



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ENERGETICKÝ ÚSTAV**

ENERGY INSTITUTE

**MĚŘENÍ TLAKOVÝCH PULZACÍ, VLIV  
IMPULSNÍHO POTRUBÍ A VLIV TLAKOVÉHO  
SNÍMAČE**

MEASUREMENT OF PRESSURE PULSATIIONS, INFLUENCE OF IMPULSE PIPING AND INFLUENCE  
OF PRESSURE SENSOR

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

MASTER'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Bc. Radim Zrebný

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.

BRNO 2024



## Zadání diplomové práce

Ústav: Energetický ústav  
Student: **Bc. Radim Zrebný**  
Studijní program: Energetické a termofluidní inženýrství  
Studijní obor: Fluidní inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.**  
Akademický rok: 2023/24

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijníma zkušebními řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

### **Měření tlakových pulsací, vliv impulsního potrubí a vliv tlakového snímače**

#### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Při měření tlakových pulsací bývá použito impulsní tlakové potrubí a tlakový snímač. Jak impulsní potrubí tak tlakový snímač lze popsat pomocí vhodných přenosových funkcí. Stanovení přenosu takto navrženého měřicího řetězce bude úkolem diplomové práce.

#### **Cíle diplomové práce:**

Literární rešerše problematiky měření tlakových pulsací.  
Stanovit přenos při měření tlakových pulsací s vlivem potrubí a tlakového snímače.  
Návrh experimentu.

#### **Seznam doporučené literatury:**

ČAPOŠ, Eduard. Šíření tlakových pulsací v pružných plastových hadicích. Brno, 2020. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.

ZUTH, D. Analýza nejistot ve vibrodiagnostice. Brno, CZ, 2009. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Ústav automatizace a informatiky.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2023/24

V Brně, dne

L. S.

---

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D. ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D. děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Tato diplomová práce se zabývá problematikou měření tlakových pulsací se zaměřením na dynamické vlastnosti běžně používaných tlakových snímačů a plastových hadic. Součástí práce je literární rešerše dnešní dostupné techniky, popis postupu pro vyhodnocení dat a vytvoření matematických modelů, které dokážou zachytit chování dané techniky při měření časově závislých dějů. V další části je navrženo experimentální měření, které je porovnáno s vytvořenými matematickými modely.

### **Klíčová slova**

Tlakové pulsace, snímače tlaku, frekvenční analýza, měření časově závislé veličiny, pružné potrubí, tenzometrický snímač, piezoelektrický snímač

## **ABSTRACT**

Master thesis deals with the measurement of pressure pulsations with a focus on the dynamic properties of commonly used pressure transducers and plastic hoses. The thesis includes a literature search of currently available techniques, a description of the procedure for data evaluation and the development of mathematical models that can capture the behaviour of the technique in the measurement of time-dependent processes. In the next section, experimental measurements are proposed and compared with the developed mathematical models.

### **Key words**

Pressure pulsation, pressure transducers, frequency analysis, time-dependent quantity measurement, flexible piping, strain gauge sensor, piezoelectric sensor

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

ZREBNÝ, Radim. Měření tlakových pulsací, vliv impulzního potrubí a vliv tlakového snímače. Brno, 2024. Dostupné také z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/154000>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. Vedoucí práce doc. Ing. Vladimír Habán, PhD.

## **PODĚKOVÁNÍ**

Děkuji vedoucímu této práce doc. Ing. Vladimíru Habánovi, PhD. za odbornou pomoc, podporu, vstřícnost při vypracování a čas, který se mnou strávil. Dále děkuji Ing. Martinu Hudcovi, PhD. za pomoc s uskutečněním experimentu.





## OBSAH

Úvod .....	11
1 Měření tlaku.....	12
1.1 Definice fyzikální veličiny .....	12
1.1.1 Rozdělení tlaku .....	12
1.1.2 Jednotka .....	13
1.2 Tlakoměry.....	13
1.2.2 Tlakoměry s elektrickým výstupem .....	15
1.2.3 Tenzometrické snímače .....	15
1.2.4 Kapacitní snímače.....	16
1.2.5 Piezoelektrické snímače .....	16
1.2.6 Indukční snímače.....	17
2 Dynamické vlastnosti měřících přístrojů.....	18
2.1 Analýza signálu .....	20
3 Model přenosu .....	25
3.1 Jedno-hmotový systém .....	25
3.2 Dvou-hmotový systém.....	26
3.3 Model pružné trubice.....	28
3.3.1 Zákon zachování hmotnosti.....	28
3.3.2 Vliv tekutiny na poddajnou trubici .....	30
3.3.3 Kelvin-Voigtův model materiálu.....	33
3.3.4 Zákon zachování hmotnosti pro tekutinu v pružné trubici .....	33
3.3.5 Zákon zachování hybnosti pro tekutinu v pružné trubici .....	34
3.3.6 Přenosová matice.....	35
4 Přenosová komora .....	39
4.1 Výpočtová síť .....	39
4.2 Nastavení výpočtu .....	39
4.3 Vyhodnocení nárůstu amplitudy.....	40
5 Návrh experimentu .....	42
5.1 Schéma měřící tratě .....	42
5.2 Popis měřící trati.....	42
5.3 Popis snímačů.....	44
5.4 Popis impulzního potrubí .....	44
5.5 Seznam použité techniky .....	44
5.6 Postup experimentu .....	45
5.7 Hodnoty měření .....	45
5.8 Vyhodnocení.....	47
5.8.1 Snímač $p_2$ .....	47
5.8.2 Snímač $p_4$ .....	50
5.8.3 Snímač $p_1$ .....	51
5.8.4 Šroubení Minimes .....	53
6 Stanovení přenosu .....	55

6.1	Přenos snímače $p_2$ .....	55
6.2	Přenos snímače $p_1$ .....	57
6.3	Přenos šroubení Minimes.....	61
ZÁVĚR .....		62
SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ .....		64
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK .....		65
SEZNAM OBRÁZKŮ .....		67
SEZNAM GRAFŮ .....		68

## **Úvod**

Tlakové pulzace představují periodické či neperiodické změny tlaku, které mohou mít různé příčiny, jako jsou specifické provozní podmínky, interakce mezi jednotlivými částmi systému nebo vnější mechanické vlivy. Tyto tlakové změny mohou být způsobeny například činností čerpadel, kompresorů, nebo vlivem náhlých změn průtoku tekutin. Jejich správné měření je nezbytné pro zajištění dostatečné bezpečnosti, vysoké kvality, efektivity a ekonomické výhodnosti v mnoha technických oblastech, jako jsou energetika, chemický průmysl či automobilový průmysl.

Nedílnou součástí měřicích systémů jsou tlakové snímače a také impulzní potrubí, pro které se v praxi často využívají pružné plastové hadice. Tyto systémy by měly být navrženy takovým způsobem, aby minimalizovaly chyby a zkreslení zapříčiněné jejich materiálovými a konstrukčními vlastnostmi. Správná konstrukce a volba materiálů pro impulzní potrubí je klíčová pro zajištění přesnosti a spolehlivosti měření.

Jak tlakový snímač, tak impulzní potrubí lze popsat pomocí přenosových funkcí, které charakterizují jejich dynamické chování a odezvu na tlakové změny. Přenosové funkce umožňují modelovat, jak se tlakové pulsace šíří skrz systém a jak jsou ovlivněny vlastnostmi jednotlivých komponent. Přesné stanovení přenosových charakteristik tohoto měřicího řetězce je zcela zásadní pro dosažení vysoké spolehlivosti měření, což je klíčové pro správnou interpretaci dat a pro následné rozhodování.

Cílem této práce je tedy provést důkladnou literární rešerši problematiky měření tlakových pulsací a dynamických vlastností měřicích systémů. Dále je cílem navrhnout a realizovat experiment, který ověří rozsah použitelnosti běžně používaných snímačů tlaku a impulzního potrubí. Pro tyto komponenty budou stanoveny přenosové funkce, které budou následně porovnány s naměřenými daty z experimentu.

Tato práce by měla přispět k lepšímu porozumění vlivu pružných hadic a snímačů na měření tlakových pulsací, což by mohlo pomoci při optimalizaci měřicích systémů v praxi. Lepší porozumění a přesnější měření mohou vést ke zlepšení konstrukce a provozu měřicích systémů, což přinese výhody v podobě zvýšené spolehlivosti, bezpečnosti a efektivity v různých technických aplikacích. Závěry a doporučení vyplývající z této práce mohou být využity k optimalizaci měřicích systémů a k zajištění lepší kvality měření tlakových pulsací v průmyslové praxi.

## 1 Měření tlaku

### 1.1 Definice fyzikální veličiny

Jednou ze základních fyzikálních veličin je tlak. Tato veličina je odvozená. Vlastnosti kapalin a plynů jsou na ní závislé.

V technické praxi je základní definicí tlaku podíl elementární síly  $dF$  působící v normálovém směru na elementární plochu  $dS$ :

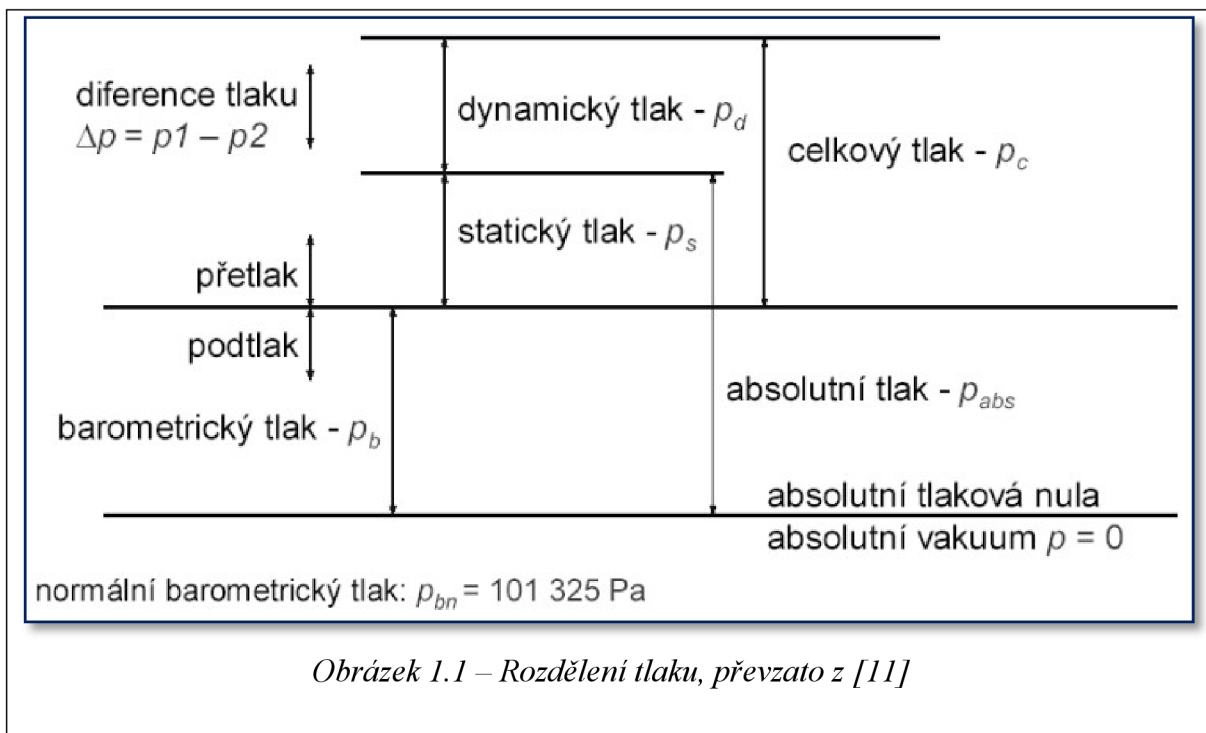
$$p = \frac{dF}{dS} \quad (1.1)$$

Pro tekutiny v gravitačním poli můžeme definovat hydrostatický tlak sloupce kapaliny s hustotou  $\rho$  a výškou  $h$ :

$$p = h * g * \rho \quad (1.2)$$

#### 1.1.1 Rozdělení tlaku

Tlak můžeme vyjádřit vždy vůči dvěma vztažným hodnotám – absolutní tlaková nula a atmosférickému (normálnímu barometrickému) tlaku. Tlak vztažený k atmosférickému se dělí na přetlak a podtlak. Základní rozdělení tlaku můžeme vidět na obrázku:



- Absolutní nulový tlak (absolutní vakuum) je teoretický nulový tlak v prostoru dokonale zbaveném jakýchkoli hmotných částic. Absolutní tlak je tlak měřený k absolutní tlakové nule.

- Barometrický (atmosférický) tlak je tlak vzduchu v daném místě a za skutečných podmínek (fyzikální hodnota normálního barometrického tlaku přepočtená na 0 °C na hladinu moře je 101 325 Pa).
- Přetlak je rozdíl absolutního tlaku vyššího než barometrický tlak a barometrického tlaku.
- Podtlak je rozdíl barometrického tlaku a absolutního tlaku, který je nižší než barometrický tlak.
- Vakuum je ve fyzikálním pojetí označení pro jakýkoli tlak nižší, než je barometrický tlak.
- Rozdílový tlak (tlaková diference) je rozdíl dvou tlaků, z nichž ani jeden se neshoduje s barometrickým tlakem.

### 1.1.2 Jednotka

V soustavě SI je základní jednotkou pascal ( $1 \text{ Pa}$ ), který je roven účinku jednoho *newtonu* zatěžující plochu o rozloze jeden *metr čtvereční*.

Další jednotky tlaku, se kterými se můžeme setkat, vyjádřeny v závislosti na *pascalu*, jsou uvedeny v tabulce:

Značka	Jednotka	Hodnota v pascalech
<b>bar</b>	Bar	$10^5$
<b>atm</b>	Standartní atmosféra	$1,0133 \cdot 10^5$
<b>at</b>	Technická atmosféra	$9,8067 \cdot 10^4$
<b>Ba</b>	Barye	0,1
<b>kg/m<sup>2</sup></b>	Kilogram na metr čtvereční	9,807
<b>mAq</b>	Metr vodního sloupce (4 °C)	$9,8063 \cdot 10^3$
<b>torr</b>	Milimetr rtuťového sloupce (0 °C)	$1,3332 \cdot 10^2$
<b>psi</b>	Libra na čtvereční palec	$6,8947 \cdot 10^3$
<b>psf</b>	Libra na čtvereční stopu	47,881
<b>inAq</b>	Palce vodního sloupce (4 °C)	$2,9408 \cdot 10^2$
<b>inHg</b>	Palce vodního sloupce (0 °C)	$3,3864 \cdot 10^3$

Rozsah měřených tlaků se v technické praxi pohybuje v rozsahu od  $10^{-12}$  až do  $10^{12}$  Pa.

## 1.2 Tlakoměry

Tlakoměry jsou základní přístroje používané k měření a indikaci tlaku tekutiny nebo plynu v systému. Dělení tlakoměrů může být zohledněno z několika hledisek [1].

Podle velikosti tlaku, pro které jsou přístroje určeny, můžeme rozdělit tlakoměry na [1]:

- **manometry** – přístroje pro měření přetlaků
- **barometry** – přístroje výhradně určené pro měření barometrického tlaku,

- **vakuometry** – přístroje pro měření podtlaků, přičemž přístroje pro měření malých podtlaků také často označujeme jako tahoměry,
- **manovakuometry** – přístroje, které mohou měřit jak podtlaky, tak přetlaky.

Podle principu činnosti můžeme dělit tlakoměry na [1]:

- **Kapalinové tlakoměry** - měřidla, která ke své činnosti využívají tlakoměrnou kapalinu a v principu se opírají o definici hydrostatického tlaku. Tlakoměrnou kapalinou je nejčastěji rtuť, voda, lín, popř. další speciální kapaliny. Podstatnou vlastností, která ovlivňuje možné použití a zejména rozsah přístroje, je hustota kapaliny.
- **Zvonové a pístové tlakoměry** – přístroje, které většinou využívají kompenzační metodu a pracují na principu vyrovnání tlakové síly, která působí na jedné straně pístu, s vnější silou, která je vyvolána pružinou či závažím. Výstupem je tedy zdvih zvonu nebo hmotnost závaží
- **Deformační tlakoměry** – přístroje, které jsou v běžné technické praxi nejrozšířenější. Jejich základem je deformační prvek – tlakoměrná pružina v podobě trubice, membrány, krabice či vlnovce.
- **Elektrické tlakoměry** – přístroje, které přímo využívají elektrických vlastností, resp. přímé závislosti mezi tlakem a některou elektrickou veličinou, je sice široká škála, ale význam pro praxi mají především ty z nich, jež svým použitím obsáhnou extrémní hodnoty tlaků. Používají se k měření velmi vysokých přetlaků nebo naopak extrémního vakua, což jsou vysoce specializované oblasti použití.

Další možnost dělení je podle výstupního signálu [1]:

- **Tlakoměry s mechanickým výstupem**
- **Tlakoměry s digitálním výstupem**
- **Tlakoměry s elektrickým výstupem**

V technické praxi se nejčastěji používají tlakoměry s elektrickým výstupem. To je dáno možností zpracování výsledků měření pomocí výpočetní techniky, což je v dnešní době zcela nezbytné při měření například v řízení automatizovaných procesů nebo na vodním díle. Tlakoměry s elektrickým výstupem jsou často nazývány jako tlakové senzory, tlakové snímače, nebo elektrické převodníky tlaku.

Praktická část této práce je zaměřena na vyhodnocení dynamických charakteristik tlakových senzorů s elektrickým výstupem, proto budou v následující části popsány základní principy na vybraných typech senzorů právě této skupiny.

## 1.2.2 Tlakoměry s elektrickým výstupem

Snímače tlaku s elektrickým výstupem jsou přístroje, které využívají změnu některé elektrické veličiny, na kterou působí tlak měřeného média. Médium působí na prvek snímače přímo anebo přes deformační člen, proto můžeme přístroje dále rozdělit do dvou skupin [1]:

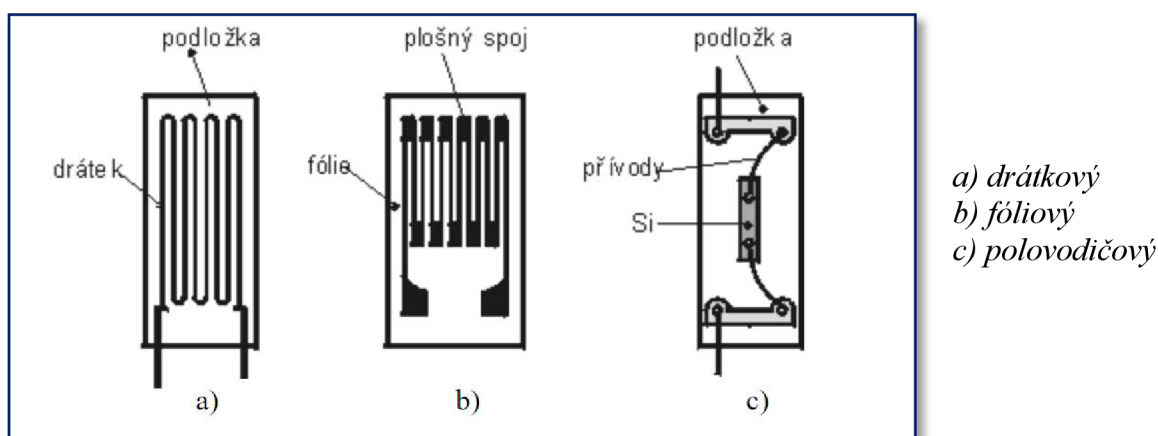
- Snímače s elektricky aktivním členem – Vlivem působícího tlaku se mění elektrické vlastnosti citlivého prvku. Do této skupiny patří snímače piezoelektrické, některé kapacitní, odporové a snímače tlaku s optickým vláknem.
- Snímače s deformačním členem – Měří hodnotu tlaku nepřímo. Nejčastěji se jako deformační prvek používá tenká membrána, dutý válec, vlnovec, Bourdonova trubice atd. Deformace citlivého prvku se snímá elektrickým snímačem a transformuje se na napěťový nebo proudový signál. Do této skupiny patří snímače tenzometrické, indukční, kapacitní, vibrační a další.

## 1.2.3 Tenzometrické snímače

Tenzometrické snímače patří k nejčastěji používaným snímačům. Jejich činnost spočívá v měření relativního přetvoření deformačního prvku – tenzometru, které převádí na výstupní, nejčastěji napěťový elektrický signál. Tenzometry jsou polovodičové nebo kovové prvky, které při deformaci mění svůj elektrický odpor. Umístění tenzometru bývá nejčastěji přímo na deformační člen snímače do místa jeho největší relativní deformace. Pro měření tlaku jsou využity tenzometry všech typů. Můžeme je rozdělit na dvě skupiny [1]:

- Polovodičové tenzometry – difundované do křemíkových membrán, monokrystalické
- Kovové tenzometry – fóliové, lepené, naprášené

Všechny z uvedených typů tenzometru jsou využívány ve spojení s několika rozdílnými typy deformačních členů. Mezi nejčastější typy deformačních členů patří kruhová membrána, trubice, vetknutý nosník nebo i vzpěrný nosník [1].

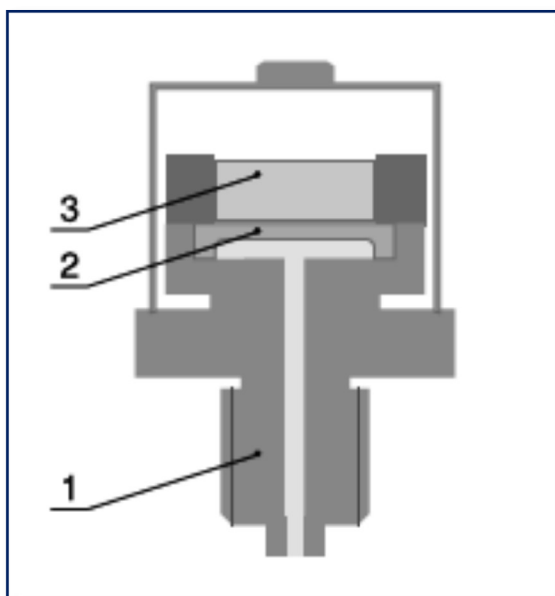


Obrázek 1.2 – Typy tenzometru [3]

#### 1.2.4 Kapacitní snímače

Kapacitní snímače jsou senzory, při kterých se měří celková změna deformačního členu. Měřicím prvkem je membrána, která zároveň slouží jako pohyblivá deska kondenzátoru. Membrána je pevně uložena v základním tělese. Pevná deska kondenzátoru bývá vyráběna ze skla. K ní jsou připevněny dvě kovové elektrody. Vnitřní elektroda se skoro nedeformuje a je použita ke kompenzaci teplotních vlivů. S membránou tvoří kompenzační kondenzátor. Měřený tlak působí na membránu, která se jeho působením prohýbá, čímž se mění vzdálenost mezi elektrodami kondenzátoru a tím i jeho kapacita. Pro měření nízkých tlaků je používána tenká membrána nebo vlnovec. Pro měření středních tlaků je používána tuhá membrána nebo trubicové deformační členy. [1]

Diferenční kapacitní snímače se zejména používají pro měření rychlosti průtoku, hustoty, výšky hladiny, hustoty atd. Díky tomu, že je jejich pružný člen velmi dobře chráněn vůči přetížení, mají tyto snímače velkou rozlišovací schopnost. Měřicí rozsah se pohybuje od 70 Pa do 350 kPa s celkovou chybou do 0,1% a nízkou teplotní závislostí, která se pohybuje okolo 0,01% [1].



1 - Základní těleso,  
2 - Membrána,  
3 - Pevná deska kondenzátoru

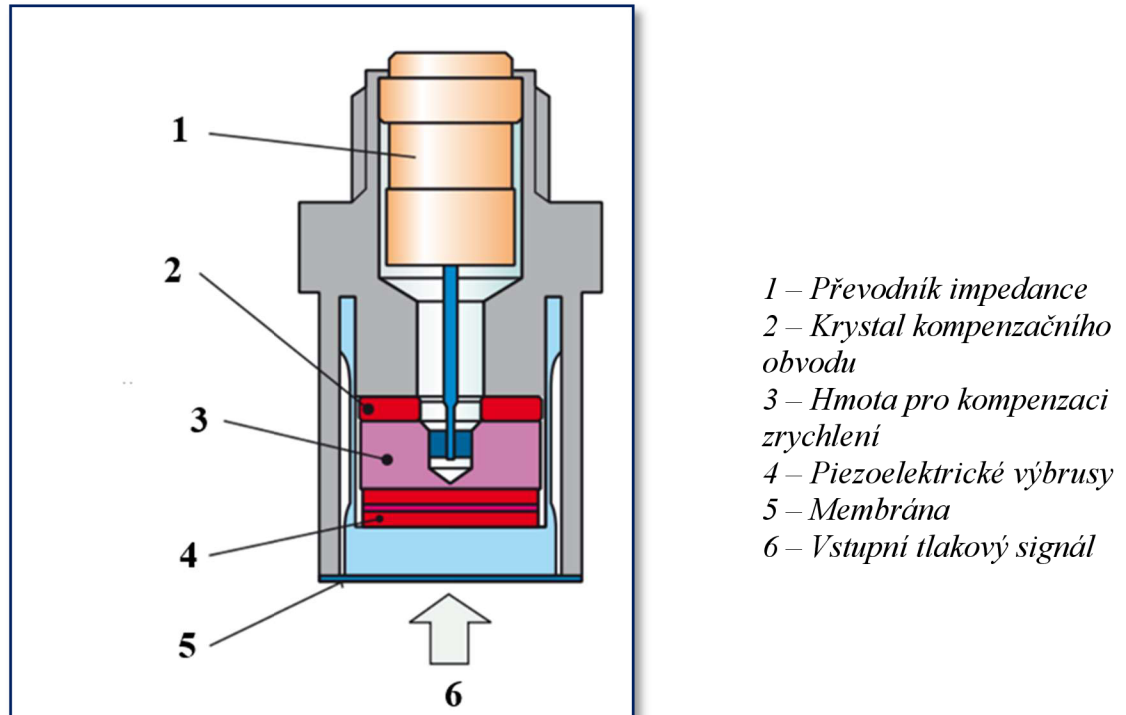
Obrázek 1.3 – Kapacitní snímač tlaku, převzato z [1]

#### 1.2.5 Piezoelektrické snímače

Tyto typy snímačů využívají piezoelektrického jevu, kdy v krystalech křemíku nebo turmalínu vzniká působením mechanického namáhání elektrická polarizace, která na vhodně umístěných elektrodách může vytvořit elektrický náboj. Měřený tlak je přiváděn přes oddělovací membránu na citlivý prvek snímače – piezoelektrický krystal.

Díky vysoké vlastní frekvenci, která dosahuje až 400 kHz, jsou piezoelektrické snímače velmi vhodné pro měření rychle se měnících tlaků. Měřicí rozsah dosahuje hodnot až 100 MPa. Nevýhodou snímačů je vysoká citlivost na okolní vibrace a také nevhodnost pro měření statického tlaku. [1]

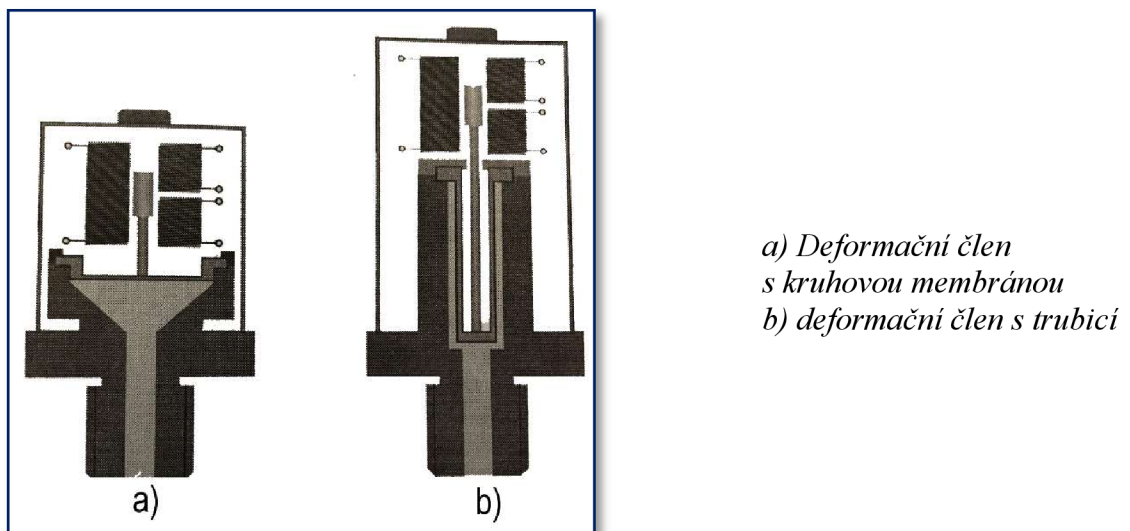




Obrázek 1.4 – Piezoelektrický snímač, převzato z [2]

### 1.2.6 Indukční snímače

Tyto přístroje sledují celkovou deformaci deformačního členu. Deformace je nejčastěji přenesena na jádro cívky. Vychýlením polohy jádra vůči cívce dochází ke změně magnetických vlastností snímače, což má dopad na výstupní elektrický signál. Deformačním členem bývá kruhová membrána, případně pro měření vysokých přetlaků je využita tenkostěnná trubice s připojenou tyčí, u kterých je měřen rozdíl prodloužení trubice a tyče. [1]



Obrázek 1.5 – Schéma indukčních snímačů, převzato z [1]

## 2 Dynamické vlastnosti měřících přístrojů

Měřící přístroje jsou setrvačné. Tato setrvačnost určuje jejich chování, pokud se vstupní měřená veličina mění s časem. V tom případě nemusí výstupní veličina měření odpovídat veličině vstupní, a to z důvodu nevhodných dynamických vlastností snímače. Rozdíl mezi výstupní hodnotou měřidla a vstupní hodnotou měřené veličiny se označuje jako dynamická chyba. [1]

Dynamické charakteristiky přístrojů lze rozdělit do dvou skupin [1]:

- Úplné dynamické charakteristiky – Popisují matematický model setrvačných vlastností snímače. Tento popis lze být vyjádřen graficky, algebraicky atd.
- Částečné dynamické charakteristiky – Jsou to funkce nebo parametry úplných dynamických charakteristik

Tyto charakteristiky zahrnují několik klíčových parametrů, které určují, jak rychle a přesně snímač reaguje na změny měřené veličiny. Následuje popis těchto hlavních parametrů a charakteristik:

### Časová konstanta ( $\tau$ )

Časová konstanta je měřítkem rychlosti reakce snímače na změnu vstupní veličiny. Je definována jako doba, za kterou výstupní signál dosáhne přibližně 63,2 % své konečné hodnoty po skokové změně vstupní veličiny. Čím menší je časová konstanta, tím rychleji snímač reaguje [1].

### Přechodová charakteristika

Přechodová charakteristika popisuje odezvu snímače na skokovou změnu vstupní veličiny. Typicky se zobrazuje jako graf výstupního signálu v závislosti na čase po aplikaci skokové změny vstupní veličiny. Může se jednat o [1]:

- Prvního řádu: Výstup exponenciálně roste nebo klesá k nové hodnotě bez překmitu.
- Vyšších řádů: Odezva může mít oscilace nebo překmity před dosažením nové stabilní hodnoty.

### Frekvenční charakteristika

Frekvenční charakteristika udává, jak snímač reaguje na sinusové změny vstupní veličiny různých frekvencí. Obvykle se vyjadřuje jako amplitudová a fázová charakteristika [1]:

- Amplitudová charakteristika: Závislost amplitudy výstupního signálu na frekvenci vstupního signálu.
- Fázová charakteristika: Závislost fázového posunu výstupního signálu na frekvenci vstupního signálu.

## Šířka pásma

Šířka pásma je frekvenční rozsah, ve kterém snímač dokáže přesně sledovat změny vstupní veličiny. Typicky je definována jako frekvenční rozsah, ve kterém amplituda výstupního signálu neklesne pod určitou hranici (obvykle -3 dB) ve srovnání s amplitudou při nízkých frekvencích [1].

## Zpoždění

Zpoždění je doba, která uplyne mezi změnou vstupní veličiny a odpovídající změnou výstupního signálu snímače. Může se jednat o [1]:

- Čisté zpoždění: Konstantní doba zpoždění, která je přítomna nezávisle na frekvenci vstupního signálu.
- Fázové zpoždění: Závislé na frekvenci vstupního signálu a měřené jako fázový posun v sinusové odezvě.

## Lineární a nelineární chování

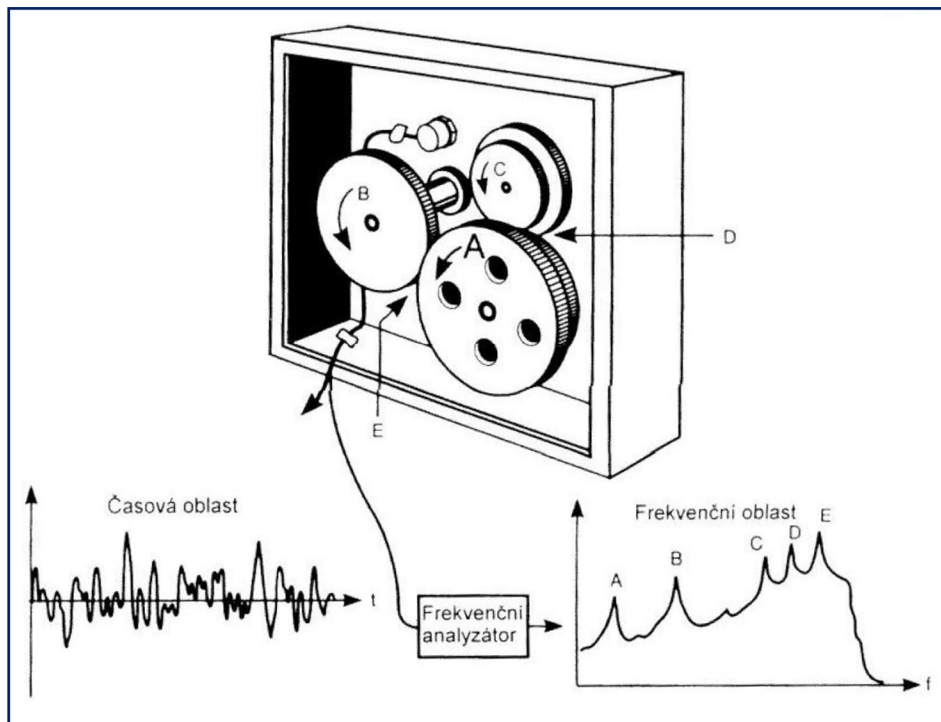
Lineární chování znamená, že výstupní signál je přímo úměrný vstupnímu signálu. Nelineární chování může zahrnovat různé druhy zkreslení, kdy výstupní signál není přímo úměrný vstupnímu signálu, což může vést k chybám v měření dynamických veličin [1].

## Senzitivita

Senzitivita (citlivost) je měřítkem schopnosti snímače detekovat malé změny vstupní veličiny. Vyjadřuje se jako poměr změny výstupního signálu ke změně vstupního signálu [1].

## 2.1 Analýza signálu [5]

Kompletní frekvenční analýza zahrnuje jak amplitudové, tak fázové spektrum. Fázové spektrum slouží k analýze fázových vztahů mezi jednotlivými složkami amplitudového spektra a je zvláště důležité pro identifikaci typu nevyváženosti a pro metody vyvažování. Frekvenční spektrum poskytuje základ pro rozlišení závad na rotujících strojích, jako jsou nevyváženosti ozubených kol, ložisek a dalších součástí. Průběžné sledování, zobrazení rozběhu a doběhu strojů a analýza trendů postupného zhoršování technického stavu lze provádět pomocí přehledných grafů. Příklad frekvenční analýzy harmonického průběhu je znázorněn na obrázku (2.1) [5].



Obrázek 2.1 Zpracování signálu, převzato z [6]

## Fourierova transformace [5]

Základem frekvenční analýzy pro periodické signály definované vztahem

$$x(t) = x(t + n \cdot T) \quad (2.1)$$

kde  $n$  je celé číslo  
 $T$  je perioda

Fourierův poznatek, že funkci  $x(t)$  je možné popsat pomocí nekonečné řady harmonických složek, pro kterou platí [5]:

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_k e^{j2\pi f_k t} + c_{-k} e^{-j2\pi f_k t}] \quad (2.2)$$

Kde:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_k t} dt \quad (2.3)$$

$c_{-k} = c_k^*$  jsou komplexně sdružené koeficienty  
 $f_k = k f_1$  kde  $f_1$  je frekvence základní harmonické složky  
 $k$  je násobek základní harmonické

### Fourierova transformace neperiodických signálů

Neperiodické signály, pro které platí, že  $x(t) \neq x(t + nT)$ , je možní analyzovat pomocí Fourierovy transformace. Definujeme neperiodický signál jako konečný signál, který existuje pouze v daném časovém intervalu a mimo tento interval má nulovou hodnotu. Pokud tento signál periodicky opakujeme s periodou  $T$ , která je větší než zvolený časový interval, budou platit vztahy uvedené ve vzorcích. Když se  $T$  blíží nekonečnu, amplitudy složek spektra se blíží nule, vzdálenost mezi nimi také klesá k nule a počet spektrálních čar směřuje k nekonečnu. Čárové spektrum se tak stává spojitým spektrem [5].

$$k \cdot f \rightarrow f \quad (2.4)$$

$$T \cdot c_k \rightarrow F(jf) \quad (2.5)$$

Kde:

$$F(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (2.6)$$

Vzorec udává přímou Fourierovu transformaci. Pro zpětnou (inverzní) Fourierovu transformaci pak platí podobný vztah [5]:

$$x(t) = F^{-1}\{F(jf)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(jf) e^{j2\pi f t} df \quad (2.7)$$

## Fourierova transformace periodického signálu

Spektrum periodického signálu teoreticky neexistuje, protože nesplňuje matematické podmínky pro existenci Fourierova integrálu. Fourierova transformace je tedy prakticky použitelná jako hraniční případ signálu definovaného v intervalu  $-T/2$  až  $T/2$ , když  $T$  směřuje k nekonečnu, což vede k tomu, že Fourierova transformace se změní na Diracovy impulsy. Pro spektrum jednotkového rotačního fázoru platí následující [5]:

$$x(t) = e^{j2\pi f_1 t} \leftrightarrow F\{x(t)\} = \delta(f - f_1) \quad (2.8)$$

kde  $\delta(f - f_1)$  je Diracův impuls ve frekvenční oblasti posunutý o  $f_1$  od počátku kmitočtové stupnice  $f = 0$

Pro periodický signál platí vztah, jehož transformací dostaneme

$$F\{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot \delta(f - f_k) \quad (2.9)$$

Spektrum periodického signálu se tedy skládá z Diracových impulsů  $\delta$  na kmitočtech harmonických složek. Pro Diracův spektrální impuls platí:

$$F^{-1}\{\delta(f)\} = 1 \quad (2.10)$$

## Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Signál  $x(t)$  je získán měřením, a protože jeho matematický popis není znám, je třeba použít numerické metody. Při digitálním zpracování signálu dochází prostřednictvím analogově-číslíkového převodníku ke vzorkování signálu v časové oblasti, obvykle v pravidelných intervalech  $T_{vz}$  (při vzorkovací frekvenci  $f_{vz}$ ). V praxi máme vždy jen omezený počet  $N$  naměřených vzorků, proto je nutné použít diskretní Fourierovu transformaci (DFT). DFT spočívá v rozkladu měřeného signálu v časovém intervalu  $(-T/2, T/2)$  na sadu periodických funkcí s periodou  $T$ . Signál  $x(t)$  může být podle vztahů (2.2) a (2.3) vyjádřen jako Fourierova řada [5].

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi j k \frac{t}{T}} \quad (2.11)$$

Kde pro  $c_k$  platí:

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-2\pi j \frac{t}{T}} dt \quad (2.12)$$

Pokud bychom vyjádřili vstupní funkci pomocí Diracových impulzů:

$$\hat{x} = \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_n) dt \quad (2.13)$$

A pro námi zvolené  $T=N \cdot T_{vz}$  získáme přepis pro  $c_k$  :

$$c_k = \frac{1}{NT_{vz}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_n) dt \right] dt \quad (2.14)$$

Spektrum signálu  $x(t_n)$  získaného vzorkováním je tvořeno Diracovými impulzy  $\delta(2\pi f k)$ , které odpovídají kmitočtům harmonických složek.

Konečný tvar pro Fourierovu transformaci diskrétního signálu lze přepsat ve tvaru:

$$c_k \cong \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) e^{-2\pi j k \frac{n}{N}} \cong \frac{1}{N} F(jf_k) \quad (2.15)$$

### Rychlá Fourierova transformace (FFT)

Provedení DFT vyžaduje, aby se vzorky signálu pro dané „k“ násobily hodnotami exponenciály, což znamená provést k-1 násobení a N-1 sčítání. Tyto operace se provádějí pro každé „k“, což vyžaduje  $(N-1)^2$  komplexních násobení a  $N \cdot (N-1)$  sčítání. Myšlenka FFT spočívá v rozdělení sekvence vzorků na dvě části a určení DFT pro každou část zvlášť. Tento algoritmus potřebuje celkem pouze  $N^2/2$  násobení. Nejčastěji se používá metoda, kdy je počet vzorků N definován jako  $N = 2^n$ , kde n je celé číslo [5].

### Základní parametry FFT [5]

- Frekvenční rozsah je základní pásmo od 0 Hz do  $f_{vz}/2$ , které není ovlivněno počtem vzorků  $N$ . V praxi je však skutečné pásmo zúženo kvůli účinkům antialiasingového filtru.
- Zoom faktor  $M$  udává, kolikrát je frekvenční rozsah zmenšen při použití frekvenční lupy.
- Počet spektrálních čar je běžně  $N/2$ , kde  $N$  představuje počet vzorků signálu. Toto však neplatí pro tzv. nedestruktivní zoom.
- Pořadové číslo spektrální čáry odpovídá indexu časového vzorku..
- Rozlišitelnost frekvenční analýzy určuje interval, tedy vzdálenost mezi spektrálními čarami. Tento interval je definován následujícími vztahy:

$$r = \frac{1}{T} = \frac{1}{N \cdot T_{vz}} = \frac{f_{vz}}{N} \quad (2.16)$$

### Podmínka koherence [5]

Podmínky koherence představují soubor požadavků, které musí být splněny, aby dvě nebo více vln vykazovaly konstruktivní interferenci. Konstruktivní interferenci nastává, když se amplitudy vln sčítají, což vede k posílené vlně. Naopak, při destruktivní interferenci se amplitudy vzájemně ruší, což má za následek oslabení vlny. Koherence můžeme rozdělit do dvou hlavních typů: prostorové a časové koherence.

**Prostorová koherence:** Prostorová koherence se vztahuje k míře, jakou jsou vlny v prostoru korelovány. Aby dvě vlny vykazovaly konstruktivní interferenci, musí mít stálý fázový vztah tam, kde se vzájemně překrývají. To znamená, že je nutné, aby měly podobné frekvence, vlnoplochy byly paralelní a měly úzká pásma.

**Časová koherence:** Časová koherence se týká stupně, do kterého jsou vlny v čase korelovány. Aby dvě vlny konstruktivně interferovaly, musí mít v čase konstantní fázový vztah. To vyžaduje, aby vlny měly úzkou spektrální šířku pásma a dlouhou koherenční délku.

$$N \cdot T_{vz} = k \cdot T_{sig} \quad (2.17)$$

- $N$  – počet vzorků signálu
- $T_{vz}$  – vzorkovací perioda
- $T_{sig}$  - Perioda měřeného signálu
- $k$  – Libovolné kladné celé číslo

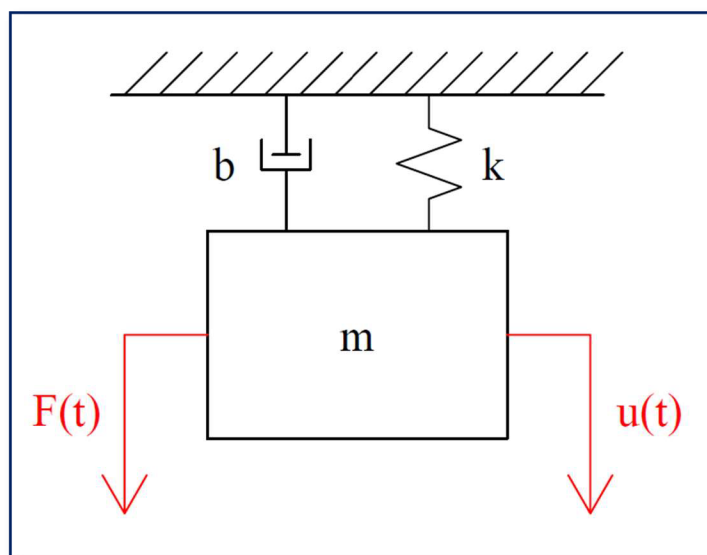
Pokud není počet vzorků vhodně zvolen, tedy není kladným celým číslem, může dojít k deformaci signálu, protože dochází k úniku energie z jednoho frekvenčního intervalu do druhého.



### 3 Model přenosu

#### 3.1 Jedno-hmotový systém

Tlakový snímač lze považovat za dynamickou soustavu, pro kterou je možné vytvořit matematický model pomocí lineárních diferenciálních funkcí.



$m$  – Hmotnost  
 $k$  – Tuhost  
 $b$  – Tlumení  
 $u(t)$  – Posuv  
 $F(t)$  – Budící síla

Obrázek 3.1 – Jednohmotový systém

$$m\ddot{u}(t) + b\dot{u}(t) + ku(t) = F(t) \quad (3.1)$$

Zavedením harmonické budící funkce ve tvaru:

$$F(t) = F_0 \sin(\omega t) \quad (3.2)$$

Amplitudová charakteristika

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \quad (3.3)$$

Fázová charakteristika, kde  $\varphi$  představuje fázové zpoždění, výchylka za budící silou.

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(\frac{b\omega}{k - m\omega^2}\right) \quad (3.4)$$

Poměrný útlum

$$\xi = \frac{b}{2\sqrt{mk}} \quad (3.5)$$

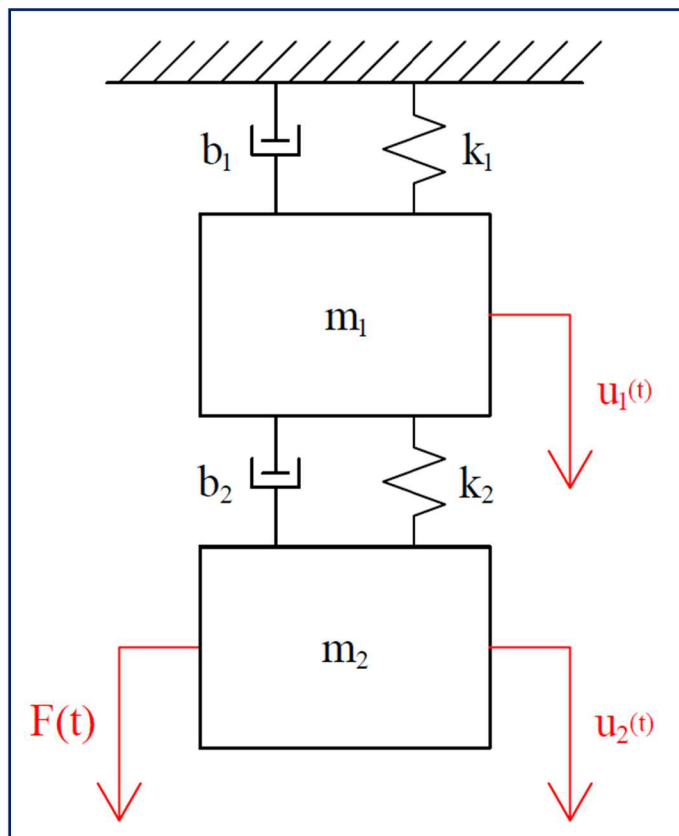
Převodová konstanta

$$K = \frac{1}{k} \quad (3.6)$$

Vlastní úhlová frekvence

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.7)$$

### 3.2 Dvou-hmotový systém



$m_1$  – Hmotnost hmoty 1  
 $k_1$  – Tuhost hmoty 1  
 $b_1$  – Tlumení hmoty 1  
 $u_1(t)$  – Posuv hmoty 1

$m_2$  – Hmotnost hmoty 2  
 $k_2$  – Tuhost hmoty 2  
 $b_2$  – Tlumení hmoty 2  
 $u_2(t)$  – Posuv hmoty 2

$F(t)$  – Budící síla

Obrázek 3.2 – Dvouhmotový systém

Pohybové rovnice pro kmitající systém se dvěma stupni volnosti:

$$m_1 \ddot{u}_1 + b_1 \dot{u}_1 - b_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1) = 0 \quad (3.8)$$

$$m_2 \ddot{u}_2 + b_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2(u_2 - u_1) = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.9)$$

Buzení je vytvořeno silou s jednotkovou velikostí amplitudy na druhé hmotě. Po provedení Laplaceovy transformace lze zapsat rovnice do maticového tvaru:

$$s^2 \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 + b_2 & -b_1 \\ -b_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_0}{s - i\omega} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Po úpravě roznásobením matic:

$$\begin{pmatrix} s^2 m_1 + s(b_1 + b_2) + k_1 + k_2 & -sb_2 - k_2 \\ -sb_2 - k_2 & s^2 m_2 + sb_2 + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_0}{s - i\omega} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Zavedením matice A:

$$A = \begin{pmatrix} s^2 m_1 + s(b_1 + b_2) + k_1 + k_2 & -sb_2 - k_2 \\ -sb_2 - k_2 & s^2 m_2 + sb_2 + k_2 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Konečná podoba matematického modelu pro kmitání systému s dvěma stupni volnosti:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det|A|} \begin{pmatrix} s^2 m_2 + sb_2 + k_2 & sb_2 + k_2 \\ sb_2 + k_2 & s^2 m_1 + s(b_1 + b_2) + k_1 + k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_0}{s - i\omega} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

### 3.3 Model pružné trubice

Odvození vztahů vychází ve velké míře z [7] a [8] a vychází ze základních rovnic popisující pohyb tekutiny. To je zákon zachování hmotnosti (rovnice kontinuity) a zákon zachování hybnosti (Navier-Stokesova rovnice).

#### 3.3.1 Zákon zachování hmotnosti

Pro prvek o objemu  $\Delta V$  lze psát rovnici kontinuity v podobě:

$$\Delta m = konst. \quad (3.14)$$

$$\Delta m = \rho \Delta V \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dt}(\Delta m) = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho \Delta V) = 0 \quad (3.17)$$

Derivací součinu získáme:

$$\Delta V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d(\Delta V)}{dt} = 0 \quad (3.18)$$

Integrací přes kontrolní objem dostaneme vztah:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V(t)} dV = \frac{d}{dt} \Delta V(t) = \int_{\Delta V(t)} \operatorname{div}(v) dV \quad (3.19)$$

Po použití Gauss-Ostrogradského věty získáme:

$$\int_{\Delta V(t)} \operatorname{div}(v) dV = \int_S v_i n_i dS = Q \quad (3.20)$$

Složením předešlých vztahů na rovnici (3.18) získáme:

$$\Delta V \frac{d\rho}{dt} + \rho \int_S v_i n_i dS = 0 \quad (3.21)$$

Plocha  $S$  je složená z průtočných ploch  $S_1$ ,  $S_2$  a povrchu pláště  $P$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup P \quad (3.22)$$

S přihlédnutím orientace složek normálového vektoru  $n_i$  a vektoru rychlosti proudění  $v_i$  lze vyjádřit:

$$\begin{aligned} \int_S v_i n_i dS &= - \int_{S_1} v_i n_i dA_1 + \int_{S_2} v_i n_i dA_2 + \int_{\Gamma} v_i n_i d\Gamma = \\ &= Q_2 - Q_1 + \int_{\Gamma} v_i n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (3.23)$$

S úvahou

$$\Delta V = S(x, t) dx \quad (3.24)$$

A pro velice malou změnu polohy  $dx$ :

$$Q_2 = Q_1 + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \quad (3.25)$$

Lze napsat předešlý vztah ve tvaru:

$$Q_2 - Q_1 = \frac{\partial Q}{\partial x} dx \quad (3.26)$$

S použitím vztahu pro lokální rovnováhu mezi hustotou a tlakem lze popsat změnu hustoty v čase pomocí vztahu:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{dp}{dt} \quad (3.27)$$

Pokud bychom dosadili předchozí vztahy do rovnice (1.6), získáme přepis zákona zachování hmotnosti:

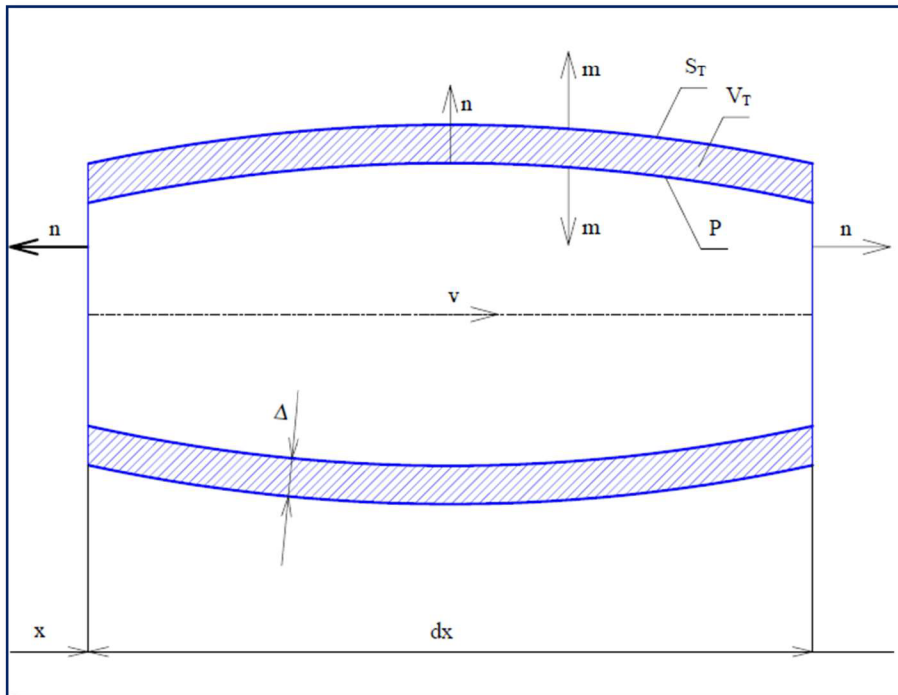
$$\frac{1}{a^2} \frac{dp}{dt} S(x, t) dx + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \rho \int_{\Gamma} v_i n_i d\Gamma = 0 \quad (3.28)$$

Po úpravě:

$$\frac{1}{a^2} \frac{dp}{dt} S(x, t) + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\int_{\Gamma} v_i n_i d\Gamma}{dx} = 0 \quad (3.29)$$

Poslední člen předešlé rovnice souvisí s deformací trubice. Pokud bychom uvažovali absolutně tuhé těleso, pak by na povrchu trubice platilo  $v_i = 0$ . Jelikož jsou plastové trubice z poddajného materiálu, lze uvažovat, že tento člen bude výrazně ovlivňovat šíření tlakových pulzací.

### 3.3.2 Vliv tekutiny na poddajnou trubici



Obrázek 3.3 – Schéma trubice, převzato z [7]

Zaváděním zjednodušení, že účinky setrvačných sil jsou v porovnání s elastickými zanedbatelné. Dalším předpokladem je, že napětí v trubici způsobuje pouze tlak lze psát:

$$\frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \forall x_j \in V_T \quad (3.30)$$

Vazbové podmínky na povrchu  $\Gamma$ :

$$\Sigma_{ij} m_j = \sigma_{ij} m_j \quad \forall x_j \in \Gamma \quad (3.31)$$

Na vnitřním povrchu  $\Gamma$  také platí, že rychlost média a rychlost trubice jsou stejné:

$$v_i = c_i \quad \forall x_j \in \Gamma \quad (3.32)$$

Při zanedbání účinků smykových napětí od média na deformaci trubice můžeme psát vztah:

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (3.33)$$

S předpokladem, že  $m_i = -n_i$  získáme vztah:

$$\sigma_{ij} m_j = -p \delta_{ij} m_j = -p m_i = p n_i \quad (3.34)$$

Pokud výraz vynásobíme vektorem rychlosti a integrujeme přes objem trubice, získáme:

$$\int_{V_T} \frac{\partial \Sigma_{ij}}{\partial x_j} c_i dV = 0 \quad (3.35)$$

Úpravou pomocí Gauss-Ostrogradského věty:

$$\int_{\Gamma} \Sigma_{ij} m_i c_i d\Gamma - \int_{V_T} \Sigma_{ij} \frac{\partial c_i}{\partial x_j} dV = 0 \quad (3.36)$$

Dosazením vztahů (3.31, 3.32 a 3.34) do (3.36) získáme:

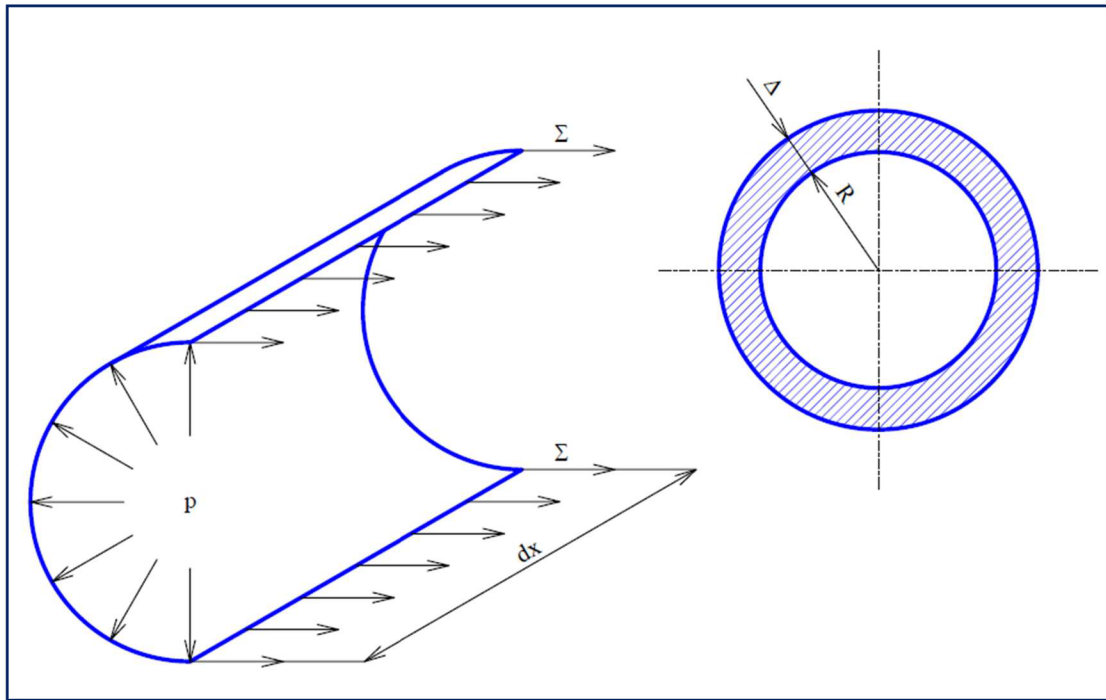
$$p \int_{\Gamma} v n d\Gamma - \int_{V_T} \Sigma_{ij} c_{ij} dV = 0 \quad (3.37)$$

Přičemž tenzor rychlosti deformace  $c_{ij}$  lze vyjádřit pomocí vztahu:

$$c_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial c_j}{\partial x_i} + \frac{\partial c_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.38)$$

Tenzor rychlosti deformace uvažujeme označení  $c_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}$ . Po dosazení získáme vztah:

$$p \int_{\Gamma} v_i n_i d\Gamma = \int_{V_T} \Sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV \quad (3.39)$$



Obrázek 3.4 – Schéma působení tlaku na trubici, převzato z [7]

Vliv tlaku na materiál trubice je znázorněn na obrázku (3.4). Vzájemné působení média a trubice lze nahradit jednoosou napjatostí. Vztah pro silovou rovnováhu může popisat:

$$2 \cdot \Sigma_{11} \cdot \Delta dx = 2 \cdot R \cdot p \cdot dx \quad (3.40)$$

Normálové napětí  $\Sigma_{11}$  je funkcí tlaku, která se dá vyjádřit:

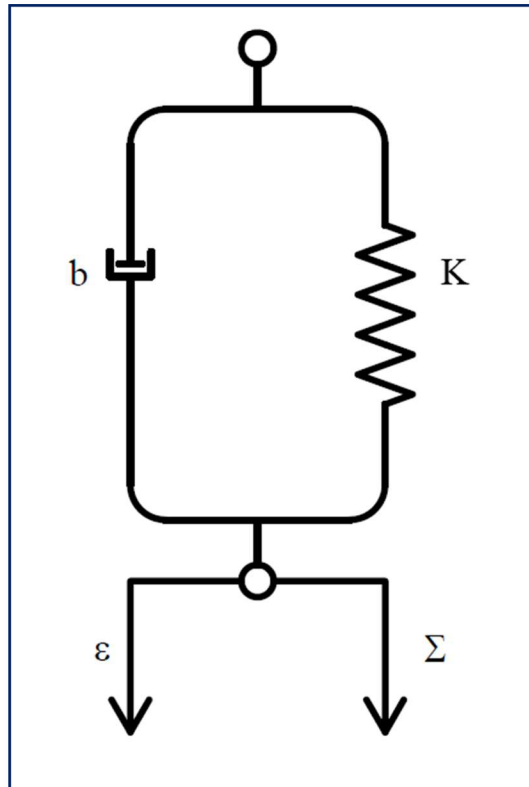
$$\Sigma_{11} = \frac{R}{\Delta} p \quad (3.41)$$

Po dosazení funkce do vztahu pro tenzor rychlosti deformace a integrací přes objem trubice získáme rovnici:

$$\int_{\Gamma} v_i n_i d\Gamma = 2\pi R^2 \dot{\varepsilon}_{11} dx \quad (3.42)$$



### 3.3.3 Kelvin-Voigtův model materiálu



Obrázek 3.5 – Schéma Kelvin-Voigtova materiálu, převzato z [8]

Dynamické vlastnosti materiálu impulzního potrubí lze popsat dvěma veličinami. První je vnitřní tlumení  $b$ , druhou je tuhost  $K$ . U plastových hadic lze očekávat, že tlumení bude mít výrazně vyšší vliv na přenos. Pro matematický model můžeme odvodit silovou rovnováhu pro jednoosou napjatost pomocí konvolučního integrálu:

$$\varepsilon_{11}^{\dot{}} = \frac{R}{\Delta b} \int_0^t e^{-\frac{K}{b}(t-\tau)} p(\dot{t}) d\tau \quad (3.43)$$

### 3.3.4 Zákon zachování hmotnosti pro tekutinu v pružné trubici

Pokud bychom dosadili do rovnice (3.29) vztahy (3.42) a (3.43), získáme vztah:

$$\frac{1}{a^2} \frac{dp}{dt} S(x, t) + \rho \frac{\partial Q}{\partial x} + 2\pi R^2 \rho \frac{R}{\Delta} \int_0^t e^{-\frac{K}{b}(t-\tau)} p(\dot{t}) d\tau = 0 \quad (3.44)$$

Předešlý vztah lze po úpravě a dělením hustotou vyjádřit:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{\rho a^2} \frac{dp}{dt} S(x, t) - 2S \frac{R}{\Delta} \int_0^t e^{-\frac{K}{b}(t-\tau)} p(\tau) d\tau \quad (3.45)$$

S použitím Laplaceovy transformace podle času získáme:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{\rho a^2} \frac{dp}{dt} S s \sigma + \frac{2SR}{\Delta b} \frac{s}{s + \frac{K}{b}} \sigma = 0 \quad (3.46)$$

Po další úpravě lze psát finální tvar rovnice kontinuity:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \left( \frac{1}{a^2} + \frac{2\rho R}{\Delta} \frac{1}{(bs + K)} \right) \frac{\sigma S s}{\rho} = 0 \quad (3.47)$$

### 3.3.5 Zákon zachování hybnosti pro tekutinu v pružné trubici

Vycházíme z Navier-Stokesovy rovnice. Pokud bychom zanedbali vliv vnějších sil, pak můžeme psát vztah:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.48)$$

Tenzor nevratných napětí lze vyjádřit:

$$\Pi_{ij} = 2\eta v_{ij} + \zeta \delta_{ij} v_{kk} \quad (3.49)$$

Z čehož tenzor rychlosti deformace je dán vztahem:

$$v_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_j}{x_i} + \frac{v_i}{x_j} \right) \quad ; \quad v_{kk} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \quad (3.50)$$

Pokud bychom předchozí vztahy zavedli do rovnice pro tenzor nevratných napětí derivovaný podle  $x_j$ , získali bychom následující tvar:

$$\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = \eta \left( \zeta \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \quad (3.51)$$

Dosazením do Navier-Stokesovy rovnice získáme vztah:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\eta}{\rho} \left( \zeta \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} \right) \quad (3.52)$$

Po integraci přes objem trubice v jejím axiálním směru s předpokladem, že rychlost v radiálním směru je nulová dostaneme rovnici ve tvaru:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - (2\nu + \xi) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{v^2}{R^4} \int_0^t \Gamma(t - \tau) Q(\tau) d\tau + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.53)$$

Kde  $\Gamma$  vyjadřuje bezrozměrnou paměťovou funkci v konvolučním integrálu. Tato funkce popisuje ztráty způsobené nestacionárním rychlostním profilem [9]. Po dosazení do vztahu ( ) a derivaci druhého členu získáme následující tvar pohybové rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + S(2\nu + \xi) \left( \frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} + \frac{2R}{\Delta b} \int_0^t e^{-\frac{K}{b}(t-\tau)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} d\tau \right) \\ + \frac{v^2}{R^4} \int_0^t \Gamma(t - \tau) Q(\tau) d\tau + \frac{S}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

Pokud bychom předchozí vztah transformovali pomocí Laplaceova obrazu podle času, kde:

$$L(p) = \theta ; L(Q) = q ; L(\Gamma) = \Phi \quad (3.55)$$

Získáme přepis pohybové rovnice ve tvaru:

$$sq + S(2\nu + \xi) s \left[ \frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{2R}{\Delta b} \left( \frac{1}{s + \frac{K}{b}} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{v^2}{R^4} \Phi q + \frac{S}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (3.56)$$

### 3.3.6 Přenosová matice

Přenosová matice byla odvozena jako řešení soustavy rovnice zákona zachování hmotnosti (3.47) a rovnice silové rovnováhy (3.56).

Pro rychlost zvuku  $a_0$  v trubici platí vztah:

$$\frac{1}{a_0^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2\rho R}{\Delta} \frac{1}{(bs + K)} = 0 \quad (3.57)$$

Pokud tento vztah zavedeme pro rovnici kontinuity, můžeme ji přepsat ve tvaru:

$$\frac{\rho a_0^2}{S} \frac{\partial q}{\partial x} + s\theta = 0 \quad (3.58)$$

Pro pohybovou rovnici platí:

$$sq + \frac{v^2}{R^4} \Phi q + \left[ (2\nu + \xi) \frac{S \cdot s}{a_0^2 \cdot \rho} + \frac{S}{\rho} \right] \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \quad (3.59)$$

Pro tyto úpravy zavedeme proměnné:

$$A = (2\nu + \xi) \frac{S \cdot s}{a_0^2 \cdot \rho} + \frac{S}{\rho} \quad (3.60)$$

$$B = s + \frac{\nu^2}{R^4} \cdot \Phi \quad (3.61)$$

$$C = \frac{\rho a_0^2}{S} \quad (3.62)$$

Dále platí [4]:

$$\Phi(s) = \frac{R^4}{\nu^2} \cdot \frac{2 \cdot s \cdot J_1 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{S}{\nu}} \right)}{2 \cdot J_1 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) - J_0 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{S}{\nu}} \right)^2} \quad (3.63)$$

Pokud tento vztah dosadíme do rovnice pro proměnnou  $B$ , můžeme psát:

$$B = s \cdot \left( 1 + \frac{2 \cdot s \cdot J_1 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{S}{\nu}} \right)}{2 \cdot J_1 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{S}{\nu}} \right) - R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{S}{\nu}} J_0 \left( R \cdot i \cdot \sqrt{\frac{S}{\nu}} \right)} \right) \quad (3.64)$$

S využitím proměnných  $A$ ,  $B$  a  $C$  lze zjednodušit rovnici pro zákon zachování hybnosti ve tvaru:

$$A \frac{\partial \theta}{\partial x} + Bq = 0 \quad (3.65)$$

A zákon zachování hmotnosti:

$$C \frac{\partial q}{\partial x} + s\theta = 0 \quad (3.66)$$

Což můžeme zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} q \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

Po úpravách získáme tvar:

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} q \\ \theta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & \frac{s}{C} \\ \frac{B}{A} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q \\ \theta \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

Dále využijeme zavedení stavového vektoru:

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} q \\ \theta \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

A matice  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{s}{C} \\ \frac{B}{A} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

Dosazením do rovnice ( ) získáme vztah:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{h} = -\mathbf{H} \cdot \mathbf{h} \quad (3.71)$$

Přenosovou matici uvažujeme ve tvaru:

$$\mathbf{Z}(x, s) = \mathbf{L}^{-1} [(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{H})^{-1}] \quad (3.72)$$

Čímž získáme:

$$\mathbf{Z}(x, s) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \left[ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \frac{s}{C} \\ \frac{B}{A} & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} \right\} \quad (3.73)$$

Po odečtení lze psát:

$$\mathbf{Z}(x, s) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \left[ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} & -\frac{s}{C} \\ -\frac{B}{A} & \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix} \right]^{-1} \right\} \quad (3.74)$$

Dále zavedeme proměnné  $\Lambda$ :

$$\Lambda = \frac{s}{C} \quad (3.75)$$

$$\Upsilon = \frac{B}{A} \quad (3.76)$$

$$\Theta^2 = \Lambda \cdot \Upsilon = \frac{s \cdot B}{A \cdot C} \quad (3.77)$$

Pro které po dosazení do přenosové matice  $\mathbf{Z}$ , lze psát:

$$\mathbf{Z}(x, s) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2 - \Theta^2} \begin{pmatrix} \varepsilon & \Lambda \\ \Upsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \right\} \quad (3.78)$$

Po úpravě lze psát finální tvar přenosové matice:

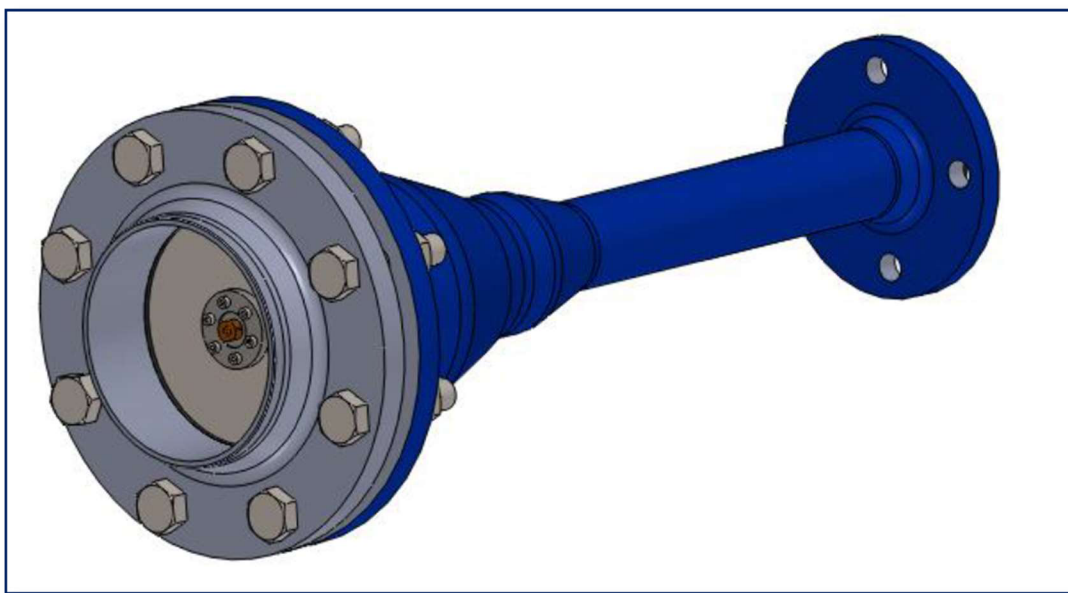
$$\mathbf{Z}(x, s) = \begin{pmatrix} \cosh(\Theta \cdot x) & -\frac{\Lambda}{\Theta} \sinh(\Theta \cdot x) \\ -\frac{\Upsilon}{\Theta} \sinh(\Theta \cdot x) & \cosh(\Theta \cdot x) \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

Čímž dostáváme vztah, který popisuje přenos průtoku a tlaku po délce trubice:

$$\begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} \cosh(\Theta \cdot x) & -\frac{\Lambda}{\Theta} \sinh(\Theta \cdot x) \\ -\frac{\Upsilon}{\Theta} \sinh(\Theta \cdot x) & \cosh(\Theta \cdot x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q \\ p \end{pmatrix}_0 \quad (3.80)$$

## 4 Přenosová komora

Pro zajištění dostatečného nárůstu amplitudy v měřící trati byla využita s přihlédnutím k vybavení hydraulické laboratoře přenosová komora ve tvaru konfuzoru. Tato komora byla změřena a byla vytvořena geometrie v programu *SolidWorks*. Tento model byl přenesen do prostředí programu *ANSYS*, kde byl proveden výpočet nárůstu amplitudy na konci vlnovodu s uvažováním dokonale tuhého potrubí pro dvě rychlosti zvuku  $a_0 = 1480 \text{ m/s}$  a  $a_0 = 1000 \text{ m/s}$ . Účelem bylo potvrdit, že na konci vlnovodu dojde k nárůstu amplitudy tlakových pulsací. Podobnou problematikou se zabýval ve své závěrečné práci [10], kde pro stanovení navýšení amplitudy bylo využito výpočtu v prostředí *Fluent*. V této práci bylo však využito prostředí *Acoustic*, které oproti *Fluentu* spotřebovalo pro výpočet méně času a pro šíření vln bylo sledováno jako naprosto dostačující. Geometrii můžete vidět na obrázku (), (převzato z [10]).



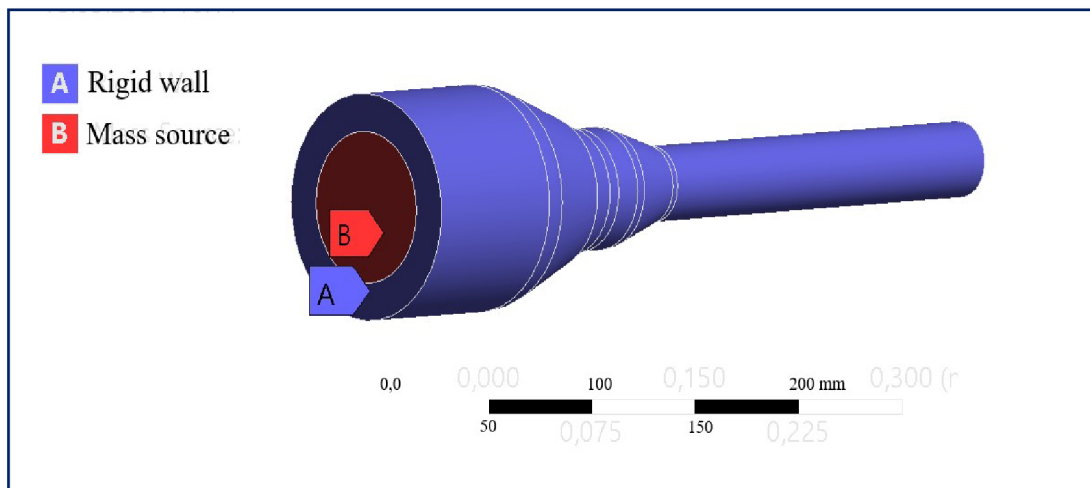
Obrázek 4.1 – Geometrie přenosové komory, převzato z [10]

### 4.1 Výpočtová síť

Výhodou prostředí *Acoustic* oproti prostředí je, že není příliš citlivé na kvalitu sítě. Tudiž pro výpočet bylo využito nekonformní síť s počtem uzlů 588 498 a počtem buněk 336 872. Hlavním cílem bylo vytvořit síť, která dostatečně zachytí akustické jevy. Dle doporučení manuálu *Ansys* byla vytvořena síť s alespoň 10 prvky na jednu vlnovou délku.

### 4.2 Nastavení výpočtu

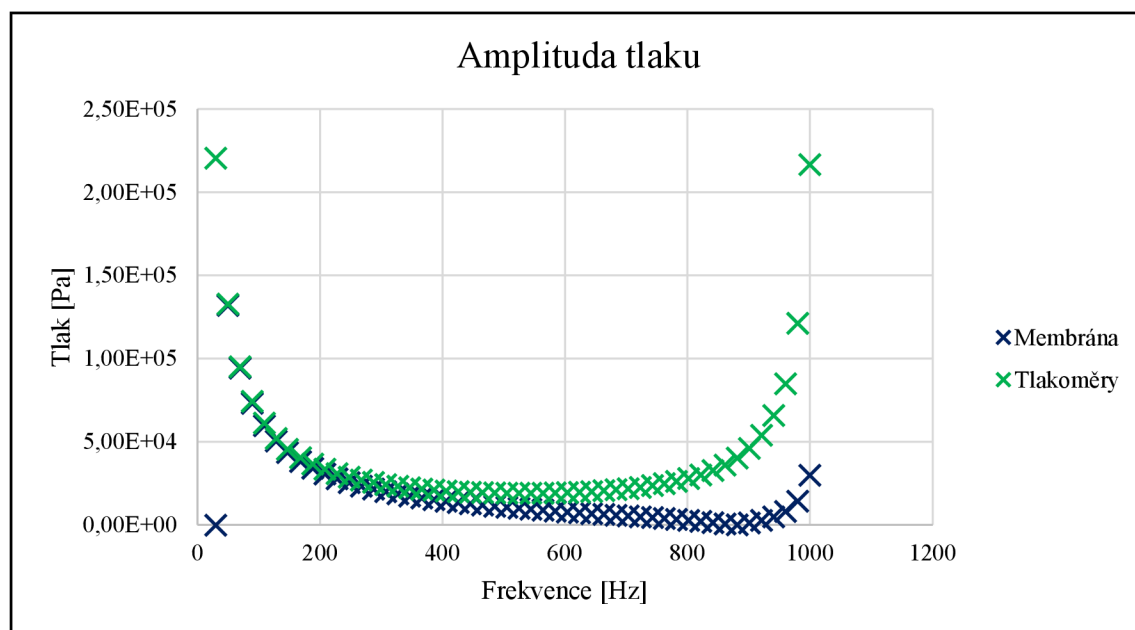
Na stěnu v místě membrány, která byla v experimentu buzena a která přenášela do komory tlakové pulzace, byla nastavena okrajová podmínka *Mass source*. Na zbylé plochy byla nastavena podmínka *Rigid body*. Na stěnu membrány a stěnu na konci vlnovodu bylo nastaveno snímání tlaku. Byla provedena harmonická analýza pro frekvence od 10 do 1000 Hz s celkem 50 vzorkovacími kroky. Jako médium byla vybrána voda, pro kterou byly provedeny dvě analýzy pro dvě velikosti rychlosti zvuku.



Obrázek 4.2 – Výpočtová doména

### 4.3 Vyhodnocení nárůstu amplitudy

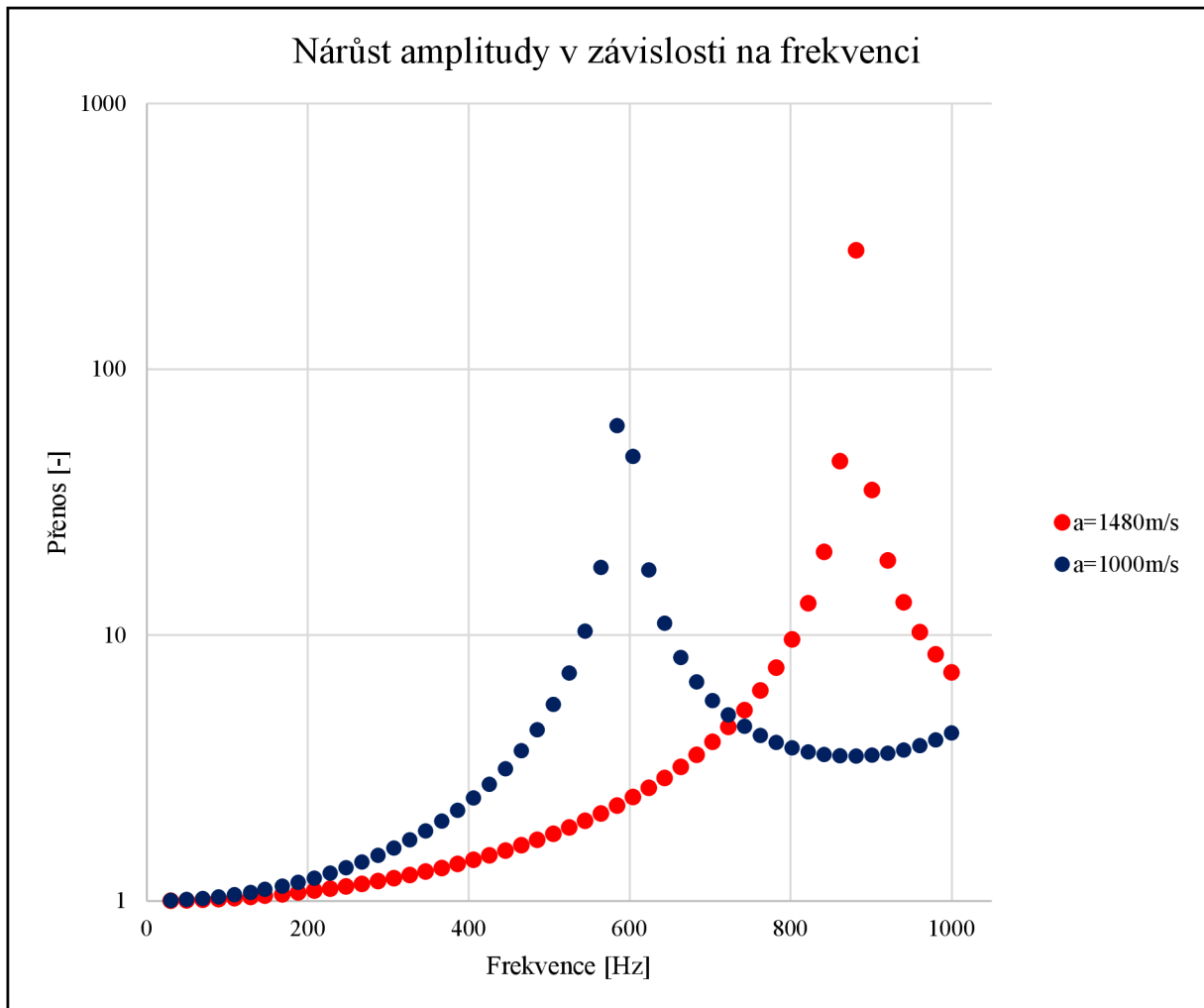
Výsledkem analýzy v prostředí ANSYS Acoustic byly data s průběhy amplitud tlaku v závislosti na frekvenci ve dvou rovinách viz graf (4.1).



Graf 4.1 – Vykreslení amplitudy tlaku v závislosti na frekvenci pro počátek a konec přenosové komory

Amplitudy tlaku byly pro obě roviny porovnány v podílu tlakoměru ku membráně. Toto porovnání můžeme vidět na grafu (4.2)





Graf 4.2 – Nárůst amplitudy tlaku

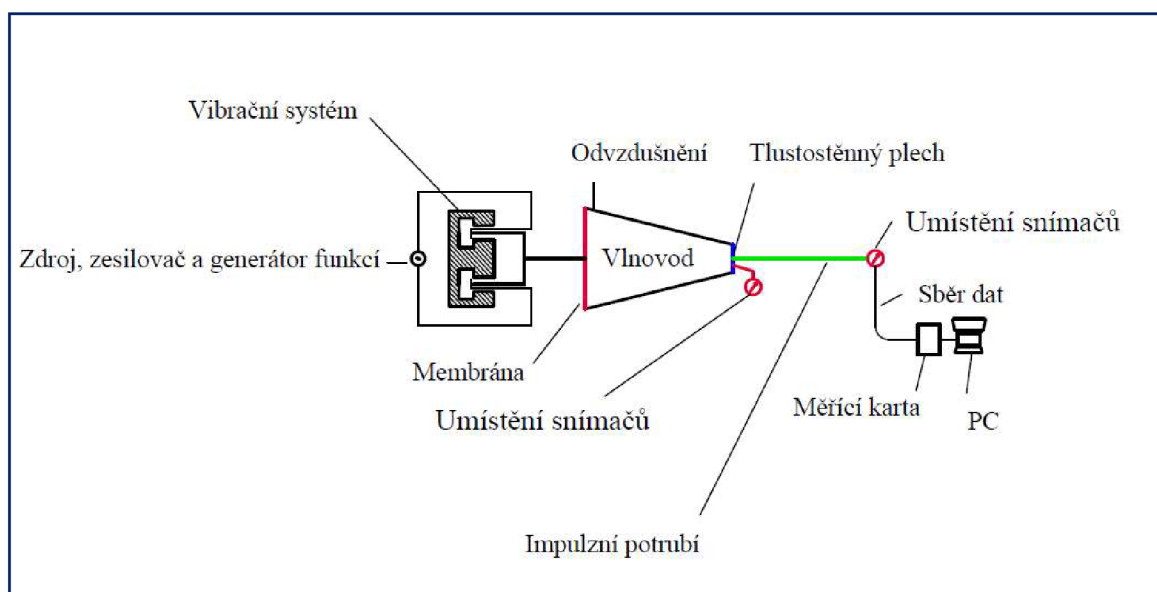
Z grafů je patrné, že výpočet potvrdil, že na konci přenosové komory dojde k požadovanému navýšení tlaku. Se zvyšující frekvencí amplituda roste, a to až do hodnoty vlastní frekvence, za kterou se nárůst začíná snižovat. Dále je patrné, že pro nižší rychlost zvuku dosáhne vlastní frekvence nižší hodnoty.

## 5 Návrh experimentu

Experimentální trať byla sestavena z příslušenství hydraulické laboratoře. Cílem bylo změřit amplitudové a fázové frekvenční charakteristiky tlakových snímačů a pružné plastové hadice, běžně používané pro přenos snímání tlaku. Trať se skládá z přenosové komory, vibračního systému, měřicí karty a stolního počítače pro sběr dat.

### 5.1 Schéma měřicí tratě

Na obrázku (5.1) je možné vidět schéma měřicí tratě s označením klíčových prvků.



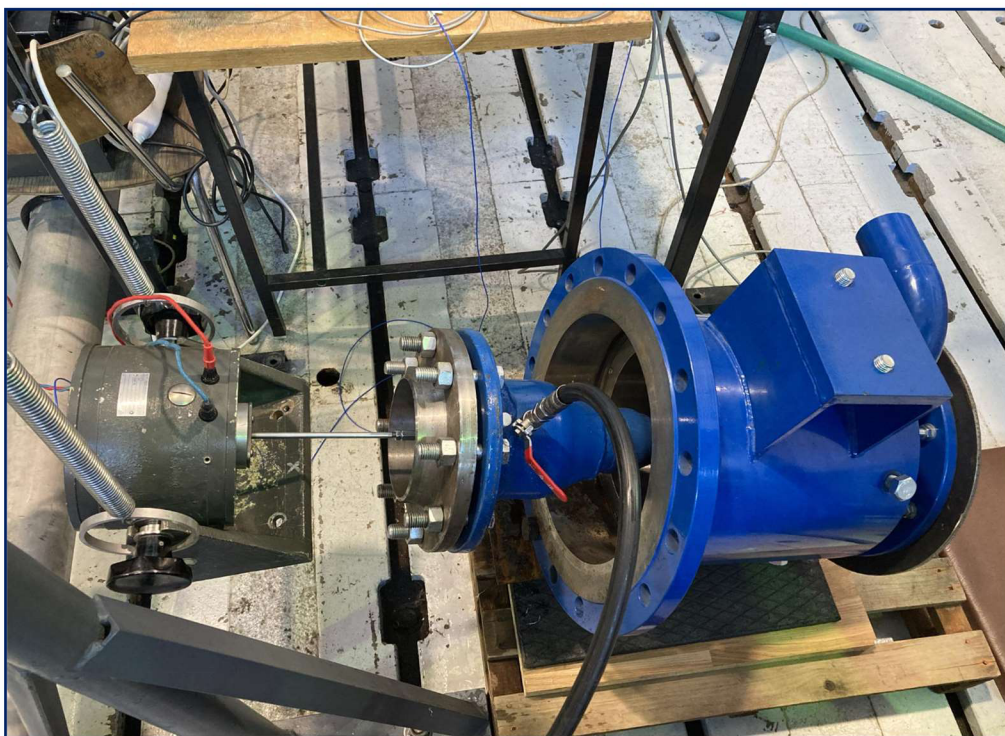
Obrázek 5.1 – Schéma měřicí tratě

### 5.2 Popis měřicí trati

Stěžejním prvkem měřicí tratě byl vibrační systém. Tento systém byl volně pověšen na jeřábu pomocí ocelových lanek s účelem, aby do měřicí tratě nevnášel rušivé dynamické vlivy. Vibrační systém byl ovládán pomocí napájecího zdroje, připojeného na výkonový zesilovač a generátor funkcí, pomocí kterých byly nastavovány velikosti amplitudy a frekvence. Pulzace byly převáděny na membránu přenosové komory přes ocelovou tyčinku připojenou na vibrační systém. Ocelová membrána ve tvaru tenkostěnného plechu byla připevněna k počátku přenosové komory pomocí příruby s gumovým těsněním. Přenosová komora byla napuštěna vodou. Statický tlak byl nastaven pomocí ručního přenosného pístového kompresoru s redukčním ventilem a vzdušníkem. Na horní část komory byl připevněn kulový ventil, který sloužil pro odvzdušnění. Konec komory byl opatřen tlustostěnným plechem, uchyceným pomocí přírub. Do tlustostěnného plechu byly přimontovány snímače tlaku. Na záznam signálu byla využita měřicí karta, připojená na stolní počítač. Celá přenosová komora byla upevněna v tlustostěnné ocelové trubici s násobně větším průměrem a váhou.



*Obrázek 5.2 – Experimentální trať v hydraulické laboratoři*



*Obrázek 5.3 – Detail vibračního systému a vlnovodu*

### 5.3 Popis snímačů

Pro ověření dynamických vlastností byly využity tyto snímače:

- Tenzometrický snímač **p<sub>1</sub>**, připojený na konec plastové hadice - DMP 331 od výrobce BD Sensors s.r.o. Uherské hradiště, měřicí rozsah 1000 kPa, přesnost  $\pm 0,25\%$ , proudový výstup 4 – 20 mA
- Tenzometrický snímač **p<sub>2</sub>**, připojený přímo na tlustostěnný plech – DMP 331 od výrobce BD Sensors s.r.o. Uherské hradiště, měřicí rozsah 1000 kPa, přesnost  $\pm 0,25\%$ , proudový výstup 4 – 20 mA
- Piezoelektrický snímač **p<sub>3</sub>** – PCB 113B28 od výrobce PCB Piezotronics, Depew, New York. Měřicí rozsah 344,7 kPa, maximální tlak 6895 kPa, linearita  $\leq 1\%$ , citlivost  $\approx 14.5$  mV/kPa, citlivost na zrychlení  $\leq 0.0014$  kPa/(m/s<sup>2</sup>), rezonanční frekvence  $\geq 500$  kHz.
- Piezoelektrický snímač **p<sub>4</sub>** – Kistler 211B4 od výrobce Kistler Eastern Europe s.r.o., Winterthur. Měřicí rozsah 1175 kPa, linearita  $\leq 1\%$ , citlivost  $\approx 3,63$  mV/kPa, citlivost na zrychlení  $\leq 0.014$  kPa/(m/s<sup>2</sup>), rezonanční frekvence  $\geq 500$  kHz.

### 5.4 Popis impulzního potrubí

Pro ověření dynamických vlastností pružné trubice bylo využito PVC potrubí s vnějším průměrem 8mm, tloušťkou stěny 1mm a délkou 90cm. Tato trubice byla jedním koncem připevněna na tlustostěnný plech přenosové komory. Druhý konec trubice byl opatřen tenzometrickým snímačem tlaku DMP 331.

### 5.5 Seznam použité techniky

Níže je popsána měřicí technika použitá pro experiment:

- Napájecí zdroj BK123 s výstupní napětí v rozsahu 0 – 20 V<sub>ss</sub> / 1A, výrobce Tesla Brno
- Vibrační systém 11 077 od výrobce VEB RFT MESSELEKTRONIK, Dresden.
- Výkonový zesilovač LV 102.1 od výrobce VEB Metra Mess und Frequenztechnik.
- Měřicí ústředna NI PXIe-1078, výrobce National Instruments, Austin. 9 kanálů, přenos do 1,75GB/s.
- Měřicí karta NI 4492, výrobce National Instruments, Austin.
- Měřicí karta NI 6356, výrobce National Instruments, Austin.
- Svorkovnice BNC-2110, výrobce National Instruments, Austin.

## 5.6 Postup experimentu

Přenosová komora byla naplněna vodou z vodovodní sítě a pomocí ruční pístové pumpy byl nastaven statický tlak. Pro ověření různých podmínek proběhlo měření pro tři hodnoty statického tlaku 9bar, 7bar a 3bar. Rozsah byl zvolen tak, aby amplituda spodního tlaku nepřesáhla hodnotu nižší, než je atmosférický tlak, čímž by vznikl v pružné hadici podtlak, který by měl výrazný vliv na měřený signál. Horní hranice tlaku byla zvolena, aby amplituda pulzace tlaku nepřesáhla rozsah použití testovaných snímačů.

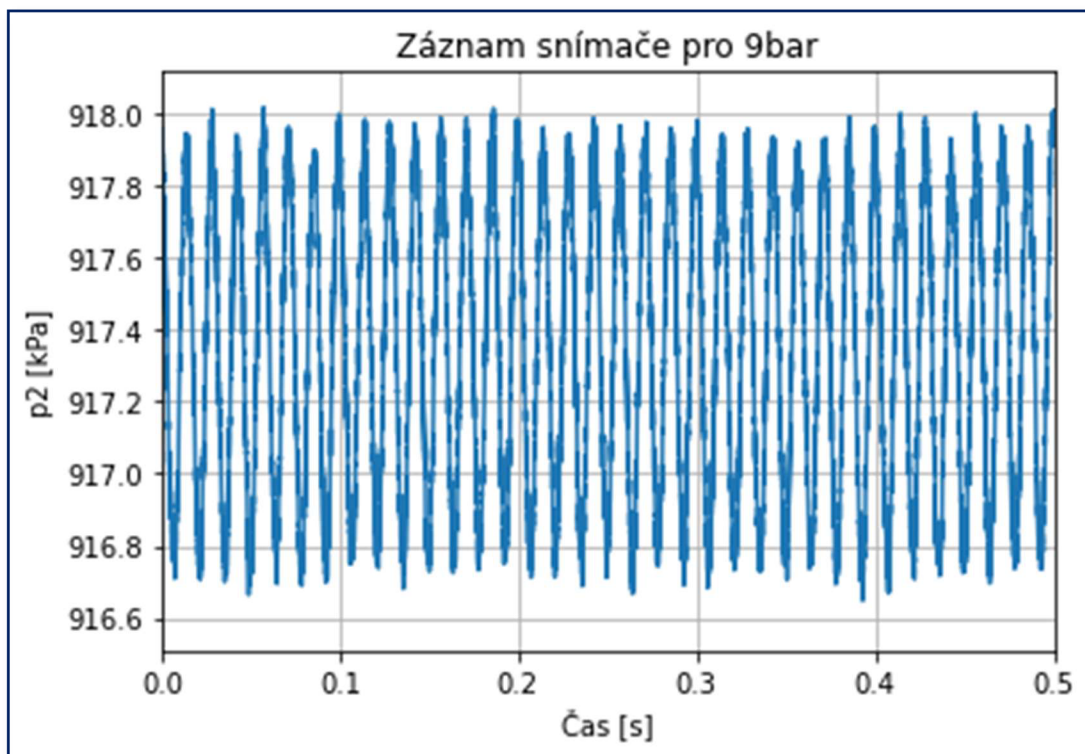
Během měření byl zaznamenáván výstupní signál pro kalibrovaný snímač  $p_1$  umístěný na konci pružné PVC hadice, dále signál kalibrovaného snímače  $p_2$  umístěný na tlustostěnném plechu na konci přenosové komory, referenční snímač  $p_3$  umístěný na tlustostěnném plechu, referenční snímač  $p_4$  umístěný taktéž na tlustostěnném plechu.

Měření proběhlo pro frekvenční pásmo od 50 do 2000 Hz, přičemž zvyšování frekvence bylo realizováno zcela autonomně pomocí programu v *LabView*. Měření jedné hodnoty frekvence trvalo 4s. Výstupní signály snímačů byly zpracovány v programu *LabView* se vzorkovací frekvencí 10 kHz.

Během měření docházelo v přenosové komoře k zanedbatelnému poklesu tlaku. To bylo zřejmě zapříčiněno nedostatečným těsněním v místě umístění pružné hadice na tlustostěnný plech.

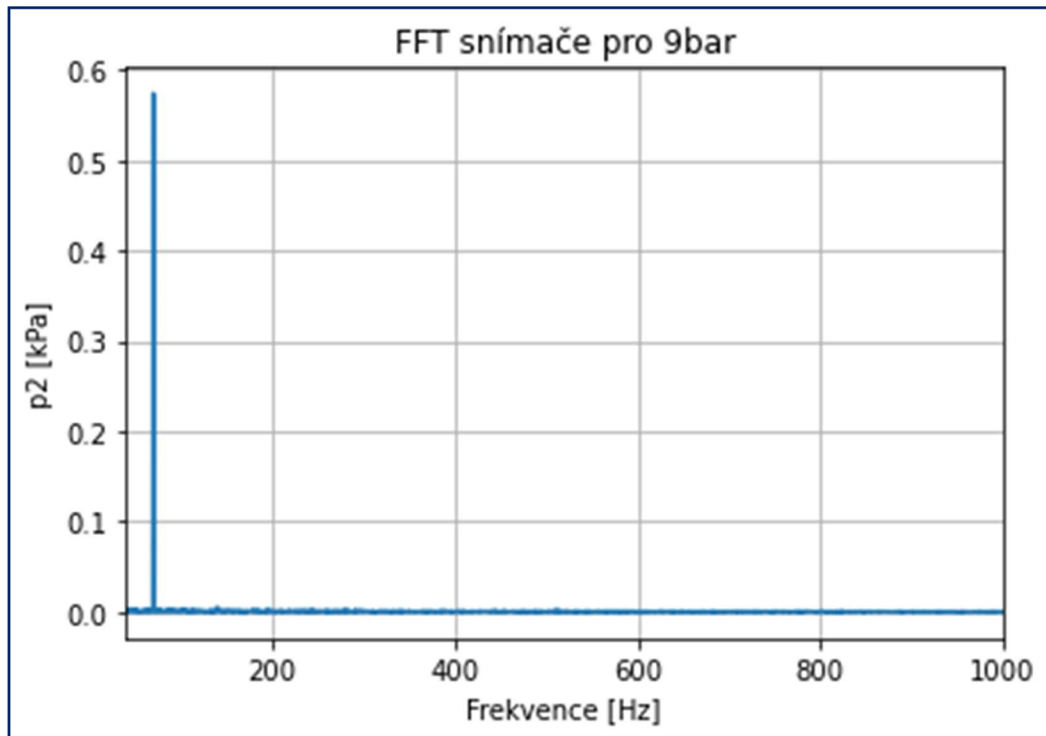
## 5.7 Hodnoty měření

Na grafu níže jsou zobrazené hodnoty signálu pro statický tlak 9 baru a budicí frekvenci 70 Hz.

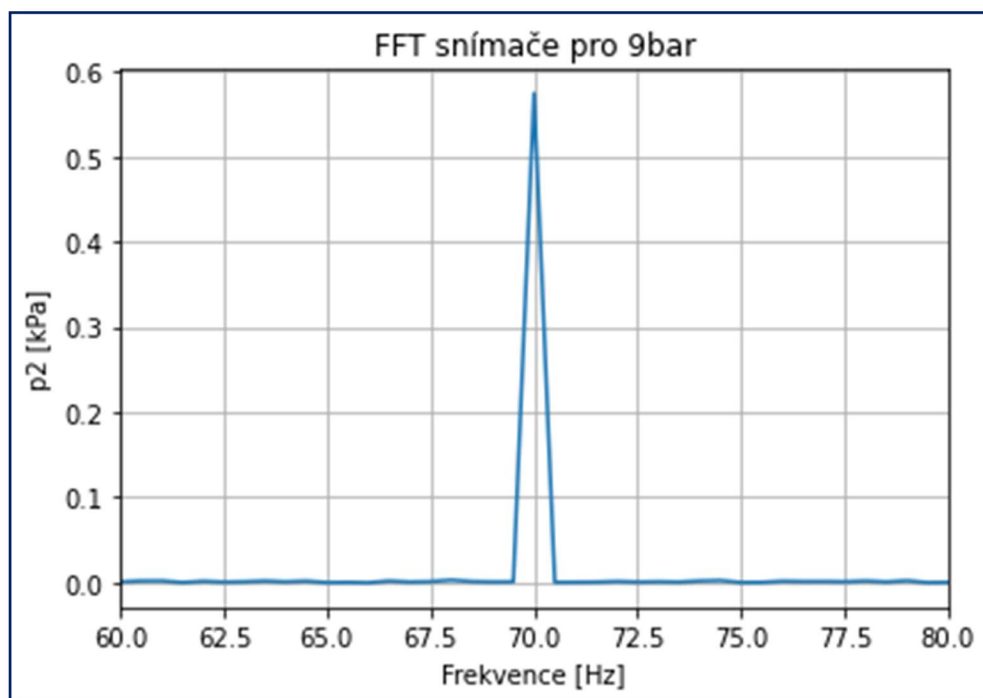


Graf 5.1 – Časový záznam signálu snímače  $p_2$  pro 9bar

Pro tento měřený úsek byla vypracována frekvenčně amplitudová charakteristika pomocí rychlé Fourierovy transformace. Na grafu níže je patrné zesílení amplitudy.



Graf 5.2 – FFT Vyhodnocení signálu snímače  $p_2$  pro 9 bar



Graf 5.3 – Detail dominantní amplitudy snímače  $p_2$  pro 9 bar

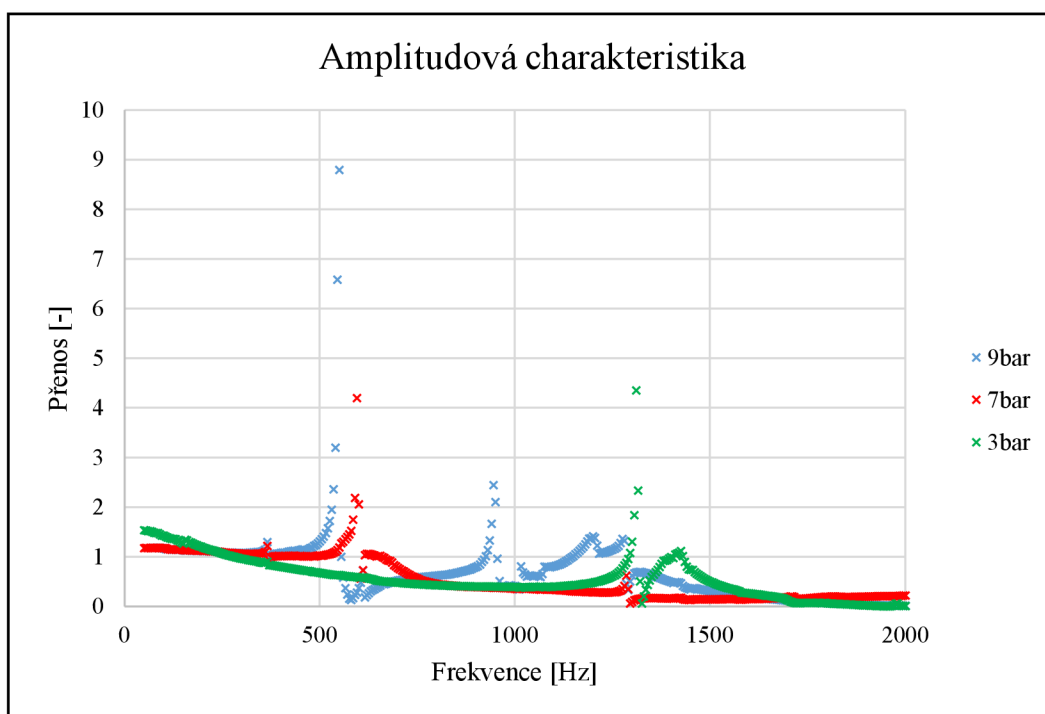
## 5.8 Vyhodnocení

Na vyhodnocení změřených dat byl využit program vytvořený v jazyku Python. Pro každý měřený úsek byla vyhodnocena amplitudově fázová frekvenční charakteristika s využitím rychlé FFT. Z nich byla vybrána dominantní amplituda tlaku a její příslušná frekvence.

Z technických listů od výrobců snímačů je patrné, že nejlepších dynamických vlastností by měl dosahovat piezoelektrický snímač od firmy PCB Piezotronics. Tudiž byl vybrán jako snímač referenční, ke kterému se budou ostatní snímače porovnávat. Výsledný přenos bude poměr amplitud tlaku kalibrovaného snímače se snímačem referenčním.

### 5.8.1 Snímač $p_2$

Na grafu níže můžeme vidět amplitudovou frekvenční charakteristiku pro snímač  $p_2$ .

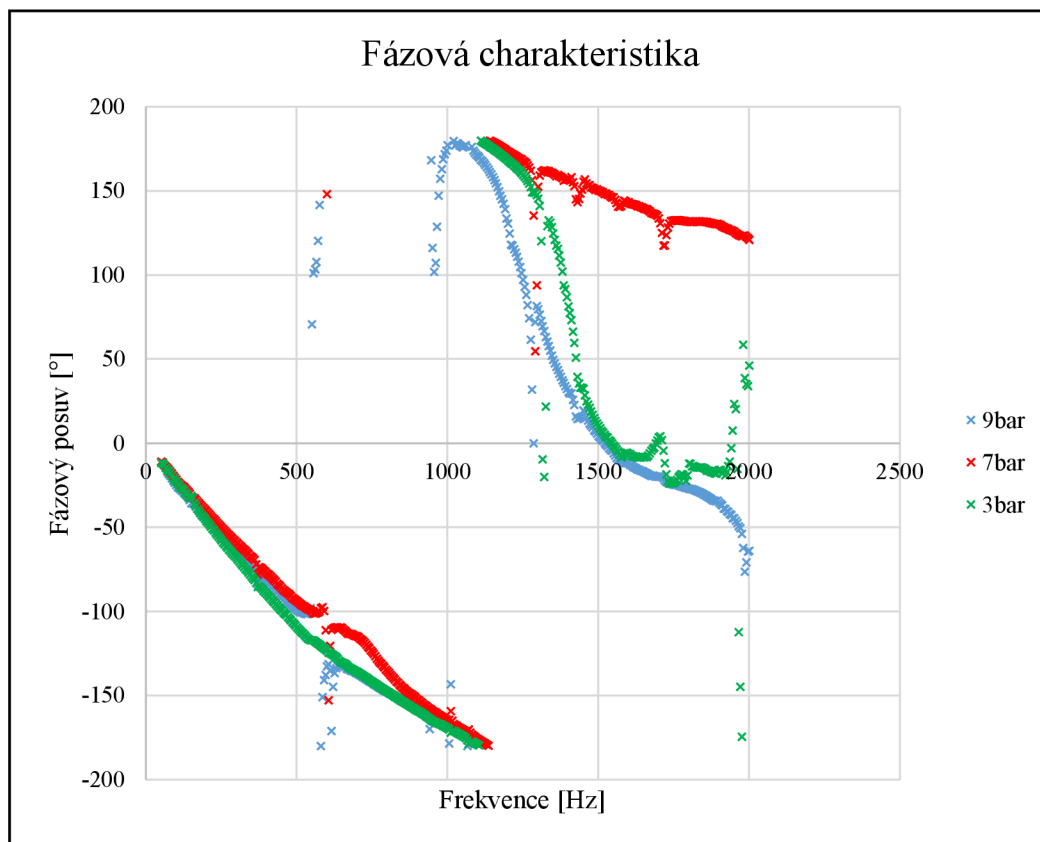


Graf 5.4 – Amplitudová charakteristika snímače  $p_2$

Z grafu amplitudové charakteristiky výše je patrné, že první rezonanční frekvence pro měření při statickém tlaku 3 bary dosahuje téměř dvojnásobných hodnot oproti měření při 9 a 7 barech. Tento jev lze těžko vysvětlit. Postup měření i vyhodnocení byl pro všechny tlaky totožný. Bohužel musíme shledat měření při 3 barech neúspěšné a v další části této práce pro něj nebude vyhodnocen matematický model.



Na grafu je zobrazena fázová frekvenční charakteristika:

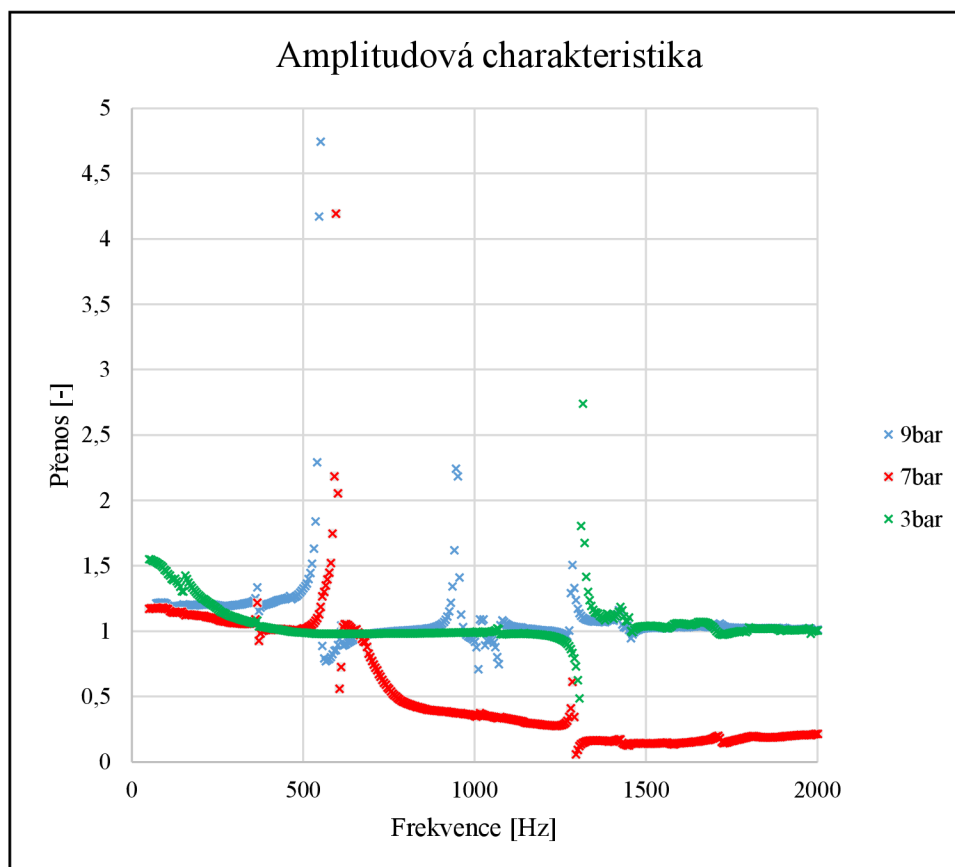


Graf 5.5 – Fázová charakteristika snímače  $p_2$

### 5.8.2 Snímač p<sub>4</sub>

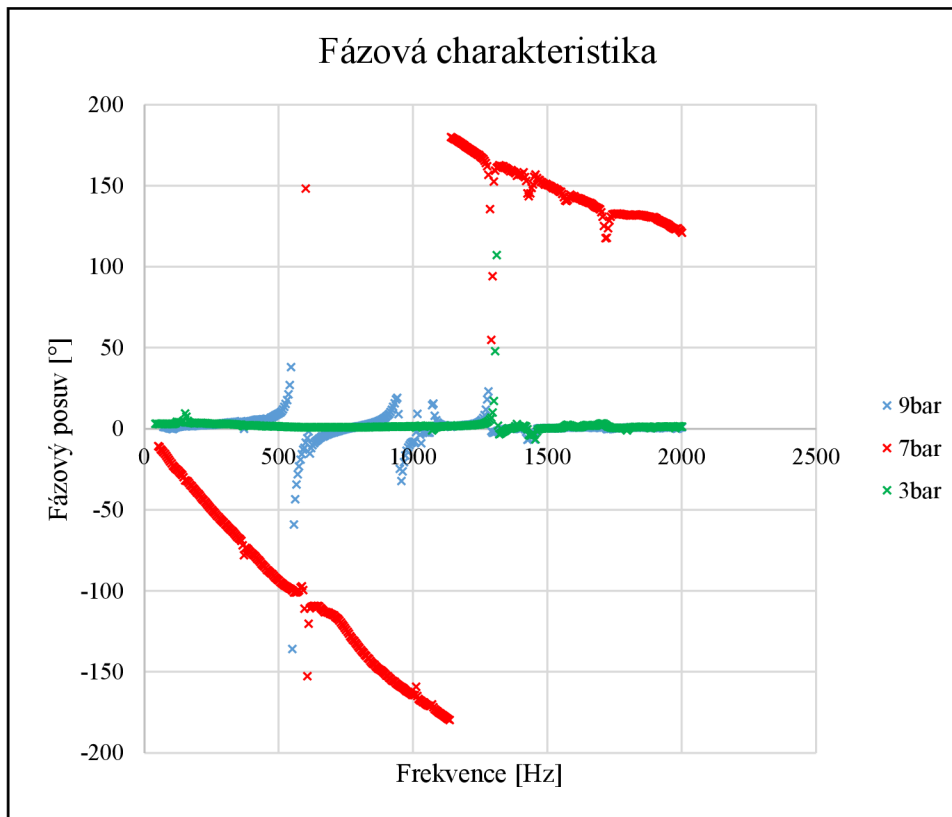
Snímač p<sub>4</sub> od výrobce KISTLER je stejně jako snímač p<sub>3</sub> piezoelektický. Podle technických dokumentů od výrobců dosahuje lepších dynamických vlastností snímač p<sub>3</sub>. Vzájemné porovnání obou snímačů může být důležité pro jejich použití, proto bude dále popsáno.

Na grafu níže můžeme vidět amplitudovou charakteristiku snímače p<sub>4</sub>:



Graf 5.6 - Amplitudová charakteristika snímače p<sub>4</sub>

Následující graf popisuje fázovou charakteristiku snímače  $p_4$ :

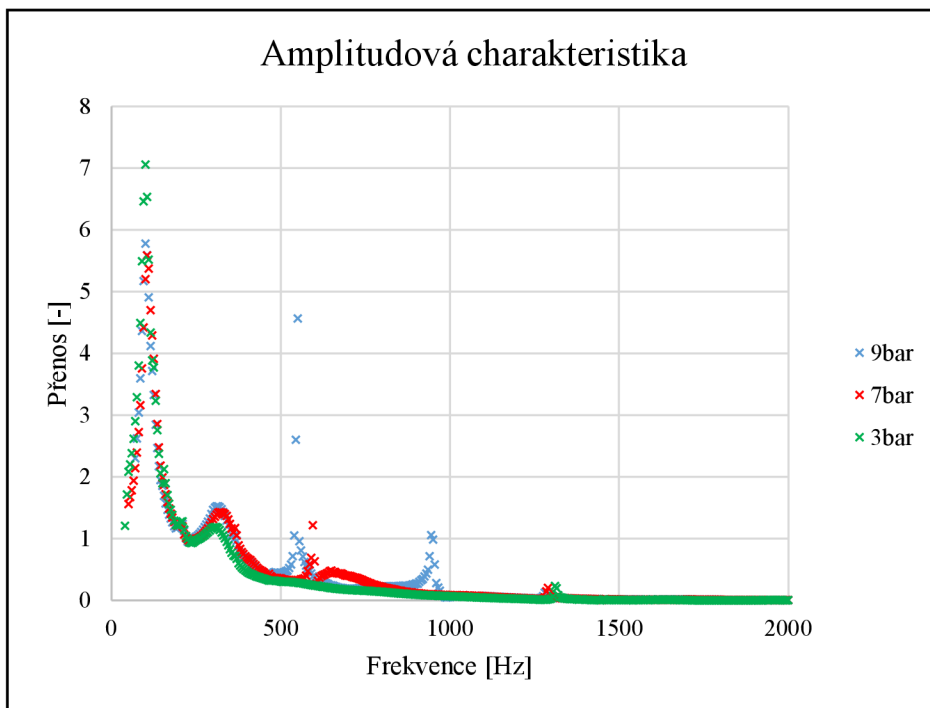


Graf 5.7 - Fázová charakteristika sniemače  $p_4$

### 5.8.3 Snímač $p_1$

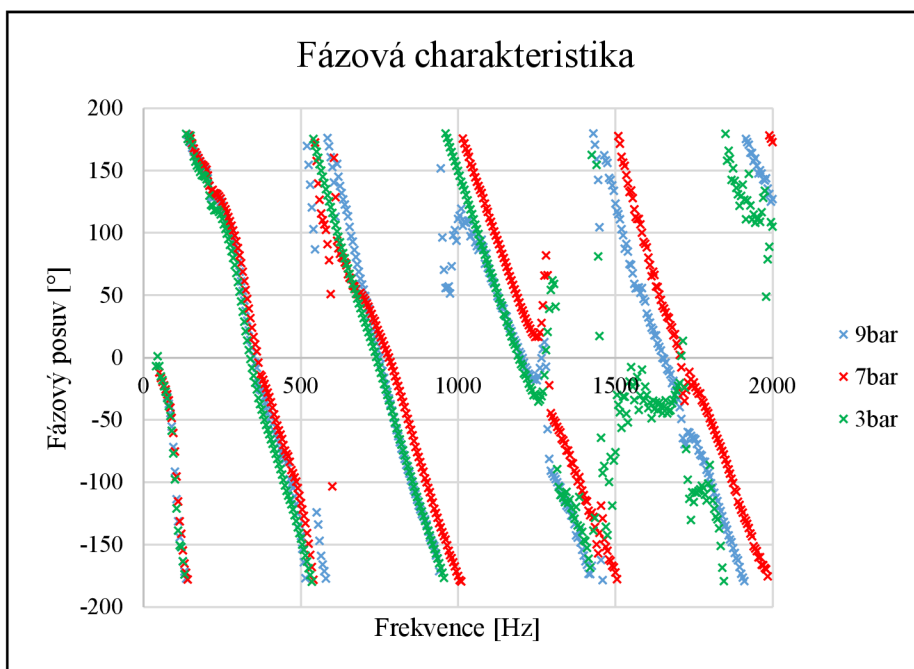
Tento tenzometrický snímač byl připojen na konec pružného plastového potrubí. Naměřená data budou silně ovlivněna dynamickými vlastnostmi trubice.

Níže můžeme vidět graf popisující amplitudovou charakteristiku.



Graf 5.8 - Amplitudová charakteristika snižovače  $p_1$

Následující graf popisuje fázovou charakteristiku:

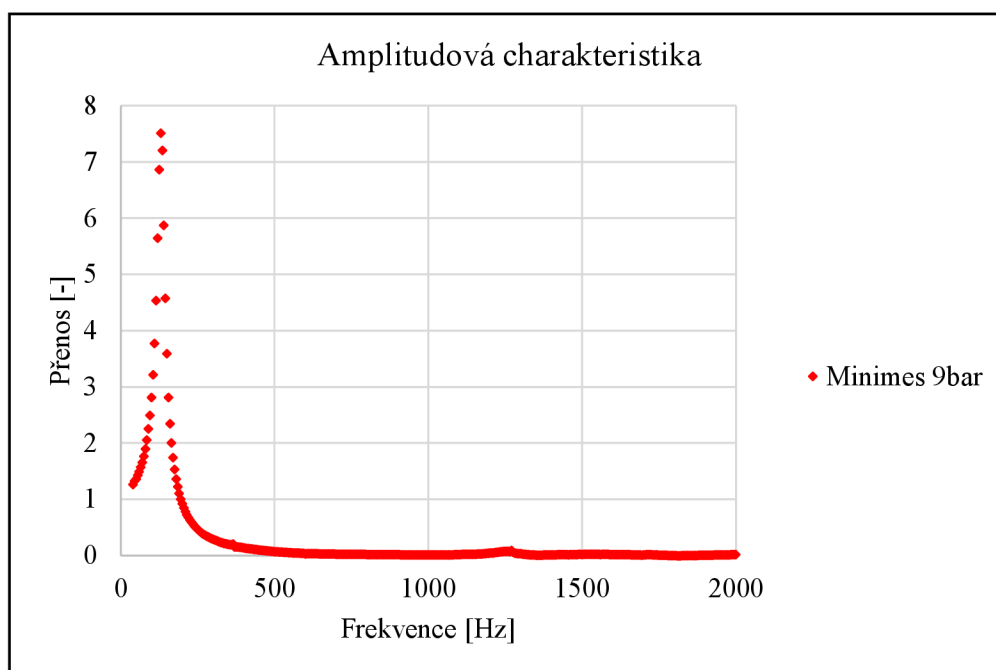


Graf 5.9 – Fázová charakteristika snižovače  $p_1$

#### 5.8.4 Šroubení Minimes

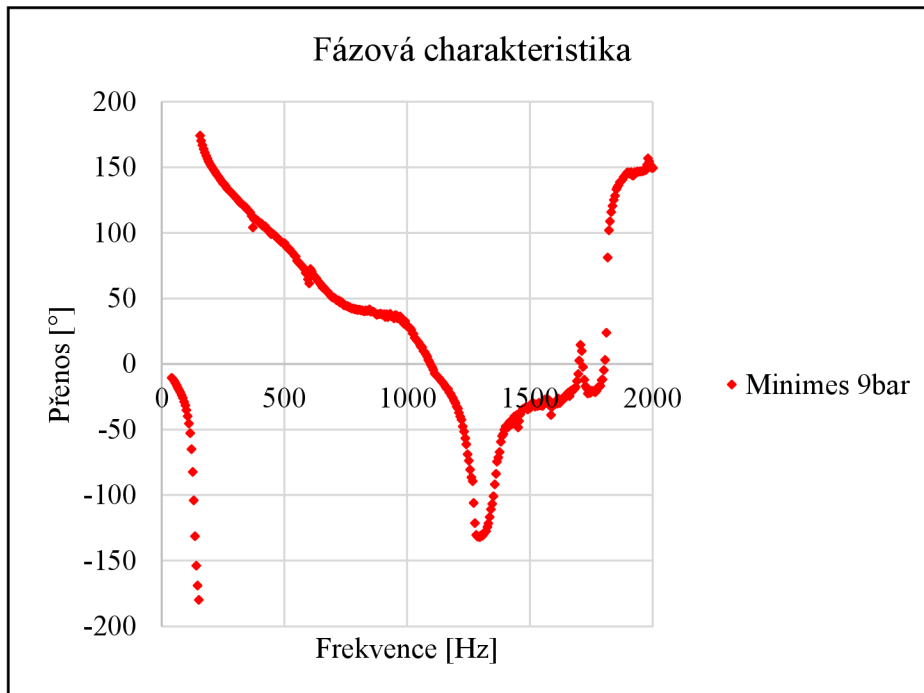
Součástí experimentu bylo také měření přenosu šroubení Minimes, které sloužilo jako přechodový kus mezi tlustostěnným plechem na konci přenosové komory a tenzometrickým snímačem DMP 331 od výrobce BD Sensor. Toto šroubení je součástí vybavení hydraulické laboratoře a jeho vyhodnocení se jevílo jako důležité pro jeho další aplikaci. Měření tohoto kusu bylo provedeno pouze pro jeden statický tlak 9 barů.

Na grafu níže (5.10) lze vidět závislost přenosu na frekvenci.



Graf 5.10 – Amplitudová charakteristika šroubení Minimes pro 9bar

Na grafu níže (5.11) je zobrazena fázová charakteristika šroubení Minimes.



Graf 5.11 – Fázová charakteristika šroubení Minimes pro 9bar

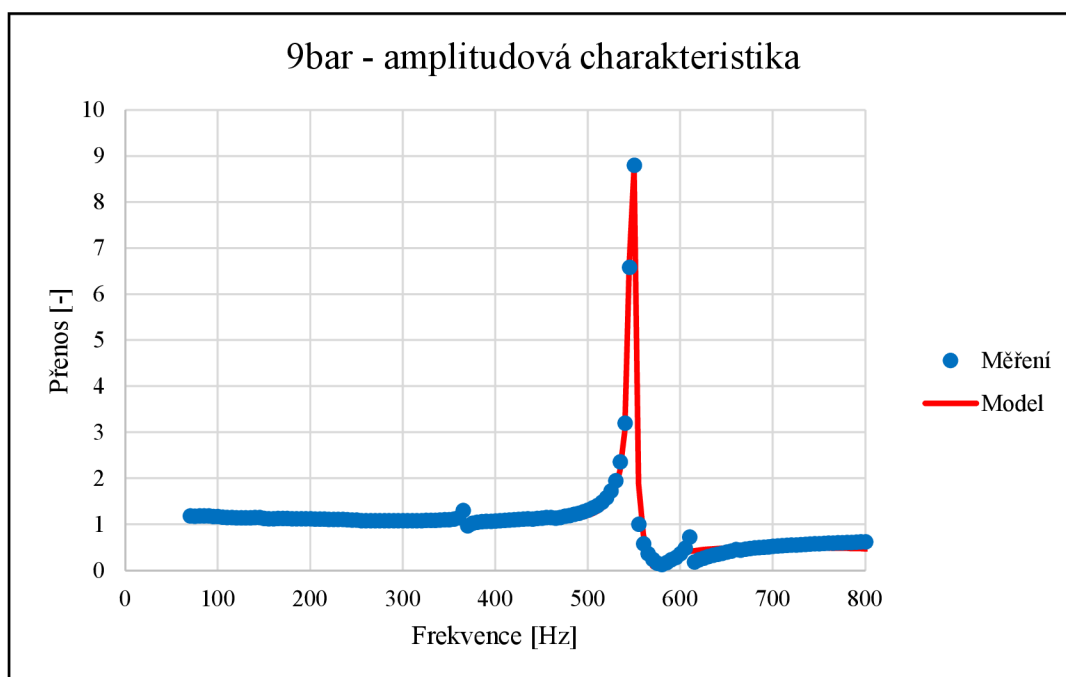
## 6 Stanovení přenosu

### 6.1 Přenos snímače $p_2$

Matematický model pro tenzometrický snímač umístěný na tlustostěnném plechu vlnovodu byl odvozen v kapitole (3.2). Kmitání se dvěma hmotami oproti jedno-hmotovému systému dokázalo dobře popsat charakteristiku snímače, a to až za hodnotu rezonanční frekvence. Dále již není model schopen charakteristiku popsat. To by však nemuselo být závažným nedostatkem, protože daný snímač by neměl být použit v oblasti své vlastní frekvence.

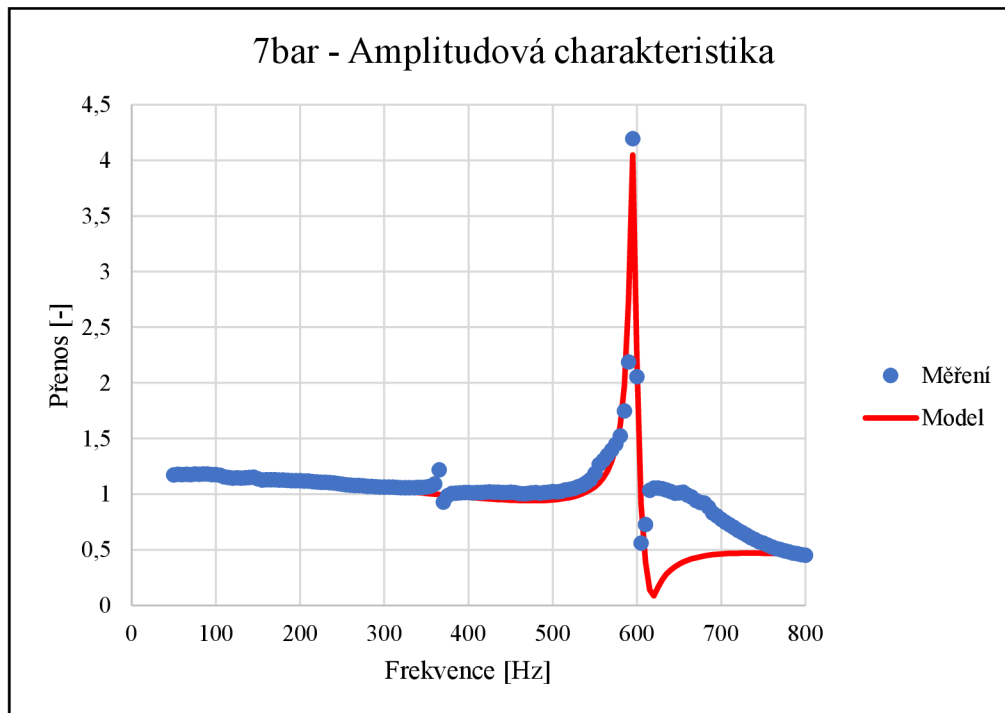
Matematický model pro kmitání dvou hmot je závislý na jejich materiálových konstantách – dvou hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , dvou tlumení  $b_1$  a  $b_2$ , a dvou tuhostech  $k_1$  a  $k_2$ . Tyto konstanty jsou pro nás dopředu neznámé. Cílem tedy bylo tyto konstanty optimalizovat, aby přenos matematického modelu odpovídal co nejvíce přenosu změřených dat. Za tímto účelem bylo využito doplňku *Řešitel* v prostředí *Excel* s použitím *Gradientní metody*. Cílovou funkcí byl součin všech druhých mocnin rozdílů přenosu modelu a měření. Proměnné byly materiálové konstanty dvou-hmotového systému, do kterých byly dosazeny počáteční hodnoty. Následně byl vypočítán gradient cílové funkce, po kterém byla provedena aktualizace proměnných ve směru gradientu. Tento proces se opakoval, dokud nebylo dosaženo požadované konvergence, která byla nastavena na  $1e-5$ .

Na grafu (6.1) můžeme vidět model snímače pro statický tlak 9 barů. Je patrné, že vlastní frekvence snímače dosáhla hodnoty **550 Hz** s maximálním zesílením přenosu **8,795**.



Graf 6.1 – Matematický model přenosu snímače  $p_2$  pro 9bar

Model snímače pro statický tlak 7 barů lze vidět na grafu (6.2). Vlastní frekvence pro toto nastavení dosáhla hodnoty **595 Hz** s maximálním zesílením přenosu **4,195**:

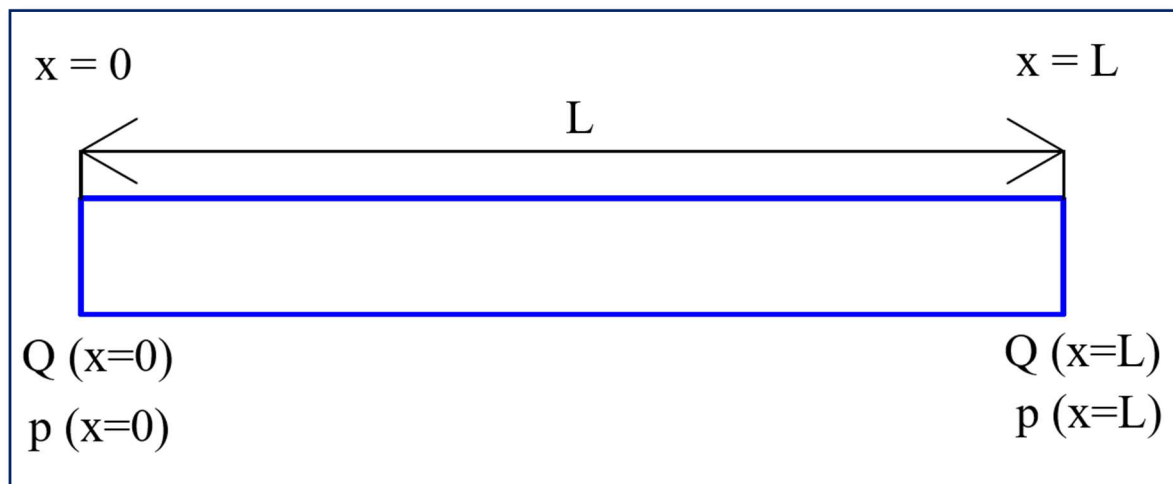


Graf 6.2 - Matematický model přenosu snímače  $p_2$  pro 7bar



## 6.2 Přenos snímače $p_1$

Přenosová matice popisující matematický model pro přenos v pružné trubici byl odvozen v kapitole (3.3). Pro její použití ve výpočtu je třeba znát stavové vektory na počátku a konci pružné trubice. Ty dokážeme vyjádřit zavedením vhodných okrajových podmínek.



Obrázek 6.1 – Znázornění okrajových podmínek pro pružnou trubici

Uvažujme, že platí:

$$u_L = Z u_0 \quad (6.1)$$

Kde pro složky rovnice platí:

$$u_0 = \begin{pmatrix} Q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}; u_L = \begin{pmatrix} Q_L \\ p_L \end{pmatrix}; Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

S úvahou, že na konci trubice je průtok nulový ( $Q_L = 0$ ) a na počátku trubice budíme jednotkovým tlakem ( $p_0 = 0$ ), lze přepsat vztah (6.2) do soustavy dvou rovnic ve tvaru

$$0 = Z_{11} Q_0 + Z_{12} \quad (6.3)$$

$$p_L = Z_{21} Q_0 + Z_{22} \quad (6.4)$$

Po úpravě získáme přepis:

$$Q_0 = -\frac{Z_{12}}{Z_{11}}; p_L = -\frac{Z_{12}}{Z_{11}} Z_{21} + Z_{22} \quad (6.5)$$

Přenos průtoku a tlaku je v matematickém modelu závislý na materiálových konstantách tlumení  $b$  a tuhosti  $K$ . Tyto konstanty byly optimalizovány v prostředí *Python* tak, aby rozdíl mezi přenosem signálu změřených dat pro dané frekvenční pásmo a matematickým modelem byl minimální (6.6).

$$\sum_i^N \left\{ \left[ \frac{p_1}{p_3} \right]_{\text{Měřené}} - \left[ \frac{p(x=L)}{p(x=0)} \right]_{\text{Model}} \right\}^2 \approx 0 \quad (6.6)$$

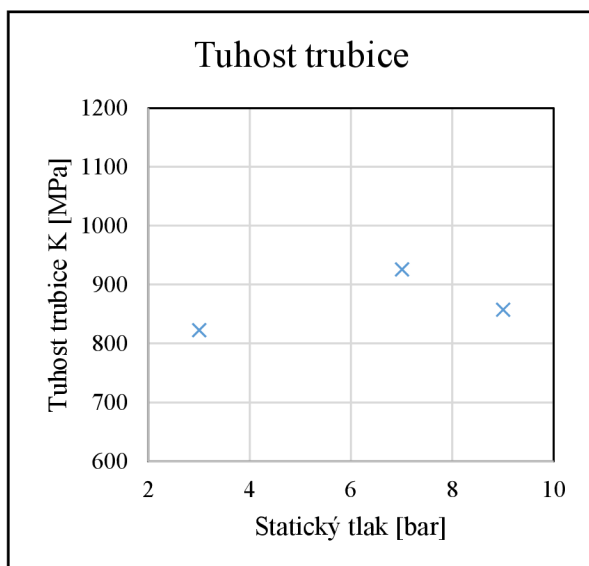
Pro optimalizaci bylo využito metody *TNC* (*Truncated Newton Conjugate-Gradient - Zkrácený Newtonův konjugovaný gradient*). Tato metoda je používána pro řešení problémů nelineární optimalizace s omezujícími podmínkami a je dostupná v knihovně *SciPy* v prostředí *Python*.

Optimalizované materiálové konstanty pro 3 statické tlaky jsou uvedeny v tabulce (6.1)

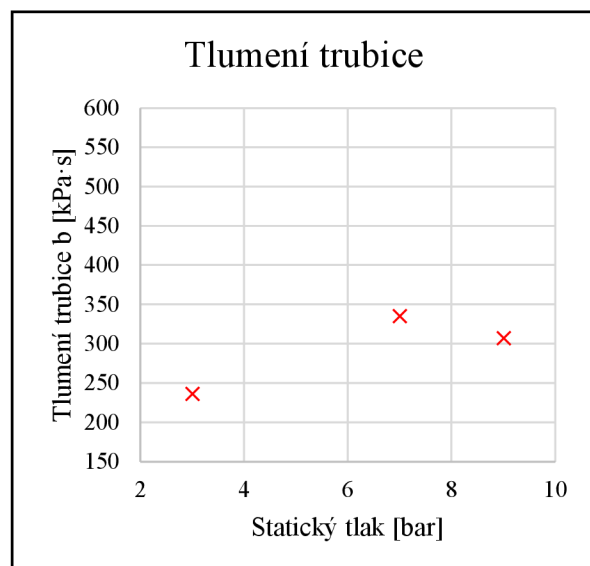
Tabulka 6.1 – Materiálové konstanty trubice v závislosti na statickém tlaku

Statický tlak	Tuhost trubice	Tlumení trubice	Rychlost zvuku trubice
$p_{\text{stat}}$ [bar]	$K$ [MPa]	$b$ [kPa·s]	$a$ [m/s]
9	857,884	307,354	267,645
7	926,204	335,370	278,098
3	823,078	236,546	262,159

Grafické znázornění optimalizovaných materiálových konstant v závislosti na statickém tlaku lze vidět na grafech (6.3) a (6.4).

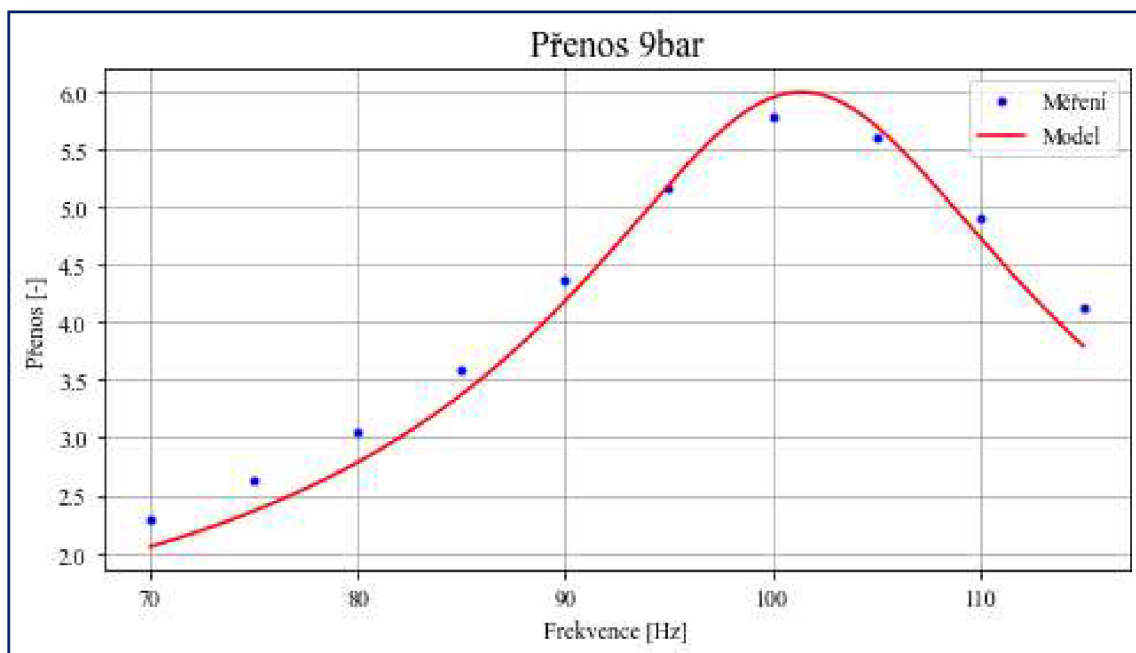


Graf 6.3 – Tuhost trubice v závislosti na statickém tlaku



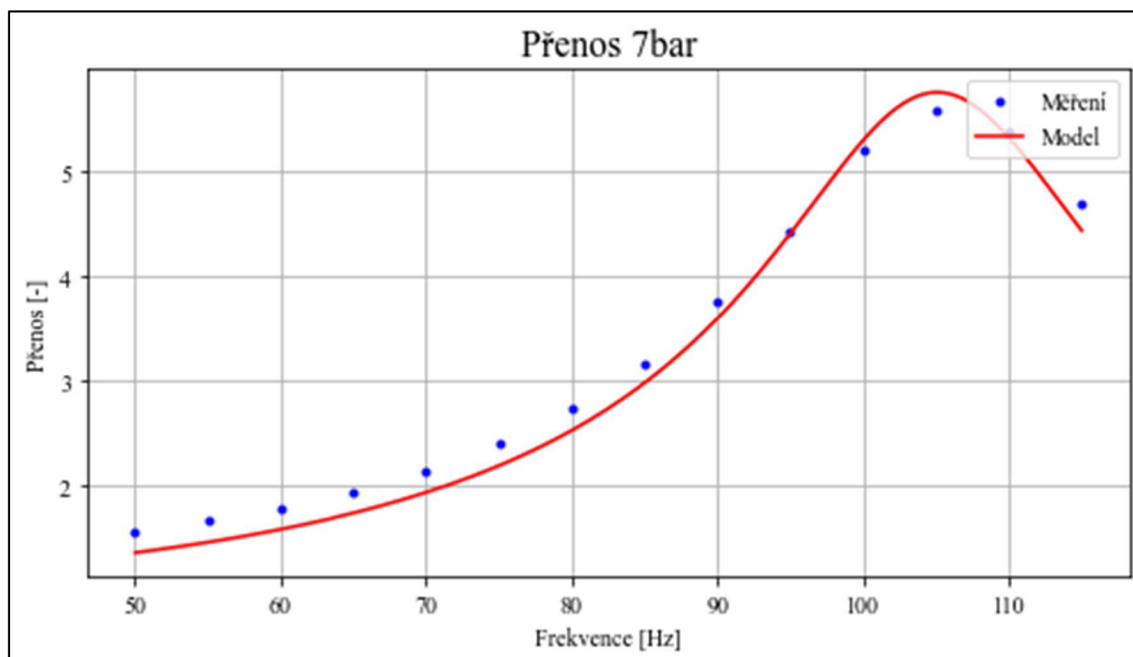
Graf 6.4 – Tlumení trubice v závislosti na statickém tlaku

Na následujících grafech (6.5), (6.6) a (6.7) lze vidět porovnání matematického modelu s naměřenými daty. **Vlastní frekvence** pro statický tlak 9bar dosáhla hodnoty **101,12 Hz** a **maximálním zesílení přenosu 6**.



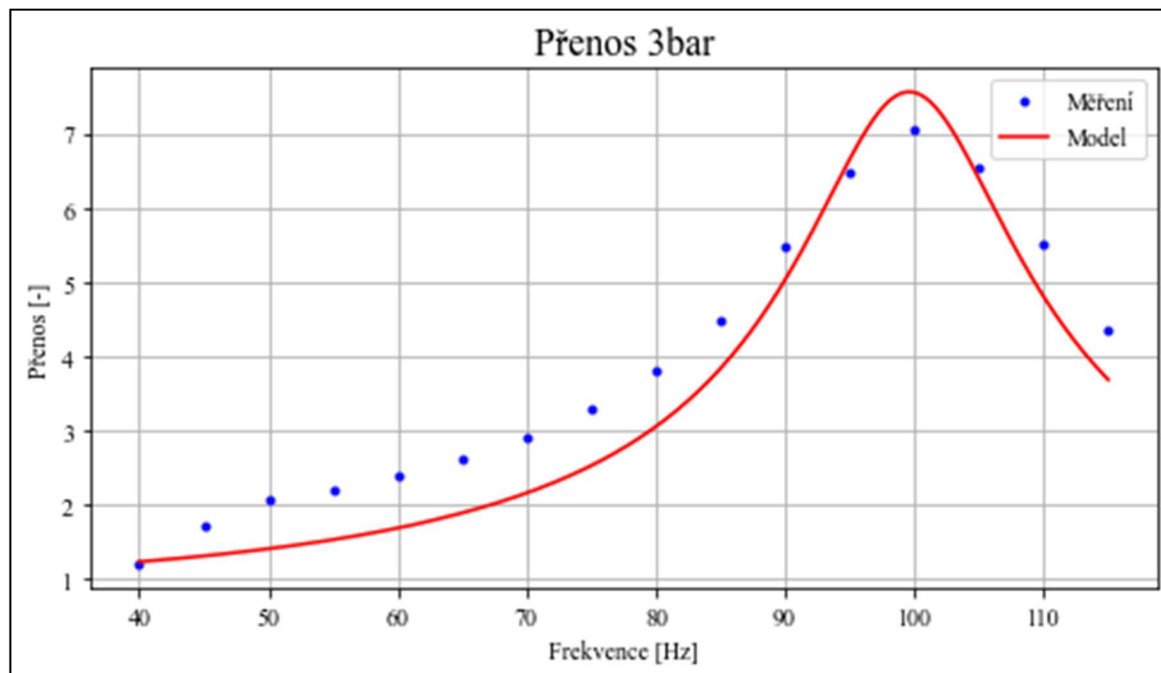
Graf 6.5 – Matematický model trubice pro 9bar

Pro statický tlak 7bar dosáhla **vlastní frekvence** hodnoty **105 Hz** s **maximálním zesílení přenosu 5,75**.



Graf 6.6 - Matematický model trubice pro 7bar

Hodnota **vlastní frekvence** pro statický tlak 3 bary dosáhla **99,5 Hz** s **maximálním zesílením přenosu 7,65**.

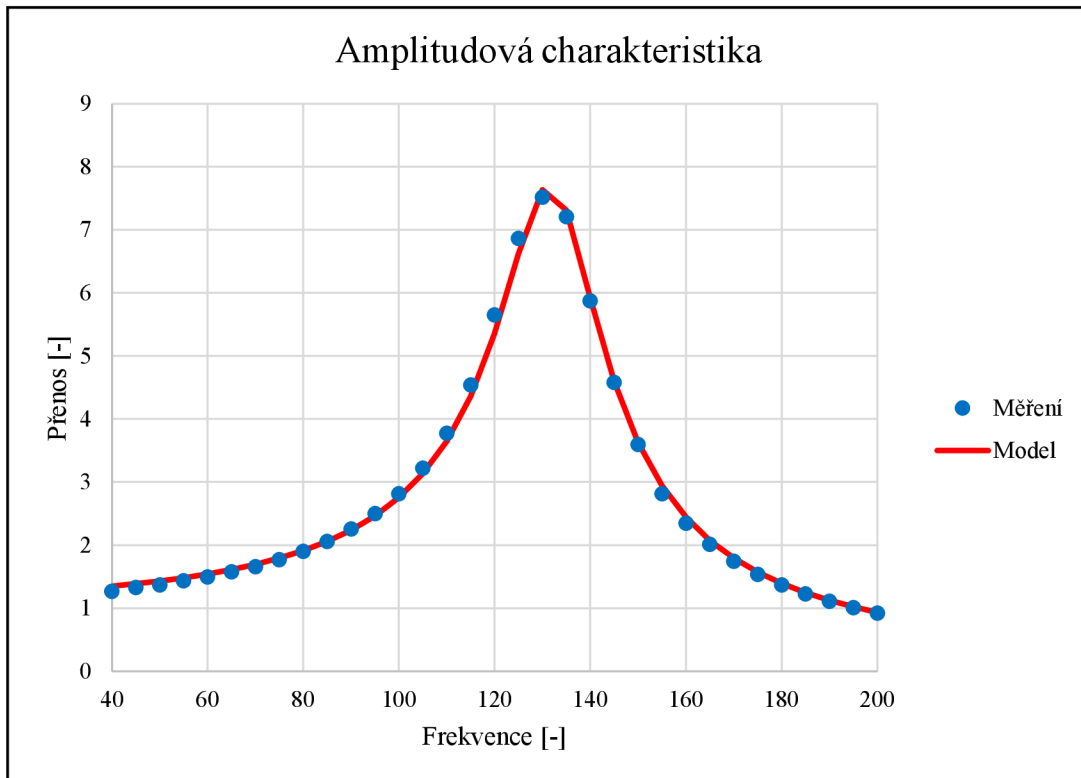


Graf 6.7 - Matematický model trubice pro 3bar

### 6.3 Přenos šroubení Minimes

Pro stanovení matematického modelu šroubení Minimes byl využit stejně jako pro vyhodnocení snímače  $p_2$  popis pomocí kmitání systému se dvěma hmotami odvozený v kapitole (3.3). Toto platí i pro optimalizaci materiálových konstant, pro kterou byl využit doplněk *Řešitel* v prostředí *Excel* s využitím gradientní metody.

Na grafu (6.8) níže je zobrazeno porovnání matematického modelu s naměřenými daty.



Graf 6.8 – Matematický model šroubení Minimes pro 9bar

## ZÁVĚR

Tato práce se zabývala problematikou měření tlakových pulsací, a to hlavně s ohledem na vlastnosti běžně používaných tlakových snímačů a pružných plastových hadic. Stěžejním cílem bylo popsat dynamické chování měřících systémů a navrhnout jejich přenosové funkce, které budou jejich chování předpovídat pro různé provozní podmínky. Tyto funkce byly porovnány s daty z experimentu, pro který byla sestavena měřicí trať.

V první kapitole byly popsány běžně používané snímače tlaku. Byly popsány principy, kterých pro svoji funkci využívají a byla popsána jejich aplikace v praxi. Speciální pozornost byla věnována snímačům tlaku s elektrickým výstupem, které jsou v průmyslových a technických odvětvích využívány nejčastěji, a to hlavně kvůli možnosti zpracování dat pomocí výpočetní techniky.

Druhá kapitola byla zaměřena na popis dynamických vlastností snímačů a na analýzu měřených dat. Byly zde podrobně popsány metody zpracování signálu, použití Fourierovy transformace, včetně metodiky vzorkování. Tato kapitola posloužila jako dobrý podklad pro zpracování dat získaných experimentem.

Třetí kapitola se zabývá odvozením přenosových funkcí pro snímače a pro impulzní potrubí. Pro snímače uvažován popis pomocí kmitání systému s jednou a dvěma hmotami. Pro pružné plastové hadice byla odvozena přenosová matice, která vycházela ze základních zákonů zachování hmotnosti a hybnosti. Model uvažoval pouze složku rychlosti v axiálním směru trubice. Dynamické vlastnosti trubice byly popsány pomocí Kelvin-Voigtova modelu materiálu, pomocí dvou materiálových konstant – tuhosti a tlumení. Odvození proběhlo s uvažováním ztrát způsobených nestacionárním rychlostním profilem.

Ve čtvrté kapitole byl představen výpočet nárůstu amplitudy v přenosové komoře, která byla stěžejní součástí experimentu. Cílem bylo ověřit, zda na konci komory dochází k potřebnému zesílení vstupního signálu. Za tímto účelem byla změřena geometrie vlnovodu a byl vytvořen 3D model, který posloužil jako výpočetní doména. Výpočtová simulace byla realizována v prostředí programu ANSYS Acoustic, který se ukázal jako naprosto dostačující pro výpočet šíření vln a účinný z hlediska výpočtového času. Výpočet byl proveden pro dvě hodnoty rychlosti zvuku s uvažováním dokonale tuhé přenosové komory. Pro další výpočty by mohlo být zajímavé provést výpočet s uvažováním pružnosti komory, která má vliv na rychlost zvuku. Dále tento výpočet nedokázal popsat buzení pružnou membránou na začátku přenosové komory, stejně tak 3D proudové pole na konci vlnovodu. Zde stále existuje prostor pro další výzkum a zlepšení.

Pátá kapitola popisuje experimentální trať, jednotlivé komponenty trati a uvádí postup měření, které bylo provedeno pro frekvenční pásmo od 50 do 2000 Hz pro tři statické tlaky – 3, 7 a 9 barů. Nastavení frekvencí bylo zcela autonomní pomocí programu *LabView*. Byly měřeny signály dvou v praxi běžně používaných tenzometrických tlakoměrů a dvou piezoelektrických tlakoměrů, přičemž jeden z tenzometrických snímačů byl umístěn na konci pružné plastové hadice. Měření proběhlo bez zvláštních komplikací, jediným nedostatkem trati byl pokles statického tlaku, který však lze považovat za zanedbatelný s minimálním vlivem na výsledný signál. Pro vyhodnocení výsledků bylo potřeba zvolit referenční snímač, vůči kterému byly ostatní snímače porovnány. Z technických listů a změřených dat je patrné, že pro tento účel posloužil nejlépe piezoelektrický snímač 113B28 od výrobce PCB Piezotronics označený v této práci jako **p3**. Na konci kapitoly jsou znázorněny průběhy amplitudových a fázových frekvenčních charakteristik, které byly zpracovány pomocí prostředí programu *Python*, kde metodika vyhodnocení vycházela ze vztahů popsaných v druhé kapitole. Součástí experimentu bylo také vyhodnocení šroubení Minimes, které sloužilo jako spojovací součást mezi tenzometrickým snímačem **p2** a které bylo důležité vyhodnotit pro další aplikace hydraulické

laboratoře. Jedinou závadou experimentu je zvláštní chování snímače  $p_2$ , kdy hodnota první vlastní frekvence pro statický tlak 3 bary dosáhla téměř dvounásobných hodnot oproti ostatním dvěma tlakům. Toto chování lze těžko vysvětlit, jelikož postup měření i postup zpracování dat byl totožný. V následující kapitole pro tento tlak tedy nebyl vyhodnocován matematický model.

V poslední kapitole se stanovily matematické modely, které byly porovnány s naměřenými daty. Modely byly odvozeny pomocí vztahů uvedených v třetí kapitole. Pro stanovení bylo využito optimalizačních metod v prostředí programů *Excel* a *Python*. Matematické modely snímačů a šroubení Minimes byly popsány pomocí kmitání se dvěma stupni volnosti. Jednostupňový model nedokázal správně popsat přenos před první vlastní frekvencí. Pro vyhodnocení dynamických vlastností pružné hadice byl využita přenosová matice odvozená v třetí kapitole. Matematické modely byly porovnány s daty z měření a výstupem jsou grafická zpracování. Je patrné, že modely jsou vhodné pouze do oblasti za vlastní frekvencí snímačů a potrubí. Dále se jejich odchylka výrazně zvětšuje. Můžeme tedy říct, že tenzometrické snímače DMP 331 od výrobce BD Sensors dosahují hodnoty vlastní frekvence 550 Hz s maximálním zesílením přenosu 8,8 a jsou použitelné do frekvence 600 Hz se zanedbatelnou chybou. Pružná plastová hadice s danými rozměry dosahuje vlastní frekvence okolo hodnoty 100 Hz s maximálním zesílením přenosu 7,65, pro vyšší frekvence než 120 Hz je jejich použití nevhodné. Šroubení Minimes dosáhlo vlastní frekvence na hodnotě 120 Hz s maximálním zesílením přenosu 7,5. Použití je omezeno do frekvence 200 Hz.

Přestože tato práce poskytla několik důležitých poznatků, je zde stále prostor pro výzkum a zlepšení, a to hlavně v provedení dalších experimentů pro různé typy impulzních potrubí a snímačů v širším spektru provozních podmínek k vytvoření pokročilejších modelů, které by lépe zahrnovaly nelineární chování systému.

## SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] MERANIE TECHNICKÝCH VELIČÍN. Bratislava: Tlač Vydavateľstvo STU v Bratislave, 1999. ISBN 80-264-99.
- [2] Snímače mechanického namáhání – piezoelektrický jev. Online. In: Elektronická učebnice. 2014. Dostupné z: <https://eluc.ikap.cz/verejne/lekce/1590>. [cit. 2024-05-20].
- [3] Měření tlaku. In: Ústav počítačové a řídicí techniky VŠCHT Praha [online]. Praha: VŠCHT Praha, 2013 [cit. 2023-05-14]. Dostupné z: <http://uprt.vscht.cz/kminekm/mrt/f4/f4k42-tlak.htm>
- [4] Tlak. In: Ústav přístrojové a řídicí techniky: Vysoká škola chemická v Praze [online]. Praha: VŠCHT Praha, 2013 [cit. 2023-05-14]. Dostupné z: <https://docplayer.cz/6229465-Rozdeleni-podle-velikosti.html>
- [5] ZUTH, Daniel. Analýza nejistot ve vibrodiagnostice. [s.l.], 2009. 95 s. , 5. VUT v Brně - Fakulta strojního inženýrství. Ústav automatizace a informatiky. Vedoucí disertační práce Ing. František Vdoleček, CSc. .
- [6] ZUTH, D., ROJKA, A. Měřicí řetězec s využitím SW LabView 7 Express. In Mechanical Engineering 2005. Bratislava: Strojnícka fakulta STU v Bratislave, 2005. s. 180-185. ISBN: 80-227-2314-2.
- [7] POCHYLÝ, František a Vysoké učení technické v Brně. Dynamika tekutinových systémů: Určeno pro posl. fak. strojní. Praha: Mezinárodní organizace novinářů, 1990, s. 3. ISBN 80-214-0139-7. Dostupné také z: <https://www.digitalniknihovna.cz/mzk/uuid/uuid:f8f05e60-e8d4-11e3-8e46-5ef3fc9ae867>
- [8] ČAPOŠ, Eduard. Šíření tlakových pulsací v pružných plastových hadicích. Brno, 2020. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.
- [9] Habán, V. Tlumení tlakových a průtokových pulzací. Brno, CZ, 2000. Disertační práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství.
- [10] SLAVÍČEK, O. *Dynamické charakteristiky běžně používaných snímačů tlaku*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 80 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Vladimír Habán, Ph.D.
- [11] Rozdělení tlaku. Online. In: Wöhler Profesionálne náradie, prístroje a príslušenstvo pre plynárov, kominárov a domácich majstrov. 2024. Dostupné z: <https://www.woehler.sk/info/tlak-53>. [cit. 2024-05-20].



## SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

Značka	Veličina	Jednotka
a	Rychlost zvuku kapaliny	[m/s]
a <sub>0</sub>	Rychlost zvuku trubice	[m/s]
b	Tlumení	[Pa·s]
c	Komplexně združený koeficient	[-]
c <sub>ij</sub>	tenzor rychlosti deformace	[m/s]
e	Eulerovo číslo	[-]
F, F(t), F <sub>0</sub>	Síla	[N]
f	Frekvence	[Hz]
FFT	rychlá Fourierova transformace	[-]
f <sub>vz</sub>	vzorkovací frekvence	[Hz]
g	Gravitační zrychlení	[m/s <sup>2</sup> ]
h	Výška	[m]
<b>h</b>	stavový vektor	[-]
<b>H</b>	matice	[-]
J <sub>0</sub> , J <sub>1</sub>	Beselovy funkce	[-]
k	Tuhost	[Nm]
K	Tuhost, materiálová konstanta trubice	[Pa]
L <sup>-1</sup>	Laplaceův obraz	[-]
m	hmotnost	[kg]
n	celé číslo	[-]
n <sub>i</sub>	normálový vektor	[-]
p	Tlak	[Pa]
π	Ludolfovo číslo	[-]
p <sub>1</sub>	Tlak tenzometrického snímače BD Sensors na konci pružné trubice	[Pa]
p <sub>2</sub>	Tlak tenzometrického snímače BD senzors na konci přenosové komory	[Pa]
p <sub>3</sub>	Tlak piezoelektrického snímače Kistler na konci přenosové komory	[Pa]
p <sub>4</sub>	Tlak piezoelektrického snímače PCB na konci přenosové komory	[Pa]
p <sub>abs</sub>	Absolutní tlak	[Pa]
p <sub>b</sub>	Barometrický tlak	[Pa]
p <sub>bn</sub>	Normální barometrický tlak	[Pa]
p <sub>c</sub>	Celkový tlak	[Pa]
p <sub>d</sub>	Dynamický tlak	[Pa]
p <sub>k</sub>	Kinematický tlak	[Pa]
p <sub>s, pd</sub>	Statický tlak	[Pa]
Q	Průtok	[m <sup>3</sup> /s]
ρ	Měrná hmotnost	[kg/m <sup>3</sup> ]
R	Poloměr trubice	[m]

$S, S_1, S_2$	Plocha	$[m^2]$
$t$	čas	$[s]$
$T$	perioda	$[s]$
$T_{sig}$	perioda měřeného signálu	$[s]$
$u(t)$	posuv	$[m]$
$v$	Rychlost	$[m/s]$
$v_{ij}$	Tenzor rychlosti deformace	$[m/s]$
$v_i$	Vektor rychlosti proudění	$[m/s]$
$\omega$	Úhlová rychlost	$[rad/s]$
$x$	Poloha	$[m]$
$x(t)$	Poloha v závislosti na čase	$[m]$
$Z$	přenosová matice	$[-]$
$\Gamma$	povrch pláště	$[m^2]$
$\delta$	Diracův impulz	$[-]$

## **SEZNAM OBRÁZKŮ**

Obrázek 1.1 – Rozdělení tlaku, převzato z [11]	12
Obrázek 1.2 – Typy tenzometru [3]	15
Obrázek 1.3 – Kapacitní snímač tlaku, převzato z [1]	16
Obrázek 1.4 – Piezoelektrický snímač, převzato z [2]	17
Obrázek 1.5 – Schéma indukčních snímačů, převzato z [1]	17
Obrázek 2.1 Zpracování signálu, převzato z [6]	20
Obrázek 3.1 – Jednohmotový systém	25
Obrázek 3.2 – Dvouhmotový systém	26
Obrázek 3.3 – Schéma trubice, převzato z [7]	30
Obrázek 3.4 – Schéma působení tlaku na trubici, převzato z [7]	32
Obrázek 3.5 – Schéma Kelvin-Voightova materiálu, převzato z [8]	33
Obrázek 4.1 – Geometrie přenosové komory, převzato z [10]	39
Obrázek 4.2 – Výpočtová doména	40
Obrázek 5.1 – Schéma měřicí tratě	42
Obrázek 5.2 – Experimentální trať v hydraulické laboratoři	43
Obrázek 5.3 – Detail vibračního systému a vlnovodu	43
Obrázek 6.1 – Znázornění okrajových podmínek pro pružnou trubici	57

## SEZNAM GRAFŮ

Graf 4.1 – Vykreslení amplitudy tlaku v závislosti na frekvenci pro počátek a konec přenosové komory	40
Graf 5.1 – Časový záznam signálu snímače $p_2$ pro 9bar	45
Graf 5.2 – FFT Vyhodnocení signálu snímače $p_2$ pro 9 bar	46
Graf 5.3 – Detail dominantní amplitudy snímače $p_2$ pro 9 bar	47
Graf 5.4 – Amplitudová charakteristika snímače $p_2$	48
Graf 5.5 – Fázová charakteristika snímače $p_2$	49
Graf 5.6 - Amplitudová charakteristika snímače $p_4$	50
Graf 5.7 - Fázová charakteristika snímače $p_4$	51
Graf 5.8 - Amplitudová charakteristika snímače $p_1$	52
Graf 5.9 – Fázová charakteristika snímače $p_1$	52
Graf 5.10 – Amplitudová charakteristika šroubení Minimes pro 9bar	53
Graf 5.11 – Fázová charakteristika šroubení Minimes pro 9bar	54
Graf 6.1 – Matematický model přenosu snímače $p_2$ pro 9bar	55
Graf 6.2 - Matematický model přenosu snímače $p_2$ pro 7bar	56
Graf 6.3 – Tuhost trubice v závislosti na statickém tlaku	58
Graf 6.4 – Tlumení trubice v závislosti na statickém tlaku	58
Graf 6.5 – Matematický model trubice pro 9bar	59
Graf 6.6 - Matematický model trubice pro 7bar	59
Graf 6.7 - Matematický model trubice pro 3bar	60
Graf 6.8 – Matematický model šroubení Minimes pro 9bar	61