



Bakalářská práce na téma:

VYUŽITÍ MODELŮ TEORIE FRONT PRO ROZHODOVÁNÍ

Vypracoval: Milan Bouda

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Ludmila Dömeová, CSc.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Využití modelů teorie front pro rozhodování“ vypracoval samostatně za použití uvedené literatury a po konzultacích s Ing. Ludmilou Dömeovou, CSc.

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji tímto paní Ing. Ludmile Dömeové, CSc. za odborné vedení a rady při zpracování bakalářské práce.

Využití modelů teorie front pro rozhodování

Souhrn:

Tato bakalářská práce je zaměřena na modely teorie front a systémy hromadné obsluhy. Práce je rozdělena na dvě části. První část popisuje teoretické poznatky o modelech teorie front a základní charakteristiky a způsoby řešení těchto modelů. Druhá část se zabývá praktickým využitím této teorie na vybraném příkladu v praxi byla získána data a na nich provedena kalkulace a analýza.

V závěru jsou prezentovány výsledky tohoto modelu. Popis možných rozhodnutí a jejich význam do budoucna.

Klíčová slova:

Fronta, intenzita obsluhy, intenzita provozu, požadavek, systém, model, simulace, optimalizace nákladů, QSB+, QtsPlus

Queuing Theory in Decision Making

Summary:

This bachelor thesis considers the theory of fronts (queueing theory) and the systems of multiple services. The thesis is divided in two parts: the first one describes the theoretical considerations of the queueing theory models, the basic characteristics and solutions of these models. The second part shows how the theory is applied to a practical example in which original data were gathered and used for calculations and analysis.

In conclusion, the obtained data are presented together with the description of the possible decision making process and their future significance.

Keywords:

Queue, service rate, utilization factor, demand, system, model, simulation, costs optimalization, QSB+, QtsPlus

1	ÚVOD	4
2	CÍL PRÁCE A METODIKA	6
3	LITERÁRNÍ REŠERŠE	7
3.1	TYPY MODELŮ HROMADNÉ OBSLUHY	7
3.2	ZÁKLADNÍ POJMY TEORIE HROMADNÉ OBSLUHY	8
3.2.1	<i>Zdroj požadavků</i>	8
3.2.2	<i>Příchod požadavků do systému</i>	9
3.2.3	<i>Režim fronty</i>	10
3.2.4	<i>Chování ve frontě</i>	11
3.2.5	<i>Počet a uspořádání kanálů obsluhy</i>	12
3.2.6	<i>Doba obsluhy</i>	13
3.2.7	<i>Výstup z obsluhy</i>	13
3.2.8	<i>Klasifikace modelů hromadné obsluhy</i>	13
3.3	MODEL Y BEZ ČEKÁNÍ	14
3.4	MODEL M/M/1 S ČEKÁNÍM	15
3.4.1	<i>Vstup požadavků</i>	15
3.4.2	<i>Obsluha</i>	16
3.5	MODEL M/M/M S ČEKÁNÍM.....	16
3.5.1	<i>Předpoklady</i>	16
3.5.2	<i>Charakteristika modelu</i>	17
3.6	OPTIMALIZACE NÁKLADŮ	18
3.7	PROGRAM QSB+	19
3.8	PROGRAM QTSPLUS	19
3.9	POROVNÁNÍ QSB+ A QTSPLUS	20
4	POPIS ZKOUMANÉ SITUACE	21
4.1	ZÁKLADNÍ CHARAKTERISTIKA	21
4.2	VSTUPNÍ PROMĚNNÉ.....	21
4.2.1	<i>Počet kanálů obsluhy a intenzita vstupu</i>	21
4.2.2	<i>Intenzita obsluhy</i>	23
4.2.3	<i>Náklady</i>	23
5	VÝPOČTY	26
5.1	ANALÝZA PRO PONDĚLÍ – PÁTEK.....	26
5.1.1	<i>Směna od 8 - 12</i>	26
5.1.2	<i>Směna od 12 - 18</i>	28
5.1.3	<i>Směna od 18 - 22</i>	29

5.2	ANALÝZA PRO SOBOTU, NEDĚLI A SVÁTKY	30
5.2.1	<i>Směna od 8 – 12</i>	30
5.2.2	<i>Směna od 12 – 18</i>	31
5.2.3	<i>Směna od 18 – 22</i>	32
5.3	VÝSLEDKY PRO PONDĚLÍ - PÁTEK.....	32
5.3.1	<i>Počty pokladen, které splňují omezující podmínku</i>	33
5.3.2	<i>Výpočet nákladů</i>	33
5.4	VÝSLEDKY PRO SOBOTU, NEDĚLI A SVÁTKY.....	35
5.4.1	<i>Počty kas, které splňují omezující podmínku</i>	35
5.4.2	<i>Výpočet nákladů</i>	36
6	DISKUZE	37
7	ZÁVĚR	38
8	SEZNAM LITERATURY	39
9	PŘÍLOHY	40
9.1	ZÁKLADNÍ CHARAKTERISTIKY	40

1 Úvod

Teorie front nebo také někdy teorie hromadné obsluhy byla vyvinuta k sestavování modelů, které předpovídají chování systémů, tak že se pokoušejí obsloužit náhodný počet příchozích požadavků. Nejdříve studované problémy byly telefonní ústředny. Průkopník byl dánský matematik A. K. Erlang¹, který v roce 1909 publikoval knihu „The Theory of Probabilities and Telephone Conversations“. V pozdější práci pozoroval, že telefonní systém byl zpravidla charakterizován buď 1. Poissonovým vstupem, exponenciálním rozdělením doby obsluhy a více kanály obsluhy nebo 2. Poissonovým vstupem, konstantní dobou obsluhy a jedním kanálem obsluhy.

Teorie hromadné obsluhy (dále HO) je odvětvím aplikované matematiky, které zkoumá činnost systémů, v nichž se opakovaně vyskytují požadavky na homogenní operace. Prvky těchto matematických systémů mají povahu zákazník – obsluha.

V praxi je systémem HO např. supermarket, letiště, výrobní linka nebo přepážky v bance.

Charakteristické je, že obsluhovací systém pracuje nerovnoměrně a to buď proto, že požadavky na obsluhu vstupují do systému nepravidelně, nebo trvání doby obsluhy má velkou proměnlivost anebo oba tyto faktory působí současně. Z uvedených důvodů se u jedné obslužné linky často nachází více než jeden požadavek (zákazník). Protože předpokládáme, že současně může být obsluhován pouze jeden požadavek, ostatní musejí na obsluhu čekat, a tak se tvoří fronty.

Kvůli nepravidelnostem musíme provoz popsat pomocí pravděpodobnostních termínů. Proto teorie HO využívá teorii pravděpodobnosti, matematickou statistiku, teorii náhodných procesů a toků.

Činnost systému HO se posuzuje ze dvou hledisek, a to z hlediska zákazníka a z hlediska obsluhy.

(Gross, Harris, 1974)

¹ Erlang (1878 - 1929). Zakladatel teorie front.

Cílem zákazníka je strávit v systému minimální dobu. Volí tedy čas, kdy nejsou fronty, přechází do jiné fronty, která vypadá kratší, případně z fronty odchází.

Cílem obsluhy (provozovatele) je udržet si zákazníky nebo dokonce zvýšit jejich počet při minimalizaci nákladů na provoz celého systému. Přidání další obslužné linky s sebou nese další náklady.

Teorie HO se využívá jak pro navrhování nových systémů, tak pro zlepšení stávajících. Často není možné zkoumat jednotlivé modifikace systémů experimentálně, ale je třeba vytvořit matematický model dané situace.

2 Cíl práce a metodika

Cílem této práce je popsat základní typy modelů hromadné obsluhy, použít vhodný model HO na reálném příkladě a interpretovat a porovnat jeho výsledky s realitou a demonstrovat využití tohoto modelu pro rozhodování v praxi.

Teoretická část popisuje typy modelů hromadné obsluhy a jejich základní charakteristiky. Dále jsou vysvětleny základní pojmy teorie HO, režimy fronty a chování lidí ve frontě. Celkově tak teoretická část poukazuje na celé fungování těchto systémů.

V praxi jsou tyto modely používány na finanční analýzu a nákladové ohodnocení. Optimalizace popsaného modelu nám dává údaje potřebné pro ekonomické rozhodování. Na příkladu z praxe je vidět rozhodování na základě ekonomických údajů. Pro tuto situaci je v praktické části řešen příklad fungování hromadné obsluhy v supermarketu pomocí modelu s více kanály obsluhy. Nejdříve jsou teoreticky popsány dílčí části systému a jejich ohodnocení. K získání potřebných informací bylo využito několik technik. Nejprve byla získána data dlouhodobým pozorováním obsluhy supermarketu. Jsou to střední hodnoty náhodného charakteru. Ty budou vyhodnoceny výpočtem za pomoci programu QtsPlus. Dále nestandardizované rozhovory s pracovníky a managementem supermarketu. Za pomoci analytického řešení jsou pak zhodnoceny výsledky tohoto modelu a jejich interpretace pro praktické použití (rozhodnutí).

V závěru je celkové zhodnocení přínosu tohoto modelu hromadné obsluhy a popis možností, jaké má majitel supermarketu (rozhodovatel) k dispozici při rozhodování.

3 Literární rešerše

3.1 Typy modelů hromadné obsluhy

Podle způsobu řešení rozlišujeme modely analytické a simulační. Dále se modely člení do různých typů podle několika kritérií.

Základní členění modelů HO je podle způsobu řešení na:

Analytické – činnost systému se modeluje soustavou funkcí, nejčastěji soustavou integrálních a diferenciálních rovnic, ze kterých se odvozují vzorce pro výpočet základních charakteristik. Do těchto vzorců se dosazují parametry systému (například počet obslužných linek). Nevýhodou je, že analytické postupy jsou známé pouze pro jednoduché případy. Skutečné systémy bývají tak složité, že příslušné vztahy nelze obecně odvodit a je třeba použít simulační postupy.

Simulační – procesy probíhající v systému HO se modelují na počítači a řešení spočívá v experimentování s příslušným počítačovým modelem. Na základě sběru dat v průběhu simulace (opakované, ve zrychleném nebo zpomaleném čase) lze aproximativně odvodit charakteristiky zkoumaného systému.

Z hlediska počtu linek rozlišujeme:

- Systémy s konečným počtem linek
- Systémy s nekonečným počtem linek

Pokud je obslužná linka volná, požadavek je ihned přijat a obsluha zahájena.

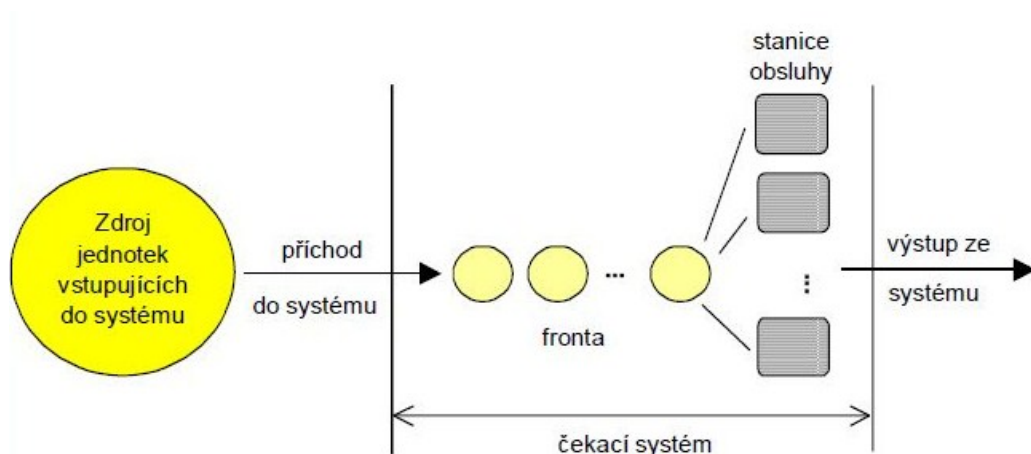
V případě, že linka není volná, pak rozlišujeme:

- Systémy s čekáním (tj. požadavek čeká na obsluhu a vytváří se fronta)
- Systémy se ztrátami (tj. požadavek systém ihned opouští bez obsluhy a fronty se nevytváří)
- Systémy smíšené

(Dömeová, Beránková, 2004)

3.2 Základní pojmy teorie hromadné obsluhy

Existují různé typy modelů HO, které se liší charakterem svých prvků. Pro popis modelu je třeba definovat jeho strukturu a popsat komponenty.



Obrázek 1 - Systém hromadné obsluhy

3.2.1 Zdroj požadavků

Zdroj požadavků je množina potenciálních zájemců o obsluhu. Zajímá nás její počet eventuelně struktura.

Zdroj požadavků je skupina lidí, ze které pochází potenciální zákazník, který vstupuje do systému s přáním být obslužen. Může být jeden i více zdrojů, které jsou konečné nebo nekonečné. V případě, že je zdroj nekonečný (počet zákazníků v určitém obchodě je sice teoreticky omezený počtem obyvatel ve městě, ale tento počet je tak vysoký, že takový zdroj považujeme za nekonečný), pak na počet potenciálních zákazníků nemá vliv počet zákazníků, kteří jsou obsluhováni nebo čekají. V případě malých omezených zdrojů (např. traktory na jedné farmě, stroje v jedné dílně) se počet potenciálních požadavků zmenšuje v případě přetížení obslužného systému (např. z celkem 5 traktorů je 1 v dílně a 3 porouchané čekají na opravu – potenciální zákazník je jenom 1).

(Dömeová, Beránková, 2004)

3.2.2 Příchod požadavků do systému

Při příchodu požadavků do systému nás zajímají okamžiky vstupu jednotlivých požadavků a intervaly mezi vstupy.

Jednotky vstupují do systému ze zdroje v pevných nebo náhodných časových okamžicích. Proces vstupu jednotek se nazývá **vstupní tok**. Jsou-li okamžiky vstupu pevné, deterministické, jedná se o **tok regulární**. Při náhodném vstupu se vstupní tok nazývá podle typu pravděpodobnostního rozdělení např. **Poissonovský**. Příchody požadavků popisujeme buď pomocí **intenzity vstupu** (λ), což je počet požadavků, které do systému vstoupí za jednotku času, nebo pomocí **intervalu mezi příchody** X_N , což je čas mezi dvěma po sobě následujícími příchody.

Předpokládáme, že vstup jednotek je **ordinární**, tj. že v každém časovém okamžiku vstupuje do systému právě jedna jednotka. Pokud jednotky vstupují ve **skupinách (dávkách)**, můžeme tuto skupinu považovat za jednu jednotku nebo počítáme s nekonečně malými intervaly mezi vstupy.

Další komplikace na vstupu mohou být způsobeny chováním zákazníků, kteří se rozhodují, zda vstoupit či nevstoupit do systému podle délky fronty, rychlosti obsluhy, vzhledu personálu atd.

(Dömeová, Beránková, 2004)

Název proměnné	Symbol
Intenzita vstupu jednotek do systému	λ
Interval mezi vstupy po sobě následujících jednotek	X_1, X_2, \dots
Intenzita obsluhy	μ
Počet kanálů obsluhy	m
Intenzita provozu systému HO	ρ
Střední doba čekání ve frontě	T_Q
Střední doba obsluhy	T_S
Střední hodnota celkové doby v systému tj. doba čekání + doba obsluhy	T
Pravděpodobnost, že v systému není žádná jednotka	P_0
Pravděpodobnost, že v systému je n jednotek	p_n
Střední počet jednotek ve frontě	L_Q
Střední počet jednotek v kanálech obsluhy	L_S
Střední počet jednotek v systému	L
Pravděpodobnost, že počet jednotek v systému je větší nebo roven počtu kanálů obsluhy, tj. pravděpodobnost, že všechny kanály obsluhy jsou obsazeny	$p\{L \geq m\}$
Pravděpodobnost, že počet jednotek v systému je větší než libovolné číslo k	$p\{L \geq k\}$
Pravděpodobnost, že jednotka bude čekat ve frontě kratší dobu t	$p\{T_Q < t\}$

Tabulka 1 - Přehled základních proměnných

Zdroj: převzato ze skript DÖMEOVÁ L., BERÁNKOVÁ M.: Systémy hromadné obsluhy 1.

3.2.3 Režim fronty

Režim fronty je souhrn pravidel, podle kterých je vybírán další zákazník do obsluhy. Nejobvyklejší režim je pozorován v běžném životě jako kdo dřív přijde, ten je dřív obsloužen.

Základní typy jsou:

FIFO (first in/first out) – jednotky jsou obsluhovány v pořadí, ve kterém do systému vstoupily.

LIFO (last in/first out) – jednotky jsou obsluhovány v opačném pořadí než v jakém vstoupily do systému, obvykle se používá při odebírání uloženého materiálu.

SIRO (selection in random order) – náhodný výběr

PRI (priority) – výběr podle různých priorit, např. přednost mají invalidní zákazníci, držitelé zlaté karty, rychle se kazící zboží.

(Gross, Harris, 1974)

3.2.4 Chování ve frontě

Charakteristika „chování ve frontě“ se týká ochoty jednotek čekat ve frontě, případně pravidel pro výběr fronty, přecházení do jiné fronty apod.

Jednotky jsou buď ochotné čekat ve frontě neomezenou dobu, tj. jsou trpělivé nebo nejsou ochotné čekat, tj. jsou netrpělivé a pokud není volný kanál obsluhy v okamžiku jejich příchodu, odcházejí neobslouženy – odpadají (typický je příklad obsazeného telefonu, kde jednotka ani čekat nemůže). Někdy se jednotkám přiřazuje různě dlouhá (náhodná) míra netrpělivosti. Míra netrpělivosti může být např. doba trvanlivosti potravin nebo zemědělských produktů.

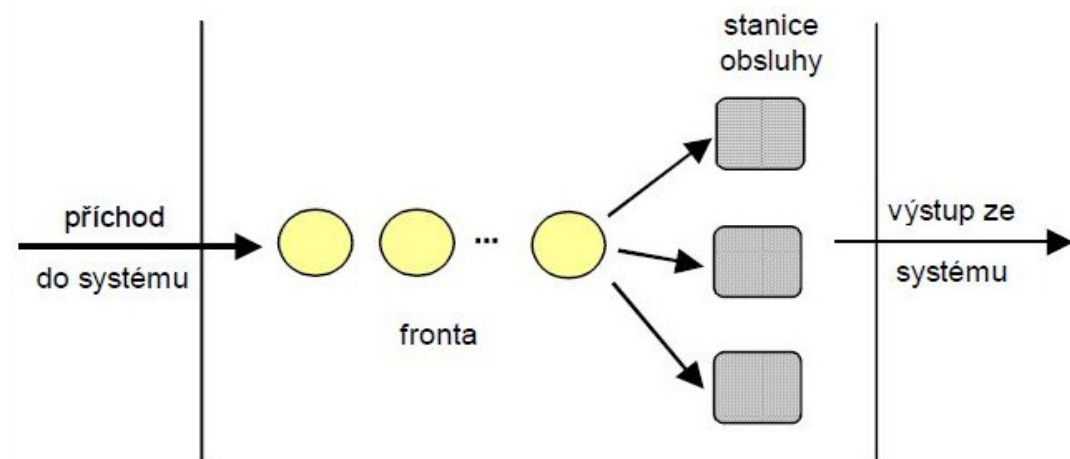
U systémů s více frontami patří do chování ve frontě taky volba fronty (nejbližší, nejkratší) a přecházení z jedné fronty do druhé (může a nemusí být povoleno, existují různá pravidla pro výběr, zákazník může a nemusí být informován o délce ostatních front atd.).

(Dömeová, Beránková, 2004)

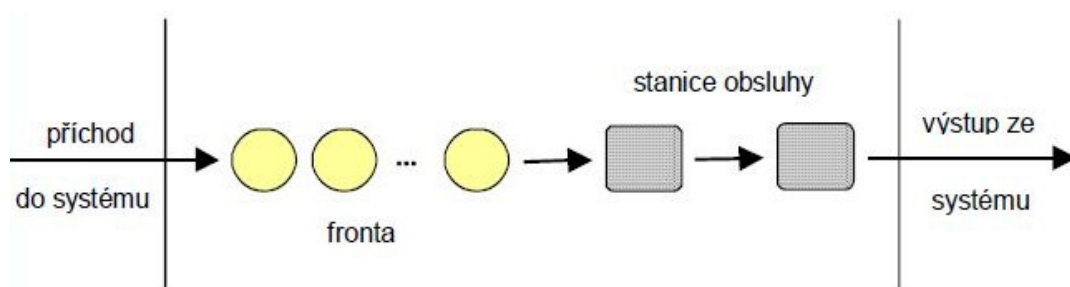
3.2.5 Počet a uspořádání kanálů obsluhy

Počet kanálů obsluhy nám říká jaký je počet paralelně zapojených stanic obsluhy, které mohou současně obsluhovat zákazníka (viz. Obrázek 2). Existují dva druhy uspořádání kanálů obsluhy. V prvním případě (Obrázek 2) má pouze jednu frontu, ve které čekají všichni zákazníci. Takto to funguje například v bankách nebo na poště. Zákazník dostane pořadové číslo a pak čeká, ke které přepážce si ho pozvou. Předpokládáme ovšem, že přepážky poskytují stejnou službu, jsou tedy homogenní. V druhém případě (Obrázek 3) má každá stanice obsluhy frontu svou. Takto funguje čekací systém například v supermarketech. V každém supermarketu je více kanálů obsluhy a před každým se tvoří vlastní fronta.

(Gross, Harris, 1974)



Obrázek 2 – Paralelní uspořádání stanic obsluhy



Obrázek 3 - Sériově uspořádané stanice obsluhy

3.2.6 Doba obsluhy

Klíčovou charakteristikou je **doba obsluhy (T_s)**, tj. doba, za kterou linka obslouží jednoho zákazníka. Jedná se o střední hodnotu náhodné veličiny. Rozdělení nejčastěji předpokládáme exponenciální. Podobně náhodnou veličinou je **intenzita obsluhy (μ)**, tj. počet obslužených jednotek za jednotku času.

3.2.7 Výstup z obsluhy

Obsloužené jednotky, které opouštějí kanál obsluhy, vytvářejí opět náhodný tok jednotek, tzn. **vystupující tok**. Tento tok může být vstupním tokem jiného kanálu obsluhy (u sériových systémů). Vstupující tok může být někdy závislý na vystupujícím toku, např. přijímání pacientů do nemocnice v určité míře závisí na počtu uvolněných lůžek. V uzavřených systémech se vystupující požadavky stávají vstupujícími.

3.2.8 Klasifikace modelů hromadné obsluhy

Podle základních charakteristik jsou modely HO jednotným způsobem klasifikovány. Původní trojmístnou klasifikaci zavedl Angličan D.G. Kendall a proto se vžilo pojmenování Kendallova klasifikace, i když byla později o další 3 parametry rozšířena. Obecně se používá posloupnost šesti symbolů: A/B/C/D/E/F.

(Dömeová, Beránková, 2004)

Symbol	Význam	Může obsahovat
A	Typ pravděpodobnostního rozdělení intervalů mezi vstupy požadavků do systému	M - Poissonovův proces vstupu, tj. exponenciální rozdělení intervalů mezi vstupy
		E_K - Erlangovo rozdělení intervalů mezi vstupy požadavků
		D - pravidelné vstupy požadavků
		G - obecný případ, jakékoliv rozdělení
B	Typ pravděpodobnostního rozdělení doby trvání obsluhy	M - exponenciální rozdělení doby trvání obsluhy
		E_K - Erlangovo rozdělení doby trvání obsluhy
		D - konstantní doba obsluhy
		G - jakékoliv rozdělení trvání obsluhy
C	Počet paralelních obslužných linek	1,2, .. (celé kladné číslo)
D	Kapacita systému HO, tj. místa v obsluze a ve frontě	Celé kladné číslo, pokud není omezena užívá se symbol nekonečno
E	Početnost zdroje požadavků	Celé kladné číslo nebo nekonečno
F	Režim fronty	FIFO, LIFO, PRI, SIRO

Tabulka 2 - klasifikace modelů hromadné obsluhy

Zdroj: tabulka je převzata ze skript: DÖMEOVÁ L., BERÁNKOVÁ M.: Systémy hromadné obsluhy 1

3.3 Modely bez čekání

Osobitý význam systémů bez čekání vyplývá z jejich úlohy při analýze reálných systémů, pracujících s vyloučením čekání. Mohou to být například telefonní linky, ústředny apod. V operační analýze spočívá jejich význam více

v didaktické oblasti, protože umožňují velice snadno ukázat nejdůležitější vlastnosti modelů hromadné obsluhy. Vztahuje se to zejména na model jedno-kanálového systému bez čekání (model M/M/1/1). Zároveň je možno modely bez čekání pokládat za speciální případ modelů s čekáním s nepřetržitými požadavky, při kterých požadavek odmítá čekat, jakmile se počet požadavků v systému rovná počtu kanálů obsluhy.

(Unčovský, 1980)

3.4 Model M/M/1 s čekáním

Symbolický zápis M/M/1 představuje model HO, ve kterém mají intervaly mezi příchody, stejně jako doby obsluhy, exponenciální rozdělení a pracuje jedna obslužná linka. Vzhledem k tomu, že další symboly jsou vynechány, předpokládá se neomezený počet jednotek v systému (v obsluze i ve frontě), nekonečný zdroj požadavků a režim fronty FIFO.

Výpočty základních charakteristik tohoto modelu jsou uvedeny v přílohách v tabulce 22.

(Dömeová, Beránková, 2004)

3.4.1 Vstup požadavků

Cílem jakékoliv obslužné soustavy je uspokojit požadavky na obsluhu. Proto je vstupní tok (proud) jedním z nejdůležitějších pojmů teorie HO.

Důležité je určit kvantitativní parametry vstupního toku. Okamžik $t_0 = 0$ považujeme za **počátek** zkoumání systému.

Za okamžik t_0 můžeme považovat například otevření obchodu. Pokud první zákazník vstoupí vždy hned při otevření, okamžik vstupu druhého zákazníka nebude stejný první den, druhý, třetí atd. To znamená, že okamžik vstupu každého

zákazníka, stejně jako celkový počet zákazníků za den, jsou **náhodné veličiny**, tj. takové veličiny, které mohou vlivem náhodných okolností nabývat různých hodnot.

Vstupní tok můžeme popsat náhodnou **funkcí $X(t)$** , která určuje počet požadavků v určitém časovém intervalu $\langle 0, t \rangle$. Funkce $X(t)$ nabývá libovolné hodnoty t (t je větší než nula) jen celé kladné hodnoty a se vzrůstajícím t neklesá. Počet vstupujících požadavků za interval t závisí na velikosti tohoto intervalu, tj. na hodnotě t .

3.4.2 Obsluha

Ve většině případů uvažujeme, že údaje o **trvání obsluhy** jsou nezávislé hodnoty náhodné proměnné, které mají stejné rozdělení pravděpodobnosti. **Kapacita obsluhy** se definuje jako maximální počet požadavků, které mohou být obsluhovány současně. Pro jednolinkový systém s frontou je kapacita obsluhy rovna jedné, pro m -linkový je rovna m . Další charakteristikou je **dostupnost obsluhy**. Obvykle se zabýváme situací, kdy každá linka obsluhy v případě, že je volná, okamžitě přijímá a zpracovává další požadavek (zákazníka). Takové systémy nazýváme plně dostupné. V praxi se vyskytují poruchy, jejichž odstranění trvá určitou dobu.

3.5 Model $M/M/m$ s čekáním

3.5.1 Předpoklady

Předpokládá se, že zákazníci přichází podle Poissonova rozdělení se střední hodnotou λ za jednotku času. Při příchodu má každý zákazník na výběr ze tří typů chování:

1. Když jsou všechny kanály obsluhy obsazené, připojí se do společné fronty, která pak zásobuje kanály obsluhy požadavky.
2. Když je jeden kanál obsluhy volný a ostatní jsou obsazené, pak jde okamžitě k volnému kanálu obsluhy.

3. Když jsou volné 2 a více kanálů obsluhy, jde k některému z nich. Předpokládáme zde, že jsou kanály obsluhy homogenní a zákazník žádný z nich více či méně nepreferuje.

Jakmile se některý kanál obsluhy uvolní, tak zákazník, který čeká nejdéle jde okamžitě na řadu. Pokud nejsou ve frontě žádní zákazníci, tak kanál obsluhy zůstává nečinný až do doby než někdo přijde. Žádný kanál nemůže být nečinný pokud jsou nějací zákazníci ve frontě. Všechny kanály poskytují stejné služby = jsou homogenní.

(Lee, 1966)

3.5.2 Charakteristika modelu

Tento systém má stejné vlastnosti jako systém M/M/1 a vychází z tohoto modelu avšak rozdíl je, že počet obslužných linek (kanálů obsluhy) je roven m ($m > 1$). Všechny kanály jsou homogenní, každý z nich má stejnou intenzitu obsluhy. Celková intenzita obsluhy je rovna μ , intenzita obsluhy jedné linky je tudíž $\frac{\mu}{m}$. Zdroj požadavků je nekonečný. V případě, kdy jsou všechny linky obsazeny, požadavky se řadí do fronty v pořadí, v němž vstoupily do systému. Délka fronty je neomezená čili každý další vstupující požadavek se může zařadit a čekat. Takovou frontu nazýváme neomezenou a nebo neohrazenou.

V tomto systému má smysl sledovat:

- Počet požadavků přítomných v systému v okamžiku t .
- Stav obsluhy, tj. počet obsazených a volných kanálů obsluhy.
- Stav fronty, tj. počet požadavků ve frontě

Výpočet základních charakteristik viz. tabulka č. 23 v Přílohách.

3.6 Optimalizace nákladů

Provoz kanálů obsluhy je spojen s náklady. Pro zjednodušení předpokládáme, že náklady jsou stejné ať obsluha probíhá nebo ne. Např. mzda prodavačky je stejná i když v některých časových intervalech v obchodě nejsou zákazníci a vlastní obsluha neprobíhá.

Náklady vznikají také v souvislosti s pobytem jednotek ve frontě. Je třeba udržovat, vytápět čekárnu, poskytovat občerstvení, apod. K těmto přímo vyčíslitelným nákladům je třeba připočítat odhadované ztráty spojené s přechodem nespokojeného zákazníka ke konkurenci eventuelně ztráty na produktech, které čekaly na zpracování příliš dlouho.

V systémech s více kanály obsluhy optimalizace spočívá v určení optimálního počtu kanálů obsluhy. V systémech s jedním kanálem obsluhy je možno uvažovat o zrychlení obsluhy např. přidáním pomocné síly.

Název proměnné	Symbol
Náklady vzniklé pobytem jednotky v systému za jednotku času	N_1
Náklady na provoz jednoho kanálu obsluhy za jednotku času	N_2
Průměrný počet jednotek v systému	L
Počet kanálů obsluhy	m
Celkové náklady na provoz i pobyt jednotek v systému za jednotku času	N

Tabulka 3 - Proměnné pro výpočet minimálních nákladů v systémech pro M/M/m

Zdroj: tabulka je převzata ze skript: DŮMEOVÁ L., BERÁNKOVÁ M.: Systémy hromadné obsluhy 1

3.7 Program QSB+²

QSB+ (Quantitative Systeme for Business Plus) Version 1.0.

Autoři programu jsou: Yih – Long Chang a Robert S. Sullivan.

Tento software je dovoleno dále šířit a kopírovat. Tento program má několik modulů. Pro problematiku týkající se teorie front je nejvhodnější modul QUEUE Decision Support System.

Program umožňuje analyzovat a řešit problémy týkající se systémů hromadné obsluhy. Například: Problém s jedním nebo více kanály obsluhy s omezenou nebo neomezenou kapacitou systému HO, s konečnou nebo nekonečnou populací (zdrojem požadavků) a je možno i zadat typ pravděpodobnostního rozdělení doby trvání obsluhy.

Program používá standardní terminologii používanou v systémech HO a používá jednotky:

Anglická terminologie		Česká terminologie
arrival rate	λ	počet zákazníků
service rate	μ	intenzita obsluhy
utilization factor	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	intenzita provozu
average number of customers in the systém	L	průměrný počet zákazníků v systému
average number of customers in the Queue	L _q	průměrný počet zákazníků ve frontě
average time a customer spends in the systém	W	průměrná doba strávená zákazníkem v systému
average time a customer spends in the Queue	W _q	průměrná doba strávená zákazníkem ve frontě

Tabulka 4 - Terminologie, kterou používá program QSB+

3.8 Program QtsPlus

Program Queueing Theory Software Plus Toolbox 3.0 slouží k řešení problémů teorie front. Byl vydán v roce 2008 a je volně dostupný na internetu

² Základní informace o autorech a základních možnostech využití tohoto programu se zobrazí při jeho spuštění.

(<http://www.geocities.com/qtsplus/index.html>, online 25.1.2009). Autoři tohoto programu jsou Jim Thompson, Don Gross, John Shortle a Carl H. Harris. Program je věnovaný památce Carla M. Harrise. Při spuštění se zobrazí všechny moduly, které jsou v tomto programu k dispozici. Nejdříve si vybereme, jestli chceme modely s jedním nebo více kanály obsluhy. Nebo provést simulaci atd. Poté se nám zobrazí modely M/M/c, M/M/intimity, a spousta dalších typů jednotlivých modelů. Je zde umožněn i grafický výstup ve formě nejrůznějších grafů a pravděpodobnostních rozdělení.

3.9 Porovnání QSB+ a QtsPlus

Program QSB+ je starší než QtsPlus. Nabízí však v podstatě stejné funkce. QtsPlus byl vyvinut v roce 2008 a nabízí více výstupů, které jsou mnohem lépe a přehledněji uspořádány. QSB+ se spouští jako klasický soubor s EXE příponou. QtsPlus je napsán v EXCELU pomocí maker. Zkušenost mám s oběma programy. Zpracovávat práci budu v programu QtsPlus, protože je uživatelsky přívětivější. Při zadávání vstupních proměnných je více srozumitelnější a je zde vše podrobně vysvětleno. To je jeho velkou výhodou. Může s ním tak pracovat i člověk, který není v terminologii teorie front příliš zběhlý. Naopak pracovat s programem QSB+ vyžaduje značnou odbornost a již nějakou praxi.

4 Popis zkoumané situace

4.1 Základní charakteristika

V Pražské části Zličín se nachází hypermarket Globus. Systém hromadné obsluhy zde představuje nákupní prostor ohraničený vstupem a výstupem, který představují pokladny, u kterých zákazník platí za nákup. Pracovní doba je rozdělena do třech směn. Supermarket tedy nabízí své služby 14 hodin denně. V každé směně je jiný počet prodavaček z důvodu měnícího se počtu příchozích zákazníků v průběhu dne. Hlavním cílem této práce je především optimalizovat počet pokladen. Podrobněji v kapitole 2. Provoz pokladny je samozřejmě spojen s dalšími náklady. Musí se uhradit mzda pokladní a samozřejmě i provozní náklady na provoz pokladny. Pobyt zákazníka v systému je spojen také s určitými fixními náklady jako jsou např.: elektřina, teplo, nároky na čistotu v supermarketu, atd. Tyto náklady jsou fixní a je třeba je vydělit počtem zákazníků v systému, protože tyto náklady musí být vynaloženy v každém případě. Např. topit se musí stále stejně.

4.2 Vstupní proměnné

K získání potřebných dat bylo potřeba provést v supermarketu pozorování. Pro jeho větší spolehlivost probíhalo ve čtyřech kolech. Každé kolo probíhalo 4 dny v týdnu. Každé pozorování trvalo přibližně jednu hodinu. Data získaná během této hodiny jsou zprůměrnována na celou směnu.

4.2.1 Počet kanálů obsluhy a intenzita vstupu

Každé kolo se skládalo z těchto pozorování: v pondělí se zkoumala 1. směna (8-12), ve středu 2. směna (12 -18), v pátek 3. směna (18-22).

V průběhu víkendů pozorování probíhalo následujícím způsobem: 2x v sobotu 1. a 2. směna a 3. směna v neděli a 2x přesně naopak (v neděli 1. a 2. směna a 3. směna v sobotu).

1. kolo		Po - Pá		So a Ne	
		Pokladny	Zákazníci	Pokladny	Zákazníci
Směna	8 - 12	14	143	27	331
	12 - 18	28	331	37	387
	18 - 22	11	105	13	113

Tabulka 5 - Vstupní proměnné 1. pokus

2. kolo		Po - Pá		So a Ne	
		Pokladny	Zákazníci	Pokladny	Zákazníci
Směna	8 - 12	13	137	25	330
	12 - 18	26	298	38	403
	18 - 22	12	113	15	133

Tabulka 6 - Vstupní proměnné 2. pokus

3. kolo		Po - Pá		So a Ne	
		Pokladny	Zákazníci	Pokladny	Zákazníci
Směna	8 - 12	13	188	27	337
	12 - 18	23	311	38	398
	18 - 22	10	80	10	102

Tabulka 7 - Vstupní proměnné 3. pokus

4. kolo		Po - Pá		So a Ne	
		Pokladny	Zákazníci	Pokladny	Zákazníci
Směna	8 - 12	12	138	28	389
	12 - 18	27	389	40	415
	18 - 22	11	132	17	157

Tabulka 8 - Vstupní proměnné 4. pokus

Z těchto pozorování jsme dostali 4 hodnoty pro každou směnu. Aritmetickým průměrem získáme výslednou hodnotu, se kterou se bude počítat při modelovém výpočtu. Tyto hodnoty jsou zobrazeny v následující tabulce.

Aritmetický průměr		Po - Pá		So a Ne	
		Pokladny	Zákazníci	Pokladny	Zákazníci
Směna	8 - 12	13	152	27	347
	12 - 18	26	332	38	401
	18 - 22	11	108	14	126

Tabulka 9 - Vstupní proměnné - aritmetický průměr

4.2.2 Intenzita obsluhy

Intenzita obsluhy se zkoumala rovněž ve čtyřech pozorováních v náhodně zvolených dnech. Pozorování trvalo přibližně jednu hodinu. Stopoval se čas a počet zákazníků obslužených u jednoho kanálu obsluhy. Z těchto dat byla vypočtena doba na obslužení jednoho zákazníka a dále potom počet zákazníků obslužených za jednu hodinu. Tato hodnota byla následně použita na celé jedno pozorování.

Pokus	1.	2.	3.	4.	Průměr
Intenzita obsluhy	15	12	13	12	13

Tabulka 10 - Souhrn pozorování intenzity obsluhy

Získali jsme 4 hodnoty, ze kterých získáme hodnotu 13 aritmetickým průměrem. Tato hodnota bude použita pro modelové výpočty ve všech směnách i dnech.

4.2.3 Náklady

Data spojená s náklady je velice obtížné získat a tudíž náklady na provoz jedné pokladny jsou vypočteny ze „superhrubé“ mzdy, která představuje skutečné mzdové náklady zaměstnavatele na jednu prodavačku a náklady spojené s pobytem jednoho zákazníka v systému jsou zde velice subjektivní. Je v nich započtena i ochota zákazníka čekat. Ta je samozřejmě velice těžko vyjádřitelná, ale musíme s ní počítat. Protože zákazník nemá nekonečnou trpělivost a mohlo by se stát, že zákazníci, kteří čekají dlouho na obslužení, nechají nákupní košík u pokladny a odejdou. To je pro majitele supermarketu nepřijatelné, protože ztrácí zákazníka a navíc je jeho odchod spojen s dalšími náklady. Někdo musí ten košík uklidit a zboží dále roztřídit zpět do regálů.

Náklady na provoz jedné pokladny jsou vypočteny podle „Výpočet čisté mzdy od 1.1.2008“ pomocí kalkulačky, která je uvedena na internetu (<http://www.vypocet.cz/cista-mzda>, online 22.12.2008).

Výpočet čisté mzdy v roce 2008

Čistá mzda, výpočet čisté mzdy od 1.1.2008

[Výpočet čisté mzdy před 1.1.2008](#)

Hrubá mzda:	<input type="text" value="15 000"/>	Kč
Počet dětí:	<input type="text" value="2"/>	
<input checked="" type="checkbox"/>	manželka/manžel s ročním příjmem do 38 040 Kč (uplatní se při ročním zúčtování)	
<input type="checkbox"/>	částečný invalidní důchod	
<input type="checkbox"/>	plný invalidní důchod	
<input type="checkbox"/>	držitel průkazu ZTP/P	
<input type="checkbox"/>	soustavně studující do 28 let	
<input type="button" value="Spočítej"/>		
Čistá mzda:	14 905 Kč	
Superhrubá mzda:	20 250 Kč	
<i>Základ pro výpočet zálohy na daň:</i>	20 300 Kč	
Daň před slevami:	-3 045 Kč	
Slevy na dani:	4 140 Kč	
Daň	0 Kč	
Daňové zvýhodnění na děti:	1 780 Kč	
Sociální a zdravotní pojištění (zaměstnanec):	-1 875 Kč	
Sociální a zdravotní pojištění (zaměstnavatel):	-5 250 Kč	
Odvody státu celkem:	-5 345 Kč	

Tabulka 11 - Výpočet mzdy

Pro výpočet superhrubé mzdy byla použita tato fiktivní osoba: prodavačka, která je vdaná a má dvě děti. Její hrubá mzda činí 15 000 Kč za jeden měsíc.

Prodavačka může pracovat podle zákona 262/2006 Sb. maximálně 40 hodin týdně. Měsíc má průměrně 4,3 týdne. Prodavačka tedy může za 20 250 Kč (z pohledu zaměstnavatele) pracovat nejvýše 172 hodin v jednom měsíci. Dostáváme tedy, že mzdové náklady na hodinovou práci jedné prodavačky jsou 117,7 Kč. Dále musíme ještě vzít v úvahu provozní náklady spojené s provozem jedné pokladny. Navýšíme tedy náklady na provoz jednoho kanálu obsluhy na 125 Kč za hodinu.

Nyní je třeba vyčíslit náklady spojené s pobytem jednoho zákazníka v systému. Tyto náklady jsou, jak již bylo řečeno, velice subjektivní. Musí v nich být započítány náklady ušlé příležitosti. Místo toho, aby zákazník čekal, může

vydělávat peníze. Dále musí být navýšeny o jeho trpělivost. Ta je velice těžko vyčíslitelná.

Ušlá mzda zákazníka je 80 Kč. K tomu připočteme psychologickou složku 10 Kč. Náklady na jednoho zákazníka tedy jsou 90 Kč.

Nákladová data:

	náklady na jednoho zákazníka
1 kasa	90
125	

Tabulka 12 – Přehled nákladů

5 Výpočty

Nyní bude použit program QtsPlus, který nám pomůže rychle a přesně analyzovat situaci. Pomocí analýz jsou zjištěny základní charakteristiky a efektivita systémů používaných v jednotlivé dny a směny. Druhá část výpočtů slouží k výpočtu počtu pokladen, které zaručí funkčnost systému. Ve třetí části této kapitoly jsou vypočteny optimální počty kas pomocí optimalizace nákladů.

5.1 Analýza pro Pondělí – Pátek

5.1.1 Směna od 8 - 12

Z analýzy (viz. Obrázek 5 - 6) jsou zřejmá tato data. Intenzita provozu činí 89,94 % což znamená, že systém je plně funkční a netvoří se nekonečná fronta. Toto číslo je nesmírně vysoké a naznačuje, že pokladní je možná až příliš vytížená. Průměrný počet zákazníků v oblasti pokladen je 17. Průměrná doba, kterou zákazník stráví ve frontě je průměrně 2,2 minuty. Pravděpodobnost, že se příchozí zákazník zdrží ve frontě činí 62 %.

M/M/c: POISSON ARRIVALS TO MULTIPLE EXPONENTIAL SERVERS

Vstupní proměnné:

Počet zákazníků (λ)	152,
Střední doba obsluhy ($1/\mu$)	0,076923
Počet kanálů obsluhy (c)	13

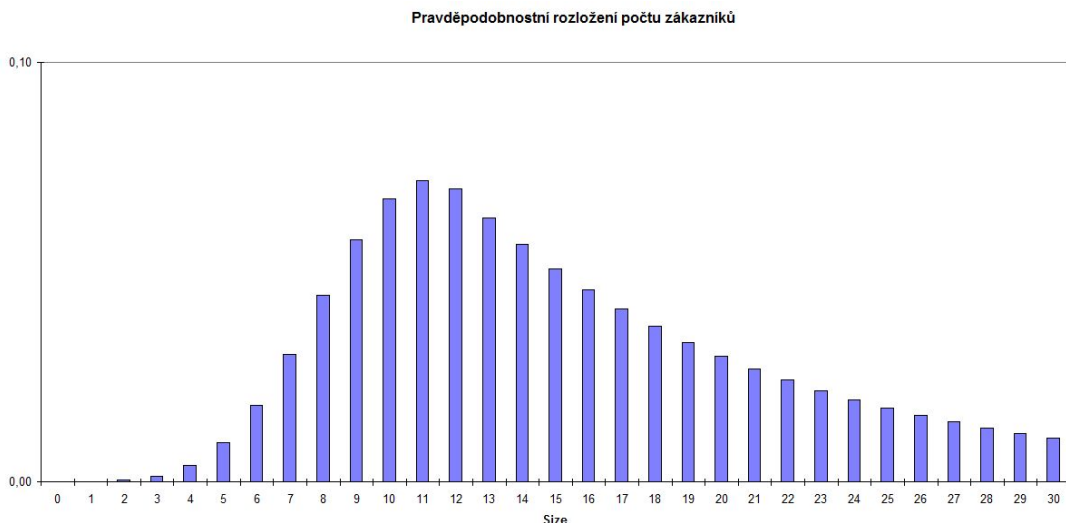
Parametry pro grafické vyhodnocení:

Maximální velikost pravděpodobnostního grafu	30
Celkový čas pro pravděpodobnostní vyhod.	2,

Výsledky:

Střední hodnota příchodů ($1/\lambda$)	0,006579
Intenzita obsluhy (μ)	13,
Průměrný počet příchozích za střední dobu ob	11,692308
Intenzita provozu (ρ)	89,94%
Doba nečinnosti všech kanálů	0,000005
Průměrný počet zákazníků v systému (L)	17,280488
Průměrný počet zákazníků ve frontě (Lq)	5,588181
Průměrná čekací doba (W)	0,113687
Průměrná čekací doba ve frontě (Wq)	0,036764
Pravděpodobnost, že je příchozí zákazník zdržen frontou ($1-Wq(0)$)	0,624994

Obrázek 4 - Výstup z programu SqtPlus



Obrázek 5 - Pravděpodobnostní rozdělení počtu zákazníků v oblasti kas

Tento graf znázorňuje pravděpodobnostní rozložení počtu zákazníků v oblasti pokladen.

5.1.2 Směna od 12 - 18

M/c: POISSON ARRIVALS TO MULTIPLE EXPONENTIAL SERVERS

Vstupní proměnné:

Počet zákazníků (λ)	332,
Střední doba obsluhy ($1/\mu$)	0,076923
Počet kanálů obsluhy (c)	26

Parametry pro grafické vyhodnocení:

Maximální velikost pravděpodobnostního grafu	60
Celkový čas pro pravděpodobnostní vyhod.	2,

Výsledky:

Střední hodnota příchodů ($1/\lambda$)	0,003012
Intenzita obsluhy (μ)	13,
Průměrný počet příchozích za střední dobu ob	25,538462
Intenzita provozu (ρ)	98,22%
Doba nečinnosti všech kanálů	0,
Průměrný počet zákazníků v systému (L)	75,093289
Průměrný počet zákazníků ve frontě (Lq)	49,554828
Průměrná čekací doba (W)	0,226185
Průměrná čekací doba ve frontě (Wq)	0,149262
Pravděpodobnost, že je příchozí zákazník zdržen frontou ($1-Wq(0)$)	0,895569

Obrázek 6 - Výstup z programu SqtPlus

U této směny je velice zajímavá intenzita obsluhy, která činí 98 %. To je hranice lidských možností. Myslím, si že v tuto chvíli se stejně fronta vytváří, protože takovouto intenzitu není člověk schopný dlouho vydržet. Počet kanálů obsluhy je zde poddimenzovaný.

Průměrná doba, kterou stráví zákazník ve frontě, činí 9 minut. To je také velice vysoké číslo, které si už „zahrává“ s psychikou zákazníků. Je zde možné, že některé zákazníky tato čekací doba otráví a odejdou domů ještě před obslužením.

5.1.3 Směna od 18 - 22

M/M/c: POISSON ARRIVALS TO MULTIPLE EXPONENTIAL SERVERS

Vstupní proměnné:

Počet zákazníků (λ)	108,
Střední doba obsluhy ($1/\mu$)	0,076923
Počet kanálů obsluhy (c)	11

Parametry pro grafické vyhodnocení:

Maximální velikost pravděpodobnostního grafu	60
Celkový čas pro pravděpodobnostní vyhod.	2,

Výsledky:

Střední hodnota příchodů ($1/\lambda$)	0,009259
Intenzita obsluhy (μ)	13,
Průměrný počet příchozích za střední dobu ob	8,307692
Intenzita provozu (ρ)	75,52%
Doba nečinnosti všech kanálů	0,000222
Průměrný počet zákazníků v systému (L)	9,218485
Průměrný počet zákazníků ve frontě (Lq)	0,910793
Průměrná čekací doba (W)	0,085356
Průměrná čekací doba ve frontě (Wq)	0,008433
Pravděpodobnost, že je příchozí zákazník zdržen frontou ($1-Wq(0)$)	0,295164

Obrázek 7 - výstup z programu SqtPlus

Zde se již intenzita obsluhy dostala do normálu na zvládnutelných 75,52 %. Čekací doba se razantně snížila na půl minuty a pravděpodobnost, že příchozí zákazník bude muset čekat ve frontě, je 30 %.

5.2 Analýza pro Sobotu, Neděli a svátky

5.2.1 Směna od 8 – 12

M/M/c: POISSON ARRIVALS TO MULTIPLE EXPONENTIAL SERVERS

Vstupní proměnné:

Počet zákazníků (λ)	347,
Střední doba obsluhy ($1/\mu$)	0,076923
Počet kanálů obsluhy (c)	27

Parametry pro grafické vyhodnocení:

Maximální velikost pravděpodobnostního grafu	60
Celkový čas pro pravděpodobnostní vyhod.	2,

Výsledky:

Střední hodnota příchozů ($1/\lambda$)	0,002882
Intenzita obsluhy (μ)	13,
Průměrný počet příchozích za střední dobu ob	26,692308
Intenzita provozu (ρ)	98,86%
Doba nečinnosti všech kanálů	0,
Průměrný počet zákazníků v systému (L)	107,443358
Průměrný počet zákazníků ve frontě (Lq)	80,75105
Průměrná čekací doba (W)	0,309635
Průměrná čekací doba ve frontě (Wq)	0,232712
Pravděpodobnost, že je příchozí zákazník zdržen frontou ($1-Wq(0)$)	0,930848

Obrázek 8 - Výstup z programu SqtPlus

V tomto případě se opět setkáváme s vysokou hodnotou intenzity provozu 98,86 %. Zákazník čeká ve frontě průměrně 14 minut. Pravděpodobnost, že příchozí zákazník bude zdržen frontou při obsluhování je 93 %. Takový model funguje snad jen teoreticky. Stačí jen drobný problém a stane se nefunkčním, protože se zde začnou hromadit zákazníci.

5.2.2 Směna od 12 – 18

M/M/c: POISSON ARRIVALS TO MULTIPLE EXPONENTIAL SERVERS

Vstupní proměnné:

Počet zákazníků (λ)	401,
Střední doba obsluhy ($1/\mu$)	0,076923
Počet kanálů obsluhy (c)	38

Parametry pro grafické vyhodnocení:

Maximální velikost pravděpodobnostního grafu	60
Celkový čas pro pravděpodobnostní vyhod.	2,

Výsledky:

Střední hodnota příchozů ($1/\lambda$)	0,002494
Intenzita obsluhy (μ)	13,
Průměrný počet příchozích za střední dobu ob	30,846154
Intenzita provozu (ρ)	81,17%
Doba nečinnosti všech kanálů	0,
Průměrný počet zákazníků v systému (L)	31,50269
Průměrný počet zákazníků ve frontě (Lq)	0,656536
Průměrná čekací doba (W)	0,07856
Průměrná čekací doba ve frontě (Wq)	0,001637
Pravděpodobnost, že je příchozí zákazník zdržen frontou ($1-Wq(0)$)	0,152264

Obrázek 9 - Výstup z programu SqtPlus

V tomto případě intenzita provozu činí 81,17 %. Čekací doba však nedosahuje ani jedné minuty. To je velice uspokojivé. Pravděpodobnost, že příchozí zákazník bude zdržen frontou, je 15,22 %

5.2.3 Směna od 18 – 22

M/M/c: POISSON ARRIVALS TO MULTIPLE EXPONENTIAL SERVERS

Vstupní proměnné:

Počet zákazníků (λ)	126,
Střední doba obsluhy ($1/\mu$)	0,076923
Počet kanálů obsluhy (c)	14

Parametry pro grafické vyhodnocení:

Maximální velikost pravděpodobnostního grafu	60
Celkový čas pro pravděpodobnostní vyhod.	2,

Výsledky:

Střední hodnota příchodů ($1/\lambda$)	0,007937
Intenzita obsluhy (μ)	13,
Průměrný počet příchozích za střední dobu ob	9,692308
Intenzita provozu (ρ)	69,23%
Doba nečinnosti všech kanálů	0,00006
Průměrný počet zákazníků v systému (L)	10,0156
Průměrný počet zákazníků ve frontě (L_q)	0,323292
Průměrná čekací doba (W)	0,079489
Průměrná čekací doba ve frontě (W_q)	0,002566
Pravděpodobnost, že je příchozí zákazník zdržen frontou ($1-W_q(0)$)	0,143686

Obrázek 10 - Výstup z programu SqtPlus


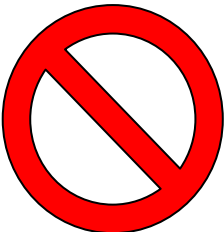
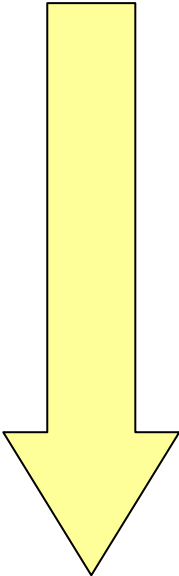
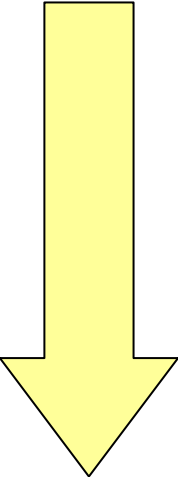
Zde se již intenzita provozu dostala do normálu na necelých 70 %. Průměrná doba strávená ve frontě nedosahuje ani 10 vteřin. To znamená, že zákazník téměř ve frontě nečeká a přichází okamžitě ke kanálu obsluhy. Pravděpodobnost, že zákazník bude muset čekat ve frontě, je pouze 14 %.

5.3 Výsledky pro Pondělí - Pátek

Nyní se pokusíme minimalizovat náklady spojené s provozem kanálů obsluhy (pokladen). Musíme zde vyslovit několik základních podmínek: intenzita provozu musí být menší než 100 %, aby byla zajištěna funkčnost systému.

Čekací doba je již zahrnuta v nákladech na jednoho zákazníka, který se pohybuje v systému.

5.3.1 Počty pokladen, které splňují omezující podmínku

Počet pokladen	Srovnávací tabulka											
	8 - 12			12 - 18			18 - 22					
	μ	Wq	L	μ	Wq	L	μ	Wq	L			
9							92,31%	0,084	17,33			
10							83,08%	0,022	10,67			
11							75,52%	0,008	9,22			
12	97,44%	0,225	34,18				69,23%	0,004	8,70			
13	89,94%	0,037	17,28				63,91%	0,002	8,48			
14	83,52%	0,014	13,83									
15	77,95%	0,006	12,66									
16	73,08%	0,003	12,16									
17										98,22%	0,149	75,09
18										94,59%	0,037	37,73
19				91,21%	0,017	31,09						
20				88,06%	0,009	28,52						
21				85,13%	0,005	27,26						
22				82,38%	0,003	26,56						
23												
24												
25												
26												
27												
28												
29												
30												
31												

Tabulka 13 - Počty pokladen splňujících podmínku, že intenzita obsluhy je menší než 100 %

μ = Intenzita obsluhy

Wq = Průměrná čekací doba ve frontě

L = Průměrný počet zákazníků v systému

5.3.2 Výpočet nákladů

Náklady na provoz jedné pokladny a náklady spojené s pobytem jednoho zákazníka v systému jsou uvedené výše viz. tabulka 11.

Pro směnu od 8 – 12 hodin jsou tyto náklady:

Počet přepážek	Průměrný počet zákazníků v systému (L)	Náklady N1	Náklady N2	Celkové náklady
12	34,18	3076,2	1500	4576,2
13	17,28	1555,2	1625	3180,2
14	13,83	1244,7	1750	2994,7
15	12,66	1139,4	1875	3014,4
16	12,16	1094,4	2000	3094,4

Tabulka 14 - Přehled nákladů pro směnu 8 – 12

Pro směnu od 12 – 18 hodin jsou tyto náklady:

Počet přepážek	Průměrný počet zákazníků v systému (L)	Náklady N1	Náklady N2	Celkové náklady
26	75,09	6758,1	3250	10008,1
27	37,73	3395,7	3375	6770,7
28	31,09	2798,1	3500	6298,1
29	28,52	2566,8	3625	6191,8
30	27,26	2453,4	3750	6203,4
31	26,56	2390,4	3875	6265,4

Tabulka 15 - Přehled nákladů pro směnu 12 – 18

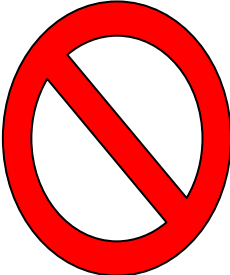

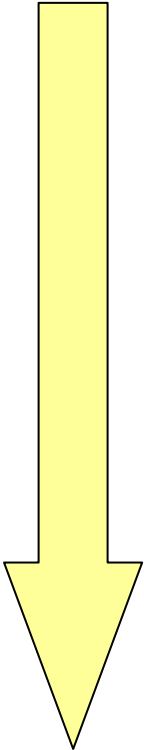
Pro směnu od 18 – 22 hodin jsou tyto náklady:

Počet přepážek	Průměrný počet zákazníků v systému (L)	Náklady N1	Náklady N2	Celkové náklady
9	17,33	1559,7	1125	2684,7
10	10,67	960,3	1250	2210,3
11	9,22	829,8	1375	2204,8
12	8,70	783	1500	2283
13	8,48	763,2	1625	2388,2

Tabulka 16 - Přehled nákladů pro směnu 18 – 22

5.4 Výsledky pro Sobotu, Neděli a svátky

5.4.1 Počty kas, které splňují omezující podmínku

Počet pokladen	Srovnávací tabulka								
	8 - 12			12 - 18			18 - 22		
	μ	Wq	L	μ	Wq	L	μ	Wq	L
10							96,92%	0,223	37,75
11							88,11%	0,035	14,12
12							80,77%	0,013	11,32
13							74,56%	0,006	10,40
14							69,23%	0,003	10,02
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									
25									
26									
27	98,86%	0,233	107,44						
28	95,33%	0,043	41,61						
29	92,04%	0,019	33,23						
30	88,97%	0,010	30,17						
31	86,10%	0,006	28,69	99,50%	0,484	224,78			
32	83,41%	0,003	27,89	96,39%	0,052	51,53			
33				93,47%	0,022	39,60			
34				90,72%	0,012	35,51			
35				88,13%	0,007	33,57			
36				85,68%	0,004	32,51			
37				83,37%	0,003	31,88			

Tabulka 17 - Počty pokladen splňujících podmínku, že intenzita obsluhy je menší než 100 %

μ = Intenzita obsluhy

Wq = Průměrná čekací doba ve frontě

L = Průměrný počet zákazníků v systému

5.4.2 Výpočet nákladů

Náklady na provoz jedné kasy a náklady spojené s pobytem jednoho zákazníka v systému jsou uvedené výše viz. tabulka 11.

Pro směnu od 8 – 12 hodin jsou tyto náklady:

Počet přepážek	Průměrný počet zákazníků v systému (L)	Náklady N1	Náklady N2	Celkové náklady
27	107,44	9669,6	3375	13044,6
28	41,61	3744,9	3500	7244,9
29	33,23	2990,7	3625	6615,7
30	30,17	2715,3	3750	6465,3
31	28,69	2582,1	3875	6457,1
32	27,89	2510,1	4000	6510,1

Tabulka 18 - Přehled nákladů pro směnu 8 - 12

Pro směnu od 12 – 18 hodin jsou tyto náklady:

Počet přepážek	Průměrný počet zákazníků v systému (L)	Náklady N1	Náklady N2	Celkové náklady
31	224,78	20230,2	3875	24105,2
32	51,53	4637,7	4000	8637,7
33	39,60	3564	4125	7689
34	35,51	3195,9	4250	7445,9
35	33,57	3021,3	4375	7396,3
36	32,51	2925,9	4500	7425,9
37	31,88	2869,2	4625	7494,2

Tabulka 19 - Přehled nákladů pro směnu 12 - 18

Pro směnu od 18 – 22 hodin jsou tyto náklady:

Počet přepážek	Průměrný počet zákazníků v systému (L)	Náklady N1	Náklady N2	Celkové náklady
10	37,75	3397,5	1250	4647,5
11	14,12	1270,8	1375	2645,8
12	11,32	1018,8	1500	2518,8
13	10,40	936	1625	2561
14	10,02	901,8	1750	2651,8

Tabulka 20 - Přehled nákladů pro směnu 18 - 22

6 Diskuze

Tato kapitola se zabývá přínosem celého projektu a jeho možnost uplatnění v praxi. V následující tabulce 21 je přehledně zobrazen počet pokladen a náklady na jednu hodinu provozu kanálů obsluhy. Na jedné straně je skutečný počet pokladen a náklady, které z toho vyplývají a na straně druhé je optimální počet pokladen a optimální náklady. Žlutě je pak vyznačená hodnota, která uvádí kolik by supermarket ušetřil v případě, že by použil počty pokladen vypočtené pomocí tohoto modelu.

	Skutečný		Optimální		Ušetřeno	
	počet pokladen	náklady	počet pokladen	náklady		
Po - Pá	8 - 12	13	3180,2	14	2994,7	185,5
	12 - 18	26	10008,1	29	6191,8	3816,3
	18 - 22	11	2204,8	11	2204,8	0
So a Ne	8 - 12	27	13044,6	31	6457,1	6587,5
	12 - 18	38	7585	35	7396,3	188,7
	18 - 22	14	2651,8	12	2518,8	133
Celkem ušetřeno					10911	

Tabulka 21 - Skutečné náklady vs. optimální náklady

Na této tabulce si lze všimnout, že některé rozdíly mezi skutečným počtem pokladen a optimálním počtem kas jsou minimální. To může vyplynout už z terénního výzkumu. Výzkum totiž zahrnoval jen vzorek skutečné provozní doby, takže se jedná pouze o údaje přibližné. V každém případě je z těchto dat patrné, že supermarket sleduje počty kas a počty příchozích zákazníků.

Pokud jsou však rozdíly větší, jako například (šedou barvou) zvýrazněná hodnota 6587,5. Je třeba na tento vývoj reagovat. Jak již bylo řečeno, jedná se o náklady za 1 hodinu. Za jednu dopolední směnu trvající 4 hodiny by tak management supermarketu prohospodařil zbytečně 27 430 Kč. Je tedy třeba mít model propracovaný co nejpodrobněji, aby docházelo k co nejmenším ztrátám.

7 Závěr

První část této práce je teoretická a vychází z větší části z české literatury a částečně z literatury cizojazyčné. Teoretická část popisuje základní typy modelů teorie front. Dále nás seznamuje se základními pojmy a s terminologií, která je využívána v teorii front. Je zde uvedena i anglická terminologie, kterou je nutno znát pro správnou orientaci v softwaru QtsPlus, který umí řešit analyticky velké množství modelů teorie front a zvládá i simulace.

Druhá část práce vychází z teoretických základů. Nejprve je zde popsán praktický příklad. Jedná se o supermarket a konkrétně o obslužení zákazníků u pokladny. Cílem řešení příkladu bylo porovnat skutečný počet otevřených kanálů obsluhy (pokladen) s modelovým výpočtem, který určuje jaký je optimální počet pokladen při minimalizaci nákladů. Na základě dat, pořízených z reálného pozorování modelu, byly vyjádřeny všechny potřebné charakteristiky nutné pro modelový výpočet. Z těchto hodnot je naprosto zřejmé, že vybereme počet pokladen, který má nejnižší celkové náklady.

Je zde možnost uvedenou praktickou část ještě dále propracovat v diplomové práci. Jednalo by se zejména o více modelových výpočtů a jejich následného porovnání s realitou, pro které by se muselo získat více dat v terénním výzkumu, například výpočty pro různé dny v týdnu atd.

Pro dokonalejší pochopení a přesnější řešení sledovaného problému je možné také použít řešení pomocí simulace. Analytické řešení nedokáže, na rozdíl od simulačního, zohlednit některé detaily, které by bylo možné do modelu implementovat právě pomocí simulace. Například příjezd zákazníků do supermarketu neprobíhá plynule, ale v náhodných dávkách.

Celkově lze říci, že analytické řešení je u takto jednodušších modelů dostatečně přesné a blíží se simulační metodě, samozřejmě při dostatečném počtu opakování. V případě, že se vyskytne model řešící obdobnou situaci, mohla by se tato práce využít jako teoretický základ a program QtsPlus jako nástroj pro řešení daného problému.

8 Seznam literatury

DÖMEOVÁ L., BERÁNKOVÁ M.: Systémy hromadné obsluhy 1, PEF ČZU, Praha, 2004. 58 s. ISBN 80-213-1193-2.

HOUŠKA M.: Simulační modely 1, PEF ČZU, Praha, 2005. 58 s. ISBN 80-213-1334-X.

GROS I.: Kvantitativní metody v manažerském rozhodování, Grada, Praha, 2003, ISBN 80-247-0421-8.

GROSS D., HARRIS C.M.: Fundamentals of Queueing Theory, John Willey & Sons, 1974. 556 s. ISBN 0-471-32812-X.

Kvantitativní metody v ekonomii 2005: sborník příspěvků z mezinárodního vědeckého semináře, PEF ČZU, Praha, 2005, ISBN 80-213-1283-1.

LEE A.M.: Applied Queueing Theory, Macmillan, Toronto, 1966. 244 s. Library of congress catalog number 66-19961.

NEWELL G.F.: Applications of Queueing Theory, Willmer Brothers, London, 1971, SBN 412 10770 8.

PAGE E.: Queueing Theory in OR, Butterworth, London, 1972, ISBN 0 408 70237 0

UNČOVSKÝ L.: Stochastické modely operačnej analýzy, Alfa, Bratislava, 1980. 416 s. ISBN 99-00-00253-X

9 Přílohy

9.1 Základní charakteristiky

Tabulka 22 - Základní charakteristiky modelů M/M/1

M/M/1	Značka/Vzorec
Intenzita vstupu	λ
Intenzita obsluhy	μ
Intenzita provozu	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
Pravděpodobnost, že v systému (ve frontě a obsluze) je alespoň jedna jednotka	$p\{L \geq 0\} = (1 - p_0) = \rho$
Pravděpodobnost, že jednotka bude čekat ve frontě nulovou dobu tj., že systému není žádná jednotka	$p_0 = 1 - \rho$
Pravděpodobnost, že v systému (ve frontě a obsluze) je právě k jednotek	$p_k = (1 - \rho) \rho^k$
Pravděpodobnost, že v systému (ve frontě a obsluze) je k nebo více jednotek	$p\{L \geq k\} = \rho^k$
Pravděpodobnost, že v systému (ve frontě a obsluze) je více než k jednotek	$p\{L > k\} = \rho^{k+1}$
Pravděpodobnost, že v systému (ve frontě a obsluze) je k nebo méně jednotek	$p\{L \leq k\} = 1 - \rho^{k+1}$
Střední počet jednotek v systému (ve frontě a obsluze)	$L = \frac{\rho}{1 - \rho}$
Střední počet jednotek ve frontě (průměrná délka fronty)	$L_Q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$
Střední doba strávená jednotkou v systému (ve frontě a obsluze)	$T = \frac{1}{\mu - \lambda}$
Střední doba strávená jednotkou ve frontě	$T_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$
Střední doba obsluhy	$T_s = \frac{1}{\mu}$

Zdroj: převzato ze skript DÖMEOVÁ L., BERÁNKOVÁ M.: Systémy hromadné obsluhy 1.

Tabulka 23 - Základní numerické charakteristiky systému M/M/m

Intenzita provozu	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$
Pravděpodobnost, že v systému (ve frontě a obsluze) je právě n jednotek $1 \leq n \leq m$	$p_n = p_0 \frac{m^n \rho^n}{n!}$
Pravděpodobnost, že počet jednotek v systému je větší nebo roven počtu kanálů obsluhy tj., všechny kanály jsou obsazeny	$p\{L \geq m\} = p_0 \frac{m^m \rho^m}{m!}$
Pravděpodobnost, jednotka bude čekat ve frontě dobu delší než t	$p\{T_Q > t\} = p_0 \frac{m^m \rho^m}{m!(1-\rho)} e^{-(\mu-\lambda)t}$
Pravděpodobnost, že jednotka bude čekat ve frontě nulovou dobu tj., že systému není žádná jednotka	$p_0 = \frac{1}{\frac{m^m \rho^m}{m!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{m^n \rho^n}{n!}}$
Sřední počet jednotek v systému (ve frontě a obsluze)	$L = p_0 \frac{m^m \rho^{m+1}}{m!(1-\rho)^2} + \rho m$
Sřední počet jednotek ve frontě	$L_Q = p_0 \frac{m^m \rho^{m+1}}{m!(1-\rho)^2}$
Sřední počet jednotek v obsluze	$L_S = \rho m$
Sřední doba strávená jednotkou v systému (ve frontě a obsluze)	$T = \frac{p_0}{\mu} \cdot \frac{m^m \rho^m}{m!(1-\rho)^2} + m$
Sřední doba strávená jednotkou ve frontě	$T_Q = \frac{p_0}{\mu} \cdot \frac{m^m \rho^m}{m!(1-\rho)^2}$

Zdroj: převzato ze skript DÖMEOVÁ L., BERÁNKOVÁ M.: Systémy hromadné obsluhy 1.

Přehled základních pojmů

Systém hromadné obsluhy – prostředí, ve kterém se realizuje obsluha požadavků

Analytické řešení – spočívá ve výpočtu základních charakteristik systému dosazením jeho parametrů do vztahů odvozených pro odpovídající typ modelu hromadné obsluhy

Simulační řešení – procesy probíhající v systému hromadné obsluhy se modelují na počítači a řešení spočívá v experimentování s příslušným počítačovým modelem

Režim fronty – souhrn pravidel podle, kterých je vybírán další zákazník do obsluhy

FIFO – kdo přijde první do fronty ten je také jako první obsloužen (fronta u pokladny)

LIFO – kdo přijde jako poslední je obsloužen jako první

SIRO – náhodný výběr

Kanál obsluhy – zařízení, které provádí obsluhu požadavků

Požadavek – jednotka, která přichází do systému hromadné obsluhy za účelem realizace obsluhy

Zdroj požadavků – zdroj, ze kterého vychází požadavky

Intenzita obsluhy – průměrný počet požadavků, který je schopen kanál obsluhy za jednotku času obsloužit

Intenzita provozu – poměr intenzity příchoďů a intenzity obsluhy celého systému