práce věnoval. Děkuji také Mgr. Davidu Smrčkovi za pomoc při práci s Wolfram SystemModelerem.

# Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Hana Pecůchová
Název práce	Sbírka řešených úloh z elektřiny a magnetismu modelovaných v programu Wolfram SystemModeler
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	Mgr. Jan Říha, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2016
Abstrakt	Práce se zabývá ukázkovými úlohami na elektrické obvody stejnosměrného a střídavého proudu. Cílem práce je seznámit čtenáře s řešením ukázkových úloh a prací ve Wolfram SystemModeleru v oblasti elektřiny. Zaměřila jsem se především na úlohy, které je možné v daném programu simulovat, tedy obvody řešené pomocí Kirchhoffových zákonů a RLC obvody. Jednotlivé úlohy obsahují zadání, schéma, klasické řešení a řešení pomocí programu Wolfram SystemModeler, které je dostupné na CD.
Klíčová slova	elektřina, magnetismus, Wolfram SystemModeler, úloha, paralelní, sériový, obvod, rezistor, cívka, kondenzátor, proud, odpor, napětí, zdroj, voltmetr, ampérmetr, kirchhoffovy zákony, uzel, ...
Počet stran	48
Počet příloh	1
Jazyk	český

# Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Hana Pecůchová
Title	Some examples of solved tasks on electricity and magnetism simulated in the Wolfram SystemModeler
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	Mgr. Jan Říha, Ph.D.
The year of presentation	2016
Abstract	The thesis consists of sample exercises on electrical circuits DC and AC currents. The aim of the thesis is to introduce to the reader the solution of sample problems and how to use the Wolfram SystemModeler when dealing with problems on electricity. I focused on problems that can be simulated in this particular program, thus circuits solved using Kirchhoff's laws and RLC circuits. Each exercise consists of the assignment, scheme, classical solution and solution using Wolfram SystemModeler, which is available on CD.
Keywords	electricity, magnetism, Wolfram SystemModeler, task, parallel, serial, circuit, resistor, inductor, capacitor, current, resistance, voltage, source, voltmeter, ammeter, Kirchhoff's laws, node, ...
Number of pages	48
Number of appendices	1
Language	czech

# Obsah

Úvod	8
<b>1 Wolfram SystemModeler</b>	<b>9</b>
1.1 Stručný návod . . . . .	9
<b>2 Základní teoretické znalosti</b>	<b>12</b>
2.1 Spojování rezistorů . . . . .	12
2.1.1 Sériové zapojení . . . . .	12
2.1.2 Paralelní zapojení . . . . .	13
2.2 Kirchhoffovy zákony (Kz) . . . . .	14
2.3 Obvody střídavého proudu . . . . .	15
2.3.1 Obvod s rezistorem . . . . .	15
2.3.2 Obvod s cívkou . . . . .	17
2.3.3 Obvod s kondenzátorem . . . . .	18
2.3.4 RLC obvody . . . . .	19
<b>3 Řešené úlohy</b>	<b>24</b>
3.1 Zásady řešení fyzikálních úloh . . . . .	24
3.2 Elektrické sítě řešené pomocí Kz . . . . .	26
Úloha 1 . . . . .	26
Úloha 2 . . . . .	30
3.3 RLC obvody . . . . .	35
Úloha 3 . . . . .	35
Úloha 4 . . . . .	38
Úloha 5 . . . . .	40
Úloha 6 . . . . .	43

**Závěr**

**47**

**Literatura**

**48**

# Úvod

Bakalářská práce Sbíрка řešených úloh z elektřiny a magnetismu modelovaných v programu Wolfram SystemModeler se zabývá výpočtem fyzikálních úloh středoškolské úrovně na elektrické obvody. Fyzikální úlohy zde však nejsou řešeny pouze klasicky, ale k jejich řešení je využít i program Wolfram SystemModeler.

Každý víme jaké to je, když nám někdo řekne, nebo ukáže, něco nového a zaujme nás to. Je obecně známo, že většina žáků/studentů nemá v oblibě přírodovědné obory. Přesně v těchto oborech je nezbytné podpořit zájem žáků/studentů něčím novým a ukázat jim i jiný přístup k výuce. V dnešní době počítačů lze tradiční výuku fyziky zpestřit různými počítačovými programy. Jednou z těchto možností je právě program Wolfram SystemModeler. Cílem práce je tedy seznámit čtenáře s prací ve Wolfram SystemModeleru a řešením ukázkových úloh z oblasti elektřiny.

V České republice tento program není zdaleka tak rozšířen jako ve Spojených státech amerických. Program Wolfram SystemModeler využívá v České republice již sedm vysokých škol, ale jen dvě střední školy. Jedním z cílů práce je také rozšířit povědomí o daném programu právě mezi zástupce středních škol.

Práce je rozčleněna do tří kapitol. Nejprve se čtenář seznámí s obecným postupem práce ve Wolfram SystemModeleru v oblasti elektřiny. Dále je uvedena fyzikální teorie, kterou čtenář využije k řešení fyzikálních úloh. Poslední část obsahuje již řešené úlohy na elektrické obvody, a také postup práce v programu Wolfram SystemModeler k dané úloze. K práci je také přiloženo CD s modely elektrických obvodů a grafů. Na CD jsou dostupné soubory jak pro vlastníky zmíněného programu, tak i soubory pro ty, kteří tento program nevlastní.



# Kapitola 1

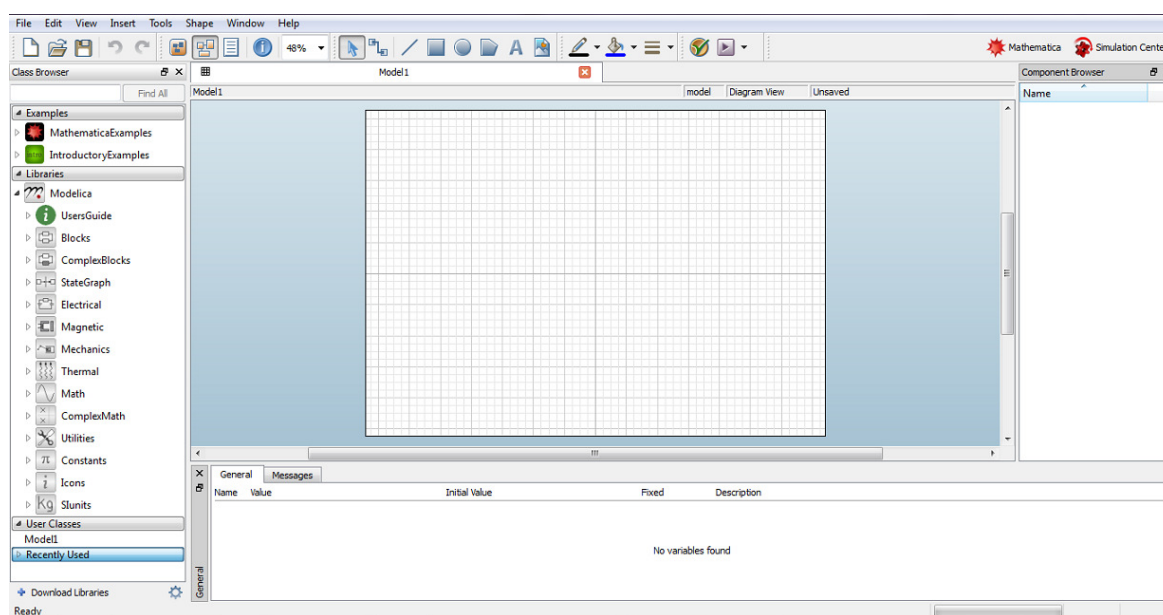
## Wolfram SystemModeler

Wolfram SystemModeler (WSM) je kompletní modelovací a simulační nástroj, který plně podporuje standardní modelovací jazyk Modelica. Je dokonale propojen s Wolfram Mathematicou pro maximální integrované modelování, simulaci a analýzu pracovních postupů. [1] Wolfram Mathematica je jedním z nejpopulárnějších počítačových algebraických programů. Využívá se v různých vědeckých, technických i ekonomických oborech, také na středních a vysokých školách. [2]

### 1.1 Stručný návod

Výchozím bodem WSM je *Model Center*, viz obr. 1.1. Po otevření se uprostřed zobrazí hlavní okno se čtverečkovaným polem, dole okno s názvem **General** a **Messages**, napravo okno s názvem **Component Browser** a nalevo okno s názvem **Class Browser**, kde jsou záložky s balíčky obsahujícími jednotlivé komponenty. Nejprve rozbalíme záložku *Libraries*, poté balíček *Modelica*. Tento balíček se skládá z několika dalších balíčků. V našem případě si vybereme balíček *Electrical* a následně balíček *Analog*. Zde si rozbalíme balíčky *Basic*, *Sensors* a *Sources*, v nichž se nachází jednotlivé komponenty, které využijeme k sestavení obvodů. V balíčku *Basic* nalezneme různé součástky, jako je například rezistor, cívka a kondenzátor. Balíček *Sensors* obsahuje voltmetr, neboli *VoltageSensor*, a ampérmetr, neboli *CurrentSensor*. V posledním námi využitém balíčku *Sources* jsou umístěny zdroje napětí, či proudu. Sestavování obvodu začneme tak, že do čtverečkovaného pole umístíme námi vybrané komponenty, a poté je propojíme. Propojíme je tak, že v panelu nástrojů v horní části hlavního okna vybereme tlačítko *Connection Line Tool* a následně můžeme propojovat jednotlivé komponenty.

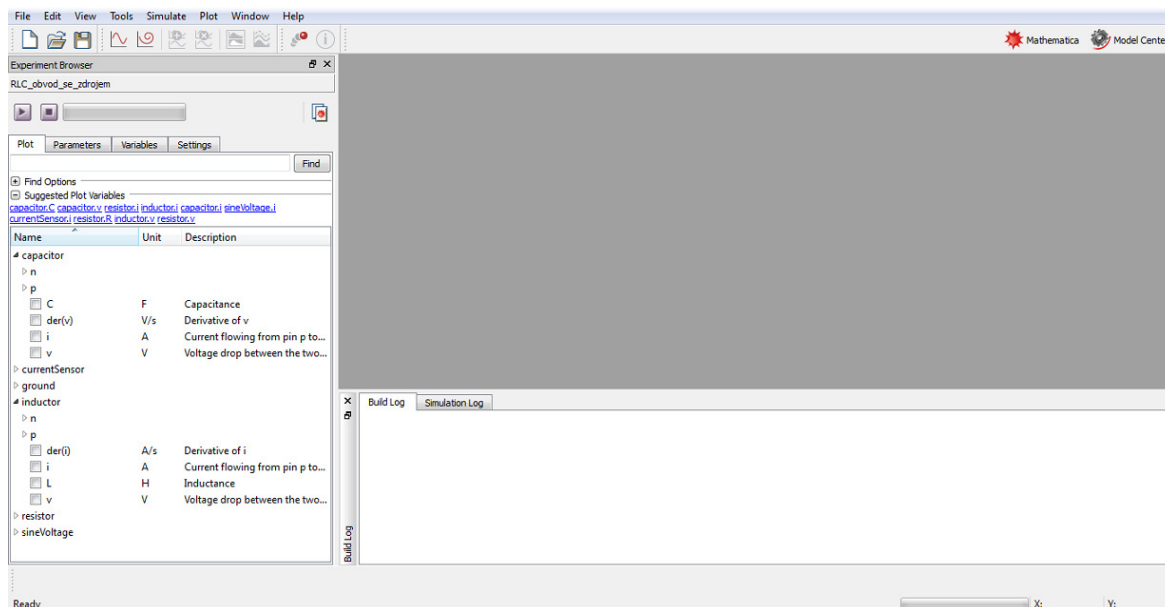
Po sestavení obvodu nastavíme parametry použitých komponentů v okně **General**. Zadáváme-li některý z parametrů pomocí desetinného čísla, musíme namísto desetinné čárky aplikovat desetinou tečku. Pro přejmenování použitých komponentů lze využít okno **Component Browser**. Nakonec provedeme kontrolu pomocí nástroje *Validate Class*, jenž se nachází v horním řádku v záložce *Tools* nebo mezi tlačítky nástrojů v horní části hlavního okna. Neproběhne-li kontrola úspěšně, je nutné překontrolovat zadané parametry či sestavený obvod. V některých případech je třeba obvod uzemnit. Horní řádek má i záložku *View*, kde se dá vypnout čtverečkové pole a zůstane nám pouze bílé pole bez čar.



Obrázek 1.1: Model Center

Konečným bodem WSM je *Simulation Center*, viz. obr. 1.2. Vstoupíme do něj pomocí nástroje *Simulate Class*, umístěného stejně jako *Validate Class*. Po otevření se zobrazí hlavní okno, kde bude později vykreslen graf, pod kterým se nachází okno **Build Log** a **Simulation Log**. Nalevo se zobrazí okno pod názvem **Experiment Browser**. Graf se v hlavním okně objeví až po vybrání veličin, jenž chceme vykreslit. V okně **Experiment Browser** jsou různé záložky. Záložka *Settings* slouží k nastavení například časového intervalu či jiných možností. V záložce *Parameters* a *Variables* se dají přenastavit parametry některých komponentů. Záložka *Plot* obsahuje jednotlivé komponenty obvodu, z nichž většina má kladný (značeno písmenem p) a záporný (značeno písmenem n) pól. Vybereme-li komponent, je automaticky rozbalen kladný pól, v němž si

zvolíme veličiny, které chceme vykreslit do grafu v hlavním okně. V horní části hlavního okna se opět nachází tlačítka nástrojů.



Obrázek 1.2: Simulation Center

Menu, tlačítka nástrojů a okna v *Simulation Center*, tak i v *Model Center* závisí na nainstalované verzi. Jakou verzi máte, se dozvíte v záložce *Help*, jež je umístěna v horním řádku, a poté vyberete *About SystemModeler*. Tento stručný návod se vztahuje k verzi 4.0.1.

# Kapitola 2

## Základní teoretické znalosti

K řešení daných úloh je zapotřebí znát alespoň pár základních informací z oblasti elektřiny a magnetismu. Tato oblast je velmi rozsáhlá, uvedeme si zde však jen několik následujících témat.

### 2.1 Spojování rezistorů

Rezistor je elektrotechnická součástka, vytvářející určitý odpor v elektrickém obvodu. Odpor se značí písmenem  $R$  a k jeho výpočtu lze využít Ohmova zákona, jež udává vztah mezi napětím  $U$  a proudem  $I$ . Odpor  $R$  pak je

$$R = \frac{U}{I}, \quad (2.1)$$

jehož jednotkou je ohm ( $\Omega$ ).

Spojením většího počtu zdrojů, rezistorů, kondenzátorů a dalších součástí dostaneme složitější obvody, kterým se říká elektrické sítě. Předpokladem k řešení složitějších elektrických sítí je znalost základních elektrických obvodů, a to sériového a paralelního zapojení rezistorů. Snažíme se zde najít jediný rezistor, kterým nahradíme sériovou, či paralelní kombinaci rezistorů, tak aby nedošlo ke změně proudu v obvodu. [3, 4]

#### 2.1.1 Sériové zapojení

U sériového zapojení se jednotlivé rezistory řadí za sebe, čili výstupní svorka je spojená se vstupní svorkou dalšího rezistoru, viz obr. 2.1. Při tomto zapojení prochází všemi

rezistory stejný proud  $I$  a celkové napětí  $U$  je rovno součtu napětí na jednotlivých rezistorech, tedy

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = (R_1 + R_2 + \dots + R_n)I = R_S I. \quad (2.2)$$

Jednotkou napětí je volt (V).

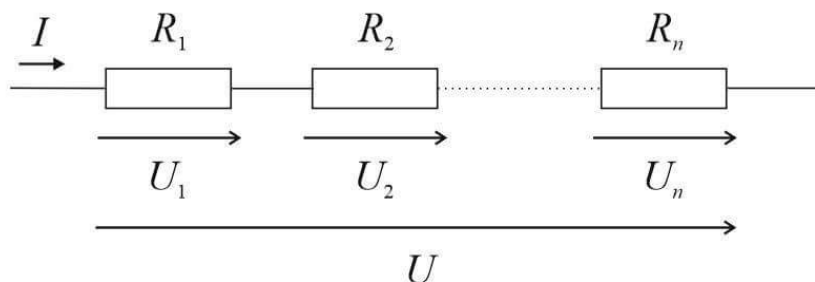
Z rovnice (2.2) je patrné, že pro celkový odpor sériového zapojení  $R_S$  platí

$$R_S = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (2.3)$$

To znamená, že napětí se při sériově spojených rezistorech rozdělí v poměru

$$U : U_1 : U_2 : \dots : U_n = R : R_1 : R_2 : \dots : R_n. \quad (2.4)$$

Shrneme-li sériové zapojení do jedné věty, tak bude znít: *Celkový odpor sériově zapojených rezistorů je roven součtu odporů jednotlivých rezistorů.* [3, 5]



Obrázek 2.1: Sériové zapojení rezistorů

### 2.1.2 Paralelní zapojení

U paralelního zapojení jsou rezistory vedle sebe, čili vstupní svorky jsou spojeny do jednoho uzlu a výstupní svorky do druhého uzlu, viz obr. 2.2. Při tomto zapojení je na všech rezistorech stejné napětí  $U$  a celkový proud  $I$  je roven součtu proudů procházejících jednotlivými rezistory, tedy

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = U \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) = \frac{U}{R_P}. \quad (2.5)$$

Jednotkou proudu je ampér (A).

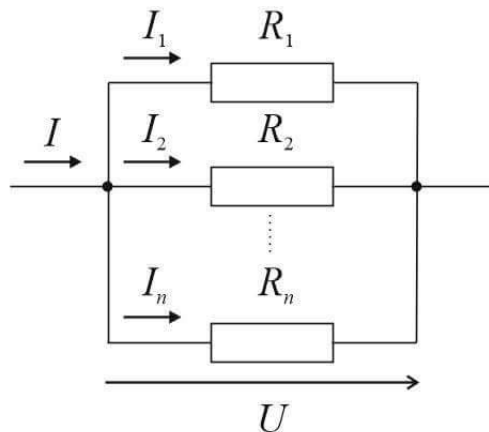
Z rovnice (2.5) je patrné, že pro celkový odpor paralelního zapojení  $R_P$  a celkovou vodivost  $G$ , což je převrácená hodnota odporu, platí

$$G = \frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = G_1 + G_2 + \dots + G_n. \quad (2.6)$$

Proud se při paralelně spojených rezistorech rozdělí v poměru

$$I : I_1 : I_2 : \dots : I_n = G : G_1 : G_2 : \dots : G_n = \frac{1}{R_P} : \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \dots : \frac{1}{R_n}. \quad (2.7)$$

Závěrem tedy je, že: *Celková vodivost paralelně zapojených rezistorů je určena součtem vodivostí jednotlivých rezistorů.* [3, 5]



Obrázek 2.2: Paralelní zapojení rezistorů

## 2.2 Kirchhoffovy zákony (Kz)

Jak již bylo řečeno v předcházejícím textu, složitější elektrické obvody se nazývají elektrické sítě. Místo styku nejméně tří vodičů je označováno jako uzel. Větev je vodivé spojení dvou uzlů obvodu. Abychom tyto obvody mohli vyřešit, je třeba sestavit rovnice na základě Kirchhoffových zákonů. Omezíme se zde pouze na obvody, kterými protéká stejnosměrný proud, což je proud, který je neproměnný v čase. [5, 6]

### 1. Kirchhoffův zákon

Jedná se o uzlové pravidlo, které zní: *Součet proudů vstupujících do uzlu se rovná součtu proudů z uzlu vystupujících.* Čili algebraický součet proudů v uzlu je nulový. Pravidlo se nazývá též Kirchhoffův zákon o proudech. Zapišeme jej pomocí vztahu

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (2.8)$$

Je zde nutné dbát na správnost znamének. Proudý směřující do uzlu mají kladná znaménka, kdežto proudý z uzlu vystupující naopak záporná znaménka. Jedná se o důsledek zákona zachování elektrického náboje. Náboj v uzlu nevzniká ani se neztrácí. [5, 6]

## 2. Kirchhoffův zákon

Zákon je založen na smyčkovém pravidle, které zní: *Algebraický součet změn potenciálu při průchodu libovolnou uzavřenou smyčkou je nulový.* Čili součet úbytků napětí na rezistorech je v uzavřené smyčce stejný jako součet elektromotorických napětí zdrojů. Toto pravidlo lze také označit jako Kirchhoffův zákon o napětí, který zapíšeme jako

$$\sum_{k=1}^n R_k I_k = \sum_{j=1}^m U_{ej}. \quad (2.9)$$

Zde je rovněž nutné dbát na správnost znamének. [5, 6]

Jak správně postupovat při použití Kirchhoffových zákonů si uvedeme až při řešení ukázkových úloh v následující kapitole.

## 2.3 Obvody střídavého proudu

Máme-li elektrický obvod se zdrojem střídavého napětí, prochází obvodem střídavý proud. Jak střídavé napětí, tak i proud se mění v čase harmonicky s určitou frekvencí  $f$ . Například v evropské rozvodové síti je využívána frekvence o velikosti 50 Hz. Změny v obvodu lze sledovat pomocí osciloskopu, či počítače.

Střídavý obvod je tvořen různými prvky. Základními prvky střídavého obvodu je rezistor s odporem  $R$ , cívka s indukčností  $L$  a kondenzátor s kapacitou  $C$ . Připojením jednoho z těchto prvků ke zdroji střídavého napětí vznikne jednoduchý obvod střídavého proudu. Je-li v obvodu více různých prvků vznikne složený obvod střídavého proudu. [5, 6]

### 2.3.1 Obvod s rezistorem

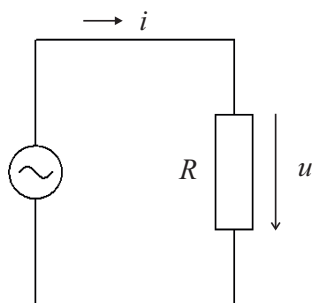
Na obr. 2.3 je zobrazen obvod s rezistorem o odporu  $R$ , který je připojen ke zdroji střídavého napětí s úhlovou frekvencí  $\omega$

$$u = U_m \sin \omega t. \quad (2.10)$$

Vzájemný vztah úhlové frekvence  $\omega$  a frekvence  $f$  je vyjádřen vztahem  $\omega = 2\pi f$ . Jednotkou frekvence  $f$  je hertz (Hz). Obvodem prochází střídavý proud  $i$ , který lze vyjádřit z definice odporu vztahem

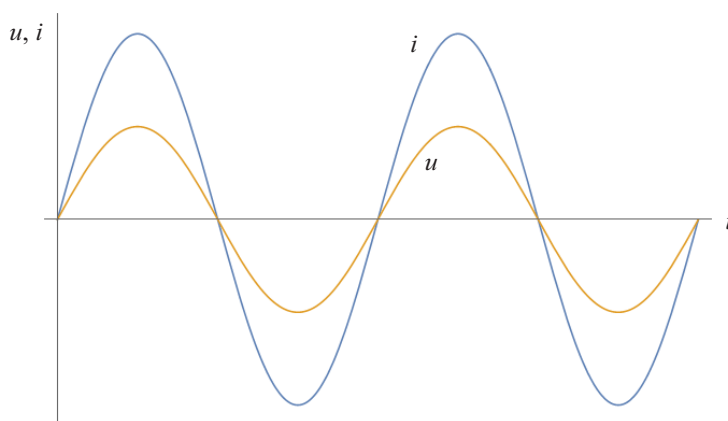
$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t, \quad (2.11)$$

kde  $I_m$  je amplituda střídavého proudu. Odpor  $R$  v obvodu střídavého proudu se nazývá rezistance. Jednotkou je ohm ( $\Omega$ ).



Obrázek 2.3: Obvod střídavého proudu s rezistorem

Na obr. 2.4 vidíme, že střídavé napětí  $u$  i proud  $i$  dosahují hodnoty rovné amplitudy ve stejný okamžik a nevzniká mezi nimi ani fázový rozdíl, tzn. že časový průběh napětí má stejnou fázi jako časový průběh proudu. Rezistance tedy nemá vliv na fázový posun. [5, 6, 7]

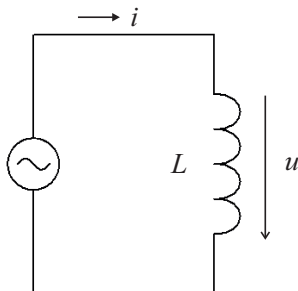


Obrázek 2.4: Časový průběh napětí a proudu v obvodu s rezistorem



### 2.3.2 Obvod s cívkou

Obvod sestavený z cívky o indukčnosti  $L$  a zdroje střídavého napětí je na obr. 2.5. Prochází jím střídavý proud, který v cívce vytváří měnící se magnetické pole. Indukuje se v ní tedy napětí, jež má opačnou polaritu než zdroj napětí. To má za následek, že napětí předbíhá proud o  $\pi/2$ , čili napětí je posunuto o čtvrtinu periody.



Obrázek 2.5: Obvod střídavého proudu s cívkou

Vinutí cívky má jistý odpor, který se označuje jako induktance. Ta je dána vztahem

$$X_L = \frac{U_m}{I_m} = \omega L. \quad (2.12)$$

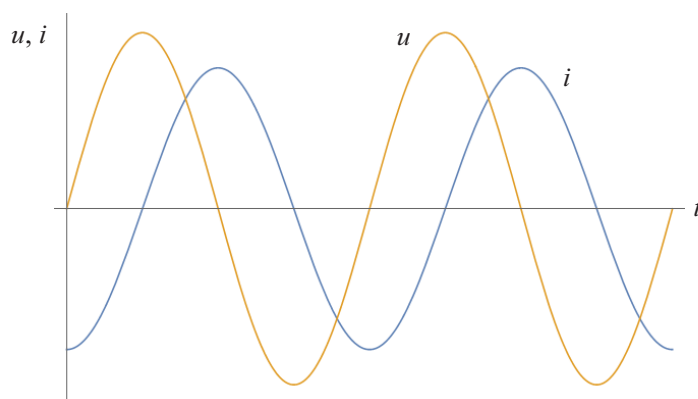
Má stejnou jednotku jako rezistance a tou je ohm ( $\Omega$ ). Z obr. 2.6 je patrné, že je-li časový průběh napětí

$$u = U_m \sin \omega t,$$

pak pro okamžitou hodnotu střídavého proudu platí

$$i = I_m \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -I_m \cos \omega t. \quad (2.13)$$

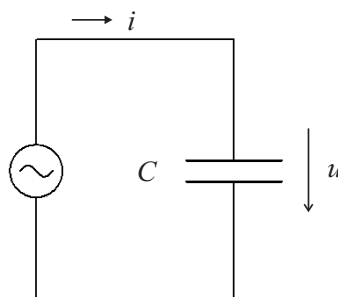
Vidíme, že indukčnost cívky způsobuje fázový posun. Proud je zpožděn za napětím.  
[5, 6, 7]



Obrázek 2.6: Časový průběh napětí a proudu v obvodu s cívkou

### 2.3.3 Obvod s kondenzátorem

Připojíme-li kondenzátor o kapacitě  $C$  ke zdroji střídavého napětí, jak je tomu na obr. 2.7, pak se kondenzátor periodicky nabíjí a vybíjí. Mezi deskami kondenzátoru dochází ke střídavé polarizaci v důsledku změny intenzity elektrického pole.



Obrázek 2.7: Obvod střídavého proudu s kondenzátorem

I kondenzátor klade střídavému proudu určitý odpor, který je označován jako kapacitance. Je dána vztahem

$$X_C = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{\omega C}. \quad (2.14)$$

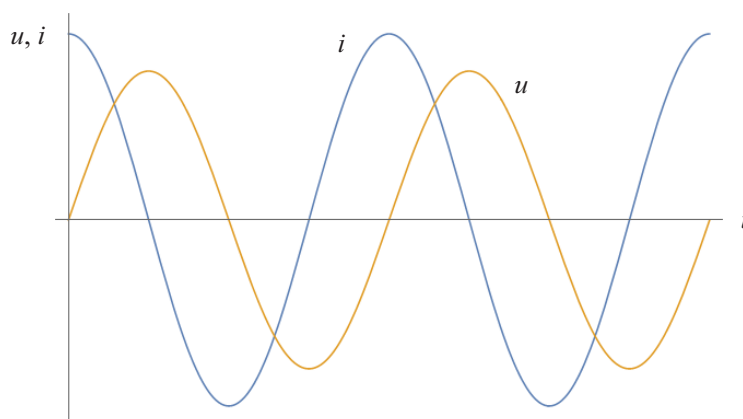
Jednotkou je stejně jako u rezistance či induktance ohm ( $\Omega$ ). Obr. 2.8 ukazuje, že má-li napětí časový průběh

$$u = U_m \sin \omega t,$$

pak proud procházející kondenzátorem můžeme vyjádřit jako

$$i = I_m \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I_m \cos \omega t. \quad (2.15)$$

Kapacita kondenzátoru způsobuje fázový posun mezi napětím a proudem o čtvrtinu periody, tedy o  $\pi/2$ . Vidíme, že proud předbíhá napětí. [5, 6, 7]



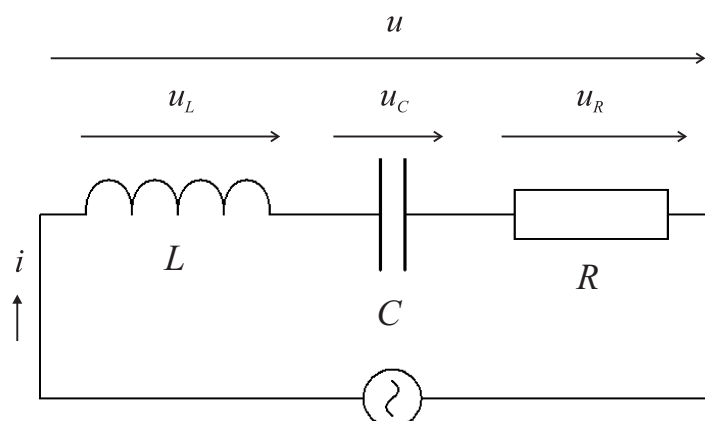
Obrázek 2.8: Časový průběh napětí a proudu v obvodu s kondenzátorem

### 2.3.4 RLC obvody

Jedná se o obvody složené z rezistoru, cívky a kondenzátoru. Tyto prvky mohou být pospojovány sériově, paralelně, či dokonce kombinovaně.

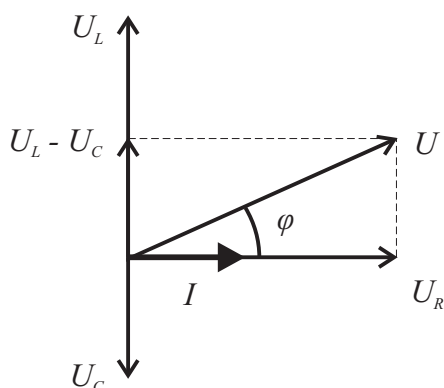
#### Sériový RLC obvod

Na obr. 2.9 vidíme sériový RLC obvod, který je připojen ke zdroji střídavého napětí. Při sériovém zapojení protéká všemi prvky obvodu, tedy rezistorem, cívkou a kondenzátorem, stejný proud  $i$ . Napětí se liší velikostí i fází.



Obrázek 2.9: Sériový RLC obvod

Využijeme-li poznatků, které jsme si uvedli u jednoduchých střídavých obvodů, pak víme, že napětí na rezistoru je ve fázi s proudem, na cívce napětí předbíhá proud o  $\pi/2$  a na kondenzátoru se napětí zpožďuje za proudem o  $\pi/2$ . Tyto poznatky jsou zakresleny pomocí fázorů ve fázovém diagramu na obr. 2.10. Fázory  $U_C$  a  $U_L$  mají opačné směry, proto je možné je nahradit pouze jediným fázorem  $U_L - U_C$ .



Obrázek 2.10: Fázový diagram sériového zapojení RLC

K výpočtu výsledného napětí využijeme fázového diagramu. Použitím Pythagorovy věty dostáváme pro fázor napětí

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}. \quad (2.16)$$

Dosadíme-li za amplitudy napětí  $U_R = IR$ ,  $U_L = IL\omega$  a  $U_C = I/(\omega C)$  a vytkneme proud  $I$ , pak výsledné napětí je

$$U = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad (2.17)$$

kde  $\omega L$  je indukance a  $1/(\omega C)$  je kapacitance. Celkový odpor sériového obvodu RLC se nazývá impedance a značí se  $Z$ . Dle Ohmova zákona můžeme psát

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}. \quad (2.18)$$

Jednotkou impedance je ohm ( $\Omega$ ). Pro fázový rozdíl napětí a proudu v obvodu platí

$$\tan\varphi = \frac{U_L - U_C}{U_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{X_L - X_C}{R}, \quad (2.19)$$

kde  $(X_L - X_C)$  je reaktance a značí se  $X$ .

Jsou tři možnosti fázového posunu vůči napětí.

	charakter obvodu	fázový posun
$X_L > X_C$	induktivní	kladný
$X_L < X_C$	kapacitní	záporný
$X_L = X_C$	rezonanční	nulový

O rezonanci mluvíme tehdy, je-li fázový rozdíl nulový, a tedy impedance je minimální a obvodem prochází maximální proud. Rezonance napětí má svou příslušnou rezonanční frekvenci  $f_r$ , kterou určíme z podmínky

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}. \quad (2.20)$$

Za použití vztahu  $\omega = 2\pi f$ , odtud můžeme vyjádřit frekvenci  $f_r$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (2.21)$$

Máme-li k RLC obvodu připojen zdroj střídavého napětí, pak kmity napětí a proudu se nazývají nucené. RLC obvod však nemusí být připojen ke zdroji střídavého napětí. Na počátku nicméně musíme kondenzátor nabít. Je-li tomu tak, pak odpor v tomto obvodu způsobuje pokles amplitudy kmitů proudu a napětí, kmity jsou tlumené. Úhlovou frekvenci tlumených kmitů lze vypočítat dle vztahu

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \quad (2.22)$$

Pokud bychom měli obvod bez odporu, tedy LC obvod s ideálními prvky, pak by kmity byly netlumené a obvod by osciloval. Dochází zde k opakovanému vybíjení a nabíjení kondenzátoru s opačnou polaritou. LC obvod je jeden z nejjednodušších elektromagnetických oscilátorů. [5, 6, 7]

### Něco navíc k sériovému RLC obvodu

K vyšetření proudu sériového RLC obvodu lze využít 2. Kirchhoffova zákona, jenž říká, že součet napětí na rezistorech v obvodu v libovolném okamžiku je roven součtu elektromotorických napětí působících ve smyčce, tedy platí

$$u_L + u_R + u_C = u.$$

Za jednotlivá napětí dosadíme

$$\begin{aligned} \text{napětí na rezistoru} &\Rightarrow u_R = Ri, \\ \text{napětí na cívce} &\Rightarrow u_L = L \frac{di}{dt}, \\ \text{napětí na kondenzátoru} &\Rightarrow u_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int id, \\ \text{napětí zdroje} &\Rightarrow u = U_m \sin \omega t. \end{aligned}$$

Získáme tak

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int id = U_m \sin \omega t.$$

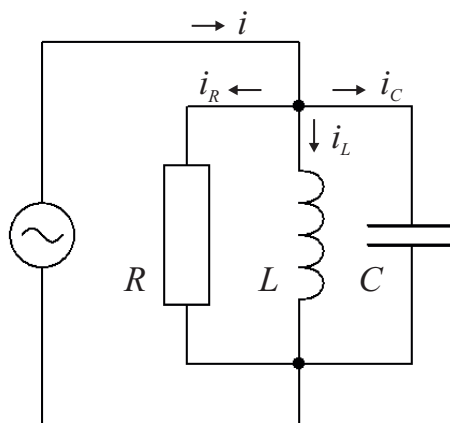
Nyní rovnici zderivujeme podle času, vydělíme indukčností  $L$  a dostaneme diferenciální rovnici 2. řádu

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{U_m \omega}{L} \cos \omega t. \quad (2.23)$$

Pokud bychom měli pouze RLC prvky v obvodu bez zdroje, byla by pravá strana rovnice rovna nule. [3, 6]

### Paralelní RLC obvod

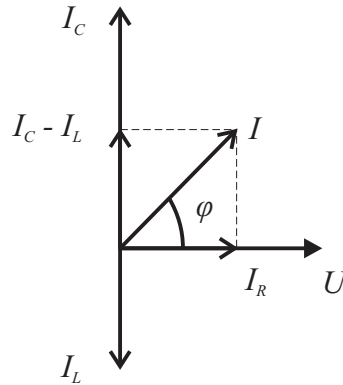
Na obr. 2.11 je zobrazen paralelní RLC obvod. U paralelního zapojení prvků se celkový proud rozdělí, avšak napětí na prvcích zůstává stejné. Proudů se liší jak velikostí, tak fází.



Obrázek 2.11: Paralelní RLC obvod

Využijeme-li znovu poznatků, které jsme si uvedli u jednoduchých obvodů, pak víme, že proud na rezistoru je ve fázi s napětím, proud na cívce je zpožděn za napětím o  $\pi/2$ , naopak proud na kondenzátoru napětí předbíhá o  $\pi/2$ . Poznátky jsou zakresleny

pomocí fázorů ve fázovém diagramu na obr. 2.12. Fázory  $I_C$  a  $I_L$  nahradíme jediným fázorem  $I_C - I_L$ .



Obrázek 2.12: Fázový diagram paralelního zapojení RLC

S využitím Pythagorovy věty spočítáme výsledný fázor proudu

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2}. \quad (2.24)$$

Nyní si vyjádříme proudy pomocí napětí

$$I_R = \frac{U}{R}, I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{L\omega}, I_C = \frac{U}{X_C} = UC\omega.$$

Dosazením vyjádřených proudů do vztahu 2.24 a následným vytknutím  $U$  dostáváme

$$I = U \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}. \quad (2.25)$$

Paralelní obvod je charakterizován admitancí  $Y$ , což je převrácená hodnota impedance.

Na základě Ohmova zákona zapíšeme impedanci a z ní vyjádříme admitanci

$$Z = \frac{U}{I} \Rightarrow Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}. \quad (2.26)$$

Jednotkou admitance je siemens (S), což je  $\Omega^{-1}$ . Pro fázový rozdíl napětí a proudu v obvodu lze dle obr. 2.12 psát

$$\tan\varphi = -\frac{I_C - I_L}{I_R} = -\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} = R \left( \frac{1}{\omega L} - \omega C \right). \quad (2.27)$$

I zde se dá hovořit o rezonanci, tzv. rezonanci proudu. Je-li fázový rozdíl napětí a proudu nulový, tedy impedance je maximální, admitance minimální a obvodem prochází minimální proud. Z podmínky

$$\omega_r C = \frac{1}{\omega_r L} \quad (2.28)$$

vyjádříme vztah pro rezonanční frekvenci  $f_r$ , který je stejný jako u sériového zapojení prvků RLC, viz rovnice (2.21). [5, 6, 7]

# Kapitola 3

## Řešené úlohy

Tato kapitola se již zaměřuje na samotné řešení ukázkových úloh modelovaných ve WSM. Modely a grafy, jež jsou vytvořeny pomocí programu WSM jsou dostupné na CD. Soubory, které otevřou pouze vlastníci tohoto programu jsou pod názvy Model1–Model6. Dále jsou dostupné soubory ve formátu PNG, AVI a CDF. K otevření souboru ve formátu CDF je třeba stáhnout CDF Player. V první řadě se seznámíme s postupem řešení fyzikálních úloh.

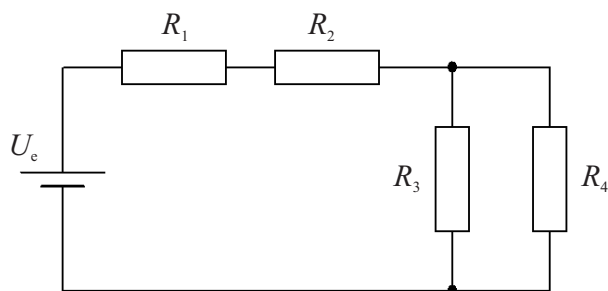
### 3.1 Zásady řešení fyzikálních úloh

Každá fyzikální úloha obsahuje určité zadání, ať už v podobě textu, či grafického schématu, apod. Jelikož se tato práce zabývá elektrickými obvody, zásady řešení fyzikálních úloh si nastíníme právě na úloze týkající se výpočtu proudu na rezistoru.

#### Zadání:

Ke zdroji elektromotorického napětí 5 V je připojen obvod, viz obr. 3.1. Odpory jednotlivých rezistorů jsou  $R_1 = 1,5 \Omega$ ,  $R_2 = 2 \Omega$ ,  $R_3 = 3 \Omega$  a  $R_4 = 3,5 \Omega$ . Určete proud, který protéká rezistorem  $R_4$ .





Obrázek 3.1: Vzorový obvod

Nejprve je důležité si uvědomit, jestli jsme správně porozuměli textu a pochopili danou úlohu. Poté se můžeme pustit do vypsání zadaných, ale také hledaných fyzikálních veličin. Každá fyzikální veličina má domluvený symbol. Pokud by zadané jednotky nebyly v základních jednotkách SI, je třeba je převést.

$$U_e = 5 \text{ V}$$

$$R_1 = 1,5 \text{ } \Omega$$

$$R_2 = 2 \text{ } \Omega$$

$$R_3 = 3 \text{ } \Omega$$

$$R_4 = 3,5 \text{ } \Omega$$

$$I_4 = ?$$

Dalším krokem je nákres zadané situace s vyznačenými fyzikálními veličinami. V našem případě je nákres již v zadání, tudíž postoupíme k analýze daného nákresu. Rozmyslíme si jaké zhruba využijeme vztahy, zákony, apod. Poté začneme hledat matematické vyjádření a pomocí různých úprav se snažíme dojít k obecnému řešení.

Náš obvod se skládá ze sériově a paralelně spojených rezistorů. Proud procházející obvodem se rozdělí do paralelně spojených rezistorů. Tento proud vypočítáme dle vztahu

$$I = \frac{U_e}{R},$$

kde  $R$  značí celkový odpor obvodu. Celkový odpor obvodu spočítáme na základě znalosti spojování rezistorů.

$$R = R_1 + R_2 + R_P,$$

kde  $R_P$  je celkový odpor paralelně spojených rezistorů  $R_3$  a  $R_4$ .

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4},$$

odtud tedy

$$R_P = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Dosadíme-li do vztahu pro proud veškeré dílčí veličiny, dostaneme

$$I = \frac{U_e}{R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}.$$

Procházející proud se rozdělí do paralelně spojených rezistorů  $R_3$  a  $R_4$  v poměru

$$\frac{R_3}{R_4} = \frac{I_3}{I_4} = \frac{I_4}{I - I_4}.$$

Po úpravě a dosazení proudu  $I$  dostáváme obecné řešení pro proud  $I_4$

$$I_4 = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \cdot \frac{U_e}{R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}.$$

Jedním z posledních kroků je číselné dosazení a zaokrouhlení výsledku

$$I_4 = \frac{3}{3 + 3,5} \cdot \frac{5}{1,5 + 2 + \frac{3 \cdot 3,5}{3 + 3,5}} \text{ A},$$

$$I_4 = 0,45 \text{ A}.$$

Konečný výsledek zaokrouhlíme tak, aby obsahoval příslušný počet platných míst, tudíž

$$I_4 \doteq 0,5 \text{ A}.$$

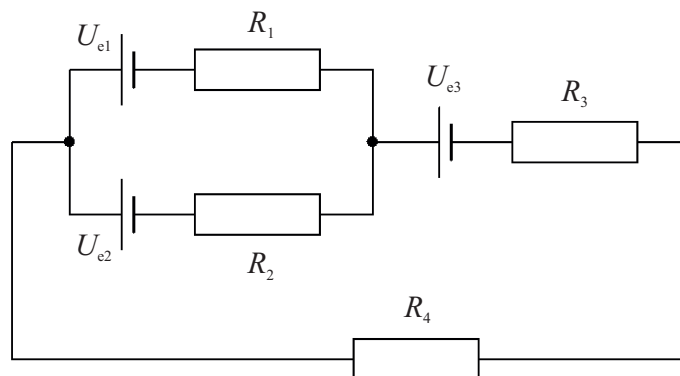
U složitějších fyzikálních úloh lze i stanovit jednotku, a to tak, že dosadíme jednotky zadaných veličin do obecného vztahu. Na závěr můžeme vytvořit graf, dále zhodnotíme výsledky a zformulujeme odpověď. Někdy postačí pouze číselná odpověď.

## 3.2 Elektrické sítě řešené pomocí Kz

V následujících úlohách využíváme zdroje konstantního napětí.

### Úloha 1:

Na obrázku 3.2 je zobrazen obvod se třemi zdroji a čtyřmi rezistory. Elektromotorické napětí (emn) zdroje  $U_{e1} = 1,3 \text{ V}$ , emn zdroje  $U_{e2} = 1,5 \text{ V}$  a emn zdroje  $U_{e3} = 2 \text{ V}$ . Odporů jednotlivých rezistorů jsou  $R_1 = R_2 = R_3 = 0,2 \Omega$  a  $R_4 = 0,55 \Omega$ . Určete proudy, které procházejí jednotlivými rezistory.



Obrázek 3.2: Schéma k úloze 1

### Řešení

Ze zadání je patrné, že máme určit proudy procházející jednotlivými rezistory. Vypíšeme si tedy veličiny, které hledáme, ale i ty, které máme zadané.

$$U_{e1} = 1,3 \text{ V} \quad I_1 = ?$$

$$U_{e2} = 1,5 \text{ V} \quad I_2 = ?$$

$$U_{e3} = 2 \text{ V} \quad I_3 = ?$$

$$R_1 = 0,2 \ \Omega$$

$$R_2 = 0,2 \ \Omega$$

$$R_3 = 0,2 \ \Omega$$

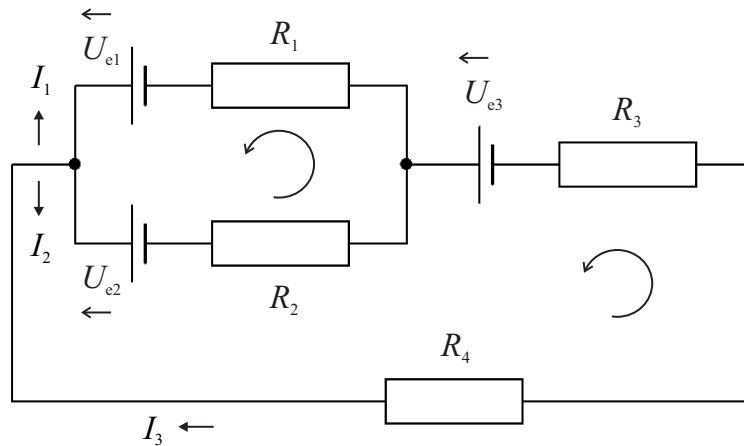
$$R_4 = 0,55 \ \Omega$$

Rezistorem  $R_3$  a  $R_4$  protéká stejný proud, jelikož jsou zapojeny v sérii, proto stačí psát pouze tři hledané veličiny. Dále si zakreslíme šipkami směry proudů, směry napětí u zdrojů (od plus k minus) a nakonec zvolíme směr obíhání uzavřenými smyčkami, viz obr. 3.3.

Nyní sestavíme rovnice. Hledáme tři neznámé, tudíž budeme potřebovat tři rovnice. V první řadě sestavíme rovnice dle 1. Kirchhoffova zákona. V obvodu jsou dva uzly ( $u = 2$ ), to znamená, že musíme sestavit  $u - 1$  rovnic dle 1. Kirchhoffova zákona. Proudů směřujících do uzlu bereme s kladným znaménkem a proudy z uzlu vystupující se záporným znaménkem

$$I_3 - I_1 - I_2 = 0.$$

Dalším krokem je sestavení rovnic dle 2. Kirchhoffova zákona. V obvodu se nachází tři větve ( $v = 3$ ), musíme tedy sestavit  $v - u + 1$  rovnic dle 2. Kirchhoffova zákona. Na



Obrázek 3.3: Schéma s vyznačenými směry k úloze 1

obrázku 3.3 máme dvě smyčky. Rovnice sepíšeme tak, že vyjdeme ze zvoleného uzlu (v našem případě uzel A) a projdeme smyčkou ve zvoleném směru. Souhlasí-li směr obíhání se směrem šipky proudu, či napětí, píšeme součiny  $RI$  s kladným znaménkem

$$\begin{aligned} -U_{e2} + U_{e1} &= R_2 I_2 - R_1 I_1, \\ U_{e3} + U_{e2} &= -R_4 I_3 - R_3 I_3 - R_2 I_2. \end{aligned}$$

Dosadíme číselné hodnoty veličin, které známe a dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -I_1 - I_2 + I_3 &= 0, \\ -0,2I_1 + 0,2I_2 &= -0,2, \\ -0,2I_2 - 0,75I_3 &= 3,5. \end{aligned}$$

Teď se dostáváme k řešení rovnic. Z druhé a třetí rovnice si vyjádříme neznámé  $I_1$  a  $I_3$ , které dosadíme do první rovnice. Druhou rovnici vynásobíme pěti a vyjádříme  $I_1$ . Poté vyjádříme ze třetí rovnice  $I_3$ :

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 &= -1 \Rightarrow I_1 = I_2 + 1, \\ -0,2I_2 - 0,75I_3 &= 3,5 \Rightarrow I_3 = \frac{3,5 + 0,2I_2}{-0,75}. \end{aligned}$$

Vyjádřené veličiny nyní dosadíme do první rovnice

$$-(I_2 + 1) - I_2 + \left( \frac{3,5 + 0,2I_2}{-0,75} \right) = 0.$$

Tuto rovnici upravíme (vynásobíme  $-0,75$ ) a vyjádříme  $I_2$ :

$$0,75I_2 + 0,75 + 0,75I_2 + 3,5 + 0,2I_2 = 0,$$

$$1,7I_2 = -4,25,$$

$$I_2 = -2,5 \text{ A.}$$

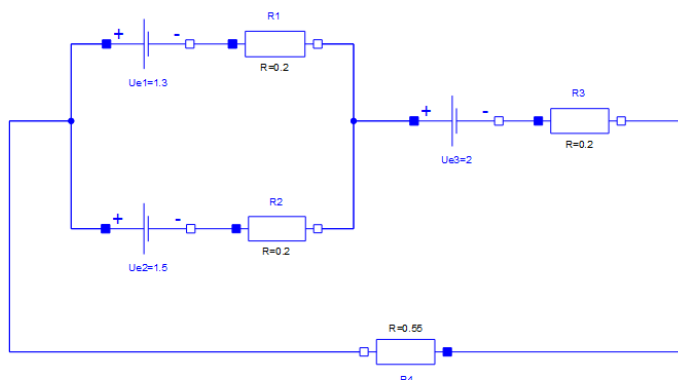
Již známe proud  $I_2$ , pomocí něhož dopočítáme zbývající dva proudy

$$I_1 = -2,5 + 1 = -1,5 \text{ A,}$$

$$I_3 = \frac{3,5 + 0,2 \cdot (-2,5)}{-0,75} = -4 \text{ A.}$$

Záporné výsledky značí, že skutečné směry proudů jsou opačné, než jsme původně vyznačili do obvodu na obr. 3.3.

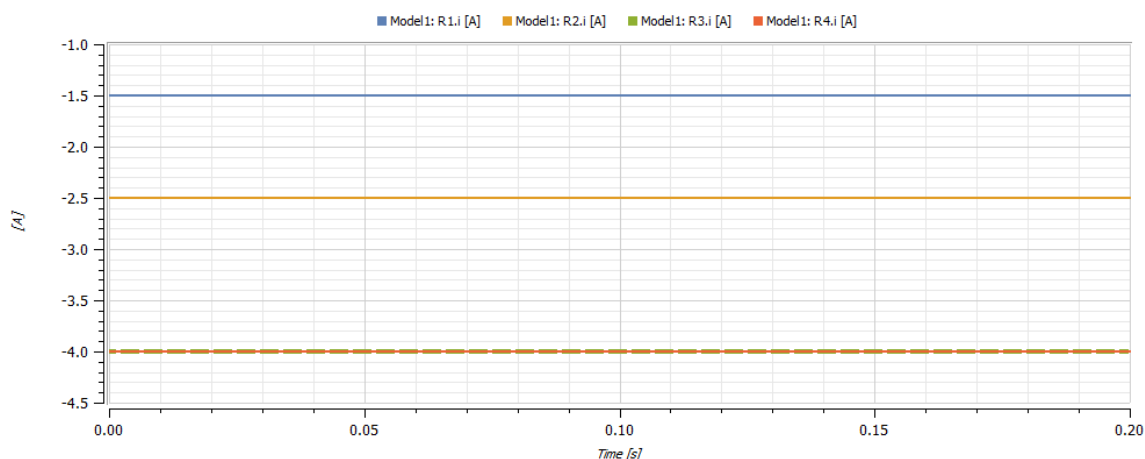
Přejdeme k modelaci úlohy pomocí WSM. Komponenty na sestavení obvodu dle obrázku 3.2 nalezneme v balíčku *Electrical* → *Analog*. Rezistor se nachází v balíčku *Basic* a zdroj v balíčku *Sources*. Po sestavení obvodu nastavíme parametry jednotlivých komponentů v okně **General**. Popřípadě lze komponenty přejmenovat v okně **Component Browser**. Model obvodu sestaveného ve WSM vidíme na obr. 3.4.



Obrázek 3.4: Schéma zapojení obvodu ve WSM k úloze 1

Uděláme kontrolu sestaveného modelu pomocí nástroje *Validate Class*. Pokud by kontrola proběhla neúspěšně, musíme překontrolovat zadané parametry. Desetinná čísla je potřeba psát s desetinnou tečkou (a ne s čárkou, jak jsme zvyklí). Následně provedeme simulaci pomocí nástroje *Simulate Class*. Po levé straně budeme mít okno **Experiment Browser**, kde je již otevřená záložka *Plot*, ve které si zvolíme, jaké veličiny chceme vykreslit do grafu. V našem případě se jedná o proudy na rezistorech  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  a  $R_4$ . Rozbalíme tedy tyto komponenty a u každého zvolíme proud, který jím protéká. Každý z uvedených komponentů má kladný (značeno písmenem p) a záporný

(značeno písmenem n) pól. Je jedno, zda v záložce *Plot* zvolíme proud pod písmenem p nebo n, velikost se nezmění, jen znaménko.



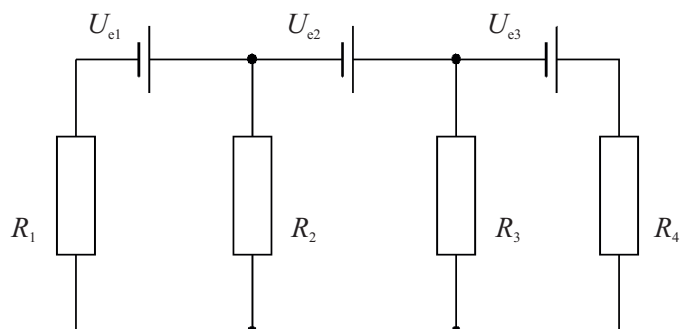
Obrázek 3.5: Graf veličnosti proudů k úloze 1

V grafu na obr. 3.5 jsou na ose  $y$  vyneseny proudy, protékající jednotlivými rezistory a na ose  $x$  je vynesena čas. Vidíme, že průběh proudů se nemění, je konstantní. Nemění se amplituda, ani smysl, tudíž se jedná o stejnosměrný proud.

Výsledné proudy v grafu se shodují s našimi výpočty. Zjistili jsme tedy, že rezistorem  $R_1$  protéká proud o velikosti 1,5 A, rezistorem  $R_2$  protéká proud o velikosti 2,5 A a rezistorem  $R_3$  protéká proud o velikosti 4 A.

## Úloha 2:

Určete proudy, procházející jednotlivými rezistory v obvodu. Schéma zapojení obvodu je znázorněno na obr. 3.6. Elektromotorické napětí (emn) zdroje  $U_{e1} = U_{e2} = U_{e3} = 15$  V. Odporů jednotlivých rezistorů jsou  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 2R_1$ ,  $R_3 = 4R_1$  a  $R_4 = 8R_1$ . Určete proudy, které procházejí jednotlivými rezistory.



Obrázek 3.6: Schéma k úloze 2

### Řešení

Nejprve si opět vypíšeme zadané i hledané veličiny.

$$U_{e1} = 15 \text{ V} \quad I_1 = ?$$

$$U_{e2} = 15 \text{ V} \quad I_2 = ?$$

$$U_{e3} = 15 \text{ V} \quad I_3 = ?$$

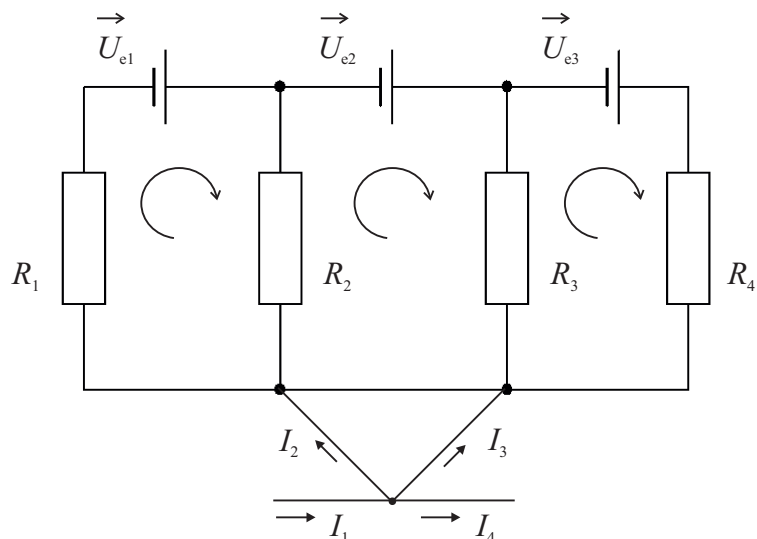
$$R_1 = 10 \ \Omega \quad I_4 = ?$$

$$R_2 = 20 \ \Omega$$

$$R_3 = 40 \ \Omega$$

$$R_4 = 80 \ \Omega$$

Dolní dva uzly se mohou spojit do jednoho, vznikne uzel společný rezistorům  $R_2$  a  $R_3$ . Dále si zakreslíme šipkami směry proudů, směry napětí u zdrojů (od plus k minus) a nakonec zvolíme směr obíhání uzavřenými smyčkami, viz obr. 3.7. Směry proudů zakreslíme ke společnému dolnímu uzlu, jelikož obsahuje všechny naše neznámé.



Obrázek 3.7: Schéma s vyznačenými směry k úloze 2

Pomocí schématu na obr. 3.7 sestavíme rovnice. Budeme potřebovat čtyři rovnice, protože hledáme čtyři neznámé. Za prvé sestavíme rovnice dle 1. Kirchhoffova zákona. Zde nám stačí pouze jedna rovnice, která obsahuje všechny hledané proudy. Zase se řídíme pravidlem, že proudy směřující do uzlu bereme s kladným znaménkem, kdežto proudy vystupující z uzlu se záporným znaménkem

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0.$$

Za další si sestavíme rovnice dle 2. Kirchhoffova zákona. Chybí nám tři rovnice. Na obrázku 3.7 máme tři smyčky. Vyjdeme ze zvoleného uzlu (v našem případě společný uzel) a projdeme smyčkou ve zvoleném směru. Souhlasí-li směr obíhání se směrem šipky proudu či napětí, píšeme součiny  $RI$  s kladným znaménkem

$$U_{e1} = -R_1 I_1 + R_2 I_2,$$

$$U_{e2} = -R_2 I_2 + R_3 I_3,$$

$$U_{e3} = -R_3 I_3 + R_4 I_4.$$

Dosadíme číselné hodnoty veličin, které známe a dostaneme soustavu rovnic

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0,$$

$$-10I_1 + 20I_2 = 15,$$

$$-20I_2 + 40I_3 = 15,$$

$$-40I_3 - 80I_4 = 15.$$



Ze druhé rovnice vyjádříme proud  $I_1$  a ze třetí proud  $I_3$

$$\begin{aligned} -10I_1 + 20I_2 = 15 &\Rightarrow I_1 = \frac{20I_2 - 15}{10} = \frac{4I_2 - 3}{2}, \\ -20I_2 + 40I_3 = 15 &\Rightarrow I_3 = \frac{15 + 20I_2}{40} = \frac{3 + 4I_2}{8}. \end{aligned}$$

Třetí a čtvrtou rovnici sečteme. Z výchozí rovnice vyjádříme proud  $I_4$

$$-20I_2 - 80I_4 = 30 \Rightarrow I_4 = \frac{-30 - 20I_2}{80} = \frac{-3 - 2I_2}{8}.$$

Vyjádřené proudy nyní dosadíme do první rovnice

$$\frac{4I_2 - 3}{2} + I_2 + \frac{3 + 4I_2}{8} - \left( \frac{-3 - 2I_2}{8} \right) = 0.$$

Následně rovnici upravíme (vynásobíme 8) a vyjádříme proud  $I_2$ :

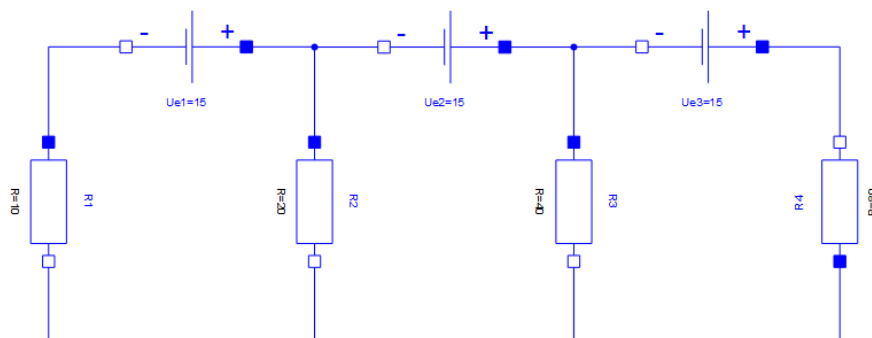
$$\begin{aligned} 16I_2 - 12 + 8I_2 + 3 + 4I_2 + 3 + 2I_2 &= 0, \\ 30I_2 &= 6, \\ I_2 &= \mathbf{0,2 \text{ A}}. \end{aligned}$$

Pomocí proudu  $I_2$  dopočítáme zbývající proudy

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{0,8 - 3}{2} = -1,1 \doteq -\mathbf{1 \text{ A}}, \\ I_3 &= \frac{3 + 0,8}{8} = 0,475 \doteq \mathbf{0,5 \text{ A}}, \\ I_4 &= \frac{-3 - 0,4}{8} = -0,425 \doteq -\mathbf{0,4 \text{ A}}. \end{aligned}$$

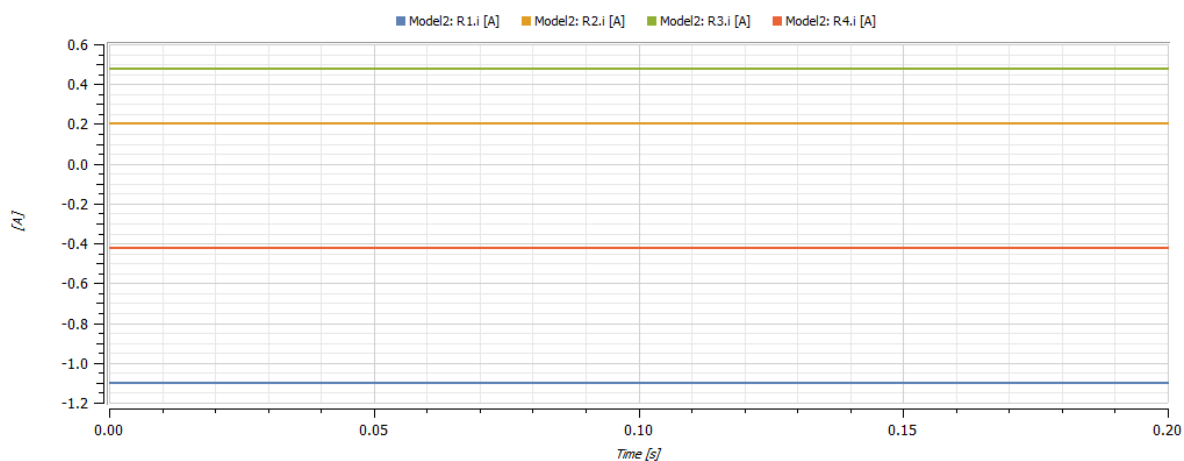
Skutečné směry proudů  $I_1$  a  $I_4$  jsou opačné, než jsme původně zaznačili do obvodu.

Dostáváme se k modelování úlohy pomocí WSM. Komponenty na sestavení obvodu dle obrázku 3.6 nalezneme pod stejnou cestou jako v úloze 1. Jakmile máme sestavený obvod, nastavíme parametry jednotlivých komponentů v okně **General**, popřípadě je přejmenujeme. Model obvodu sestavený ve WSM je znázorněn na obr. 3.8.



Obrázek 3.8: Schéma zapojení obvodu ve WSM k úloze 2

Provedeme kontrolu modelu pomocí nástroje *Validate Class*. Je-li kontrola v pořádku, můžeme zahájit simulaci pomocí nástroje *Simulate Class*, v opačném případě je nutné model překontrolovat. Až se model nasimuluje, zvolíme v záložce *Plot* veličiny, které chceme vykreslit do grafu. V našem případě jsou to proudy na rezistorech  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  a  $R_4$ . Po rozbalení rezistorů máme na výběr ze dvou možností. Buď vybereme proud pod písmenem p, což značí kladný pól rezistoru, nebo proud pod písmenem n, což značí záporný pól rezistoru. V konečném důsledku nezáleží na tom, který proud vybereme, jelikož velikost proudu zůstane stále stejná, jen znaménko se změní.



Obrázek 3.9: Graf velikosti proudů k úloze 2

V grafu na obr. 3.9 jsou na ose  $y$  vyneseny proudy procházející jednotlivými rezistory a na ose  $x$  je vynesena čas. Průběh proudů je neměnný, jedná se tedy o stejnosměrný proud.

Pomocí WSM jsme si ověřili, že naše výpočty jsou shodné s proudy, které jsou vykres-

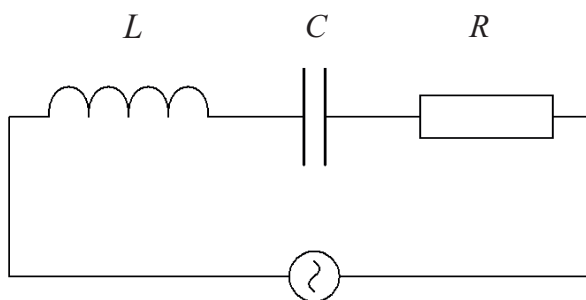
lenu v grafu na obr. 3.9. Zjistili jsme, že rezistorem  $R_1$  protéká proud o velikosti 1,1 A, rezistorem  $R_2$  protéká proud o velikosti 0,2 A, rezistorem  $R_3$  protéká proud o velikosti 0,475 A a rezistorem  $R_4$  protéká proud o velikosti 0,425 A.

### 3.3 RLC obvody

V následujících úlohách využíváme zdroje střídavého napětí.

#### Úloha 3:

Ke zdroji střídavého napětí o amplitudě 12 V a frekvenci 50 Hz je v sérii připojen kondenzátor s kapacitou  $20 \mu\text{F}$ , cívka s indukčností 0,6 H a rezistor s odporem  $50 \Omega$ . Zapojení je zobrazeno na obr. 3.10. Vypočítejte amplitudy napětí na jednotlivých prvcích a amplitudu proudu, jenž prochází obvodem.



Obrázek 3.10: Schéma k úloze 3

#### Řešení

Začneme vypsáním veličin a převedením jednotek.

$$\begin{array}{ll}
 U_m = 12 \text{ V} & U_C = ? \\
 C = 0,000020 \text{ F} & U_L = ? \\
 L = 0,6 \text{ H} & U_R = ? \\
 R = 50 \Omega & I_m = ?
 \end{array}$$


---

K určení amplitudy proudu využijeme rovnici (2.18)

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2}},$$

$$I_m = \frac{12}{\sqrt{50^2 + \left(2\pi \cdot 50 \cdot 0,6 - \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}\right)^2}},$$

$$I_m = \mathbf{0,21 \text{ A.}}$$

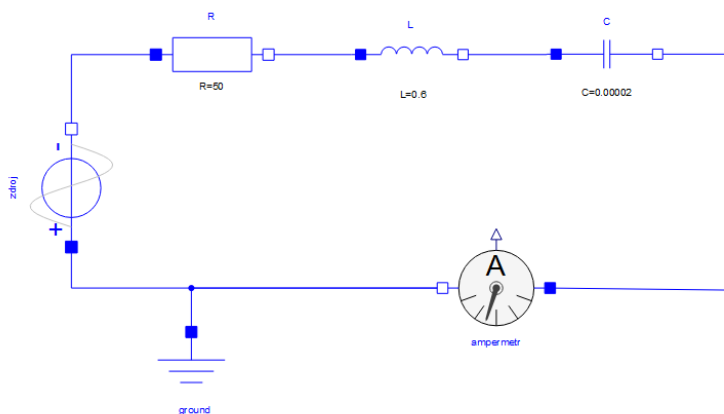
Nyní můžeme dopočítat napětí na jednotlivých prvcích obvodu:

$$U_L = 2\pi f L I_m = 2\pi \cdot 50 \cdot 0,6 \cdot 0,21 = \mathbf{39,6 \text{ V}},$$

$$U_C = \frac{I_m}{2\pi f C} = \frac{0,21}{2\pi \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} = \mathbf{33,4 \text{ V}},$$

$$U_R = R I_m = 50 \cdot 0,21 = \mathbf{10,5 \text{ V.}}$$

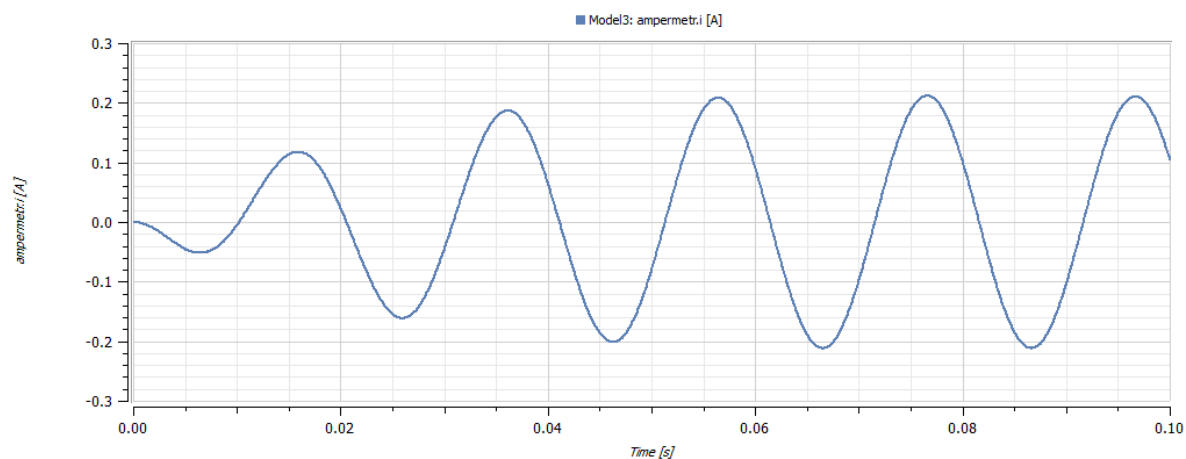
Přejdeme k modelaci úlohy v programu WSM. Komponenty na sestavení obvodu dle obr. 3.11 nalezneme v balíčku *Electrical* → *Analog*. Rezistor, cívka, kondenzátor a uzemnění jsou v balíčku *Basic*, zdroj je v balíčku *Sources*. Do obvodu lze přidat ampérmetr, jenž se připojuje sériově. Poslouží nám k naměření celkového proudu a najdeme ho v balíčku *Sensors*. Zde by ampérmetr do obvodu nemusel být řazen. Postačilo by využít poznatky, které jsme si uvedli u spojování rezistorů a to, že při sériovém spojení protéká všemi prvky v obvodu stejný proud. Dále nastavíme parametry jednotlivých komponentů v okně **General**, popřípadě je přejmenujeme.



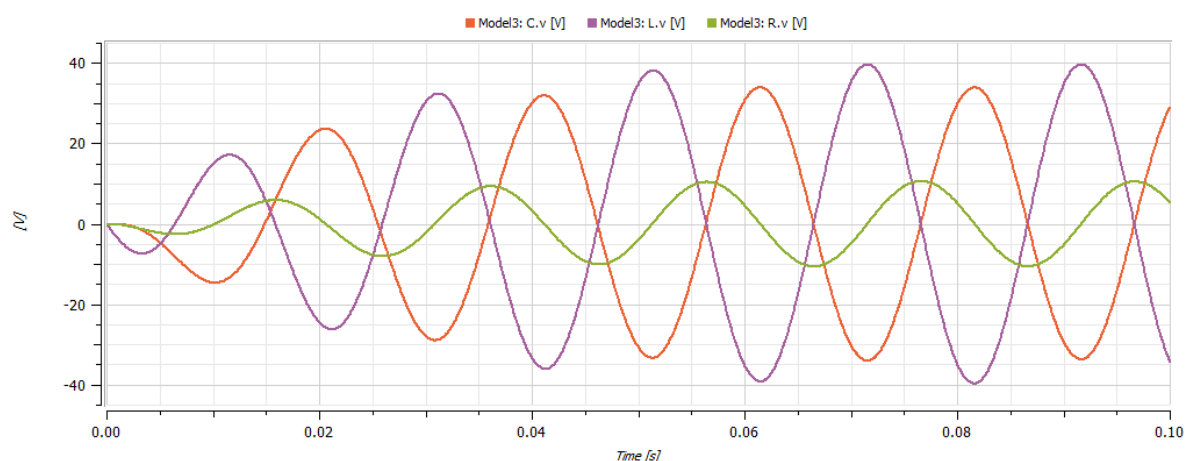
Obrázek 3.11: Schéma zapojení obvodu ve WSM k úloze 3

Zkontrolujeme sestavený model pomocí nástroje *Validate Class*. Je-li vše v pořádku, provedeme simulaci pomocí nástroje *Simulate Class*. V okně **Experiment Browser** rozevřeme záložku *Settings* a nastavíme časový interval na 0,1 s. Vrátime se do záložky *Plot* a zvolíme si veličiny, které chceme vykreslit do grafu. Musíme zde však využít dva grafy, jeden pro proud a druhý pro jednotlivá napětí. Nejprve se podíváme na graf proudu protékajícího obvodem. Čili rozbálíme ampérmetr a zvolíme proud. Nyní bud

můžeme v horní části hlavního okna zvolit *New Subplot*, což nám do hlavního okna přidá další graf, nebo zrušíme zvolený proud. Dále rozbalíme rezistor, kondenzátor, cívku a zvolíme napětí.



Obrázek 3.12: Graf časového průběhu proudu k úloze 3



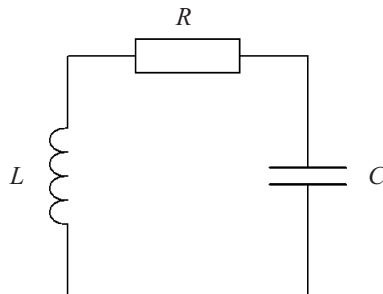
Obrázek 3.13: Graf časového průběhu napětí na jednotlivých prvcích k úloze 3

V grafu na obr. 3.12 je na ose  $y$  vynesena proud a v grafu na obr. 3.13 jsou na ose  $y$  vynesena napětí jednotlivých prvků. U obou grafů je na ose  $x$  vynesena čas. Vidíme, že časové průběhy proudu i napětí se harmonicky mění. Začátek průběhu však není harmonický, ale postupně dochází k ustálení stavu v obvodu.

Porovnáme-li výpočty s grafy, je patrné, že se shodují. Vyšlo nám tedy, že amplituda proudu procházejícího obvodem je 0,21 A. Dále pak amplituda napětí na rezistoru je 10,5 V, na cívce 39,6 V a na kondenzátoru 33,4 V.

## Úloha 4:

Co se stane s proudem, jestliže předcházející obvod nebude připojen ke zdroji střídavého napětí a kondenzátor bude nabit na 12 V: a) zůstane-li odpor, indukčnost i kapacita stejná, tj.  $R = 50 \Omega$ ,  $L = 0,6 \text{ H}$ ,  $C = 20 \mu\text{F}$ ; b) zvýšíme-li odpor na  $1000 \Omega$ .

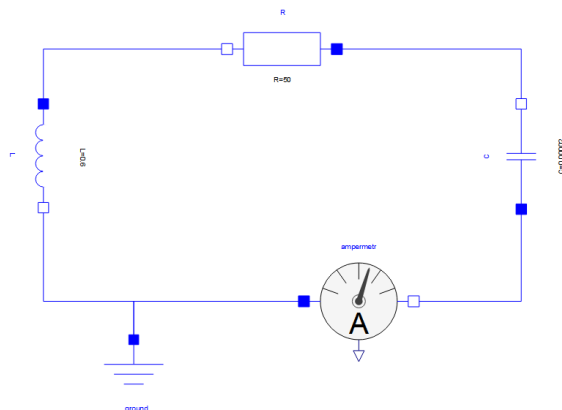


Obrázek 3.14: Schéma k úloze 4a) a 4b)

### Řešení

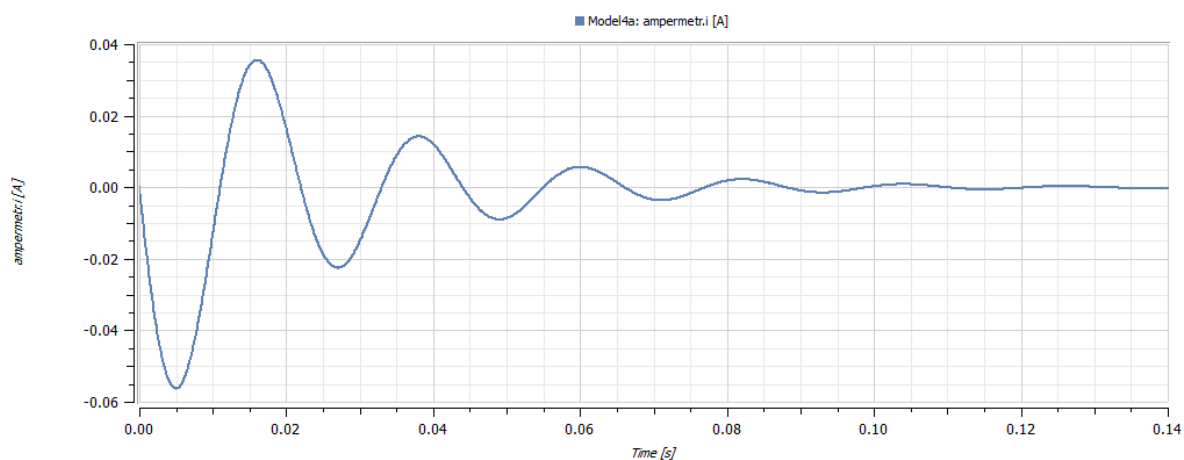
4a) Předpokládáme, že není-li obvod připojen ke zdroji střídavého napětí, bude docházet v obvodu vlivem odporu k tlumení kmitů. Amplituda proudu (napětí) nebude konstantní v čase.

Tento předpoklad si ověříme ve WSM. Sestavíme model dle zadaných parametrů. Použijeme stejnou cestu k sestavení modelu jako v předešlé úloze. Nastavíme zadané parametry, uděláme kontrolu sestaveného modelu pomocí nástroje *Validate Class* a provedeme simulaci. Sestavený model vidíme na obrázku 3.15.



Obrázek 3.15: Schéma zapojení obvodu ve WSM k úloze 4a)

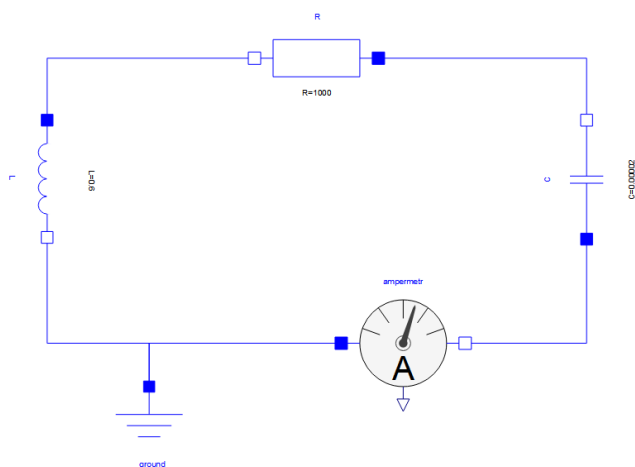
Ve složce *Settings* nastavíme časový interval na 0,14 s. Poté vybereme v záložce *Plot* komponent, v našem případě ampérmetr, a zvolíme veličinu, již chceme vykreslit do grafu, tedy proud. Můžeme si i ověřit, že všemi prvky v obvodu prochází stejný proud.



Obrázek 3.16: Graf časového průběhu proudu k úloze 4a)

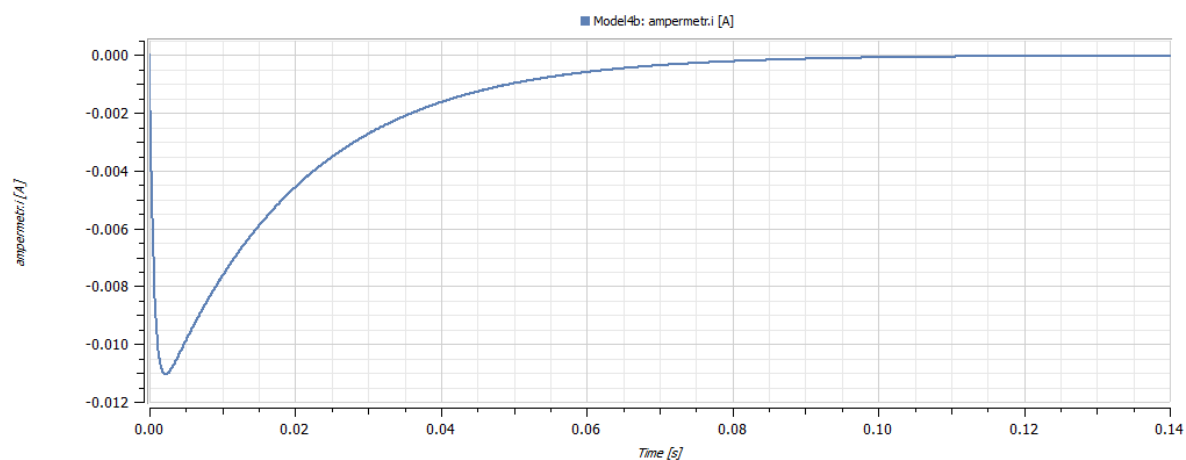
Z grafu na obr. 3.16 je patrné, že náš předpoklad byl správný. Při odporu  $50 \Omega$  dochází k postupnému utlumení kmitů.

4b) Nyní se podíváme na situaci, kdy odpor zvýšíme na  $1000 \Omega$ . Předpokládáme, že kmity budou opět tlumené. Jestliže máme stále sestavený předcházející model, tak stačí, abychom u odporu zadali  $1000 \Omega$ . V případě, že model sestavený nemáme, využijeme stejnou cestu jako v předcházející úloze. Model je znázorněn na obr. 3.17.



Obrázek 3.17: Schéma zapojení obvodu ve WSM k úloze 4b)

Časový interval opět nastavíme na 0,14 s. Zvolíme veličinu, kterou chceme vykreslit do grafu, tedy proud. Znovu se můžeme přesvědčit, že všemi prvky v obvodu prochází stejný proud.

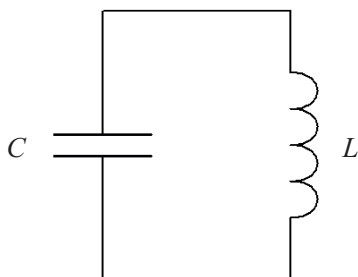


Obrázek 3.18: Graf časového průběhu proudu k úloze 4b)

V grafu na obr. 3.18 vidíme, že náš předpoklad nebyl úplně správný. Při odporu  $1000 \Omega$  již dochází v tomto případě k přílišnému tlumení obvodu. Nemůžeme tedy říct, že kmity jsou tlumené, jelikož zde nedochází k žádným oscilacím.

### Úloha 5:

Sériový obvod je tvořen cívkou o indukčnosti  $0,6 \text{ H}$  a kondenzátorem o kapacitě  $20 \mu\text{F}$ , který je nabit na  $12 \text{ V}$ . Určete amplitudu procházejícího proudu, frekvenci kmitů v obvodu a fázový posun napětí a proudu.



Obrázek 3.19: Schéma k úloze 5



### Řešení

Vypíšeme si nyní veličiny a převedeme jednotky.

$$U_C = 12 \text{ V} \qquad I_m = ?$$

$$C = 0,000020 \text{ F} \qquad f = ?$$

$$L = 0,6 \text{ H} \qquad \varphi = ?$$

---

Frekvenci kmitů v obvodu zjistíme z podmínky, jež plyne z 2. Kirchhoffova zákona

$$U_L = U_C,$$

$$IX_L = IX_C.$$

Po vydělení proudů a dosazení za  $X_L$  a  $X_C$  dostáváme

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

Následně vyjádříme frekvenci za použití vztahu  $\omega = 2\pi f$

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,6 \cdot 2 \cdot 10^{-5}}} = \mathbf{45,9 \text{ Hz}}.$$

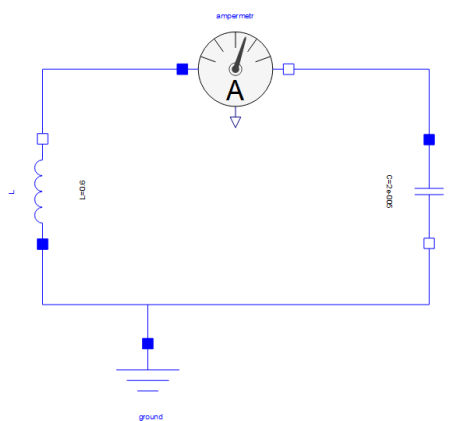
Víme, že amplituda napětí na kondenzátoru dosahuje 12 V a při sériovém zapojení prochází všemi prvky stejný proud. Upravíme-li vztah  $U_C = I_m X_C$ , pak můžeme vypočítat amplitudu proudu:

$$I_m = U_C \cdot 2\pi f C,$$

$$I_m = 12 \cdot 2\pi \cdot 45,9 \cdot 2 \cdot 10^{-5} = \mathbf{0,07 \text{ A}}.$$

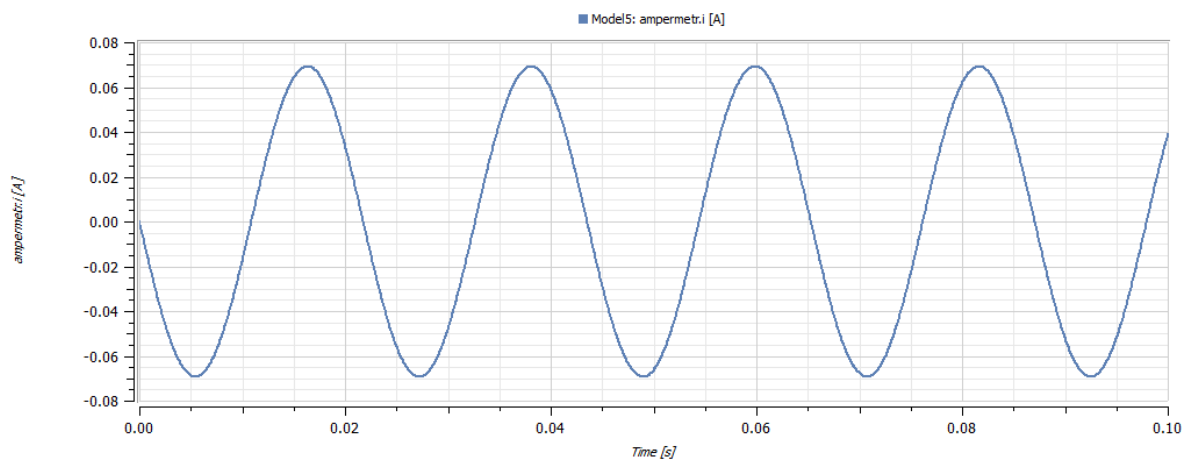
Fázový posun určíme následovně. Kondenzátor budeme považovat za zdroj napětí, protože je nabit na 12 V. Víme, že je-li obvod tvořen cívkou, indukuje se v ní napětí s opačnou polaritou než má zdroj napětí, a tedy napětí předbíhá proud o  $\pi/2$ .

Nyní se dostáváme k modelaci úlohy pomocí WSM. Pracovní postup sestavení modelu, jež je na obr. 3.20, je stejný jako u předchozích úloh. Do obvodu můžeme, či nemusíme přidat ampérmetr.

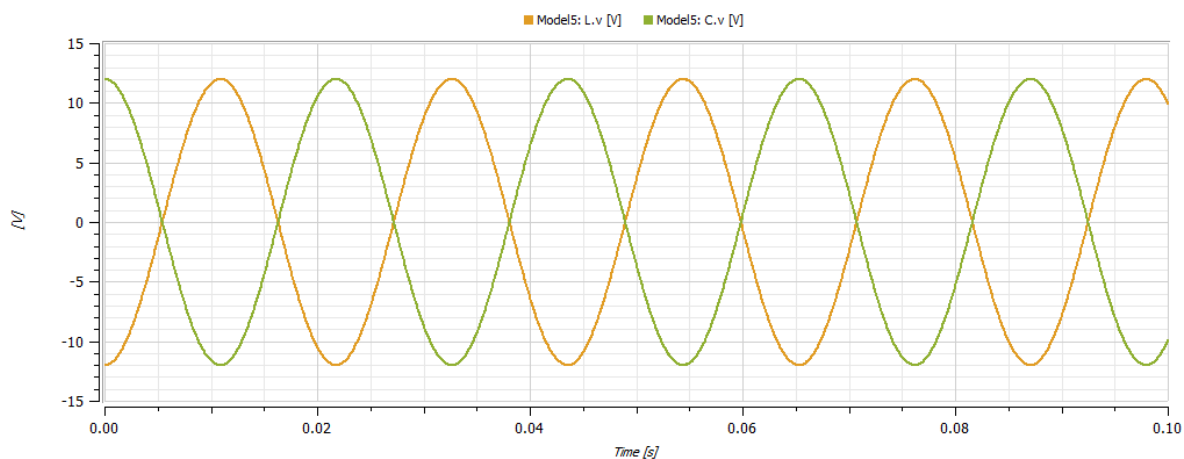


Obrázek 3.20: Schéma zapojení obvodu ve WSM k úloze 5

Provedeme kontrolu modelu a následnou simulaci, proběhne-li kontrola úspěšně. Časový interval nastavíme na 0,1 s. Nejprve zvolíme proud, který bude vykreslen do grafu. Nezáleží na tom, zda zvolíme proud procházející cívkou, kondenzátorem, či ampérmetrem, protože tyto prvky jsou sériově spojeny, a tak jimi protéká stejný proud. Poté zvolíme napětí na cívce a napětí na kondenzátoru.



Obrázek 3.21: Graf časového průběhu proudu k úloze 5



Obrázek 3.22: Graf časového průběhu napětí na jednotlivých prvcích k úloze 5

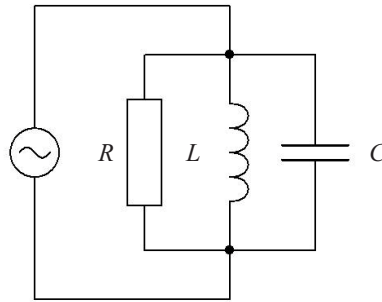
Graf na obr. 3.21 ukazuje průběh proudu v LC obvodu. Vidíme, že amplituda kmitů není tlumená a obvod osciluje. Zda proud v grafu bude nejprve klesat, či narůstat, záleží na tom, jaký pól komponentu vybereme. Velikost proudu se nemění pouze polarita.

V grafu na obr. 3.22 si můžeme všimnout, že průběh napětí na cívce má oproti průběhu napětí na kondenzátoru opravdu opačnou polaritu. Amplitudy obou napětí jsou stejné.

Výpočet amplitudy proudu se shoduje s hodnotou v grafu. Amplituda proudu vyšla po zaokrouhlení 0,07 A, čili 70 mA. Porovnáme-li grafy na obr. 3.22 a 3.21, tak vidíme, že fázový posun mezi napětím a proudem je  $\pi/2$ .

## Úloha 6:

Paralelní obvod, který je připojen ke zdroji střídavého napětí 12 V a frekvenci 50 Hz, je tvořen cívkou o indukčnosti 0,6 H, kondenzátorem o kapacitě 20  $\mu\text{F}$  a rezistorem o odporu 50  $\Omega$ . Určete amplitudu celkového proudu procházejícího obvodem a na jednotlivých prvcích.



Obrázek 3.23: Schéma k úloze 6

*Řešení*

Vypíšeme si zadané i hledané veličiny a převedeme jednotky.

$U_m = 12 \text{ V}$	$I_C = ?$
$f = 50 \text{ Hz}$	$I_L = ?$
$C = 0,000020 \text{ F}$	$I_R = ?$
$L = 0,6 \text{ H}$	$I_m = ?$
$R = 50 \text{ } \Omega$	

---

Víme, že napětí je na všech prvcích stejné. Můžeme tedy pro jednotlivé proudy psát

$$I_R = \frac{U_m}{R},$$

$$I_C = U_m \cdot 2\pi f C,$$

$$I_L = \frac{U_m}{L 2\pi f}.$$

Číselně dosadíme

$$I_R = \frac{12}{50} = \mathbf{0,24 \text{ A}},$$

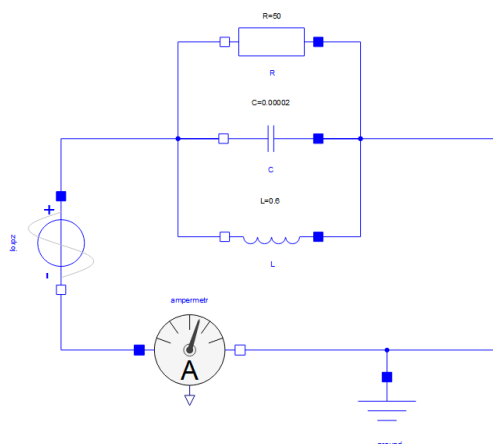
$$I_C = 12 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-5} = \mathbf{0,08 \text{ A}},$$

$$I_L = \frac{12}{0,6 \cdot 2\pi \cdot 50} = \mathbf{0,06 \text{ A}}.$$

K výpočtu amplitudy celkového proudu využijeme vztah (2.24), do něhož dosadíme amplitudy proudů na jednotlivých prvcích

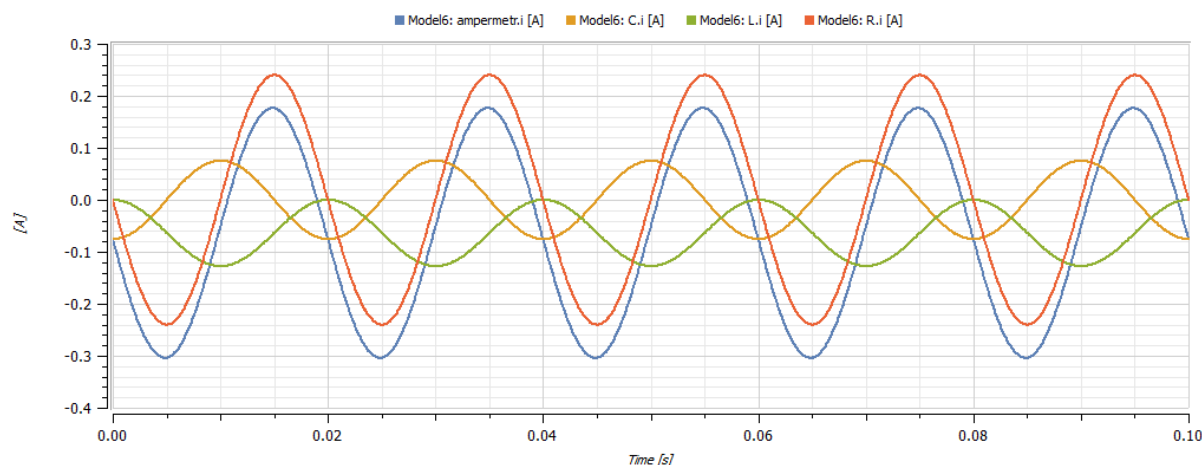
$$I_m = \sqrt{0,24^2 + (0,08 - 0,06)^2} = \mathbf{0,24 \text{ A}}.$$

Přejdeme k modelaci úlohy pomocí WSM. Komponenty k sestavení obvodu, viz obr. 3.24, nalezneme pod stejnou cestou jako u předešlých úloh. Dále nastavíme zadané parametry, provedeme kontrolu a poté simulaci.



Obrázek 3.24: Schéma zapojení obvodu ve WSM k úloze 5

Časový interval opět nastavíme na 0,1 s. V záložce *Plot* vybereme komponenty a zvolíme veličiny, jež chceme vykreslit do grafu. V našem případě vybereme rezistor, cívku, kondenzátor a ampérmetr a na všech zvolíme proud.



Obrázek 3.25: Graf časového průběhu proudů k úloze 6

V grafu na obr. 3.25 vidíme, že proud na cívce i celkový proud v obvodu kmitají kolem určité střední hodnoty. Abychom se z grafu dozvěděli amplitudy těchto proudů, je třeba udělat aritmetický průměr z absolutních hodnot maxima a minima. Pro proud na cívce můžeme psát

$$I_L = \frac{0,127 + 25,5 \cdot 10^{-9}}{2} = 0,06 \text{ A}$$

a pro celkový proud

$$I_m = \frac{0,304 + 0,177}{2} = \mathbf{0,24 \text{ A.}}$$

Další hodnoty proudů lze určit přímo. Vypočítané hodnoty se shodují s hodnotami v grafu. Celkový proud a proud na rezistoru mají po zaokrouhlení stejnou amplitudu, tj. 0,24 A. Z grafu je však patrné, že oba průběhy kmitají kolem jiné střední hodnoty. Amplituda proudu na kondenzátoru má velikost 0,08 A.

# Závěr

Fyzikální úlohy lze řešit hned několika způsoby. V práci jsem se soustředila na výpočet fyzikálních úloh dvěma způsoby, jak klasickou cestou, tak i pomocí počítačového programu WSM. Shrnu-li výsledky bakalářské práce, tak významnou částí jsou výstupy pořízené právě z tohoto programu. Úlohy jsou doplněny o postup modelace v daném programu.

Cílem práce je seznámit čtenáře s programem WSM a rozšířit povědomí o tomto programu mezi učitele a žáky/studenty převážně středních škol. Práce v programu nabízí interaktivní cestu ke zpestření výuky. Žáci/studenti mohou modelovat různé úlohy nejen z oblasti elektřiny, ale i dalších oblastí fyziky. Dobře se dá například modelovat oblast mechaniky. Sami si mohou zadat, či změnit jednotlivé parametry, a tak mohou vidět k jakým změnám v průběhu experimentu dochází. Program umožňuje studentům lepší pochopení probírané problematiky.

Podstatnou část ve výuce elektřiny a magnetismu zastupují právě úlohy na elektrické obvody. Během práce s programem jsem nicméně zjistila, že nelze namodelovat veškeré typy fyzikální úloh z elektřiny a magnetismu. Program je hůře využitelný k simulaci jevů z oblasti magnetického pole.

I tak se ale domnívám, že je program kladným přínosem do výuky. Nejlépe využitelný je pro vysoké školy s technickým zaměřením. Zde lze program použít například pro tvorbu závěrečných prací. Střední školy s technickým zaměřením by tento program mohly jistě také uvítat pro zlepšení kvality výuky. Na gymnáziích se dá program využít například v semináři, a tak oživit tradiční výuku. Pro některé střední školy není tento program využitelný, jako například ekonomické, či zdravotnické školy. Z hlediska náročnosti bych tento program nedoporučila využívat na základních školách, pravděpodobně by se minul účinkem.

# Literatura

- [1] Wolfram SystemModeler. *Wolfram* [online]. [cit. 2016-07-09]. Dostupné z: <http://www.wolfram.com/system-modeler/index.html>
- [2] GROZIN, Andrey. *Introduction to Mathematica® for physicists*. New York: Springer, 2014. Graduate texts in physics. ISBN 3319008935.
- [3] KUBÍNEK, Roman. *Elektrina a magnetismus: studijní modul*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. ISBN 978-802-4433-608.
- [4] REICHL, Jaroslav. *Encyklopedie fyziky: Elektrina a magnetismus* [online]. c2006-2016 [cit. 2016-06-28]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/219-elektrina-a-magnetismus>.
- [5] LEPIL, Oldřich a ŠEDIVÝ, Přemysl. *Fyzika pro gymnázia: elektrina a magnetismus*. 5. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 342 s. ISBN 80-7196-202-3.
- [6] HALLIDAY, David, RESNICK, Robert a WALKER, Jearl. *Fyzika*. 2. přeprac. vyd. Brno: VUTIUM, c2013. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-4123-1.
- [7] FISCHER-CRIPPS, Anthony C. *The electronics companion: devices and circuits for physicists and engineers*. 2. vyd. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015. ISBN 978-1-4665-5266-1.