



VYSOKÉ UČENÍ TECHICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

MODELOVÁNÍ RŮZNÝCH TYPŮ KLOUBŮ V OBECNÉ DEFORMAČNÍ METODĚ

MODELING NODAL RELEASES IN THE GENERAL DEFORMATION METHOD

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Illia Dauhalionak

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Zbyněk Vlček, Ph.D.

BRNO 2023

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav stavební mechaniky
Student: Illia Dauhalionak
Vedoucí práce: Ing. Zbyněk Vlček, Ph.D.
Akademický rok: 2022/23
Studijní program: B3607 Stavební inženýrství
Studijní obor: Konstrukce a dopravní stavby

Děkan Fakulty Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušební řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Modelování různých typů kloubů v obecné deformační metodě

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Jednou z metod, které lze použít pro řešení prutových konstrukcí, je obecná deformační metoda. U modelů prutů v této metodě se běžně předpokládá, že u vzájemného spojení dvou prutů se buď přenáší všechny parametry deformace, nebo pouze translační složky (kloubové spojení umožňující nezávislé pootočení konců prutů). Existují však případy, kdy je vhodné modelovat také jiné typy kloubů umožňující nezávislé posuny konců prutů.

Cíle a výstupy bakalářské práce:

Úkolem této práce je analýza modelů konstrukcí s různými typy kloubů. Pro analýzu bude použit vhodný program (MS Excel, Matlab apod.). Pro pruty s různými typy kloubů na svých koncích budou odvozeny potřebné matice tuhosti a vektory primárních koncových sil. V rámci práce budou porovnány výsledky z různých postupů modelování.

Seznam doporučené literatury a podklady:

- [1] ČSN EN 1991-1 - Zatížení konstrukcí
- [2] Bittnar Z., Šejnoha J. - Numerické metody mechaniky 1,2
- [3] Kadlčák J., Kytýr J. - Statika stavebních konstrukcí I a II

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku.

V Brně, dne 21.11.2022

L. S.

prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
vedoucí

Ing. Zbyněk Vlček, Ph.D. vedoucí
práce

prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA, dr. h. c.
děkan

ABSTRAKT

Práce se zabývá analýzou modelů prutových konstrukcí s různými typy kloubů obecnou deformační metodou. Pro pruty jsou odvozené potřebné matice tuhosti a vektory primárních koncových sil s pomocí silové metody. Analýza je provedená pro sedm prutových konstrukcí s pomocí MATLABu. Výsledky z MATLABu jsou porovnány použitím SCIA Engineer.

KLÍČOVÁ SLOVA

Obecná deformační metoda, Silová metoda, klouby, MATLAB, SCIA Engineer.

ABSTRACT

This thesis deals with the analysis of models of rod structures with different types of nodal releases using the general deformation method. The necessary stiffness matrices and primary end force vektors are derived using the force method. The analysis is performed for seven rod structures using MATLAB. The results from MATLAB are compared with using SCIA Enginner.

KEYWORDS

General deformation method, Force method, nodal releases, MATLAB, SCIA Engineer.

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

DAUHALIONAK, Illia. *Modelování různých typů kloubů v obecné deformační metodě*. Brno, 2023. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí Ing. Zbyněk Vlček, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ O PŮVODNOSTI ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem *Modelování různých typů kloubů v obecné deformační metodě* zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 26. 5. 2023

Ilia Dauhalionak
autor

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych na tomto místě poděkoval panu Ing. Zbyňku Vlkovi, Ph.D za množství času, které mi věnoval při konzultacích, za trpělivost při vysvětlování jednotlivých záležitostí a za velké množství poskytnutých rad. Děkuji své rodině za podporu během celého studia.

Obsah:

1. Úvod.....	1
2. Obecná deformační metoda.....	2
2.1 Podstata obecné deformační metody	2
2.2 Postup výpočtu	2
2.2.1 Výpočtový model.....	2
2.2.2 Styčnickové vektory modelu	3
2.2.3 Analýza prutu.....	3
2.2.4 Transformace do globalních souřadnic	4
2.2.5 Analýza modelu	5
2.2.6 Řešení soustavy rovnic	6
2.2.7 Výpočet reakcí a vnitřních sil	6
3. Silová metoda.....	7
3.1 Postup výpočtu	7
3.1.1 Stupeň statické neurčitosti	7
3.1.2 Volba základní soustavy	7
3.1.3 Sestavení zatěžovacích stavů	7
3.1.4 Sestavení deformačních podmínek	8
3.1.5 Kanonické rovnice	8
4. Odvození matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil.....	10
4.1 Typy připojení	10
4.2 Odvození pro typ 111 – 111	11
4.2.1 Odvození matice tuhosti	11
4.2.2 Odvození vektoru primárních koncových sil.....	20
4.3 Odvození pro typ prutu 101 – 111.....	25
4.3.1 Odvození matice tuhosti	26
4.3.2 Odvození vektoru primárních koncových sil.....	28
5. Řešené příklady	32
5.1 Příklad č. 1	32
5.2 Příklad č. 2	35
5.3 Příklad č. 3	38
5.4 Příklad č. 4.....	42
5.5 Příklad č. 5.....	46
5.6 Příklad č. 6.....	49
5.7 Příklad č. 7.....	53
6. Závěr.....	57
Literatura	58
Seznam příloh.....	59

Seznam obrázků	64
Seznam tabulek	67

1. Úvod

Cílem této bakalářské práce je analýza modelů prutových konstrukcí s různými typy kloubů. Pro analýzu konstrukcí je použito programové prostředí MATLAB od společnosti MathWorks. Výsledky výpočtů v MATLABu jsou následně porovnány s pomocí komerčního softwaru SCIA Engineer.

První kapitola je věnována teorii, kde popisují úvod do obecné deformační metody a postup výpočtu při aplikaci této metody. Další kapitola je věnována postupu výpočtu prutových konstrukcí silovou metodou.

Pro analýzu konstrukcí obecnou deformační metodou jsou popsány různé typy prutů a připojení, které se používají pro sestavení výpočtových modelů. Pro tyto typy prutů jsou s pomocí silové metody ručně odvozeny potřebné matice tuhosti a vektory primárních koncových sil

Odvozené matice a vektory jsou použity pro analýzu sedmi různých příkladů. Pro každý příklad jsou sestaveny výpočtové modely s různými typy prutů. Výpočet deformací je proveden v MATLABu a výsledky z různých postupů modelování jsou pro viditelnost rozdílů znázorněny v tabulkách. Pro analýzu konstrukce v MATLABu se používají ručně odvozené matice a vektory

Správnost výpočtu deformací byla ověřena s pomocí SCIA Engineer. Srovnání výsledků je možné vidět v tabulkách u každého příkladu.

Pro příklady č. 1, 2,3,4 a 5 v je MATLABu proveden výpočet reakcí a vnitřních sil. Porovnání výpočtů z MATLABu a SCIA Engineer je opět možné vidět v tabulkách.

2. Obecná deformační metoda

Obecná deformační metoda je jedna z metod, která se používá pro řešení statické neurčitých prutových konstrukcí. Tato metoda vychází z předpokladů malých deformací. A v rámci metody jsou uvažovány lineární vlastnosti materiálu a vliv posouvajících sil se zanedbává. [1]

2.1 Podstata obecné deformační metody

Podstatou obecné deformační metody je sestavení silových podmínek rovnováhy ve styčnicích, které jsou vyjádřeny s pomocí neznámých parametrů deformací. Za neznámé parametry deformací se volí posuny a pootočení.

Pro výpočet konstrukce je nutné definovat výpočtový model. Pro tento model se určuje stupeň přetvárné neurčitosti a neznámé parametry deformace. Dále se sestavuje vektor uzlového zatížení. Následně se provádí analýza prutů tak, že pro každý prut se sestavuje jeho lokální matice tuhosti a lokální vektor primárních koncových sil. Lokální matice tuhosti zahrnuje geometrii prutu a materialové charakteristiky. Lokální vektor primárních koncových sil vychází ze zatížení prutu. Jestli je to nutné, provádí se transformace z lokálních do globálních souřadnic. Na základě lokalizace se poté sestavuje globální matice tuhosti a globální vektor primárních koncových sil. Následně se dopočítají neznámé parametry deformací z rovnic rovnováhy. Potom se provádí dopočet reakcí a vnitřních sil. [1,2]

2.2 Postup výpočtu

Výpočet obecnou deformační metodou se skládá z několika částí, které na sebe vzájemně navazují. Každý krok výpočtu je detailně popsán v následujících podkapitolách.

2.2.1 Výpočtový model

První krok řešení prutové konstrukce je sestavení výpočtového modelu. Model se skládá z jednotlivých prutů a styčniců, které očíslováme podle polohy. Pro model se určí stupeň přetvárné neurčitosti, který úvodí počet řádků pro všechny následující vektory a matice. [1]

Každý prut může mít různé typy připojení. Prut je primý a má konstantní tuhost. V obecné deformační metodě rozlišujeme dva základní typy připojení, a to buď monolitické nebo kloubové připojení. Dalé můžeme definovat čtyři druhy prutů podle způsobu připojení [2]:

- Prut oboustranně monolitický připojený



Obr. 2.1: Oboustranně monolitický připojený prut

- Prut levostranně kloubově připojený



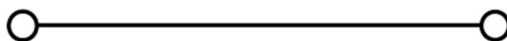
Obr. 2.2: Levostranně kloubově připojený prut

- Prut pravostranně kloubově připojený



Obr. 2.3: Pravostranně kloubově připojený prut

- Prut oboustranně kloubově připojený



Obr. 2.4: Obostranně kloubově připojený prut

2.2.2 Styčnickové vektory modelu

Následující krok je sestavení globalního vektoru neznámých parametrů deformací $\{\mathbf{r}\}$, který se skládá z neznámých posunů a pootočení ve styčnicích. Poté se vypíší síly a momenty, které působí v místech neznámých deformací do vektoru styčnickového zatížení $\{\mathbf{S}\}$. [1,2]

2.2.3 Analýza prutu

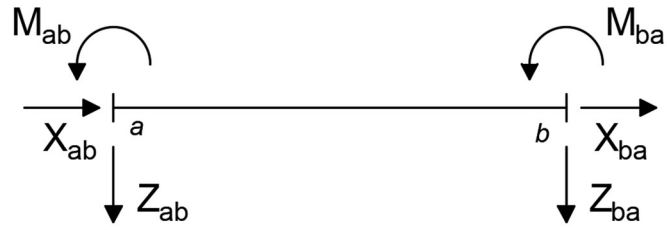
Pro každý prut ab (a i b jsou indexy styčniců) výpočtového modelu se sestavuje jeho lokální matice tuhosti $[\mathbf{K}^*_{ab}]$ a vektor primárních koncových sil $\{\bar{\mathbf{R}}^*_{ab}\}$.

Lokální matice tuhosti $[\mathbf{K}^*_{ab}]$ zahrnuje geometrii a materialové charakteristiky prutu. Matice prutu má šest řádků a šest sloupců. Sloupce matice se označí podle parametrů deformací ve styčnicích a i b : $u_{ab}, w_{ab}, \varphi_{ab}, u_{ba}, w_{ba}, \varphi_{ba}$. Kladné směry parametrů deformací je možné vidět na obr. 2.5:



Obr. 2.5: Konvence parametrů deformací prutu ab

Řádky matice jsou označeny podle primárních koncových sil: $X_{ab}, Z_{ab}, M_{ab}, X_{ba}, Z_{ba}, M_{ba}$. Konvence primárních koncových sil je zobrazená na obr. 2.6:



Obr. 2.6: Konvence primárních koncových sil

Lokální matice tuhosti $[K^*_{ab}]$ má tvar:

$$[K^*_{ab}] = \begin{matrix} & u_{ab} & w_{ab} & \varphi_{ab} & u_{ba} & w_{ba} & \varphi_{ba} \\ \begin{matrix} X_{ab} \\ Z_{ab} \\ M_{ab} \\ X_{ba} \\ Z_{ba} \\ M_{ba} \end{matrix} & \left[\begin{matrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \right] & \end{matrix} \quad (2.1)$$

Lokální vektor primárních koncových sil prutu $\{\bar{\mathbf{R}}^*_{ab}\}$ vychází ze zatížení prutu. Jestli na prut působí více než jedno zatížení, tak se i celkový vektor prutu skládá ze všech těchto zatížení.

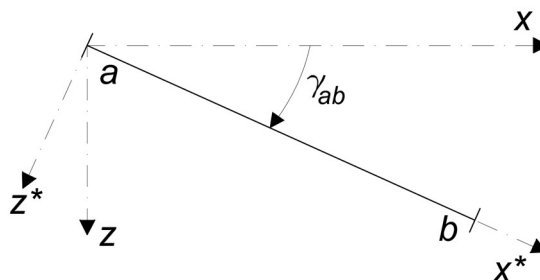
Lokální vektor primárních koncových sil prutu $\{\bar{\mathbf{R}}^*_{ab}\}$ má následující tvar:

$$\{\bar{\mathbf{R}}^*_{ab}\} = \begin{matrix} X_{ab} \\ Z_{ab} \\ M_{ab} \\ X_{ba} \\ Z_{ba} \\ M_{ba} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} X_{ab} \\ Z_{ab} \\ M_{ab} \\ X_{ba} \\ Z_{ba} \\ M_{ba} \end{matrix}} \right\} \quad (2.2)$$

2.2.4 Transformace do globálních souřadnic

Jestli lokální a globální souřadnice prutu nejsou totožné, je nutné provést transformaci do globálních souřadnic. Pro transformaci potřebujeme určit transformační úhel γ_{ab} a sestavit transformační matici $[\mathbf{T}_{ab}]$. [2].

Lokální souřadnicový systém má osy x^* a z^* , globální souřadnicový systém se značí osami x a z . Vztah mezi lokálním a globálním souřadnicovým systémem je znázorněn na obr. 2.7:



Obr. 2.7: Lokální a globální souřadnicový systém

Transformační matice $[T_{ab}]$ má následující tvar:

$$[T_{ab}] = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Globalní matice tuhosti prutu se dopočítá dle vztahu:

$$[K_{ab}] = [T_{ab}]^T [K^*_{ab}] [T_{ab}] \quad (2.4)$$

kde $[K_{ab}]$ globalní matice tuhosti prutu,
 $[T_{ab}]^T$ transponovaná transformační matice,
 $[K^*_{ab}]$ lokální matice tuhosti prutu,
 $[T_{ab}]$ transformační matice.

Stejným způsobem se dopočítá globální vektor primárních koncových sil:

$$\{\bar{R}\} = [T_{ab}]^T \{\bar{R}^*_{ab}\} [T_{ab}] \quad (2.5)$$

2.2.5 Analýza modelu

Následující krok je sestavení globální matice tuhosti $[K]$ a globálního vektoru primárních koncových sil $\{\bar{R}\}$ celého výpočtového modelu v globálních souřadnicích.

Globalní matice tuhosti $[K]$ se skládá z maticí tuhosti jednotlivých prutů $[K_{ab}]$. Analogicky se skládá globální vektor primárních koncových sil celé konstrukce $\{\bar{R}\}$. Rozměrnost $[K]$ a $\{\bar{R}\}$ se řídí dle vektoru $\{r\}$.

Pro správné sestavení globální matice tuhosti $[K]$ a vektoru primárních koncových sil $\{\bar{R}\}$ je nutné provést lokalizaci modelu. Tím se rozumí, že prvky globálních maticí tuhosti jednotlivých prutů $[K_{ab}]$ musí mít správné umístění v globální matici tuhosti $[K]$ celé konstrukce. Stejný princip se aplikuje na globální vektor primárních koncových sil $\{\bar{R}\}$. Každému parametru deformace se udělí index $1, 2, 3 \dots i$. Následně se všechny prvky $[K_{ab}]$ umístí podle indexu $1, 2, 3 \dots i$ do globální matice tuhosti $[K]$ celé konstrukce. Příklad lokalizací bude znázorněn v následující kapitole. [3].

Dalé je nutné sestavit vektor pravé strany $\{F\}$ celé konstrukce. Tento vektor se vypočítá dle vztahu:

$$\{F\} = \{S\} - \{\bar{R}\} \quad (2.6)$$

kde $\{F\}$ vektor pravé strany,
 $\{S\}$ vektor styčnickového zatížení,
 $\{\bar{R}\}$ globální vektor primárních koncových sil.

2.2.6 Řešení soustavy rovnic

Jakmile jsou globální matice tuhosti $[K]$, globální vektor neznámých parametrů deformací $\{r\}$ a vektor pravé strany $\{F\}$ celé konstrukce sestavené, tak je možné vyřešit soustavu lineárních rovnic dle vztahu:

$$[K]\{r\} = \{F\} \quad (2.7)$$

kde $[K]$ globální matice tuhosti,
 $\{r\}$ globální vektor neznámých parametrů deformací,
 $\{F\}$ vektor pravé strany.

Vyřešením soustavy lineárních rovnic získáme neznámé hodnoty globálního vektoru neznámých parametrů deformací $\{r\}$

2.2.7 Výpočet reakcí a vnitřních sil

Po získání globálního vektoru neznámých parametrů deformací $\{r\}$ se dopočítá reakce a vnitřní síly celé konstrukce.

3. Silová metoda

Silová metoda je další metoda, která se používá pro řešení staticky neurčitých prutových konstrukcí. Na rozdíl od obecné deformační metody, se za neznámé parametry volí silové veličiny, jako je například reakce konstrukce. Proto se tato metoda nazývá přímou metodou. Silová metoda je vhodná pro řešení konstrukcí s malým počtem stupňů volnosti. [5].

V této práci se silová metoda používá pro odvození matic tuhosti $[K_{ab}]$ a vektorů primárních koncových sil $\{\bar{R}_{ab}\}$ prutů ab , které jsou nezbytné pro analýzu konstrukce obecnou deformační metodou.

3.1 Postup výpočtu

Stejně jako v obecné deformační metodě, se postup výpočtu skládá z několika fází. Každá fáze je podrobněji popsána v dalších podkapitolách.

3.1.1 Stupeň statické neurčitosti

Prvním krokem řešení silovou metodou je určení stupně statické neurčitosti n_s prutové konstrukce. Stupeň statické neurčitosti zároveň uvádí počet přebytečných reakcí. Hodnota se určí dle vztahu:

$$n_s = (a-3) + 3u - p_k \quad (3.1)$$

kde a počet složek reakcí,
 u počet uzavřených ploch,
 p_k počet kloubových styčníků.

3.1.2 Volba základní soustavy

Následujícím krokem je sestavení základní statické i kinematické určité soustavy. To se provádí tak, že se odstraní přebytečné vazby. Po odstranění vazeb, by měla konstrukce mít staticky i kinematicky určitý stav, nesmí nastat mechanismus. Odstraněné vazby, resp. reakce se nahradí statickou veličinou X_n . Počet statických veličin X_n přímo záleží na stupni statické neurčitosti n_s . [5].

3.1.3 Sestavení zatěžovacích stavů

Dále se musí sestavit zatěžovací stavy. Počet zatěžovacích stavů přímo souvisí se stupněm statické neurčitosti n_s . Vždy existuje nultý stav a k tomu ještě počet stavů, který se rovná n_s .

Nultý zatěžovací stav zahrnuje geometrii prutové konstrukce, dané zatížení a odstraněné vazby, resp. reakce. Zatěžovací stavy n se skládají jen z geometrie prutové konstrukce a odstraněné vazby se nahradí jednotkovou silovou veličinou.

Pro každý zatěžovací stav se vykreslí průběh vnitřních sil. [5,6].

3.1.4 Sestavení deformačních podmínek

Následujícím krokem je sestavení deformačních, resp. přetvárných podmínek v místech odstraněných vazeb s ohledem na okrajové podmínky. Obecné přetvárné podmínky mají tvar:

$$\delta_i = 0 \quad (3.2)$$

kde δ_i je deformace v místě odstraněných vazeb.

3.1.5 Kanonické rovnice

Dalším krokem je sestavení kanonických rovnic. Kanonické rovnice se používají pro výpočet reakcí v přebytečných vazbách, které byly označeny jako X_n . Tyto rovnice mají následující tvar:

$$\sum_n \delta_{i,n} X_n + \delta_{i,0} = 0 \quad (3.3)$$

kde i počet přetvárných podmínek,
 n počet přebytečných vazeb,
 X_n neznámé statické veličiny,
 $\delta_{i,n}$ deformační součinitel od zatěžovacího stavu n ,
 $\delta_{i,0}$ deformační součinitel od zatěžovacího stavu 0 .

Pro výpočet deformačních součinitelů $\delta_{i,n}$ a $\delta_{i,0}$ se používá princip virtuálních prací dle Maxwellova-Mohrova vztahu. Tento vztah má následující obecný tvar:

$$\delta = \int_0^s \frac{N\bar{N}}{EA} ds + \int_0^s k \frac{V\bar{V}}{GA} ds + \int_0^s \frac{M\bar{M}}{EI} ds \quad (3.4)$$

V této bakalařské práci se zanedbává vliv normálových a posouvajících sil a rovnice má následující zjednodušený tvar:

$$\delta = \int_0^s \frac{M\bar{M}}{EI} ds \quad (3.5)$$

kde δ deformační součinitel,
 M skutečný moment od vnějšího zatížení,
 \bar{M} virtuální moment od virtuální jednotkové silové veličiny X_n ,
 E modul pružnosti v tahu i tlaku,
 I moment setrvačnosti průřezu.

Pro výpočet integrálu se používá Vereščaginovo pravidlo. Pro které ale musí platit, že skutečný moment \mathbf{M} je tvořen spojitou funkcí a virtualní moment $\bar{\mathbf{M}}$ od virtualního zatížení má lineární funkci. [6].

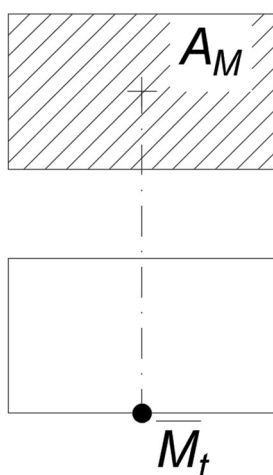
S pomoci Vereščaginova pravidla integrál nabývá následující tvar:

$$\int_0^s M \bar{M} ds = A_M \bar{M}_t \quad (3.6)$$

kde A_M obsah momentového obrazce jakéhokoliv tvaru.

\bar{M}_t pořadnice momentového obrazce od lineární funkce v místě těžiště obrázku u kterého se vypočítá obsah.

Na následujícím obrázku 3.1 je znázorněn princip Vereščaginova pravidla:



Obr. 3. 1: Princip Vereščaginova pravidla

Jakmile se vypočítají deformační součinitele, tak je posledním krokem určení hodnot odstraněných reakcí s pomocí kanonických rovnic (3.3). Ostatní neznámé reakce se dopočítají dle rovnic rovnováhy:

$$\sum F_x = 0 \quad (3.7)$$

$$\sum F_z = 0 \quad (3.8)$$

$$\sum M = 0 \quad (3.9)$$

4. Odvození matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil

Jak bylo zmíněno předtím, v obecné deformační metodě jsou dva základní typy připojení: monolitické (vetknutí) a klobouvé.

Existují však další typy připojení, které je v obecné deformační metodě vhodné modelovat. Pro tyto typy připojení je nutné odvodit potřebné matice tuhosti $[\mathbf{K}_{ab}]$ a vektory primárních koncových sil $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$.

V této kapitole je popsáno odvození pro dva typy prutů. Odvození dalších typů prutů je možné vidět v příloze 1. *Ruční odvození*

4.1 Typy připojení

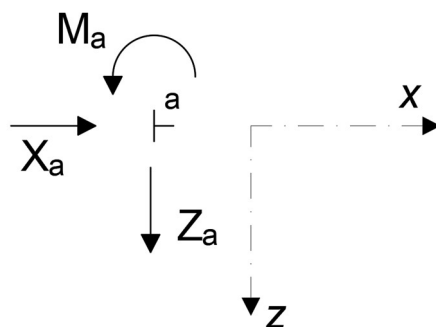
V této podkapitole jsou popsány všechny typy připojení, pro které byly odvozeny matice tuhosti $[\mathbf{K}_{ab}]$ a vektory primárních koncových sil $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$.

Každému typu připojení se přidělí kódové číslo, které se skládá z 0 nebo 1.

Pokud kódové číslo obsahuje 0, znamená to, že vazba je odstraněna. Jestli kódové číslo obsahuje 1, vazba je naopak ponechána.

Kódové číslo má tři indexy, první index označuje vazbu ve směru osy x , druhý index je vazba ve směru osy z a poslední index označuje pootočení. Pro připojení typu vetknutí, je tedy kódové číslo 111.

Na obr. 4.1 je znázorněné připojení typu 111 ve styčnicku a . Je vidět, že je zabráněný posun ve směru osy x reakcí \mathbf{X}_a , ve směru osy z reakcí \mathbf{Z}_a a pootočení styčnicku je zabráněno reakcí \mathbf{M}_a :



Obr. 4. 1: Typ připojení 111

Pro označení typu prutu ab budu používat různá kódová čísla pro levý a a pravý b styčník, podle typu připojení prutu. Všechny kombinace různých typů prutů, které v práci využívám, jsou uvedeny v tabulce 4.1:

Tabulka 4.1: Typy prutu

Typ prutu <i>ab</i>	Levý styčnik <i>a</i>		Pravý styčnik <i>b</i>	
	Kod	Název	Kod	Název
1	111	vetknutí	111	vetknutí
2	111	vetknutí	110	kloub
3	110	kloub	111	vetknutí
4	110	kloub	110	kloub
5	101	posuvné vetknutí kolmo na osu prutu	111	vetknutí
6	111	vetknutí	101	posuvné vetknutí kolmo na osu prutu
7	111	vetknutí	001	posuvné vetknutí ve směru osy <i>a</i> kolmo na osu prutu
8	001	posuvné vetknutí ve směru osy <i>a</i> kolmo na osu prutu	111	vetknutí
9	111	vetknutí	011	posuvné vetknutí ve směru osy prutu
10	011	posuvné vetknutí ve směru osy prutu	111	vetknutí
11	111	vetknutí	100	posuvná podpora ve směru osy prutu
12	100	posuvná podpora ve směru osy prutu	111	vetknutí
13	111	vetknutí	010	posuvná podpora kolmo na osu prutu
14	010	posuvná podpora kolmo na osu prutu	111	vetknutí
15	110	pevná podpora	101	posuvné vetknutí kolmo na osu prutu
16	101	posuvné vetknutí kolmo na osu prutu	110	pevná podpora
17	110	pevná podpora	011	posuvné vetknutí ve směru osy prutu
18	011	posuvné vetknutí ve směru osy prutu	110	pevná podpora

Některé matice tuhosti $[K_{ab}]$ a vektory primárních koncových sil $\{\bar{R}_{ab}\}$ jsou totožné u různých typu prutů. Takže například pruty typu 11,12,15 a 16 uvedené v tabulce 4.1, mají stejné matice tuhosti jak základní typ 4 kloub-kloub. Všechny odvozené matice tuhosti $[K_{ab}]$ a vektory primárních koncových sil $\{\bar{R}_{ab}\}$ je možné vidět v příloze 2. *Matice tuhosti prutů a 3. Primární vektory koncových sil.*

4.2 Odvození pro typ 111 – 111

Tato podkapitola je věnovaná odvození matice tuhosti $[K_{ab}]$ a vektoru primárních koncových sil $\{\bar{R}_{ab}\}$ základního typu prutu, který je oboustranně vetknut . Tento prut má kodové číslo 111-111, což je *vetknutí-vetknutí*. Pro odvození bude použita silová metoda, princip který je popsán dříve. V literatuře existují tabulky už odvozených $[K_{ab}]$ a $\{\bar{R}_{ab}\}$ pro kontrolu výsledků.

Odvození bude provedeno především pro pochopení principu, který se bude používat pro odvození $[K_{ab}]$ a $\{\bar{R}_{ab}\}$ u dalších typů prutů, pro které neexistují tabulky v literatuře.

4.2.1 Odvození matice tuhosti

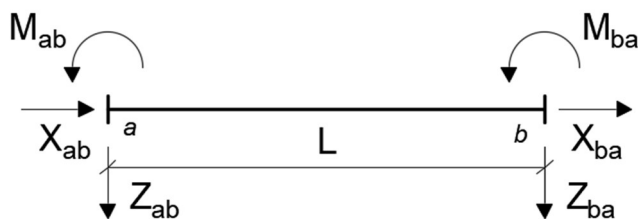
Matice tuhosti $[K_{ab}]$ oboustranně vetknutého prutu má šest řádků a šest sloupců, tedy následující tvar:

$$[K_{ab}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_{ab} & w_{ab} & \varphi_{ab} & u_{ba} & w_{ba} & \varphi_{ba} \end{matrix} \\ \begin{matrix} X_{ab} \\ Z_{ab} \\ M_{ab} \\ X_{ba} \\ Z_{ba} \\ M_{ba} \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.1)$$

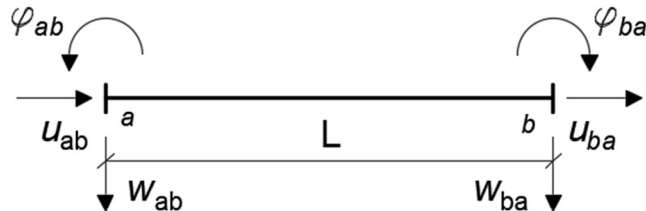
kde $k_{11}, k_{12}, \dots, k_{66}$ jsou neznámé silové veličiny od jednotkových deformací. Tyto neznámé silové veličiny se vypočítají aplikací vynucených jednotkových deformací u, w, φ .

V každém případě bude šest neznámých silových veličin k které je potřeba spočítat.

Oboustranně vetknutý prut má následující statické schéma a schéma deformací:



Obr. 4. 2: Statické schéma, typ 111-111

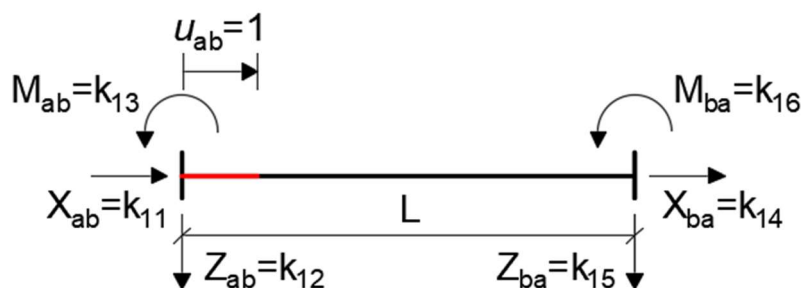


Obr. 4. 3: Schéma deformací, typ 111-111

Odvození pro typ prutu *vetknutí – vetknutí* je popsáno pro první tři sloupce matice tuhosti $[K_{ab}]$, protože je matice symetrická. Podrobné odvození je možné vidět v příloze 1. *Ruční odvození.*

4.2.1.1 Vynucený jednotkový posun u_{ab} ve styčnicku a

Prvním krokem výpočtu neznámých prvků v matici tuhosti $[K_{ab}]$ je aplikace jednotkového vodorovného posunu u_{ab} ve styčnicku a :



Obr. 4. 4: Aplikace jednotkového posunu u_{ab} ve styčnicku a , typ 111-111

Silové veličiny k_{12}, k_{13}, k_{15} a k_{16} jsou nulové, jelikož máme jen osové zatížení. Pro výpočet k_{11} a k_{14} bude aplikován Hookův zákon, který má následující vztah:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4.2)$$

kde ε poměrné délkové prodloužení,
 σ mechanické napětí,
 E modul pružnosti v tahu i tlaku.

Relativní délkové prodloužení může být také zapsáno jako:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (4.3)$$

kde ΔL deformace prutu,
 L délka prutu.

Deformace prutu ΔL v zkoumaném případě se rovná posunu u ve směru osy prutu ve styčnicku a .

Mechanické napětí σ se rovná vložené síle N na plochu průřezu A , což má následující vztah:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (4.4)$$

kde σ mechanické napětí
 N působící síla,
 A plocha průřezu.

Sílu N lze přepsat podle vztahu:

$$N = k\Delta L \quad (4.5)$$

kde k je konstanta pružnosti.

Konstanta pružnosti k se zároveň rovná hledané neznámé veličině k_{11} . Po úpravě

výše uvedených rovnic dostaneme následující vztahy:

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\frac{ku}{EA} = \frac{u}{L}$$

$$k_{11} = \frac{EA}{L} \quad (4.6)$$

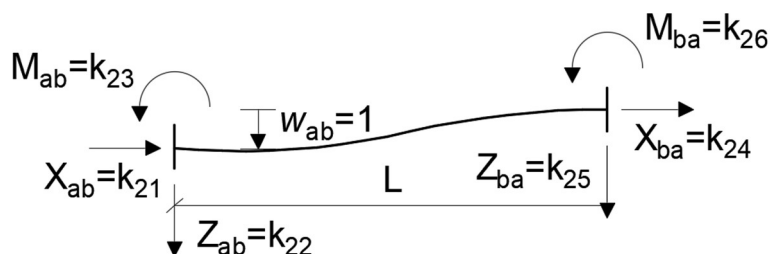
Z rovnice rovnováhy 3.7 se dopočítá druhá neznámá veličina k_{41} .

$$k_{41} = -k_{11} = -\frac{EA}{L} \quad (4.7)$$

Tím se vyřeší neznáme hodnoty k v prvním sloupci u_{ab} matice tuhosti $[\mathbf{K}_{ab}]$ (4.1).

4.2.1.2 Vynucený jednotkový posun w_{ab} ve styčnicku a

Dalším krokem je aplikace vynuceného jednotkového posunu w_{ab} ve styčnicku a . Tím se spočítají neznáme hodnoty druhého sloupce matice tuhosti $[\mathbf{K}_{ab}]$ (4.1).



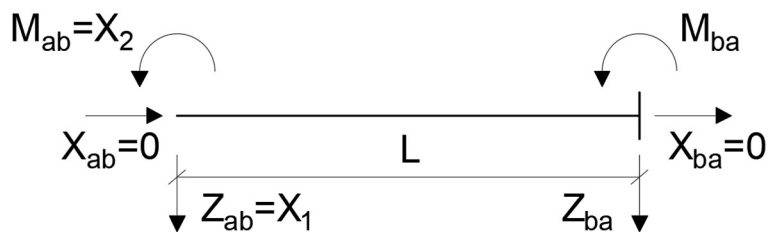
Obr. 4. 5: Aplikace jednotkového posunu w_{ab} ve styčnicku a , typ 111-111

Jelikož máme deformační zatížení kolmo na osu prutu, neznáme veličiny jsou k_{21}, k_{23}, k_{25} a k_{26} . Veličiny k_{21} a k_{24} jsou naopak nulové. Pro výpočet neznámých hodnot se bude aplikovat silová metoda.

Prvním krokem je určení stupně statické neurčitosti n_s prutové konstrukce dle vztahu 3.1.

$$n_s = 6 - 3 = 3 \quad (4.8)$$

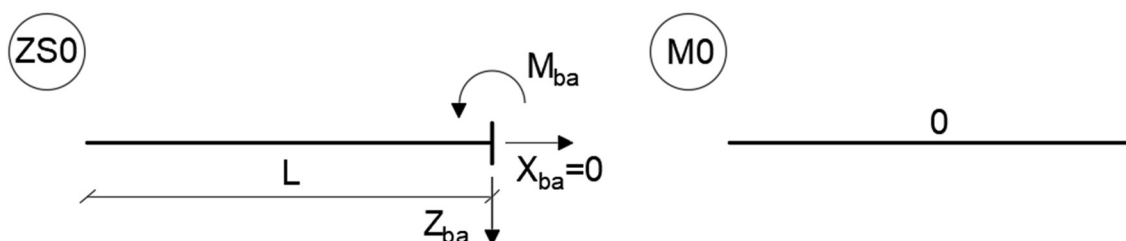
Následující krok je sestavení základní soustavy. Základní soustava se vytvoří odstraněním přebytečných vazeb ve styčnicku a . Tím vznikne základní soustava, která je znázorněna na obr. 4.6:



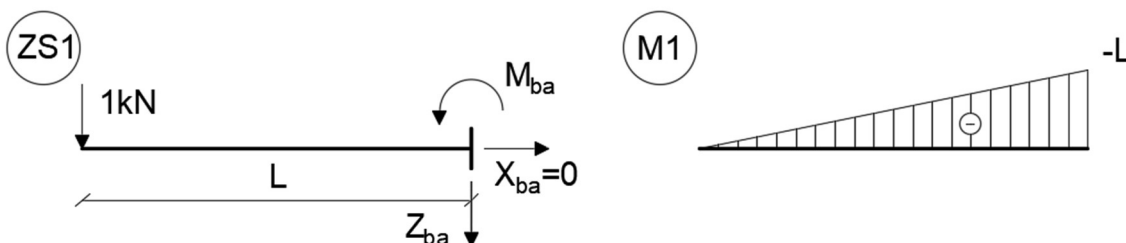
Obr. 4. 6: Základní soustava pro w_{ab} , typ 111-111

Vodorovné reakce X_{ab} a X_{ba} jsou nulové, proto X_{ab} se nebude uvažovat jako neznámá pro sestavení zatežovacích stavů. Tím vzniknou tři zatežovací stavy, pro každý zatežovací stav bude znázorněno statické schéma a výkreslený průběh ohybových momentů. Zatežovací stavy budou označeny zkratkou ZS.

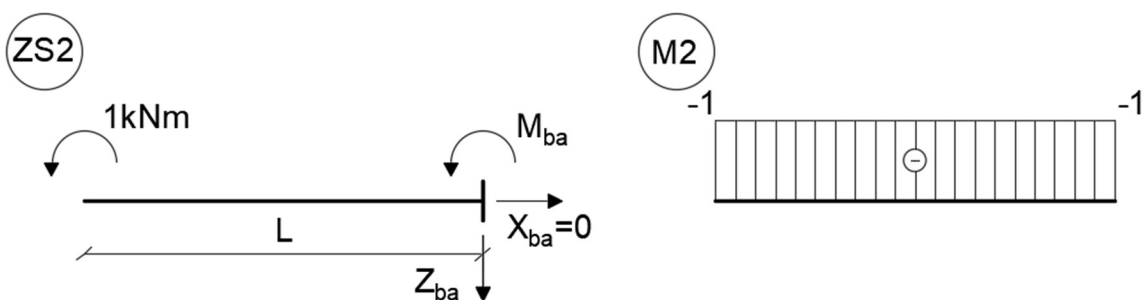
Na následujících obrázcích jsou znázorněny statické schémata průběhu ohybových momentů pro ZS0, ZS1, ZS2:



Obr. 4. 7: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0 w_{ab} , typ 111-111



Obr. 4. 8: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 w_{ab} , typ 111-111



Obr. 4. 9: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS2 w_{ab} , typ 111-111

Dále je nutné sestavit deformační podmínky a kanonické rovnice podle vztahu 3.2 a 3.3 které mají následující tvar:

$$\delta_1 = 1 \quad (4.9)$$

kde δ_1 je deformace v místě odstraněné reakce Z_{ab} .

$$\delta_2 = 0 \quad (4.10)$$

kde δ_2 je deformace v místě odstraněné reakce M_{ab} .

$$\begin{cases} \delta_{1,0} + \delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 = 1 \\ \delta_{2,0} + \delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

kde $\delta_{1,0}$ deformační součinitel od ZS1 a ZS0,

$\delta_{1,1}$ deformační součinitel od ZS1,

$\delta_{1,2}$ deformační součinitel od ZS1 a ZS2,

$\delta_{2,0}$ deformační součinitel od ZS2 a ZS0,

$\delta_{2,1}$ deformační součinitel od ZS2 a ZS1,

$\delta_{2,2}$ deformační součinitel od ZS2,

X_1 neznámá reakce Z_{ab} ,

X_2 neznámá reakce M_{ab} .

Následně se vypočítají deformační součinitele $\delta_{i,n}$ podle vztahu 3.5 a s pomocí Vereščaginova pravidla 3.6:

$$\delta_{1,0} = 0 \quad (4.12)$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} \left(\frac{(-L)L}{2} \frac{2}{3} (-L) \right) = \frac{L^3}{3EI} \quad (4.13)$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \frac{1}{EI} \left(\frac{(-L)L}{2} (-1) \right) = \frac{L^2}{2EI} \quad (4.14)$$

$$\delta_{2,0} = 0 \quad (4.15)$$

$$\delta_{2,2} = \frac{1}{EI} ((-1)L(-1)) = \frac{L}{EI} \quad (4.16)$$

Po výpočtu hodnoty deformačních součinitelů $\delta_{i,n}$ se dosadí do soustavy kanonických rovnic (4.17):

$$\begin{cases} 0 + \frac{L^3}{3EI}X_1 + \frac{L^2}{2EI}X_2 = 1 \\ 0 + \frac{L^2}{2EI}X_1 + \frac{L}{EI}X_2 = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Řešení soustavy rovnic je provedeno v MATLABu a výsledkem jsou hodnoty X_1 a X_2 :

$$Z_{ab} = X_1 = \frac{12EI}{L^3} \quad (4.18)$$

$$M_{ab} = X_2 = -\frac{6EI}{L^2} \quad (4.19)$$

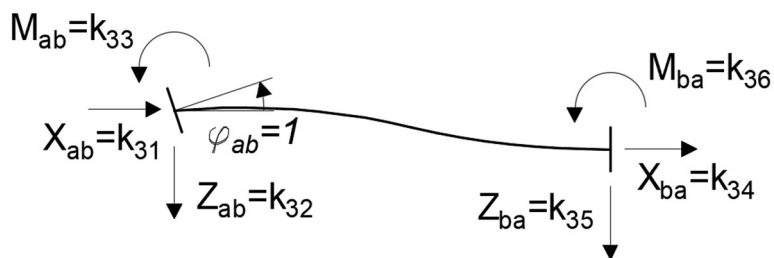
Dle rovnic rovnováhy 3.8 a 3.9 se dopočítají neznámé reakce Z_{ba} a M_{ba} :

$$Z_{ba} = -\frac{12EI}{L^3} \quad (4.20)$$

$$M_{ba} = -\frac{6EI}{L^2} \quad (4.21)$$

4.2.1.3 Vynucené jednotkové pootočení φ_{ab} ve styčnicku a

V tomto kroku se aplikuje jednotkové pootočení φ_{ab} ve styčnicku a . Schéma je znázorněno na obr. 4.10:



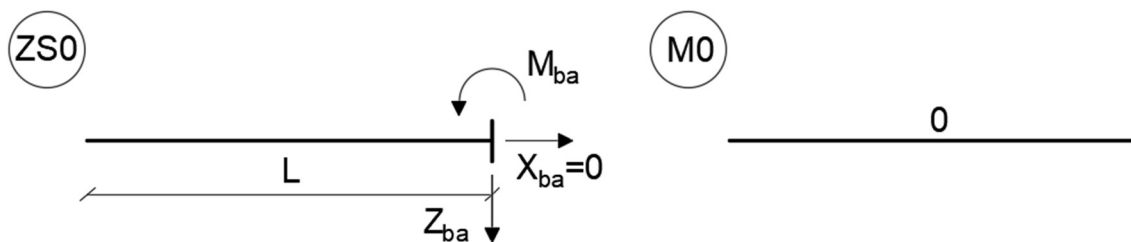
Obr. 4. 10: Aplikace jednotkového pootočení φ_{ab} ve styčnicku a , typ 111-111

Odstraněním přebytečných vazeb ve styčnicku a vzniká následující základní soustava:

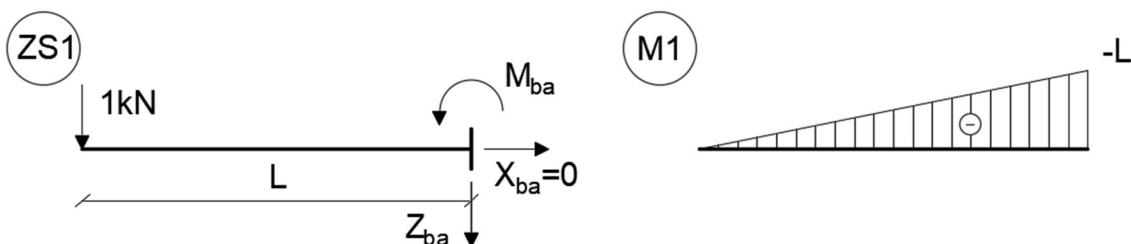


Obr. 4. 11: Základní soustava pro φ_{ab} , typ 111-111

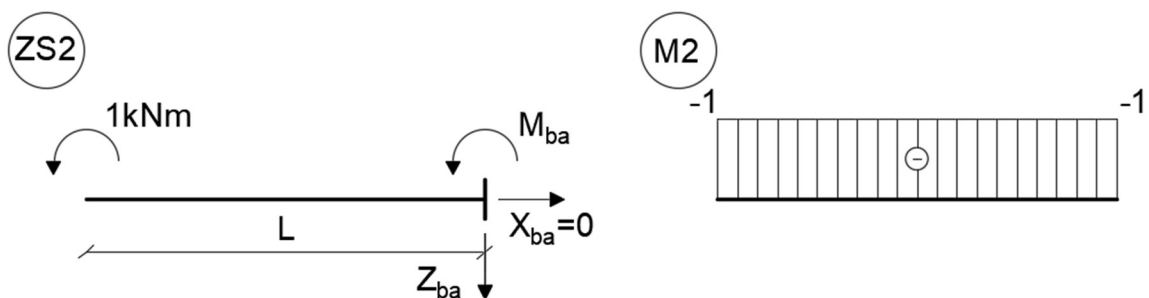
Další krok je určení zatěžovacích stavů a vykreslování průběhů ohybových momentů:



Obr. 4. 12: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0 φ_{ab} , typ 111-111



Obr. 4. 13: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 φ_{ab} , typ 111-111



Obr. 4. 14: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS2 φ_{ab} , typ 111-111

Sestavení deformačních podmínek:

$$\delta_1 = 0 \quad (4.22)$$

kde δ_1 je deformace v místě odstraněné reakce Z_{ab} .

$$\delta_2 = 1 \quad (4.23)$$

kde δ_2 je deformace v místě odstraněné reakce M_{ab} .

Po aplikaci deformačních podmínek, má soustava kanonických rovnic následující tvar:

$$\begin{cases} \delta_{1,0} + \delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 = 0 \\ \delta_{2,0} + \delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 = 1 \end{cases} \quad (4.24)$$

Hodnoty deformačních součinitelů $\delta_{i,n}$ jsou totožné s hodnotami při aplikaci jednotkového posunu w_{ab} ve styčniku a , jelikož průběh ohybových momentů je stejný při posunu w_{ab} a pootočení φ_{ab} . Liší se ale deformační podmínky.

Další krok je dosázení vztahů 4.12, 4.13, 4.14, 4.15 a 4.16 do soustavy kanonických rovnic 4.24.

$$\begin{cases} 0 + \frac{L^3}{3EI} X_1 + \frac{L^2}{2EI} X_2 = 0 \\ 0 + \frac{L^2}{2EI} X_1 + \frac{L}{EI} X_2 = 1 \end{cases} \quad (4.25)$$

Řešením soustavy rovnic 4.25 spočítáme neznáme reakce Z_{ab} a M_{ab} .

Neznámé reakce Z_{ba} a M_{ba} se dopočítají dle rovnic rovnováhy 3.8 a 3.9. Reakce X_{ab} a X_{ba} jsou nulové. Výsledné hodnoty jsou:

$$Z_{ab} = X_1 = -\frac{6EI}{L^2} \quad (4.26)$$

$$M_{ab} = X_2 = \frac{4EI}{L} \quad (4.27)$$

$$Z_{ba} = \frac{6EI}{L^2} \quad (4.28)$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{L} \quad (4.29)$$

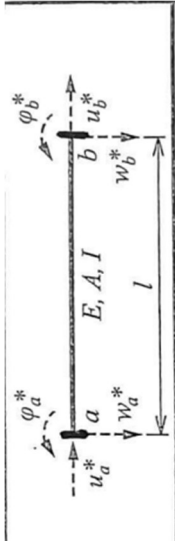
V této fázi jsou tedy spočítané všechny prvky v matici tuhosti $[\mathbf{K}_{ab}]$ (4.1). Hodnoty výsledné matice tuhosti jsou znázorněny na následujícím obr. 4.15:

typ 1 111-111

	ua	wa	fia	ub	wb	fib
Xab	EA/L	0	0	-EA/L	0	0
Zab	0	12EI/L ³	-6EI/L ²	0	-12EI/L ³	-6EI/L ²
Mab	0	-6EI/L ²	4EI/L	0	6EI/L ²	2EI/L
Xba	-EA/L	0	0	EA/L	0	0
Zba	0	-12EI/L ³	6EI/L ²	0	12EI/L ³	6EI/L ²
Mba	0	-6EI/L ²	2EI/L	0	6EI/L ²	4EI/L

Obr. 4. 15: Matice tuhosti typ 111-111, převzato z přílohy č. 2

Hodnoty matice tuhosti $[K_{ab}]$ znázorněné na obr. 4.15 jsou stejné jako v literatuře:



(8.3a)

$$[k_{a,b}^*] = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_a & w_a & \varphi_a \\ u_b & w_b & \varphi_b \end{matrix} \\ \begin{matrix} u_a \\ w_a \\ \varphi_a \\ u_b \\ w_b \\ \varphi_b \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Obr. 4. 16: Matice tuhosti typ 111-111, převzato z literatury [8]

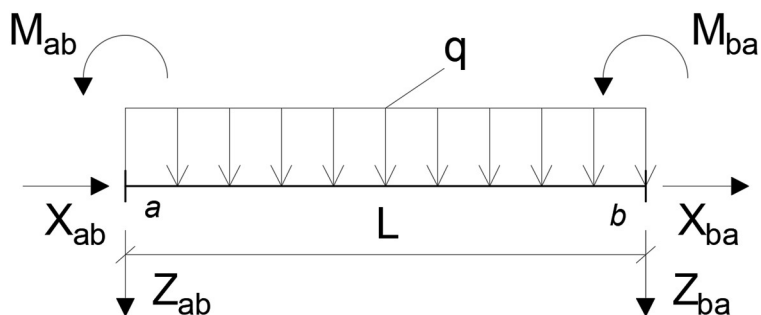
Tímto byl zkontrolován postup odvození, který se později aplikuje v odvození matic tuhosti $[K_{ab}]$ a vektoru primárních koncových sil $\{\bar{R}_{ab}\}$ jiných typu prutů.

4.2.2 Odvození vektoru primárních koncových sil

Tato podkapitola je věnována odvození vektoru primárních koncových sil $\{\bar{R}_{ab}\}$, pro typ prutu *vetknutí_vetknutí*. Odvození je provedeno pro spojité zatížení q působící po celé délce prutu a pro osamělou svislou sílu F_z působící v polovině rozpětí prutu.

4.2.2.1 Spojité zatížení q

Statické schéma prutu je znázorněno na obr. 4.17:



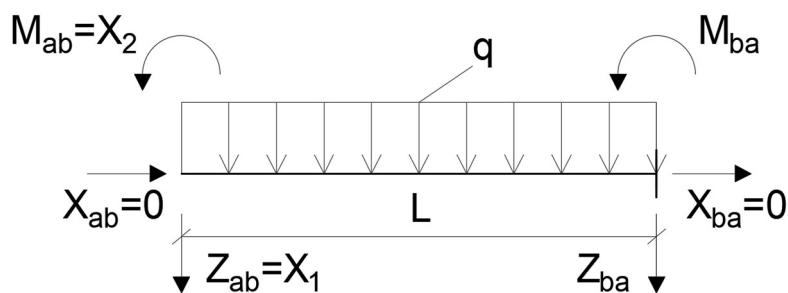
Obr. 4. 17: Statické schéma pro zatížení q , typ 111-111

Statická neurčitost n_s konstrukce se vypočítá dle vztahu 3.1.

$$n_s = 6 - 3 = 3 \quad (4.30)$$

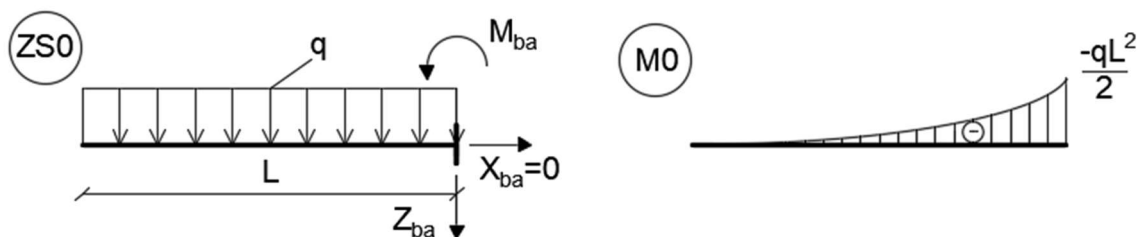
Na následujícím obr. 4.18 je zobrazena základní soustava. Konstrukce nemá

zatížení ve směru prutu, proto jsou vodorovné reakce X_{ab} a X_{ba} nulové.

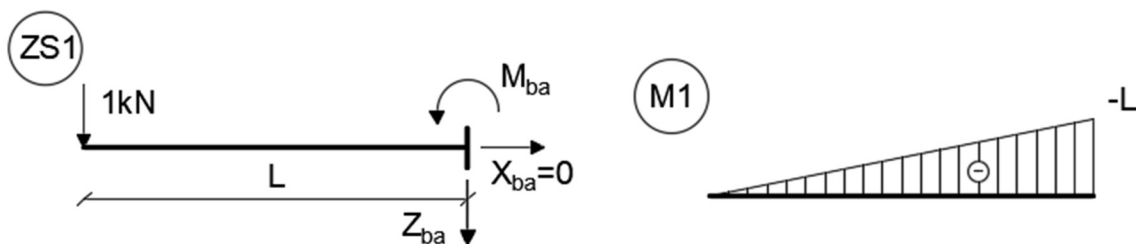


Obr. 4. 18: Základní soustava pro zatížení q , typ 111-111

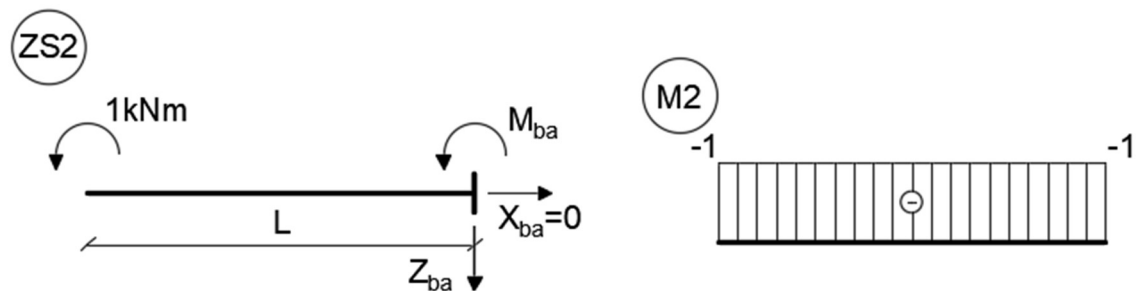
Zatěžovací stavy a průběh ohybových momentů:



Obr. 4. 19: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0 zatížení q , typ 111-111



Obr. 4. 20: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 zatížení q , typ 111-111



Obr. 4. 21: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS2 zatížení q , typ 111-111

Soustava kanonických rovnic:

$$\begin{cases} \delta_{1,0} + \delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 = 0 \\ \delta_{2,0} + \delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Výpočet deformačních součinitelů:

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI} \left(\left(\frac{-qL^2}{2} \right) \frac{L}{2} \frac{2}{3} (-L) + \frac{2}{3} \frac{1}{8} qL^2 L \frac{(-L)}{2} \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{qL^4}{6} - \frac{qL^4}{24} \right) = \frac{qL^4}{8EI} \quad (4.32)$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} \left(\frac{(-L)L}{2} \frac{2}{3} (-L) \right) = \frac{L^3}{3EI} \quad (4.33)$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \frac{1}{EI} \left(\frac{(-L)L}{2} (-1) \right) = \frac{L^2}{2EI} \quad (4.34)$$

$$\delta_{2,0} = \frac{1}{EI} \left(\left(\frac{-qL^2}{2} \right) \frac{L}{2} (-1) + \frac{2}{3} \frac{1}{8} qL^2 L (-1) \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{qL^3}{4} - \frac{qL^3}{12} \right) = \frac{qL^3}{6EI} \quad (4.35)$$

$$\delta_{2,2} = \frac{1}{EI} \left((-1)L(-1) \right) = \frac{L}{EI} \quad (4.36)$$

Dosázení deformačních součinitelů do soustavy kanonických rovnic 4.31:

$$\begin{cases} \frac{qL^4}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} X_1 + \frac{L^2}{2EI} X_2 = 0 \\ \frac{qL^3}{6EI} + \frac{L^2}{2EI} X_1 + \frac{L}{EI} X_2 = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

Řešením soustavy rovnic 4.37 se vypočítají neznáme reakce Z_{ab} a M_{ab} :

$$Z_{ab} = X_1 = -\frac{qL}{2} \quad (4.38)$$

$$M_{ab} = X_2 = \frac{qL^2}{12} \quad (4.39)$$

Neznáme reakce Z_{ba} a M_{ba} se určí dle rovnic rovnováhy 3.8 a 3.9:

$$Z_{ba} = \frac{qL}{L} \quad (4.40)$$

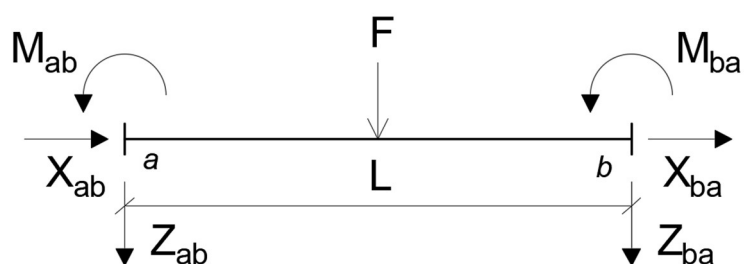
$$M_{ba} = -\frac{qL^2}{12} \quad (4.41)$$

Výsledný vektor primárních koncových sil $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$ má následující tvar:

$$\{\bar{R}_{ab}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

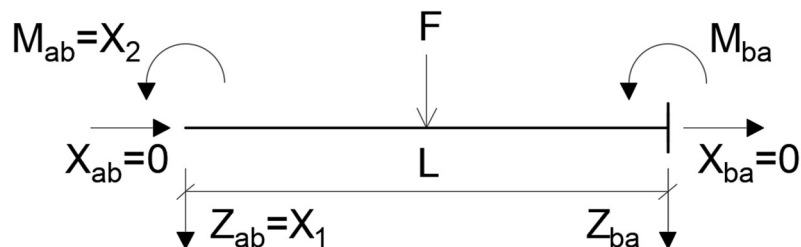
4.2.2.3 Osamělá svislá síla F_z

Statické schéma prutu s osamělou silou F_z je znázorněno na obr. 4.22:

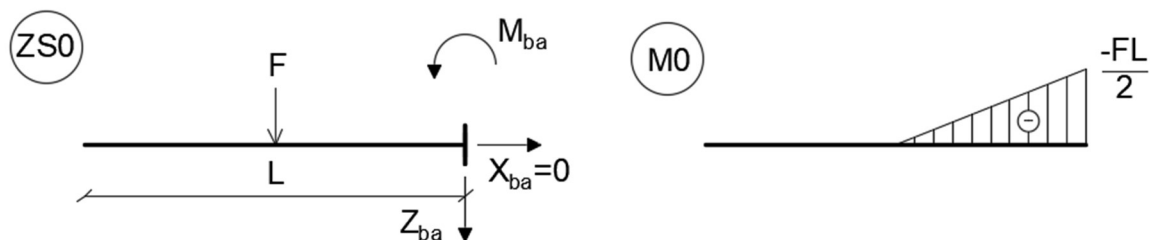


Obr. 4. 22: Statické schéma pro osamělou sílu F_z , typ 111-111

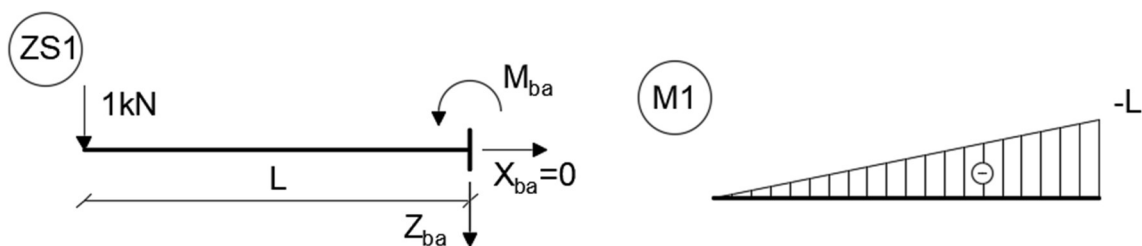
Stejným způsobem, jako pro prut se spojitým zatížením, se určí základní soustava, zatěžovací stavy a průběh ohybových momentů:



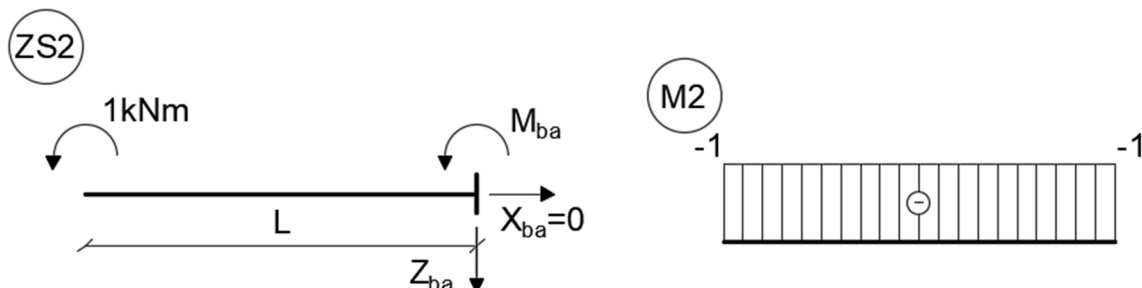
Obr. 4. 23: Základní soustava pro osamělou sílu F_z , typ 111-111



Obr. 4. 24: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0 osamělá síla F_z , typ 111-111



Obr. 4. 25: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 osamělá síla Fz, typ 111-111



Obr. 4. 26: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS2 osamělá síla Fz, typ 111-111

Soustava kanonických rovnic vypadá totožně se vztahem 4.31. Dalším krokem je výpočet deformačních součinitelů:

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI} \left(\left(\frac{-FL}{2} \right) \frac{L}{2} \frac{1}{2} \left(-\frac{L}{2} \right) + \left(\frac{-FL}{2} \frac{L}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{(-L)}{2} \right) \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{FL^3}{16} + \frac{FL^3}{24} \right) = \frac{5FL^3}{48EI} \quad (4.43)$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} \left(\frac{(-L)L}{2} \frac{2}{3} (-L) \right) = \frac{L^3}{3EI} \quad (4.44)$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \frac{1}{EI} \left(\frac{(-L)L}{2} (-1) \right) = \frac{L^2}{2EI} \quad (4.45)$$

$$\delta_{2,0} = \frac{1}{EI} \left(\left(\frac{-FL}{2} \right) \frac{L}{2} \frac{1}{2} (-1) \right) = \frac{FL^2}{8EI} \quad (4.46)$$

$$\delta_{2,2} = \frac{1}{EI} \left((-1)L(-1) \right) = \frac{L}{EI} \quad (4.47)$$

Soustava kanonických rovnic po dosazení deformačních součinitelů:

$$\begin{cases} \frac{5L^3}{48EI} + \frac{L^3}{3EI} X_1 + \frac{L^2}{2EI} X_2 = 0 \\ \frac{FL^2}{8EI} + \frac{L^2}{2EI} X_1 + \frac{L}{EI} X_2 = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

Řešením vztahu 4.48 je:

$$Z_{ab} = X_1 = -\frac{F}{2} \quad (4.49)$$

$$M_{ab} = X_2 = \frac{FL}{8} \quad (4.50)$$

Neznáme reakce Z_{ba} a M_{ba} se určí dle rovnic rovnováhy 3.8 a 3.9:

$$Z_{ba} = \frac{F}{2} \quad (4.51)$$

$$M_{ba} = -\frac{FL}{8} \quad (4.52)$$

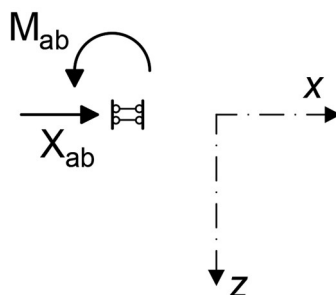
Vektor primárních koncových sil $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$ má následující tvar:

$$\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{F}{2} \\ \frac{FL}{8} \\ 0 \\ \frac{F}{2} \\ -\frac{F}{2} \\ \frac{FL}{8} \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

4.3 Odvození pro typ prutu 101 – 111

Typ prutu s kódovým číslem 101-111 má typ podepření *posuvné vetknutí kolmo na osu prutu* v levém styčnicku *a* a *vetknutí* v pravém styčnicku *b*. Pro odvození matice tuhosti $[\mathbf{K}_{ab}]$ a vektoru primárních koncových sil $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$ bude aplikován princip řešení, který byl popsán v podkapitole 4.2. Odvozené matice pak budou použity pro analýzu modelů konstrukcí s typem prutu 101-111. Při analýze prutové konstrukce pomocí MATLABu budou vypočítány neznámé parametry deformací. Následně tyto parametry ověřím pomocí stejného výpočtu deformací ve SCIA Engineer. Pokud jsou parametry deformací shodné při obou analýzách, jsou matice odvozeny správně.

Označení posuvného vetknutí kolmo na osu prutu bylo převzato z [7].:

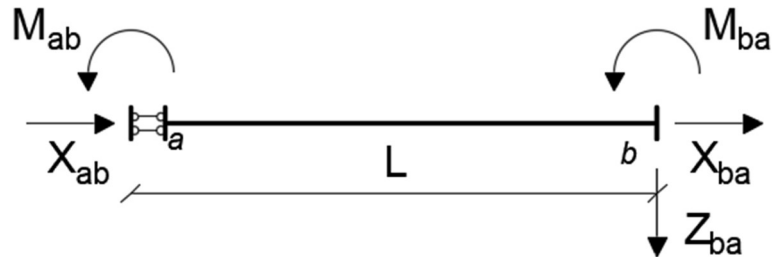


Obr. 4. 27: Typ připojení 101

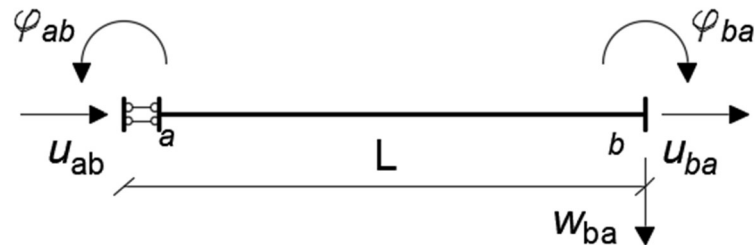
4.3.1 Odvození matice tuhosti

Matice tuhosti $[K_{ab}]$ prutu typu 101-111 má stejný tvar a rozměrnost jako matice tuhosti oboustranně vetknutého prutu 4.1.

Prut 101-111 má následující statické schéma a schéma deformací:



Obr. 4. 28: : Statické schéma, typ 101-111



Obr. 4. 29: Schéma deformací, typ 101-111

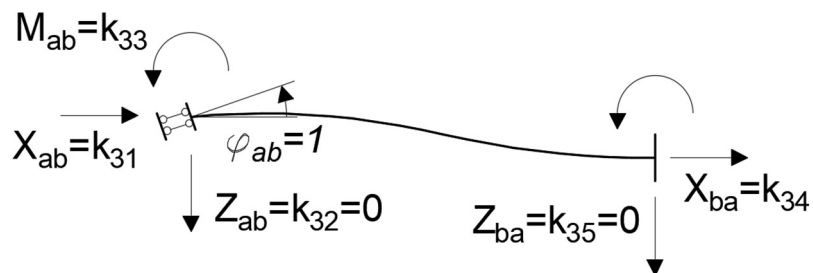
Odvození neznámých prvků matice tuhosti $[K_{ab}]$ 4.1 je popsáno pro první u_{ab} a třetí φ_{ab} sloupec. Druhý sloupec w_{ab} má prvky s nulovou hodnotou kvůli typu podepření. Matice tuhosti je symetrická, odvození pro ostatní sloupce je možné vidět ve příloze 1. Ručně odvození.

4.3.1.1 Vynucený jednotkový posun u_{ab} ve styčnicku a

Odvození pro jednotkový posun u_{ab} ve styčnicku a je identický jako pro typ prutu vetknutí-vetknutí.

Hodnoty neznámých prvků matice k_{11} jsou popsány ve vztahu 4.6 a pro k_{41} ve vztahu 4.7.

4.3.1.2 Vynucené jednotkové pootočení φ_{ab} ve styčnicku a

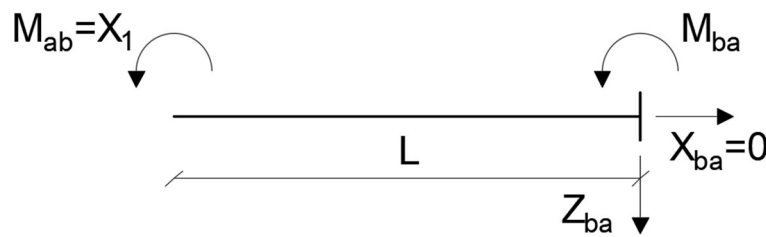


Obr. 4. 30: Aplikace jednotkového pootočení φ_{ab} ve styčnicku a, typ 101-111

Stupeň statické neurčitosti n_s se vypočítá dle vztahu 3.1.

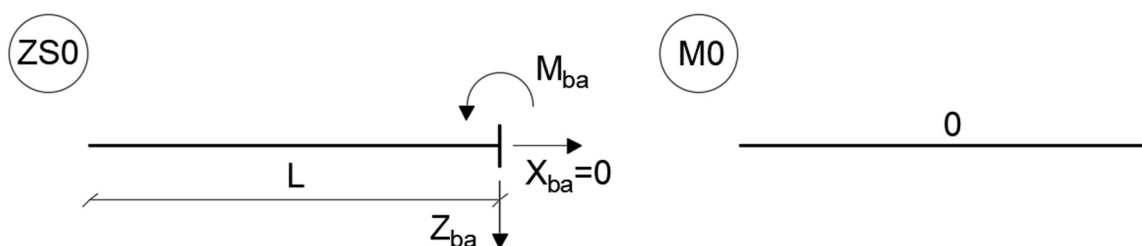
$$n_s = 5 - 3 = 2 \quad (4.54)$$

Odstraněním přebytečných reakcí X_{ab} a M_{ab} ve styčnicku a vzniká základní soustava. Prutová konstrukce nemá žádné zatížení ve směru osy prutu, proto X_{ab} má nulovou hodnotu a tím vznikne pouze zatěžovací stav 0 a 1.

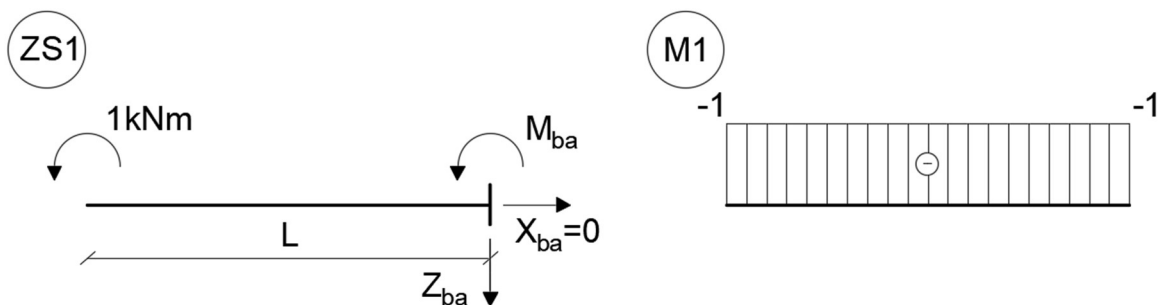


Obr. 4. 31: Základní soustava pro φ_{ab} , typ 101-111

Zatěžovací stavy a průběh ohybových momentů:



Obr. 4. 32: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0 φ_{ab} , typ 101-111



Obr. 4. 33: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 φ_{ab} , typ 101-111

Kanonické rovnice:

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 1 \quad (4.55)$$

Výpočet deformačních součinitelů:

$$\delta_{1,0} = 0 \quad (4.56)$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} ((-1)L(-1)) = \frac{L}{EI} \quad (4.57)$$

Po dosazení deformačních součinitelů do kanonické rovnice se dopočítá X_1 :

$$X_1 = \frac{EI}{L} \quad (4.58)$$

Reakce X_{ab} , X_{ba} , Z_{ab} a Z_{ba} jsou nulové. Neznámá reakce M_{ba} se určí dle rovnice rovnováhy 3.9.

$$M_{ba} = -\frac{EI}{L} \quad (4.59)$$

Výsledná matice tuhosti $[K_{ab}]$ 4.1 má následující tvar:

typ 5 101-111

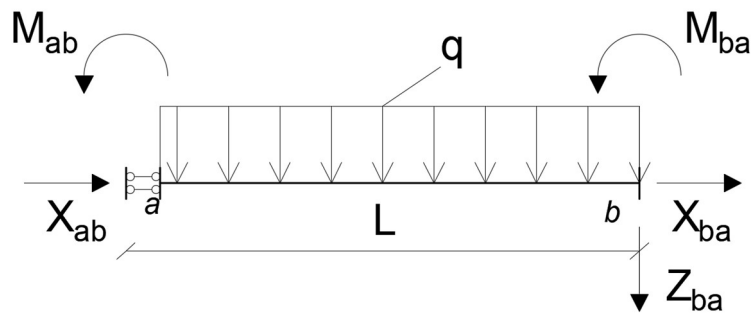
	ua	wa	fa	ub	wb	fb
Xab	EA/L	0	0	-EA/L	0	0
Zab	0	0	0	0	0	0
Mab	0	0	EI/L	0	0	-EI/L
Xba	-EA/L	0	0	EA/L	0	0
Zba	0	0	0	0	0	0
Mba	0	0	-EI/L	0	0	EI/L

Obr. 4. 34: Matice tuhosti typ 101-111, převzato z přílohy č. 3.

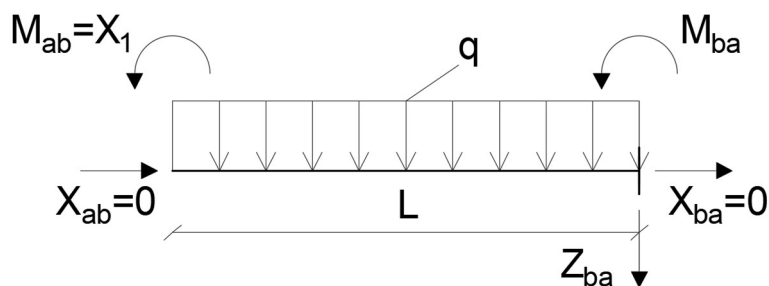
4.3.2 Odvození vektoru primárních koncových sil

Odvození vektoru primárních koncových sil $\{\bar{R}_{ab}\}$ pro typ prutu 101-111 je provedeno stejným způsobem jako pro prut *vetknutí-vetknutí*.

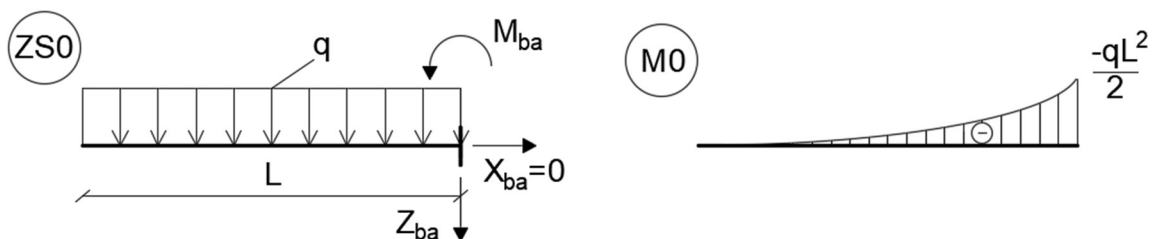
4.3.2.1 Spojité zatížení q



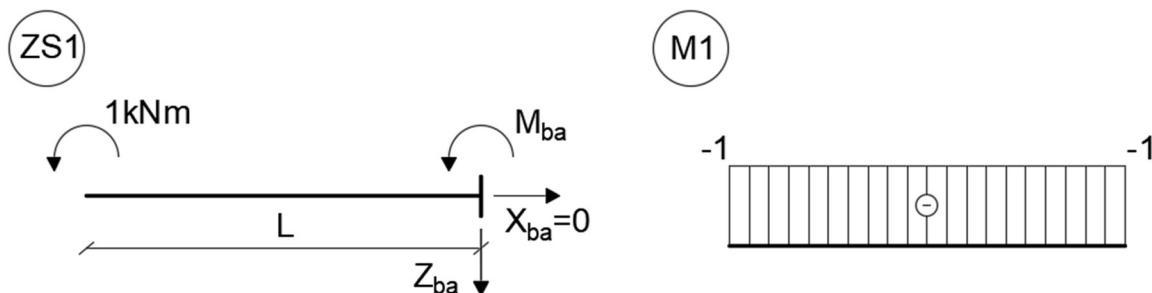
Obr. 4. 35: Statické schéma pro zatížení q , typ 101-111



Obr. 4. 36: Základní soustava pro zatížení q , typ 101-111



Obr. 4. 37: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0 zatížení q , typ 101-111



Obr. 4. 38: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 zatížení q , typ 101-111

Kanonické rovnice:

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0 \quad (4.60)$$

Deformační součinitele:

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI} \left(\left(\frac{-qL^2}{2} \right) \frac{L}{2} (-1) + \frac{21}{38} qL^2 L (-1) \right) = \frac{1}{EI} \left(\frac{qL^3}{4} - \frac{qL^3}{12} \right) = \frac{qL^3}{6EI} \quad (4.61)$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} ((-1)L(-1)) = \frac{L}{EI} \quad (4.62)$$

Dosazení deformačních součinitelů do kanonických rovnic:

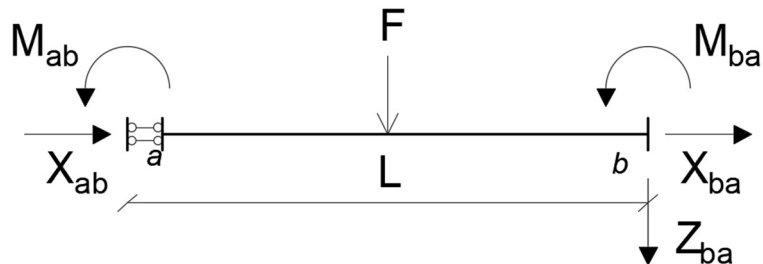
$$\frac{qL^3}{6EI} + \frac{L}{EI} X_1 = 0 \quad (4.63)$$

Řešením rovnice 4.63 je M_{ab} . Neznámý moment M_{ba} se dopočítá dle rovnice rovnováhy 3.9. Hodnoty X_{ab} , X_{ba} , Z_{ab} a Z_{ba} jsou nulové.

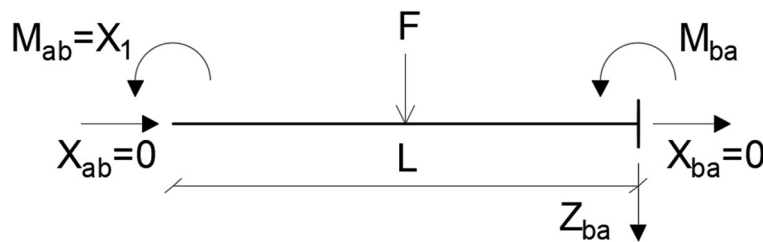
Výsledný vektor primárních koncových sil $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$ má následující tvar:

$$\{\bar{R}_{ab}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -qL^2 \\ 6 \\ 0 \\ -qL \\ -qL^2 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

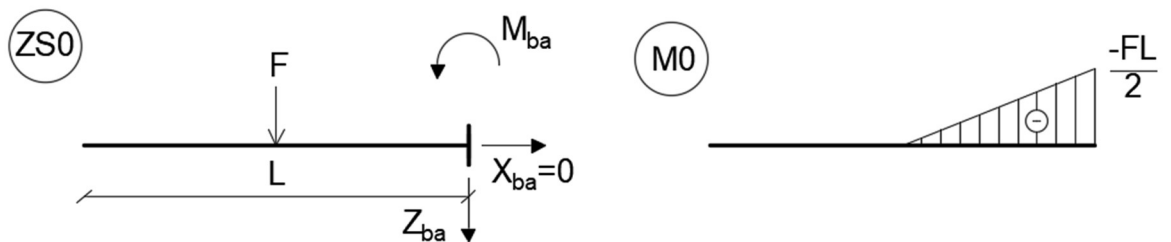
4.3.2.2 Osamělá svislá síla F_z



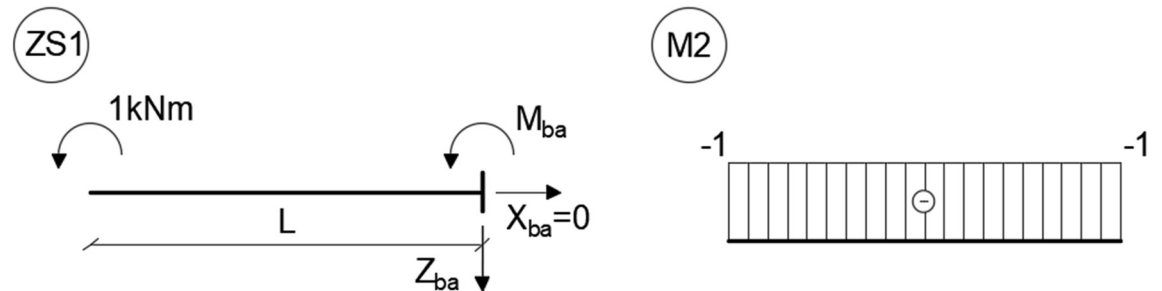
Obr. 4. 39: Statické schéma pro osamělou sílu F_z , typ 101-111



Obr. 4. 40: Základní soustava pro osamělou sílu F_z , typ 101-111



Obr. 4. 41: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0 osamělá síla F_z , typ 101-111



Obr. 4. 42: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 osamělá síla F_z , typ 101-111

Kanonické rovnice:

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0 \quad (4.65)$$

Deformační součinitele:

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI} \left(\left(\frac{-FL}{2} \right) \frac{L}{2} \frac{1}{2} (-1) \right) = \frac{FL^2}{8EI} \quad (4.66)$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} ((-1)L(-1)) = \frac{L}{EI} \quad (4.67)$$

Dosazení deformačních součinitelů do kanonických rovnic:

$$\frac{FL^2}{8EI} + \frac{L}{EI} X_1 = 0 \quad (4.68)$$

Řešením rovnice je M_{ab} , neznámý moment M_{ba} se dopočítá dle rovnice rovnováhy 3.9. $X_{ab}, X_{ba}, Z_{ab}, Z_{ba}$ jsou nulové.

Výsledný vektor primárních koncových sil $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$ má následující tvar:

$$\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-FL}{8} \\ 0 \\ -F \\ \frac{-3FL}{8} \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$

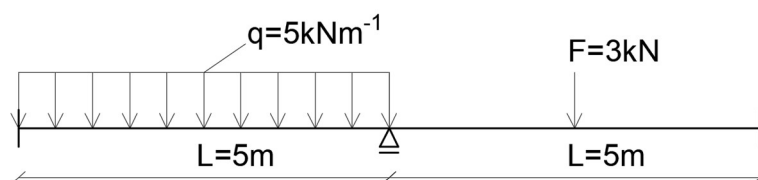
5. Řešené příklady

Tato kapitola je věnovaná analýze modelů konstrukcí s různými typy kloubů. Analýza je udělána pro sedm různých příkladů.

Pro každou konstrukci je vytvořených několik výpočtových modelů, které se liší počtem neznámých parametrů deformací a typem prutů. Pro analýzu konstrukcí se používá MATLAB, výstupem výpočtu v MATLABu jsou hodnoty neznámých parametrů deformací, reakcí a vnitřních sil. Výsledky výpočtů z MATLABu jsou zkontrolovány s pomocí SCIA Engineer. Následně jsou výsledky porovnány.

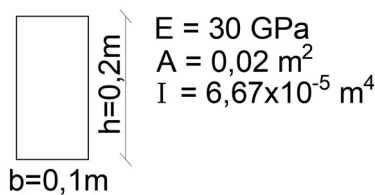
5.1 Příklad č. 1

Statické schéma příkladu č. 1 je možné vidět na obr. 5.1:



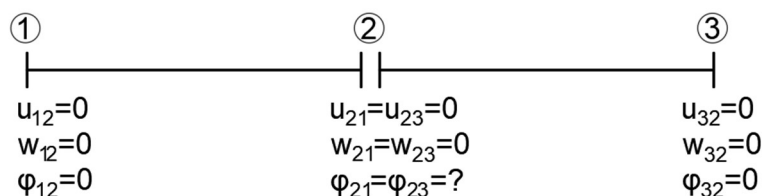
Obr. 5. 1: Statické schéma příkladu č. 1

Průřezové a materialové charakteristiky, které jsou nutné pro analýzu prutové konstrukce, jsou znázorněny na obr. 5.2:



Obr. 5. 2: Průřezové a materialové charakteristiky

Pro analýzu konstrukcí je nutné sestavit výpočtový model, na kterém budou označeny čísla styčníků a neznámé parametry deformace. Výpočtový model je znázorněn na obr. 5.3:



Obr. 5. 3. Výpočtový model příklad č. 1

Z výpočtového modelu je vidět, že neznámá deformace je pootočení ve styčnicku číslo dva po aplikaci kondenzace.

Index pro pootočení v globální matici tuhosti a vektoru neznámých parametrů deformací je číslo šest. Jestli jsou parametry deformace ve styčnicku stejné pro prut 12 a 23, budou se indexovat jenom podle čísla styčnicku. Takže například pro $\varphi_{21} = \varphi_{23}$, se bude používat označení φ_2 . Stejný princip se bude používat v dalších příkladech.

Pro sestávení globální matice tuhosti celé konstrukce, se v MATLABu vytvoří (napíše) funkce *vetknuti_vetknuti*, která počítá matici tuhosti prutu. Ukázka funkce je zobrazená na obr 5.4:

```
function k = vetknuti_vetknuti(E,I,L,A) %111_111

E = input ('enter the Young modulus'); %Modul pružnosti v tahu a v tlaku E [Pa]
I = input ('enter the moment inertia'); %% Moment setrvačnosti obdelnikového
průřezu [m^4]
L = input ('enter the length of the beam'); %Délka prutu [m]
A = input ('enter the area of the beam'); %Plocha průřezu [m^2]

%Matice tuhosti prutu typ 111_111

k = [ E*A/L, 0, 0, -E*A/L, 0, 0;
      0, 12*E*I/L^3, -6*E*I/L^2, 0, -12*E*I/L^3, -6*E*I/L^2;
      0, -6*E*I/L^2, 4*E*I/L, 0, 6*E*I/L^2, 2*E*I/L;
      -E*A/L, 0, 0, E*A/L, 0, 0;
      0, -12*E*I/L^3, 6*E*I/L^2, 0, 12*E*I/L^3, 6*E*I/L^2;
      0, -6*E*I/L^2, 2*E*I/L, 0, 6*E*I/L^2, 4*E*I/L];

end
```

Obr. 5. 4: Funkce *vetknuti_vetknuti* v MATLABu

Následně se tato funkce bude používat pro sestavení globální matice tuhosti celé konstrukce. Algoritmus je znázorněn na obr. 5.5:

```
numElements = 2; %Počet prutu
numNodes = 3; %Počet uzlu
numDOFpernode = 3; %Stupeň volnosti uzlu
numDOF = numNodes * numDOFpernode; %Stupeň volnosti celé konstrukce
K_global = zeros (numDOF, numDOF); %Globalní matice tuhosti

%Pomocná matice pro sestávení globalní matice tuhosti
PM = [1 2 3 4 5 6; %číslování deformací pro prut 1-2
      4 5 6 7 8 9] %číslování deformací pro prut 2-3

%Sestavení globalní matice tuhosti celé konstrukce
for i= 1:numElements

    K_global(PM(i,:),PM(i,:)) = K_global(PM(i,:),PM(i,:)) + vetknuti_vetknuti;

end
```

Obr. 5. 5: Algoritmus sestavení globální matice tuhosti celé konstrukce

Stejným principem se pomocí indexů udělá vektor primárních koncových sil s pomocí funkcí *q_zatizeni* a *F_zatizeni*. Ukázka kódu je zobrazená na následujícím obrázku:

```
%Sestavení globalního vektoru primárních koncových účinků
numqElements = 1;
numFElements = 1;
R_global = zeros (numDOF, 1);

for i=1:numqElements
    R_vector{i} = q_zatizeni
    R_global ([1 2 3 4 5 6],[1]) = R_global ([1 2 3 4 5 6],[1]) + R_vector{i}
    for j=1:numFElements
        R_vector{j} = F_zatizeni
```

```

R_global ([4 5 6 7 8 9],[1]) = R_global ([4 5 6 7 8 9],[1]) +
R_vector{j}
end
end

```

Obr. 5. 6: Algoritmus sestavení globálního vektoru primárních koncových sil

Výpis z MATLABu globálního vektoru neznámých parametrů deformací:

```

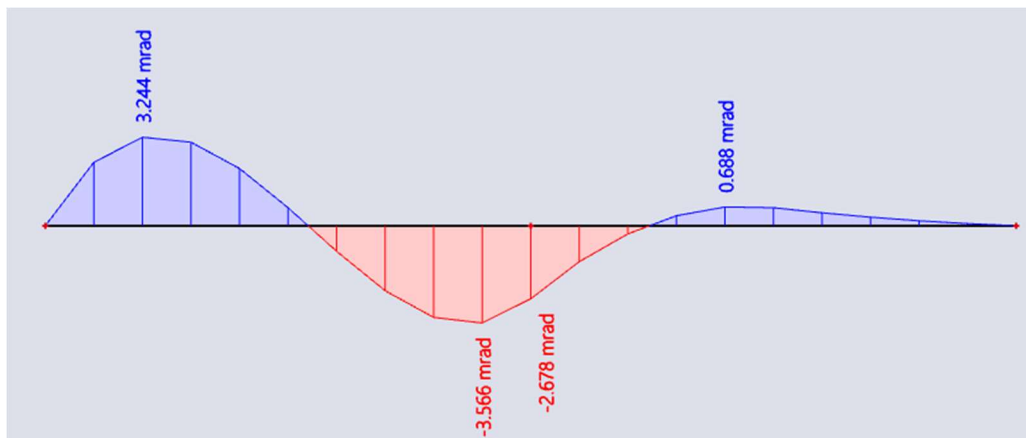
Globální vektor neznámých parametrů deformací

u12  w12  fi12  u2  w2  fi2  u32  w32  fi32
-----
0    0    0    0    0  2.655991  0    0    0

```

Obr. 5. 7: Výpis globálního vektoru neznámých parametrů deformací v MATLABu

Kontrola výpočtu se provede pomocí SCIA Engineer. Hledaná veličina je pootočení φ_2 , uprostřed prutové konstrukce:



Obr. 5. 8: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 1

Záporná hodnota pootočení φ_2 ve SCIA Engineer je způsobena jiným směrem konvencí. Směr osy z ve SCIA Engineer má osu směrem nahoru, v MATLABu směřuje osa z dolů podle kladné konvence uvedené na obr. 2.7.

Dalším krokem je výpočet reakcí a vnitřních sil. Výsledky hodnot a porovnání jsou znázorněny v tabulkách 5.1, 5.2 a 5.3:

Tabulka 5. 1: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 1

Deformace			
Typ	MATLAB [mrad]	SCIA [mrad]	Rozdíl [%]
φ_2	2.656	2.678	0.822

Tabulka 5. 2: Porovnání výsledků reakcí, příklad č. 1

Reakce			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
R_{1x}	0.000	0.000	0.000
R_{1z}	-13.781	-13.718	0.459
M_1	12.552	12.545	0.056
R_{2z}	-14.000	-14.000	0.000
R_{3x}	0.000	0.000	0.000
R_{3z}	-0.219	-0.220	0.457
M_3	0.260	0.253	2.767

Tabulka 5. 3: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 1

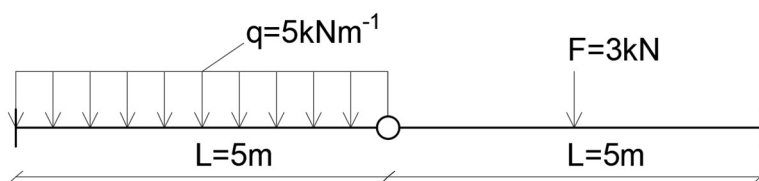
Vnitřní síly			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
N_{12}	0.000	0.000	0.000
V_{12}	13.781	13.718	0.459
M_{12}	-12.552	-12.545	0.056
N_{21}	0.000	0.000	0.000
V_{21}	-11.219	-11.220	0.009
M_{21}	-6.149	-6.146	0.049
N_{23}	0.000	0.000	0.000
V_{23}	2.781	2.780	0.036
M_{23}	-6.149	-6.146	0.049
N_{32}	0.000	0.000	0.000
V_{32}	-0.219	-0.220	0.457
M_{32}	0.260	0.253	2.767

Minimalní rozdíl je způsobený tím, že SCIA Engineer započítává vliv posouvajících sil. Na rozdíl výsledku má vliv také zaokrouhlování.

5.2 Příklad č. 2

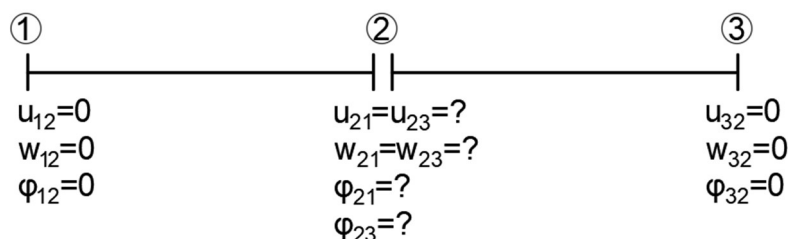
Příklad č. 2 je podobný s předchozím příkladem s jedním rozdílem: uprostřed prutové konstrukce je umístěn kloub místo posuvného kloubového podepření. Průřezové a materiálové charakteristiky jsou stejné s příkladem č. 1 a jsou uvedeny na obr. 5.2.

Statické schéma je zobrazeno na obr. 5.9:

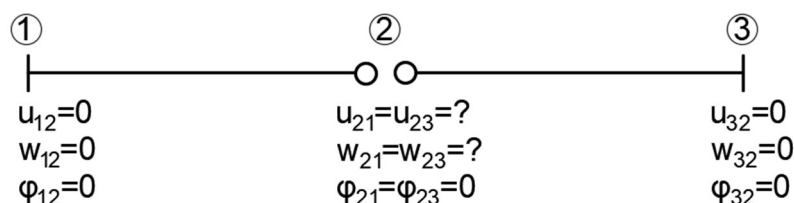


Obr. 5. 9: Statické schéma příkladu č. 2

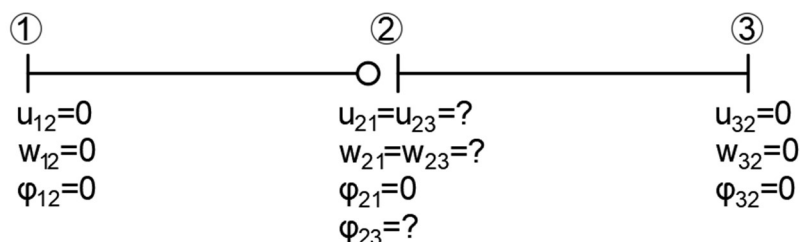
Jsou celkem čtyři výpočtové modely, které se liší různým modelováním prutů. Výpočtové modely jsou znázorněny na následujících obrázcích:



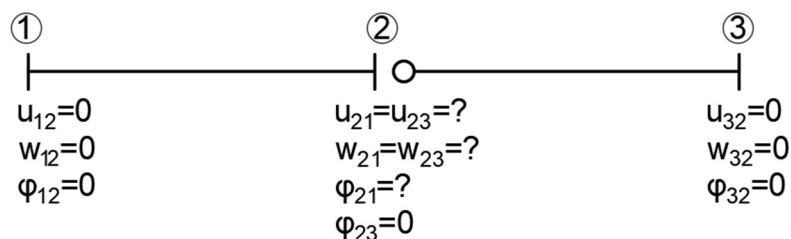
Obr. 5. 10: Výpočtový model č. 1, příklad č. 2



Obr. 5. 11: Výpočtový model č. 2, příklad č. 2



Obr. 5. 12: Výpočtový model č. 3, příklad č. 2



Obr. 5. 13: Výpočtový model č. 4, příklad č. 2

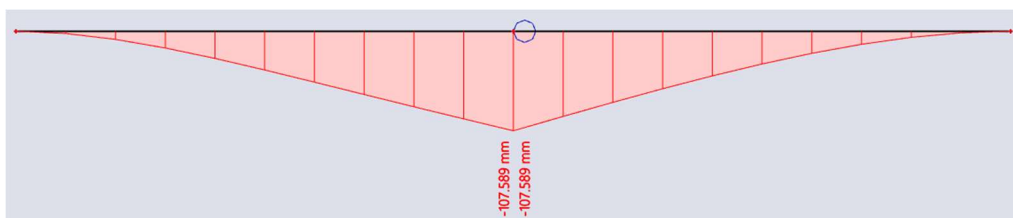
Ve výpočtovém modelu č. 1 je vidět, že jsou zde čtyři neznámé parametry deformací po aplikaci okrajových podmínek u_2 , w_2 , φ_{21} a φ_{23} , nachází se ve styčnicku 2. V porovnání, model č. 2 má pouze dva neznámé parametry u_2 a w_2 . Výpočtové modely z prutů typu *vetknutí-vetknutí* mají větší počet neznámých parametrů deformací v porovnání s modelem obsahující kloubové připojení.

Pro každý model je taky nutné rozlišovat celkový počet deformací a počet neznámých parametrů vektoru deformace po aplikaci kondenzace. Shrnutí výsledku z MATLABu je znázorněno v tabulce 5.4:

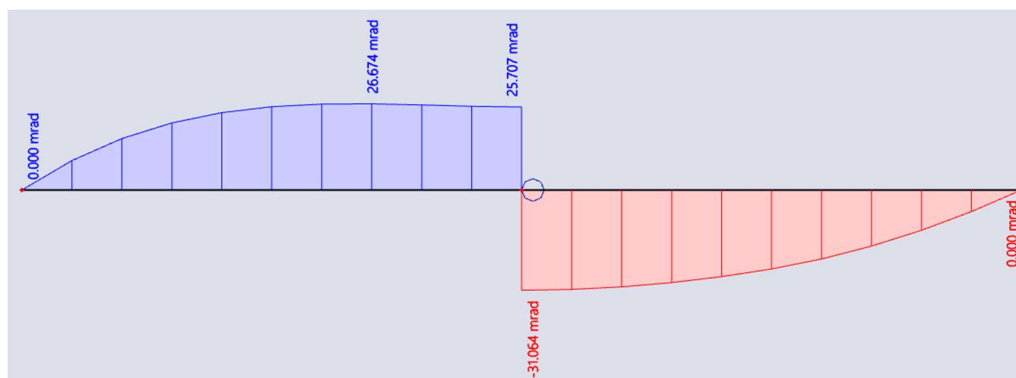
Tabulka 5. 4: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 2

Parametry deformací						
№ Modelů	u_2 [mm]	w_2 [mm]	φ_{21} [mrad]	φ_{23} [mrad]	Celkový počet	Počet neznámých
1	0	106.887	-25.588	30.900	10	4
2	0	106.887	-	-	9	2
3	0	106.887	-	30.900	10	3
4	0	106.887	-25.588	-	10	3

Kontrola výpočtu neznámých parametrů deformací byla provedena ve SCIA Engineer, hodnoty svislého posunu a pootočení jsou znázorněny na obr. 5.14 a 5.15:



Obr. 5. 14: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 2



Obr. 5. 15: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 2

V MATLABu byly dále výpočítány hodnoty reakcí a vnitřních sil. Hodnoty byly zkontrolovány ve SCIA Engineer.

Porovnání výsledků neznámých parametrů deformací, reakcí a vnitřních sil:

Tabulka 5. 5: Porovnání výsledků deformací, příklad č. 2

Deformace			
Typ	MATLAB [mrad, mm]	SCIA [mrad,mm]	Rozdíl [%]
u_2	0.000	0.000	0.000
w_2	106.887	107.589	0.657
φ_{21}	-25.588	-25.707	0.465
φ_{23}	30.900	31.064	0.531

Tabulka 5. 6: Porovnání výsledků reakcí, příklad č. 2

Reakce			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
R_{1x}	0.000	0.000	0.000
R_{1z}	-20.781	-20.780	0.005
M_1	41.406	41.399	0.017
R_{3x}	0.000	0.000	0.000
R_{3z}	-7.219	-7.202	0.236
M_3	-28.594	-28.601	0.024

Tabulka 5. 7: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 2

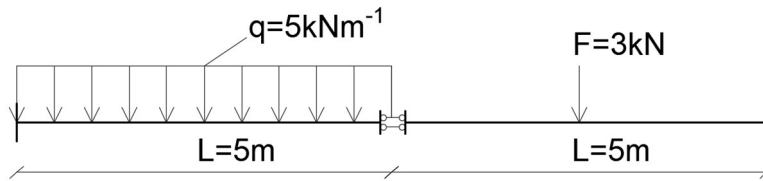
Vnitřní síly			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
N_{12}	0.000	0.000	0.000
V_{12}	20.781	20.78	0.005
M_{12}	-41.406	-41.399	0.017
N_{21}	0.000	0.000	0.000
V_{21}	-4.219	-4.220	0.024
M_{21}	0.000	0.000	0.000
N_{23}	0.000	0.000	0.000
V_{23}	-4.219	-4.220	0.024
M_{23}	0.000	0.000	0.000
N_{32}	0.000	0.000	0.000
V_{32}	-7.219	-7.202	0.236
M_{32}	-28.594	-28.601	0.024

Jak je vidět z tabulek 5.5, 5.6 a 5.7, hodnoty se liší minimálně. Modelování prutů s kloubovým připojením umožňuje vyřešit konstrukci s minimálním počtem neznámých.

5.3 Příklad č. 3

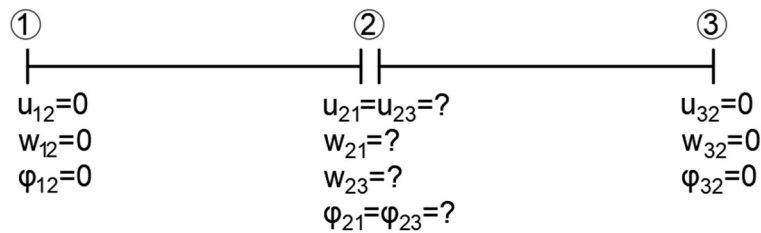
Tato podkapitola se zabývá analýzou prutové konstrukce obsahující *posuvné vetknutí kolmo na osu prutu*. Analýzou této konstrukce se ověří správnost odvozených matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil pro typy prutů s kódovým číslem *111_101* a *101_111*.

Statické schéma je znázorněná na obr 5.16:



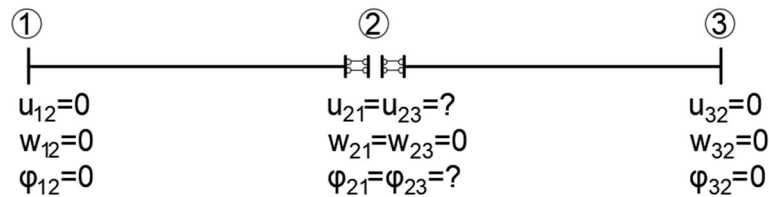
Obr. 5. 16: Statické schéma příkladu č. 3

Stejně jako v příkladu č. 2 se sestaví výpočtové modely. Model č. 1 se skládá z prutů typu *vetknutí-vetknutí* a neznámé parametry deformace jsou u_2, w_{21}, w_{23} a φ_2 . Model je zobrazen na obr. 5.17:



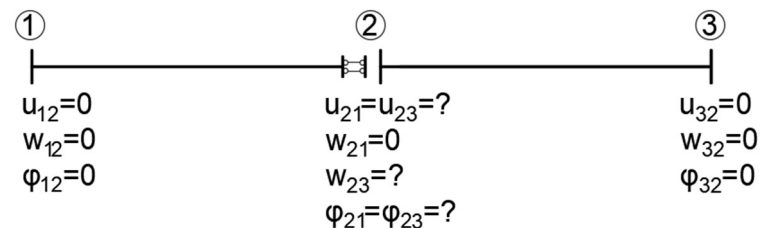
Obr. 5. 17: Výpočtový model č. 1, příklad č. 3

Výpočtový model č.2 je se skládá z prutů obsahující *posuvné vetknutí kolmo na osu prutu*, kodové čísla *111_101* a *101_111*. Neznámé parametry deformace jsou u_2 a φ_2 . Model je znázorněn na obr. 5.18:



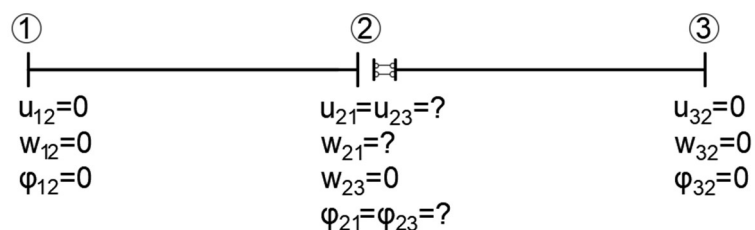
Obr. 5. 18: Výpočtový model č. 2, příklad č. 3

Výpočtový model č. 3 se skládá z prutů s kodovými čísly *111-101* a *111_111*. Neznámé parametry deformace jsou u_2, w_{23} a φ_2 . Model je znázorněn na obr. 5.19:



Obr. 5. 19: Výpočtový model č. 3, příklad č. 3

Výpočtový model č. 4 je podobný modelu č. 3, kodové čísla prutů jsou *111_111* a *101_111*. Model je možné vidět na obr. 5.20:



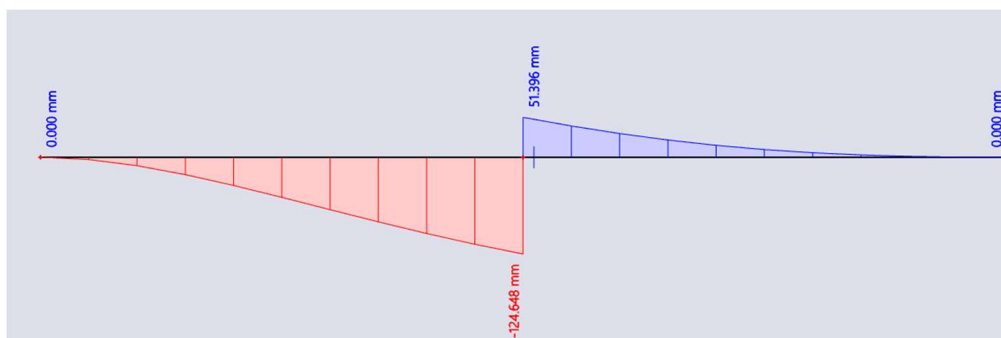
Obr. 5. 20: Výpočtový model č. 4, příklad č. 3

Shrnutí výsledků z výpočtu v MATLABu je znázorněno v tabulce 5.8:

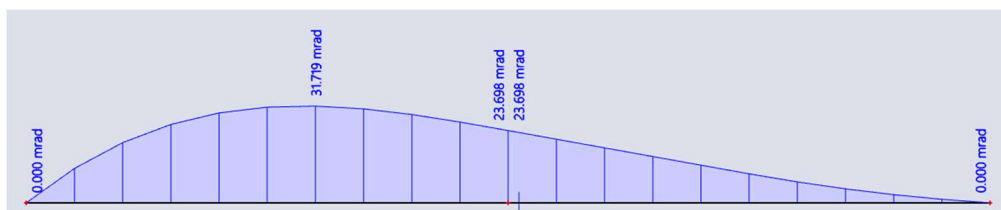
Tabulka 5. 8: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 3

Parametry deformací						
№ Modelů	u_2 [mm]	w_{21} [mm]	w_{23} [mm]	φ_2 [mrad]	Celkový počet	Počet neznámých
1	0	123.7300	-51.176	-23.580	10	4
2	0	-	-	-23.580	9	2
3	0	-	-51.176	-23.580	10	3
4	0	123.730	-	-23.580	10	3

Hodnoty parametrů deformací musí být dále zkontrolovány pomocí SCIA Engineer, k ověření, zda odvození matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil v podkapitole 4.3 bylo uděláno správně.



Obr. 5. 21: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 3



Obr. 5. 22: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 3

Odzovení bylo provedeno správně, porovnání výsledku deformace, reakce a vnitřních sil je znázorněno v tabulkách 5.9, 5.10 a 5.11:

Tabulka 5. 9: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 3

Deformace			
Typ	MATLAB [mrad, mm]	SCIA [mrad,mm]	Rozdíl [%]
u_2	0.000	0.000	0.000
w_{21}	123.7300	124.648	0.742
w_{23}	-51.176	-51.396	0.430
φ_2	-23.580	-23.698	0.500

Tabulka 5.10: Porovnání výsledků reakce, příklad č. 3

Reakce			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
R_{1x}	0.000	0.000	0.000
R_{1z}	-25.000	-25.000	0.000
M_1	51.146	51.146	0.000
R_{3x}	0.000	0.000	0.000
R_{3z}	-3.000	-3.000	0.000
M_3	3.854	3.854	0.000

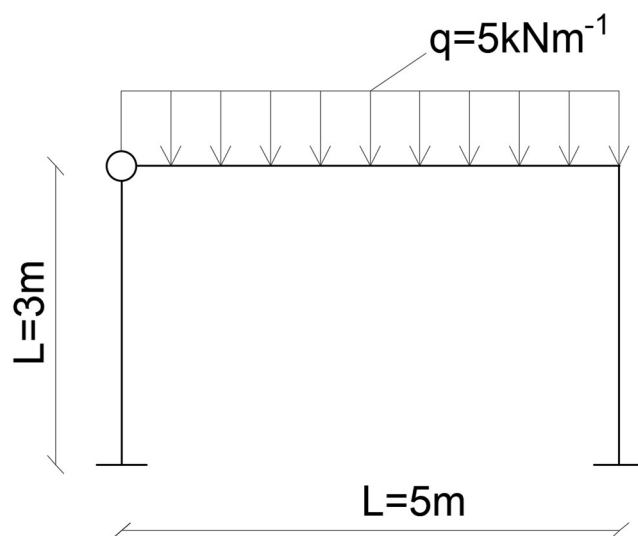
Tabulka 5. 11: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 3

Vnitřní síly			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
N_{12}	0.000	0.000	0.000
V_{12}	25.000	25.000	0.000
M_{12}	-51.146	-51.146	0.000
N_{21}	0.000	0.000	0.000
V_{21}	0.000	0.000	0.000
M_{21}	11.354	11.354	0.000
N_{23}	0.000	0.000	0.000
V_{23}	0.000	0.000	0.000
M_{23}	11.354	11.354	0.000
N_{32}	0.000	0.000	0.000
V_{32}	-3.000	-3.000	0.000
M_{32}	3.854	3.854	0.000

Výsledné hodnoty z MATLABu a SCIA Engineer se liší minimalně. Což potvrzuje správnost odvození matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil pro typy prutů s uvolněním III_{10I} a $10I_{III}$. Stejně jako v příkladu č. 2, výpočtový model s uvolněním má nejmenší počet neznámých.

5.4 Příklad č. 4

Další příklad, který byl spočítán je rámová konstrukce s kloubem. Statické schéma je možné vidět na obr. 5.23:



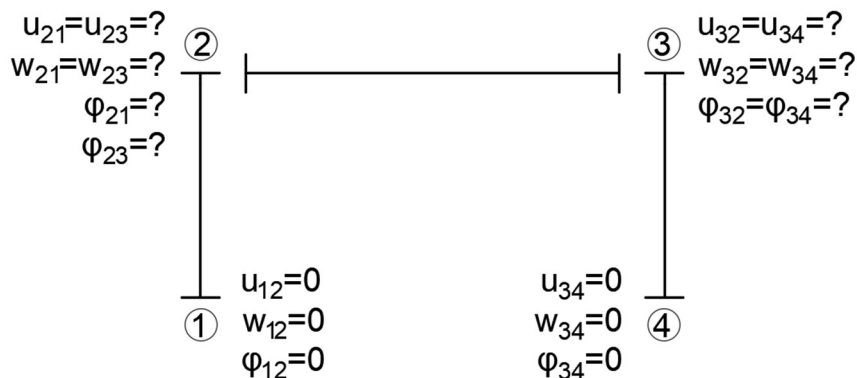
Obr. 5. 22. Statické schéma příkladu č. 4

V tomto příkladu se aplikuje postup převedení matice tuhosti $[K_{ab}]$ a vektoru primárních koncových sil $\{\bar{R}\}$ z lokálního do globálního souřadnicového systému transformační maticí $[T_{ab}]$. Převedení v MATLABu se provede s pomocí funkce T_matice , výpis funkce je znázorněn na obr. 5. 23:

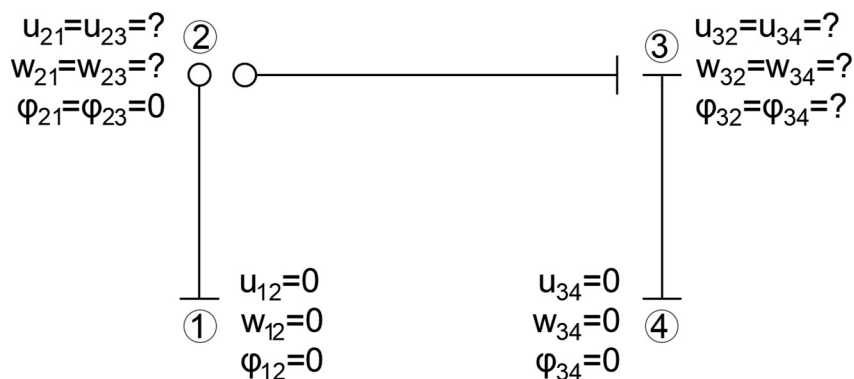
```
function T = T_matice(alfa)
alfa = input ('enter the angle'); %radiany
beta = alfa*pi/180;
T = [ cos(beta), sin(beta), 0, -0, 0, 0;
      -sin(beta), cos(beta), 0, 0, 0, 0;
      0, 0, 1, 0, 0, 0;
      0, 0, 0, cos(beta), sin(beta), 0;
      0, 0, 0, -sin(beta), cos(beta), 0;
      0, 0, 0, 0, 0, 1]
end
```

Obr. 5. 23. Transformační matice v MATLABu

Dalším krokem je sestavení výpočtových modelů. Pro analýzu konstrukcí jsou sestaveny pouze dva výpočtové modely. Model č.1 obsahuje pouze pruty s kódovým číslem 111_111 . Model č.2 obsahuje pruty typu 111_110 , 110_111 a 111_111 .



Obr. 5. 24: Výpočtový model č.1, příklad č. 4



Obr. 5. 25: Výpočtový model č.2, příklad č. 4

Po aplikaci okrajových podmínek, obsahuje model č.1 celkem sedm neznámých parametrů deformací. Využitím kondenzace je možné zmenšit počet neznámých. Například po odkondenzování pootočení ve styčniku číslo dva, má model č.2 pouze pět neznámých parametrů deformací.

Výpočet byl proveden v MATLABu, shrnutí je možné vidět v tabulce č. 5.12:

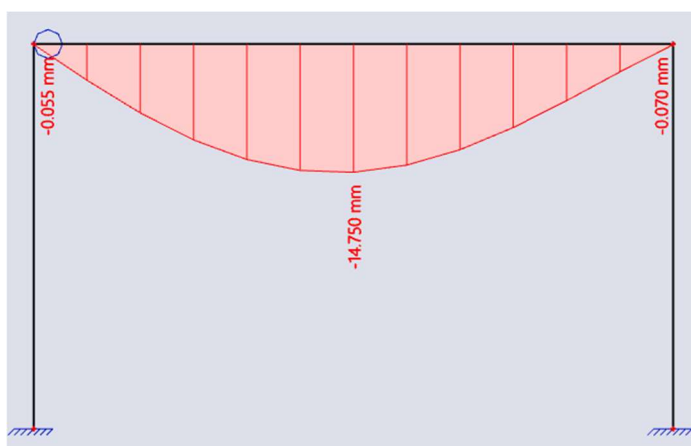
Tabulka 5. 12: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 4

Parametry deformací		
№ Modelů	1	2
u_2 [mm]	-8.219	-8.219
w_2 [mm]	0.055	0.055
φ_{21} [mrad]	4.110	-
φ_{23} [mrad]	-9.912	-
u_3 [mm]	-8.234	-8.234
w_3 [mm]	0.070	0.070
φ_3 [mrad]	6.859	6.959
Celkový počet	13	12
Počet neznámých	7	5

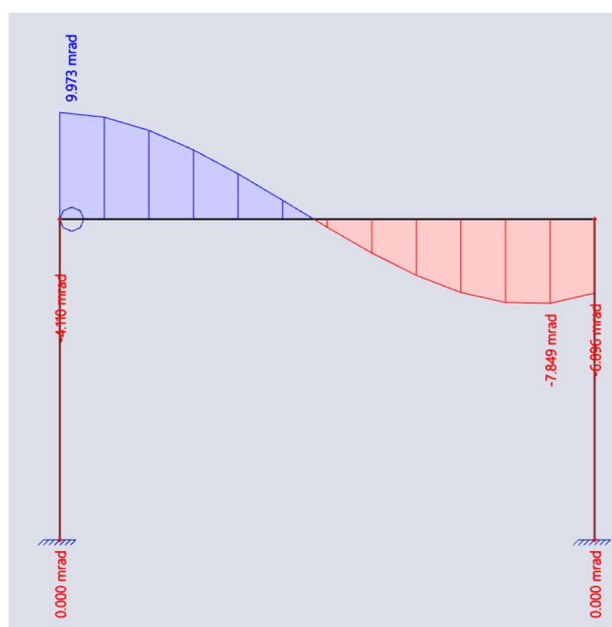
Spočítané parametry deformací ve SCIA Engineer:



Obr. 5. 26: Vodorvný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 4



Obr. 5. 27: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 4



Obr. 5. 28: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 4

Porovnání výsledku deformace, reakce a vnitřních sil mezi výpočtem v MATLABu a SCIA Engineer je znázorněno v tabulkách 5.13, 5.14 a 5.15:

Tabulka 5. 13: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 4

Deformace			
Typ	MATLAB [mrad, mm]	SCIA [mrad,mm]	Rozdíl [%]
u_2	-8.219	-8.247	0.341
w_2	0.055	0.055	0.000
φ_{21}	4.110	4.110	0.000
φ_{23}	-9.912	-9.973	0.615
u_3	-8.234	-8.262	0.340
w_3	0.070	0.070	0.000
φ_3	6.859	6.896	0.539

Tabulka 5. 14: Porovnání výsledků reakce, příklad č. 4

Reakce			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
R_{1x}	1.836	1.827	0.493
R_{1z}	11.030	11.032	0.018
M_1	-5.507	-5.481	0.474
R_{4x}	-13.970	-13.968	0.014
R_{4z}	-1.836	-1.827	0.493
M_4	-1.842	-1.857	0.814

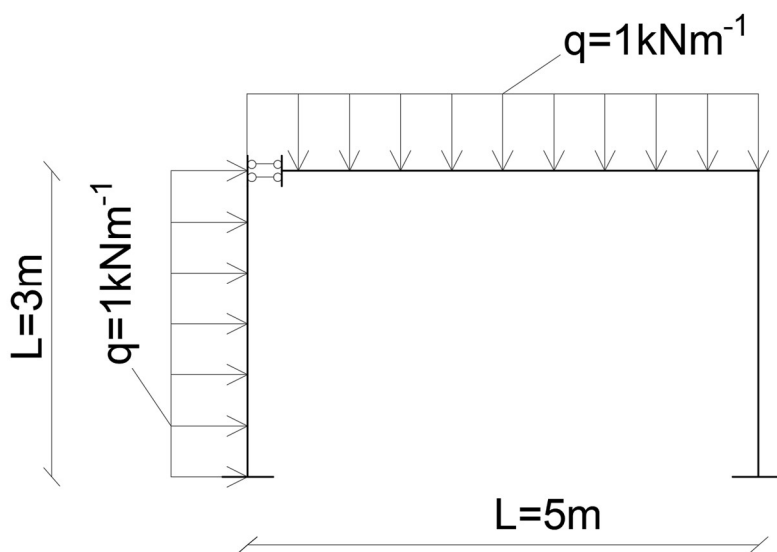
Tabulka 5. 15: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 4

Vnitřní síly				
Typ		MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
Prut 1-2	N_{12}	-11.030	-11.032	0.000
	V_{12}	-1.836	-1.827	0.493
	M_{12}	5.507	5.481	0.474
	N_{21}	-11.030	-11.032	0.018
	V_{21}	-1.836	-1.827	0.493
	M_{21}	0.000	0.000	0.000
Prut 2-3	N_{23}	-1.836	-1.827	0.493
	V_{23}	11.030	11.032	0.018
	M_{23}	0.000	0.000	0.000
	N_{32}	-1.836	-1.827	0.493
	V_{32}	-13.970	-13.968	0.014
	M_{32}	-7.349	-7.338	0.150
Prut 3-4	N_{34}	-13.970	-13.968	0.014
	V_{34}	1.836	1.827	0.493
	M_{34}	-7.349	-7.338	0.150
	N_{43}	-13.970	-13.968	0.014
	V_{43}	1.836	1.827	0.493
	M_{43}	-1.842	-1.857	0.814

Jak je vidět z tabulek 5.13, 5.14 a 5.15, rozdíl mezi výpočtem pomocí MATLABu a SCIA Engineer je minimalní. Tím byl zkontrolován výpočet deformace, reakce a vnitřních sil provedený na rámové konstrukci v MATLABu. Výpočtové modely s kloubem obsahuje nejmenší počet neznámých parametrů deformací.

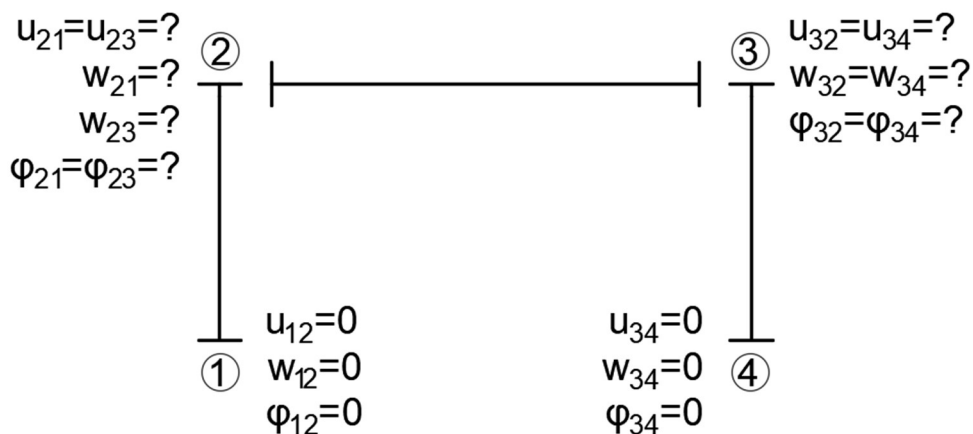
5.5 Příklad č. 5

Příklad č. 5 je rámová konstrukce s *posuvným vetknutím kolmo na osu prutu* a navíc vodorovným spojitým zatížením. Statické schéma je znázorněno na obr. 5.29:

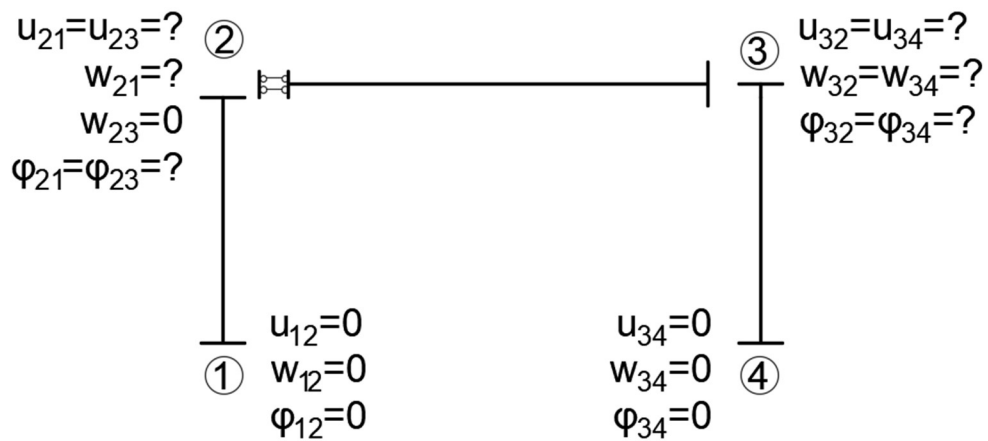


Obr. 5. 29: Statické schéma příkladu č. 5

Celkem jsou sestavené dva výpočtové modely. Model č.1 obsahuje pouze základní typ prutu *vetknuti_vetknuti*. Model č. 2 je sestaven z prutů *vetknuti_vetknuti* a z prutu obsahující *posuvné vetknutí kolmo na osu prutu*, kódové číslo je 101_111. Výpočtové modely jsou znázorněny na obrázcích 5.30 a 5.31:



Obr. 5. 30: Výpočtový model č .1, příklad č. 5



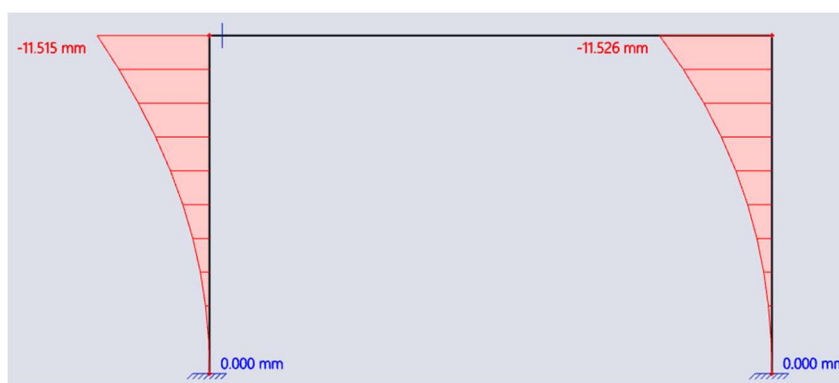
Obr. 5. 31: Výpočtový model č. 2, příklad č. 5

Shrnutí výpočtu z MATLABu je možné vidět v tabulce č. 5.16:

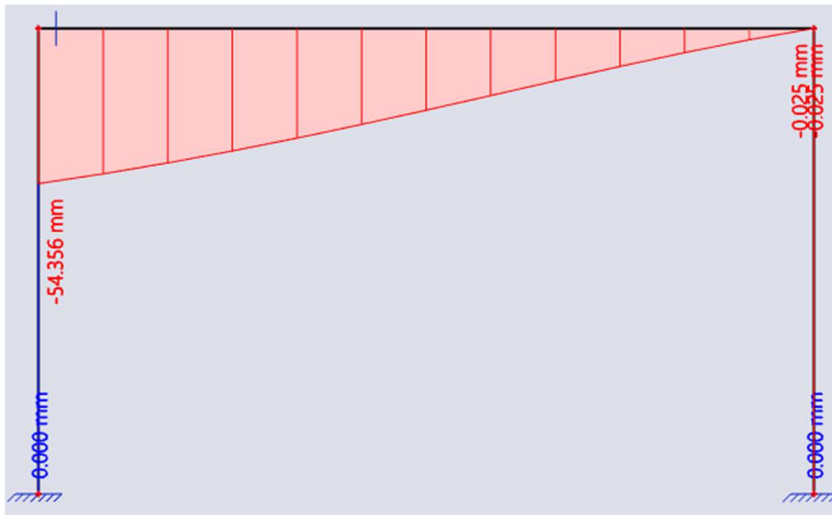
Tabulka 5. 16: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 5

Parametry deformací		
№ Modelů	1	2
u_2 [mm]	-11.468	-11.468
w_{21} [mm]	0	0
w_{23} [mm]	54.026	-
φ_2 [mrad]	7.716	7.716
u_3 [mm]	-11.480	-11.480
w_3 [mm]	0.025	0.025
φ_3 [mrad]	8.702	8.702
Celkový počet	13	12
Počet neznámých	7	6

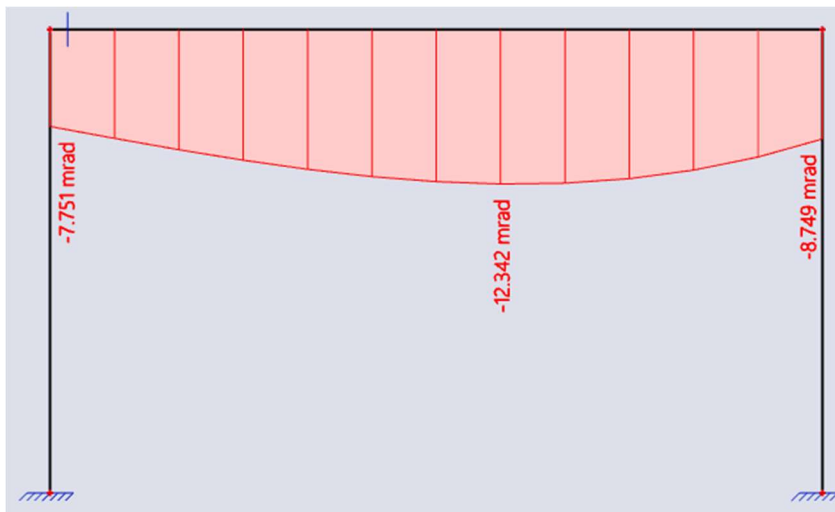
Kontrola výpočtu ve SCIA Engineer:



Obr. 5. 32: Vodorný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 5



Obr. 5. 33: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 5



Obr. 5. 34: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 5

Porovnání výsledku deformace, reakce a vnitřních sil mezi výpočtem v MATLABu a SCIA Engineer je zobrazeno v tabulkách 5.17, 5.18 a 5.19:

Tabulka 5. 17: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 5

Deformace			
Typ	MATLAB [mrad, mm]	SCIA [mrad,mm]	Rozdíl [%]
u_2	-11.468	-11.515	0.410
w_{21}	0.000	0.000	0.000
w_{23}	54.026	54.356	0.611
φ_2	7.716	7.751	0.454
u_3	-11.480	-11.526	0.401
w_3	0.025	0.025	0.000
φ_3	8.702	8.749	0.540

Tabulka 5.18: Porovnání výsledků reakce, příklad č. 5

Reakce			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
R_{1x}	-1.595	-1.599	0.251
R_{1z}	0.000	0.000	0.000
M_1	-4.277	-4.270	0.164
R_{4x}	1.405	1.401	0.286
R_{4z}	-5.000	-5.000	0.000
M_4	-3.723	-3.730	0.188

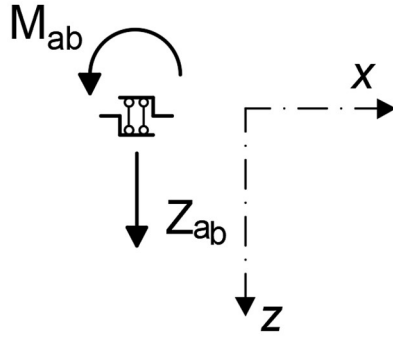
Tabulka 5. 19: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 5

Vnitřní síly				
Typ		MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
Prut 1-2	N_{12}	0.000	0.000	0.000
	V_{12}	1.595	1.599	0.251
	M_{12}	4.277	4.270	0.164
	N_{21}	0.000	0.000	0.000
	V_{21}	-1.405	-1.401	0.286
	M_{21}	4.563	4.566	0.000
Prut 2-3	N_{23}	-1.405	-1.401	0.286
	V_{23}	0.000	0.000	0.000
	M_{23}	4.563	4.566	0.000
	N_{32}	-1.405	-1.401	0.286
	V_{32}	-5.000	-5.000	0.000
	M_{32}	-7.937	-7.934	0.038
Prut 3-4	N_{34}	-5.000	-5.000	0.000
	V_{34}	1.405	1.401	0.286
	M_{34}	-7.937	-7.934	0.038
	N_{43}	-5.000	-5.000	0.000
	V_{43}	1.405	1.401	0.000
	M_{43}	-3.720	-3.730	0.188

Rozdíl mezi výpočtem pomocí MATLABu a SCIA Engineer je minimalní. Tím byl zkontrolován výpočet deformace, reakce a vnitřních sil provedený na ramové konstrukci s vodorovným zatížením a posuvným vetknutím kolmo na osu prutu v MATLABu. Výpočtový model č.2 s uvolněním má menší počet neznámých parametrů deformací s porovnání s modelem č.1, obsahující pouze typ prutu *vetknutí-vetknutí*.

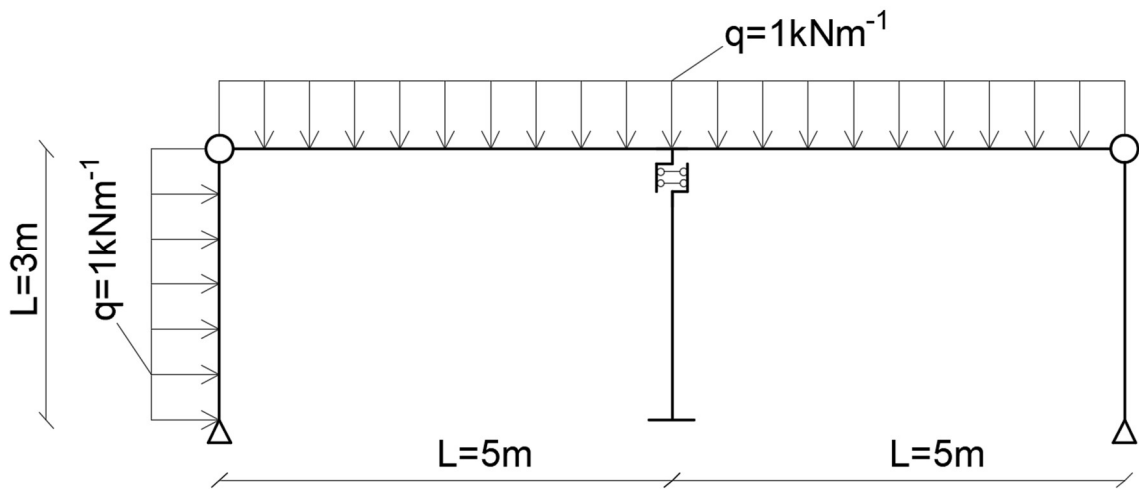
5. 6 Příklad č. 6

Příklad č. 6 je rámová konstrukce o dvou poli s *posuvným vetknutím ve směru osy prutu*. Vodorovné pruty mezi sebou jsou spojené monolitické. Označení posuvného vetknutí je znázorněno na obr. 5.35:



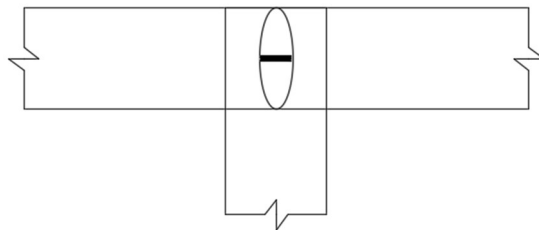
Obr. 5. 35: Posuvné vetknutí ve směru osy prutu, převzato z [7].

Statické schéma příkladu č. 6 je zobrazeno na obr. 5.36:



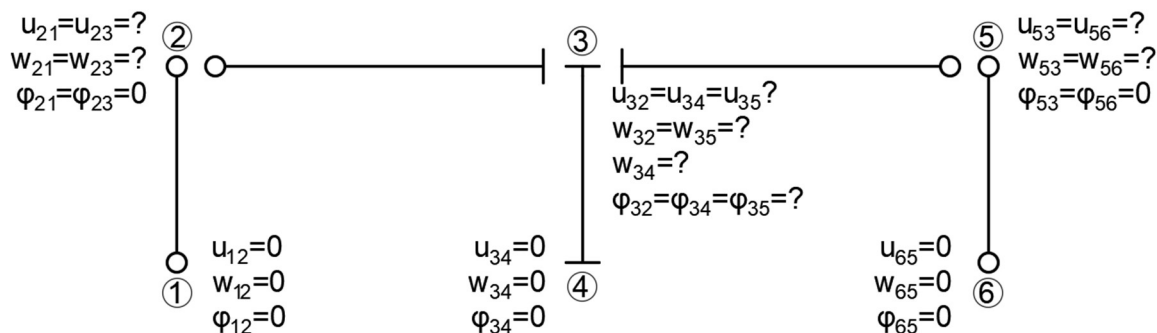
Obr. 5. 36: Statické schéma příkladu č. 6

Posuvné vetknutí umožňuje nezávislý svislý průhyb vodorovných prutů které jsou monolitické spojené. Pro lepší představu na obr. 5.37 je vidět schéma připojení vodorovných prutů a svislého prutu s *posuvným vetknutím*:

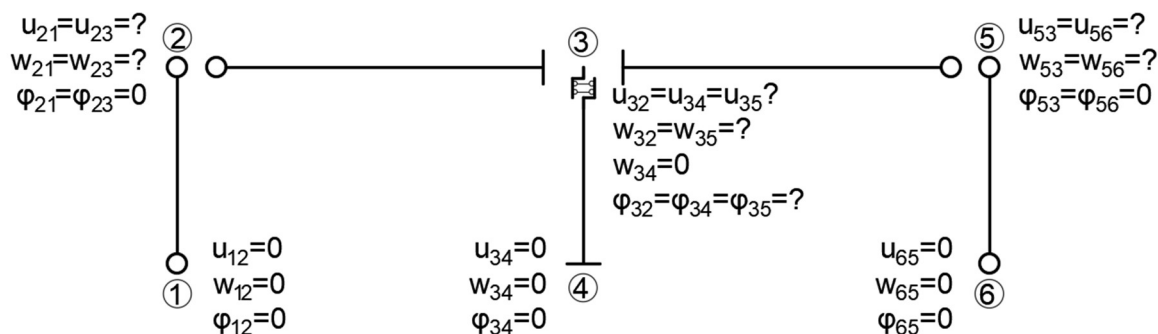


Obr. 5. 37: Schéma připojení příkladu č. 6

Celkem jsou sestávené dva výpočtové modely. Výpočtový model č. 1 se sestáven pouze ze základních typů prutu znázorněných na obr. 2.1, 2.2, 2.3 a 2.4. Výpočtový model č. 2 obsahuje prut s *posuvným vetknutím ve směru osy prutu*. Výpočtové modely je vidět na obr. 5.38 a 5.39:



Obr. 5. 38: Výpočtový model č .1, příklad č. 6



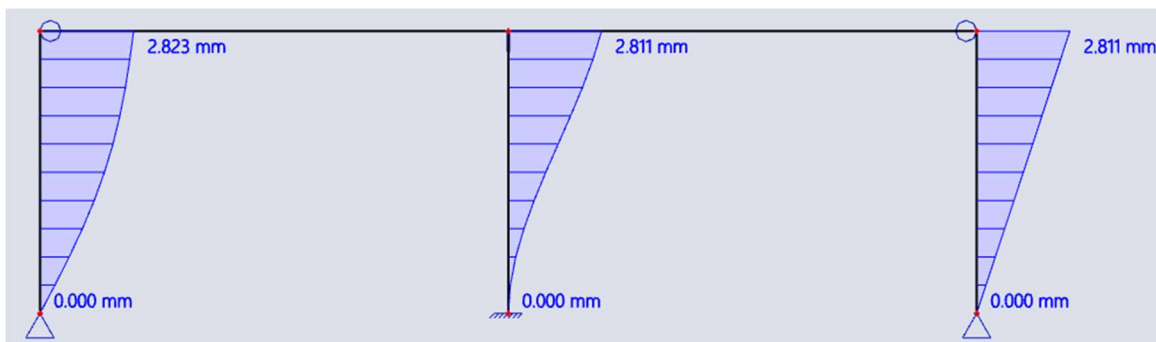
Obr. 5. 39: Výpočtový model č .2, příklad č. 6

Shrnutí výpočtu z MATLABu je možné vidět v tabulce č. 5.20:

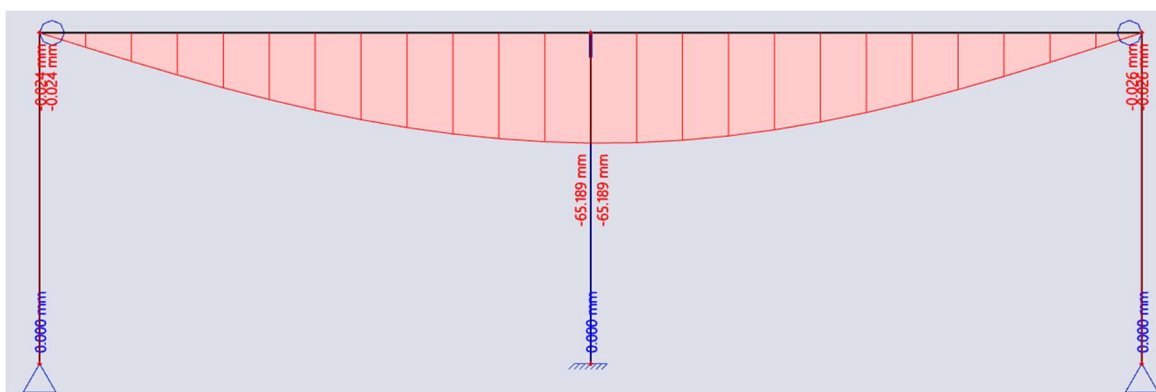
Tabulka 5. 20: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 6

Parametry deformací		
№ Modelů	1	2
u_2 [mm]	-2.787	-2.787
w_2 [mm]	-0.024	-0.024
u_3 [mm]	-2.774	-2.774
$w_{32}=w_{35}$ [mm]	-64.805	-64.805
w_{34} [mm]	0.000	-
φ_3 [mrad]	0.730	0.730
u_5 [mm]	-2.744	-2.744
w_5 [mm]	-0.026	-0.026
Celkový počet	19	19
Počet neznámých	8	7

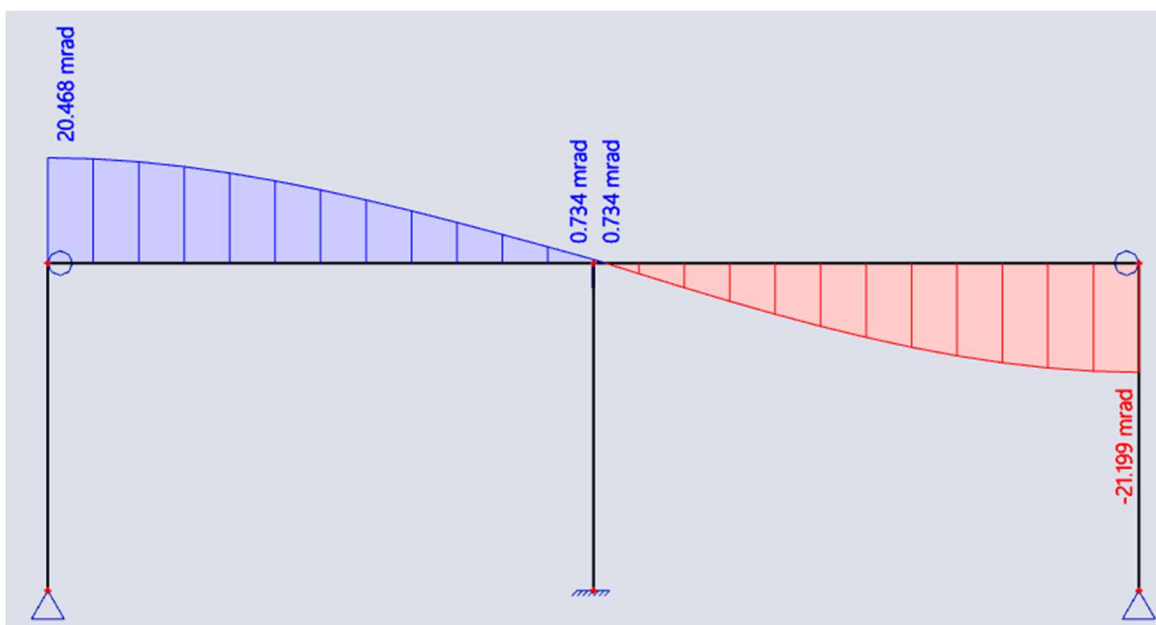
Deformací ve SCIA Engineer jsou znázorněny na obr. 5.40, 5.41 a 5.42:



Obr. 5. 40: Vodorvný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 6



Obr. 5. 41: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 6



Obr. 5. 42: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 6

Porovnání výsledků neznámých parametrů deformací:

Tabulka 5. 21: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 6

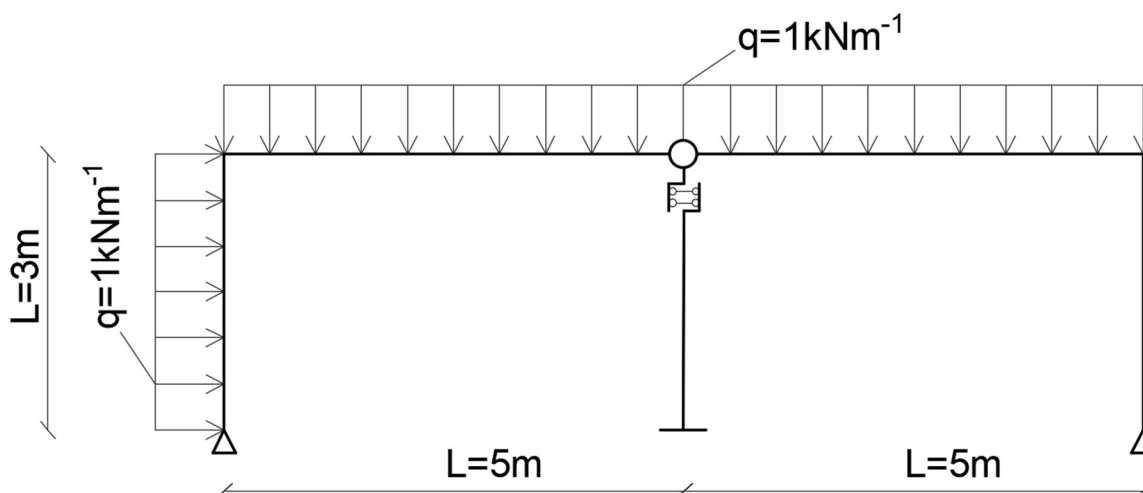
Deformace			
Typ	MATLAB [mrad, mm]	SCIA [mrad,mm]	Rozdíl [%]
u_2	-2.787	-2.823	1.292
w_2	-0.024	-0.024	0.000
u_3	-2.774	-2.811	1.334
$w_{32}=w_{35}$	-64.805	-65.189	0.593
w_{34}	0.000	0.000	0.000
φ_3	0.730	0.734	0.548
u_5	-2.744	-2.811	2.442
w_5	-0.026	-0.026	0.000

Výsledné hodnoty z MATLABu a SCIA Engineer se liší minimalně. Rozdíl je způsoben zahrnutím vlivu posouvajících a normálových sil ve SCIA Engineer. Tímto příkladem bylo zkontrolováno odvození matici tuhosti pro prut s *posuvným vetknutím ve směru osy prutu*. Výpočtový model s prutem obsahující uvolnění umožňuje vyřešit konstrukce s minimální stupni přetvarné neurčitosti.

5. 7 Příklad č. 7

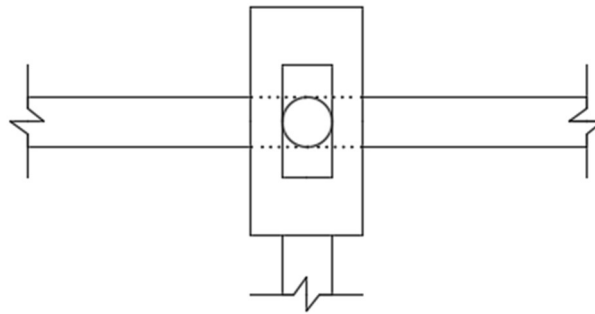
Příklad č. 7 je rámová konstrukce o dvou poli s *posuvným vetknutím ve směru osy prutu*. Vodorovné pruty mezi sebou jsou spojené kloubově.

Statické schéma příkladu č. 6 je zobrazeno na obr. 5.43:



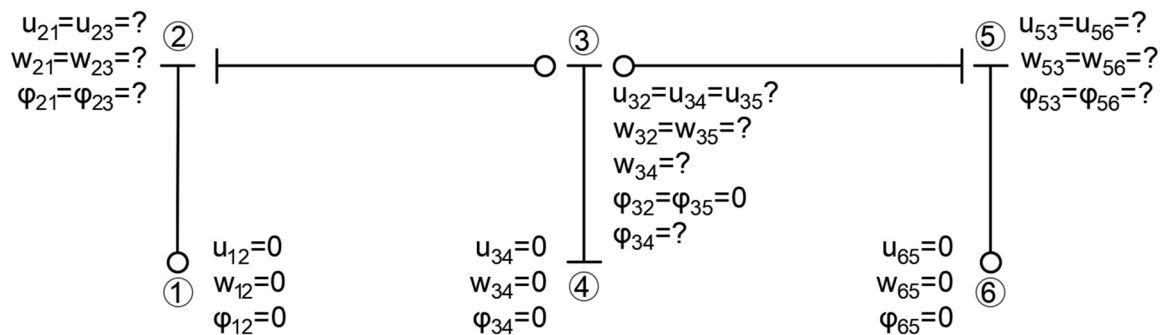
Obr. 5. 43: Statické schéma příkladu č. 7

Detail kloubově spojených vodorovných prutů a prutu s posuvným vetknutím ve směru osy prutu je znázorněná na obr. 5.44:

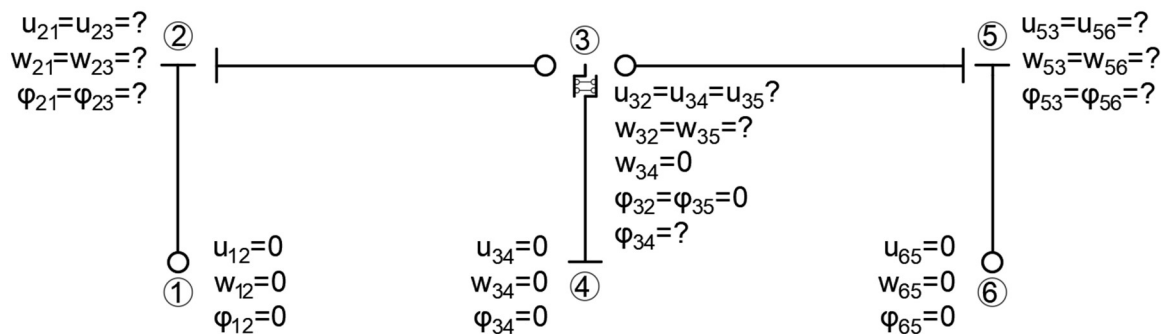


Obr. 5. 44: Schéma připojení příkladu č. 7

Výpočtové modely jsou provedené stejným principem jak v příkladu č. 6. Výpočtový model č.1 obsahuje pouze základní typy prutů. Výpočtový model č.2 má prut s posuvným vetknutím ve směru osy prutu. Výpočtové modely je vidět na obr. 5.45 a 5.46:



Obr. 5. 45: Výpočtový model č .1, příklad č. 7



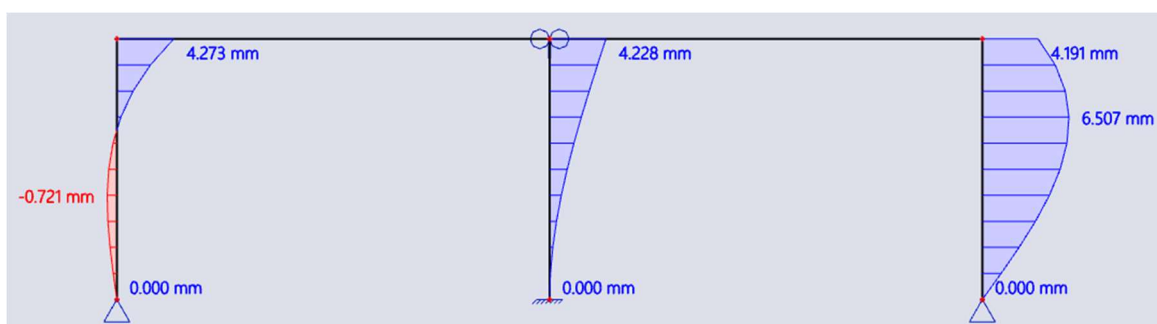
Obr. 5. 46: Výpočtový model č .2, příklad č. 7

Výpočet byl proveden v MATLABu, shrnutí je možné vidět v tabulce č. 5.24:

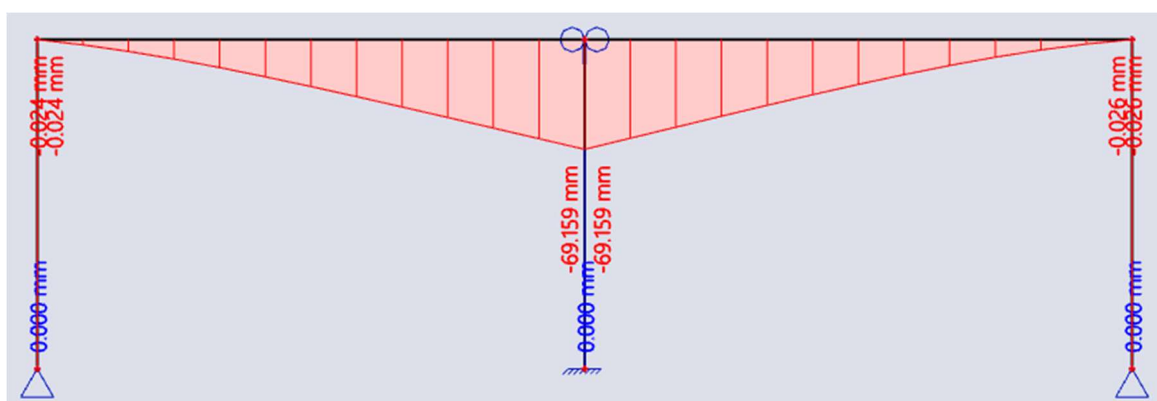
Tabulka 5. 22: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 7

Parametry deformací		
№ Modelů	1	2
u_2 [mm]	-4.241	-4.241
w_2 [mm]	-0.024	-0.024
φ_2 [mrad]	6.653	6.653
u_3 [mm]	-4.196	-4.196
$w_{32}=w_{35}$ [mm]	-68.657	-68.657
w_{34} [mm]	0.000	-
φ_{34} [mrad]	2.098	2.098
u_5 [mm]	-4.159	-4.159
w_5 [mm]	-0.026	-0.026
φ_5 [mrad]	-5.253	-5.253
Celkový počet	20	20
Počet neznámých	10	9

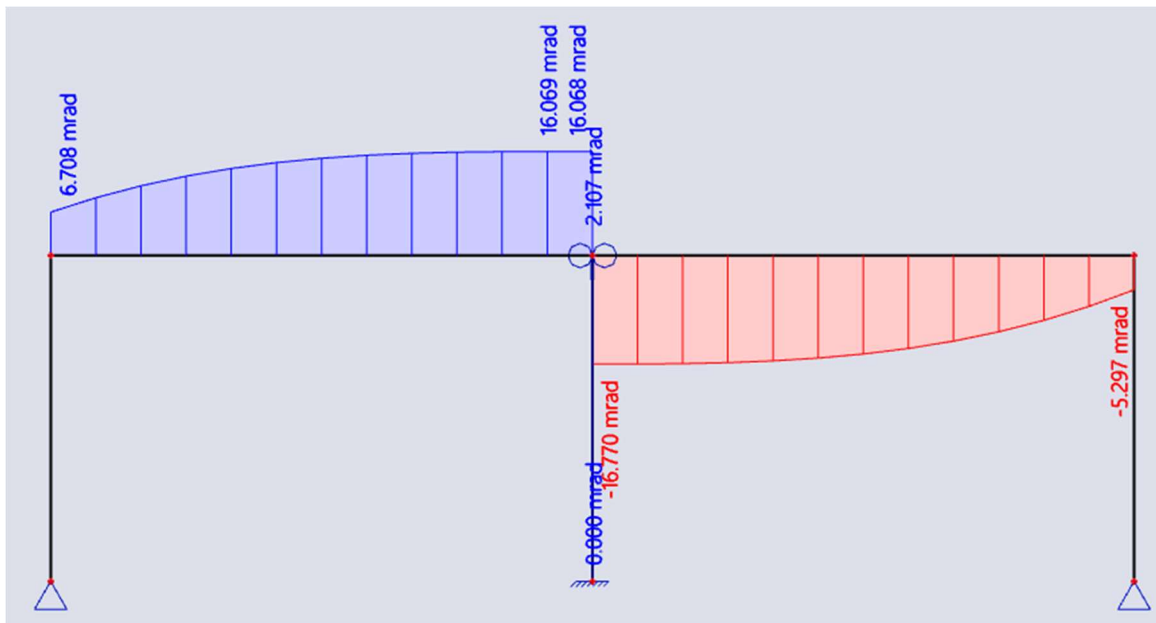
Kontrola výpočtu ve SCIA Engineer:



Obr. 5. 47: Vodorvný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 7



Obr. 5. 48: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 7



Obr. 5. 49: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 7

Porovnání výsledků neznámých parametrů deformací výpočítaných v MATLABu a SCIA Engineer:

Tabulka 5. 23: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 7

Deformace			
Typ	MATLAB [mrad, mm]	SCIA [mrad,mm]	Rozdíl [%]
u_2	-4.241	-4.273	0.755
w_2	-0.024	-0.024	0.000
φ_2	6.653	6.708	0.827
u_3	-4.196	-4.228	0.763
$w_{32} = w_{35}$	-68.657	-69.159	0.731
w_{34}	0.000	0.000	0.000
φ_{34}	2.098	2.107	0.429
u_5	-4.159	-4.191	0.769
w_5	-0.026	-0.026	0.000
φ_5	-5.253	-5.297	0.838

Výsledné hodnoty z MATLABu a SCIA Engineer se liší minimalně. Výpočtový model obsahující všechny uvolnění umožňuje vyřešit konstrukce s minimální stupni přetvarné neurčitosti.

6. Závěr

V teoretické části se má bakalářská práce zaměřuje na popis postupů výpočtu prutových konstrukcí obecnou deformační a silovou metodou.

V praktické části popisují odvození matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil pro základní typ prutu: oboustranně vetknutý a pro prut s posuvným vetknutím kolmo na osu prutu.

Dále se v práci zaměřuji na analýzu prutových konstrukcí. Pro analýzu je zvoleno sedm příkladů obsahujících základní typy připojení a jiné jako posuvné vetknutí kolmo nebo ve směru osy prutu.

Pro každý příklad jsem vytvořil výpočtové modely a výpočet deformací jsem provedl v MATLABu s použitím odvozených matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil. Výsledky z MATLABu jsou porovnány s různými výpočtovými modely. Ve výsledných tabulkách je vidět, že výpočtové modely obsahující kloubové typy podepření mají minimální stupeň přetvárné neurčitosti. Největší stupeň přetvárné neurčitosti mají modely obsahující oboustranně vetknuté pruty.

Výsledky z MATLABu jsem dále porovnal s výpočtem deformací ve SCIA Engineer. Tím jsem ověřil správnost ručně odvozených matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil.

Rozdíl mezi výpočtem v MATLABu a ve SCIA Engineer je minimální a to pouze v rozsahu 1-2%. Rozdíl je způsobený zahrnutím vlivu posouvajících sil ve SCIA Engineer.

Pro příklady č. 1,2,3,4 a 5 jsem vypočítal hodnoty reakcí a vnitřních sil v MATLABu.

Výsledky jsem opět porovnal s hodnotami ve SCIA Engineer a rozdíl je menší než jedno procento.

Tímto jsem tedy ověřil různé postupy modelování kloubů v obecné deformační metodě a analýza prutové konstrukcí s využitím MATLABu.

Literatura

- [1] Kadlčák J., Kytýr J. - *Statika stavebních konstrukcí II*. 2. vyd. Brno: VUTIUM, 2001. Učebnice. ISBN 80-214-1648-3.
- [2] Kytýr, J., Gratz, R., Plášek, J., Ridoško, T., Ekr, J.: *STATIKA II – Řešené příklady*. Skriptum. Brno, 2016. ISBN 978-80-7204-946-2.
- [3] Frantík P., *Postup při výpočtu prutové konstrukce obecnou deformační metodou*, 2007. Dostupné z: <http://www.kitnarf.cz/publications/2007/2007.11.odm/2007.11.odm.pdf>
- [4] Šmilauer V., *SMA2 – Přednáška 05, Matice tuhosti prutu*, 2012. Dostupné z: https://mech.fsv.cvut.cz/homeworks/student/SMA2/SMA2_prednaska_05_matice_tuhosti_prutu.pdf
- [5] Kadlčák J., Kolář A., Kytýr J., Maurer E., - *Statika stavebních konstrukcí I*. Brno: Vysoké Učení Technické v Brně, 1996. ISBN 80-214-0809-X.
- [6] Kytýr J., Frantík P., *Statika I Modul BD03 – M01 Rozšířený Průvodce*, 2005. Dostupné z: https://www.fce.vutbr.cz/STM/masek.j/BD03-Statika_I_M01-Statika_I.pdf
- [7] Frantík P., Štafa M., Pail T., *Algoritmus silové metody*, 2012. Dostupné z: <http://www.kitnarf.cz/publications/2012/2012.05.mm/2012.05.mm.pdf>
- [8] *Tabulky BD004* Dostupné z: <https://www.fce.vutbr.cz/STM/masek.j/bd004/tabulky.pdf>
- [9] Krejsa M., *Speciální numerické metody*. Učební materiály. 2022. Dostupné z: http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/spec_num_tisk.pdf
- [10] Krejsa M., *Algoritmizace inženýrských výpočtů*. Učební materiály. 2021. Dostupné z: <http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/algoritmy.pdf>
- [11] Zaplatílek K., *MATLAB pro začínající uživatele*, 2020. ISBN 978-80-263-1589-6

Seznam příloh

1. Ručné odvození.pdf
2. Matice tuhosti prutů.pdf
3. Primární vektory koncových sil.pdf

4. MATLAB

4.1. Příklad č. 1

- F_zatizeni_111_111.m
- Priklad_1.m
- q_zatizeni_111_111.m
- vetknuti_vetknuti.m
- Vypis.m

4.2.Příklad č. 2

4.2.1 Model_1

- F_zatizeni_111_111.m
- Priklad_2.m
- q_zatizeni_111_111.m
- vetknuti_vetknuti.m

4.2.2 Model_2

- F_zatizeni_110_111.m
- kloub_vetknuti.m
- Priklad_2.m
- q_zatizeni_111_110.m
- vetknuti_kloub.m

4.2.3 Model_3

- F_zatizeni_111_111.m
- q_zatizeni_111_110.m
- vetknuti_kloub.m
- vetknuti_vetknuti.m

4.2.4 Model_4

- F_zatizeni_110_111.m
- kloub_vetknuti.m

- Příklad_2.m
- q_zatizeni_111_111.m
- vetknuti_vetknuti.m

4.3 Příklad 3

4.3.1 Model 1

- F_zatizeni_111_111.m
- Příklad_3.m
- q_zatizeni_111_111.m
- vetknuti_vetknuti.m

4.3.2 Model_2

- F_zatizeni_101_111.m
- posuvne_vetknuti_vetknuti.m
- Příklad_3.m
- q_zatizeni_111_101.m
- vetknuti_posuvne_vetknuti.m

4.3.3 Model_3

- F_zatizeni_111_111.m
- Příklad_3.m
- q_zatizeni_111_101.m
- vetknuti_posuvne_vetknuti.m
- vetknuti_vetknuti.m

4.3.4 Model_4

- F_zatizeni_101_111.m
- posuvne_vetknuti_vetknuti.m
- Příklad_3.m
- q_zatizeni_111_111.m
- vetknuti_vetknuti.m

4.4 Příklad 4

4.4.1 Model_1

- Příklad_4.m
- q_zatizeni_111_111.m

- T_matice.m
- vetknuti_vetknuti.m

4.4.2 Model_2

- kloub_vetknuti.m
- Příklad_4.m
- q_zatizeni_110_111.m
- T_matice.m
- vetknuti_kloub.m
- vetknuti_vetknuti.m

4.5 Příklad 5

4.5.1 Model_1

- Příklad_5.m
- q_zatizeni_111_111.m
- T_matice.m
- vetknuti_vetknuti.m

4.5.2 Model_2

- posuvne_vetknuti_vetknuti.m
- Příklad_5.m
- q_zatizeni_101_111.m
- q_zatizeni_111_111.m
- T_matice.m
- vetknuti_vetknuti.m

4.6 Příklad 6

4.6.1 Model_1

- kloub_kloub.m
- kloub_vetknuti.m
- Příklad_6.m
- q_zatizeni_110_110.m
- q_zatizeni_110_111.m
- q_zatizeni_111_110.m
- T_matice.m

- vetknuti_kloub.m
- vetknuti_vetknuti.m

4.6.2 Model_2

- kloub_kloub.m
- kloub_vetknuti.m
- posuvne_vetknuti_vetknuti.m
- Příklad_6.m
- q_zatizeni_110_110.m
- q_zatizeni_110_111.m
- q_zatizeni_111_110.m
- T_matice.m
- vetknuti_kloub.m
- vetknuti_vetknuti.m

4.7 Příklad 7

4.7.1 Model_1

- kloub_kloub.m
- kloub_vetknuti.m
- Příklad_7.m
- q_zatizeni_110_110.m
- q_zatizeni_110_111.m
- q_zatizeni_111_110.m
- T_matice.m
- vetknuti_kloub.m
- vetknuti_vetknuti.m

4.7.2 Model_1

- kloub_kloub.m
- kloub_vetknuti.m
- posuvne_vetknuti_vetknuti.m
- Příklad_7.m
- q_zatizeni_110_110.m
- q_zatizeni_110_111.m

- q_zatizeni_111_110.m
- T_matice.m
- vetknuti_kloub.m
- vetknuti_vetknuti.m

Seznam obrázků

Obr. 2.1: Oboustranně monolitický připojený prut.....	2
Obr. 2.2: Levostranně kloubově připojený prut.....	3
Obr. 2.3: Pravostranně kloubově připojený prut.....	3
Obr. 2.4: Obostranně kloubově připojený prut.....	3
Obr. 2.5: Konvence parametrů deformací prutu ab	3
Obr. 2.6: Konvence primárních koncových sil.....	4
Obr. 2.7: Lokální a globální souřadnicový systém.....	4
Obr. 3. 1: Princip Vereščagina pravidla.....	9
Obr. 4. 1: Typ připojení 111.....	10
Obr. 4. 2: Statické schéma, typ 111-111.....	12
Obr. 4. 3: Schéma deformací, typ 111-111.....	12
Obr. 4. 4: Aplikace jednotkového posunu u_{ab} ve styčniku a , typ 111-111.....	13
Obr. 4. 5: Aplikace jednotkového posunu w_{ab} ve styčniku a , typ 111-111.....	14
Obr. 4. 6: Základní soustava pro w_{ab} , typ 111-111.....	15
Obr. 4. 7: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS0$ w_{ab} , typ 111-111.....	15
Obr. 4. 8: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS1$ w_{ab} , typ 111-111.....	15
Obr. 4. 9: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS2$ w_{ab} , typ 111-111.....	15
Obr. 4. 10: Aplikace jednotkového pootočení φ_{ab} ve styčniku a , typ 111-111.....	17
Obr. 4. 11: Základní soustava pro φ_{ab} , typ 111-111.....	17
Obr. 4. 12: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS0$ φ_{ab} , typ 111-111.....	18
Obr. 4. 13: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS1$ φ_{ab} , typ 111-111.....	18
Obr. 4. 14: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS2$ φ_{ab} , typ 111-111.....	18
Obr. 4. 15: Matice tuhosti typ 111-111, převzato z přílohy č. 2.....	19
Obr. 4. 16: Matice tuhosti typ 111-111, převzato z literatury [8].....	20
Obr. 4. 17: Statické schéma pro zatížení q , typ 111-111.....	20
Obr. 4. 18: Základní soustava pro zatížení q , typ 111-111.....	21
Obr. 4. 19: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS0$ zatížení q , typ 111-111.....	21
Obr. 4. 20: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS1$ zatížení q , typ 111-111.....	21
Obr. 4. 21: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS2$ zatížení q , typ 111-111.....	21
Obr. 4. 22: Statické schéma pro osamělou sílu F_z , typ 111-111.....	23
Obr. 4. 23: Základní soustava pro osamělou sílu F_z , typ 111-111.....	23
Obr. 4. 24: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS0$ osamělá síla F_z , typ 111-111.....	23
.....	23
Obr. 4. 25: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS1$ osamělá síla F_z , typ 111-111.....	24
.....	24
Obr. 4. 26: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS2$ osamělá síla F_z , typ 111-111.....	24
.....	24
Obr. 4. 27: Typ připojení 101.....	25
Obr. 4. 28: : Statické schéma, typ 101-111.....	26
Obr. 4. 29: Schéma deformací, typ 101-111.....	26
Obr. 4. 30: Aplikace jednotkového pootočení φ_{ab} ve styčniku a , typ 101-111.....	26
Obr. 4. 31: Základní soustava pro φ_{ab} , typ 101-111.....	27
Obr. 4. 32: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS0$ φ_{ab} , typ 101-111.....	27
Obr. 4. 33: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS1$ φ_{ab} , typ 101-111.....	27
Obr. 4. 34: Matice tuhosti typ 101-111, převzato z přílohy č. 3.....	28
Obr. 4. 35: Statické schéma pro zatížení q , typ 101-111.....	28
Obr. 4. 36: Základní soustava pro zatížení q , typ 101-111.....	29
Obr. 4. 37: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS0$ zatížení q , typ 101-111.....	29

Obr. 4. 38: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 zatížení q , typ 101-111	29
Obr. 4. 39: Statické schéma pro osamělou sílu F_z , typ 101-111.....	30
Obr. 4. 40: Základní soustava pro osamělou sílu F_z , typ 101-111	30
Obr. 4. 41: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0 osamělá síla F_z , typ 101-111	30
Obr. 4. 42: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 osamělá síla F_z , typ 101-111	30
Obr. 5. 1: Statické schéma příkladu č. 1.....	32
Obr. 5. 2: Průřezové a materialové charakteristiky	32
Obr. 5. 3: Výpočtový model příklad č.1.....	32
Obr. 5. 4: Funkce vetknuti_vetknuti v MATLABu.....	33
Obr. 5. 5: Algoritmus sestavení globální matice tuhosti celé konstrukce	33
Obr. 5. 6: Algoritmus sestavení globálního vektoru primárních koncových sil.....	34
Obr. 5. 7: Výpis globálního vektoru neznámých parametrů deformací v MATLABu	34
Obr. 5. 8: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 1	34
Obr. 5. 9: Statické schéma příkladu č. 2.....	36
Obr. 5. 10: Výpočtový model č. 1, příklad č. 2	36
Obr. 5. 11: Výpočtový model č. 2, příklad č. 2	36
Obr. 5. 12: Výpočtový model č. 3, příklad č. 2	36
Obr. 5. 13: Výpočtový model č. 4, příklad č. 2	36
Obr. 5. 14: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 2.....	37
Obr. 5. 15: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 2	37
Obr. 5. 16: Statické schéma příkladu č. 3.....	39
Obr. 5. 17: Výpočtový model č. 1, příklad č. 3	39
Obr. 5. 18: Výpočtový model č. 2, příklad č. 3	39
Obr. 5. 19: Výpočtový model č. 3, příklad č. 3	39
Obr. 5. 20: Výpočtový model č. 4, příklad č. 3	40
Obr. 5. 21: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 3.....	40
Obr. 5. 22. Statické schéma příkladu č. 4.....	42
Obr. 5. 23. Transformační matice v MATLABu.....	42
Obr. 5. 24: Výpočtový model č.1, příklad č. 4	43
Obr. 5. 25: Výpočtový model č.2, příklad č. 4	43
Obr. 5. 26: Vodorný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 4	44
Obr. 5. 27: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 4.....	44
Obr. 5. 28: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 4	44
Obr. 5. 29: Statické schéma příkladu č. 5.....	46
Obr. 5. 30: Výpočtový model č .1, příklad č. 5	46
Obr. 5. 31: Výpočtový model č. 2, příklad č. 5	47
Obr. 5. 32: Vodorný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 5	47
Obr. 5. 33: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 5.....	48
Obr. 5. 34: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 5	48
Obr. 5. 35: Posuvné vetknutí ve směru osy prutu, převzato z [7].	50
Obr. 5. 36: Statické schéma příkladu č. 6.....	50
Obr. 5. 37: Schéma připojení příkladu č. 6	50
Obr. 5. 38: Výpočtový model č .1, příklad č. 6.....	51
Obr. 5. 39: Výpočtový model č .2, příklad č. 6.....	51
Obr. 5. 40: Vodorný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 6	52
Obr. 5. 41: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 6.....	52
Obr. 5. 42: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 6	52
Obr. 5. 43: Statické schéma příkladu č. 7.....	53
Obr. 5. 44: Schéma připojení příkladu č. 7	54
Obr. 5. 45: Výpočtový model č .1, příklad č. 7.....	54
Obr. 5. 46: Výpočtový model č .2, příklad č. 7.....	54
Obr. 5. 47: Vodorný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 7	55

Obr. 5. 48: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 7.....	55
Obr. 5. 49: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 7	56

Seznam tabulek

Tabulka 4. 1: Typy prutu.....	11
Tabulka 5. 1: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 1	34
Tabulka 5. 2: Porovnání výsledků reakci, příklad č. 1	35
Tabulka 5. 3: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 1.....	35
Tabulka 5. 4: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 2.....	37
Tabulka 5. 5: Porovnání výsledků deformací, příklad č. 2	37
Tabulka 5. 6: Porovnání výsledků reakcí, příklad č. 2	38
Tabulka 5. 7: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 2.....	38
Tabulka 5. 8: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 3.....	40
Tabulka 5. 9: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 3.....	41
Tabulka 5.10: Porovnání výsledků reakce, příklad č. 3	41
Tabulka 5. 11: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 3.....	41
Tabulka 5. 12: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 4.....	43
Tabulka 5. 13: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 4.....	45
Tabulka 5. 14: Porovnání výsledků reakce, příklad č. 4	45
Tabulka 5. 15: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 4.....	45
Tabulka 5. 16: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 5.....	47
Tabulka 5. 17: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 5.....	48
Tabulka 5.18: Porovnání výsledků reakce, příklad č. 5	49
Tabulka 5. 19: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 5.....	49
Tabulka 5. 20: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 6.....	51
Tabulka 5. 21: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 6.....	53
Tabulka 5. 22: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 7.....	55
Tabulka 5. 23: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 7.....	56