



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY  
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS  
AND BIOMECHANICS

VYTVOŘENÍ DATABÁZE TUHOSTI STATOROVÝCH SVAZKŮ  
ELEKTRICKÝCH STROJŮ TOČIVÝCH  
CREATION OF DATABASE OF STATOR CORE STIFFNESS OF ROTATIONAL ELECTRICAL  
MACHINES

DIPLOMOVÁ PRÁCE  
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

Bc. ZDENĚK PODZEMNÝ

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Ing. DANIEL DUŠEK, Ph.D.

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky  
Akademický rok: 2012/2013

## **ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE**

student(ka): Bc. Zdeněk Podzemný

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Inženýrská mechanika a biomechanika (3901T041)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

### **Vytvoření databáze tuhosti statorových svazků elektrických strojů točivých**

v anglickém jazyce:

### **Creation of database of stator core stiffness of rotational electrical machines**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Diplomová práce bude řešena pro společnost TES Vsetín a.s.. V rámci diplomové práce by měla být vytvořena databáze tuhosti statorových svazků elektrických strojů točivých vyráběných společností TES Vsetín. Vliv různé tuhosti statorových svazků na modální vlastnosti konstrukce elektrických strojů by měl být také výpočtově ověřen na vybraném stroji.

Cíle diplomové práce:

- Vytvoření vhodného výpočtového modelu statorového svazku
- Vytvoření databáze tuhosti statorových svazků pro různé vstupní parametry
- Ověření vlivu tuhosti statorového svazku na modální vlastnosti vybrané konstrukce



Seznam odborné literatury:

Slavík, J., Stejskal, V., Zeman, V., Základy dynamiky strojů, ČVUT Praha, Praha, 1997.

Kratochvíl, C., Slavík, J., Dynamika, VUT Brno, Brno, 1997.

ANSYS, ANSYS reference manual

Vedoucí diplomové práce: Ing. Daniel Dušek, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 19.11.2012

L.S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
Ředitel ústavu

---

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.  
Děkan fakulty



## **Abstrakt**

V této práci je zpracován kompletní postup určení tuhosti statorového svazku u elektrických strojů točivých s využitím metody konečných prvků (MKP), podle kterého byla následně vytvořena databáze tuhostí těchto svazků. Dále je zde provedena citlivostní analýza vybraného modelu svazku, která vedla k určení parametrů nejvíce ovlivňujících právě jeho tuhost. Nakonec byla na jednom ze synchronních strojů provedena modální analýza pomocí MKP, za účelem ověření vlivu tuhosti svazku na modální vlastnosti stroje. Tímto jsme určili několik vlastních tvarů stroje a jim odpovídajících frekvencí, z nichž byly nakonec vybrány a porovnány ty tvary, které byly tuhostí svazku ovlivněny nejvíce.

## **Summary**

In this thesis is wrote up a complete procedure of stator core stiffness determination using finite element method (FEM), subsequently, the stator core stiffness database was created according to this procedure. In the next chapter is carried out a sensitivity analysis of one chosen stator core, which led to identifying parameters that affected its stiffness the most. Finally, a modal analysis of one synchronous machine was performed using FEM, in order to determine the effect of stator core stiffness on modal characteristics of the machine. Several modal shapes and corresponding natural frequencies were computed in this analysis, then only a few shapes with the highest core effect were chosen and compared.

## **Klíčová slova**

ANSYS, citlivostní analýza, elektrické točivé stroje, metoda konečných prvků, MKP, modální analýza, stator, statorový svazek, tuhost, vlastní frekvence, vlastní tvary.

## **Keywords**

ANSYS, FEA, FEM, finite element method, modal analysis, modal shapes, natural frequencies, rotational electrical machines, sensitivity analysis, stator, stator core, stiffness.

PODZEMNÝ, Z. *Vytvoření databáze tuhosti statorových svazků elektrických strojů točivých*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 72 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Daniel Dušek, Ph.D..



Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval zcela samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, které jsou uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

V Brně dne 24.5.2013

.....  
Bc. Zdeněk Podzemný



Děkuji tímto mému vedoucímu Ing. Danielu Duškovi, Ph.D. za odborné rady, cenné připomínky a podněty poskytnuté při tvorbě této práce.

Bc. Zdeněk Podzemný





# Obsah

<b>1. Úvod</b>	<b>13</b>
<b>2. Elektrické točivé stroje</b>	<b>15</b>
2.1. Synchronní stroje	15
2.1.1. Princip funkce synchronního stroje	15
2.1.2. Konstrukční uspořádání	16
2.1.3. Rozdělení a použití	17
<b>3. Výpočet tuhosti statorového svazku</b>	<b>21</b>
3.1. Výpočet modálních vlastností svazku	21
3.1.1. Geometrie pro výpočtový model	22
3.1.2. Materiálové vlastnosti	23
3.1.3. Konečnoprvkový model	26
3.1.4. Výsledky modální analýzy a srovnání s teorií	27
3.2. Výpočet ekvivalentní hustoty	29
3.3. Výpočet ekvivalentního modulu pružnosti	30
3.3.1. Analytický výpočet	30
3.3.2. MKP výpočet s využitím optimalizačních metod	32
3.4. Výsledky jednotlivých variant statorových svazků	36
<b>4. Citlivostní analýza</b>	<b>39</b>
4.1. Obecný postup při provádění citlivostní analýzy	39
4.2. Postup a metody citlivostní analýzy v ANSYSu	41
4.2.1. Definování vstupních a výstupních proměnných	41
4.2.2. Volba metody a výpočet simulací	42
4.2.3. Určení citlivostí	47
4.3. Citlivostní analýza statorového svazku	48
4.3.1. Výběr vstupních a výstupních proměnných	49
4.3.2. Volba metody výpočtu	51
4.3.3. Výsledky citlivostní analýzy	52
<b>5. Vliv tuhosti svazku na modální vlastnosti stroje</b>	<b>55</b>
5.1. Model geometrie stroje	55
5.2. Konečnoprvkový model	56
5.2.1. Použité materiály a prvky	56
5.2.2. MKP síť	57
5.3. Výsledky modální analýzy	59
5.3.1. Statorové svazky o vnitřním průměru 1250 mm	60
5.3.2. Statorové svazky o vnitřním průměru 1100 mm	61
5.3.3. Analýza výsledků	61
<b>6. Závěr</b>	<b>65</b>
<b>Literatura</b>	<b>67</b>

Seznam použitých zkratek a symbolů	69
Seznam příloh	72

# 1. Úvod

Statorový svazek je jednou z hlavních konstrukčních částí elektrických točivých strojů a jako takový je poměrně složitou strukturou, skládající se z několika různých materiálů s výrazně odlišnými mechanickými vlastnostmi. Zároveň představuje výztužný prvek celé konstrukce a také podstatnou část hmotnosti celého stroje, tedy je logické, že bude ovlivňovat i modální vlastnosti konstrukce točivého stroje, to znamená jeho vlastní tvary a frekvence.

Při modální analýze stroje metodou konečných prvků (MKP) pak díky složitosti modelu svazku nastává problém zejména s velkým počtem prvků u této části konstrukce, což souvisí i s výrazným prodloužením výpočtových časů. Dalším problémem může být i samotné modelování celé struktury, zejména vinutí uloženého v drážkách, které je následně impregnováno. Zde lze však využít teorii vláknových kompozitů a nahradit tak impregnované vinutí homogenním materiálem.

V praxi se proto model svazku často významně zjednodušuje. Jednou z možností takového zjednodušení je nahrazení kompletního svazku dutým válcem, avšak při zachování jeho hmotnosti a tuhosti. Tento způsob zjednodušení modelu a výpočet tuhosti svazku je uveden v [6], v této práci bude k výpočtu tuhosti svazku použita stejná metoda.



## 2. Elektrické točivé stroje

V této kapitole bude alespoň v základech popsán princip funkce elektrických točivých strojů a také se zde zaměříme na konstrukci těchto zařízení. Protože tato práce se zabývá výpočtovou analýzou především synchronních strojů a jejich částí, zejména tedy statorových svazků, bude věnována pozornost pouze těmto strojům.

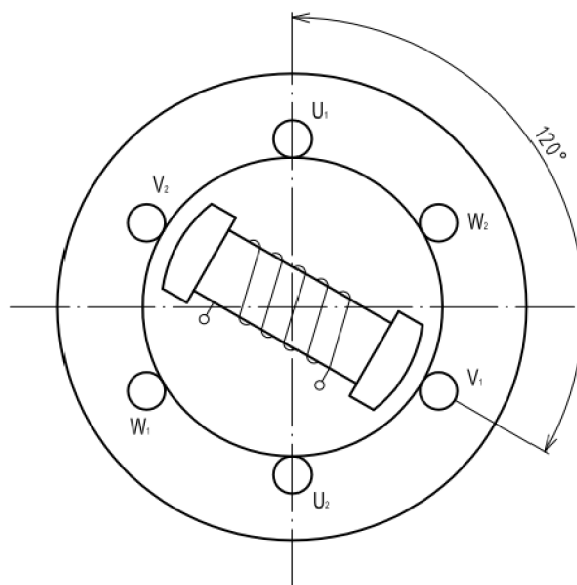
Tato kapitola poskytuje pouze základní informace o dané problematice a byla zpracována ze zdrojů [10], [21] a [23], detailní informace lze pak nalézt v těchto pramenech.

### 2.1. Synchronní stroje

Základní definice synchronního stroje dle [10] je následující: Synchronní stroj je takovým strojem, u něž existuje synchronismus, tedy shoda, mezi otáčkami magnetického pole statoru a otáčkami rotoru. To je hlavním rozdílem oproti strojům asynchronním, u nichž existuje tzv. skluz, tedy rozdíl mezi otáčkami magnetického pole statoru a otáčkami rotoru.

#### 2.1.1. Princip funkce synchronního stroje

Princip synchronního stroje si nejprve vysvětlíme na trojfázovém alternátoru. Statorové vinutí je tvořeno třemi fázovými cívkami, které jsou vzájemně natočeny o  $120^\circ$ , což je patrné na obr. 2.1. Na rotoru stroje se pak nachází budicí vinutí, které je napájeno stejnosměrným proudem buď přímo ze zdroje tohoto proudu, nebo z vlastního budiče přes sběrací kroužky. Budičem bývá střídavý generátor nesený na společné hřídeli, který skrz usměrňovač napájí budicí vinutí. Vinutí na rotoru tedy vytváří časově stálé magnetické pole.



Obr. 2.1: Schéma synchronního stroje [23].

## 2.1. SYNCHRONNÍ STROJE

Pokud se rotor otáčí konstantní rychlostí, tak se vlivem indukčního zákona ve statorovém vinutí indukují střídavá napětí, jejichž frekvence  $f\sim$  je přímo úměrná otáčkám rotoru  $n_r$  v  $\text{min}^{-1}$  a počtu pólových dvojic  $p$ . Danou závislost popisuje rovnice (2.1) [23]. Průběh indukovaných napětí bude sinový, jednotlivá napětí budou vůči sobě časově posunuta o  $120^\circ$ , tedy o  $\frac{2}{3}\pi$ .

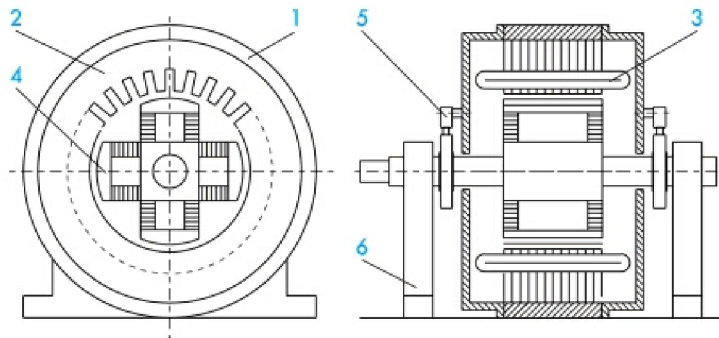
$$f\sim = \frac{p n_r}{60} \quad (2.1)$$

Při otáčení rotoru alternátoru pracovním strojem vytvářejí trojfázové proudy statoru kruhové točivé magnetické pole, které má stejnou rychlost otáčení jako rotor a jeho magnetické pole. Z tohoto důvodu se stroj nazývá synchronním.

V případě synchronního motoru je vinutí ve statoru napájeno střídavým trojfázovým proudem, které vytvoří točivé magnetické pole. Vinutí v rotoru je napájeno stejnosměrným proudem. Pokud roztočíme rotor vnějším působením na synchronní otáčky, budou se nesouhlasné póly elektromagnetu rotoru a točivého pole statoru vzájemně přitahovat, otáčky rotoru a magnetického pole statoru budou shodné, vznikne mezi nimi tedy synchronismus.

### 2.1.2. Konstrukční uspořádání

Synchronní stroj se skládá z několika základních částí, které lze vidět na obr. 2.2. V tomto konkrétním případě je zde zobrazen synchronní alternátor (hydroalternátor), některé jeho vlastnosti a použití bude popsáno v kapitole 2.1.3, zde si však na tomto stroji pouze obecně vysvětlíme konstrukci synchronních strojů.



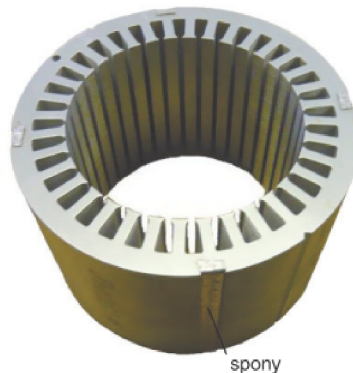
Obr. 2.2: Základní prvky konstrukce synchronního stroje [20].

Pozice na obr. 2.2 popisují následující konstrukční prvky:

1. *Stator* – tvoří základní rám, ke kterému je připevněn statorový svazek a další prvky konstrukce.
2. *Statorový svazek* – představuje magnetický obvod stroje, v podstatě jde o dutý válec složený z vystřížených plechů vzájemně izolovaných např. lakem (z důvodů minimalizace ztrát vlivem vířivých proudů). Vystřížené plechy bývají nejčastěji vzájemně spojovány nýtováním, plechovými sponami po obvodu nebo svařováním. Příklad svazku spojeného sponami lze vidět na obr. 2.3. Na vnitřním obvodu jsou umístěny drážky, které obsahují třífázové vinutí.

## 2.1. SYNCHRONNÍ STROJE

3. *Statorové vinutí* – je uloženo v drážkách statorového svazku ve formě měděných drátů nebo tyčí. Z důvodů ochrany vinutí před elektrickými a mechanickými vlivy bývá po navinutí impregnováno vhodným lakem nebo epoxidovou pryskyřicí. Od statorových plechů je odděleno izolací a z vnitřní strany svazku je drážka uzavřena klínem z nevodivého materiálu.
4. *Rotor* – je umístěn na hřídeli a tvořen z plné ocele, nikoliv z plechů, jako tomu bylo v případě statoru, protože se otáčí synchronně s magnetickým polem a nevznikají v něm ztráty v železe. Stejnoseměrné vinutí je uloženo buď v drážkách rotoru nebo navinuto na vyniklých pólech.
5. *Sběrací kroužky* – slouží pro napájení rotorového vinutí stejnosměrným proudem.
6. *Ložiskový stojan* – jsou v něm umístěna valivá nebo kluzná ložiska pro rotační uložení hřídele, u některých strojů jsou ložiska zakomponována přímo v kostře statoru.



Obr. 2.3: Statorový svazek spojený sponami [21].

### 2.1.3. Rozdělení a použití

Synchronní stroje se podle použití dělí do dvou základních kategorií na:

- **Alternátory (generátory)**
- **Motory**

#### Alternátory (generátory)

Jedná se o hlavní zdroje pro napájení elektrických sítí a zároveň také o jedny z největších elektrických točivých strojů. Tyto stroje bývají často označovány pouze jako generátory a to z důvodu jejich funkce, tedy výroby elektrické energie.

Využívají se tedy zejména v elektrárnách, kde jsou poháněny buďto parními turbínami anebo turbínami vodními. Od toho je pak odvozeno i jejich další dělení, tedy na *turboalternátory* a *hydroalternátory*.

*Turboalternátory* jsou charakteristické velkou osovou délkou a poměrně malým průměrem vzhledem k jejich délce. Jedná se o stroje s hladkým rotorem, to znamená, že



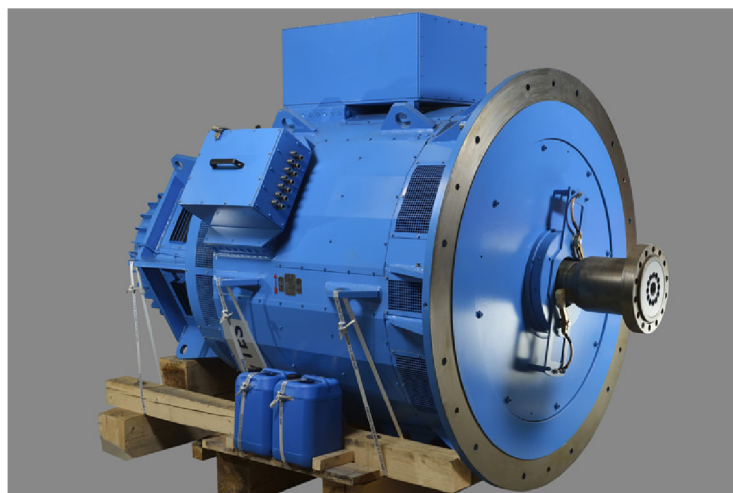
## 2.1. SYNCHRONNÍ STROJE

budící vinutí je uloženo v drážkách uvnitř rotoru, tyto drážky jsou následně uzavřeny klíny, čímž vznikne kompaktní celek rotoru, tzv. hladký rotor. Tento typ rotoru je zde použit především z důvodu mechanické pevnosti při vysokých otáčkách, turboalternátory totiž standardně dosahují otáček  $3000 \text{ min}^{-1}$ , což odpovídá síťové frekvenci 50 Hz. Příklad turboalternátoru použitého v tepelné elektrárně lze vidět na obr. 2.4.



Obr. 2.4: Turboalternátor firmy Alstom [2].

*Hydroalternátory* jsou oproti tomu stroje s malou osovou délkou a velkým průměrem. Protože se jedná o pomaloběžné stroje, které nedosahují síťové frekvence 50 Hz, je nutné, aby rotor obsahoval více pólových párů. Póly jsou v tomto případě v tzv. vyniklém provedení mimo rotor, na nich je pak navinuto budící vinutí, zakončeny jsou obvykle pólovými nástavci. U menších strojů může být budící vinutí nahrazeno permanentními magnety. Příklad hydroalternátoru vyráběného firmou TES Vsetín s.r.o. můžeme vidět na obr. 2.5.



Obr. 2.5: Hydroalternátor vyráběný firmou TES Vsetín s.r.o. [22].

Výše popsané rozdělení na turboalternátory a hydroalternátory dnes však není zcela přesné. Stále platí zmíněná oblast použití, avšak mohou existovat i hydroalternátory, které používají hladký rotor místo rotoru s vyniklými póly. Pólové páry jsou pak umístěny uvnitř



rotoru. Příkladem může být například řada generátorů GSH společnosti TES Vsetín s.r.o., viz. [22].

### Motory

Z konstrukčního hlediska není mezi motorem a alternátorem velký rozdíl, mnoho těchto strojů může pracovat jak v motorickém, tak generátorickém režimu, čehož se využívá například v přečerpávacích elektrárnách, kde během dne v případě energetických špiček pracují synchronní stroje jako alternátory, v noci pak dochází k přečerpání vody do horní nádrže, což se děje za pomoci stejných strojů, pouze pracujících jako synchronní motory.

Jednou z hlavních nevýhod synchronních motorů je však nemožnost jejich samostatného rozběhu. K tomuto účelu se nejčastěji používají některé z následujících metod:

- Rozběh pomocným motorem
- Asynchronní rozběh
- Frekvenční rozběh

*Rozběh pomocným motorem* je dnes už poněkud zastaralým způsobem. Pomocí rozběhového motoru bylo dosaženo synchronních otáček, následně se motor připojil a nabudil.

*Asynchronní rozběh* je jedním z nejpoužívanějších způsobů rozběhu, využívá k tomu další vinutí na rotoru, které je uloženo v jeho drážkách a tvoří podobně jako u asynchronního motoru klec nakrátko. Motor se spouští nezatížený, někdy pomocí autotransformátoru. K připojení a nabuzení dochází po dosažení otáček blízkých otáčkám synchronním, motor je pak tzv. „vtažen“ do synchronismu.

Nejmodernější metodou je však *frekvenční rozběh*, který využívá frekvenčního měniče napájející motor. Při nižších frekvencích napájecího napětí je totiž motor schopen přechodu do synchronního režimu, postupným zvyšováním frekvence pak dojde k jeho rozběhu.



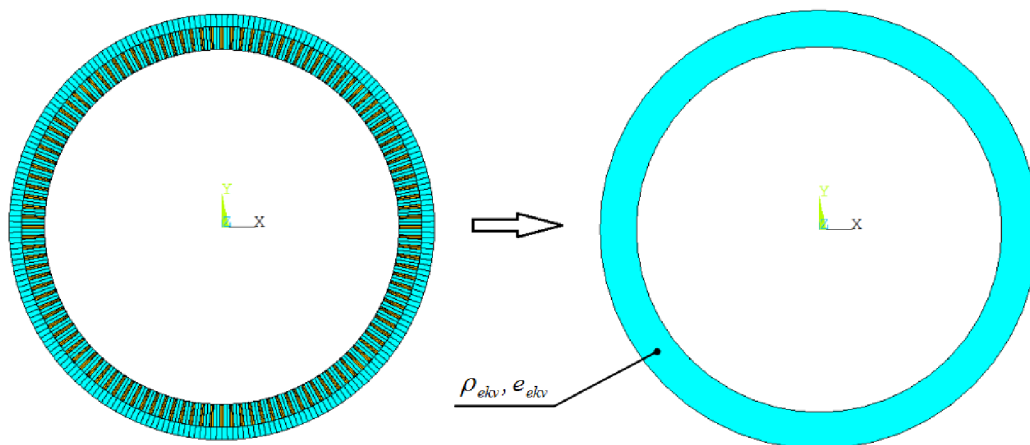
### 3. Výpočet tuhosti statorového svazku

Jak už bylo naznačeno v 1. kapitole a je uvedeno v [6], základním principem je nahrazení kompletního statorového svazku dutým válcem se stejnými modálními vlastnostmi. Dalším zjednodušením je také fakt, že výpočet můžeme provést ve 2D, tedy v podstatě jeden segment svazku nahradíme mezikružím, které bude tvořeno homogenním izotropním materiálem, což je patrné na obr. 3.1.

Tato náhrada však dobře funguje pouze pro první dvě vlastní frekvence a jim odpovídající tvary, u vyšších tvarů už se frekvence poměrně odlišují. To ovšem není až takový problém, protože frekvenční rozsah vymezený druhou vlastní frekvencí je pro následnou modální analýzu stroje dostačující.

Pro zachování stejných modálních vlastností musíme určit tzv. *ekvivalentní hustotu* –  $\rho_{ekv}$  a *ekvivalentní modul pružnosti* –  $e_{ekv}$ , který v podstatě určuje právě tuhost statorového svazku. Jedná se vlastně o materiálové vlastnosti, které jsou v případě homogenního izotropního materiálu nutné pro modální analýzu. Figuruje zde samozřejmě i Poissonovo číslo, to však v tomto případě první dva vlastní tvary a frekvence nijak výrazně neovlivňuje, můžeme tedy použít hodnotu stejnou jako pro ocel.

Princip určení ekvivalentní hustoty a ekvivalentního modulu pružnosti bude blíže popsán v kapitolách 3.2, resp. 3.3.



Obr. 3.1: Náhrada statorového svazku mezikružím.

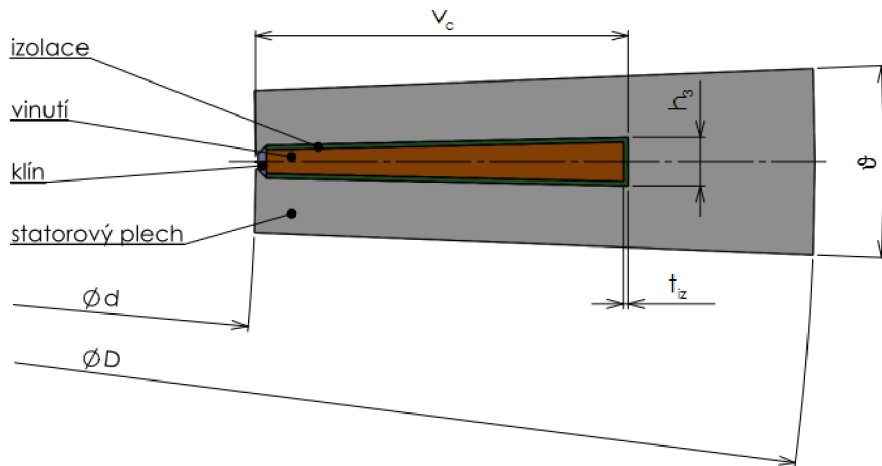
#### 3.1. Výpočet modálních vlastností svazku

Provedeme tedy modální analýzu statorového svazku v rovině, klíčové bude správné vytvoření geometrie a určení materiálových vlastností u všech prvků konstrukce svazku. Pro výpočty byla využita metoda konečných prvků (MKP) v softwaru ANSYS 13.0 v rozhraní Mechanical APDL.

### 3.1. VÝPOČET MODÁLNÍCH VLASTNOSTÍ SVAZKU

#### 3.1.1. Geometrie pro výpočtový model

Protože geometrie svazku je rotační, periodicky se opakující struktura, tak lze v ANSYSu využít funkce cyklické symetrie a modelovat tak pouze jeden segment svazku, jak je patrné na obr. 3.2. Tento segment byl modelován v souladu s výkresovou dokumentací společnosti TES Vsetín s.r.o..



Obr. 3.2: Geometrie segmentu svazku pro výpočtový model.

Na tomto obrázku je schématicky vidět, z jakých částí je svazek složen a také jsou zde vyznačeny důležité kóty, jmenovitě tyto:

- $\phi d$  – vnitřní průměr svazku
- $\phi D$  – vnější průměr svazku
- $\vartheta$  – úhel segmentu, je určen celkovým počtem drážek  $p_{dr}$ , tedy  $\vartheta = \frac{360}{p_{dr}}$
- $h_3$  – šířka drážky horní
- $t_{iz}$  – tloušťka izolace
- $v_c$  – celková výška drážky

V této práci bude vypočtena tuhost pro velké množství variant statorových svazků – jednotlivá provedení se liší právě ve výše uvedených kótách.

#### Zjednodušení geometrie

Model geometrie byl oproti realitě poněkud zjednodušen, tato zjednodušení mají minimální vliv na vypočtené výsledky, avšak velice nám usnadní tvorbu modelu a také přispějí ke snížení celkového počtu prvků u MKP výpočtu.

Prvním zjednodušením je zanedbání všech radiusů (zaoblení) v modelu, protože neprovádíme deformačně-napěťovou analýzu, není třeba tato zaoblení modelovat, čímž snížíme počet prvků v následné modální analýze.

### 3.1. VÝPOČET MODÁLNÍCH VLASTNOSTÍ SVAZKU

Statorový plech dále obsahuje po vnějším obvodu 12 nepřilíš hlubokých kosodélníkových výřezů, které slouží k upevnění svazku ke kostře stroje. Tyto výřezy v modelu také nebudou zahrnuty, protože by znemožnily využití cyklické symetrie v rozsahu, jež je patrný z obr. 3.2 a tím pádem by došlo i k prodloužení výpočtových časů. Vliv těchto výřezů na modální vlastnosti celé struktury bude zanedbatelný.

#### 3.1.2. Materiálové vlastnosti

Pro modální analýzu je třeba zjistit materiálové vlastnosti jednotlivých komponent použitých ve statorovém svazku, u všech bude použit lineární izotropní materiálový model a předpokládána homogenní hustota. Bude tedy třeba určit modul pružnosti v tahu, Poissonovo číslo a hustotu u všech materiálů.

Například u statorového plechu, který je z oceli a mědi ve vinutí jsou tyto vlastnosti obecně známy, naopak u izolace, klínů a impregnace už tomu tak není. Ideální by bylo provést materiálové zkoušky pro tyto materiály, to však bohužel nebylo možné, takže bude třeba určit jejich vlastnosti z literatury.

Problémem je také to, že skutečně izotropní materiály jsou pouze měď a ocel. Polyestrová pryskyřice použitá pro impregnaci není zcela izotropním materiálem (rozdílný modul pružnosti v tahu a tlaku), u dalších se jedná o kompozitní materiály, které jsou tvořené maticí a vlákny. U impregnace však můžeme tento fakt zanedbat, protože při pohledu do tab. 3.1 vidíme, že hodnota modulu pružnosti v tahu  $E$  je zhruba o dva řády nižší, než v případě mědi a ocele, tj. materiálů, které tvoří většinu svazku. Vliv této částečné materiálové anizotropie tedy bude minimální.

Výše je uvedeno, že všechny použité materiálové modely budou lineárně izotropní, nabízí se tak otázka, zda je možné použít tento druh modelu i pro kompozitní materiály, které jsou v tomto případě transversálně izotropní. Za určitých podmínek to možné je, a to tehdy, pokud je materiál v modelu na obr. 3.2 orientován tak, že zde bude ležet jeho rovina izotropie. To znamená, že vlákna kompozitního materiálu budou v tomto případě umístěna pouze ve směru osy svazku, což zde bude splněno u všech materiálů.

Charakteristiku transversálně izotropního materiálu dle teorie vláknových kompozitů si popíšeme v následující podkapitole.

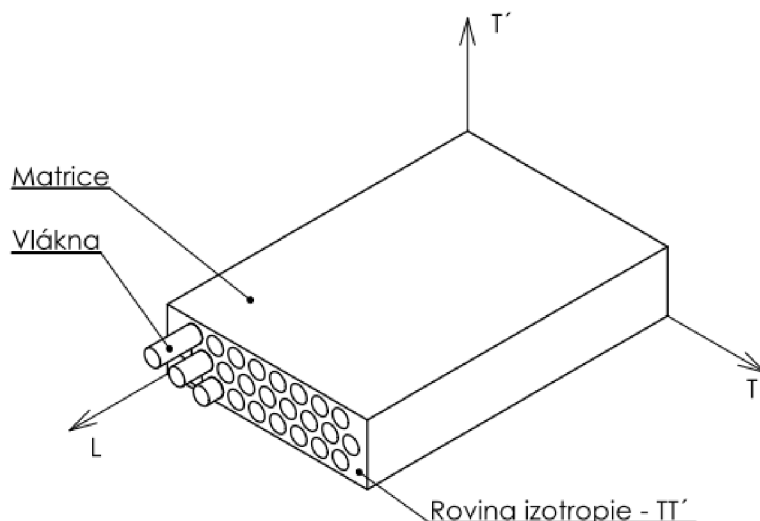
#### Transverzálně izotropní materiál

Popis tohoto materiálu je uveden například v [12] podstatně obsáhleji, zde si však uvedeme pouze některé nejdůležitější vlastnosti. Tato podkapitola je zpracována především z výše uvedeného zdroje.

Transverzálně izotropní kompozitní materiál je složen z vláken a matrice, má 3 roviny symetrie, v hlavních materiálových osách  $L$ ,  $T$  a  $T'$  jsou to roviny  $LT$ ,  $LT'$  a  $TT'$ . V jedné z těchto rovin se však chová izotropicky. Na obr. 3.3 vidíme příklad kompozitu vyztuženého vlákny ve směru  $L$ , tedy ve směru longitudinálním. V tomto případě bude rovinou izotropie rovina kolmá k vláknům, tedy rovina  $TT'$ .

Pro popis tohoto typu materiálu je obecně nutné použít 5 materiálových konstant, protože jsou však materiálové vlastnosti v některých směrech a rovinách shodné, lze si vybrat z několika variant. Nejčastěji se však uvádějí konstanty následující: moduly pružnosti v tahu ve směrech  $L$  a  $T$ , modul pružnosti ve smyku v rovině  $LT$  a dvě Poissonova čísla,  $\mu_{LT}$  a  $\mu_{TT'}$ . Pokud však budeme zatěžovat materiál v rovině izotropie, postačí nám

### 3.1. VÝPOČET MODÁLNÍCH VLASTNOSTÍ SVAZKU



Obr. 3.3: Transverzálně izotropní kompozitní materiál.

pouze dvě konstanty, stejně jako v případě izotropního materiálu. Půjde o modul pružnosti v tahu ve směru  $T$ , jež se značí  $E_{t,T}$  a Poissonovo číslo  $\mu_{T\hat{T}}$ .

První index u Poissonova čísla vyjadřuje index silového působení, tedy v jakém směru je materiál zatížen, druhý pak směr, ve kterém se přetvoření měří.

#### Přehled materiálových vlastností

Následující tabulka (tab. 3.1) obsahuje materiálové vlastnosti všech komponent použitých ve statorovém svazku. Je zde uveden modul pružnosti v tahu  $E$ , Poissonovo číslo  $\mu$  a hustota  $\rho$  pro izotropní materiály, u transversálně izotropních je uvedeno  $E_{t,T}$  a  $\mu_{T\hat{T}}$ . U materiálů, jejichž mechanické vlastnosti nejsou obecně známy, je také uveden zdroj, ze kterého data pocházejí.

Komponenta	Materiál	$E$ [GPa]	$\mu$ [-]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	Zdroj
statorový plech	ocel	210	0,30	7850	–
vinutí	měď	120	0,35	8960	–
impregnace vinutí	Ultimeg 2000	3,45	0,40	1090	[1], [13]
Komponenta	Materiál	$E_{t,T}$ [GPa]	$\mu_{T\hat{T}}$ [-]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	Zdroj
klíny	Sklotextit G11	10,5	0,41	1900	[9], [17]
izolace	Nomex	2,46	0,40	670	[5], [8]

Tab. 3.1: Materiálové vlastnosti jednotlivých komponent.

Materiály jako Sklotextit, Nomex a Ultimeg jsou registrovanými značkami jejich výrobců. Sklotextit představuje v podstatě sklolaminát, tzv. „Nomexový papír“ je speciální tkaninou z aramidového vlákna odolávajícím i vysokým teplotám [5] a impregnace Ultimeg je tvořena epoxidovou pryskyřicí [1]. Všechno tyto materiály spojují výborné dielektrické vlastnosti, proto jsou také používány při výrobě statorových svazků.

### Výpočet materiálových vlastností impregnovaného vinutí

Materiálové vlastnosti všech komponent svazku už známe, teď bude třeba určit tyto vlastnosti u impregnovaného vinutí. Využijeme opět teorii vláknových kompozitů, impregnované vinutí bude vlastně transversálně izotropním dlouhovláknovým kompozitem, kde maticí bude polyesterová pryskyřice a vlákna bude představovat měděné vinutí. Protože v rovině modelu bude ležet i jeho rovina izotropie, můžeme s ním pracovat jako s izotropním materiálem. Opět budeme předpokládat i homogenní hustotu u tohoto materiálového modelu. Bude tedy třeba vypočítat  $E_{t,T}$ ,  $\mu_{T\acute{T}}$  a  $\rho$ .

Výpočty budou probíhat v následujících krocích:

1. Vypočteme modul pružnosti v tahu v transversálním směru  $E_{t,T}$  pomocí směšovacího pravidla dle rovnice (3.1) [12].

$$E_{t,T} = \left( \frac{v_f}{E_f} + \frac{1 - v_f}{E_m} \right)^{-1} \quad (3.1)$$

kde  $E_f$  je modul pružnosti v tahu vláken  
 $E_m$  je modul pružnosti v tahu matrice  
 $v_f$  značí objemový podíl vláken.

2. Pro výpočet Poissonova čísla  $\mu_{T\acute{T}}$  bude nejprve třeba určit modul pružnosti ve smyku  $G$  u vláken i matrice podle rovnice (3.2) [12] a následně můžeme vypočítat i modul pružnosti ve smyku v rovině  $T\acute{T}$ , jež se značí  $G_{T\acute{T}}$ , podle směšovacího pravidla, které popisuje rovnice (3.3) [12].

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (3.2)$$

$$G_{T\acute{T}} = \left( \frac{v_f}{G_f} + \frac{1 - v_f}{G_m} \right)^{-1} \quad (3.3)$$

kde  $G_f$  je modul pružnosti ve smyku vláken  
 $G_m$  je modul pružnosti ve smyku matrice.

3. Nyní můžeme vypočítat Poissonovo číslo  $\mu_{T\acute{T}}$ , to vypočteme tak, že z rovnice (3.2) vyjádříme  $\mu$  a ke všem veličinám doplníme příslušné indexy. Tím pak dostaneme rovnici (3.4).

$$\mu_{T\acute{T}} = \frac{E_{t,T}}{2G_{T\acute{T}}} - 1 \quad (3.4)$$

4. Na závěr vypočteme hustotu  $\rho$  a to pomocí směšovacího pravidla uvedeného v následující rovnici (3.5) [12].

$$\rho = v_f \rho_f + (1 - v_f) \rho_m \quad (3.5)$$

kde  $\rho_f$  je hustota vláken  
 $\rho_m$  představuje hustotu matrice.



### 3.1. VÝPOČET MODÁLNÍCH VLASTNOSTÍ SVAZKU

Výpočty všech materiálových vlastností provedeme pro několik hodnot objemového podílu vláken  $v_f$ , protože tento podíl nebyl zcela přesně znám. Byly zvoleny hodnoty od 0,75 až do 0,9, které by měly pokrýt nejpravděpodobnější rozsah objemového podílu. Horní hodnota 0,9 je hodnotou zcela maximální, protože jak lze snadno odvodit nebo nalézt např. v [15], maximální teoretický objemový podíl vláken kruhového průřezu v nejtěsnějším uspořádání u kompozitu je  $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ , což odpovídá přibližně 90,7 % vláken v matrici.

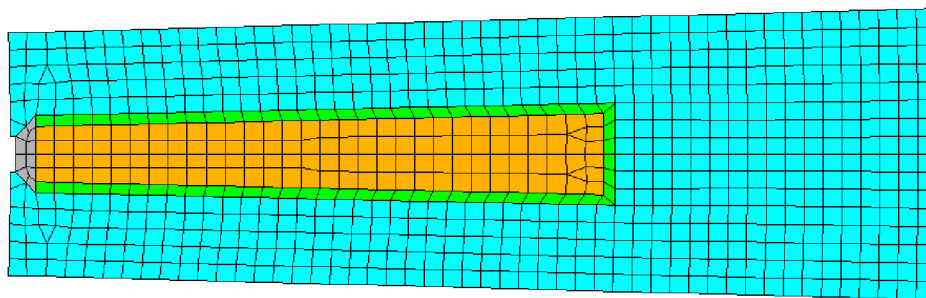
Všechny vypočtené hodnoty jsou shrnuty v tabulce 3.2, zde vidíme, že např. Poissonovo číslo se v závislosti na objemovém podílu vláken mění pouze velmi málo, na rozdíl od modulů pružnosti nebo hustoty.

$v_f$ [-]	$E_{t,T}$ [GPa]	$G_{TT}$ [GPa]	$\mu_{TT}$ [-]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]
0,75	12,70	4,550	0,396	6993
0,80	15,47	5,546	0,395	7386
0,85	19,78	7,099	0,393	7780
0,90	27,41	9,861	0,390	8173

Tab. 3.2: Vypočtené materiálové vlastnosti impregnovaného vinutí.

#### 3.1.3. Konečnoprvkový model

Konečnoprvkový model byl vytvořen na jednom segmentu svazku dle geometrie popsané v kapitole 3.1.1, pro vytvoření celé struktury svazku pak bylo využito cyklické symetrie. Jedná se o rovinný model složený pouze z prvků PLANE183, což je prvek s 8 uzly v případě čtyřúhelníkového provedení nebo s 6 uzly v jeho trojúhelníkovém provedení. V každém uzlu má tento prvek dva stupně volnosti a to posuvy ve směrech dvou navzájem kolmých os. Jde o prvek s kvadratickou bázovou funkcí, více viz. [3].



Obr. 3.4: MKP síť vytvořená na segmentu svazku.

Konečnoprvkovou síť můžeme vidět na obr. 3.4, barevně jsou zde rozlišeny jednotlivé materiály, které zde byly použity. Použité materiálové vlastnosti pro jednotlivé komponenty jsou uvedené v tabulkách 3.1 a 3.2 v případě impregnovaného vinutí. Pokud se jednalo o vysokonapěťové vinutí tvořené měděnými tyčemi, tak byl vnitřek drážky vyjma izolace tvořen pouze mědí.

Délka prvku byla nastavena na 2,5 mm na celém modelu, počet prvků se lišil, protože bylo počítáno velké množství variant. Jejich počet se pohyboval přibližně od 400 prvků



### 3.1. VÝPOČET MODÁLNÍCH VLASTNOSTÍ SVAZKU

pro nejmenší svazek a nejvyšší počet drážek až po zhruba 3000 prvků u největších svazků s nejmenším počtem drážek. To je počet poměrně velmi malý, kterého lze dosáhnout právě využitím cyklické symetrie. Pokud bychom této symetrie nevyužili, počet prvků by se při stejné hustotě sítě pohyboval v řádech statisíců, čímž by se významně prodloužily i výpočtové časy.

#### Okrajové podmínky

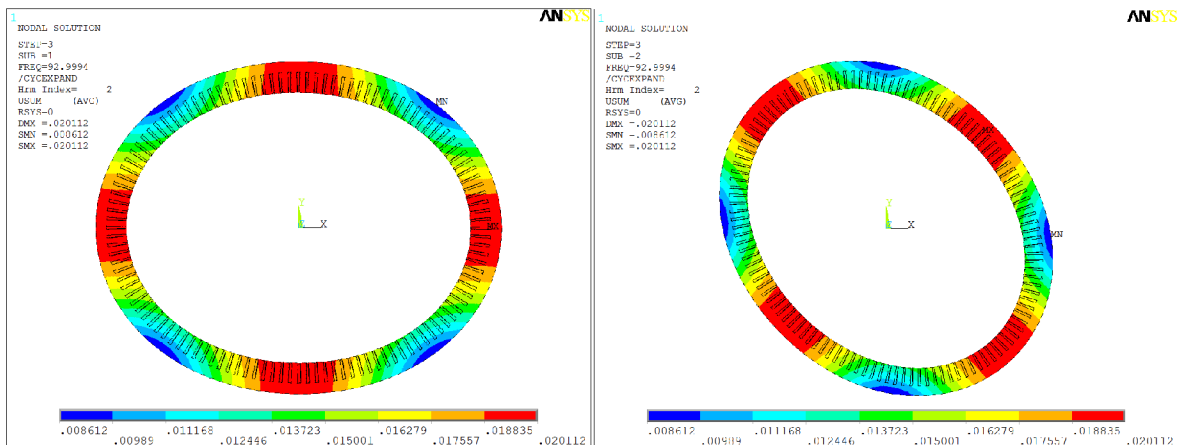
Situace ohledně okrajových podmínek zde bude poměrně jednoduchá, svazek bude totiž analyzován jako volná struktura bez žádných zadaných okrajových podmínek. Z toho vyplývá, že první tři vlastní frekvence svazku budou nulové, což odpovídá třem stupňům volnosti kontinua v rovině, tedy posuvům ve dvou osách a rotaci.

#### 3.1.4. Výsledky modální analýzy a srovnání s teorií

Při modální analýze bylo třeba určit první dva vlastní tvary a frekvence, vypočteno však bylo prvních 7 tvarů a frekvencí. Důvodem bylo to, že první tři jsou nulové a následné čtyři nenulové tvary jsou ve dvojicích sdružené. To znamená, že vlastní frekvence je stejná pro vzájemně sdružené tvary, tvary jako takové se však liší pouze natočením v souřadném systému. Tato vlastnost je způsobena symetrií analyzované struktury, tedy svazku.

Pro modální analýzu bylo využito metody Block Lanczos, která využívá Lanczosovy rekurze, která se provádí se skupinou (blokem) vektorů. Metoda používá řešič tzv. „říd-kých“ matic (sparse matrix solver), blíže viz. [3].

Nyní si uvedeme výsledky pro jeden z analyzovaných svazků. Nejprve tedy vlastní tvary, které jsou zobrazeny na obrázcích 3.5 a 3.6, následně také vlastní frekvence, které těmto tvarům přísluší, ty jsou uvedeny v tab. 3.3. Protože první tři tvary mají nulovou vlastní frekvenci a následné nenulové tvary jsou sdružené, budeme dále vždy označovat jako první a druhý tvar tvary v tab. 3.3 popsané jako 4. a 7. tvar.

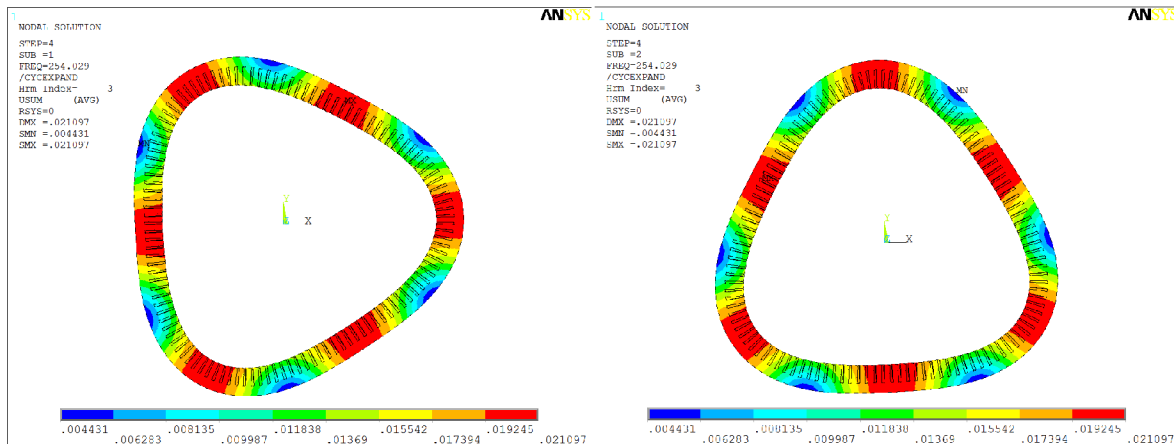


Obr. 3.5: Čtvrtý a pátý vlastní tvar svazku.

Tvar	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Vlastní frekvence [Hz]	0	0	0	93,00	93,00	254,03	254,03

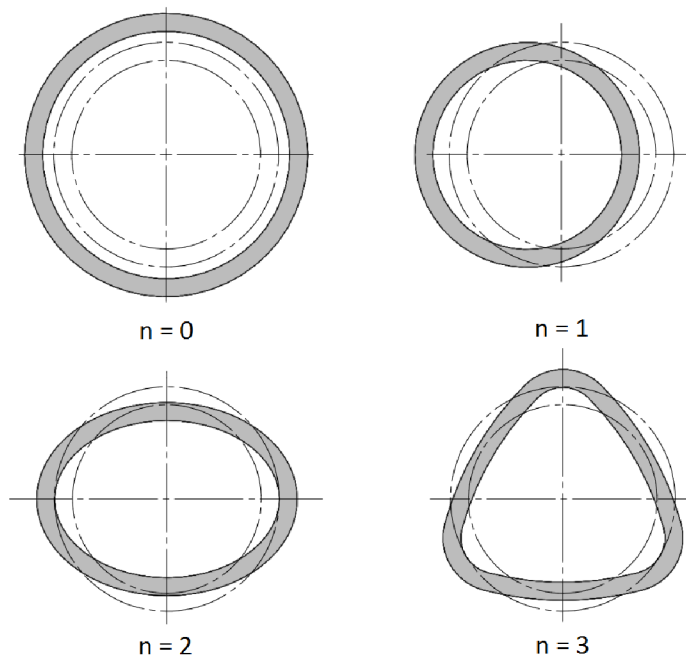
Tab. 3.3: Vlastní frekvence odpovídající jednotlivým tvarům.

### 3.1. VÝPOČET MODÁLNÍCH VLASTNOSTÍ SVAZKU



Obr. 3.6: Šestý a sedmý vlastní tvar svazku.

Jak je patrné z výše uvedených obrázků, jedná se o ohybové vlastní tvary, dle [18] jde o tzv. tvary druhého a třetího řádu. V této publikaci byly analyticky odvozeny vlastní tvary kmitání volného nezatiženého kruhového prstence v rovině a vztah pro výpočet vlastních frekvencí příslušejících těmto tvarům. Na obr. 3.7 jsou v souladu s [18] zobrazeny tvary nultého ( $n = 0$ ) až třetího ( $n = 3$ ) řádu. Původní nedeformovaná geometrie je zde vyznačena čerchovanými čarami.



Obr. 3.7: Tvary kmitání kruhového prstence určené analyticky.

Pokud se blíže zaměříme na jednotlivé tvary, tak vidíme, že u tvaru nultého řádu ještě nedochází k ohybu, jedná se v podstatě o „nafukování“ plochy. V anglické literatuře se tento tvar někdy označuje jako *breathing mode*. Jeho frekvence jsou však dle [18] několikanásobně vyšší než u tvarů ohybových.

Tvar prvního řádu je v podstatě bezvýznamný, představuje totiž pohyb prstence jako tuhého tělesa v rovině, jemu odpovídající frekvence je nulová. Tvary dalších řádů už jsou

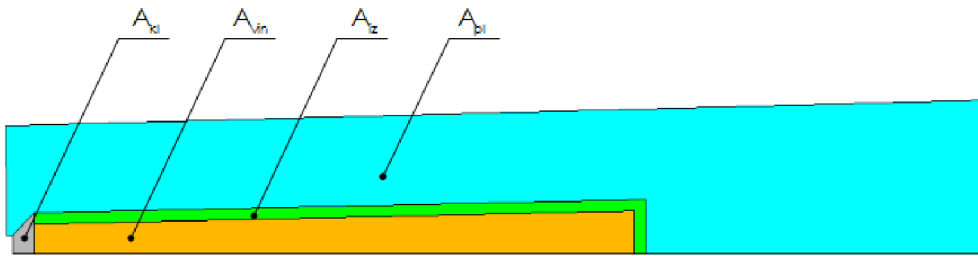
ohybové, energeticky nejméně náročné a tedy i nejsnáze vybuditelné, což je patrné i na zde provedené modální analýze, kde první dva nenulové vlastní tvary jsou právě ohybové.

### 3.2. Výpočet ekvivalentní hustoty

Jedním z nejpřesnějších způsobů určení ekvivalentní hustoty statorového svazku by byl její výpočet skrze reálnou hmotnost svazku a jeho objem, jež je dán geometrií. Bylo by tedy nutné vážít každý svazek – pro tak velké množství analyzovaných variant je to však nereálné, už jen z toho důvodu, že výroba je především zakázková a jednotlivé varianty fyzicky neexistují.

Hustotu však můžeme vypočítat poměrně jednoduchým způsobem: Budeme vycházet z modelu geometrie vytvořené v ANSYSu, přesněji vezmeme pouze polovinu modelovaného segmentu svazku (protože byl modelován jako symetrický), zjistíme obsahy jednotlivých ploch reprezentujících různé materiály, a protože hustoty všech materiálů jsou známy, můžeme využít v podstatě směšovacího pravidla pro hustotu z rovnice (3.5) v kapitole 3.1.2. Toto pravidlo pouze rozšíříme pro více složek a objemové podíly  $v_f$  nahradíme podíly plošnými, tedy podílem jednotlivých ploch ku ploše celku.

Polovinu segmentu svazku spolu s označením obsahu jednotlivých ploch můžeme vidět na obr. 3.8. Obsahy ploch jsou v označení odlišeny dolními indexy dle názvu komponenty, jmenovitě tedy  $A_{kl}$ ,  $A_{vin}$ ,  $A_{iz}$  a  $A_{pl}$ .



Obr. 3.8: Polovina segmentu svazku s vyznačenými obsahy ploch.

Ekvivalentní hustotu  $\rho_{ekv}$  tedy vypočteme podle rovnice (3.6), která byla sestavena způsobem uvedeným výše.

$$\rho_{ekv} = \frac{A_{kl}}{A_c} \rho_{kl} + \frac{A_{vin}}{A_c} \rho_{vin} + \frac{A_{iz}}{A_c} \rho_{iz} + \frac{A_{pl}}{A_c} \rho_{pl} \quad (3.6)$$

kde  $A_{kl}$ ,  $A_{vin}$ ,  $A_{iz}$  a  $A_{pl}$  označují obsahy jednotlivých ploch

$A_c$  značí plochu celkovou, která je dána součtem obsahů všech ploch

$\rho_{kl}$ ,  $\rho_{vin}$ ,  $\rho_{iz}$  a  $\rho_{pl}$  jsou hustoty jednotlivých komponent.

Při integraci tohoto výpočtu do makra pro výpočet modálních vlastností svazku v ANSYSu získáme ekvivalentní hustotu vždy při výpočtu každé varianty svazku. Protože těchto variant bylo počítáno vždy více najednou pro daný typ stroje, bylo pak možné výsledky, tedy vlastní frekvence a ekvivalentní hustoty exportovat v podobě vektorů dat a použít je k následnému určení ekvivalentního modulu pružnosti.

### 3.3. Výpočet ekvivalentního modulu pružnosti

Principem výpočtu je určit takový ekvivalentní modul pružnosti  $e_{ekv}$ , který by při použití v homogenním izotropním rovinném modelu svazku spolu s ekvivalentní hustotou  $\rho_{ekv}$  zaručil shodné první dva vlastní tvary a přibližně stejné vlastní frekvence odpovídající těmto tvarům. Model svazku je stejně jako v předchozím případě volný a nezatížený.

Výpočet provedeme nejprve analyticky s využitím teorie kmitání kruhového prstence v rovině a následně i pomocí MKP s využitím některých optimalizačních metod v ANSYSu.

#### 3.3.1. Analytický výpočet

Při tomto výpočtu budeme nejprve potřebovat vztahy pro výpočet vlastních frekvencí kruhového prstence v rovině, ty budeme čerpat z [18] – konkrétně jde o rovnice (3.7) – (3.13). Je zde uvedeno, že druhá mocnina vlastní úhlové frekvence  $n$ -tého řádu  $\omega_n^2$  se vypočítá podle rovnice (3.7).

$$\omega_n^2 = \frac{K_1}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{K_2}{K_1^2}} \right) \quad (3.7)$$

Pro každý  $n$ -tý mód (od  $n \geq 2$ ) tedy existují dvě různé frekvence, jak je však popsáno v [18], tak frekvence, která je vždy vyšší, tedy ta uvedená v rovnici (3.8) jako  $\omega_{n2}$ , odpovídá nultému tvaru (viz. obr. 3.7). Dominuje zde obvodová deformace, nás však v tomto případě zajímají pouze tvary ohybové.

$$\omega_{n2}^2 = \frac{K_1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4 \frac{K_2}{K_1^2}} \right) \quad (3.8)$$

Ohybovým tvarům odpovídá vždy nižší frekvence, tedy  $\omega_{n1}$  uvedená v následující rovnici (3.9).

$$\omega_{n1}^2 = \frac{K_1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{K_2}{K_1^2}} \right) \quad (3.9)$$

V tomto vztahu dále figurují neznámé  $K_1$  a  $K_2$ , ty jsou určeny v rovnicích (3.10) a (3.11)

$$K_1 = \frac{n^2 + 1}{R^2 \rho h} \left( \frac{n^2 D}{R^2} + K \right) \quad (3.10)$$

$$K_2 = \frac{n^2 (n^2 - 1)^2}{R^6 (\rho h)^2} DK \quad (3.11)$$

Neznámá  $h$  představuje tloušťku stěny prstence,  $n$  je řád (mód) tvaru,  $R$  je střednicový poloměr a konstanty  $K$  a  $D$  představují membránovou, resp. ohybovou tuhost. Membránová a ohybová tuhost je definována ve vztazích (3.12) a (3.13).

$$K = \frac{Eh}{1 - \mu^2} \quad (3.12)$$

### 3.3. VÝPOČET EKVIVALENTNÍHO MODULU PRUŽNOSTI

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad (3.13)$$

Nyní známe všechny rovnice nutné pro výpočet vlastních frekvencí, naším úkolem však bude pro danou frekvenci určit ekvivalentní modul pružnosti, jedná se tedy o inverzní úlohu. Bude tedy nutné rovnice (3.10) – (3.13) vzájemně dosadit do rovnice (3.9) a následně pak vyjádřit  $E$ .

Mnoha algebraickými operacemi, případně využitím matematického softwaru Maple získáme rovnici (3.14), zde už pouze dosadíme za  $\omega_{n1}$  pro přepočtení na frekvenci v Hertzcích  $2\pi f_n$  a provedeme symbolickou úpravu, ve které modul pružnosti  $E$  nahradíme modulem ekvivalentním, tedy  $e_{ekv}$ . Tímto se dostaneme k výsledné rovnici (3.15).

$$E = \frac{24 \omega_{n1}^2 \rho R^4 (1 - \mu^2)}{(n^2 + 1)(h^2 n^2 + 12 R^2)(1 - \sqrt{C})} \quad (3.14)$$

$$e_{ekv} = \frac{96 \pi^2 f_n^2 \rho R^4 (1 - \mu^2)}{(n^2 + 1)(h^2 n^2 + 12 R^2)(1 - \sqrt{C})} \quad (3.15)$$

Zde je jedinou neznámou  $C$ , což je konstanta, kterou jsme zavedli pro přehlednost výsledného výrazu. Konstanta  $C$  je závislá pouze na geometrii prstence a řádu tvaru kmitání  $n$ . Popsána je v následující rovnici (3.16).

$$C = \frac{h^4 n^8 + 2 h^4 n^6 + h^4 n^4 - 24 h^2 n^6 R^2 - 24 h^2 n^2 R^2 + 144 h^2 n^4 R^2}{(h^2 n^2 + 12 R^2)^2 (n^2 + 1)^2} + \frac{144 n^4 R^4 + 288 n^2 R^4 + 144 R^4}{(h^2 n^2 + 12 R^2)^2 (n^2 + 1)^2} \quad (3.16)$$

Po několika úpravách ji můžeme zjednodušit do tvaru v rovnici (3.17).

$$C = \frac{(h^4 n^4 + 144 R^4) (n^2 + 1)^2 - 24 h^2 n^2 R^2 (n^4 - 6 n^2 + 1)}{(h^2 n^2 + 12 R^2)^2 (n^2 + 1)^2} \quad (3.17)$$

#### Výpočet pro vzorový model svazku

Výpočet provedeme na modelu svazku, jež jsme analyzovali v kapitole 3.1.4, známe tedy jeho první dvě vlastní frekvence, jež odpovídají ohybovým tvarům. Vypočteme nejprve ekvivalentní modul pružnosti  $e_{ekv}$  z první vlastní frekvence příslušející druhému módu kmitání ( $n = 2$ ) a následně pro porovnání i z druhé vlastní frekvence, která souvisí s třetím módem ( $n = 3$ ). Všechny rozměry, materiálové vlastnosti nutné pro výpočet a také výsledky jsou uvedeny v tab. 3.4.

$h$ [m]	$R$ [m]	$\rho_{ekv}$ [kg·m <sup>-3</sup> ]	$\mu$ [-]	$n$ [-]	$f_n$ [Hz]	$C$ [-]	$e_{ekv}$ [GPa]
0,12	0,66	7611,8	0,3	2	93,00	0,9845	52,3
				3	254,03	0,9396	48,9

Tab. 3.4: Vstupní parametry analytického výpočtu spolu s výsledky.



### 3.3. VÝPOČET EKVIVALENTNÍHO MODULU PRUŽNOSTI

V tab. 3.4 vidíme, že pro danou geometrii svazku se vypočtené ekvivalentní moduly pružnosti  $e_{ekv}$  v závislosti na módu kmitání  $n$  a odpovídající frekvenci  $f_n$  liší o 3,4 GPa. S vyšším módem a frekvencí tedy došlo k poklesu o přibližně 6,5 %. Tyto analytické výsledky později srovnáme s řešením pomocí MKP, které provedeme v následující kapitole.

#### 3.3.2. MKP výpočet s využitím optimalizačních metod

Pokud chceme určit modul pružnosti ze znalosti geometrie modelu, jeho některé vlastní frekvence a zbylých materiálových vlastností, jedná se o tzv. nepřímou úlohu. Dle [11] u klasických nepřímých úloh dochází vzhledem k úlohám přímým k invertování vstupů a výstupů. Z výstupů přímých úloh se stávají vstupy do úloh nepřímých (v tomto případě vlastní tvary a frekvence), naopak ze vstupů jako je např. rozměr části geometrie, zatížení nebo materiálové vlastnosti se stanou výstupy (v našem případě jde o hledaný ekvivalentní modul pružnosti).

Problémem je to, že pomocí MKP nelze zcela efektivně řešit právě úlohy nepřímé. Tedy nelze je řešit způsobem, který bezproblémově funguje pro přímé úlohy, tedy sestavení globálních matic, minimalizace funkcionálu a následné řešení soustavy lineárních rovnic. V [11] jsou uvedeny jako některé metody řešení především metody umělé inteligence, např. neuronové sítě nebo genové algoritmy.

Přesto však lze metodu konečných prvků k řešení využít, konkrétně skrze optimalizační metody, které jsou v MKP softwarech (stejně jako v ANSYSu) běžně dostupné. Tyto metody však pracují iteračně, tedy v každém iteračním kroku je nutné provést výpočet, následně dojde k úpravě vstupních parametrů dle optimalizačního algoritmu a výpočet se opakuje, dokud není optimalizace ukončena, buďto po dosažení zvolené přesnosti nebo počtu iteračních cyklů.

Nevýhodou těchto metod je právě to, že jsou založeny na iteračních procesech, opakování výpočtů v MKP softwarech může být totiž u složitějších úloh obsahující velké množství prvků (nebo u nelineárních úloh) časově velice náročné. V našem případě je však geometrie velmi jednoduchá, z čehož vyplývá i nízký počet prvků a krátké výpočtové časy. Optimalizační metody jsou v tomto případě dobře využitelné.

#### Základní pojmy

Při optimalizační analýze v ANSYSu je třeba nadefinovat proměnné, které do optimalizace budou vstupovat. Dle [3] se optimalizační proměnné v zásadě dělí do třech kategorií:

1. *Návrhové proměnné (design variables)* – jedná se o nezávislé proměnné, které musí být zezdola i shora omezené, tyto meze zároveň vymezují tzv. *návrhový prostor (design space)*. Nejčastěji představují např. geometrii modelu, velikost zatížení nebo materiálové vlastnosti. ANSYS umožňuje nadefinovat těchto proměnných až 60, alespoň jedna však musí být definována vždy.
2. *Stavové proměnné (state variables)* – jsou závislé na návrhových proměnných a musí být omezeny buď zezdola, shora nebo oboustranně. V podstatě představují odezvu modelu na vnější podmínky, může se tedy jednat např. o posuvy, napětí nebo vlastní frekvence. Můžeme jich nadefinovat až 100, opět musí existovat vždy alespoň jedna pro spuštění optimalizační analýzy.

### 3.3. VÝPOČET EKVIVALENTNÍHO MODULU PRUŽNOSTI

3. *Návrhová funkce (objective function)* – jde o funkci, jejíž minimalizací za podmínek definovaných v návrhových a stavových proměnných dojdeme k optimálnímu návrhu. Tato funkce obvykle reprezentuje např. objem (hmotnost) nebo napětí. Nastavit lze maximálně jednu návrhovou funkci, případně nemusí být definována vůbec.

#### Přehled optimalizačních přístupů

Optimalizační přístupy v ANSYSu můžeme rozdělit do dvou základních skupin podle použitých technik, informace ohledně těchto přístupů budeme čerpat z [3]. Dělení je tedy následující:

1. *Optimalizační metody (Optimization methods)* – jedná se o tradiční techniky využívající minimalizace návrhové funkce, ta musí být tedy vždy nutně definována. Na výběr máme ze třech možností.
  - (a) *Metoda nultého řádu (Subproblem approximation method)* – pokročilá metoda, která využívá aproximaci všech závislých proměnných (stavové proměnné a návrhové funkce), nepracuje s nimi tedy přímo. Jde o obecnou metodu, kterou lze efektivně aplikovat na mnoho inženýrských problémů.
  - (b) *Metoda prvního řádu (First order method)* – jde o metodu, která využívá partiálních derivací, tj. vypočítává gradient závislých proměnných podle všech návrhových proměnných v každém kroku. Tato metoda je velmi přesná a vhodná pro problémy, u kterých se závislé proměnné často mění na širokém rozsahu v návrhovém prostoru. Nevýhodou je však vyšší výpočtová a tedy i časová náročnost.
  - (c) *Uživatelská metoda (User-supplied method)* - externí metoda definovaná uživatelem.
2. *Optimalizační nástroje (Optimization tools)* – tyto nástroje poskytují techniky pro základní popis a prohledání návrhového prostoru, jsou výhodné zejména pro svou jednoduchost a rychlost. Nejsou tak sofistikované, jako metody uvedené výše, avšak mnohdy mohou být dostačující, ať už pro první přiblížení nebo i pro nalezení optimálního návrhu. Pro využití těchto nástrojů není nutné definovat návrhovou funkci.
  - (a) *Výpočet jedné smyčky (Single loop run)* – dle zadaných parametrů návrhových proměnných je provedena jedna optimalizační smyčka, tedy jeden MKP výpočet. Tímto nástrojem můžeme provádět poměrně jednoduché odhady ohledně chování stavových proměnných.
  - (b) *Generování náhodných návrhů (Random design generation)* – je vypočteno mnoho optimalizačních smyček, přičemž v každé dochází k náhodnému generování návrhových proměnných. Můžeme nastavit počet prováděných smyček a také maximální počet vyhovujících návrhů. Tohoto nástroje lze využít pro zmapování návrhového prostoru a také pro přiblížení k optimálnímu návrhu.
  - (c) *Prohledání návrhových proměnných (Sweep generation)* – dochází ke generování návrhů pro každou návrhovou proměnnou, ta je vždy rozdělena dle svých mezí na stejně velké úseky a v krajních bodech těchto úseků je proveden výpočet.

### 3.3. VÝPOČET EKVIVALENTNÍHO MODULU PRUŽNOSTI

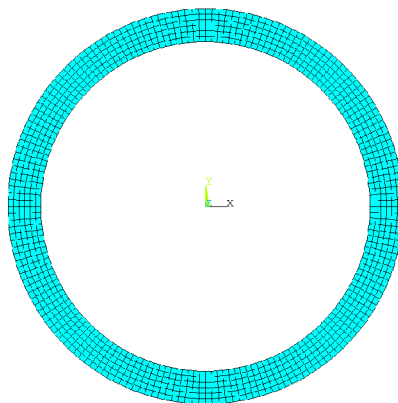
Ostatní návrhové proměnné zůstávají na své referenční hodnotě a nemění se. Tímto v podstatě určíme závislost stavových proměnných (případně návrhové funkce) na dané návrhové proměnné při fixaci zbylých proměnných.

- (d) *Prohledání extrémů (Factorial evaluation)* – jde o statistický nástroj, který generuje návrhy ve všech extrémních kombinacích návrhových proměnných, prohledá tedy v podstatě „rohy“ návrhového prostoru a vypočte hodnoty stavových proměnných, případně i hodnoty návrhové funkce.
- (e) *Výpočet gradientu (Gradient evaluation)* – v uživatelem specifikovaném návrhovém bodu je vypočten gradient návrhové funkce a stavových proměnných podle všech proměnných návrhových. Zjistíme tak lokální citlivosti v okolí návrhového bodu.
- (f) *Uživatelský nástroj (User-supplied design tool)* – může být využito externího nástroje, jež není součástí ANSYSu.

#### Model pro optimalizaci

Pro optimalizační analýzu byl použit rovinný model svazku, který je tvořen mezikružím, jehož vnitřní průměr  $\phi d$  a vnější  $\phi D$  byl vždy shodný s průměry modelu svazku, na kterém byla již předtím provedena modální analýza, tedy i určeny vlastní frekvence a také vypočtena ekvivalentní hustota. Shodné byly i okrajové podmínky, tedy volný model.

Materiálový model byl opět lineární izotropní – modul pružnosti mohl být nastaven v podstatě na jakoukoli hodnotu (důvody budou vysvětleny níže), Poissonovo číslo mělo hodnotu 0,3 a použitá hustota byla  $\rho_{ekv}$ , tedy vypočtená podle principu v kapitole 3.2.



Obr. 3.9: MKP model svazku využitý pro optimalizaci.

Na geometrii modelu byla vytvořena MKP síť opět z prvků PLANE183, v tomto případě bylo možné využít i mapované varianty sítě, viz. model na obr. 3.9. Počet prvků se pohyboval podle velikosti svazku od zhruba 900 až do 2200 po největší modely, jedná se tedy o velice jednoduchý model, jehož výpočtové časy u modální analýzy pro několik vlastních frekvencí jsou u moderních PC v řádu sekund.

#### Optimalizační výpočet

Nejprve bylo nutné nastavit návrhové a stavové proměnné spolu s jejich mezemi. Toto nastavení je pro přehlednost uvedené v tab. 3.5. Návrhové a stavové proměnné se někdy



### 3.3. VÝPOČET EKVIVALENTNÍHO MODULU PRUŽNOSTI

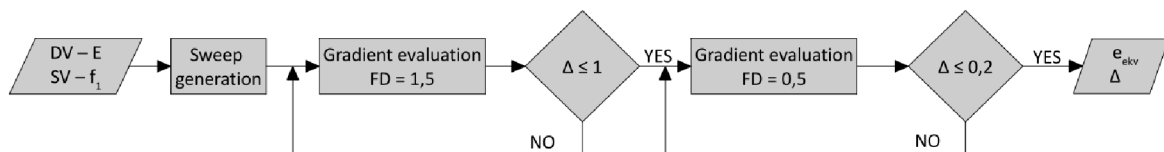
označují zkratkami DV resp. SV, které vyplývají z jejich anglického názvu (design variable × state variable).

Typ proměnné	Proměnná	Dolní mez	Horní mez
Návrhová (DV)	Modul pružnosti – $E$	30 GPa	120 GPa
Stavová (SV)	První vl. frekvence – $f_1$	–	$f_{opt}$

Tab. 3.5: Nastavení proměnných spolu s jejich mezemi.

Pro optimalizaci byly nastaveny pouze dvě proměnné a žádná návrhová funkce, kterou v podstatě ani nemělo smysl definovat. Protože existovala pouze jedna návrhová proměnná, návrhový prostor byl jednorozměrný. Modul pružnosti  $E$  byl omezen seshora i zdola podle předpokládaného možného rozsahu, tento rozsah mohl být pro některé varianty upraven. Horní mez u první vlastní frekvence  $f_1$  byla určena frekvencí  $f_{opt}$ , která byla získána z předchozí modální analýzy svazku jako první vlastní frekvence.

Principem optimalizace bylo v podstatě dostat se změnami modulu pružnosti  $E$  s první vlastní frekvencí modelu svazku  $f_1$  co nejlíže k frekvenci hledané  $f_{opt}$ . K tomuto bylo využito dvou optimalizačních nástrojů, konkrétně *Sweep generation* a *Gradient evaluation*. Celý proces optimalizace je schématicky znázorněn ve vývojovém diagramu na obr. 3.10.



Obr. 3.10: Vývojový diagram algoritmu optimalizace.

Nyní si celý proces detailněji popíšeme:

- Nejprve je pomocí nástroje sweep generation postupně vypočteno pro 11 hodnot modulu pružnosti rovnoměrně rozložených v návrhovém prostoru 11 odpovídajících prvních vlastních frekvencí, z těchto návrhů je pak vybrán ten, který nejlíže vyhovuje omezujícím podmínkám stavové proměnné. Tedy ten, jehož frekvence  $f_1$  bude menší než  $f_{opt}$  a zároveň bude k této frekvenci nejlíže.
- Tento návrh je pak zpracován nástrojem gradient evaluation, který slouží k výpočtu gradientu pomocí dopředné diference (zkratka FD – forward difference). V případě jedné návrhové a stavové proměnné ho lze využít efektivně i k výpočtu následujícího návrhového bodu, který je určen právě hodnotou dopředné diference. Celá tato procedura je uzavřena v ANSYSu cyklem DO – v každém cyklu dochází k ověření podmínky  $\Delta \leq 1$ , kde delta představuje absolutní hodnotu rozdílu frekvence hledané a vypočtené, tedy  $\Delta = |f_{opt} - f_1|$ . Pokud je podmínka splněna, algoritmus pokračuje dál, pakliže ne, dochází k opakování cyklu až do splnění podmínky nebo vyčerpání nastaveného počtu cyklů.
- V dalším kroku se v cyklu opakuje opět procedura gradient evaluation, avšak s jiným nastavením dopředné diference a jinou podmínkou cyklu. Dochází tedy ke zpřesnění výsledné hodnoty frekvence, maximální rozdíl  $\Delta = 0,2$  Hz.

### 3.4. VÝSLEDKY JEDNOTLIVÝCH VARIANT STATOROVÝCH SVAZKŮ

- Výstupem je pak hodnota hledaného ekvivalentního modulu pružnosti  $e_{ekv}$  spolu s rozdílem  $\Delta$ , který je zde pro kontrolu, zda optimalizace proběhla úspěšně.

Výhodou tohoto optimalizačního postupu je to, že ho lze v ANSYSu dobře automatizovat. Výpočty ekvivalentního modulu pružnosti probíhaly tak, že byla nejprve načtena data ze souboru, který obsahoval vlastní frekvence a hustoty vypočtených variant pro daný vnitřní a vnější průměr svazku (většinou 56 variant). Následně byla každá varianta podrobena optimalizačnímu procesu a určen tak její ekvivalentní modul pružnosti podle první vlastní frekvence. Nakonec byly všechny výsledky zapsány do souboru, pro jejich následné zpracování.

Optimalizační výpočet jedné varianty trval přibližně od 25 do 60 sekund, podle rychlosti nalezení vhodné varianty, výpočet 56 variant tak zpravidla nikdy nepřesahoval jednu hodinu.

#### Výpočet pro vzorový model svazku a porovnání s analytickým řešením

Optimalizační výpočet provedeme opět pro stejný model svazku jako byl použit u analytického řešení. Provedeme optimalizaci modulu pružnosti nejprve vzhledem k první vlastní frekvenci  $f_1$  – to je standardní postup popsáný výše, ale také pro porovnání i vzhledem k druhé vlastní frekvenci  $f_2$ . Výsledky optimalizačního řešení spolu s řešením analytickým (jehož výsledky jsou i v tab. 3.4) jsou uvedeny v tab. 3.6.

Způsob řešení	Frekvence pro výpočet	$e_{ekv}$ [GPa]
Analytické	$f_1 = 93,00$ Hz	52,3
	$f_2 = 254,03$ Hz	48,9
MKP optimalizace	$f_1 = 93,00$ Hz	58,7
	$f_2 = 254,03$ Hz	57,6

Tab. 3.6: Porovnání analytického a MKP řešení.

Z porovnání řešení analytického a optimalizačního je vidět, že hodnoty  $e_{ekv}$  získané MKP optimalizací jsou vyšší, a to přibližně o 12 % v případě porovnání hodnot pro první vlastní frekvenci, u druhé vlastní frekvence je to téměř 18-ti procentní nárůst.

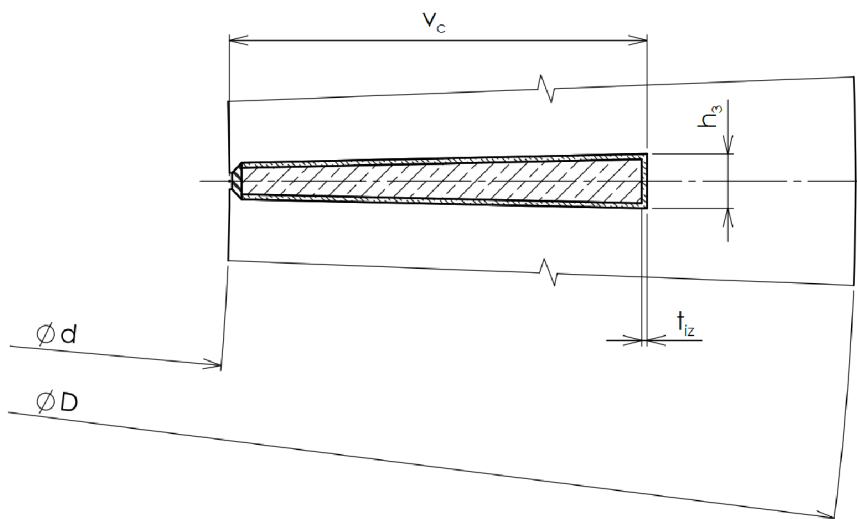
MKP řešení by však mělo být o poznání přesnější než řešení analytické, to obsahuje totiž mnoho zjednodušení nutných k odvození výsledných rovnic (například předpoklad o lineární aproximaci posuvů skrz tloušťku skořepiny v obvodovém a podélném směru), vše je detailně odvozeno a popsáno v [18]. Nejlepších výsledků analytického řešení by mělo být dosaženo při  $R \gg h$ , tedy při střednicovém poloměru mnohonásobně větším než je tloušťka stěny skořepiny. Pokud se zpětně podíváme do tab. 3.4, tak vidíme, že hodnoty  $R$  a  $h$  tento předpoklad nesplňují. Také by mělo být dosaženo přibližně stejných hodnot ekvivalentního modulu pružnosti, ať už je vypočten z první nebo druhé vlastní frekvence, což lépe splňuje MKP řešení.

### 3.4. Výsledky jednotlivých variant statorových svazků

Kompletní výsledky všech vypočtených variant statorových svazků jsou uvedeny v přílohách, počítány byly statorové svazky pro stroje GSH 800, GSH 900, GSH 1000 a GSH

### 3.4. VÝSLEDKY JEDNOTLIVÝCH VARIANT STATOROVÝCH SVAZKŮ

1120. Pro každý stroj byly vždy vypočteny tři varianty vnitřního průměru  $\phi d$  a pro každý vnitřní průměr pak existovaly čtyři různé počty drážek  $p_{dr}$ . U všech těchto variant jsme pak počítali se čtyřmi různými objemovými podíly mědi ve vinutí a také se dvěma výškami drážek  $v_c$ , které se měnily společně s jejich šířkou  $h_3$  (všechny důležité kóty lze vidět na obr. 3.11).



Obr. 3.11: Náčrt části svazku spolu s důležitými kótami.

To nám ve výsledku dává 96 variant pro jeden stroj v případě vinutí tvořeného měděnými dráty a impregnací, pokud se jednalo o vinutí tvořené měděnými tyčemi, bylo místo objemového podílu mědi počítáno se třemi různými tloušťkami izolace  $t_{iz}$  (ta byla v předcházejícím případě vždy 0,7 mm), což nám dává 72 variant. Dohromady pro jeden stroj bylo variant 168, pro všechny stroje, tedy čtyři, se jednalo celkem o 672 různých provedení statorového svazku.

V tabulkách výsledků uvedených v přílohách je pro každou variantu vždy uvedena ekvivalentní hustota  $\rho_{ekv}$ , dále první vlastní frekvence  $f_1$ , podle které probíhala optimalizace a nakonec i hodnota ekvivalentního modulu pružnosti  $e_{ekv}$ . Jeho hodnoty se pohybovaly přibližně od 32 GPa u nejméně tuhého svazku až po téměř 135 GPa u největšího modelu s vinutím tvořeným měděnými tyčemi.



## 4. Citlivostní analýza

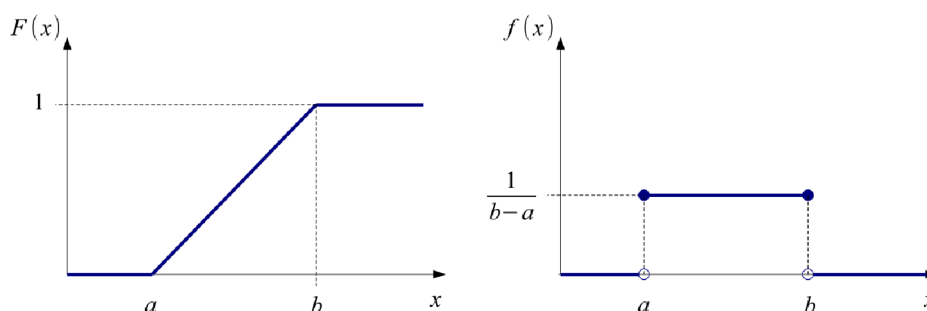
Základním principem citlivostní analýzy je v podstatě určit vliv vstupních veličin na veličiny výstupní, to však není zcela přesná definice. V literatuře [16] jsou uvedeny definice dvě, ta první popisuje analýzu citlivosti jako metodu pro lokální měření vlivu daného vstupu na daný výstup. Toho je obvykle dosaženo výpočtem parciálních derivací systému, tedy  $S_j = \partial Y / \partial X_j$ , kde  $Y$  představuje danou výstupní proměnou a  $X_j$  značí vstupní proměnné. Tento přístup se označuje jako *lokální*, je však vhodný pouze pro některé typy problémů, v [16] jej autor doporučuje zejména pro řešení tzv. inverzních problémů. Jako příklad je zde uvedeno stanovení některých fyzikálních parametrů uložených v komplexním modelu, který je založen na experimentálním měření jiných veličin.

Druhá definice charakterizuje citlivostní analýzu jako studii, jak může být nejistota na výstupu modelu rozdělena do různých zdrojů nejistot ve vstupech modelu, tedy jde o určení příspěvků jednotlivých nejistot vstupních veličin na nejistotu výstupní veličiny. Jedná se o poměrně obecnou definici, která je však platná v mnoha oborech a je spojena především s *globálními* přístupy. Tedy s přístupy, které neurčují citlivost pouze v jednom bodě, jak tomu bylo u metod lokálních, ale na celém intervalu dané vstupní proměnné.

Mezi globální postupy využívané k citlivostní analýze uvedené v [16] patří zejména regresní metody, například metoda lineární regrese. Ta pracuje tak, že získaná vstupní a výstupní data zpracujeme některým regresním algoritmem, např. metodou nejmenších čtverců, čímž získáme regresní model, kde je výstupní veličina  $Y$  popsána lineární kombinací vstupních veličin. Regresní koeficienty  $\beta$  u jednotlivých vstupů pak představují jejich citlivost na výstup.

### 4.1. Obecný postup při provádění citlivostní analýzy

Nejprve je třeba si uvědomit, že při použití citlivostní analýzy je třeba nahradit (alespoň některé) deterministické vstupní veličiny v modelu veličinami stochastickými. Tedy takovými, které nejsou určeny jedním číslem, ale rozdělením pravděpodobnosti, jež je přesně popsáno distribuční funkcí  $F(x)$  nebo hustotou pravděpodobnosti  $f(x)$ , což je vlastně derivace distribuční funkce (příklad zobrazení  $F(x)$  a  $f(x)$  je vidět na obr. 4.1). Tímto se v podstatě snažíme o zahrnutí reálných vlivů do modelu, protože veličina určená pouze jedním přesným číslem ve skutečnosti neexistuje.



Obr. 4.1: Příklad distribuční funkce (vlevo) a hustoty pravděpodobnosti (vpravo) v případě rovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti.

#### 4.1. OBECNÝ POSTUP PŘI PROVÁDĚNÍ CITLIVOSTNÍ ANALÝZY

Obecný postup kroků, které bychom bez ohledu na použitou metodu citlivostní analýzy měli provést, je popsán v [16], dle této literatury se jedná o kroky následující:

1. Zjistit, co je cílem prováděné analýzy a následně definovat tvar výstupu tak, abychom byli schopni získat odpovědi na všechny naše otázky.
2. Rozhodnout, které vstupní veličiny chceme zahrnout do naší analýzy.
3. Vybrat konkrétní distribuční funkci (případně hustotu pravděpodobnosti) pro každou vstupní veličinu, kterou jsme zahrnuli do analýzy. Tato funkce může být:
  - (a) převzata z literatury
  - (b) odvozena z dat, která proložíme empirickou distribuční funkcí
  - (c) zvolena podle zkušeností odborníků
  - (d) vybrána jako distribuční funkce normálního ohraničeného rozdělení, přičemž hranice nám odfiltrují odlehlé hodnoty.
  - (e) Pokud existuje korelace mezi některými vstupními veličinami, měla by být definována.
4. Vybrat metodu citlivostní analýzy na základě následujících bodů:
  - (a) Podle problému, který řešíme. Někdy potřebujeme určit z desítek nebo stovek vstupů pouze ty nejcitlivější (tzv. problém screeningu), na druhé straně někdy potřebujeme metody, které dokáží citlivost vstupních veličin kvantifikovat.
  - (b) Podle počtu vyhodnocení modelu, které si v závislosti na jeho výpočtovém čase můžeme dovolit. Pokud je např. počet vstupních veličin velký a výpočet modelu časově náročný, jsme někdy nuceni zvolit metody, které vyžadují nízký počet iterací.
  - (c) Existence korelace mezi vstupními veličinami. Pokud řešíme pouze problém screeningu, korelace může být zanedbána abychom se vyhnuli zbytečné složitosti modelu, můžeme ji pak zahrnout do kvantitativní citlivostní analýzy několika nejvýznamnějších veličin získaných screeningem.
5. Generovat vstupní hodnoty do výpočtového modelu. Data mají formu  $n$  vektorů vstupních veličin, které jsou pak vyhodnoceny na modelu. Tato data jsou generována podle dané metody použité pro citlivostní analýzu.
6. Vyhodnotit generované vstupní hodnoty na modelu, čímž získáme  $n$  výstupních hodnot ve formě specifikované v bodu 1.
7. Analyzovat výstupy z modelu a vyvodit závěry.

Tento postup poskytuje poměrně univerzální návod pro využití citlivostní analýzy v jakémkoliv oboru, tedy je samozřejmě aplikovatelný i na inženýrskou problematiku. Následná analýza citlivosti statorového svazku provedená v kapitole 4.3 se výše uvedenými kroky bude řídit, i když některé z těchto kroků už jsou v ANSYSu plně automatizovány a není možné do nich zasahovat.



## 4.2. Postup a metody citlivostní analýzy v ANSYSu

ANSYS obsahuje poměrně obsáhlé možnosti v případě citlivostní analýzy nebo případného pravděpodobnostního posouzení modelu, což z něj dělá velice univerzální nástroj. Základem pro každou analýzu je však vždy dobře parametrizovaný MKP model, jakmile je toto splněno, je možné přistoupit k dalším krokům. Celá citlivostní analýza v ANSYSu by se dala shrnout do třech kroků, které si popíšeme v následujících podkapitolách. Tyto kroky jsou podobné jako v každé výpočtové analýze, tedy pre-processing, processing a post-processing.

### 4.2.1. Definování vstupních a výstupních proměnných

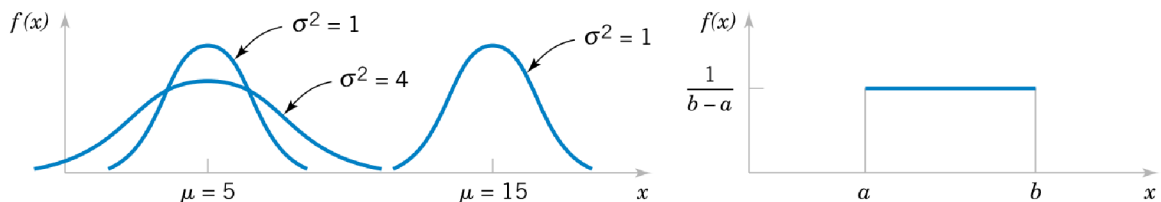
Začneme tedy nejprve výběrem proměnných, které budeme chtít do našeho modelu zahrnout. Všechny námi vybrané proměnné musí být v MKP modelu parametrizované, jinak bychom s nimi nemohli pracovat. Na začátku je vždy třeba rozhodnout, které proměnné (zejména vstupní) zahrneme, protože vstupů do modelu je obvykle velmi mnoho, na rozdíl od výstupních proměnných, kterých obvykle tolik definovat nemusíme.

Typickým příkladem některých vstupních proměnných mohou být např. rozměrové kóty, materiálové vlastnosti, poloha a velikost zatížení, okrajové podmínky atd.. Jako výstupní proměnné se nejčastěji definují napětí nebo posuvy v daných bodech, vlastní frekvence, kontaktní tlak, teploty, nebo některé další veličiny.

Pokud už máme vybrány vstupy a výstupy, tak je nutné při následném definování každé vstupní proměnné vybrat její pravděpodobnostní rozdělení a popsat jej příslušnými parametry, které jsou pro každý typ odlišné. ANSYS nabízí tato pravděpodobnostní rozdělení:

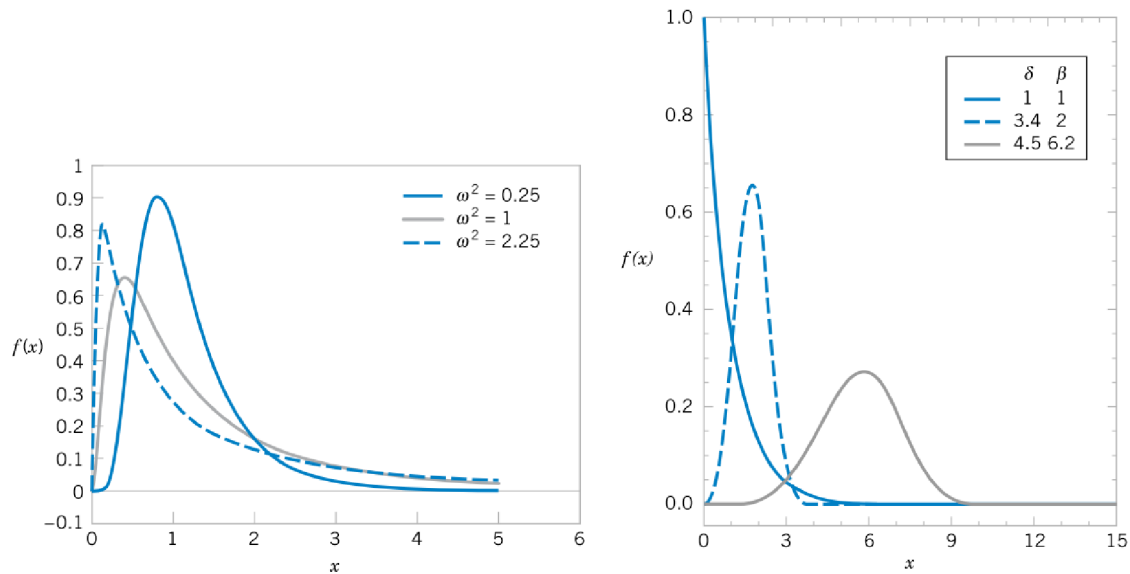
- Beta rozdělení
- Gama rozdělení
- Exponenciální
- Normální (Gaussovo)
- Ohraničené normální rozdělení
- Lognormální
- Rovnoměrné
- Trojúhelníkové
- Weibullovo

Grafy některých pravděpodobnostních rozdělení spolu s jejich charakteristickými parametry, které určují tvar křivky, můžeme vidět na obr. 4.2 a obr. 4.3.



Obr. 4.2: Grafy hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení (vlevo) a rovnoměrného rozdělení (vpravo) [14].

## 4.2. POSTUP A METODY CITLIVOSTNÍ ANALÝZY V ANSYSU



Obr. 4.3: Grafy hustoty pravděpodobnosti lognormálního (vlevo) a Weibullova rozdělení (vpravo) [14].

Pomocí parametrů, které pro některá rozdělení můžeme vidět na výše uvedených obrázcích, dochází k zadávání pravděpodobnostních rozdělení i v ANSYSu. Bližší informace o těchto rozděleních společně i s jejich rovnicemi a popisem charakteristických parametrů lze nalézt v [3] a [14].

### 4.2.2. Volba metody a výpočet simulací

Dalším krokem po nadefinování vstupních a výstupních proměnných je volba metody citlivostní analýzy. Volba metody nám určuje, jakým způsobem budou generovány vstupní veličiny do MKP výpočtu a jak bude dále samotný MKP výpočet probíhat. ANSYS nabízí dvě základní techniky, které lze k účelům citlivostní analýzy (a nejenom k ní) využít. Jedná se tedy o:

- Metodu Monte Carlo simulací
- Metodu odezvvé plochy (Response surface method)

Obě metody jsou založeny na poněkud jiných postupech, avšak i metoda odezvvé plochy využívá techniky Monte Carlo, i když až v pozdější fázi výpočtu. Nyní se pustíme do podrobnějšího popisu těchto metod, všechny informace budeme čerpat ze zdroje [3].

#### Metoda Monte Carlo

Jedná se o velice známou a často užívanou metodu pro pravděpodobnostní výpočty, její princip je poměrně jednoduchý a navíc i snadno představitelný. Je zde využito generátoru náhodných čísel, který podle daného algoritmu vytváří dle definovaných rozdělení pravděpodobnosti u vstupních veličin vstupy pro výpočtový model. V jednom kroku simulace jsou vždy vygenerovány hodnoty všech náhodných vstupních veličin, ty jsou pak použity v MKP modelu, který je následně vyřešen. Po výpočtu pak získáme hodnoty pro všechny



## 4.2. POSTUP A METODY CITLIVOSTNÍ ANALÝZY V ANSYSU

naše definované výstupy. Celý proces se pak neustále opakuje, až do námi určeného počtu kroků nebo je ukončen některým ze stop kritérií.

Výhody této metody jsou následující:

- Metoda je vždy použitelná nezávisle na typu řešeného problému pomocí MKP.
- Není založena na předpokladech spojených s náhodnou výstupní veličinou, které pokud jsou splněny, mohou řešení urychlit, avšak pokud jsou porušeny, mohou být výsledky analýzy nevěrohodné.
- Pokud předpokládáme správnost deterministického modelu a provedeme opravdu velké množství simulací, tak metoda Monte Carlo poskytuje vždy správné výsledky. Počet simulací by měl být takový, aby byl statisticky významný pro výsledky, jež chceme získat.
- Z důvodů zmíněných v bodech výše, je Monte Carlo jedinou vhodnou pravděpodobnostní metodou pro testovací a ověřovací účely.
- Jednotlivé provedené simulační kroky jsou na sobě zcela nezávislé, což dělá tuto metodu velmi vhodnou pro paralelní výpočty.

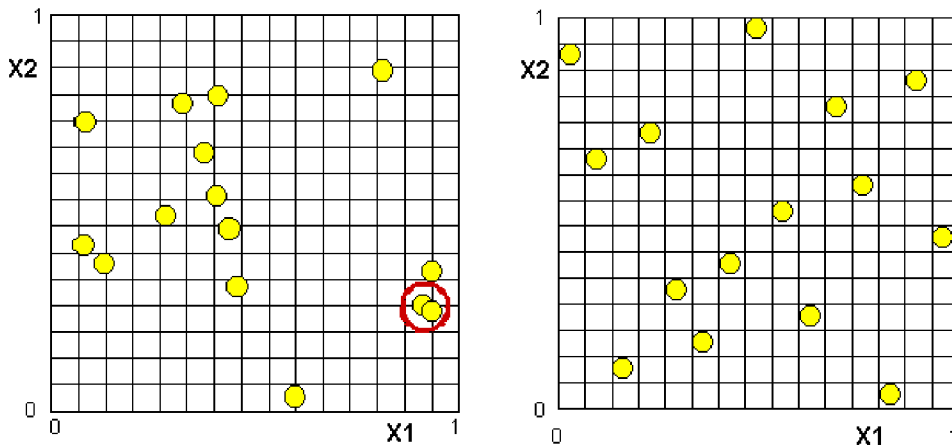
Nevýhodou této metody je zejména nutnost vysokého počtu simulačních kroků, což může být u složitějších modelů s vyšší časovou náročností velmi problematické, někdy dokonce téměř nerealizovatelné.

Metoda Monte Carlo využívá v ANSYSu dvou různých algoritmů pro generování hodnot náhodných vstupních veličin (pokud nebereme v potaz možnost použití vlastních hodnot načtených ze souboru) – jedná se o tzv. sampling. Patří zde tyto algoritmy:

- **Direct sampling** – jde o metodu, která nevyužívá žádné pokročilé techniky, „pouze“ s využitím principu náhodných čísel generuje náhodné vstupní veličiny na základě jejich pravděpodobnostního rozdělení. To funguje bezproblémově, avšak poměrně neefektivně, může zde totiž docházet ke shlukování generovaných hodnot, což si později blíže popíšeme na příkladu, který můžeme vidět na obr. 4.4. Nastavit je možné počet simulací, a také stop kritéria, při jejichž dosažení dochází k ukončení celého výpočtu (odchylka od středních hodnot a směrodatných odchylek na výstupu).
- **Latin hypercube sampling (LHS)** – tato metoda je podstatně propracovanější a efektivnější než direct sampling, sleduje totiž generování hodnot v předcházejících krocích a zabraňuje tak jejich seskupování a opakování na stejných místech prostoru. Navíc také dochází ke generování hodnot na okrajích pravděpodobnostních rozdělení. Výsledkem je tak zhruba o 20 až 40 % nižší počet potřebných simulací než v případě direct sampling techniky, avšak při zachování stejné přesnosti. Metoda pracuje tak, že rozdělí rozsah každé vstupní proměnné do  $n$  intervalů se stejnou pravděpodobností, kde  $n$  je počet simulací. Při generování hodnot je pak v každém z těchto intervalů vytvořena vždy pouze jedna hodnota. Nastavit je možné počet simulací a jejich opakování, lokalitu v intervalu vstupů při výběru hodnoty a také stejná stop kritéria jako v předcházejícím případě.

## 4.2. POSTUP A METODY CITLIVOSTNÍ ANALÝZY V ANSYSU

Nyní si na jednoduchém příkladu dvou vstupních proměnných  $X_1$  a  $X_2$  s rovnoměrným rozdělením, které je definováno mezemi 0 a 1, ukážeme základní rozdíly mezi těmito dvěma algoritmy (obr. 4.4). V tomto dvourozměrném prostoru bylo generováno 15 hodnot, na levé straně to bylo pomocí metody direct sampling, na straně pravé bylo využito algoritmu LHS.



Obr. 4.4: Ukázka metody direct sampling (vlevo) a LHS (vpravo) [3].

Je zde vidět především seskupování hodnot v případě použití techniky direct sampling (označeno červeně), což je neefektivní, neboť takovéto hodnoty nám neposkytují žádnou novou informaci. Také je možné si všimnout nerovnoměrného pokrytí celého prostoru, naproti tomu algoritmus LHS žádnými z těchto neduhů netrpí.

### Metoda odezvové plochy

Tato metoda je v angličtině nazývána *response surface method* a je založena na základním předpokladu, že vliv vstupních proměnných na výstupní proměnnou může být aproximován matematickou funkcí. Následně jsou vybrány body v prostoru náhodných vstupních proměnných podle některého z algoritmů tak, aby aproximační funkce mohla být nalezena co nejefektivněji, obvykle se jedná o kvadratický polynom, který je popsán rovnicí (4.1) [3], může se jednat ale i o polynom lineární. Pro vybrané vstupní hodnoty je pak proveden MKP výpočet, čímž určíme u jednotlivých bodů jejich výstupní hodnoty.

$$\hat{Y} = c_0 + \sum_{i=1}^n c_i X_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n c_{ij} X_i \cdot X_j \quad (4.1)$$

Aproximační funkce  $\hat{Y}$  se skládá z koeficientů  $c_0$ ,  $c_i$  a  $c_{ij}$ ,  $X$  zde značí vstupní proměnné a  $n$  v sumaci označuje počet vstupních proměnných. Pro určení těchto koeficientů je využito regresní analýzy, obvykle je použita metoda nejmenších čtverců.

Základní myšlenkou metody odezvové plochy je fakt, že jakmile jsou nalezeny koeficienty vhodné aproximační funkce, která daný problém dobře popisuje, můžeme tuto funkci využít přímo k simulacím namísto MKP modelu. Výpočet konečnoprvkového modelu může trvat v řádu minut, hodin a případně i dnů, avšak vyhodnocení kvadratické funkce je otázkou zlomku sekundy. Díky tomuto faktu je možné provádět i stovky tisíc simulací, což může ve spojení s touto metodou přinášet výraznou úsporu času.

## 4.2. POSTUP A METODY CITLIVOSTNÍ ANALÝZY V ANSYSU

Vždy je také třeba zvážit, zda může být daný problém opravdu aproximován kvadratickým polynomem (nebo případně lineárním). Pro většinu inženýrských analýz je kvadratický polynom vhodný, avšak existují i takové problémy, kde ho přímo použít nelze, např. pokud používáme MKP model pro výpočet životnosti, která obvykle vykazuje exponenciální průběh.

Je proto vždy třeba zkontrolovat kvalitu proložení dat daným polynomem, která je v ANSYSu určena souborem parametrů označených jako *Goodness-of-fit*. Zde jsou důležité zejména dva parametry, *Error sum of squares (SSE)* a *Coefficient of determination ( $R^2$ )*. Parametr *SSE* popisuje součet čtverců odchylek mezi vypočtenou výstupní hodnotou a hodnotou aproximační funkce ve stejném bodě, ve statistice se nazývá jako *reziduální součet čtverců* a pro nejlepší aproximaci by měl být co nejbližší nule. *Koeficient determinace*, tedy  $R^2$ , by měl být naopak co nejbližší jedné. Bližší informace spolu se vzorcí pro výpočet těchto parametrů lze nalézt v [3].

Pokud to shrneme, citlivostní analýza pomocí odezvové plochy se skládá v podstatě ze tří kroků:

1. Provedení MKP výpočtů pro dané body v prostoru vstupních proměnných, čímž získáme výstupní hodnoty v těchto bodech.
2. Vypočtení koeficientů u aproximační funkce za pomoci regresní analýzy.
3. Realizace Monte Carlo simulací na aproximační funkci – odezvové ploše.

Předpokládáme-li, že aproximační funkce je vhodná pro náš problém, tak metoda odezvové plochy poskytuje následující výhody:

- Často vyžaduje méně simulací, tedy i méně výpočtů, než přímá metoda Monte Carlo.
- Můžeme vyhodnotit i velmi nízké hodnoty pravděpodobností, což metoda Monte Carlo dokáže až při opravdu velkém počtu simulací.
- Kvalitu aproximace lze snadno ověřit pomocí parametrů goodness-of-fit.
- Jednotlivé MKP výpočty jsou na sobě opět nezávislé, což je vhodné pro paralelní zpracování.

Nevýhody jsou pak zejména následující:

- Počet provedených MKP simulací závisí na počtu vstupních parametrů, což může být při jejich velmi vysokém počtu (stovky případně tisíce) téměř nerealizovatelné.
- Metoda je nevhodná pro případy, kdy výstupní parametr není hladkou funkcí vstupních veličin nebo obsahuje náhlé a prudké změny. Typickými příklady mohou být problémy ztráty stability nebo také kontaktní úlohy. Na tento problém můžeme také narazit při použití ideálně elasto-plastického materiálového modelu.

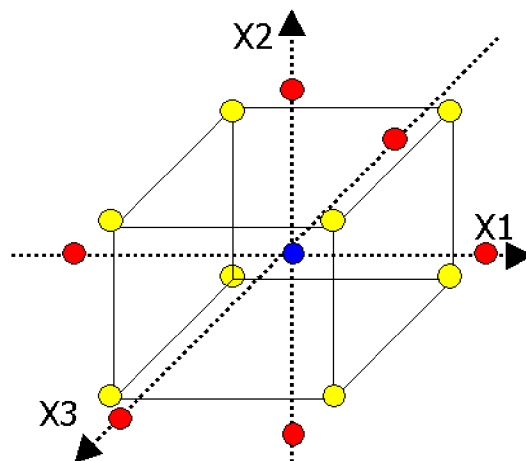
Při generování vstupních hodnot (tzv. sampling) můžeme při zanedbání možnosti použití hodnot uživatelských opět využít dvou algoritmů, jedná se o tyto algoritmy:

## 4.2. POSTUP A METODY CITLIVOSTNÍ ANALÝZY V ANSYSU

- **Central composite design (CCD) sampling** – hodnoty v prostoru náhodných vstupních proměnných jsou generovány pomocí algoritmu, který je vytváří na pěti různých úrovních pro každou vstupní proměnnou. Abychom tyto úrovně mohli popsat nezávisle na použité distribuční funkci vstupní proměnné, definujeme si je pomocí pravděpodobností. Těchto pět úrovní bude označeno jako  $p_i$ , kde  $i = 1, \dots, 5$ . Hodnoty pravděpodobností jsou vzestupné,  $p_1$  značí nejnižší hodnotu pravděpodobnosti vstupní proměnné,  $p_5$  naopak nejvyšší. CCD sampling vytváří v podstatě tři různé druhy vstupních hodnot, jedná se o:

1. *Center point (středový bod)* – každá vstupní proměnná zde má hodnotu, která odpovídá pravděpodobnosti  $p_3$  v její distribuční funkci.
2. *Axis points (osové body)* – existují vždy dva body pro každou vstupní proměnnou. Pro tyto osové body platí, že všechny hodnoty vstupních proměnných kromě jedné odpovídají pravděpodobnosti  $p_3$ , zbylá hodnota odpovídá  $p_1$  (nízká úroveň) nebo  $p_5$  (vysoká úroveň).
3. *Factorial points (faktoriálové body)* – v CCD existuje vždy  $2^{m-f}$  faktoriálových bodů,  $m$  značí počet vstupních proměnných a  $f$  je zlomek faktoriálové části,  $f$  je do počtu pěti vstupních proměnných nula, pak nabývá nenulových hodnot, a to z důvodu, aby nedocházelo k velmi rychlému nárůstu počtu těchto bodů. U všech faktoriálových bodů platí, že hodnoty vstupních proměnných odpovídají možným permutacím  $p_2$  a  $p_4$ .

Příklad generování hodnot pro tři náhodné vstupní proměnné je vidět na obr. 4.5, modře je zde označen středový bod, červeně osové body a žlutě body faktoriálové.



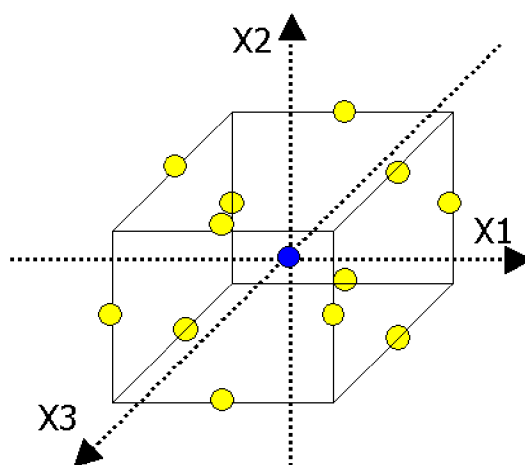
Obr. 4.5: Sampling pomocí algoritmu CCD pro tři vstupní proměnné [3].

- **Box-Behnken matrix (BBM) sampling** – oproti algoritmu CCD jsou zde vstupní hodnoty generovány na třech různých úrovních, jinak je však celý postup velice podobný. Jednotlivé úrovně budeme definovat opět podle pravděpodobností  $p_i$ , kde  $i = 1, \dots, 3$ . BBM sampling vytváří pouze dva druhy vstupních hodnot, jmenovitě tedy:

## 4.2. POSTUP A METODY CITLIVOSTNÍ ANALÝZY V ANSYSU

1. *Center point (středový bod)* – podobně jako v případě CCD, každá vstupní proměnná zde má hodnotu, která odpovídá pravděpodobnosti  $p_2$  v její distribuční funkci.
2. *Midside points (body středů stran)* – pro tyto body mají všechny vstupní proměnné, kromě dvou, hodnoty odpovídající pravděpodobnosti  $p_2$ . Dvě zbývající vstupní proměnné u všech bodů mají hodnoty dány možnými permutacemi s  $p_1$  a  $p_3$ .

Na obr. 4.6 můžeme vidět ukázkou generování pomocí BBM, modře je opět označen středový bod, žluté jsou pak body středů stran. Celkový počet generovaných bodů je vždy menší než v případě CCD algoritmu.



Obr. 4.6: Sampling pomocí algoritmu BBM pro tři vstupní proměnné [3].

### 4.2.3. Určení citlivostí

Po provedení simulačních kroků buďto přímou metodou Monte Carlo nebo až na odezvové ploše získáme soubor výstupních hodnot, který zatím nic nevyovídá o citlivosti jednotlivých parametrů. Tyto hodnoty musíme nejprve statisticky zpracovat, čímž získáme námi hledané citlivosti.

V ANSYSu je k určení citlivosti využíváno korelačních koeficientů, čím vyšší je koeficient korelace, tím vyšší by měla být i citlivost daného parametru. Celý proces je plně automatizován, takže je nutné pouze nastavit parametry korelace a okamžitě dojde k výpočtu citlivostí. Na výběr máme ze dvou korelačních koeficientů, jedná se o:

- Pearsonův korelační koeficient
- Spearmanův koeficient pořadové korelace

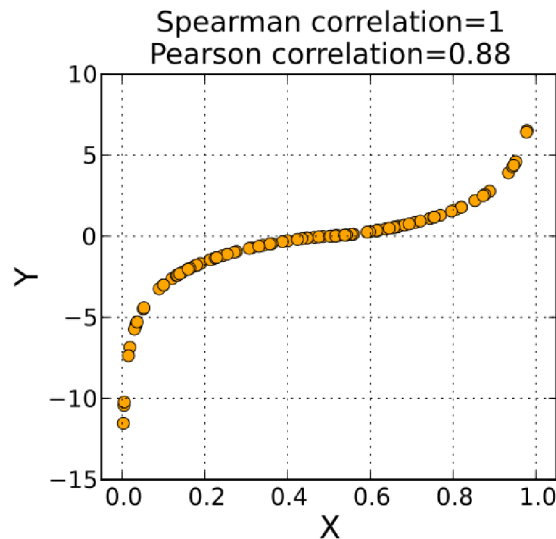
*Pearsonův korelační koeficient* dle [4] udává míru lineární závislosti vstupní a výstupní veličiny, v této literatuře je označován jako  $\rho$ , avšak v některých jiných zdrojích může být označen také jako  $r$ , čehož se také budeme držet. Korelační koeficient  $r$  může nabývat hodnot z intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ , kladné hodnoty značí, že s rostoucí hodnotou vstupu roste i výstup, záporná hodnota naopak znamená klesající hodnotu výstupu s rostoucím vstupem.



### 4.3. CITLIVOSTNÍ ANALÝZA STATOROVÉHO SVAZKU

Pokud  $r = -1$  nebo  $r = 1$ , tak mezi vstupem a výstupem existuje zcela lineární závislost, naopak pro  $r = 0$  jsou veličiny nekorelované, tedy neexistuje mezi nimi žádná závislost. Další podrobnosti o Pearsonově korelačním koeficientu spolu se vzorcí pro jeho výpočet můžeme nalézt v [4].

*Spearmanův koeficient pořadové korelace* podle definice v [4] nepopisuje linearitu mezi veličinami tak jako v případě Pearsonova koeficientu, ale takovou závislost, která může být popsána monotónní funkcí. Ve výše uvedené literatuře je označen jako  $r_s$  a opět může nabývat hodnot z intervalu  $(-1, 1)$ . Pro  $r_s = -1$  nebo  $r_s = 1$  je závislost veličin perfektně monotónní, přičemž znaménko určuje klesání nebo růst hodnot. Pokud je  $r_s = 0$ , tak taková závislost neexistuje. Srovnání Pearsonova a Spearmanova koeficientu můžeme vidět na obr. 4.7, zde jsou datové hodnoty, které lze proložit monotónní funkcí. V takovémto případě popisuje Spearmanův koeficient danou nelineární závislost mnohem lépe, což jej dělá vhodným právě pro nelinearity.



Obr. 4.7: Srovnání Pearsonova a Spearmanova korelačního koeficientu na vzorku dat [19].

Po každém výpočtu korelačních koeficientů, ať už Pearsonova nebo Spearmanova, je vždy třeba ověřit, zda je daný koeficient statisticky významný. V ANSYSu je toto opět automatizováno, jak je uvedeno v [3], po výpočtu hodnot korelačních koeficientů dojde u každého z nich k testování hypotézy nulové korelace mezi vstupní a výstupní proměnnou. Pro tento test musí uživatel vždy zadat hladinu významnosti, která se uvádí v procentech a zpravidla se používají hodnoty (1 ÷ 5 %). Pokud je hodnota testovacího kritéria větší než definovaná hladina významnosti, tak je hypotéza shledána pravdivou a daná vstupní proměnná je označena jako nevýznamná. Více informací lze nalézt v [3] nebo [4].

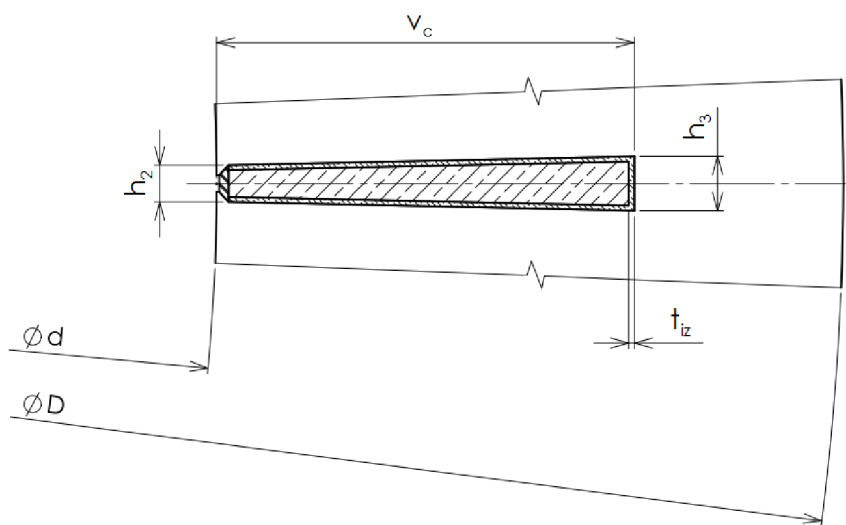
### 4.3. Citlivostní analýza statorového svazku

Tuto analýzu provedeme opět na určitém vzorovém modelu svazku, bude se jednat o stejný model, který byl použit i při výpočtu modálních vlastností svazku v kapitole 3.1. Půjde tedy o svazek s vinutím tvořeným měděnými dráty a impregnací, všechny materiálové vlastnosti budou opět stejné jako v kapitole 3.1.2.

### 4.3.1. Výběr vstupních a výstupních proměnných

Základním krokem u citlivostní analýzy je určení náhodných vstupních proměnných, které budou ve výpočtu zahrnuty. Vybrat bude třeba ty, které by mohly nejvíce ovlivňovat modální vlastnosti statorového svazku. Tyto proměnné bychom mohli v našem případě v podstatě rozdělit do dvou kategorií, a to na rozměrové kóty a materiálové vlastnosti, nic víc už modální analýzu svazku neovlivňuje.

V případě rozměrových kót vybereme takové, které popisují hlavní rozměry svazku, rozměry drážky a také tloušťku izolace, ostatní kóty budeme považovat jako deterministické. Všechny tyto kóty lze vidět na obr. 4.8, jmenovitě se tedy jedná o vnitřní a vnější průměr svazku ( $\phi d$  a  $\phi D$ ), dolní a horní šířku drážky ( $h_2$  a  $h_3$ ), celkovou výšku drážky  $v_c$  a tloušťku izolace  $t_{iz}$ .



Obr. 4.8: Část svazku spolu s kótami vybranými pro citlivostní analýzu.

Ohledně materiálových vlastností jednotlivých prvků svazku je situace složitější, bylo by vhodné zahrnout je do analýzy téměř všechny, avšak zde jsme omezeni především nedostatkem informací o jejich pravděpodobnostních rozděleních. Tyto informace by bylo možné získat například experimentálním měřením materiálových vlastností na velkém množství vzorků a následným statistickým zpracováním těchto dat bychom získali i spojitě rozdělení pravděpodobnosti spolu s jeho parametry.

Žádné takové výsledky experimentů bohužel nemáme k dispozici, takže budeme muset většinu materiálových vlastností uvažovat jako deterministických. V případě hustoty a Poissonova čísla by u jednotlivých materiálů přílišná variabilita nastat neměla, mnohem pravděpodobnější to bude u modulu pružnosti v tahu. Relevantní data bylo možno získat pouze pro modul pružnosti oceli, ta byla uvedena v [7]. Zde je uveden typ pravděpodobnostního rozdělení spolu s jeho parametry pro mnoho materiálových zkoušek modulu pružnosti v tahu a případně i v tlaku běžných konstrukčních ocelí, vybrány byly hodnoty určené autory Galambos, Ravindra (1978).

Posledním parametrem zahrnutým do citlivostní analýzy bude objemový podíl vláken  $v_f$ , který bude rozhodně vykazovat stochastický charakter, avšak jeho možný interval není znám, přesto bude určen alespoň přibližně.

### 4.3. CITLIVOSTNÍ ANALÝZA STATOROVÉHO SVAZKU

#### Pravděpodobnostní rozdělení vstupních proměnných

Nejprve si uvedeme základní parametry analyzovaného svazku, které (mimo počtu drážek  $p_{dr}$ ) zároveň představují i deterministické hodnoty vstupních proměnných, které byly vybrány pro citlivostní analýzu (viz. tab. 4.1). Tyto hodnoty budou následně při výpočtu nahrazeny hodnotami stochastickými.

Parametr	$\phi D$ [mm]	$\phi d$ [mm]	$h_2$ [mm]	$h_3$ [mm]	$v_c$ [mm]	$t_{iz}$ [mm]	$p_{dr}$ [-]	$v_f$ [-]	$E_{st}$ [GPa]
Hodnota	1440	1200	10	13,27	78,3	0,7	120	0,80	210

Tab. 4.1: Deterministické hodnoty vstupních proměnných.

Dalším krokem bude tedy určit jednotlivá pravděpodobnostní rozdělení a parametry, jež je popisují. Pokud nemáme k dispozici např. data z výstupní kontroly, podle kterých bychom pravděpodobnostní rozdělení a jeho parametry určili, tak je dle [3] pro všechny typy kót vhodné rovnoměrné pravděpodobnostní rozdělení. Toto rozdělení přiřazuje nastoupení každého jevu stejnou pravděpodobnost, tedy žádné hodnoty nejsou zvýhodněny nebo naopak potlačeny. Parametry popisující rozdělení jsou dolní mez  $a$  a horní mez  $b$ .

V případě rozměrů jsme tyto meze určili podle tolerančního pole kóty příslušející danému rozměru, u tloušťky izolace jsme předpokládali odchylku  $\pm 5\%$  od referenčního rozměru a stejný typ rozdělení jsme použili i pro objemový podíl vláken ve vinutí  $v_f$ , kde byly meze určeny z předpokladu, že podíl mědi by se mohl pohybovat mezi  $79\div 81\%$ . Protože podíl  $v_f$  má vliv na materiálové vlastnosti vinutí, tak byly do makra pro citlivostní analýzu zakomponovány vzorce pro výpočet těchto vlastností z kapitoly 3.1.2, takže vždy docházelo i k výpočtu modulu pružnosti, Poissonova čísla a hustoty vinutí.

Pro modul pružnosti oceli  $E_{st}$  bylo dle [7] použito normální rozdělení s parametry převzatými taktéž z této literatury. Normální rozdělení je podle [14] vždy popsáno dvěma parametry, jedná se o střední hodnotu  $\mu$  a rozptyl  $\sigma^2$ . Vliv těchto hodnot na tvar křivky hustoty pravděpodobnosti je dobře vidět na obr. 4.2 na začátku kapitoly 4.2.1, a to i pro rovnoměrné rozdělení, které je popsáno parametry  $a$  a  $b$ . Přehled všech vstupních proměnných spolu s jejich rozděleními a parametry jež je popisují můžeme vidět v tab. 4.2.

Parametr	Typ rozdělení	$a$	$b$	Jednotka
$\phi D$	Rovnoměrné	1439,875	1440,0	[mm]
$\phi d$		1200,0	1200,105	
$h_2$		9,8	10,2	
$h_3$		13,07	13,47	
$v_c$		78,0	78,6	
$t_{iz}$		0,665	0,735	
$v_f$		0,79	0,81	[-]
Parametr	Typ rozdělení	$\mu$	$\sigma^2$	Jednotka
$E_{st}$	Normální	205,078	7,798	[GPa]

Tab. 4.2: Typy pravděpodobnostních rozdělení proměnných spolu s jejich parametry.



### 4.3. CITLIVOSTNÍ ANALÝZA STATOROVÉHO SVAZKU

Po nadefinování všech náhodných vstupních proměnných je ještě možné definovat korelaci mezi nimi, v tomto případě jsou však jednotlivé veličiny na sobě zcela nezávislé, takže tento krok můžeme přeskočit.

Na závěr už zbývá definovat pouze výstupní proměnné, což nebude problém, protože citlivostní analýza bude prováděna pouze pro první dvě vlastní frekvence svazku, takže výstupy budou právě tyto frekvence  $f_1$  a  $f_2$ .

#### 4.3.2. Volba metody výpočtu

Jak už bylo uvedeno v kapitole 4.2.2, máme na výběr ze dvou základních metod, jedná se o přímou metodu Monte Carlo nebo o metodu odezvové plochy. Výhodnější je rozhodně použít odezvou plochu, protože při daném počtu vstupních proměnných (8) poskytuje vzhledem k výpočtovému času modelu, který je přibližně 45s poměrně malý počet MKP simulací. Avšak ani využití přímých Monte Carlo simulací zde právě díky výpočtovému času modelu není nemožné. Provedeme proto citlivostní analýzu v případě první vlastní frekvence oběma metodami pro jejich přímé porovnání na řešeném problému.

*Metoda odezvové plochy* potřebuje (při využití BBM algoritmu ke generování vstupních hodnot) k pokrytí prostoru osmi vstupních proměnných dle [3] 65 bodů, což znamená i 65 MKP výpočtů modelu. Následně vypočtené výstupní hodnoty proložíme aproximační funkcí (odezvou plochu), na které provedeme Monte Carlo simulace.

Při proložení máme na výběr z regresní funkce tvořené buď čistě lineárními členy nebo kombinací lineárních a kvadratických členů, zkusíme proto oba typy a následně porovnáme jejich kvalitu (viz. tab. 4.3). Z tabulky je patrné, že oba typy aproximací vykazují výborné hodnoty jak reziduálního součtu čtverců  $SSE$  (blízko nule), tak i koeficientu determinace  $R^2$  (téměř jedna). Je tak v podstatě jedno, který typ využijeme – v případě naší analýzy jsme použili kombinaci lineárních a kvadratických členů. Nakonec provedeme simulace na odezvové ploše, protože vyhodnocení aproximační funkce je velice rychlé, můžeme si dovolit bez problémů  $10^6$  simulací.

Členy regresní funkce	$SSE$ [-]	$R^2$ [-]
Lineární	7,541e-2	0,9988
Lineární + Kvadratické	2,105e-4	0,9999

Tab. 4.3: Porovnání regresních funkcí.

*Metoda Monte Carlo* byla použita v kombinaci s technikou LHS (Latin hypercube sampling), která zajišťuje rovnoměrnější pokrytí prostoru vstupních proměnných. Bylo provedeno 50 simulací ve 4 sériích, tedy celkem 200 MKP simulací. Podle informací v [3] by se totiž pro lepší výsledky LHS měl celkový počet simulací  $N_{sim}$  rozdělit do zhruba  $\sqrt[4]{N_{sim}}$  částí (samozřejmě z oboru celých čísel). Přehledné srovnání obou metod nabízí tab. 4.4,  $RS_{sim}$  zde značí počet simulací provedených na odezvové ploše.

Metoda	Sampling	$N_{sim}$	$RS_{sim}$	Celkový čas výpočtů
Monte Carlo	LHS	200	–	160 min
RSM	BBM	65	$10^6$	52 min

Tab. 4.4: Srovnání metod Monte Carlo a Response surface.

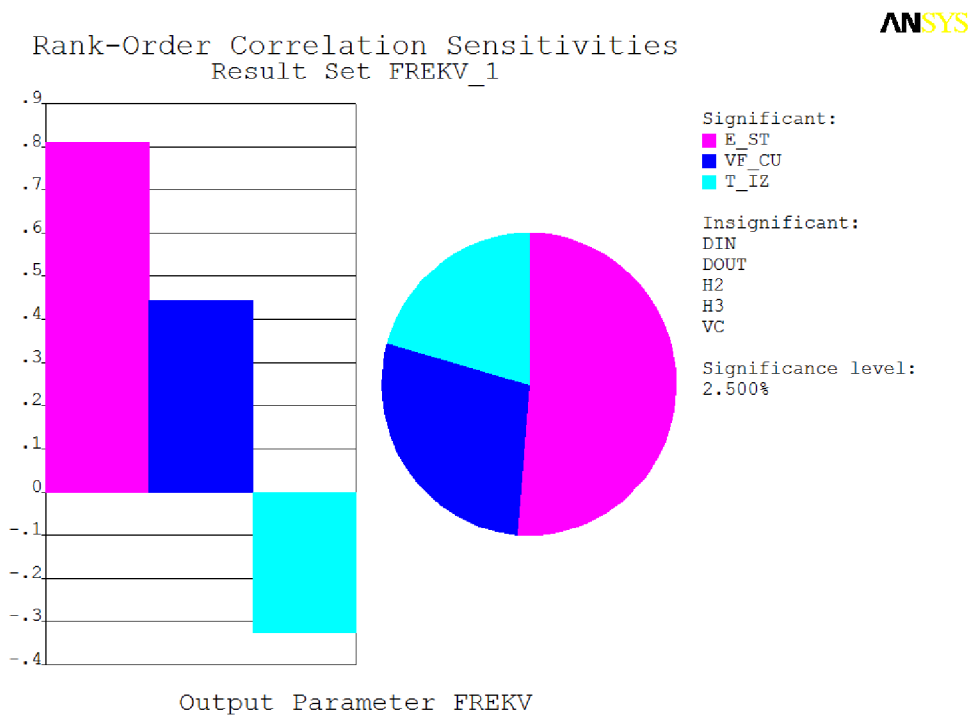
### 4.3. CITLIVOSTNÍ ANALÝZA STATOROVÉHO SVAZKU

Z porovnání je zřejmé, že RSM přináší v tomto případě více než  $\frac{2}{3}$  úsporu času, což je rozhodně nezanedbatelné. Ohledně výsledků jednotlivých metod pak bude diskutováno v následující kapitole.

#### 4.3.3. Výsledky citlivostní analýzy

Po provedení všech simulací bylo nutné v ANSYSu už pouze určit citlivosti jednotlivých vstupních proměnných na základě korelačních koeficientů, které byly popsány v kapitole 4.2.3. Vždy byl použit Spearmanův koeficient pořadové korelace  $r_s$ , pro následné testování statistické významnosti parametrů byla nastavena hladina významnosti 2,5%. Citlivosti vstupních parametrů byly nejprve určeny v závislosti na první vlastní frekvenci svazku  $f_1$  pomocí metody Monte Carlo i RSM a následně pak i v závislosti na druhé vlastní frekvenci  $f_2$ , ale už pouze metodou RSM.

Výsledky pro první vlastní frekvenci jsou zobrazeny v grafech na obr. 4.9, tyto citlivosti byly určeny pomocí přímé metody Monte Carlo (MC). Jako statisticky významný byl vyhodnocen modul pružnosti oceli  $E_{st}$ , objemový podíl mědi  $v_f$  a tloušťka izolace  $t_{iz}$ . Graf v levé části ukazuje absolutní hodnoty korelačního koeficientu, vpravo je pak graf popisující relativní citlivost.

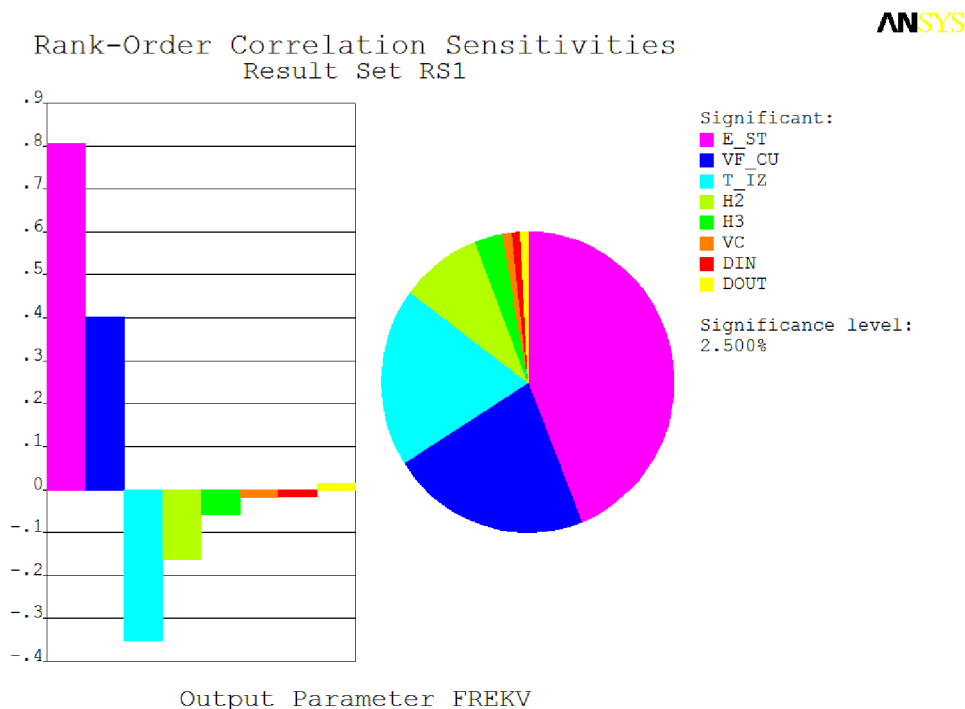


Obr. 4.9: Grafy absolutní a relativní citlivosti pro frekvenci  $f_1$  – určeno metodou MC.

Další grafy na obr. 4.10 jsou opět pro výstupní parametr první vlastní frekvence, avšak citlivosti byly určeny pomocí metody RSM. Zásadní rozdíl oproti předchozím výsledkům je ten, že jako statisticky významné byly vyhodnoceny všechny parametry, což je způsobeno především vysokým počtem simulací, které byly na odezvové ploše provedeny ve srovnání s počtem simulací u metody Monte Carlo, což zajistilo výborné pokrytí celého prostoru vstupních proměnných. Některé korelační koeficienty jsou však velmi malé, zejména tedy ty, které se týkají vnitřního a vnějšího průměru svazku (v grafu označen

### 4.3. CITLIVOSTNÍ ANALÝZA STATOROVÉHO SVAZKU

jako DIN a DOUT), výšky drážky  $v_c$  a horní šířky drážky  $h_3$ . Vliv těchto parametrů na první vlastní frekvenci je tedy minimální.



Obr. 4.10: Grafy absolutní a relativní citlivosti pro frekvenci  $f_1$  – určeno metodou RSM.

Pokud porovnáme první tři parametry u obou metod, tak vidíme, že co se týče jejich korelačních koeficientů, tak se poměrně dobře shodují, což ukazuje na dobrou funkčnost metody Monte Carlo i při relativně malém počtu simulací. Pro porovnání jsou uvedeny všechny hodnoty citlivostí reprezentovaných korelačními koeficienty pro první i druhou vlastní frekvenci v tab. 4.5, šedě jsou zde označeny koeficienty, který byly určeny jako statisticky nevýznamné. Hodnoty citlivosti v případě  $f_2$  jsou prakticky stejné jako u  $f_1$ , takže graf zde zobrazen nebude.

Výstupní proměnná	Metoda	Korelační koeficient – $r_s$							
		$E_{st}$	$v_f$	$t_{iz}$	$h_2$	$h_3$	$v_c$	$\phi d$	$\phi D$
$f_1$	MC	0,811	0,444	-0,326	-0,068	-0,033	-0,079	0,117	-0,049
	RSM	0,806	0,401	-0,352	-0,163	-0,058	-0,018	-0,017	0,015
$f_2$	RSM	0,810	0,396	-0,347	-0,161	-0,064	-0,030	-0,017	0,014

Tab. 4.5: Hodnoty korelačních koeficientů pro jednotlivé vstupní a výstupní proměnné.

Vstupní proměnné s největší citlivostí na výstupní proměnné  $f_1$  a  $f_2$  byly při daných pravděpodobnostních rozděleních (viz. tab. 4.2)  $E_{st}$ ,  $v_f$  a  $t_{iz}$ . Nejsilnější závislost vykazoval modul pružnosti oceli, to je však částečně způsobeno i poměrně velkou variabilitou této vstupní veličiny. U ocelí určených k výrobě statorových plechů mohou být materiálové vlastnosti v užším intervalu, než u běžných konstrukčních ocelí, takže by pak výsledná citlivost byla nižší. Překvapivá může být vyšší citlivost u tloušťky izolace, avšak protože tento materiál má nejhorsí mechanické vlastnosti ze všech materiálů použitých ve svazku a zároveň zvyšováním tloušťky klesá plocha vinutí, tak je tento fakt celkem logický. Ze zna-

### 4.3. CITLIVOSTNÍ ANALÝZA STATOROVÉHO SVAZKU

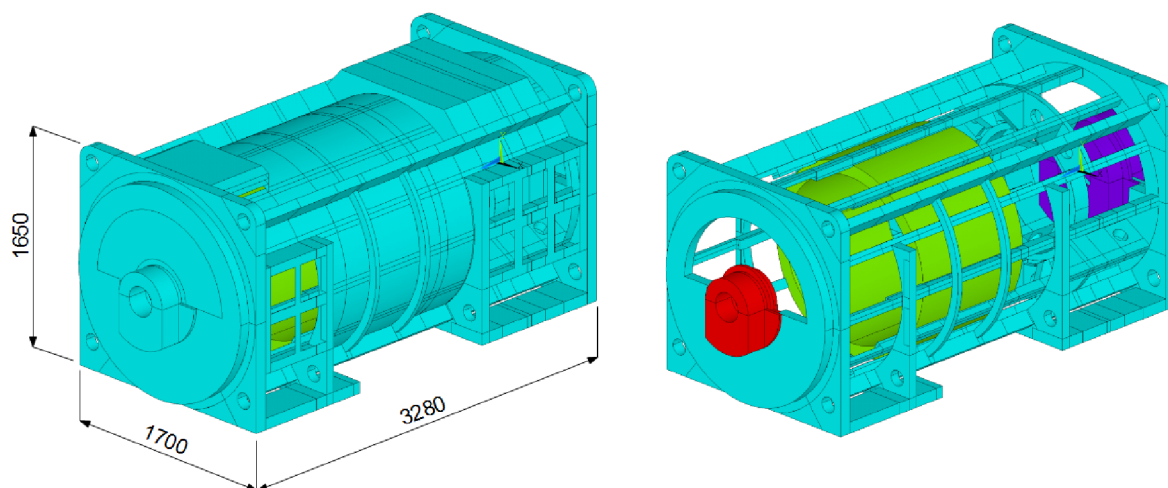
ménka korelačních koeficientů jsme také schopni zjistit, jaký bude trend výstupní veličiny při růstu vstupů. V tab. 4.5 vidíme, že zvyšováním  $E_{st}$  a  $v_f$  budou vlastní frekvence růst, naopak u zbylých parametrů (kromě  $\phi D$ ) bude s jejich nárůstem  $f_1$  a  $f_2$  klesat. To je zcela v pořádku, protože pouze zvyšováním rozměru  $\phi D$  dochází k přírůstku materiálu ve svazku, u ostatních kót je tomu naopak.

## 5. Vliv tuhosti svazku na modální vlastnosti stroje

Vliv různých tuhostí svazků, které byly vypočteny podle metodiky v 3. kapitole, na modální vlastnosti celého stroje bude ověřen na jednom vybraném stroji. Bude se jednat o stroj GSH 800 v horizontálním provedení, což je synchronní generátor s hladkým rotorem, který je podle [22] vhodný především pro malé vodní elektrárny nebo případně i lodní dopravu.

### 5.1. Model geometrie stroje

Při modelování stroje bylo použito již vytvořeného modelu podle dokumentace společnosti TES Vsetín s.r.o., který byl následně pouze upraven pro různé druhy satorových svazků. Model je spolu s jeho základními rozměry zobrazen na obr. 5.1. Vlevo vidíme kompletní stroj, napravo je pak kostra stroje bez plechových dílců, kde si můžeme všimnout některých základních prvků konstrukce, jako je satorový svazek (zelená), který zde byl modelován jako dutý válec a dvojice sestav kluzných ložisek (červená a fialová).



Obr. 5.1: Model stroje GSH 800.

Jedná se o svařovanou konstrukci, která je složena převážně z ocelových tyčí a plechů. Satorový svazek je spojen s kosterou stroje pomocí 12 tyčí čtvercového průřezu, do kterých je zasazen svými výřezy na vnějším plášti. Zanedbáno zde bylo vyvedení měděných tyčí ze svazku v případě vysokonapěťového vinutí, které by však na modální analýzu stroje nemělo mít výraznější vliv.

V modelu také chybí hřídel spolu s rotorem, což by dále zvyšovalo složitost celého modelu, neboť by se musela modelovat kompletní hřídel na níž je rotor s vinutím, ventilátor nebo např. rotor budiče. Naším cílem ani není provádět takovouto komplexní modální analýzu, vliv tuhosti satorového svazku můžeme ověřit i na takovémto jednodušším modelu tvořeném kosterou stroje, svazkem a ložisky.

## 5.2. Konečnoprvkový model

Již vytvořený model geometrie stroje obsahoval i konečnoprvkovou síť, takže nebyla nutná její kompletní tvorba, spíše úpravy a vytvoření sítě na upravovaných dílech jako byl statorový svazek, jeho uložení a všechny díly na ně přímo navazující. Výpočty byly provedeny na dvou MKP modelech, které se lišily pouze vnitřním průměrem svazku. Pro každý takovýto model byly vybrány tři různé tuhosti statorového svazku a provedena modální analýza celého stroje.

### 5.2.1. Použité materiály a prvky

V MKP modelu byly všechny materiály modelovány jako lineární izotropní, materiálové vlastnosti tedy byly popsány dvěma parametry a hustotou. V podstatě téměř celá konstrukce je složena z ocelových materiálů, výjimku tvoří statorový svazek a kluzná ložiska. V případě svazku jsme použili námi vypočtené vlastnosti, které jsou uvedeny v přílohách této práce. Protože bylo celkem prováděno 6 analýz pro různé typy svazků, znamenalo to i 6 různých materiálových vlastností statorového svazku, pro každý různý vnitřní průměr jsme vybrali tři moduly pružnosti (nejmenší, střední, nejvyšší) a odpovídající hustoty, Poissonovo číslo bylo vždy 0,3. Materiálové vlastnosti použitých svazků spolu s jejich rozměry, typem vinutí a pro představu i hmotností  $m$  jsou uvedeny v tab. 5.1., výška svazku byla ve všech případech 975 mm.

$\phi D$ [mm]	$\phi d$ [mm]	Typ vinutí	č.	$E$ [GPa]	$\mu$ [-]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$m$ [kg]
1440	1100	Tyče	1	36,0	0,3	7477,3	4884
			2	81,7	0,3	7741,5	5057
			3	113,3	0,3	7835,0	5118
	1250	Dráty	1	40,4	0,3	7220,6	2768
			2	76,5	0,3	7523,1	2884
			3	109,5	0,3	7779,6	2982

Tab. 5.1: Shrnutí použitých materiálových vlastností statorových svazků.

Protože sestava kluzného ložiska je na modelování složitá, ale přesto představuje nezanedbatelnou část hmotnosti stroje (141 kg a téměř 800 kg u většího typu), byla tato ložiska namodelována plným homogenním materiálem, avšak s přepočtenou hustotou z důvodů zachování jejich hmotnosti. Mechanické vlastnosti pak byly nastaveny stejné jako v případě oceli. Použité materiálové vlastnosti u jednotlivých částí (mimo statorový svazek) konstrukce spolu s jejich hmotností shrnuje následující tabulka 5.2.

Část konstrukce	$E$ [GPa]	$\mu$ [-]	$\rho$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$m$ [kg]
Kostra a plechy	210	0,3	7850	10365,0
Ložisko I (červená b.)	210	0,3	2800	140,6
Ložisko II (fialová b.)	210	0,3	4140	796,4

Tab. 5.2: Materiálové vlastnosti jednotlivých částí konstrukce.



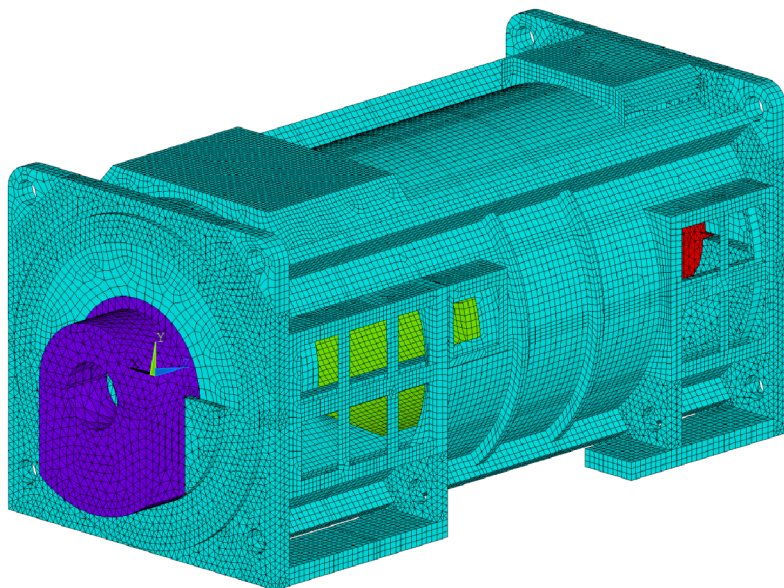
### Použité prvky

Předešlý MKP model byl postaven na technologicky starších prvcích SOLID45 a SHELL63, z důvodů zachování větší části původně sítě zde byly tyto prvky ponechány, na upravené geometrii byla pak vytvořena síť obsahující stejné prvky. Přestože se jedná o starší prvky, jsou zejména pro modální analýzu stále velice dobře použitelné. V [3] je uvedeno, že prvky SOLID45 mají zjednodušenou formulaci přetvoření a v čtyřstěnném provedení by se neměly používat pro popis větších gradientů napětí, v případě modální analýzy je nám to však zcela jedno.

Prvek SOLID45 je prostorový 8uzlový prvek se třemi stupni volnosti v každém uzlu, které odpovídají posuvům ve třech osách. Může existovat i v degenerovaných variantách, což je trojboký hranol nebo čtyřstěn, jeho nástupcem je prvek SOLID185. Další použitý prvek SHELL63 je prostorový prvek skořepinového typu, kterým můžeme popisovat jak membránové, tak i ohybové chování. Je definován čtyřmi uzly s šesti stupni volnosti v každém z nich, jedná se o tři posuvy ve vzájemně kolmých osách a tři natočení kolem těchto os. Modernější varianta tohoto prvku je SHELL181. Informace o prvcích byly převzaty z [3], kde lze nalézt i jejich detailnější popis.

#### 5.2.2. MKP síť

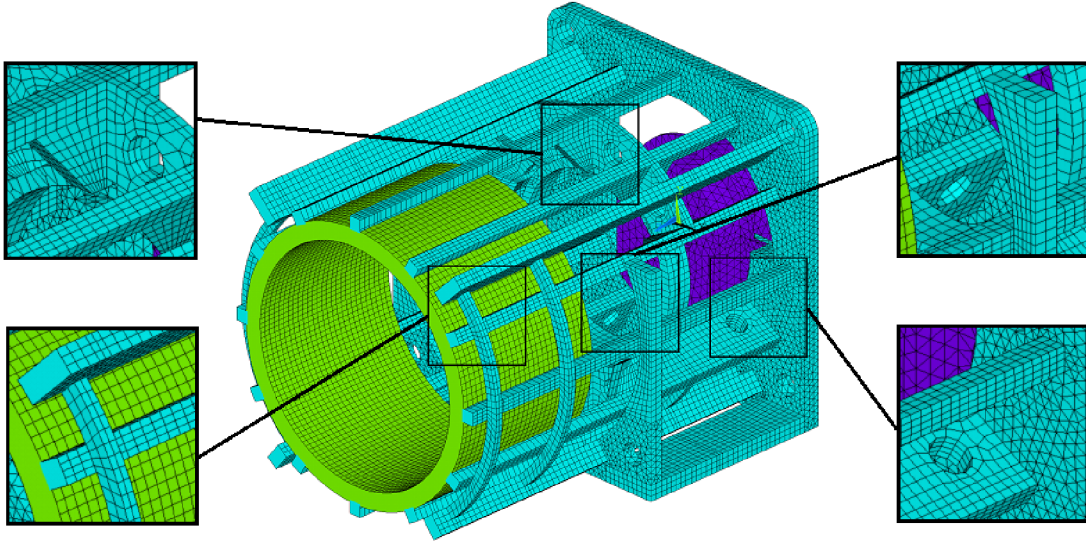
V podstatě pro celý rám stroje, ložiska i svazek byl použit prvek SOLID45, naopak plechové dílce byly vytvořeny na plochách modelu s příslušnou tloušťkou prvkem SHELL63. Kde to bylo možné, byla vytvořena mapovaná síť nebo případně síť vysunutím sweep, na zbylých místech bylo využito volné sítě čtyřstěnnů v případě prvku SOLID45 nebo čtyřúhelníku pro prvek SHELL63. Vytvořenou síť můžeme vidět na obr. 5.2, jedná se o pohled z opačné strany než je na předcházejícím obr. 5.1. Můžeme zde vidět, že MKP síť je poměrně rovnoměrná bez výraznějších vad, navíc nemusí být ani příliš jemná, protože naše analýza není deformačně napěťová.



Obr. 5.2: Konečnoprvkový model stroje GSH 800.

## 5.2. KONEČNOPRVKOVÝ MODEL

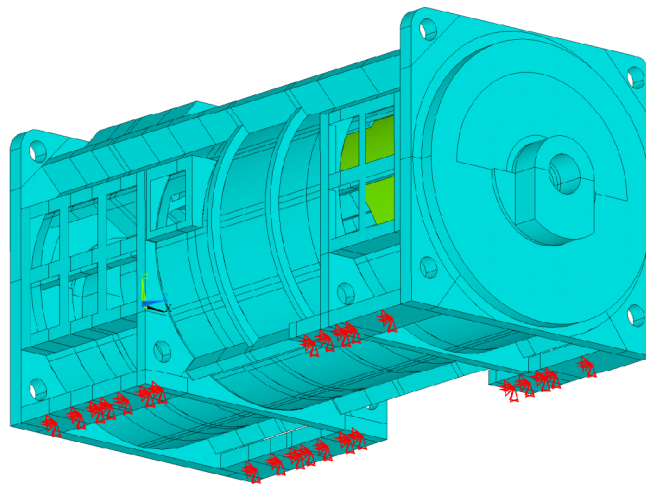
Na dalším obrázku (obr. 5.3) je zobrazen MKP model v řezu spolu s některými detaily sítě, jedná se většinou o vzájemné napojení jednotlivých prvků.



Obr. 5.3: Detaily na řezu MKP sítě.

### Okrajové podmínky

Okrajové podmínky jsou zde definovány na plochách sloužících ke spojení stroje se základem, tedy na tzv. patkách, což je vidět na obr. 5.4. Na všech těchto plochách bylo realizováno vetknutí, tedy v tomto případě šlo o zamezení posuvů ve všech směrech. Na modelu si lze také všimnout, že na patkách chybí montážní otvory, které zde pro zjednodušení geometrie nebyly modelovány. Všechny okrajové podmínky byly zadány na plochách, takže při spuštění výpočtu pak došlo k jejich přepsání do jednotlivých uzlů příslušejícím daným plochám.



Obr. 5.4: Okrajové podmínky definované na modelu stroje (vyznačeno červeně).



### Metoda řešení

Pro řešení modální analýzy byla opět použita metoda Block Lanczos využívající přímého řešiče řídkých matic. Vypočítáno bylo 25 vlastních frekvencí a jim odpovídajících tvarů, takto vysoký počet byl nutný z toho důvodu, že velmi mnoho vlastních tvarů bylo lokálního charakteru. To znamená, že u těchto tvarů se při dosažení jejich vlastní frekvence nedostává do rezonance celá konstrukce, ale pouze jen některá její malá část (plechová mřížka, část krytu, atd.). Tyto tvary tak pro konstrukci stroje nejsou nebezpečné, takže není nutné se jimi zabývat, názorný příklad takového vlastního tvaru bude uveden v kapitole 5.3.

### Statistiky MKP sítě

Konečnoprvková síť by se počtem prvků dala na dnešní poměry zařadit mezi jedny z nepřilí velkých, počty prvků pro oba MKP modely lišící se pouze vnitřním průměrem svazku společně s jejich výpočtovými časy jsou uvedeny v tab. 5.3.

Typ prvku	Počet prvků	
	$\phi d = 1100$ mm	$\phi d = 1250$ mm
SOLID45	168 187	153 307
SHELL63	25 187	25 187
<b>Počet celkem</b>	193 374	178 494
<b>Výpočtový čas</b>	19 min	13 min

Tab. 5.3: Počty prvků a výpočtové časy pro jednotlivé MKP modely.

#### Poznámka – PC sestava

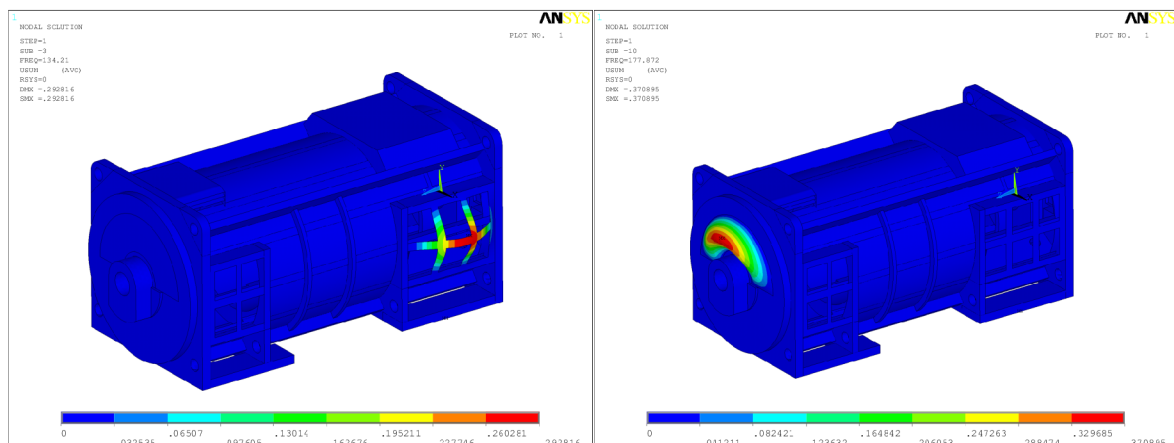
Pro všechny MKP výpočty provedené v této práci byla použita níže uvedená PC sestava s uvedeným hardwarovým a softwarovým vybavením, takže i všechny výpočtové časy jsou založeny právě na této konfiguraci.

- Procesor: Intel Core 2 Duo 3,0 GHz
- Paměť RAM: 4 GB
- OS: Windows 7 64 bit
- ANSYS 13.0 64 bit

## 5.3. Výsledky modální analýzy

Po provedení modální analýzy jsme pro každou použitou variantu statorového svazku získali 25 vlastních frekvencí a jim odpovídající vlastní tvary. Jak už ale bylo uvedeno výše, většina tvarů je tzv. lokálních, bez vlivu na celou konstrukci stroje. Příklad takovýchto místních tvarů lze vidět na obr. 5.5 na následující straně. Všechny vlastní tvary bylo proto třeba prohlédnout a vybrat pouze ty, které představují kmitání celého stroje (globální tvary). Takovouto selekci jsme nakonec získali 6 tvarů pro každou variantu svazku.

### 5.3. VÝSLEDKY MODÁLNÍ ANALÝZY



Obr. 5.5: Příklady některých lokálních vlastních tvarů.

#### 5.3.1. Statorové svazky o vnitřním průměru 1250 mm

Všechny tyto výsledky si nyní shrneme v tab. 5.4, a to nejprve pro svazky o vnitřním průměru 1250 mm. V tabulce jsou uvedeny tři varianty svazků označené čísly, které korespondují s jejich označením v tabulce materiálových vlastností (tab. 5.1), dále však budeme používat spíše označení přímo jejich ekvivalentním modulem pružnosti  $e_{ekv}$ . V tabulce je dále uvedeno označení  $N_f$ , což značí číslo vlastního tvaru v provedené modální analýze točivého stroje, vedle je pak jeho odpovídající vlastní frekvence  $f$ . Každý řádek tabulky odpovídá stejnému vlastnímu tvaru, pro zjednodušení jsme tyto námi vybrané globální tvary označili číslicemi 1÷6 v prvním sloupci tabulky.

Označení	Vnitřní průměr svazku $\phi d = 1250$ mm					
	č.1 ( $e_{ekv} = 40,4$ GPa)		č.2 ( $e_{ekv} = 76,5$ GPa)		č.3 ( $e_{ekv} = 109,5$ GPa)	
	$N_f$ [-]	$f$ [Hz]	$N_f$ [-]	$f$ [Hz]	$N_f$ [-]	$f$ [Hz]
1	1	107,0	1	110,4	1	112,3
2	2	127,1	2	129,4	2	130,6
3	5	141,2	—*	—	—*	—
4	15	203,5	15	207,2	15	208,0
5	21	233,5	21	238,7	21	241,1
6	25	279,6	25	303,1	25	305,3
—	—	—	—	—	20	230,6

\*stejný globální vlastní tvar neexistuje

Tab. 5.4: Přehled vlastních frekvencí stroje pro jednotlivé varianty statorového svazku o průměru  $\phi d = 1250$  mm.

Při změně modulu pružnosti svazku a jeho hustoty se však může stát, že některý vlastní tvar, který v předešlé analýze figuroval, se zde nyní neobjeví. Takový případ nastal u v pořadí třetího globálního tvaru, kdy zvýšením tuhosti svazku došlo k jeho potlačení v daném rozsahu výpočtové analýzy, místo něj se zde objevil pouze tvar lokální. Na druhou stranu se také může stát, že se zde objeví nový globální tvar, který zde předtím nefiguroval, což souvisí se zvyšováním hustoty svazku a tedy i jeho hmotnosti. Statorový svazek pak

představuje vyšší část hmotnosti stroje a tím je možný i vznik nových tvarů. Takový případ je v tab. 5.4 označen šedou barvou a je postaven mimo ostatní tvary, protože jej nemůžeme s žádným jiným vlastním tvarem porovnat.

Obrázky globálních vlastních tvarů synchronního stroje se statorovým svazkem o ekvivalentním modulu pružnosti  $e_{ekv} = 40,4$  GPa (č.1) jsou uvedeny v přílohách, případně všechny vlastní tvary pro jednotlivé varianty svazku můžeme nalézt na přiloženém CD.

### 5.3.2. Statorové svazky o vnitřním průměru 1100 mm

Podobně jako bylo uvedeno v předcházející podkapitole, i zde si shrneme všechny výsledky přehledně v tab. 5.5. Opět zde máme tři typy svazků, které jsme použili ve stroji pro něž jsme určili vlastní tvary a frekvence, jež jsou zde uvedeny. U pátého globálního tvaru v případě nejtuzšího svazku opět nastala situace, kdy se zde tento tvar po zvýšení modulu pružnosti už nevyskytoval. Dále si můžeme všimnout, že při zvýšení tuhosti svazku došlo k posunu čtvrtého a pátého tvaru k podstatně vyšším frekvencím a také se změnilo jejich pořadí v analýze, což popisuje  $N_f$ .

Označení	Vnitřní průměr svazku $\phi d = 1100$ mm					
	č.1 ( $e_{ekv} = 36,0$ GPa)		č.2 ( $e_{ekv} = 81,7$ GPa)		č.3 ( $e_{ekv} = 113,3$ GPa)	
	$N_f$ [-]	$f$ [Hz]	$N_f$ [-]	$f$ [Hz]	$N_f$ [-]	$f$ [Hz]
1	1	105,6	1	111,9	1	114,2
2	2	120,5	2	123,4	2	124,4
3	15	203,3	15	206,2	15	207,5
4	16	206,5	20	232,2	20	249,1
5	17	212,0	21	246,6	–*	–
6	25	280,2	25	286,9	25	289,4

\*stejný globální vlastní tvar neexistuje

Tab. 5.5: Přehled vlastních frekvencí stroje pro jednotlivé varianty statorového svazku o průměru  $\phi d = 1100$  mm.

Tvary jednotlivých globálních vlastních tvarů stroje se svazkem o ekvivalentním modulu pružnosti  $e_{ekv} = 36,0$  GPa (č. 1) jsou uvedeny v přílohách, na přiloženém CD pak nalezneme všechny vlastní tvary.

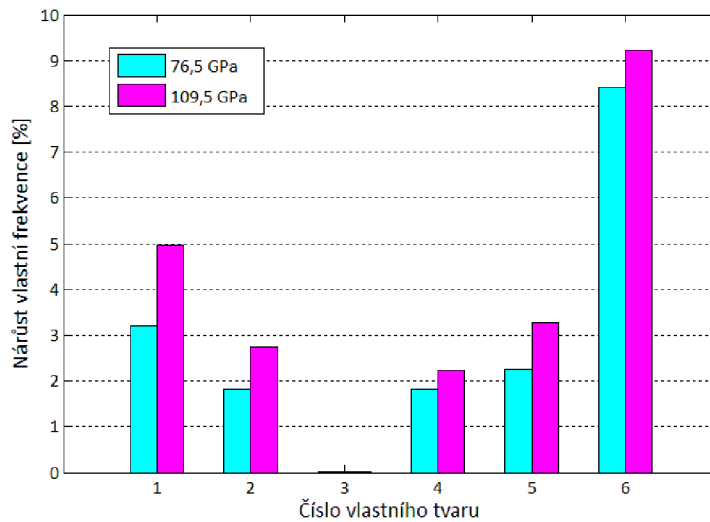
### 5.3.3. Analýza výsledků

Nejprve u statorových svazků o vnitřním průměru  $\phi d = 1250$  mm porovnáme procentní nárůst vlastní frekvence u všech globálních vlastních tvarů vzhledem k nejméně tuhému svazku, tedy k tomu, jež měl modul pružnosti 40,4 GPa. Toto porovnání můžeme vidět na obr. 5.6.

Z tohoto grafu je patrné, že největšího procentního nárůstu vlastní frekvence je dosaženo při použití nejtuzšího svazku u prvního a šestého tvaru, kde tento přírůstek činí přibližně 5, resp. 9%. Ostatní tvary mají nárůst frekvence maximálně okolo 3%, což je prakticky zanedbatelné. Z hlediska dynamiky celého stroje je nejdůležitější frekvence první, protože ta je při použití nejméně tuhého svazku poměrně blízká dvojnásobku síťové

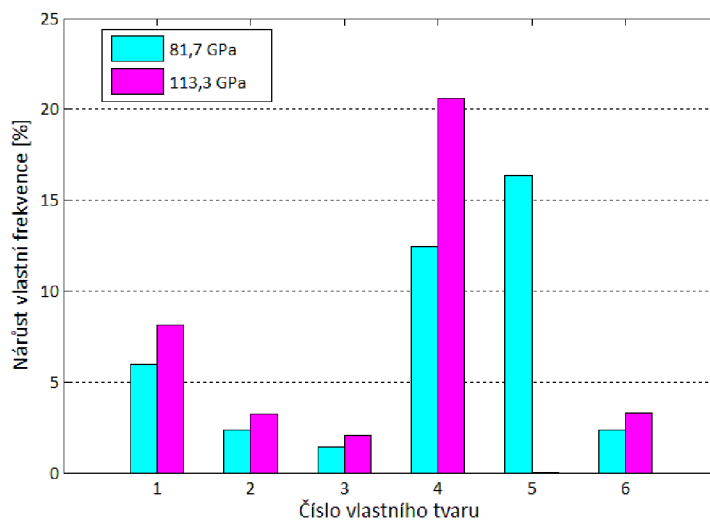
### 5.3. VÝSLEDKY MODÁLNÍ ANALÝZY

frekvence, tj. 100 Hz., to totiž může být podle [6] jedna z hlavních budících frekvencí u elektrických točivých strojů. Další buzením je zde samozřejmě otáčková frekvence, ta však u tohoto stroje dosahuje maximálně hodnoty  $1000 \text{ min}^{-1}$  [22], tedy přibližně 16,7 Hz, což je hluboko pod první vlastní frekvencí. Naším cílem však není zkoumat, zda dojde k rezonančnímu stavu, ale především určit vliv tuhosti svazku na modální vlastnosti stroje.



Obr. 5.6: Porovnání %nárůstu vlastních frekvencí u svazků o průměru  $\phi d = 1250 \text{ mm}$ .

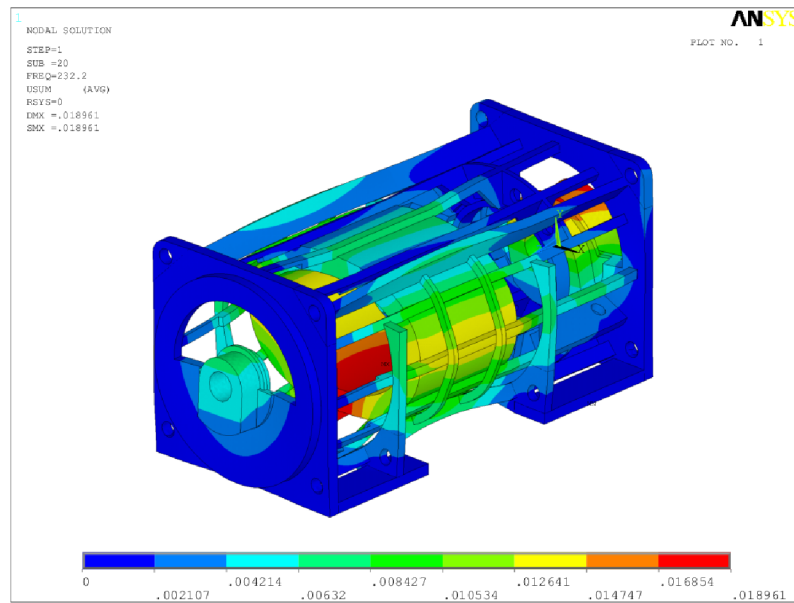
Dále se zaměříme na porovnání dalších variant statorových svazků, tedy těch největších modelů s vnitřními průměry 1100 mm, u nichž byl procentní nárůst počítán opět k nejméně tuhému svazku ( $e_{kv} = 36,0 \text{ GPa}$ ). Srovnání jejich vlivu na vlastní frekvence stroje můžeme vidět na obr. 5.7, zde si lze všimnout zhruba 8% nárůstu u prvního tvaru v případě nejtužšího svazku, nejmarkantnější je však vliv tuhosti svazku na čtvrtý a pátý vlastní tvar, kde je změna frekvence téměř 21%. Ostatní tvary vykazují pouze zanedbatelné změny přibližně do 3%.



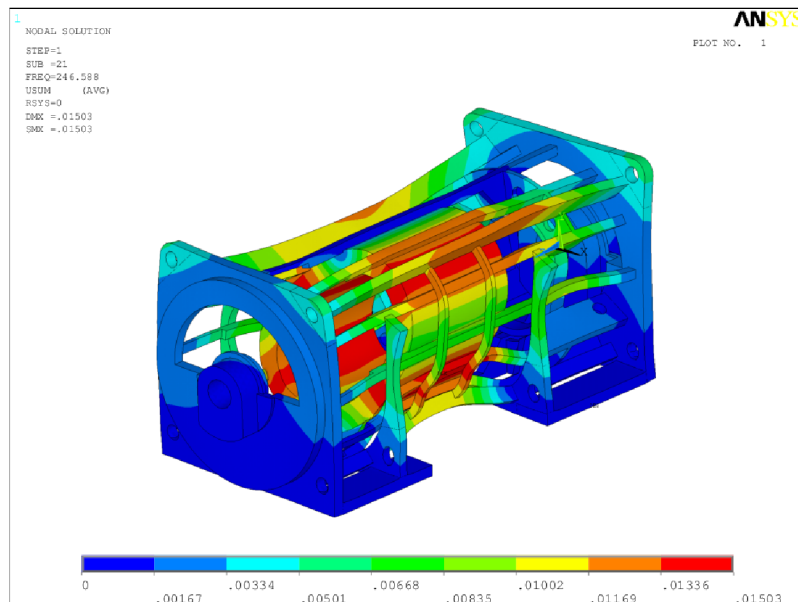
Obr. 5.7: Porovnání %nárůstu vlastních frekvencí u svazků o průměru  $\phi d = 1100 \text{ mm}$ .

### 5.3. VÝSLEDKY MODÁLNÍ ANALÝZY

Otázkou tedy je, z jakého důvodu došlo u čtvrtého a pátého vlastního tvaru k tak výraznému nárůstu vlastních frekvencí. Při bližším zkoumání těchto tvarů lze však příčinu poměrně rychle odhalit. Jedná se totiž o tvary, u nichž dochází primárně k vlastnímu kmitání statorového svazku, jehož tvar odpovídá druhému řádu kmitání kruhového prstence uvedeném v kapitole 3.1.4 (obr. 3.7), v tomto případě tak má hlavní vliv na modální vlastnosti stroje právě statorový svazek. Tento fakt názorně prezentují obr. 5.8 a 5.9.



Obr. 5.8: Čtvrtý vlastní tvar kmitání stroje (nejsou zobrazeny plechové části).



Obr. 5.9: Pátý vlastní tvar kmitání stroje (nejsou zobrazeny plechové části).

Na výše uvedených obrázcích lze vidět deformaci svazku v kostře stroje vždy dle jeho druhého řádu. Pro větší názornost byly skryty plechové části synchronního stroje, konkrétně jde o stroj, kde byl použit svazek s ekvivalentním modulem pružnosti 81,7 GPa.



## 6. Závěr

Základním cílem práce bylo vytvořit databázi tuhosti statorových svazků, které jsou vyráběny ve společnosti TES Vsetín s.r.o.. To spočívalo nejprve v sestavení výpočtového modelu, jeho následné modální analýze a nakonec pomocí optimalizačních metod ve spojení s MKP modelem byla vypočtena hodnota hledané tuhosti. Tato práce všechny tyto kroky podrobně popisuje a poskytuje tak i jakýsi návod pro řešení podobných problémů. Ve vytvořené databázi jsou zahrnuty svazky používané ve strojích GSH 800, 900, 1000 a GSH 1120, což pokrývá část výrobní řady GSH. Pro všechny tyto stroje bylo vždy vypočteno mnoho variant tak, aby byl pokryt v podstatě celý výrobní rozsah pro daný model. Jednalo se o svazky nízkonapěťové i vysokonapěťové, lišící se rozměry, počtem drážek, jejich geometrií a třeba i tloušťkou izolace. Celkem bylo nakonec vypočteno 672 různých variant, jejichž ekvivalentní modul pružnosti definující tuhost se pohyboval od zhruba 32 GPa až do 135 GPa.

Jedním z dalších cílů bylo provedení citlivostní analýzy na vybraném modelu svazku, opět pomocí metody konečných prvků. Díky této analýze jsme byli schopni určit vliv jednotlivých parametrů na vlastní frekvence svazku, které přímo souvisí s jeho tuhostí. Do analýzy však nebylo možné zahrnout všechny parametry ovlivňující vlastní frekvence, a to zejména z nedostatku informací o některých z nich. Z parametrů, jež jsme do analýzy zahrnuli a popsali je jejich pravděpodobnostními rozděleními, se jako nejcitlivější na vlastní frekvence ukázal být modul pružnosti oceli, objemový podíl mědi v drážce a také tloušťka izolace v drážce.

V závěru práce bylo třeba ověřit vliv tuhosti statorového svazku na modální vlastnosti točivého stroje, k tomuto účelu byl vybrán stroj GSH 800 ve vertikálním provedení. V dalším kroku jsme pak provedli modální analýzu stroje pro dvě velikosti svazku a tři různé tuhosti pro každou velikost. V každé analýze stroje bylo vybráno šest vlastních tvarů a jim odpovídajících frekvencí, které jsme následně porovnali. Z hlediska možného vybuzení byl nejnebezpečnější první tvar, jeho vlastní frekvence se lišila maximálně o 8 % v případě porovnání nejméně tuhého a nejtuzšího svazku. Vyšší nárůst okolo 9 % vykazoval i šestý vlastní tvar, avšak pouze u menšího ze svazků. Nejvyšší změny bylo dosaženo u čtvrtého a pátého tvaru v případě většího svazku, a to až 21 %, u těchto tvarů bylo totiž dominantní vlastní kmitání samotného svazku, takže modální vlastnosti stroje byly významně ovlivněny právě statorovým svazkem. Zbytek tvarů se v závislosti na tuhosti svazku lišilo maximálně o 3 %, což je v podstatě zanedbatelné.





# Literatura

- [1] AEV Ltd. *Safety data sheet: Ultimeg 2000/530B*. [2003]. Dostupné z: [http://www.aet.com.pl/Portals/0/katalogi\\_pdf/maszyny\\_zalewy\\_impregnaty/zywice%20bez%20rozpuszczalnika/ultimeg%202000-530%20AiB/530B%20msds%20eng.pdf](http://www.aet.com.pl/Portals/0/katalogi_pdf/maszyny_zalewy_impregnaty/zywice%20bez%20rozpuszczalnika/ultimeg%202000-530%20AiB/530B%20msds%20eng.pdf)
- [2] Alstom's Topgas generator set is an indirectly hydrogen-cooled turbogenerator. – Image – Power Technology. *Power Technology* [online]. © 2012 [cit. 2013-04-06]. Dostupné z: <http://www.power-technology.com/projects/maritzaeast/maritzaeast3.html>
- [3] ANSYS® Academic Research, Release 13.0, *Help System*, ANSYS, Inc.
- [4] DEEP, Ronald. *Probability and statistics with integrated software routines*. Burlington, MA: Academic Press, 2006, 686 s. ISBN 01-236-9463-9.
- [5] DUPONT. *Nomex type E56: Technical data sheet*. [2000]. Dostupné z: [http://www.dupont.com/Energy\\_Solutions/en\\_US/assets/downloads/E56.pdf](http://www.dupont.com/Energy_Solutions/en_US/assets/downloads/E56.pdf)
- [6] DUŠEK, Daniel, SOLODYANKIN, Kirill. Vliv tuhosti statorového svazku na modální vlastnosti elektrických strojů točivých. *Elektrorevue*. 2010, č. 25.
- [7] HESS, Paul E. BRUCHMAN, Daniel, ASSAKKAF, Ibrahim A. AYYUB, Bilal M. Uncertainties in Material and Geometric Strength and Load Variables. *Naval Engineers Journal*. 2002, roč. 114, č. 2, s. 139–166.
- [8] CHOON, Foo Chiang, GIN, Chai Boay, LEONG, Seah Key. Mechanical properties of Nomex material and Nomex honeycomb structure. *Composite Structures*. Volume 80, Issue 4, October 2007, Pages 588-594, ISSN 0263-8223.
- [9] HAMIT, Adin. The investigation of the effect of angle on the failure load and strength of scarf lap joints. *International Journal of Mechanical Sciences*. Volume 61, Issue 1, August 2012, Pages 24-31, ISSN 0020-7403.
- [10] HAMMER, Miloš. *Elektrotechnika a elektronika: přednášky*. Vyd. 1. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006, 134 s. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně). ISBN 80-214-3334-5.
- [11] JANÍČEK, Přemysl. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky: hledání souvislostí : učební texty*. 1. vyd. Brno: CERM, 2007, 1 sv. 1380 s. ISBN 978-80-7204-555-61.
- [12] KOLLÁR, László P. SPRINGER, George S. *Mechanics of composite structures*. Reprint. S.l.: Cambridge University Press, 2009. ISBN 05-211-2690-8.
- [13] MIRACLE, Daniel B. DONALDSON, Steven L. *ASM Handbook*. Materials Park: ASM International, 2001, 1201 s. ISBN 08-717-0703-9.
- [14] MONTGOMERY, Douglas. *Applied statistics and probability for engineers*. Vyd. 1. New York: John Wiley, 2003, 706 s. ISBN 04-712-0454-4.

- [15] PAN, Ning. Theoretical determination of the optimal fiber volume fraction and fiber-matrix property compatibility of short fiber composites. *Polymer Composites*. 1993, vol. 14, no. 2. Dostupné z: <http://ningpan.net/Publications/1-50/24.pdf>
- [16] SALTELLI, Andrea, TARANTOLA, Stefano, CAMPOLONGO, Francesca, RATTO, Marco. *Sensitivity Analysis in Practice: A Guide to Assessing Scientific Models*. Chichester: John Wiley, 2004. ISBN 978-047-0870-945.
- [17] Sklotextit. *HUPL CZ* [online]. © 2010 [cit. 2013-04-26]. Dostupné z: <http://www.hupl.cz/elektroizolanty-izolacni-desky-technicke-listy.php>
- [18] SOEDEL, Werner. *Vibrations of Shells and Plates, Third Edition*. 3rd ed. Hoboken: Taylor, 2004. ISBN 978-020-3026-304.
- [19] Spearman's rank correlation coefficient. *Wikipedia, the free encyclopedia* [online]. 18.12.2009 [cit. 2013-05-18]. Dostupné z: [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Spearman\\_fig1.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Spearman_fig1.svg)
- [20] Stroj synchronní. *Lecyklopædia* [online]. [cit. 2013-04-15]. Dostupné z: <http://leccos.com/index.php/clanky/stroj-synchronni>
- [21] ŠIMON, Josef. Jak se dělá elektromotor. *Elektro*. 2011, č. 2.
- [22] TES Vsetín, s.r.o. – Generátory synchronní – TEM Elektrické stroje. *TES Vsetín, s.r.o.* [online]. [2013] [cit. 2013-04-06]. Dostupné z: <http://www.tes.cz/tem/generator-synchronni/>
- [23] UHLÍŘ, Ivan. *Elektrické stroje a pohony*. Vyd. 2., přeprac. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2007, 137 s. ISBN 978-80-01-03730-0.

# Seznam použitých zkratek a symbolů

$a$	dolní mez
$A_c$	celkový obsah plochy poloviny segmentu svazku
$A_{iz}$	obsah plochy izolace
$A_{kl}$	obsah plochy klínu
$A_{pl}$	obsah plochy plechu
$A_{vin}$	obsah plochy vinutí
$b$	horní mez
BBM	Box-Behnken matrix
$c_0$	konstantní koeficient
$c_i$	lineární koeficient
$c_{ij}$	kvadratický koeficient
CCD	Central composite design
$D$	ohybová tuhost
$e_{ekv}$	ekvivalentní modul pružnosti v tahu
$E$	modul pružnosti v tahu
$E_f$	modul pružnosti v tahu vláken
$E_m$	modul pružnosti v tahu matrice
$E_{st}$	modul pružnosti v tahu oceli
$E_{t,T}$	modul pružnosti v tahu ve směru $T$
$f\sim$	frekvence střídavého proudu
$f$	vlastní frekvence
$f_1$	první vlastní frekvence
$f_2$	druhá vlastní frekvence
$f_n$	vlastní frekvence kmitání n-tého tvaru
$f_{opt}$	vlastní frekvence pro optimalizaci
$f(x)$	hustota pravděpodobnosti
$F(x)$	distribuční funkce

$G$	modul pružnosti ve smyku
$G_f$	modul pružnosti ve smyku vláken
$G_m$	modul pružnosti ve smyku matrice
$G_{T\acute{T}}$	modul pružnosti ve smyku v rovině $T\acute{T}$
$h$	tloušťka stěny prstence
$h_2$	šířka drážky dolní
$h_3$	šířka drážky horní
$K$	membránová tuhost
LHS	Latin hypercube sampling
$m$	hmotnost
MC	Monte Carlo
$n$	řád tvaru kmitání
$n_r$	otáčky rotoru
$N_f$	číslo vlastního tvaru
$N_{sim}$	celkový počet simulací
$p$	počet pólových dvojic
$p_{dr}$	počet drážek
$R$	střednicový poloměr
$R^2$	koeficient determinace
RS	Response surface (odezvodá plocha)
$RS_{sim}$	celkový počet simulací na odezvodé ploše
RSM	Response surface method (metoda odezvodé plochy)
$S_j$	parciální derivace systému
$SSE$	reziduální součet čtverců
$t_{iz}$	tloušťka izolace
$v_c$	celková výška drážky
$v_f$	objemový podíl vláken
$X$	vstupní proměnná

$Y$	výstupní proměnná
$\hat{Y}$	aproximační funkce
$\beta$	regresní koeficient
$\Delta$	rozdíl mezi hledanou a vypočtenou vlastní frekvencí
$\vartheta$	úhel segmentu
$\mu$	Poissonovo číslo
$\mu_{LT}$	Poissonovo číslo v rovině $LT$
$\mu_{T\acute{T}}$	Poissonovo číslo v rovině $T\acute{T}$
$\rho$	hustota materiálu
$\rho_{ekv}$	ekvivalentní hustota materiálu
$\rho_f$	hustota vláken
$\rho_{iz}$	hustota materiálu izolace
$\rho_{kl}$	hustota materiálu klínu
$\rho_m$	hustota matrice
$\rho_{pl}$	hustota materiálu plechu
$\rho_{vin}$	hustota materiálu vinutí
$\sigma^2$	rozptyl
$\phi d$	vnitřní průměr svazku
$\phi D$	vnější průměr svazku
$\omega_n$	úhlová frekvence pro n-tý tvar
$\omega_{n1}$	úhlová frekvence pro n-tý tvar ohybového kmitání
$\omega_{n2}$	úhlová frekvence pro n-tý tvar obvodového kmitání

# Seznam příloh

- P1 GSH 800 (nizkonapěťové vinutí)
- P2 GSH 800 (vysokonapěťové vinutí)
- P3 GSH 900 (nizkonapěťové vinutí)
- P4 GSH 900 (vysokonapěťové vinutí)
- P5 GSH 1000 (nizkonapěťové vinutí)
- P6 GSH 1000 (vysokonapěťové vinutí)
- P7 GSH 1120 (nizkonapěťové vinutí)
- P8 GSH 1120 (vysokonapěťové vinutí)
- P9 Vlastní tvary svazku o  $\phi d = 1250$  mm,  $e_{ekv} = 40,4$  GPa
- P10 Vlastní tvary svazku o  $\phi d = 1100$  mm,  $e_{ekv} = 36,0$  GPa

## P1 – GSH 800 (nízkonapětové vinutí)

Stroj: <b>GSH800</b>				$v_c = 56,7 \text{ mm } (h_3 = 12,3)$			$v_c = 113,3 \text{ mm } (h_3 = 14,8)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1440	1100	80	75	7716,54	172,91	90 990	7579,00	144,00	61 911
			80	7740,44	175,11	93 510	7634,86	148,10	65 996
			85	7764,33	177,77	96 660	7690,73	152,86	70 791
			90	7788,23	181,05	100 630	7746,60	158,49	76 635
1440	1100	120	75	7649,76	163,06	80 180	7443,41	126,38	46 958
			80	7685,62	164,77	82 250	7527,23	130,10	50 154
			85	7721,47	166,91	84 770	7611,04	134,51	54 239
			90	7757,33	169,65	88 010	7694,86	139,84	59 274
1440	1100	160	75	7582,96	157,53	74 140	7307,76	114,88	38 078
			80	7630,76	158,81	75 850	7419,54	118,18	40 795
			85	7678,59	160,48	77 920	7531,32	122,17	44 471
			90	7726,41	162,71	80 630	7643,10	127,09	48 636
1440	1100	200	75	7516,13	154,13	70 360	7172,05	106,81	32 394
			80	7575,91	155,05	71 890	7311,81	109,70	34 792
			85	7635,69	156,32	73 690	7451,57	113,27	37 678
			90	7695,48	158,10	75 760	7591,32	117,76	41 434

Stroj: <b>GSH800</b>				$v_c = 44,2 \text{ mm } (h_3 = 11,8)$			$v_c = 88,3 \text{ mm } (h_3 = 13,7)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1440	1175	80	75	7718,96	131,80	95 067	7590,12	112,00	67 744
			80	7741,11	133,37	98 078	7641,16	114,97	71 644
			85	7763,26	135,27	101 078	7692,19	118,40	76 456
			90	7785,41	137,61	104 678	7743,22	122,40	82 456
1440	1175	120	75	7653,39	124,10	83 656	7460,09	98,90	51 822
			80	7686,62	125,36	85 756	7536,65	101,63	55 133
			85	7719,86	126,93	88 467	7613,22	104,86	59 633
			90	7753,09	128,94	91 467	7689,79	108,74	64 744
1440	1175	160	75	7587,78	119,75	77 356	7329,98	90,22	42 522
			80	7632,10	120,72	78 856	7432,09	92,68	45 522
			85	7676,43	121,98	80 956	7534,21	95,63	48 822
			90	7720,75	123,63	83 656	7636,32	99,26	53 633
1440	1175	200	75	7522,13	117,04	73 144	7199,80	84,02	36 211
			80	7577,55	117,75	74 644	7327,47	86,20	38 567
			85	7632,97	118,74	76 456	7455,15	88,87	41 911
			90	7688,40	120,09	78 856	7582,83	92,20	45 822

Stroj: <b>GSH800</b>				$v_c = 31,7 \text{ mm } (h_3 = 11,2)$			$v_c = 63,3 \text{ mm } (h_3 = 12,6)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1440	1250	80	75	7719,38	92,78	100 778	7598,51	79,86	73 444
			80	7739,45	93,75	103 178	7644,65	81,77	77 356
			85	7759,52	94,92	105 878	7690,79	83,98	82 156
			90	7779,59	96,38	109 489	7736,93	86,58	88 467
1440	1250	120	75	7654,00	87,08	88 467	7472,63	70,88	56 933
			80	7684,00	87,89	89 967	7541,87	72,68	60 233
			85	7714,23	88,90	92 367	7611,10	74,81	64 744
			90	7744,34	90,20	95 367	7680,34	77,35	69 544
1440	1250	160	75	7588,58	83,85	80 956	7346,66	64,91	47 022
			80	7628,74	84,50	82 456	7439,00	66,55	50 022
			85	7668,90	85,33	84 556	7531,35	68,51	53 633
			90	7709,07	86,43	87 267	7623,70	70,91	58 133

Stroj: <b>GSH800</b>				$v_c = 31,7 \text{ mm } (h_3 = 11,2)$			$v_c = 63,3 \text{ mm } (h_3 = 12,6)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1440	1250	200	75	7523,10	81,84	76 456	7220,59	60,60	40 411
			80	7573,32	82,33	77 656	7336,07	62,06	42 822
			85	7623,55	83,00	79 456	7451,55	63,86	46 122
			90	7673,77	83,91	81 856	7567,02	66,09	50 022

## P2 – GSH 800 (vysokonapětové vinutí)

Stroj: <b>GSH800</b>				$v_c = 56,7 \text{ mm } (h_3 = 12,3)$			$v_c = 113,3 \text{ mm } (h_3 = 14,8)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$t_{iz}$ [mm]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1440	1100	80	0,7	7834,95	191,57	113 289	7857,24	174,68	94 467
			1,05	7795,76	182,08	101 878	7778,88	160,01	78 656
			1,4	7757,06	175,89	94 767	7700,00	149,49	67 844
1440	1100	120	0,7	7827,41	179,00	98 878	7860,87	155,91	75 544
			1,05	7768,63	170,52	89 067	7743,30	141,30	60 933
			1,4	7710,56	165,35	83 056	7626,50	131,30	51 822
1440	1100	160	0,7	7819,88	170,81	89 867	7864,50	142,50	62 933
			1,05	7741,49	163,44	81 656	7707,71	128,48	50 322
			1,4	7664,05	159,20	76 656	7551,88	119,21	42 322
1440	1100	200	0,7	7812,34	165,06	83 856	7868,12	132,35	54 433
			1,05	7714,33	158,71	76 656	7672,10	119,08	42 822
			1,4	7617,52	155,27	72 544	7477,28	110,55	36 011

Stroj: <b>GSH800</b>				$v_c = 44,2 \text{ mm } (h_3 = 11,8)$			$v_c = 88,3 \text{ mm } (h_3 = 13,7)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$t_{iz}$ [mm]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1440	1175	80	0,7	7828,36	145,30	117 216	7843,93	134,18	100 178
			1,05	7790,30	138,53	105 996	7767,83	123,63	84 156
			1,4	7752,84	134,10	98 878	7692,33	115,99	73 344
1440	1175	120	0,7	7817,54	135,92	102 378	7840,90	120,54	80 756
			1,05	7760,44	129,74	92 667	7726,72	109,88	66 144
			1,4	7704,23	125,94	86 767	7613,44	102,51	56 733
1440	1175	160	0,7	7806,71	129,77	93 267	7837,86	110,66	68 044
			1,05	7730,55	124,33	84 756	7685,59	100,32	54 833
			1,4	7655,59	121,17	79 656	7534,52	93,41	46 622
1440	1175	200	0,7	7795,87	125,43	86 967	7834,82	103,08	59 033
			1,05	7700,66	120,69	79 556	7644,44	93,21	47 022
			1,4	7606,93	118,09	75 244	7455,55	86,81	39 811

Stroj: <b>GSH800</b>				$v_c = 31,7 \text{ mm } (h_3 = 11,2)$			$v_c = 63,3 \text{ mm } (h_3 = 12,6)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$t_{iz}$ [mm]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1440	1250	80	0,7	7817,89	101,43	121 890	7827,39	94,42	105 670
			1,05	7780,92	97,22	111 620	7753,44	87,64	90 270
			1,4	7744,76	94,46	104 590	7680,30	82,68	79 450
1440	1250	120	0,7	7801,82	94,93	106 480	7816,07	85,34	86 210
			1,05	7746,34	90,96	97 020	7705,12	78,37	71 620
			1,4	7692,10	88,49	91 620	7595,38	73,50	62 160
1440	1250	160	0,7	7785,75	90,66	97 020	7804,75	78,69	73 240
			1,05	7711,75	87,10	88 640	7656,76	71,87	60 270
			1,4	7639,38	85,01	83 510	7510,40	67,26	51 620
1440	1250	200	0,7	7769,66	87,65	90 540	7793,42	73,55	63 780
			1,05	7677,14	84,51	82 970	7608,38	66,99	51 620
			1,4	7586,64	82,77	78 640	7425,36	62,69	44 320



### P3 – GSH 900 (nízkonapěťové vinutí)

Stroj: <b>GSH900</b>				$v_c = 65,0 \text{ mm } (h_3 = 12,7)$			$v_c = 130,0 \text{ mm } (h_3 = 15,5)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1640	1250	80	75	7732,90	155,65	94 067	7609,38	131,79	66 344
			80	7754,52	157,76	96 967	7660,29	135,56	70 744
			85	7776,14	160,29	100 378	7711,19	139,90	75 756
			90	7797,76	163,38	104 578	7762,09	145,00	81 956
1640	1250	120	75	7674,32	146,48	82 756	7489,01	115,89	50 522
			80	7706,75	148,17	84 956	7565,38	119,37	54 133
			85	7739,19	150,27	87 767	7641,75	123,47	58 533
			90	7771,63	152,92	91 267	7718,12	128,41	63 933
1640	1250	160	75	7615,72	141,18	76 256	7368,60	105,37	41 111
			80	7658,97	142,51	78 156	7470,45	108,51	44 122
			85	7702,23	144,21	80 456	7572,29	112,29	47 922
			90	7745,49	146,42	83 456	7674,13	116,91	52 622
1640	1250	200	75	7557,10	137,84	72 144	7248,16	97,89	34 911
			80	7611,18	138,85	73 744	7375,48	100,70	37 511
			85	7665,26	140,20	75 656	7502,80	104,13	40 811
			90	7719,34	142,03	78 256	7630,13	108,41	45 022

Stroj: <b>GSH900</b>				$v_c = 50,8 \text{ mm } (h_3 = 12,1)$			$v_c = 101,7 \text{ mm } (h_3 = 14,3)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1640	1335	80	75	7735,69	119,08	98 978	7619,95	102,75	72 244
			80	7755,68	120,59	101 178	7666,41	105,48	76 756
			85	7775,68	122,40	104 578	7712,86	108,61	81 756
			90	7795,67	124,60	109 089	7759,31	112,27	87 867
1640	1335	120	75	7678,49	111,93	86 356	7504,86	90,92	55 733
			80	7708,49	113,19	88 667	7574,55	93,49	59 333
			85	7738,49	114,73	91 467	7644,24	96,50	63 933
			90	7768,49	116,67	94 867	7713,93	100,09	69 444
1640	1335	160	75	7621,28	107,77	79 356	7389,72	82,98	45 622
			80	7661,28	108,78	81 356	7482,66	85,33	48 822
			85	7701,29	110,05	83 756	7575,60	88,13	52 822
			90	7741,30	111,70	86 867	7668,54	91,52	57 733
1640	1335	200	75	7564,04	105,12	75 044	7274,53	77,24	38 911
			80	7614,06	105,90	76 756	7390,73	79,36	41 711
			85	7664,08	106,93	78 756	7506,93	81,93	45 422
			90	7714,10	108,32	81 156	7623,13	85,11	49 622

Stroj: <b>GSH900</b>				$v_c = 36,7 \text{ mm } (h_3 = 11,5)$			$v_c = 73,3 \text{ mm } (h_3 = 13,1)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1640	1420	80	75	7736,52	84,23	103 778	7628,59	73,61	78 156
			80	7754,79	85,17	106 378	7670,55	75,38	82 356
			85	7773,05	86,30	110 089	7712,50	77,41	87 867
			90	7791,32	87,69	113 289	7754,46	79,78	93 267
1640	1420	120	75	7679,74	78,96	90 467	7517,80	65,49	60 933
			80	7707,14	79,77	92 667	7580,75	67,19	64 644
			85	7734,54	80,78	95 467	7643,69	69,18	69 244
			90	7761,95	82,05	98 978	7706,64	71,55	74 644
1640	1420	160	75	7622,92	75,89	82 956	7406,94	60,00	50 422
			80	7659,47	76,56	84 956	7490,90	61,58	53 733
			85	7696,02	77,41	87 867	7574,85	63,45	57 733
			90	7732,57	78,51	90 067	7658,80	65,72	62 533

Stroj: <b>GSH900</b>				$v_c = 36,7 \text{ mm } (h_3 = 11,5)$			$v_c = 73,3 \text{ mm } (h_3 = 13,1)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1640	1420	200	75	7566,07	73,92	78 156	7296,02	56,01	43 422
			80	7611,77	74,46	79 756	7400,99	57,45	46 222
			85	7657,47	75,16	81 756	7505,97	59,18	49 622
			90	7703,17	76,10	84 356	7610,94	61,31	54 533

#### P4 – GSH 900 (vysokonapětové vinutí)

Stroj: <b>GSH900</b>				$v_c = 65,0 \text{ mm } (h_3 = 12,7)$			$v_c = 130,0 \text{ mm } (h_3 = 15,5)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$t_{iz}$ [mm]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1640	1250	80	0,7	7840,18	172,98	117 889	7863,07	159,38	100 378
			1,05	7805,75	164,28	105 978	7794,18	146,37	83 956
			1,4	7771,69	158,49	98 178	7725,66	136,91	72 844
1640	1250	120	0,7	7835,26	161,68	102 978	7869,61	142,95	80 756
			1,05	7783,62	153,70	92 467	7766,26	129,76	65 644
			1,4	7732,52	148,72	85 956	7663,46	120,60	55 933
1640	1250	160	0,7	7830,35	154,16	93 467	7876,15	131,04	68 044
			1,05	7761,48	147,07	84 356	7738,33	118,21	54 533
			1,4	7693,34	142,88	78 956	7601,25	109,59	45 822
1640	1250	200	0,7	7825,43	148,81	87 067	7882,70	121,92	58 933
			1,05	7739,33	142,58	79 156	7710,40	109,64	46 622
			1,4	7654,15	139,08	74 644	7539,01	101,62	39 311

Stroj: <b>GSH900</b>				$v_c = 50,8 \text{ mm } (h_3 = 12,1)$			$v_c = 101,7 \text{ mm } (h_3 = 14,3)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$t_{iz}$ [mm]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1640	1335	80	0,7	7834,63	131,59	121 889	7851,18	122,66	105 978
			1,05	7801,22	125,37	110 089	7784,24	113,29	89 667
			1,4	7768,26	121,20	102 378	7717,75	106,39	78 356
1640	1335	120	0,7	7826,95	123,18	106 578	7851,77	110,72	86 867
			1,05	7776,82	117,35	96 067	7751,34	101,08	71 044
			1,4	7727,37	113,68	89 667	7651,59	94,30	61 133
1640	1335	160	0,7	7819,26	117,53	96 867	7852,36	101,95	73 244
			1,05	7752,41	112,29	87 867	7718,43	92,47	59 133
			1,4	7686,47	109,16	82 156	7585,41	86,02	50 422
1640	1335	200	0,7	7811,57	113,49	90 267	7852,95	95,15	63 733
			1,05	7727,99	108,83	82 156	7685,51	86,00	51 022
			1,4	7645,55	106,19	77 356	7519,21	79,96	43 422

Stroj: <b>GSH900</b>				$v_c = 36,7 \text{ mm } (h_3 = 11,5)$			$v_c = 73,3 \text{ mm } (h_3 = 13,1)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$t_{iz}$ [mm]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1640	1420	80	0,7	7826,46	92,30	126 178	7836,97	86,71	111 467
			1,05	7793,93	88,37	115 067	7771,95	80,62	95 756
			1,4	7762,02	85,74	107 867	7707,54	76,11	84 644
1640	1420	120	0,7	7814,68	86,47	110 467	7830,46	78,73	91 844
			1,05	7765,88	82,67	100 356	7732,89	72,37	76 533
			1,4	7718,01	80,26	94 044	7636,25	67,85	66 422
1640	1420	160	0,7	7802,90	82,55	100 556	7823,94	72,82	78 533
			1,05	7737,82	79,08	91 444	7693,82	66,50	64 222
			1,4	7673,97	76,98	86 044	7564,94	62,17	55 311
1640	1420	200	0,7	7791,11	79,73	93 644	7817,41	68,20	68 822
			1,05	7709,74	76,61	85 644	7654,73	62,05	55 711
			1,4	7629,90	74,81	80 733	7493,58	57,96	47 600

**P5 – GSH 1000 (nízkonapětové vinuti)**

Stroj: <b>GSH1000</b>				$v_c = 73,3 \text{ mm } (h_3 = 13,1)$			$v_c = 146,7 \text{ mm } (h_3 = 16,3)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1840	1400	80	75	7745,48	141,75	97 356	7632,52	121,62	70 622
			80	7765,28	143,76	100 356	7679,70	125,09	75 133
			85	7785,09	146,15	103 956	7726,88	129,08	80 533
			90	7804,89	149,06	108 467	7774,06	133,73	86 844
1840	1400	120	75	7693,20	133,17	85 344	7523,74	107,15	53 811
			80	7722,91	134,84	87 744	7594,52	110,42	57 711
			85	7752,62	136,88	90 744	7665,29	114,25	62 522
			90	7782,33	139,43	94 344	7736,07	118,83	68 522
1840	1400	160	75	7640,90	128,12	78 433	7414,93	97,47	43 900
			80	7680,52	129,46	80 233	7509,31	100,46	47 200
			85	7720,14	131,15	82 933	7603,69	104,04	51 411
			90	7759,77	133,33	86 244	7698,08	108,38	56 511
1840	1400	200	75	7588,59	124,87	73 933	7306,09	90,52	37 500
			80	7638,13	125,93	75 733	7424,08	93,23	40 300
			85	7687,66	127,31	78 133	7542,08	96,52	43 900
			90	7737,19	129,15	80 533	7660,07	100,59	48 400

Stroj: <b>GSH1000</b>				$v_c = 56,7 \text{ mm } (h_3 = 12,3)$			$v_c = 113,3 \text{ mm } (h_3 = 14,8)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1840	1500	80	75	7748,52	106,99	102 160	7643,93	93,63	77 293
			80	7766,69	108,41	104 680	7686,41	96,10	81 613
			85	7784,86	110,09	108 280	7728,89	98,91	87 027
			90	7803,03	112,13	112 600	7771,37	102,18	93 147
1840	1500	120	75	7697,75	100,43	89 187	7540,85	83,06	59 627
			80	7725,01	101,64	91 707	7604,58	85,43	63 960
			85	7752,27	103,11	94 587	7668,31	88,18	68 280
			90	7779,53	104,94	98 187	7732,04	91,45	74 053
1840	1500	160	75	7646,96	96,52	81 613	7437,73	75,89	49 187
			80	7683,32	97,51	83 773	7522,71	78,08	52 787
			85	7719,67	98,76	86 293	7607,70	80,68	56 747
			90	7756,03	100,35	89 547	7692,69	83,81	62 160
1840	1500	200	75	7596,16	93,97	77 293	7334,57	70,65	41 973
			80	7641,61	94,77	79 093	7440,83	72,66	45 213
			85	7687,07	95,81	80 893	7547,08	75,07	48 827
			90	7732,52	97,18	83 773	7653,33	78,03	53 507

Stroj: <b>GSH1000</b>				$v_c = 40,0 \text{ mm } (h_3 = 11,6)$			$v_c = 80,0 \text{ mm } (h_3 = 13,3)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1840	1600	80	75	7749,90	74,01	107 560	7653,11	65,55	83 240
			80	7766,37	74,87	110 270	7690,98	67,10	87 830
			85	7782,85	75,89	113 510	7728,86	68,87	92 970
			90	7799,33	77,13	117 560	7766,74	70,92	98 910
1840	1600	120	75	7699,81	69,32	93 780	7554,59	58,49	65 400
			80	7724,53	70,08	96 210	7611,42	60,02	69 450
			85	7749,26	71,01	98 910	7668,25	61,78	74 050
			90	7773,98	72,17	102 700	7725,08	63,87	80 270
1840	1600	160	75	7649,70	66,51	85 670	7456,03	53,67	54 320
			80	7682,67	67,16	87 830	7531,82	55,10	57 830
			85	7715,64	67,96	90 270	7607,61	56,79	62 160
			90	7748,61	68,99	93 510	7683,40	58,81	67 290

Stroj: <b>GSH1000</b>				$v_c = 40,0 \text{ mm } (h_3 = 11,6)$			$v_c = 80,0 \text{ mm } (h_3 = 13,3)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1840	1600	200	75	7599,57	64,68	80 540	7357,43	50,11	46 750
			80	7640,79	65,21	82 430	7452,19	51,44	50 270
			85	7682,02	65,90	84 590	7546,95	53,02	53 780
			90	7723,24	66,80	87 290	7641,71	54,95	58 370

## P6 – GSH 1000 (vysokonapětové vinutí)

Stroj: <b>GSH1000</b>				$v_c = 73,3 \text{ mm } (h_3 = 13,1)$			$v_c = 146,7 \text{ mm } (h_3 = 16,3)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$t_{iz}$ [mm]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1840	1400	80	0,7	7843,85	157,87	121 978	7867,76	146,66	105 606
			1,05	7813,15	149,87	109 567	7806,29	135,03	88 744
			1,4	7782,74	144,45	101 306	7745,11	126,47	77 233
1840	1400	120	0,7	7840,78	147,65	106 817	7876,64	132,12	85 744
			1,05	7794,72	140,15	95 706	7784,42	120,15	70 122
			1,4	7749,10	135,38	88 594	7692,64	111,73	59 861
1840	1400	160	0,7	7837,70	140,73	96 856	7885,53	121,45	72 522
			1,05	7776,29	133,96	87 044	7762,56	109,67	58 261
			1,4	7715,45	129,85	81 233	7640,16	101,66	49 300
1840	1400	200	0,7	7834,62	135,73	90 044	7894,41	113,20	63 372
			1,05	7757,85	129,68	81 383	7740,68	101,83	50 150
			1,4	7681,80	126,18	76 233	7587,68	94,29	42 150

Stroj: <b>GSH1000</b>				$v_c = 56,7 \text{ mm } (h_3 = 12,3)$			$v_c = 113,3 \text{ mm } (h_3 = 14,8)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$t_{iz}$ [mm]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1840	1500	80	0,7	7838,55	118,40	126 178	7855,51	111,28	111 467
			1,05	7808,76	112,76	113 867	7795,92	103,05	94 944
			1,4	7779,33	108,92	105 756	7736,69	96,92	83 233
1840	1500	120	0,7	7832,83	110,92	110 567	7858,26	100,92	91 944
			1,05	7788,13	105,52	99 456	7768,87	92,31	76 033
			1,4	7743,98	102,06	92 544	7680,02	86,18	65 522
1840	1500	160	0,7	7827,10	105,81	100 656	7861,02	93,21	78 433
			1,05	7767,49	100,87	90 744	7741,81	84,65	64 022
			1,4	7708,62	97,85	84 744	7623,32	78,75	54 411
1840	1500	200	0,7	7821,37	102,09	93 444	7863,78	87,17	68 522
			1,05	7746,85	97,63	84 744	7714,74	78,83	55 011
			1,4	7673,24	95,03	79 633	7566,62	73,24	46 600

Stroj: <b>GSH1000</b>				$v_c = 40,0 \text{ mm } (h_3 = 11,6)$			$v_c = 80,0 \text{ mm } (h_3 = 13,3)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$t_{iz}$ [mm]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
1840	1600	80	0,7	7831,15	81,12	130 689	7841,36	76,78	118 078
			1,05	7802,26	77,67	119 578	7783,51	71,59	101 256
			1,4	7773,86	75,33	111 767	7726,16	67,68	89 844
1840	1600	120	0,7	7821,73	76,08	114 767	7837,04	70,05	97 356
			1,05	7778,37	72,68	104 256	7750,25	64,53	81 733
			1,4	7735,76	70,48	97 356	7664,20	60,55	71 222
1840	1600	160	0,7	7812,30	72,64	104 556	7832,72	65,00	83 833
			1,05	7754,47	69,46	94 944	7716,97	59,45	69 122
			1,4	7697,65	67,50	88 944	7602,22	55,58	59 511
1840	1600	200	0,7	7802,86	70,11	97 356	7828,40	61,01	73 933
			1,05	7730,57	67,21	88 644	7683,68	55,55	60 111
			1,4	7659,53	65,50	83 233	7540,21	51,85	51 411

**P7 – GSH 1120 (nízkonapětové vinuti)**

Stroj: <b>GSH1120</b>				$v_c = 80,0 \text{ mm } (h_3 = 13,3)$			$v_c = 160,0 \text{ mm } (h_3 = 16,8)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
2080	1600	80	75	7758,00	122,59	101 441	7657,05	107,03	76 324
			80	7775,70	124,39	104 741	7699,56	110,03	80 957
			85	7793,39	126,51	108 371	7742,06	113,44	86 897
			90	7811,09	129,06	112 991	7784,57	117,40	93 179
2080	1600	120	75	7711,98	115,00	88 547	7560,54	94,66	59 152
			80	7738,53	116,54	91 199	7624,31	97,54	63 112
			85	7765,08	118,40	94 499	7688,07	100,89	68 074
			90	7791,63	120,71	99 119	7751,84	104,87	74 014
2080	1600	160	75	7665,95	110,42	81 287	7464,02	86,26	48 167
			80	7701,36	111,69	83 597	7549,05	88,94	51 880
			85	7736,77	113,28	86 237	7634,08	92,11	56 182
			90	7772,17	115,30	89 879	7719,11	95,95	61 792
2080	1600	200	75	7619,92	107,41	76 324	7367,47	80,14	40 990
			80	7664,18	108,45	78 647	7473,77	82,60	44 290
			85	7708,44	109,79	80 627	7580,07	85,57	48 067
			90	7752,70	111,53	83 927	7686,37	89,20	53 212

Stroj: <b>GSH1120</b>				$v_c = 63,3 \text{ mm } (h_3 = 12,6)$			$v_c = 126,7 \text{ mm } (h_3 = 15,4)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
2080	1700	80	75	7760,56	95,06	105 456	7666,23	84,31	81 883
			80	7776,97	96,36	108 617	7704,95	86,50	86 694
			85	7793,38	97,89	112 217	7743,68	88,99	92 244
			90	7809,79	99,73	116 717	7782,40	91,85	98 706
2080	1700	120	75	7715,82	89,13	92 094	7574,31	75,03	64 022
			80	7740,44	90,27	94 794	7632,40	77,17	68 372
			85	7765,06	91,65	98 106	7690,49	79,65	73 483
			90	7789,67	93,35	102 006	7748,59	82,57	79 333
2080	1700	160	75	7671,07	85,52	84 594	7482,36	68,65	52 911
			80	7703,90	86,49	86 544	7559,83	70,66	56 661
			85	7736,73	87,69	89 394	7637,30	73,03	61 161
			90	7769,56	89,20	92 844	7714,77	75,87	66 872
2080	1700	200	75	7626,31	83,13	79 183	7390,40	63,93	45 400
			80	7667,35	83,93	81 133	7487,24	65,80	48 700
			85	7708,39	84,96	83 683	7584,09	68,04	52 761
			90	7749,43	86,28	86 694	7680,94	70,75	57 711

Stroj: <b>GSH1120</b>				$v_c = 46,7 \text{ mm } (h_3 = 11,9)$			$v_c = 93,3 \text{ mm } (h_3 = 13,9)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
2080	1800	80	75	7761,97	68,72	110 567	7674,59	61,61	87 744
			80	7777,05	69,56	113 567	7709,39	63,07	92 544
			85	7792,13	70,55	116 867	7744,19	64,71	97 956
			90	7807,21	71,74	121 378	7778,99	66,61	104 256
2080	1800	120	75	7717,93	64,33	96 456	7586,84	55,13	69 422
			80	7740,56	65,10	98 856	7639,05	56,58	73 633
			85	7763,18	66,02	102 156	7691,26	58,25	78 733
			90	7785,81	67,16	106 056	7743,47	60,21	84 744
2080	1800	160	75	7673,88	61,66	88 044	7499,06	50,64	58 011
			80	7704,05	62,32	90 144	7568,68	52,02	61 611
			85	7734,22	63,14	93 144	7638,31	53,64	66 122
			90	7764,40	64,17	96 456	7707,94	55,57	71 822

Stroj: <b>GSH1120</b>				$v_c = 46,7 \text{ mm } (h_3 = 11,9)$			$v_c = 93,3 \text{ mm } (h_3 = 13,9)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$v_f$ [%]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
2080	1800	200	75	7629,81	59,87	82 333	7411,25	47,29	49 900
			80	7667,53	60,43	84 744	7498,30	48,59	53 211
			85	7705,25	61,14	86 844	7585,34	50,13	57 411
			90	7742,98	62,06	89 844	7672,39	51,98	62 522

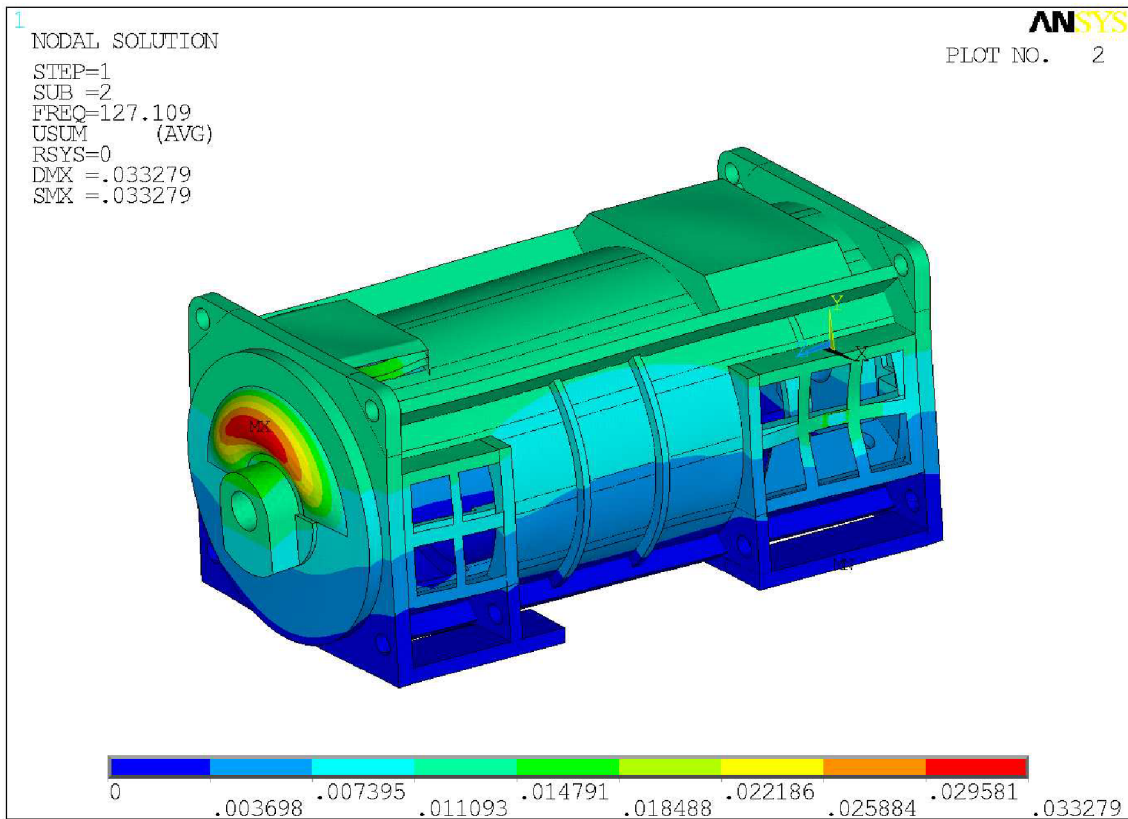
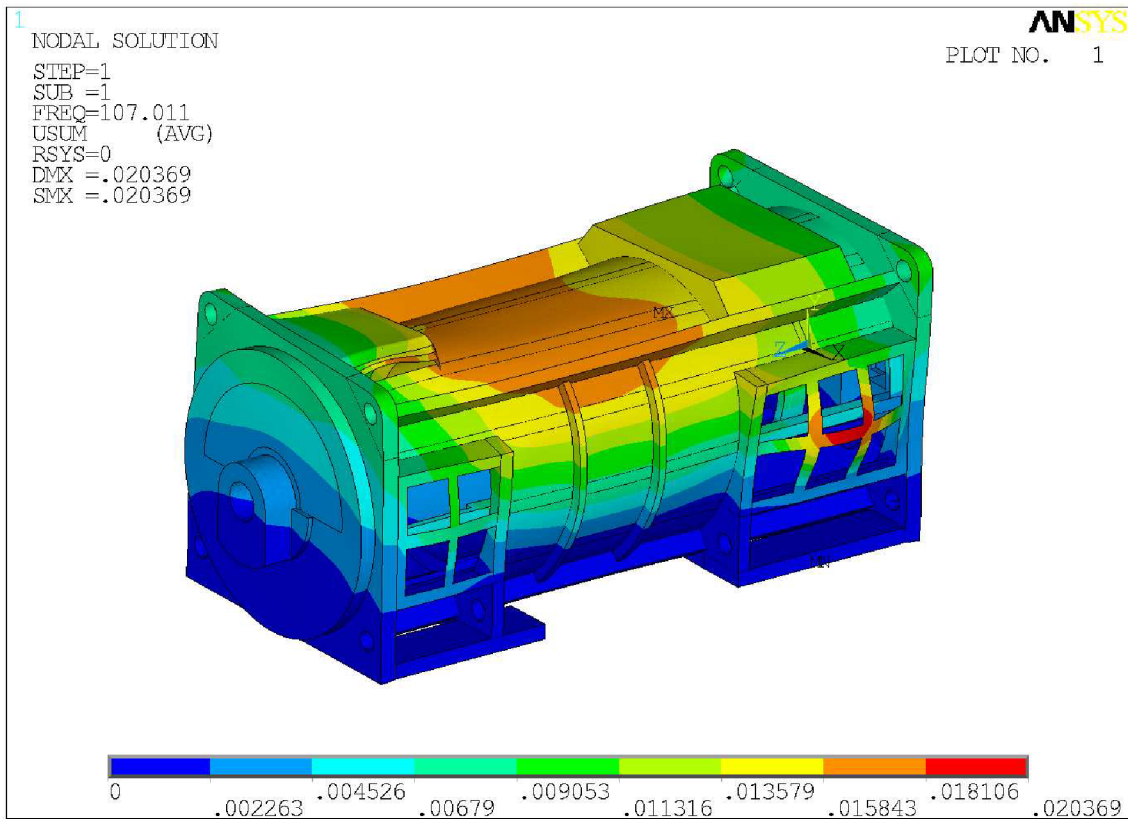
## P8 – GSH 1120 (vysokonapětové vinutí)

Stroj: <b>GSH1120</b>				$v_c = 80,0 \text{ mm } (h_3 = 13,3)$			$v_c = 160,0 \text{ mm } (h_3 = 16,8)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$t_{iz}$ [mm]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
2080	1600	80	0,7	7845,96	136,60	127 078	7869,05	128,22	112 217
			1,05	7818,93	129,74	114 317	7814,95	118,52	95 706
			1,4	7792,13	125,00	105 606	7761,08	111,27	83 383
2080	1600	120	0,7	7843,95	127,93	111 467	7878,58	116,21	92 394
			1,05	7803,39	121,33	99 756	7797,42	106,02	76 033
			1,4	7763,19	117,04	92 244	7716,61	98,75	65 372
2080	1600	160	0,7	7841,93	121,94	101 256	7888,11	107,25	78 733
			1,05	7787,85	115,85	90 744	7779,88	97,09	63 872
			1,4	7734,24	112,08	84 594	7672,13	90,07	54 261
2080	1600	200	0,7	7839,91	117,54	94 044	7897,64	100,24	68 822
			1,05	7772,30	112,01	84 594	7762,35	90,32	54 861
			1,4	7705,28	108,72	79 033	7627,64	83,64	46 300

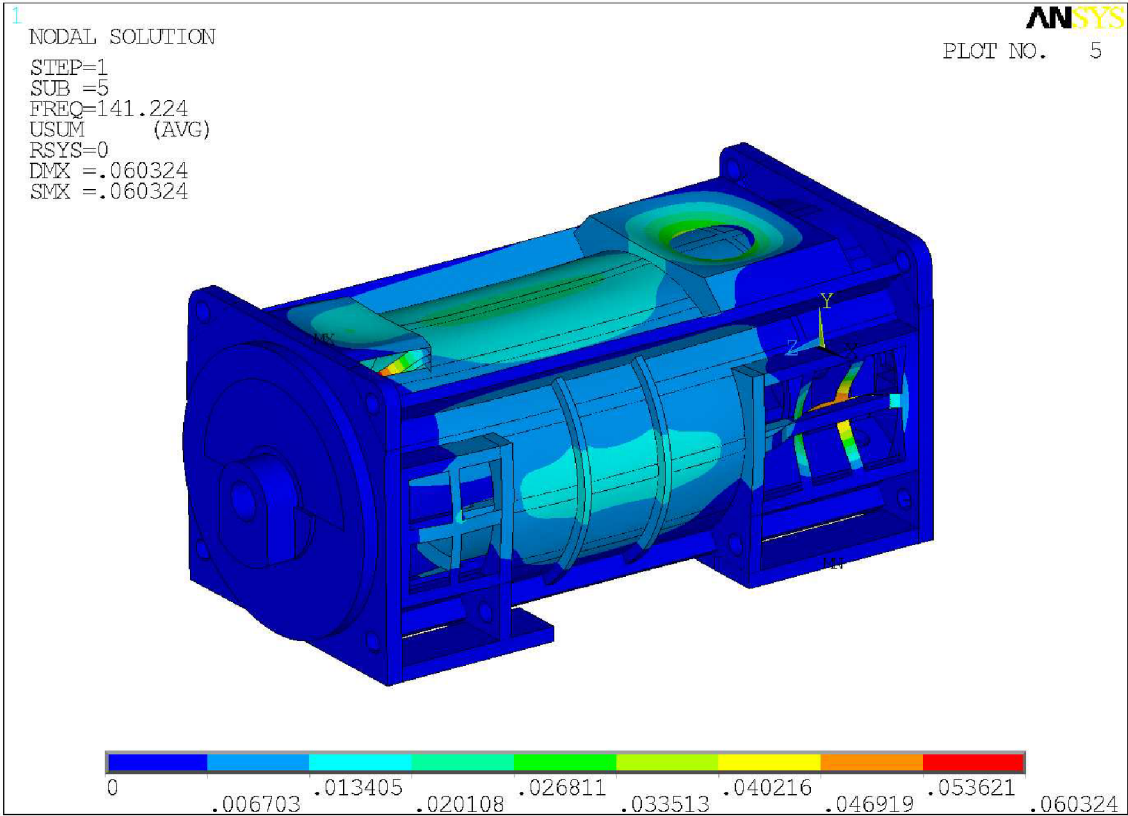
Stroj: <b>GSH1120</b>				$v_c = 63,3 \text{ mm } (h_3 = 12,6)$			$v_c = 126,7 \text{ mm } (h_3 = 15,4)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$t_{iz}$ [mm]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
2080	1700	80	0,7	7841,96	105,25	130 689	7859,20	99,68	118 078
			1,05	7815,66	100,27	118 078	7806,51	92,60	100 656
			1,4	7789,64	96,81	109 967	7754,12	87,26	88 944
2080	1700	120	0,7	7837,94	98,74	115 067	7863,80	90,87	97 656
			1,05	7798,48	93,85	103 356	7784,76	83,33	81 433
			1,4	7759,45	90,66	95 856	7706,16	77,89	70 322
2080	1700	160	0,7	7833,91	94,21	104 556	7868,40	84,21	83 833
			1,05	7781,30	89,65	94 044	7763,00	76,62	68 522
			1,4	7729,26	86,80	87 744	7658,19	71,32	58 911
2080	1700	200	0,7	7829,89	90,86	97 356	7873,00	78,95	73 933
			1,05	7764,11	86,68	87 744	7741,24	71,48	59 511
			1,4	7699,06	84,17	82 033	7610,21	66,39	50 800

Stroj: <b>GSH1120</b>				$v_c = 46,7 \text{ mm } (h_3 = 11,9)$			$v_c = 93,3 \text{ mm } (h_3 = 13,9)$		
$\phi D$	$\phi d$	$p_{dr}$	$t_{iz}$ [mm]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]	$\rho_{ekv}$ [kg.m <sup>-3</sup> ]	$f_1$ [Hz]	$e_{ekv}$ [MPa]
2080	1800	80	0,7	7836,52	75,44	134 589	7847,74	71,88	122 278
			1,05	7810,87	72,18	122 878	7796,46	67,16	106 967
			1,4	7785,60	69,93	114 767	7745,56	63,56	94 344
2080	1800	120	0,7	7829,77	70,86	119 578	7846,61	65,87	102 756
			1,05	7791,29	67,58	107 267	7769,67	60,77	86 544
			1,4	7753,39	65,43	100 056	7693,31	57,05	75 433
2080	1800	160	0,7	7823,02	67,66	108 467	7845,48	61,30	88 944
			1,05	7771,71	64,55	97 656	7742,88	56,11	73 633
			1,4	7721,17	62,60	91 344	7641,05	52,44	64 022
2080	1800	200	0,7	7816,28	65,29	100 356	7844,34	57,66	78 733
			1,05	7752,13	62,41	91 044	7716,08	52,51	64 022
			1,4	7688,93	60,67	85 344	7588,78	48,97	54 711

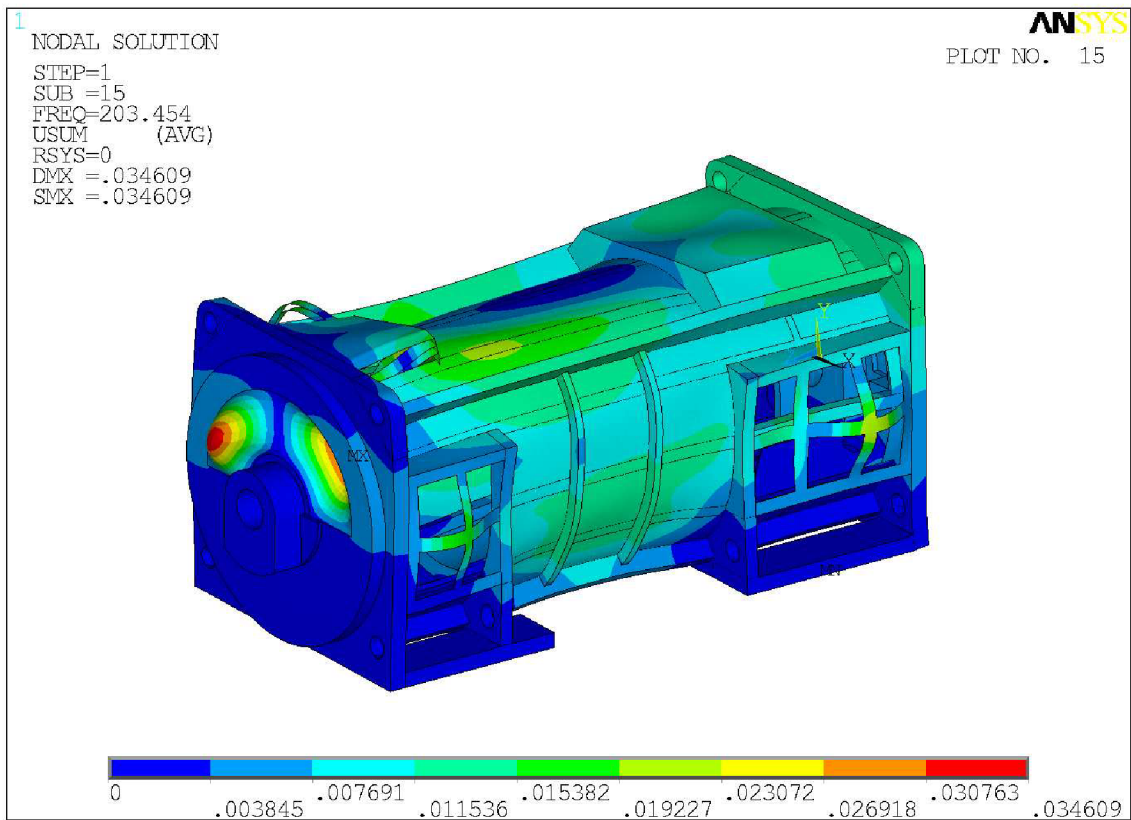
**P9 – Vlastní tvary svazku o  $\phi d = 1250$  mm,  $e_{ekv} = 40,4$  GPa**



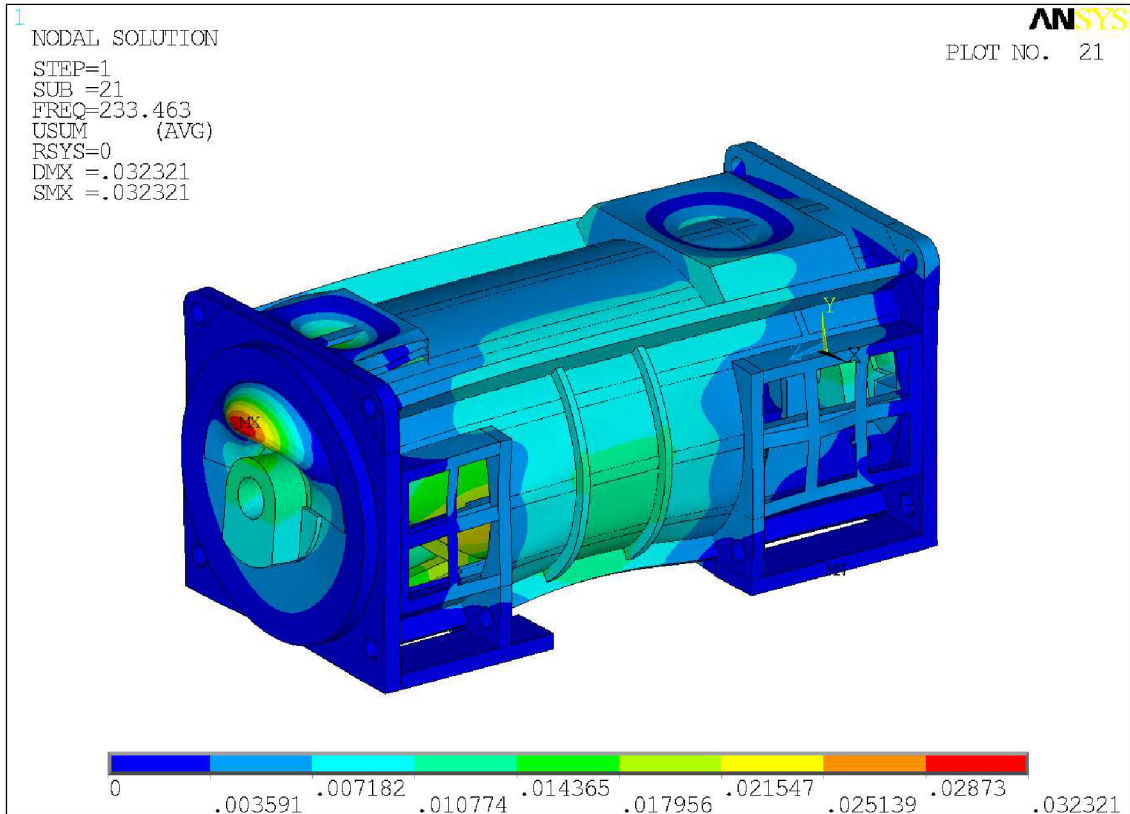




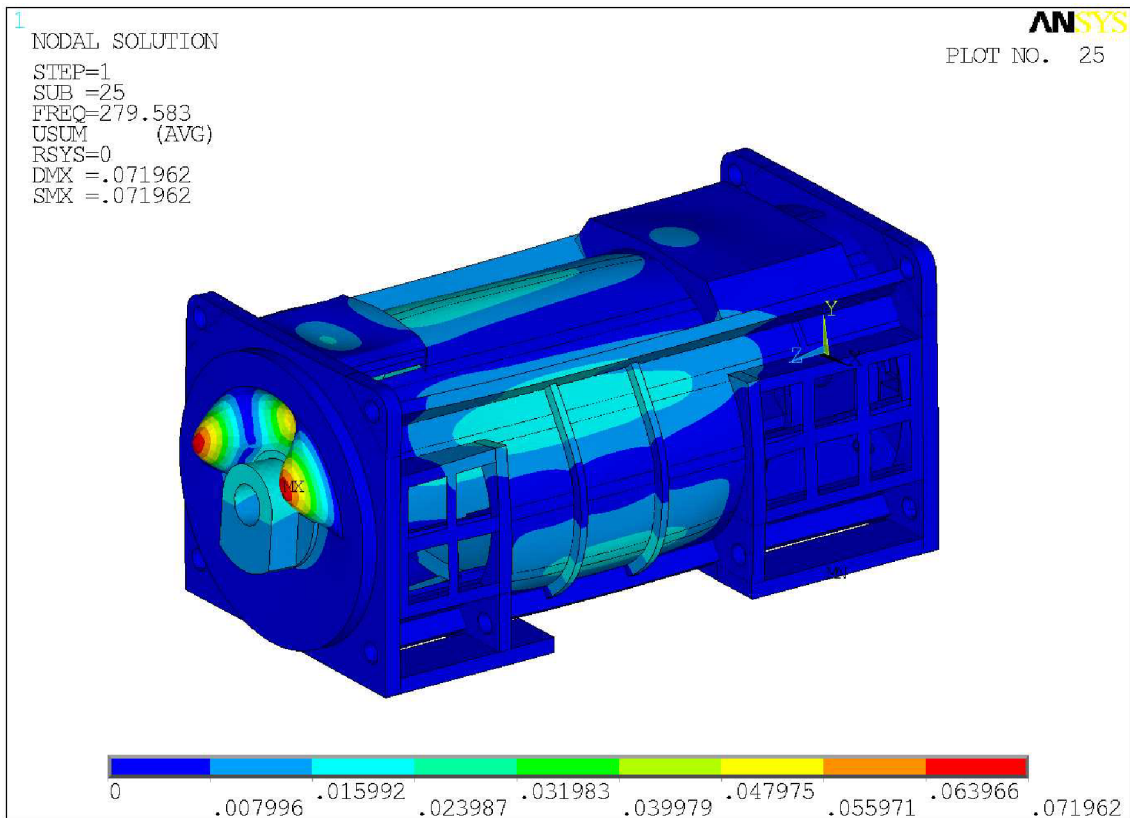
3. vlastní tvar



4. vlastní tvar

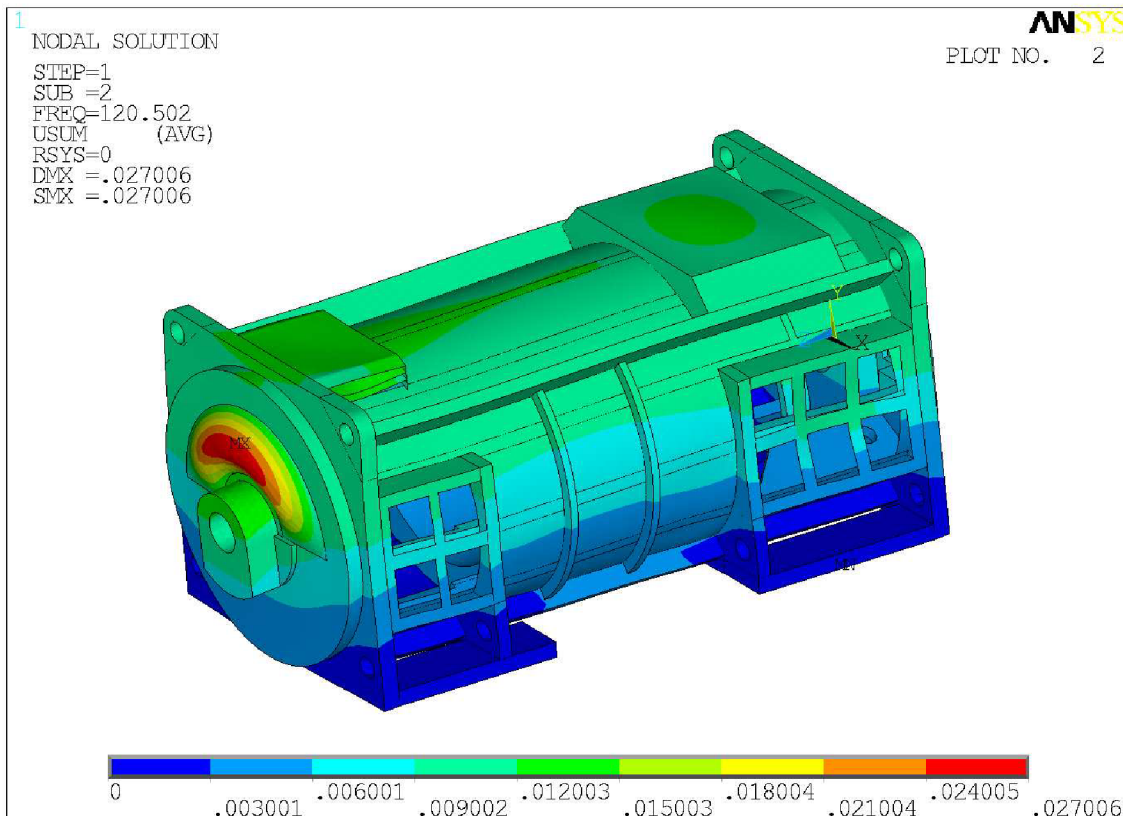
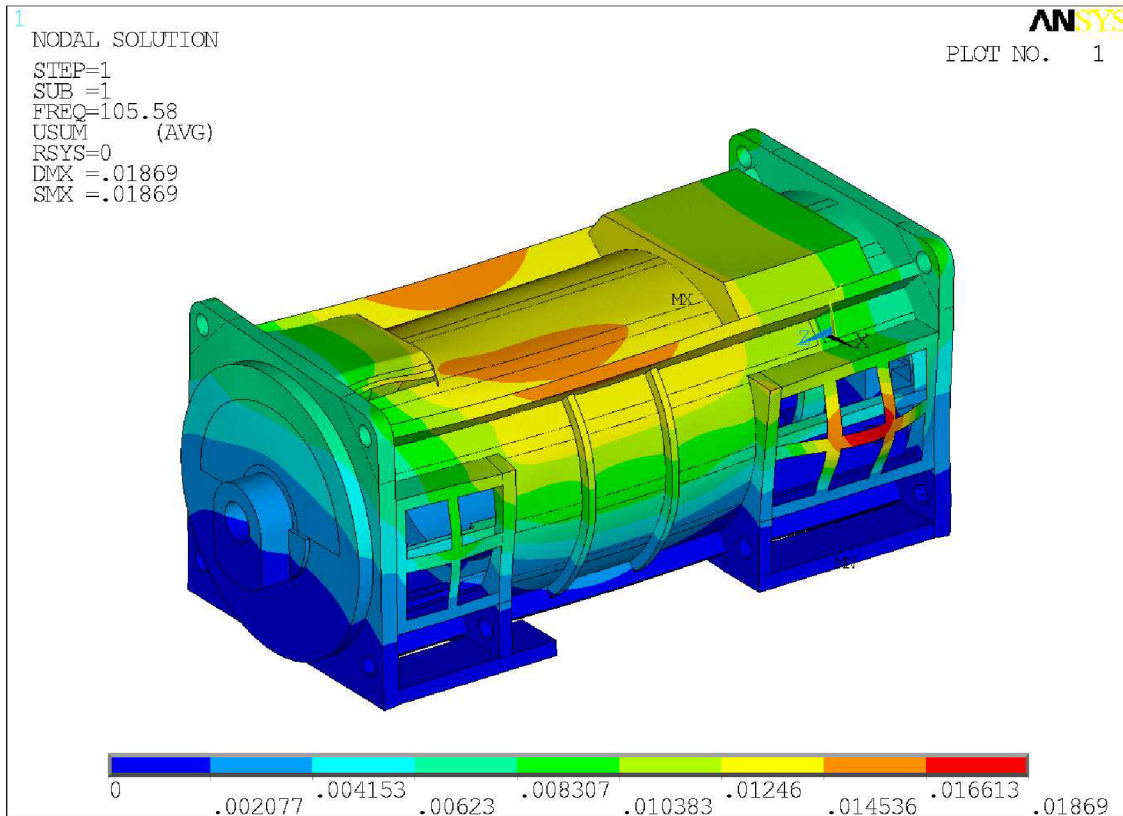


5. vlastní tvar

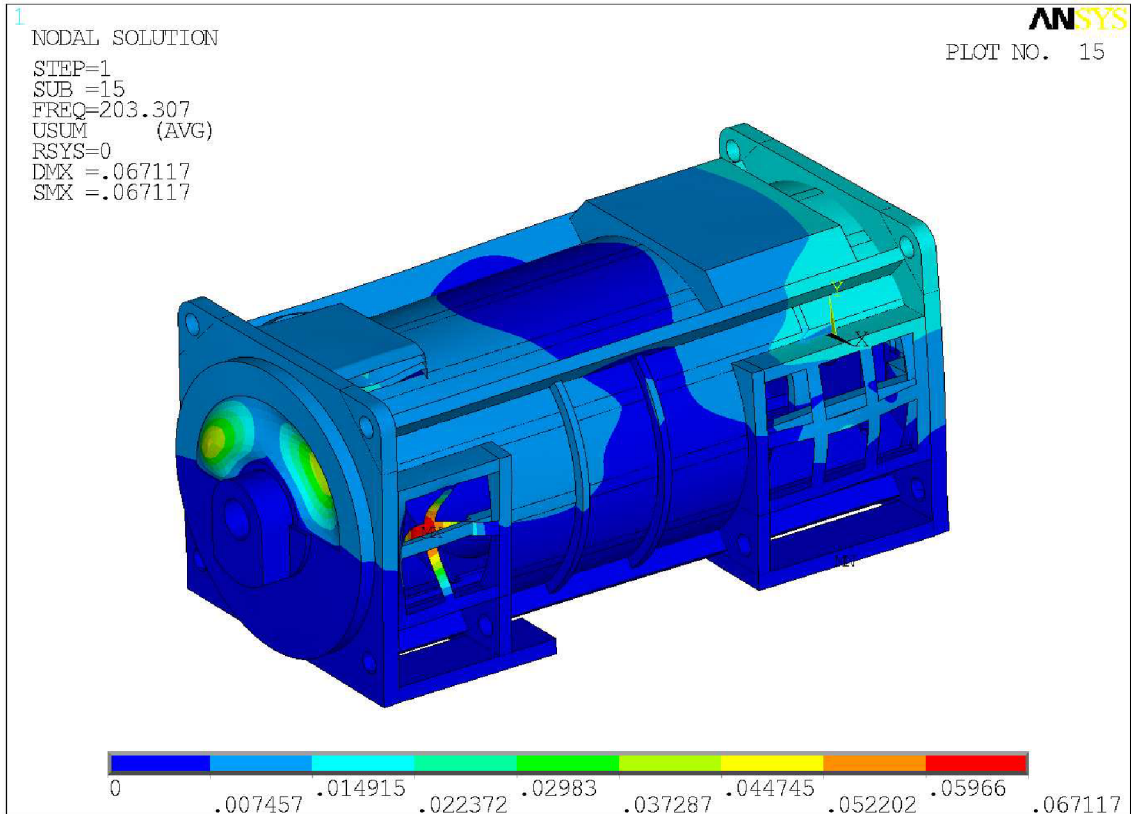


6. vlastní tvar

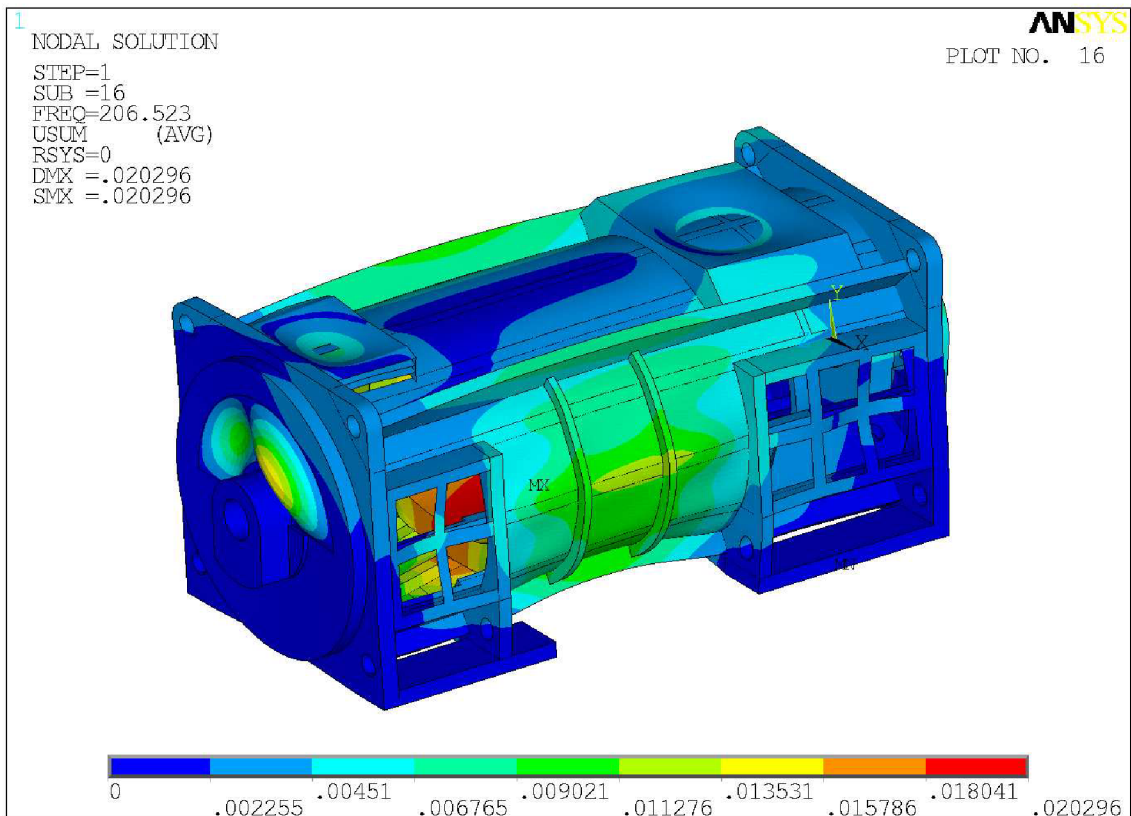
# P10 – Vlastní tvary svazku o $\phi_d = 1100$ mm, $e_{ekv} = 36,0$ GPa



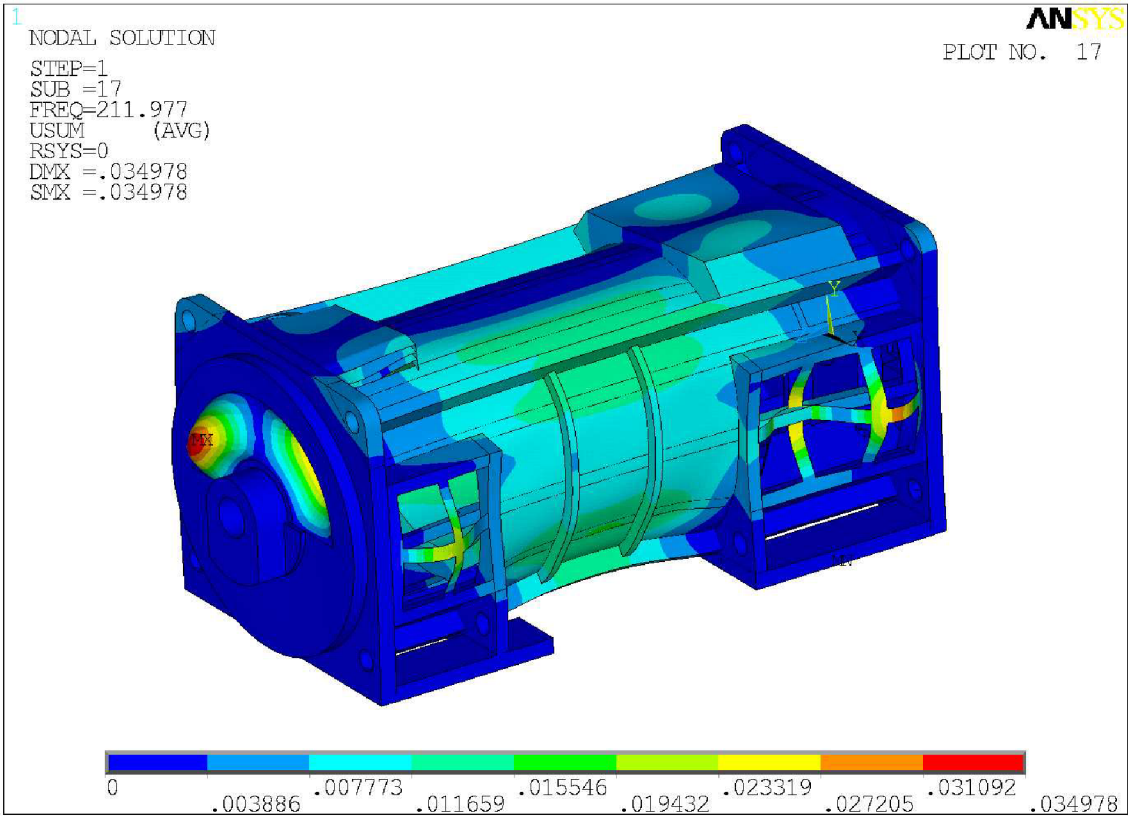




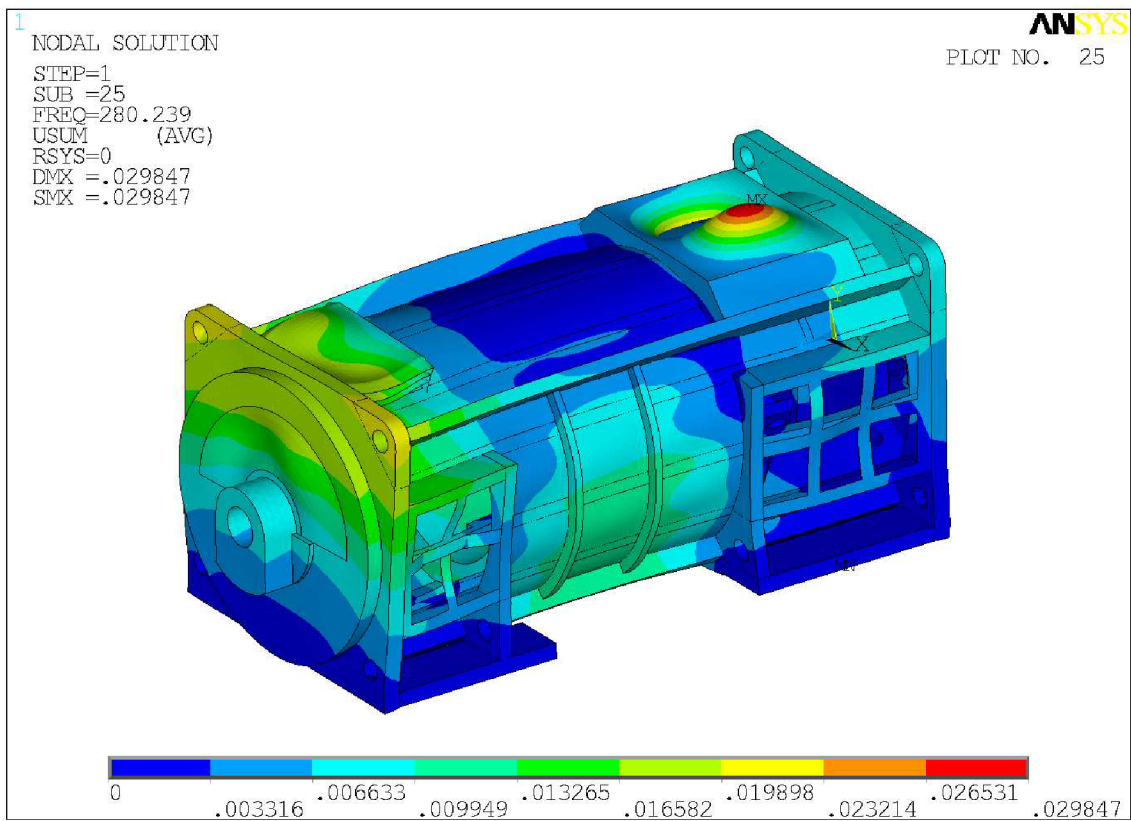
3. vlastní tvar



4. vlastní tvar



5. vlastní tvar



6. vlastní tvar