



# VYSOKÉ UČENÍ TECHICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STAVEBNÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

## ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

# MODELOVÁNÍ RŮZNÝCH TYPŮ KLOUBŮ V OBECNÉ DEFORMAČNÍ METODĚ

MODELING NODAL RELEASES IN THE GENERAL DEFORMATION METHOD

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

## AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Illia Dauhalionak

## VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Zbyněk Vlk, Ph.D.

BRNO 2023

# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav stavební mechaniky  
Student: Illia Dauhalionak  
Vedoucí práce: Ing. Zbyněk Vlček, Ph.D.  
Akademický rok: 2022/23  
Studijní program: B3607 Stavební inženýrství  
Studijní obor: Konstrukce a dopravní stavby

Děkan Fakulty Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušební řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Modelování různých typů kloubů v obecné deformační metodě**

### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Jednou z metod, které lze použít pro řešení prutových konstrukcí, je obecná deformační metoda. U modelů prutů v této metodě se běžně předpokládá, že u vzájemného spojení dvou prutů se buď přenáší všechny parametry deformace, nebo pouze translační složky (kloubové spojení umožňující nezávislé pootočení konců prutů). Existují však případy, kdy je vhodné modelovat také jiné typy kloubů umožňující nezávislé posuny konců prutů.

### Cíle a výstupy bakalářské práce:

Úkolem této práce je analýza modelů konstrukcí s různými typy kloubů. Pro analýzu bude použit vhodný program (MS Excel, Matlab apod.). Pro pruty s různými typy kloubů na svých koncích budou odvozeny potřebné matice tuhosti a vektory primárních koncových sil. V rámci práce budou porovnány výsledky z různých postupů modelování.

### Seznam doporučené literatury a podklady:

- [1] ČSN EN 1991-1 - Zatížení konstrukcí
- [2] Bittnar Z., Šejnoha J. - Numerické metody mechaniky 1,2
- [3] Kadlčák J., Kytýr J. - Statika stavebních konstrukcí I a II



Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku.

V Brně, dne 21.11.2022

L. S.

---

prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.  
vedoucí

---

Ing. Zbyněk Vlček, Ph.D. vedoucí  
práce

---

prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA, dr. h. c.  
děkan

## **ABSTRAKT**

Práce se zabývá analýzou modelů prutových konstrukcí s různými typy kloubů obecnou deformační metodou. Pro pruty jsou odvozené potřebné matice tuhosti a vektory primárních koncových sil s pomocí silové metody. Analýza je provedená pro sedm prutových konstrukcí s pomocí MATLABu. Výsledky z MATLABu jsou porovnány použitím SCIA Engineer.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Obecná deformační metoda, Silová metoda, klouby, MATLAB, SCIA Engineer.

## **ABSTRACT**

This thesis deals with the analysis of models of rod structures with different types of nodal releases using the general deformation method. The necessary stiffness matrices and primary end force vektors are derived using the force method. The analysis is performed for seven rod structures using MATLAB. The results from MATLAB are compared with using SCIA Enginner.

## **KEYWORDS**

General deformation method, Force method, nodal releases, MATLAB, SCIA Engineer.

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

DAUHALIONAK, Illia. *Modelování různých typů kloubů v obecné deformační metodě*. Brno, 2023. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí Ing. Zbyněk Vlček, Ph.D.

## **PROHLÁŠENÍ O PŮVODNOSTI ZÁVĚREČNÉ PRÁCE**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem *Modelování různých typů kloubů v obecné deformační metodě* zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 26. 5. 2023

---

Illia Dauhalionak  
autor

## **PODĚKOVÁNÍ**

Rád bych na tomto místě poděkoval panu Ing. Zbyňku Vlkovi, Ph.D za množství času, které mi věnoval při konzultacích, za trpělivost při vysvětlování jednotlivých záležitostí a za velké množství poskytnutých rad. Děkuji své rodině za podporu během celého studia.

## Obsah:

1. Úvod .....	1
2. Obecná deformační metoda.....	2
2.1 Podstata obecné deformační metody .....	2
2.2 Postup výpočtu .....	2
2.2.1 Výpočtový model.....	2
2.2.2 Styčnickové vektory modelu .....	3
2.2.3 Analýza prutu.....	3
2.2.4 Transformace do globalních souřadnic.....	4
2.2.5 Analýza modelu .....	5
2.2.6 Řešení soustavy rovnic .....	6
2.2.7 Výpočet reakcí a vnitřních sil .....	6
3. Silová metoda .....	7
3.1 Postup výpočtu .....	7
3.1.1 Stupeň statické neurčitosti .....	7
3.1.2 Volba základní soustavy .....	7
3.1.3 Sestavení zatěžovacích stavů .....	7
3.1.4 Sestavení deformačních podmínek .....	8
3.1.5 Kanonické rovnice .....	8
4. Odvození matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil.....	10
4.1 Typy připojení .....	10
4.2 Odvození pro typ 111 – 111 .....	11
4.2.1 Odvození matice tuhosti .....	11
4.2.2 Odvození vektoru primárních koncových sil.....	20
4.3 Odvození pro typ prutu 101 – 111.....	25
4.3.1 Odvození matice tuhosti .....	26
4.3.2 Odvození vektoru primárních koncových sil.....	28
5. Řešené příklady .....	32
5.1 Příklad č. 1 .....	32
5.2 Příklad č. 2.....	35
5.3 Příklad č. 3 .....	38
5.4 Příklad č. 4.....	42
5.5 Příklad č. 5.....	46
5.6 Příklad č. 6.....	49
5.7 Příklad č. 7.....	53
6. Závěr.....	57
Literatura .....	58
Seznam příloh.....	59

Seznam obrázků .....	64
Seznam tabulek .....	67

# 1. Úvod

Cílem této bakalářské práce je analýza modelů prutových konstrukcí s různými typy kloubů. Pro analýzu konstrukcí je použito programové prostředí MATLAB od společnosti MathWorks. Výsledky výpočtů v MATLABu jsou následně porovnány s pomocí komerčního softwaru SCIA Engineer.

První kapitola je věnována teorii, kde popisují úvod do obecné deformační metody a postup výpočtu při aplikaci této metody. Další kapitola je věnována postupu výpočtu prutových konstrukcí silovou metodou.

Pro analýzu konstrukcí obecnou deformační metodou jsou popsány různé typy prutů a připojení, které se používají pro sestavení výpočtových modelů. Pro tyto typy prutů jsou s pomocí silové metody ručně odvozeny potřebné matice tuhosti a vektory primárních koncových sil

Odvozené matice a vektory jsou použity pro analýzu sedmi různých příkladů. Pro každý příklad jsou sestaveny výpočtové modely s různými typy prutů. Výpočet deformací je proveden v MATLABu a výsledky z různých postupů modelování jsou pro viditelnost rozdílů znázorněny v tabulkách. Pro analýzu konstrukce v MATLABu se používají ručně odvozené matice a vektory

Správnost výpočtu deformací byla ověřena s pomocí SCIA Engineer. Srovnání výsledků je možné vidět v tabulkách u každého příkladu.

Pro příklady č. 1, 2,3,4 a 5 v je MATLABu proveden výpočet reakcí a vnitřních sil. Porovnání výpočtů z MATLABu a SCIA Engineer je opět možné vidět v tabulkách.



## 2. Obecná deformační metoda

Obecná deformační metoda je jedna z metod, která se používá pro řešení statické neurčitých prutových konstrukcí. Tato metoda vychází z předpokladů malých deformací. A v rámci metody jsou uvažovány lineární vlastnosti materiálu a vliv posouvajících sil se zanedbává. [1]

### 2.1 Podstata obecné deformační metody

Podstatou obecné deformační metody je sestavení silových podmínek rovnováhy ve styčnicích, které jsou vyjádřeny s pomocí neznámých parametrů deformací. Za neznámé parametry deformací se volí posuny a pootočení.

Pro výpočet konstrukce je nutné definovat výpočtový model. Pro tento model se určuje stupeň přetvárné neurčitosti a neznámé parametry deformace. Dále se sestavuje vektor uzlového zatížení. Následně se provádí analýza prutů tak, že pro každý prut se sestavuje jeho lokální matice tuhosti a lokální vektor primárních koncových sil. Lokální matice tuhosti zahrnuje geometrii prutu a materialové charakteristiky. Lokální vektor primárních koncových sil vychází ze zatížení prutu. Jestli je to nutné, provádí se transformace z lokálních do globálních souřadnic. Na základě lokalizace se poté sestavuje globální matice tuhosti a globální vektor primárních koncových sil. Následně se dopočítají neznámé parametry deformací z rovnic rovnováhy. Potom se provádí dopočet reakcí a vnitřních sil. [1,2]

### 2.2 Postup výpočtu

Výpočet obecnou deformační metodou se skládá z několika částí, které na sebe vzájemně navazují. Každý krok výpočtu je detailně popsán v následujících podkapitolách.

#### 2.2.1 Výpočtový model

První krok řešení prutové konstrukce je sestavení výpočtového modelu. Model se skládá z jednotlivých prutů a styčniců, které očíslováme podle polohy. Pro model se určí stupeň přetvárné neurčitosti, který úvodí počet řádků pro všechny následující vektory a matice. [1]

Každý prut může mít různé typy připojení. Prut je přímý a má konstantní tuhost. V obecné deformační metodě rozlišujeme dva základní typy připojení, a to buď monolitické nebo kloubové připojení. Dalé můžeme definovat čtyři druhy prutů podle způsobu připojení [2]:

- Prut oboustranně monolitický připojený



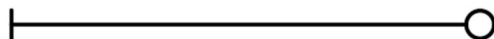
Obr. 2.1: Oboustranně monolitický připojený prut

- Prut levostranně kloubově připojený



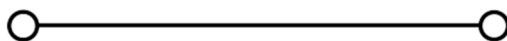
Obr. 2.2: Levostranně kloubově připojený prut

- Prut pravostranně kloubově připojený



Obr. 2.3: Pravostranně kloubově připojený prut

- Prut oboustranně kloubově připojený



Obr. 2.4: Obostranně kloubově připojený prut

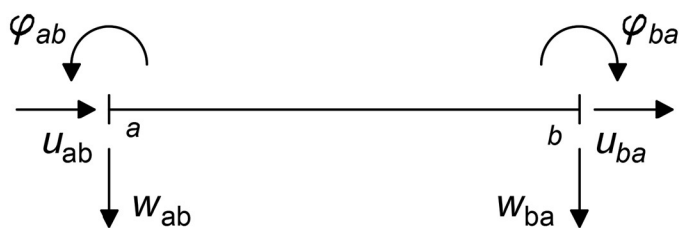
## 2.2.2 Styčnickové vektory modelu

Následující krok je sestavení globalního vektoru neznámých parametrů deformací  $\{\mathbf{r}\}$ , který se skládá z neznámých posunů a pootočení ve styčnicích. Poté se vypíší síly a momenty, které působí v místech neznámých deformací do vektoru styčnickového zatížení  $\{\mathbf{S}\}$ . [1,2]

## 2.2.3 Analýza prutu

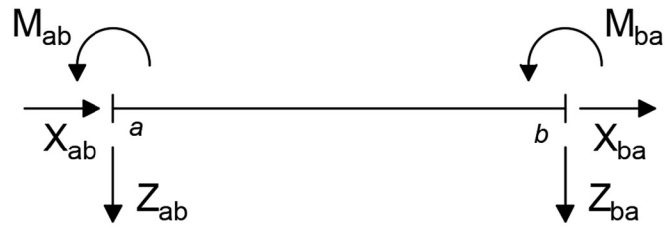
Pro každý prut  $ab$  ( $a$  i  $b$  jsou indexy styčniců) výpočtového modelu se sestavuje jeho lokální matice tuhosti  $[\mathbf{K}^*_{ab}]$  a vektor primárních koncových sil  $\{\bar{\mathbf{R}}^*_{ab}\}$ .

Lokální matice tuhosti  $[\mathbf{K}^*_{ab}]$  zahrnuje geometrii a materialové charakteristiky prutu. Matice prutu má šest řádků a šest sloupců. Sloupce matice se označí podle parametrů deformací ve styčnicích  $a$  i  $b$ :  $u_{ab}, w_{ab}, \varphi_{ab}, u_{ba}, w_{ba}, \varphi_{ba}$ . Kladné směry parametrů deformací je možné vidět na obr. 2.5:



Obr. 2.5: Konvence parametrů deformací prutu  $ab$

Řádky matice jsou označeny podle primárních koncových sil:  $X_{ab}, Z_{ab}, M_{ab}, X_{ba}, Z_{ba}, M_{ba}$ . Konvence primárních koncových sil je zobrazená na obr. 2.6:



Obr. 2.6: Konvence primárních koncových sil

Lokální matice tuhosti  $[K^*_{ab}]$  má tvar:

$$[K^*_{ab}] = \begin{matrix} & u_{ab} & w_{ab} & \varphi_{ab} & u_{ba} & w_{ba} & \varphi_{ba} \\ \begin{matrix} X_{ab} \\ Z_{ab} \\ M_{ab} \\ X_{ba} \\ Z_{ba} \\ M_{ba} \end{matrix} & \left[ \begin{matrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{matrix} \right] & \end{matrix} \quad (2.1)$$

Lokální vektor primárních koncových sil prutu  $\{\bar{\mathbf{R}}^*_{ab}\}$  vychází ze zatížení prutu. Jestli na prut působí více než jedno zatížení, tak se i celkový vektor prutu skládá ze všech těchto zatížení.

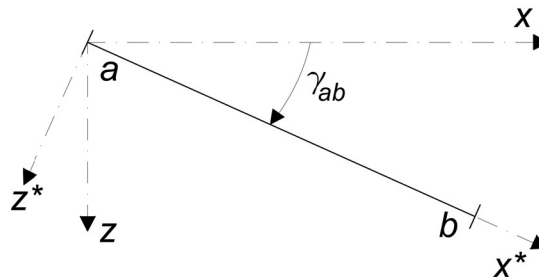
Lokální vektor primárních koncových sil prutu  $\{\bar{\mathbf{R}}^*_{ab}\}$  má následující tvar:

$$\{\bar{\mathbf{R}}^*_{ab}\} = \begin{matrix} X_{ab} \\ Z_{ab} \\ M_{ab} \\ X_{ba} \\ Z_{ba} \\ M_{ba} \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} X_{ab} \\ Z_{ab} \\ M_{ab} \\ X_{ba} \\ Z_{ba} \\ M_{ba} \end{matrix}} \right\} \quad (2.2)$$

## 2.2.4 Transformace do globálních souřadnic

Jestli lokální a globální souřadnice prutu nejsou totožné, je nutné provést transformaci do globálních souřadnic. Pro transformaci potřebujeme určit transformační úhel  $\gamma_{ab}$  a sestavit transformační matici  $[\mathbf{T}_{ab}]$ . [2].

Lokální souřadnicový systém má osy  $x^*$  a  $z^*$ , globální souřadnicový systém se značí osami  $x$  a  $z$ . Vztah mezi lokálním a globálním souřadnicovým systémem je znázorněn na obr. 2.7:



Obr. 2.7: Lokální a globální souřadnicový systém

Transformační matice  $[T_{ab}]$  má následující tvar:

$$[T_{ab}] = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \gamma_{ab} & \sin \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \gamma_{ab} & \cos \gamma_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Globalní matice tuhosti prutu se dopočítá dle vztahu:

$$[K_{ab}] = [T_{ab}]^T [K^*_{ab}] [T_{ab}] \quad (2.4)$$

kde  $[K_{ab}]$  globalní matice tuhosti prutu,  
 $[T_{ab}]^T$  transponovaná transformační matice,  
 $[K^*_{ab}]$  lokální matice tuhosti prutu,  
 $[T_{ab}]$  transformační matice.

Stejným způsobem se dopočítá globální vektor primárních koncových sil:

$$\{\bar{R}\} = [T_{ab}]^T \{\bar{R}^*_{ab}\} [T_{ab}] \quad (2.5)$$

## 2.2.5 Analýza modelu

Následující krok je sestavení globální matice tuhosti  $[K]$  a globálního vektoru primárních koncových sil  $\{\bar{R}\}$  celého výpočtového modelu v globálních souřadnicích.

Globalní matice tuhosti  $[K]$  se skládá z maticí tuhosti jednotlivých prutů  $[K_{ab}]$ . Analogicky se skládá globální vektor primárních koncových sil celé konstrukce  $\{\bar{R}\}$ . Rozměrnost  $[K]$  a  $\{\bar{R}\}$  se řídí dle vektoru  $\{r\}$ .

Pro správné sestavení globální matice tuhosti  $[K]$  a vektoru primárních koncových sil  $\{\bar{R}\}$  je nutné provést lokalizaci modelu. Tím se rozumí, že prvky globálních maticí tuhosti jednotlivých prutů  $[K_{ab}]$  musí mít správné umístění v globální matici tuhosti  $[K]$  celé konstrukce. Stejný princip se aplikuje na globální vektor primárních koncových sil  $\{\bar{R}\}$ . Každému parametru deformace se udělí index  $1, 2, 3 \dots i$ . Následně se všechny prvky  $[K_{ab}]$  umístí podle indexu  $1, 2, 3 \dots i$  do globální matice tuhosti  $[K]$  celé konstrukce. Příklad lokalizací bude znázorněn v následující kapitole. [3].

Dalé je nutné sestavit vektor pravé strany  $\{F\}$  celé konstrukce. Tento vektor se vypočítá dle vztahu:

$$\{F\} = \{S\} - \{\bar{R}\} \quad (2.6)$$

kde  $\{F\}$  vektor pravé strany,  
 $\{S\}$  vektor styčnickového zatížení,  
 $\{\bar{R}\}$  globální vektor primárních koncových sil.

### 2.2.6 Řešení soustavy rovnic

Jakmile jsou globální matice tuhosti  $[K]$ , globální vektor neznámých parametrů deformací  $\{r\}$  a vektor pravé strany  $\{F\}$  celé konstrukce sestavené, tak je možné vyřešit soustavu lineárních rovnic dle vztahu:

$$[K]\{r\} = \{F\} \quad (2.7)$$

kde  $[K]$  globální matice tuhosti,  
 $\{r\}$  globální vektor neznámých parametrů deformací,  
 $\{F\}$  vektor pravé strany.

Vyřešením soustavy lineárních rovnic získáme neznámé hodnoty globálního vektoru neznámých parametrů deformací  $\{r\}$

### 2.2.7 Výpočet reakcí a vnitřních sil

Po získání globálního vektoru neznámých parametrů deformací  $\{r\}$  se dopočítá reakce a vnitřní síly celé konstrukce.

### 3. Silová metoda

Silová metoda je další metoda, která se používá pro řešení staticky neurčitých prutových konstrukcí. Na rozdíl od obecné deformační metody, se za neznámé parametry volí silové veličiny, jako je například reakce konstrukce. Proto se tato metoda nazývá přímou metodou. Silová metoda je vhodná pro řešení konstrukcí s malým počtem stupňů volnosti. [5].

V této práci se silová metoda používá pro odvození matic tuhosti  $[K_{ab}]$  a vektorů primárních koncových sil  $\{\bar{R}_{ab}\}$  prutů  $ab$ , které jsou nezbytné pro analýzu konstrukce obecnou deformační metodou.

#### 3.1 Postup výpočtu

Stejně jako v obecné deformační metodě, se postup výpočtu skládá z několika fází. Každá fáze je podrobněji popsána v dalších podkapitolách.

##### 3.1.1 Stupeň statické neurčitosti

Prvním krokem řešení silovou metodou je určení stupně statické neurčitosti  $n_s$  prutové konstrukce. Stupeň statické neurčitosti zároveň uvádí počet přebytečných reakcí. Hodnota se určí dle vztahu:

$$n_s = (a-3) + 3u - p_k \quad (3.1)$$

kde  $a$  počet složek reakcí,  
 $u$  počet uzavřených ploch,  
 $p_k$  počet kloubových styčníků.

##### 3.1.2 Volba základní soustavy

Následujícím krokem je sestavení základní statické i kinematické určité soustavy. To se provádí tak, že se odstraní přebytečné vazby. Po odstranění vazeb, by měla konstrukce mít staticky i kinematicky určitý stav, nesmí nastat mechanismus. Odstraněné vazby, resp. reakce se nahradí statickou veličinou  $X_n$ . Počet statických veličin  $X_n$  přímo závisí na stupni statické neurčitosti  $n_s$ . [5].

##### 3.1.3 Sestavení zatěžovacích stavů

Dále se musí sestavit zatěžovací stavy. Počet zatěžovacích stavů přímo souvisí se stupněm statické neurčitosti  $n_s$ . Vždy existuje nultý stav a k tomu ještě počet stavů, který se rovná  $n_s$ .

Nultý zatěžovací stav zahrnuje geometrii prutové konstrukce, dané zatížení a odstraněné vazby, resp. reakce. Zatěžovací stavy  $n$  se skládají jen z geometrie prutové konstrukce a odstraněné vazby se nahradí jednotkovou silovou veličinou.

Pro každý zatěžovací stav se vykreslí průběh vnitřních sil. [5,6].

### 3.1.4 Sestavení deformačních podmínek

Následujícím krokem je sestavení deformačních, resp. přetvárných podmínek v místech odstraněných vazeb s ohledem na okrajové podmínky. Obecné přetvárné podmínky mají tvar:

$$\delta_i = 0 \quad (3.2)$$

kde  $\delta_i$  je deformace v místě odstraněných vazeb.

### 3.1.5 Kanonické rovnice

Dalším krokem je sestavení kanonických rovnic. Kanonické rovnice se používají pro výpočet reakcí v přebytečných vazbách, které byly označeny jako  $X_n$ . Tyto rovnice mají následující tvar:

$$\sum_n \delta_{i,n} X_n + \delta_{i,0} = 0 \quad (3.3)$$

kde  $i$  počet přetvárných podmínek,  
 $n$  počet přebytečných vazeb,  
 $X_n$  neznámé statické veličiny,  
 $\delta_{i,n}$  deformační součinitel od zatěžovacího stavu  $n$ ,  
 $\delta_{i,0}$  deformační součinitel od zatěžovacího stavu  $0$ .

Pro výpočet deformačních součinitelů  $\delta_{i,n}$  a  $\delta_{i,0}$  se používá princip virtuálních prací dle Maxwellova-Mohrova vztahu. Tento vztah má následující obecný tvar:

$$\delta = \int_0^s \frac{N\bar{N}}{EA} ds + \int_0^s k \frac{V\bar{V}}{GA} ds + \int_0^s \frac{M\bar{M}}{EI} ds \quad (3.4)$$

V této bakalařské práci se zanedbává vliv normálových a posouvajících sil a rovnice má následující zjednodušený tvar:

$$\delta = \int_0^s \frac{M\bar{M}}{EI} ds \quad (3.5)$$

kde  $\delta$  deformační součinitel,  
 $M$  skutečný moment od vnějšího zatížení,  
 $\bar{M}$  virtuální moment od virtuální jednotkové silové veličiny  $X_n$ ,  
 $E$  modul pružnosti v tahu i tlaku,  
 $I$  moment setrvačnosti průřezu.

Pro výpočet integrálu se používá Vereščaginovo pravidlo. Pro které ale musí platit, že skutečný moment  $\mathbf{M}$  je tvořen spojitou funkcí a virtualní moment  $\bar{\mathbf{M}}$  od virtualního zatížení má lineární funkci. [6].

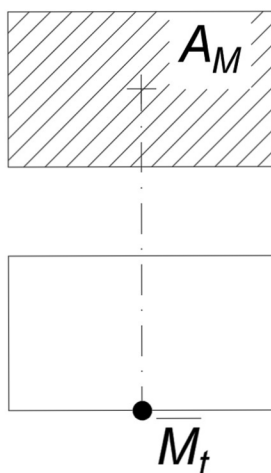
S pomoci Vereščaginova pravidla integrál nabývá následující tvar:

$$\int_0^s M \bar{M} ds = A_M \bar{M}_t \quad (3.6)$$

kde  $A_M$  obsah momentového obrazce jakéhokoliv tvaru.

$\bar{M}_t$  pořadnice momentového obrazce od lineární funkce v místě těžiště obrázku u kterého se vypočítá obsah.

Na následujícím obrázku 3.1 je znázorněn princip Vereščaginova pravidla:



Obr. 3. 1: Princip Vereščaginova pravidla

Jakmile se vypočítají deformační součinitele, tak je posledním krokem určení hodnot odstraněných reakcí s pomocí kanonických rovnic (3.3). Ostatní neznámé reakce se dopočítají dle rovnic rovnováhy:

$$\sum F_x = 0 \quad (3.7)$$

$$\sum F_z = 0 \quad (3.8)$$

$$\sum M = 0 \quad (3.9)$$



## 4. Odvození matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil

Jak bylo zmíněno předtím, v obecné deformační metodě jsou dva základní typy připojení: monolitické (vetknutí) a klobouvé.

Existují však další typy připojení, které je v obecné deformační metodě vhodné modelovat. Pro tyto typy připojení je nutné odvodit potřebné matice tuhosti  $[\mathbf{K}_{ab}]$  a vektory primárních koncových sil  $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$ .

V této kapitole je popsáno odvození pro dva typy prutů. Odvození dalších typů prutů je možné vidět v příloze 1. *Ruční odvození*

### 4.1 Typy připojení

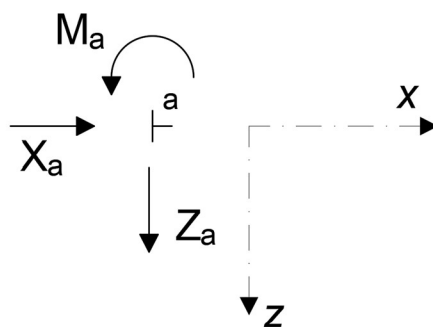
V této podkapitole jsou popsány všechny typy připojení, pro které byly odvozeny matice tuhosti  $[\mathbf{K}_{ab}]$  a vektory primárních koncových sil  $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$ .

Každému typu připojení se přidělí kódové číslo, které se skládá z 0 nebo 1.

Pokud kódové číslo obsahuje 0, znamená to, že vazba je odstraněna. Jestli kódové číslo obsahuje 1, vazba je naopak ponechána.

Kódové číslo má tři indexy, první index označuje vazbu ve směru osy  $x$ , druhý index je vazba ve směru osy  $z$  a poslední index označuje pootočení. Pro připojení typu vetknutí, je tedy kódové číslo 111.

Na obr. 4.1 je znázorněné připojení typu 111 ve styčnicku  $a$ . Je vidět, že je zabráněný posun ve směru osy  $x$  reakcí  $\mathbf{X}_a$ , ve směru osy  $z$  reakcí  $\mathbf{Z}_a$  a pootočení styčnicku je zabráněno reakcí  $\mathbf{M}_a$ :



Obr. 4. 1: Typ připojení 111

Pro označení typu prutu  $ab$  budu používat různá kódová čísla pro levý  $a$  a pravý  $b$  styčník, podle typu připojení prutu. Všechny kombinace různých typů prutů, které v práci využívám, jsou uvedeny v tabulce 4.1:

Tabulka 4.1: Typy prutu

Typ prutu <i>ab</i>	Levý styčník <i>a</i>		Pravý styčník <i>b</i>	
	Kod	Název	Kod	Název
1	111	vetknutí	111	vetknutí
2	111	vetknutí	110	kloub
3	110	kloub	111	vetknutí
4	110	kloub	110	kloub
5	101	posuvné vetknutí kolmo na osu prutu	111	vetknutí
6	111	vetknutí	101	posuvné vetknutí kolmo na osu prutu
7	111	vetknutí	001	posuvné vetknutí ve směru osy <i>a</i> kolmo na osu prutu
8	001	posuvné vetknutí ve směru osy <i>a</i> kolmo na osu prutu	111	vetknutí
9	111	vetknutí	011	posuvné vetknutí ve směru osy prutu
10	011	posuvné vetknutí ve směru osy prutu	111	vetknutí
11	111	vetknutí	100	posuvná podpora ve směru osy prutu
12	100	posuvná podpora ve směru osy prutu	111	vetknutí
13	111	vetknutí	010	posuvná podpora kolmo na osu prutu
14	010	posuvná podpora kolmo na osu prutu	111	vetknutí
15	110	pevná podpora	101	posuvné vetknutí kolmo na osu prutu
16	101	posuvné vetknutí kolmo na osu prutu	110	pevná podpora
17	110	pevná podpora	011	posuvné vetknutí ve směru osy prutu
18	011	posuvné vetknutí ve směru osy prutu	110	pevná podpora

Některé matice tuhosti  $[K_{ab}]$  a vektory primárních koncových sil  $\{\bar{R}_{ab}\}$  jsou totožné u různých typu prutů. Takže například pruty typu 11, 12, 15 a 16 uvedené v tabulce 4.1, mají stejné matice tuhosti jak základní typ 4 kloub-kloub. Všechny odvozené matice tuhosti  $[K_{ab}]$  a vektory primárních koncových sil  $\{\bar{R}_{ab}\}$  je možné vidět v příloze 2. *Matice tuhosti prutů a 3. Primární vektory koncových sil.*

## 4.2 Odvození pro typ 111 – 111

Tato podkapitola je věnovaná odvození matice tuhosti  $[K_{ab}]$  a vektoru primárních koncových sil  $\{\bar{R}_{ab}\}$  základního typu prutu, který je oboustranně vetknut. Tento prut má kodové číslo 111-111, což je *vetknutí-vetknutí*. Pro odvození bude použita silová metoda, princip který je popsán dříve. V literatuře existují tabulky už odvozených  $[K_{ab}]$  a  $\{\bar{R}_{ab}\}$  pro kontrolu výsledků.

Odvození bude provedeno především pro pochopení principu, který se bude používat pro odvození  $[K_{ab}]$  a  $\{\bar{R}_{ab}\}$  u dalších typů prutů, pro které neexistují tabulky v literatuře.

### 4.2.1 Odvození matice tuhosti

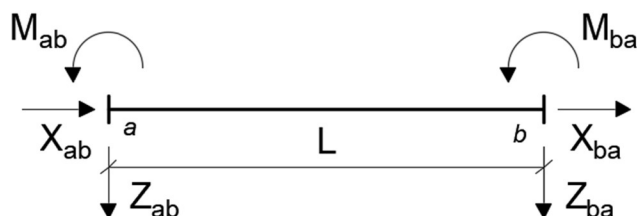
Matice tuhosti  $[K_{ab}]$  oboustranně vetknutého prutu má šest řádků a šest sloupců, tedy následující tvar:

$$[K_{ab}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} u_{ab} & w_{ab} & \varphi_{ab} & u_{ba} & w_{ba} & \varphi_{ba} \end{matrix} \\ \begin{matrix} X_{ab} \\ Z_{ab} \\ M_{ab} \\ X_{ba} \\ Z_{ba} \\ M_{ba} \end{matrix} & \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.1)$$

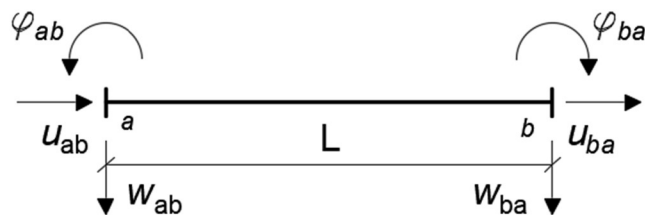
kde  $k_{11}, k_{12}, \dots, k_{66}$  jsou neznámé silové veličiny od jednotkových deformací. Tyto neznámé silové veličiny se vypočítají aplikací vynucených jednotkových deformací  $u, w, \varphi$ .

V každém případě bude šest neznámých silových veličin  $k$  které je potřeba spočítat.

Oboustranně vetknutý prut má následující statické schéma a schéma deformací:



Obr. 4. 2: Statické schéma, typ 111-111

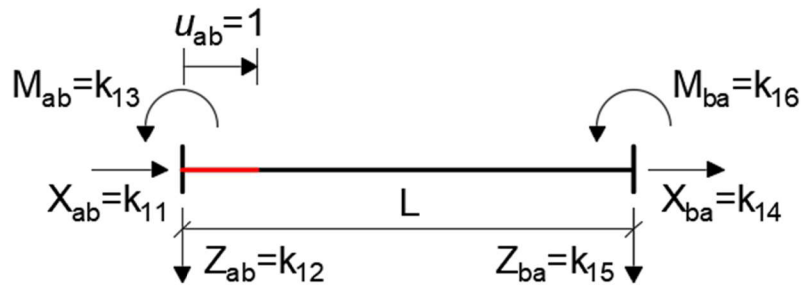


Obr. 4. 3: Schéma deformací, typ 111-111

Odvození pro typ prutu *vetknutí – vetknutí* je popsáno pro první tři sloupce matice tuhosti  $[K_{ab}]$ , protože je matice symetrická. Podrobné odvození je možné vidět v příloze 1. *Ruční odvození.*

#### 4.2.1.1 Vynucený jednotkový posun $u_{ab}$ ve styčnicku $a$

Prvním krokem výpočtu neznámých prvků v matici tuhosti  $[K_{ab}]$  je aplikace jednotkového vodorovného posunu  $u_{ab}$  ve styčnicku  $a$ :



Obr. 4. 4: Aplikace jednotkového posunu  $u_{ab}$  ve styčnicku  $a$ , typ 111-111

Silové veličiny  $k_{12}, k_{13}, k_{15}$  a  $k_{16}$  jsou nulové, jelikož máme jen osové zatížení. Pro výpočet  $k_{11}$  a  $k_{14}$  bude aplikován Hookův zákon, který má následující vztah:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4.2)$$

kde  $\varepsilon$  poměrné délkové prodloužení,  
 $\sigma$  mechanické napětí,  
 $E$  modul pružnosti v tahu i tlaku.

Relativní délkové prodloužení může být také zapsáno jako:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (4.3)$$

kde  $\Delta L$  deformace prutu,  
 $L$  délka prutu.

Deformace prutu  $\Delta L$  v zkoumaném případě se rovná posunu  $u$  ve směru osy prutu ve styčnicku  $a$ .

Mechanické napětí  $\sigma$  se rovná vložené síle  $N$  na plochu průřezu  $A$ , což má následující vztah:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (4.4)$$

kde  $\sigma$  mechanické napětí  
 $N$  působící síla,  
 $A$  plocha průřezu.

Sílu  $N$  lze přepsat podle vztahu:

$$N = k\Delta L \quad (4.5)$$

kde  $k$  je konstanta pružnosti.

Konstanta pružnosti  $k$  se zároveň rovná hledané neznámé veličině  $k_{11}$ . Po úpravě

výše uvedených rovnic dostaneme následující vztahy:

$$\frac{\sigma}{E} = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\frac{ku}{EA} = \frac{u}{L}$$

$$k_{11} = \frac{EA}{L} \quad (4.6)$$

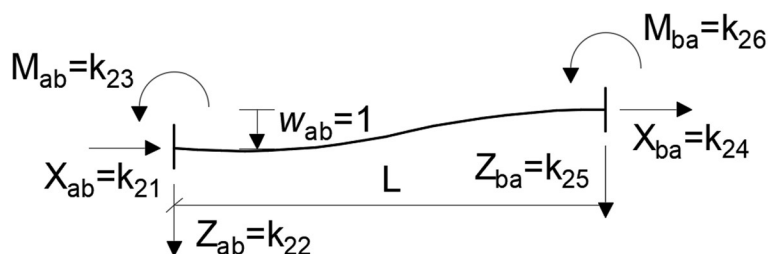
Z rovnice rovnováhy 3.7 se dopočítá druhá neznámá veličina  $k_{41}$ .

$$k_{41} = -k_{11} = -\frac{EA}{L} \quad (4.7)$$

Tím se vyřeší neznáme hodnoty  $k$  v prvním sloupci  $u_{ab}$  matice tuhosti  $[\mathbf{K}_{ab}]$  (4.1).

#### 4.2.1.2 Vynucený jednotkový posun $w_{ab}$ ve styčnicku $a$

Dalším krokem je aplikace vynuceného jednotkového posunu  $w_{ab}$  ve styčnicku  $a$ . Tím se spočítají neznáme hodnoty druhého sloupce matice tuhosti  $[\mathbf{K}_{ab}]$  (4.1).



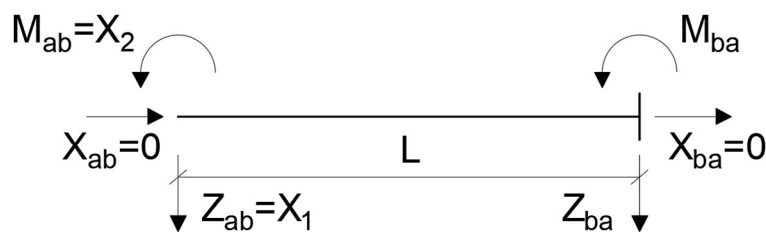
Obr. 4. 5: Aplikace jednotkového posunu  $w_{ab}$  ve styčnicku  $a$ , typ 111-111

Jelikož máme deformační zatížení kolmo na osu prutu, neznáme veličiny jsou  $k_{21}, k_{23}, k_{25}$  a  $k_{26}$ . Veličiny  $k_{21}$  a  $k_{24}$  jsou naopak nulové. Pro výpočet neznámých hodnot se bude aplikovat silová metoda.

Prvním krokem je určení stupně statické neurčitosti  $n_s$  prutové konstrukce dle vztahu 3.1.

$$n_s = 6 - 3 = 3 \quad (4.8)$$

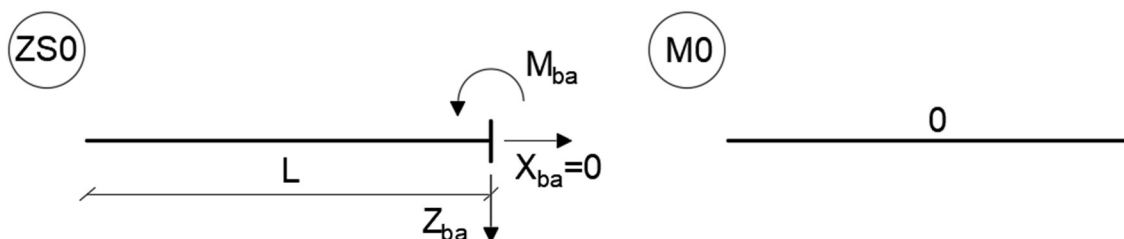
Následující krok je sestavení základní soustavy. Základní soustava se vytvoří odstraněním přebytečných vazeb ve styčnicku  $a$ . Tím vznikne základní soustava, která je znázorněna na obr. 4.6:



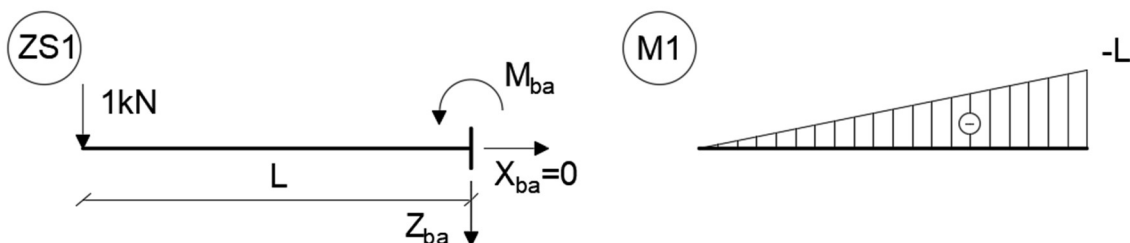
Obr. 4. 6: Základní soustava pro  $w_{ab}$ , typ 111-111

Vodorovné reakce  $X_{ab}$  a  $X_{ba}$  jsou nulové, proto  $X_{ab}$  se nebude uvažovat jako neznámá pro sestavení zatežovacích stavů. Tím vzniknou tři zatežovací stavy, pro každý zatežovací stav bude znázorněno statické schéma a výkreslený průběh ohybových momentů. Zatežovací stavy budou označeny zkratkou ZS.

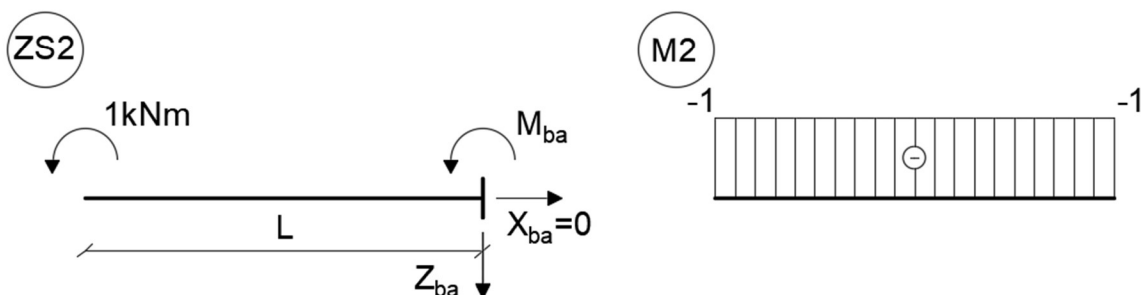
Na následujících obrázcích jsou znázorněny statické schémata průběhu ohybových momentů pro ZS0, ZS1, ZS2:



Obr. 4. 7: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0  $w_{ab}$ , typ 111-111



Obr. 4. 8: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1  $w_{ab}$ , typ 111-111



Obr. 4. 9: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS2  $w_{ab}$ , typ 111-111

Dále je nutné sestavit deformační podmínky a kanonické rovnice podle vztahu 3.2 a 3.3 které mají následující tvar:

$$\delta_1 = 1 \quad (4.9)$$

kde  $\delta_1$  je deformace v místě odstraněné reakce  $Z_{ab}$ .

$$\delta_2 = 0 \quad (4.10)$$

kde  $\delta_2$  je deformace v místě odstraněné reakce  $M_{ab}$ .

$$\begin{cases} \delta_{1,0} + \delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 = 1 \\ \delta_{2,0} + \delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

kde  $\delta_{1,0}$  deformační součinitel od ZS1 a ZS0,

$\delta_{1,1}$  deformační součinitel od ZS1,

$\delta_{1,2}$  deformační součinitel od ZS1 a ZS2,

$\delta_{2,0}$  deformační součinitel od ZS2 a ZS0,

$\delta_{2,1}$  deformační součinitel od ZS2 a ZS1,

$\delta_{2,2}$  deformační součinitel od ZS2,

$X_1$  neznámá reakce  $Z_{ab}$ ,

$X_2$  neznámá reakce  $M_{ab}$ .

Následně se vypočítají deformační součinitele  $\delta_{i,n}$  podle vztahu 3.5 a s pomocí Vereščaginova pravidla 3.6:

$$\delta_{1,0} = 0 \quad (4.12)$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} \left( \frac{(-L)L}{2} \frac{2}{3} (-L) \right) = \frac{L^3}{3EI} \quad (4.13)$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \frac{1}{EI} \left( \frac{(-L)L}{2} (-1) \right) = \frac{L^2}{2EI} \quad (4.14)$$

$$\delta_{2,0} = 0 \quad (4.15)$$

$$\delta_{2,2} = \frac{1}{EI} ((-1)L(-1)) = \frac{L}{EI} \quad (4.16)$$

Po výpočtu hodnoty deformačních součinitelů  $\delta_{i,n}$  se dosadí do soustavy kanonických rovnic (4.17):

$$\begin{cases} 0 + \frac{L^3}{3EI}X_1 + \frac{L^2}{2EI}X_2 = 1 \\ 0 + \frac{L^2}{2EI}X_1 + \frac{L}{EI}X_2 = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Řešení soustavy rovnic je provedeno v MATLABu a výsledkem jsou hodnoty  $X_1$  a  $X_2$ :

$$Z_{ab} = X_1 = \frac{12EI}{L^3} \quad (4.18)$$

$$M_{ab} = X_2 = -\frac{6EI}{L^2} \quad (4.19)$$

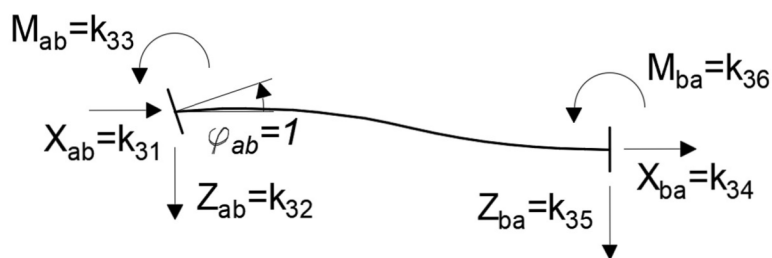
Dle rovnic rovnováhy 3.8 a 3.9 se dopočítají neznámé reakce  $Z_{ba}$  a  $M_{ba}$ :

$$Z_{ba} = -\frac{12EI}{L^3} \quad (4.20)$$

$$M_{ba} = -\frac{6EI}{L^2} \quad (4.21)$$

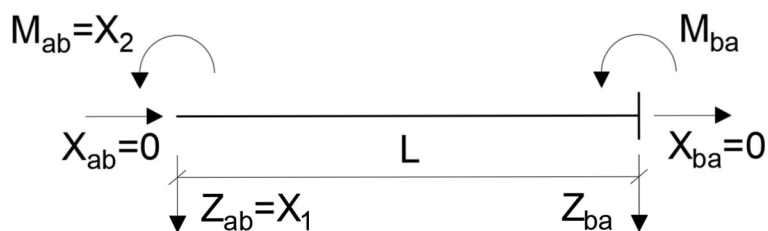
#### 4.2.1.3 Vynucené jednotkové pootočení $\varphi_{ab}$ ve styčnicku $a$

V tomto kroku se aplikuje jednotkové pootočení  $\varphi_{ab}$  ve styčnicku  $a$ . Schéma je znázorněno na obr. 4.10:



Obr. 4. 10: Aplikace jednotkového pootočení  $\varphi_{ab}$  ve styčnicku  $a$ , typ 111-111

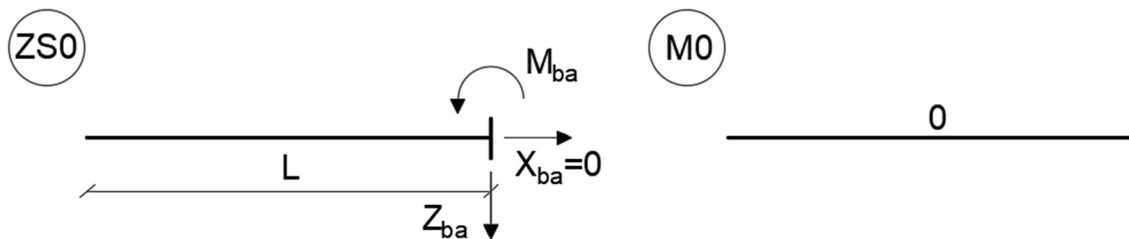
Odstraněním přebytečných vazeb ve styčnicku  $a$  vzniká následující základní soustava:



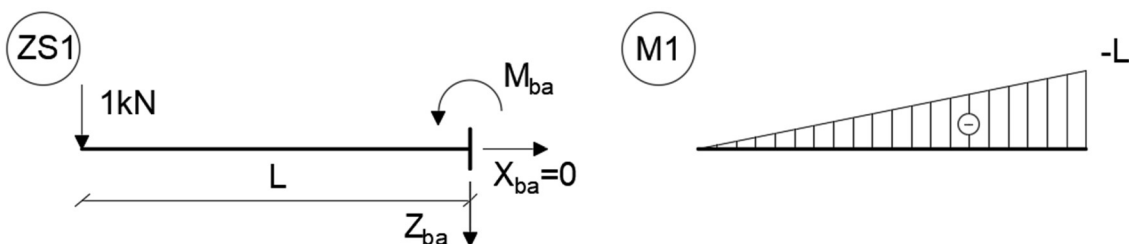
Obr. 4. 11: Základní soustava pro  $\varphi_{ab}$ , typ 111-111

Další krok je určení zatěžovacích stavů a vykreslování průběhů ohybových momentů:

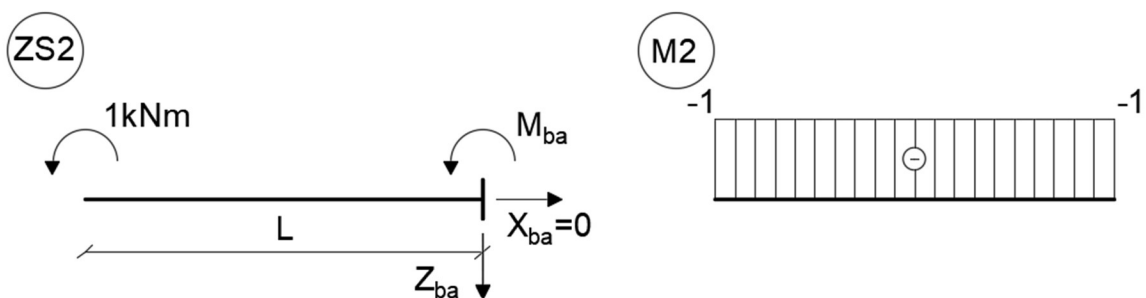




Obr. 4. 12: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0  $\varphi_{ab}$ , typ 111-111



Obr. 4. 13: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1  $\varphi_{ab}$ , typ 111-111



Obr. 4. 14: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS2  $\varphi_{ab}$ , typ 111-111

Sestavení deformačních podmínek:

$$\delta_1 = 0 \tag{4.22}$$

kde  $\delta_1$  je deformace v místě odstraněné reakce  $Z_{ab}$ .

$$\delta_2 = 1 \tag{4.23}$$

kde  $\delta_2$  je deformace v místě odstraněné reakce  $M_{ab}$ .

Po aplikaci deformačních podmínek, má soustava kanonických rovnic následující tvar:

$$\begin{cases} \delta_{1,0} + \delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 = 0 \\ \delta_{2,0} + \delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 = 1 \end{cases} \tag{4.24}$$

Hodnoty deformačních součinitelů  $\delta_{i,n}$  jsou totožné s hodnotami při aplikaci jednotkového posunu  $w_{ab}$  ve styčniku  $\alpha$ , jelikož průběh ohybových momentů je stejný při posunu  $w_{ab}$  a pootočení  $\varphi_{ab}$ . Liší se ale deformační podmínky.

Další krok je dosázení vztahů 4.12, 4.13, 4.14, 4.15 a 4.16 do soustavy kanonických rovnic 4.24.

$$\begin{cases} 0 + \frac{L^3}{3EI} X_1 + \frac{L^2}{2EI} X_2 = 0 \\ 0 + \frac{L^2}{2EI} X_1 + \frac{L}{EI} X_2 = 1 \end{cases} \quad (4.25)$$

Řešením soustavy rovnic 4.25 spočítáme neznáme reakce  $Z_{ab}$  a  $M_{ab}$ .

Neznámé reakce  $Z_{ba}$  a  $M_{ba}$  se dopočítají dle rovnic rovnováhy 3.8 a 3.9. Reakce  $X_{ab}$  a  $X_{ba}$  jsou nulové. Výsledné hodnoty jsou:

$$Z_{ab} = X_1 = -\frac{6EI}{L^2} \quad (4.26)$$

$$M_{ab} = X_2 = \frac{4EI}{L} \quad (4.27)$$

$$Z_{ba} = \frac{6EI}{L^2} \quad (4.28)$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{L} \quad (4.29)$$

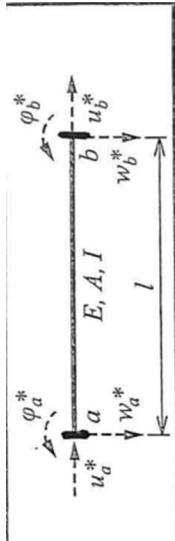
V této fázi jsou tedy spočítané všechny prvky v matici tuhosti  $[\mathbf{K}_{ab}]$  (4.1). Hodnoty výsledné matice tuhosti jsou znázorněny na následujícím obr. 4.15:

typ 1 111-111

	ua	wa	fia	ub	wb	fib
Xab	EA/L	0	0	-EA/L	0	0
Zab	0	12EI/L <sup>3</sup>	-6EI/L <sup>2</sup>	0	-12EI/L <sup>3</sup>	-6EI/L <sup>2</sup>
Mab	0	-6EI/L <sup>2</sup>	4EI/L	0	6EI/L <sup>2</sup>	2EI/L
Xba	-EA/L	0	0	EA/L	0	0
Zba	0	-12EI/L <sup>3</sup>	6EI/L <sup>2</sup>	0	12EI/L <sup>3</sup>	6EI/L <sup>2</sup>
Mba	0	-6EI/L <sup>2</sup>	2EI/L	0	6EI/L <sup>2</sup>	4EI/L

Obr. 4. 15: Matice tuhosti typ 111-111, převzato z přílohy č. 2

Hodnoty matice tuhosti  $[K_{ab}]$  znázorněné na obr. 4.15 jsou stejné jako v literatuře:



(8.3a)

$$[k_{a,b}^*] = \begin{bmatrix} u_a & w_a & \varphi_a \\ \hline u_b & w_b & \varphi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

Obr. 4. 16: Matice tuhosti typ 111-111, převzato z literatury [8]

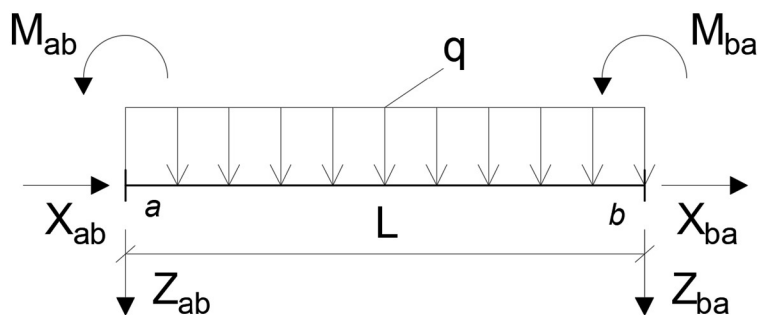
Tímto byl zkontrolován postup odvození, který se později aplikuje v odvození matic tuhosti  $[K_{ab}]$  a vektoru primárních koncových sil  $\{\bar{R}_{ab}\}$  jiných typu prutů.

## 4.2.2 Odvození vektoru primárních koncových sil

Tato podkapitola je věnována odvození vektoru primárních koncových sil  $\{\bar{R}_{ab}\}$ , pro typ prutu *vetknutí\_vetknutí*. Odvození je provedeno pro spojité zatížení  $q$  působící po celé délce prutu a pro osamělou svislou sílu  $F_z$  působící v polovině rozpětí prutu.

### 4.2.2.1 Spojité zatížení $q$

Statické schéma prutu je znázorněno na obr. 4.17:



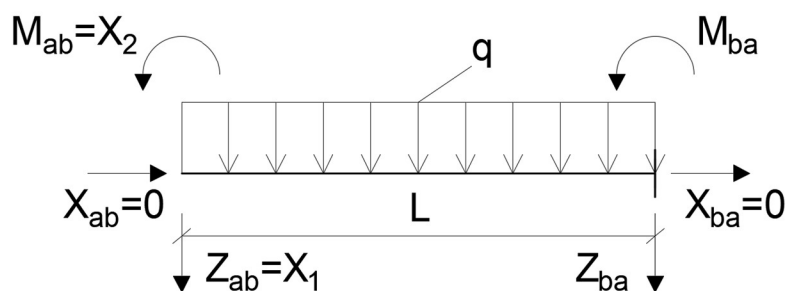
Obr. 4. 17: Statické schéma pro zatížení  $q$ , typ 111-111

Statická neurčitost  $n_s$  konstrukce se vypočítá dle vztahu 3.1.

$$n_s = 6 - 3 = 3 \quad (4.30)$$

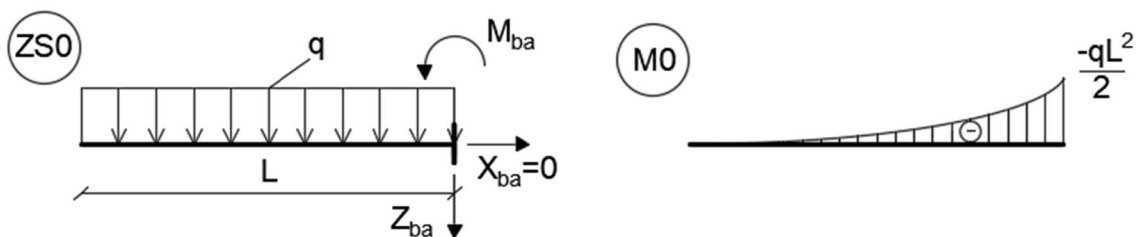
Na následujícím obr. 4.18 je zobrazena základní soustava. Konstrukce nemá

zatížení ve směru prutu, proto jsou vodorovné reakce  $X_{ab}$  a  $X_{ba}$  nulové.

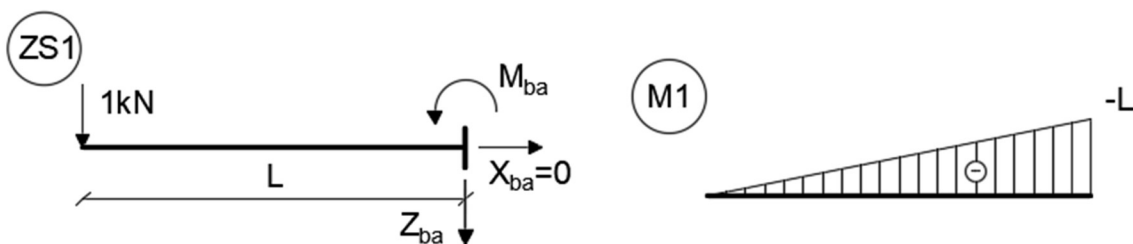


Obr. 4. 18: Základní soustava pro zatížení  $q$ , typ 111-111

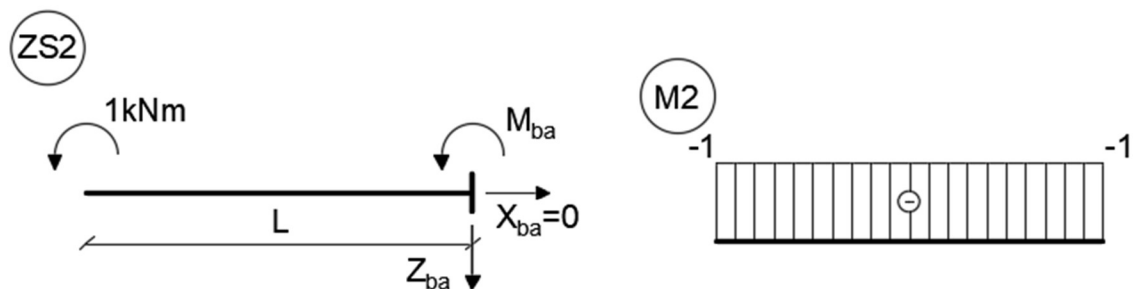
Zatěžovací stavy a průběh ohybových momentů:



Obr. 4. 19: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0 zatížení  $q$ , typ 111-111



Obr. 4. 20: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 zatížení  $q$ , typ 111-111



Obr. 4. 21: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS2 zatížení  $q$ , typ 111-111

Soustava kanonických rovnic:

$$\begin{cases} \delta_{1,0} + \delta_{1,1}X_1 + \delta_{1,2}X_2 = 0 \\ \delta_{2,0} + \delta_{2,1}X_1 + \delta_{2,2}X_2 = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

Výpočet deformačních součinitelů:

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI} \left( \left( \frac{-qL^2}{2} \right) \frac{L}{2} \frac{2}{3} (-L) + \frac{2}{3} \frac{1}{8} qL^2 L \frac{(-L)}{2} \right) = \frac{1}{EI} \left( \frac{qL^4}{6} - \frac{qL^4}{24} \right) = \frac{qL^4}{8EI} \quad (4.32)$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} \left( \frac{(-L)L}{2} \frac{2}{3} (-L) \right) = \frac{L^3}{3EI} \quad (4.33)$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \frac{1}{EI} \left( \frac{(-L)L}{2} (-1) \right) = \frac{L^2}{2EI} \quad (4.34)$$

$$\delta_{2,0} = \frac{1}{EI} \left( \left( \frac{-qL^2}{2} \right) \frac{L}{2} (-1) + \frac{2}{3} \frac{1}{8} qL^2 L (-1) \right) = \frac{1}{EI} \left( \frac{qL^3}{4} - \frac{qL^3}{12} \right) = \frac{qL^3}{6EI} \quad (4.35)$$

$$\delta_{2,2} = \frac{1}{EI} \left( (-1)L(-1) \right) = \frac{L}{EI} \quad (4.36)$$

Dosázení deformačních součinitelů do soustavy kanonických rovnic 4.31:

$$\begin{cases} \frac{qL^4}{8EI} + \frac{L^3}{3EI} X_1 + \frac{L^2}{2EI} X_2 = 0 \\ \frac{qL^3}{6EI} + \frac{L^2}{2EI} X_1 + \frac{L}{EI} X_2 = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

Řešením soustavy rovnic 4.37 se vypočítají neznáme reakce  $Z_{ab}$  a  $M_{ab}$ :

$$Z_{ab} = X_1 = -\frac{qL}{2} \quad (4.38)$$

$$M_{ab} = X_2 = \frac{qL^2}{12} \quad (4.39)$$

Neznáme reakce  $Z_{ba}$  a  $M_{ba}$  se určí dle rovnic rovnováhy 3.8 a 3.9:

$$Z_{ba} = \frac{qL}{L} \quad (4.40)$$

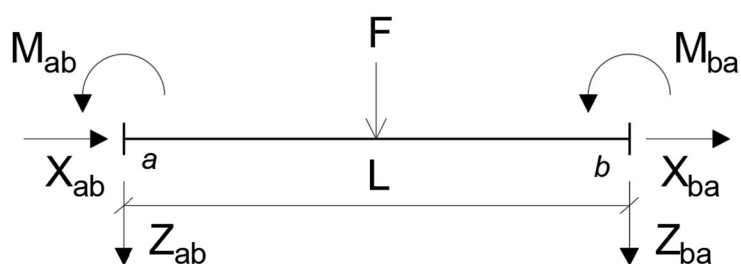
$$M_{ba} = -\frac{qL^2}{12} \quad (4.41)$$

Výsledný vektor primárních koncových sil  $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$  má následující tvar:

$$\{\bar{R}_{ab}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

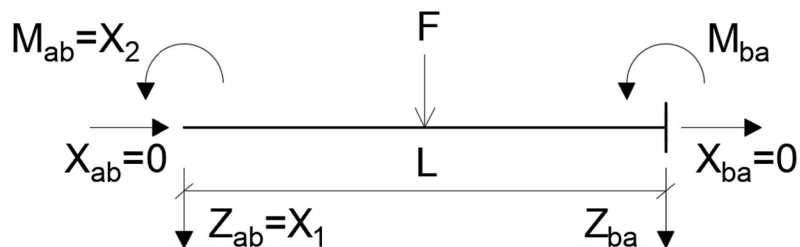
#### 4.2.2.3 Osamělá svislá síla $F_z$

Statické schéma prutu s osamělou silou  $F_z$  je znázorněno na obr. 4.22:

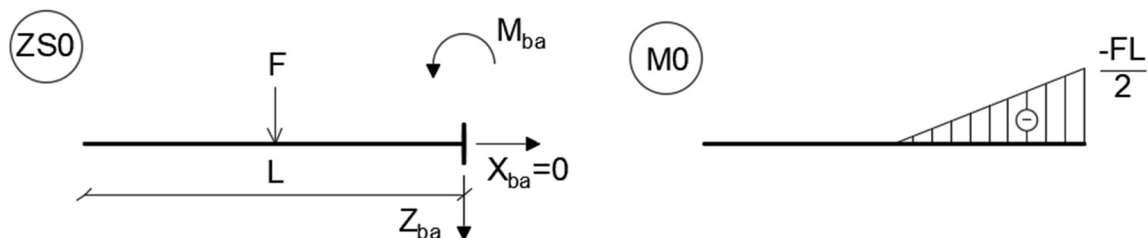


Obr. 4. 22: Statické schéma pro osamělou sílu  $F_z$ , typ 111-111

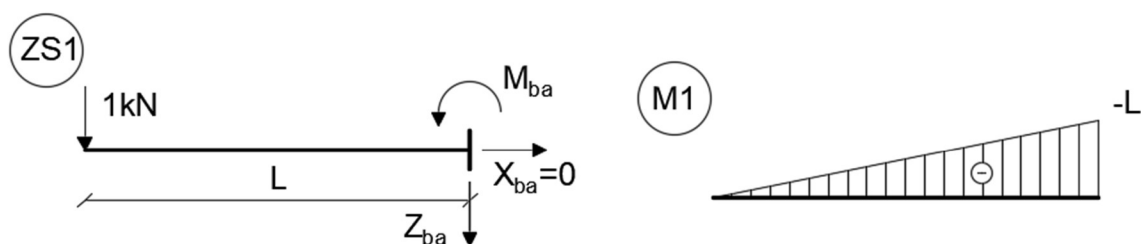
Stejným způsobem, jako pro prut se spojitým zatížením, se určí základní soustava, zatěžovací stavy a průběh ohybových momentů:



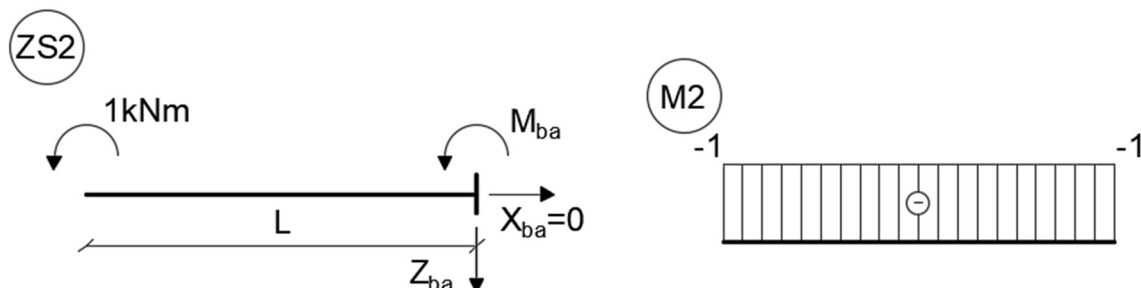
Obr. 4. 23: Základní soustava pro osamělou sílu  $F_z$ , typ 111-111



Obr. 4. 24: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0 osamělá síla  $F_z$ , typ 111-111



Obr. 4. 25: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 osamělá síla Fz, typ 111-111



Obr. 4. 26: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS2 osamělá síla Fz, typ 111-111

Soustava kanonických rovnic vypadá totožně se vztahem 4.31. Dalším krokem je výpočet deformačních součinitelů:

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI} \left( \left( \frac{-FL}{2} \right) \frac{L}{2} \frac{1}{2} \left( -\frac{L}{2} \right) + \left( \frac{-FL}{2} \frac{L}{2} \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{(-L)}{2} \right) \right) = \frac{1}{EI} \left( \frac{FL^3}{16} + \frac{FL^3}{24} \right) = \frac{5FL^3}{48EI} \quad (4.43)$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} \left( \frac{(-L)L}{2} \frac{2}{3} (-L) \right) = \frac{L^3}{3EI} \quad (4.44)$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \frac{1}{EI} \left( \frac{(-L)L}{2} (-1) \right) = \frac{L^2}{2EI} \quad (4.45)$$

$$\delta_{2,0} = \frac{1}{EI} \left( \left( \frac{-FL}{2} \right) \frac{L}{2} \frac{1}{2} (-1) \right) = \frac{FL^2}{8EI} \quad (4.46)$$

$$\delta_{2,2} = \frac{1}{EI} \left( (-1)L(-1) \right) = \frac{L}{EI} \quad (4.47)$$

Soustava kanonických rovnic po dosazení deformačních součinitelů:

$$\begin{cases} \frac{5L^3}{48EI} + \frac{L^3}{3EI} X_1 + \frac{L^2}{2EI} X_2 = 0 \\ \frac{FL^2}{8EI} + \frac{L^2}{2EI} X_1 + \frac{L}{EI} X_2 = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

Řešením vztahu 4.48 je:

$$Z_{ab} = X_1 = -\frac{F}{2} \quad (4.49)$$

$$M_{ab} = X_2 = \frac{FL}{8} \quad (4.50)$$

Neznáme reakce  $Z_{ba}$  a  $M_{ba}$  se určí dle rovnic rovnováhy 3.8 a 3.9:

$$Z_{ba} = \frac{F}{2} \quad (4.51)$$

$$M_{ba} = -\frac{FL}{8} \quad (4.52)$$

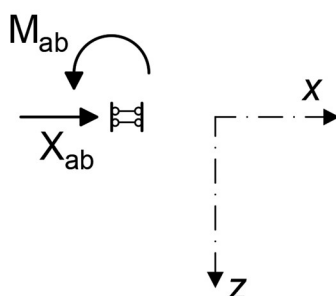
Vektor primárních koncových sil  $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$  má následující tvar:

$$\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{F}{2} \\ \frac{FL}{8} \\ 0 \\ \frac{F}{2} \\ -\frac{F}{2} \\ \frac{FL}{8} \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

### 4.3 Odvození pro typ prutu 101 – 111

Typ prutu s kódovým číslem *101-111* má typ podepření *posuvné vetknutí kolmo na osu prutu* v levém styčnicku *a* a *vetknutí* v pravém styčnicku *b*. Pro odvození matice tuhosti  $[\mathbf{K}_{ab}]$  a vektoru primárních koncových sil  $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$  bude aplikován princip řešení, který byl popsán v podkapitole 4.2. Odvozené matice pak budou použity pro analýzu modelů konstrukcí s typem prutu *101-111*. Při analýze prutové konstrukce pomocí MATLABu budou vypočítány neznámé parametry deformací. Následně tyto parametry ověřím pomocí stejného výpočtu deformací ve SCIA Engineer. Pokud jsou parametry deformací shodné při obou analýzách, jsou matice odvozeny správně.

Označení posuvného vetknutí kolmo na osu prutu bylo převzato z [7].:



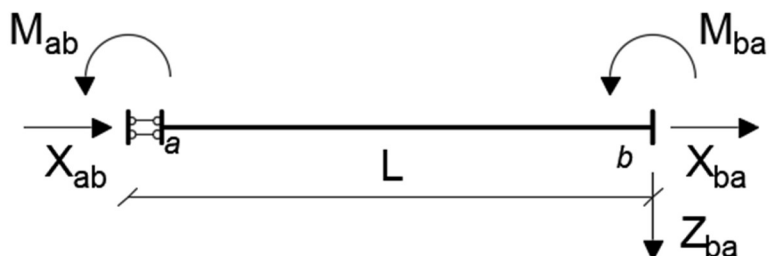
Obr. 4. 27: Typ připojení 101



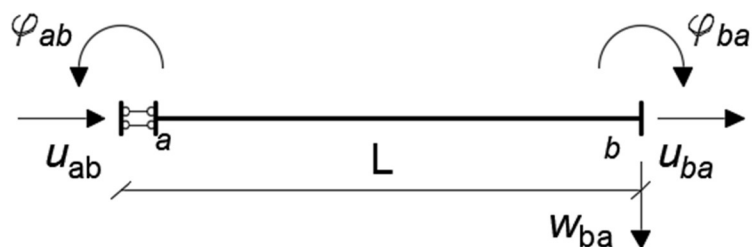
### 4.3.1 Odvození matice tuhosti

Matice tuhosti  $[K_{ab}]$  prutu typu 101-111 má stejný tvar a rozměrnost jako matice tuhosti oboustranně vetknutého prutu 4.1.

Prut 101-111 má následující statické schéma a schéma deformací:



Obr. 4. 28: : Statické schéma, typ 101-111



Obr. 4. 29: Schéma deformací, typ 101-111

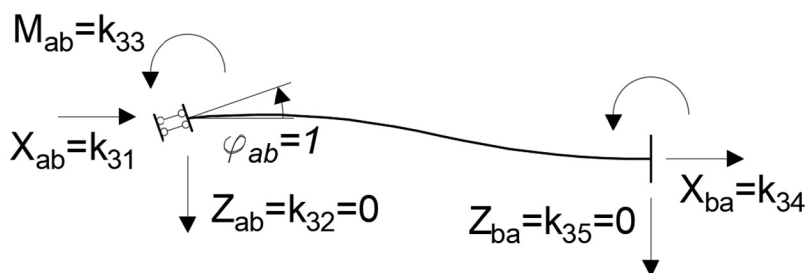
Odvození neznámých prvků matice tuhosti  $[K_{ab}]$  4.1 je popsáno pro první  $u_{ab}$  a třetí  $\varphi_{ab}$  sloupec. Druhý sloupec  $w_{ab}$  má prvky s nulovou hodnotou kvůli typu podepření. Matice tuhosti je symetrická, odvození pro ostatní sloupce je možné vidět ve příloze 1. *Ručné odvození.*

#### 4.3.1.1 Vynucený jednotkový posun $u_{ab}$ ve styčnicku a

Odvození pro jednotkový posun  $u_{ab}$  ve styčnicku a je identický jako pro typ prutu *vetknutí-vetknutí*.

Hodnoty neznámých prvků matice  $k_{11}$  jsou popsány ve vztahu 4.6 a pro  $k_{41}$  ve vztahu 4.7.

#### 4.3.1.2 Vynucené jednotkové pootočení $\varphi_{ab}$ ve styčnicku a

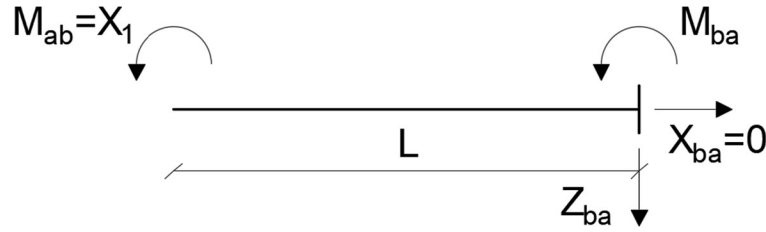


Obr. 4. 30: Aplikace jednotkového pootočení  $\varphi_{ab}$  ve styčnicku a, typ 101-111

Stupeň statické neurčitosti  $n_s$  se vypočítá dle vztahu 3.1.

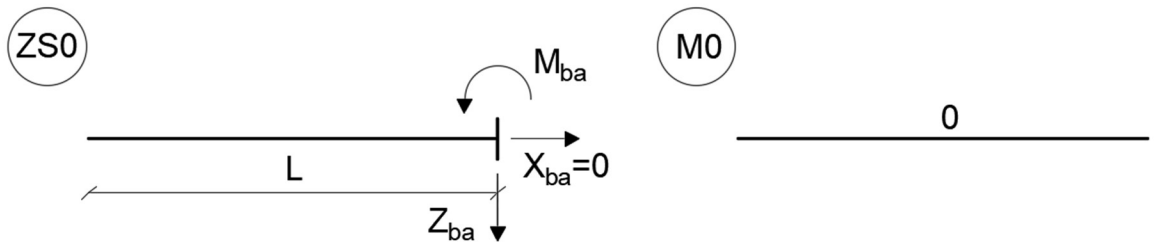
$$n_s = 5 - 3 = 2 \quad (4.54)$$

Odstraněním přebytečných reakcí  $X_{ab}$  a  $M_{ab}$  ve styčnicku  $a$  vzniká základní soustava. Prutová konstrukce nemá žádné zatížení ve směru osy prutu, proto  $X_{ab}$  má nulovou hodnotu a tím vznikne pouze zatěžovací stav 0 a 1.

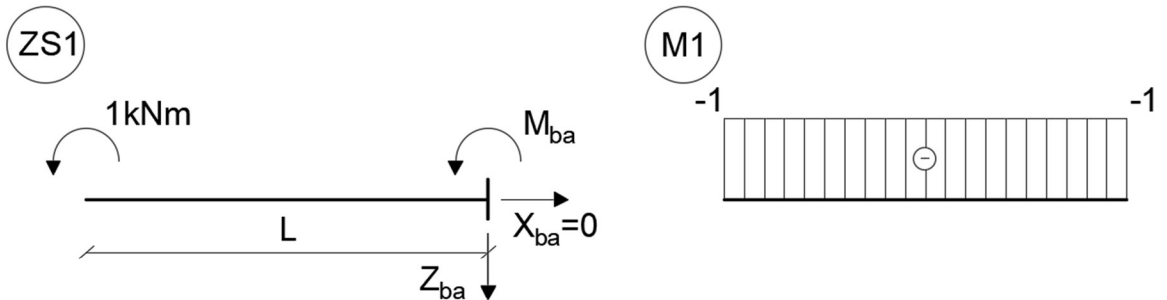


Obr. 4. 31: Základní soustava pro  $\varphi_{ab}$ , typ 101-111

Zatěžovací stavy a průběh ohybových momentů:



Obr. 4. 32: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0  $\varphi_{ab}$ , typ 101-111



Obr. 4. 33: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1  $\varphi_{ab}$ , typ 101-111

Kanonické rovnice:

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 1 \quad (4.55)$$

Výpočet deformačních součinitelů:

$$\delta_{1,0} = 0 \quad (4.56)$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} ((-1)L(-1)) = \frac{L}{EI} \quad (4.57)$$

Po dosazení deformačních součinitelů do kanonické rovnice se dopočítá  $X_1$ :

$$X_1 = \frac{EI}{L} \quad (4.58)$$

Reakce  $X_{ab}$ ,  $X_{ba}$ ,  $Z_{ab}$  a  $Z_{ba}$  jsou nulové. Neznámá reakce  $M_{ba}$  se určí dle rovnice rovnováhy 3.9.

$$M_{ba} = -\frac{EI}{L} \quad (4.59)$$

Výsledná matice tuhosti  $[K_{ab}]$  4.1 má následující tvar:

typ 5 101-111

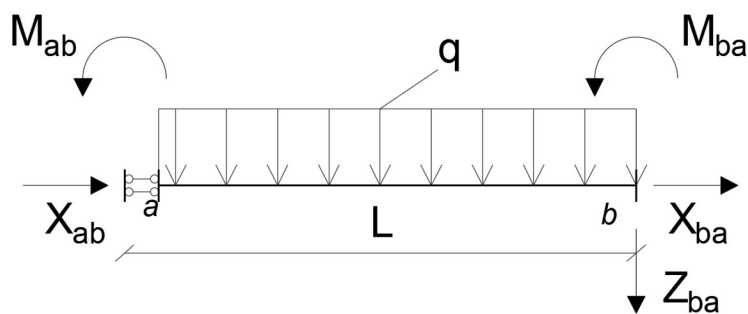
	ua	wa	fa	ub	wb	fib
Xab	EA/L	0	0	-EA/L	0	0
Zab	0	0	0	0	0	0
Mab	0	0	EI/L	0	0	-EI/L
Xba	-EA/L	0	0	EA/L	0	0
Zba	0	0	0	0	0	0
Mba	0	0	-EI/L	0	0	EI/L

Obr. 4. 34: Matice tuhosti typ 101-111, převzato z přílohy č. 3.

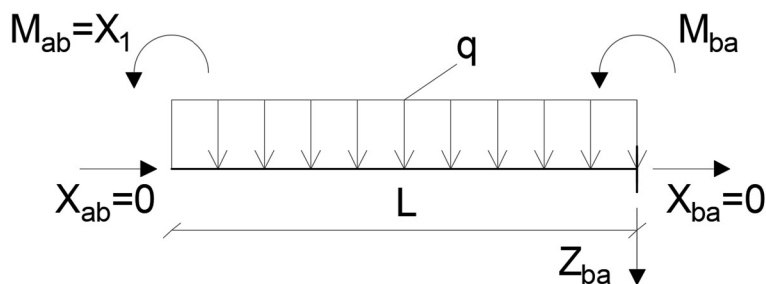
### 4.3.2 Odvození vektoru primárních koncových sil

Odvození vektoru primárních koncových sil  $\{\bar{R}_{ab}\}$  pro typ prutu 101-111 je provedeno stejným způsobem jako pro prut *vetknutí-vetknutí*.

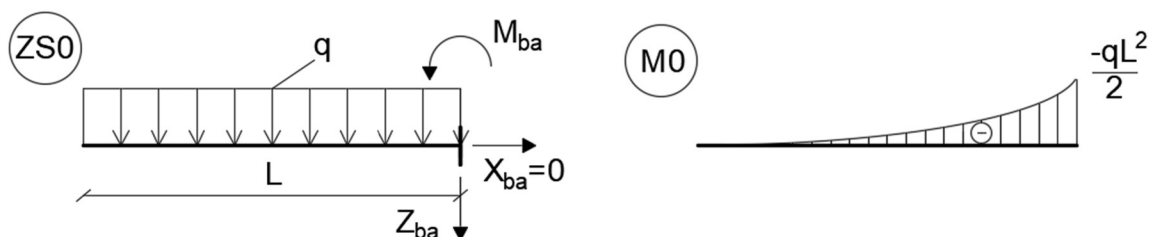
#### 4.3.2.1 Spojité zatížení $q$



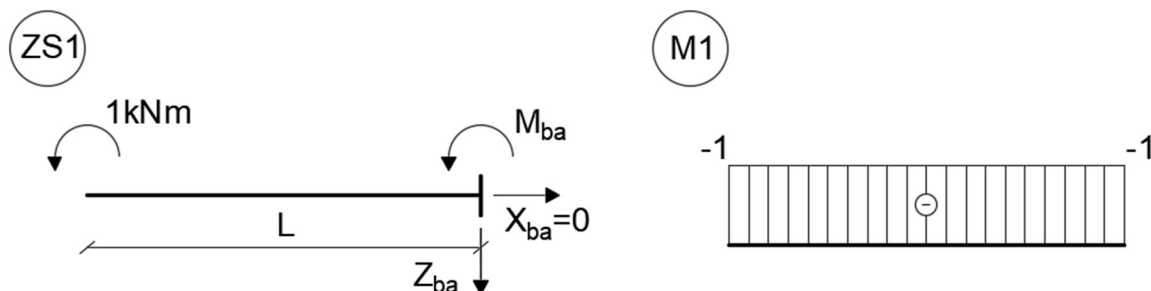
Obr. 4. 35: Statické schéma pro zatížení  $q$ , typ 101-111



Obr. 4. 36: Základní soustava pro zatížení  $q$ , typ 101-111



Obr. 4. 37: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0 zatížení  $q$ , typ 101-111



Obr. 4. 38: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 zatížení  $q$ , typ 101-111

Kanonické rovnice:

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0 \quad (4.60)$$

Deformační součinitele:

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI} \left( \left( \frac{-qL^2}{2} \right) \frac{L}{2} (-1) + \frac{21}{38} qL^2 L (-1) \right) = \frac{1}{EI} \left( \frac{qL^3}{4} - \frac{qL^3}{12} \right) = \frac{qL^3}{6EI} \quad (4.61)$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} ((-1)L(-1)) = \frac{L}{EI} \quad (4.62)$$

Dosazení deformačních součinitelů do kanonických rovnic:

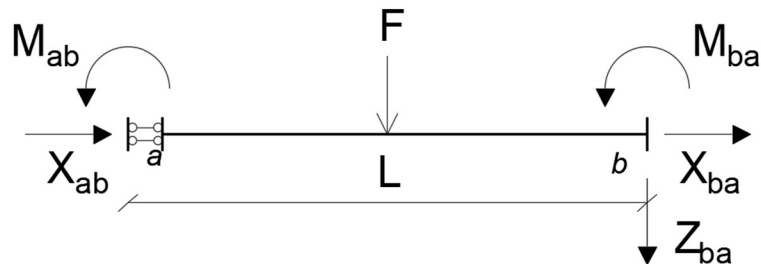
$$\frac{qL^3}{6EI} + \frac{L}{EI} X_1 = 0 \quad (4.63)$$

Řešením rovnice 4.63 je  $M_{ab}$ . Neznámý moment  $M_{ba}$  se dopočítá dle rovnice rovnováhy 3.9. Hodnoty  $X_{ab}$ ,  $X_{ba}$ ,  $Z_{ab}$  a  $Z_{ba}$  jsou nulové.

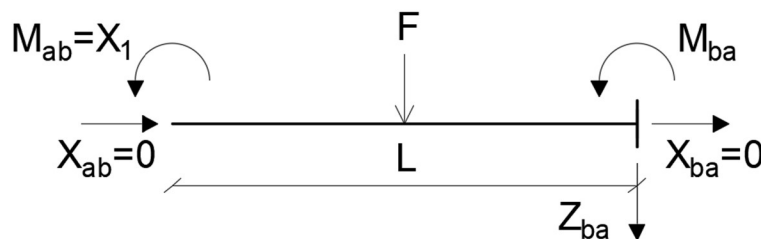
Výsledný vektor primárních koncových sil  $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$  má následující tvar:

$$\{\bar{R}_{ab}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -qL^2 \\ 6 \\ 0 \\ -qL \\ -qL^2 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (4.64)$$

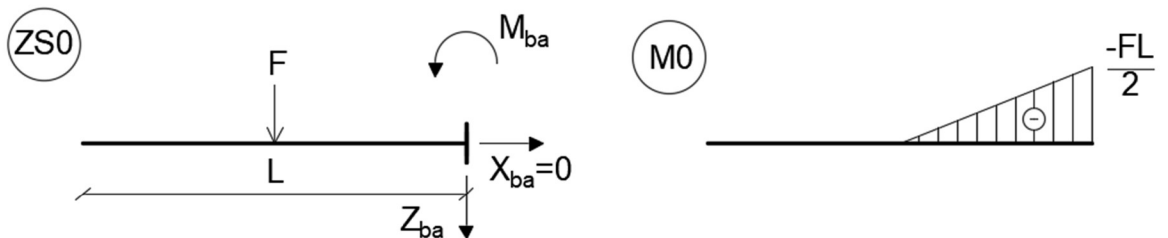
### 4.3.2.2 Osamělá svislá síla $F_z$



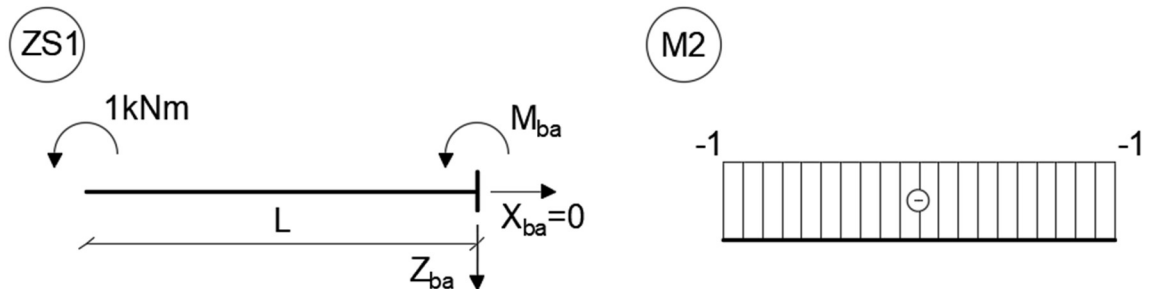
Obr. 4. 39: Statické schéma pro osamělou sílu  $F_z$ , typ 101-111



Obr. 4. 40: Základní soustava pro osamělou sílu  $F_z$ , typ 101-111



Obr. 4. 41: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0 osamělá síla  $F_z$ , typ 101-111



Obr. 4. 42: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 osamělá síla  $F_z$ , typ 101-111

Kanonické rovnice:

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0 \quad (4.65)$$

Deformační součinitele:

$$\delta_{1,0} = \frac{1}{EI} \left( \left( \frac{-FL}{2} \right) \frac{L}{2} \frac{1}{2} (-1) \right) = \frac{FL^2}{8EI} \quad (4.66)$$

$$\delta_{1,1} = \frac{1}{EI} ((-1)L(-1)) = \frac{L}{EI} \quad (4.67)$$

Dosazení deformačních součinitelů do kanonických rovnic:

$$\frac{FL^2}{8EI} + \frac{L}{EI} X_1 = 0 \quad (4.68)$$

Řešením rovnice je  $M_{ab}$ , neznámý moment  $M_{ba}$  se dopočítá dle rovnice rovnováhy 3.9.  $X_{ab}$ ,  $X_{ba}$ ,  $Z_{ab}$ ,  $Z_{ba}$  jsou nulové.

Výsledný vektor primárních koncových sil  $\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\}$  má následující tvar:

$$\{\bar{\mathbf{R}}_{ab}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-FL}{8} \\ 0 \\ -F \\ \frac{-3FL}{8} \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$

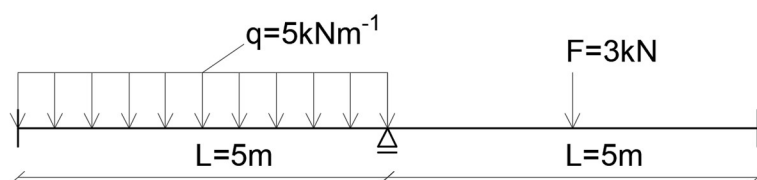
## 5. Řešené příklady

Tato kapitola je věnovaná analýze modelů konstrukcí s různými typy kloubů. Analýza je udělána pro sedm různých příkladů.

Pro každou konstrukci je vytvořených několik výpočtových modelů, které se liší počtem neznámých parametrů deformací a typem prutů. Pro analýzu konstrukcí se používá MATLAB, výstupem výpočtu v MATLABu jsou hodnoty neznámých parametrů deformací, reakcí a vnitřních sil. Výsledky výpočtů z MATLABu jsou zkontrolovány s pomocí SCIA Engineer. Následně jsou výsledky porovnány.

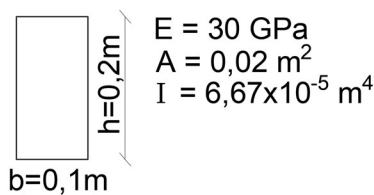
### 5.1 Příklad č. 1

Statické schéma příkladu č. 1 je možné vidět na obr. 5.1:



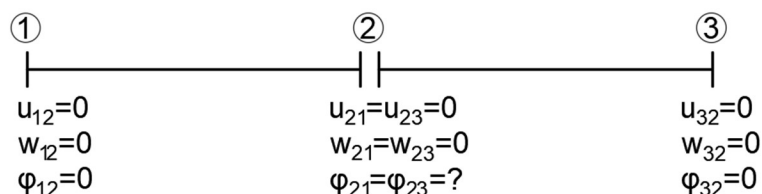
Obr. 5. 1: Statické schéma příkladu č. 1

Průřezové a materialové charakteristiky, které jsou nutné pro analýzu prutové konstrukce, jsou znázorněny na obr. 5.2:



Obr. 5. 2: Průřezové a materialové charakteristiky

Pro analýzu konstrukcí je nutné sestavit výpočtový model, na kterém budou označeny čísla styčnicků a neznámé parametry deformace. Výpočtový model je znázorněn na obr. 5.3:



Obr. 5. 3. Výpočtový model příklad č. 1

Z výpočtového modelu je vidět, že neznámá deformace je pootočení ve styčnicku číslo dva po aplikaci kondenzace.

Index pro pootočení v globální matici tuhosti a vektoru neznámých parametrů deformací je číslo šest. Jestli jsou parametry deformace ve styčnicku stejné pro prut 12 a 23, budou se indexovat jenom podle čísla styčnicku. Takže například pro  $\varphi_{21} = \varphi_{23}$ , se bude používat označení  $\varphi_2$ . Stejný princip se bude používat v dalších příkladech.

Pro sestavení globální matice tuhosti celé konstrukce, se v MATLABu vytvoří (napíše) funkce *vetknuti\_vetknuti*, která počítá matici tuhosti prutu. Ukázka funkce je zobrazená na obr 5.4:

```
function k = vetknuti_vetknuti(E,I,L,A) %111_111

E = input ('enter the Young modulus'); %Modul pružnosti v tahu a v tlaku E [Pa]
I = input ('enter the moment inertia'); %% Moment setrvačnosti obdelnikového
průřezu [m^4]
L = input ('enter the length of the beam'); %Délka prutu [m]
A = input ('enter the area of the beam'); %Plocha průřezu [m^2]

%Maticce tuhosti prutu typ 111_111

k = [ E*A/L, 0, 0, -E*A/L, 0, 0;
      0, 12*E*I/L^3, -6*E*I/L^2, 0, -12*E*I/L^3, -6*E*I/L^2;
      0, -6*E*I/L^2, 4*E*I/L, 0, 6*E*I/L^2, 2*E*I/L;
      -E*A/L, 0, 0, E*A/L, 0, 0;
      0, -12*E*I/L^3, 6*E*I/L^2, 0, 12*E*I/L^3, 6*E*I/L^2;
      0, -6*E*I/L^2, 2*E*I/L, 0, 6*E*I/L^2, 4*E*I/L];

end
```

Obr. 5. 4: Funkce *vetknuti\_vetknuti* v MATLABu

Následně se tato funkce bude používat pro sestavení globální matice tuhosti celé konstrukce. Algoritmus je znázorněn na obr. 5.5:

```
numElements = 2; %Počet prutu
numNodes = 3; %Počet uzlu
numDOFpernode =3; %Stupeň volnosti uzlu
numDOF = numNodes * numDOFpernode; %Stupeň volnosti celé konstrukce
K_global = zeros (numDOF, numDOF); %Globalní matice tuhosti

%Momocná matice pro sestávení globalní matice tuhosti
PM = [1 2 3 4 5 6; %číslování deformací pro prut 1-2
      4 5 6 7 8 9] %číslování deformací pro prut 2-3

%Sestavení globalní matice tuhosti celé konstrukce
for i= 1:numElements

    K_global(PM(i,:),PM(i,:)) = K_global(PM(i,:),PM(i,:)) + vetknuti_vetknuti;

end
```

Obr. 5. 5: Algoritmus sestavení globalní matice tuhosti celé konstrukce

Stejným principem se pomocí indexů udělá vektor primárních koncových sil s pomocí funkcí *q\_zatizeni* a *F\_zatizeni*. Ukázka kódu je zobrazená na následujícím obrázku:

```
%Sestavení globalního vektoru primárních koncových účinků
numqElements = 1;
numFElements = 1;
R_global = zeros (numDOF, 1);

for i=1:numqElements
    R_vector{i} = q_zatizeni
    R_global ([1 2 3 4 5 6],[1]) = R_global ([1 2 3 4 5 6],[1]) + R_vector{i}
    for j=1:numFElements
        R_vector{j} = F_zatizeni
```



```

R_global ([4 5 6 7 8 9],[1]) = R_global ([4 5 6 7 8 9],[1]) +
R_vector{j}
end
end

```

Obr. 5. 6: Algoritmus sestavení globálního vektoru primárních koncových sil

Výpis z MATLABu globálního vektoru neznámých parametrů deformací:

```

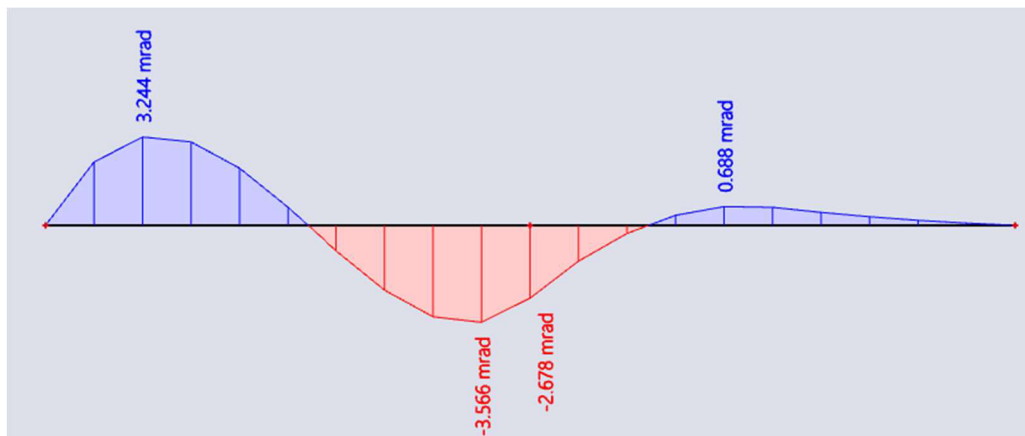
Globální vektor neznámých parametrů deformací

u12  w12  fi12  u2  w2  fi2  u32  w32  fi32
-----
0    0    0    0    0  2.655991  0    0    0

```

Obr. 5. 7: Výpis globálního vektoru neznámých parametrů deformací v MATLABu

Kontrola výpočtu se provede pomocí SCIA Engineer. Hledaná veličina je pootočení  $\varphi_2$ , uprostřed prutové konstrukce:



Obr. 5. 8: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 1

Záporná hodnota pootočení  $\varphi_2$  ve SCIA Engineer je způsobena jiným směrem konvencí. Směr osy  $z$  ve SCIA Engineer má osu směrem nahoru, v MATLABu směřuje osa  $z$  dolů podle kladné konvence uvedené na obr. 2.7.

Dalším krokem je výpočet reakcí a vnitřních sil. Výsledky hodnot a porovnání jsou znázorněny v tabulkách 5.1, 5.2 a 5.3:

Tabulka 5. 1: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 1

Deformace			
Typ	MATLAB [mrad]	SCIA [mrad]	Rozdíl [%]
$\varphi_2$	2.656	2.678	0.822

Tabulka 5. 2: Porovnání výsledků reakcí, příklad č. 1

Reakce			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
$R_{1x}$	0.000	0.000	0.000
$R_{1z}$	-13.781	-13.718	0.459
$M_1$	12.552	12.545	0.056
$R_{2z}$	-14.000	-14.000	0.000
$R_{3x}$	0.000	0.000	0.000
$R_{3z}$	-0.219	-0.220	0.457
$M_3$	0.260	0.253	2.767

Tabulka 5. 3: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 1

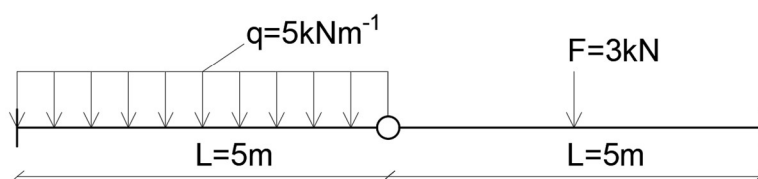
Vnitřní síly			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
$N_{12}$	0.000	0.000	0.000
$V_{12}$	13.781	13.718	0.459
$M_{12}$	-12.552	-12.545	0.056
$N_{21}$	0.000	0.000	0.000
$V_{21}$	-11.219	-11.220	0.009
$M_{21}$	-6.149	-6.146	0.049
$N_{23}$	0.000	0.000	0.000
$V_{23}$	2.781	2.780	0.036
$M_{23}$	-6.149	-6.146	0.049
$N_{32}$	0.000	0.000	0.000
$V_{32}$	-0.219	-0.220	0.457
$M_{32}$	0.260	0.253	2.767

Minimalní rozdíl je způsobený tím, že SCIA Engineer započítává vliv posouvajících sil. Na rozdíl výsledku má vliv také zaokrouhlování.

## 5.2 Příklad č. 2

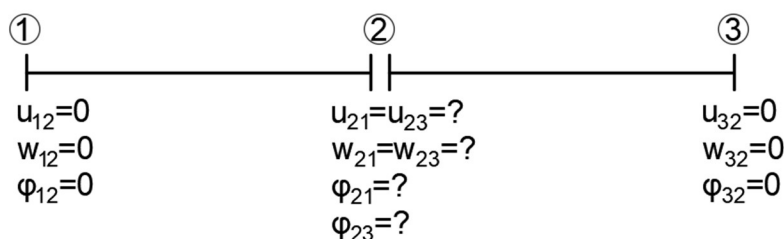
Příklad č. 2 je podobný s předchozím příkladem s jedním rozdílem: uprostřed prutové konstrukce je umístěn kloub místo posuvného kloubového podepření. Průřezové a materiálové charakteristiky jsou stejné s příkladem č. 1 a jsou uvedeny na obr. 5.2.

Statické schéma je zobrazeno na obr. 5.9:

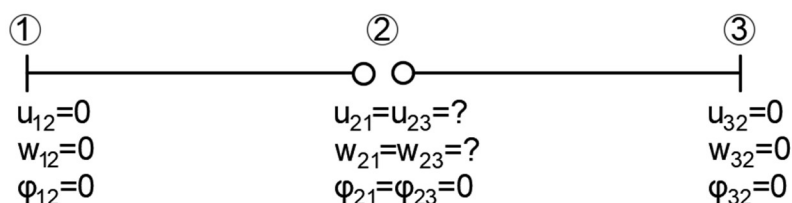


Obr. 5. 9: Statické schéma příkladu č. 2

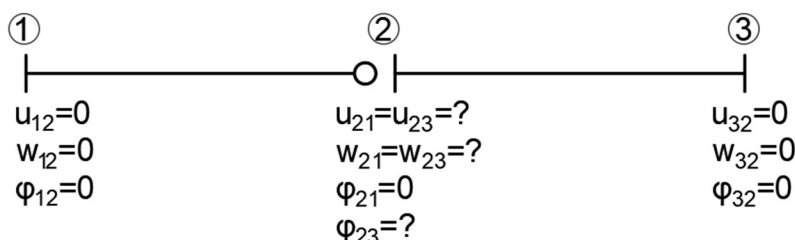
Jsou celkem čtyři výpočtové modely, které se liší různým modelováním prutů. Výpočtové modely jsou znázorněny na následujících obrázcích:



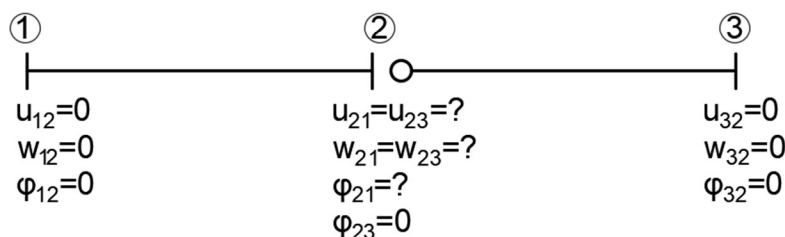
Obr. 5. 10: Výpočtový model č. 1, příklad č. 2



Obr. 5. 11: Výpočtový model č. 2, příklad č. 2



Obr. 5. 12: Výpočtový model č. 3, příklad č. 2



Obr. 5. 13: Výpočtový model č. 4, příklad č. 2

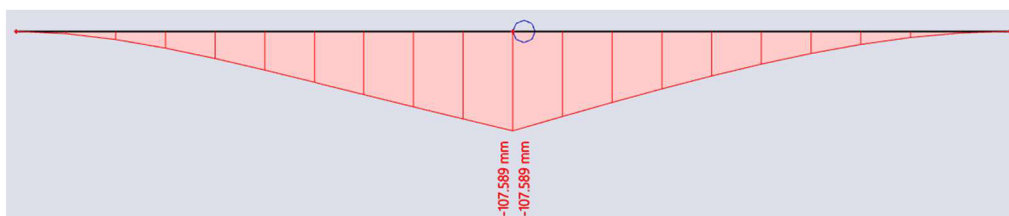
Ve výpočtovém modelu č. 1 je vidět, že jsou zde čtyři neznámé parametry deformací po aplikaci okrajových podmínek  $u_2$ ,  $w_2$ ,  $\varphi_{21}$  a  $\varphi_{23}$ , nachází se ve styčnicku 2. V porovnání, model č. 2 má pouze dva neznámé parametry  $u_2$  a  $w_2$ . Výpočtové modely z prutů typu *vetknutí-vetknutí* mají větší počet neznámých parametrů deformací v porovnání s modelem obsahující kloubové připojení.

Pro každý model je taky nutné rozlišovat celkový počet deformací a počet neznámých parametrů vektoru deformace po aplikaci kondenzace. Shrnutí výsledku z MATLABu je znázorněno v tabulce 5.4:

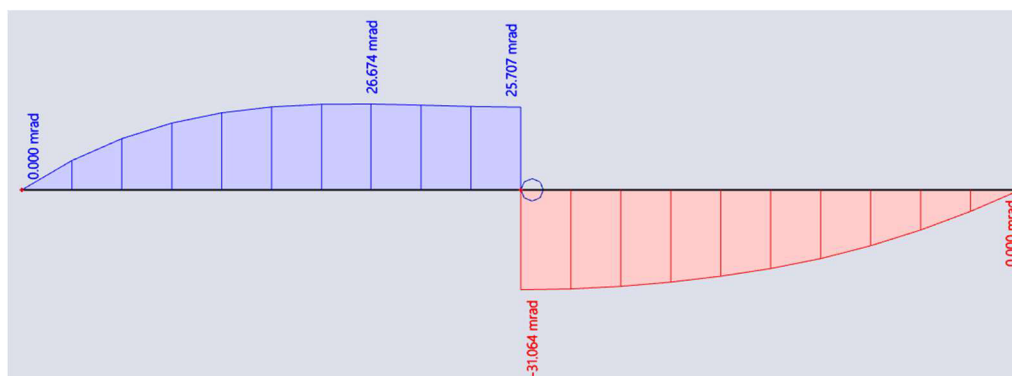
Tabulka 5. 4: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 2

Parametry deformací						
№ Modelů	$u_2$ [mm]	$w_2$ [mm]	$\varphi_{21}$ [mrad]	$\varphi_{23}$ [mrad]	Celkový počet	Počet neznámých
1	0	106.887	-25.588	30.900	10	4
2	0	106.887	-	-	9	2
3	0	106.887	-	30.900	10	3
4	0	106.887	-25.588	-	10	3

Kontrola výpočtu neznámých parametrů deformací byla provedena ve SCIA Engineer, hodnoty svislého posunu a pootočení jsou znázorněny na obr. 5.14 a 5.15:



Obr. 5. 14: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 2



Obr. 5. 15: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 2

V MATLABu byly dále výpočítány hodnoty reakcí a vnitřních sil. Hodnoty byly zkontrolovány ve SCIA Engineer.

Porovnání výsledků neznámých parametrů deformací, reakcí a vnitřních sil:

Tabulka 5. 5: Porovnání výsledků deformací, příklad č. 2

Deformace			
Typ	MATLAB [mrad, mm]	SCIA [mrad,mm]	Rozdíl [%]
$u_2$	0.000	0.000	0.000
$w_2$	106.887	107.589	0.657
$\varphi_{21}$	-25.588	-25.707	0.465
$\varphi_{23}$	30.900	31.064	0.531

Tabulka 5. 6: Porovnání výsledků reakcí, příklad č. 2

Reakce			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
$R_{1x}$	0.000	0.000	0.000
$R_{1z}$	-20.781	-20.780	0.005
$M_1$	41.406	41.399	0.017
$R_{3x}$	0.000	0.000	0.000
$R_{3z}$	-7.219	-7.202	0.236
$M_3$	-28.594	-28.601	0.024

Tabulka 5. 7: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 2

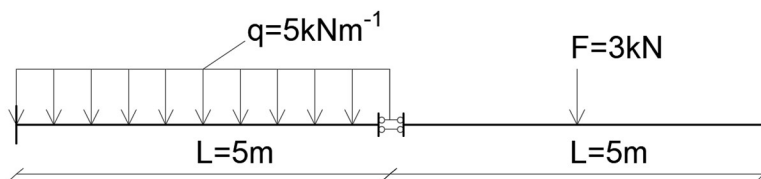
Vnitřní síly			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
$N_{12}$	0.000	0.000	0.000
$V_{12}$	20.781	20.78	0.005
$M_{12}$	-41.406	-41.399	0.017
$N_{21}$	0.000	0.000	0.000
$V_{21}$	-4.219	-4.220	0.024
$M_{21}$	0.000	0.000	0.000
$N_{23}$	0.000	0.000	0.000
$V_{23}$	-4.219	-4.220	0.024
$M_{23}$	0.000	0.000	0.000
$N_{32}$	0.000	0.000	0.000
$V_{32}$	-7.219	-7.202	0.236
$M_{32}$	-28.594	-28.601	0.024

Jak je vidět z tabulek 5.5, 5.6 a 5.7, hodnoty se liší minimálně. Modelování prutů s kloubovým připojením umožňuje vyřešit konstrukci s minimálním počtem neznámých.

### 5.3 Příklad č. 3

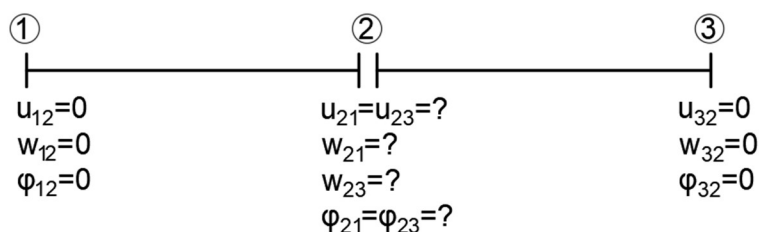
Tato podkapitola se zabývá analýzou prutové konstrukce obsahující *posuvné vetknutí kolmo na osu prutu*. Analýzou této konstrukce se ověří správnost odvozených matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil pro typy prutů s kódovým číslem *111\_101* a *101\_111*.

Statické schéma je znázorněná na obr 5.16:



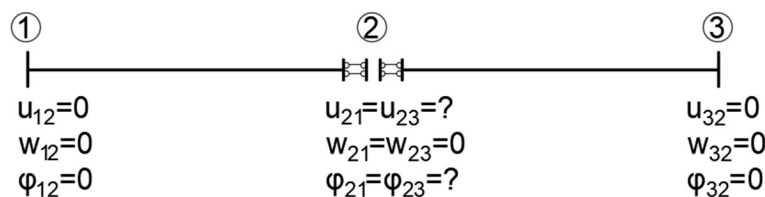
Obr. 5. 16: Statické schéma příkladu č. 3

Stejně jako v příkladu č. 2 se sestaví výpočtové modely. Model č. 1 se skládá z prutů typu *vetknutí-vetknutí* a neznámé parametry deformace jsou  $u_2$ ,  $w_{21}$ ,  $w_{23}$  a  $\varphi_2$ . Model je zobrazen na obr. 5.17:



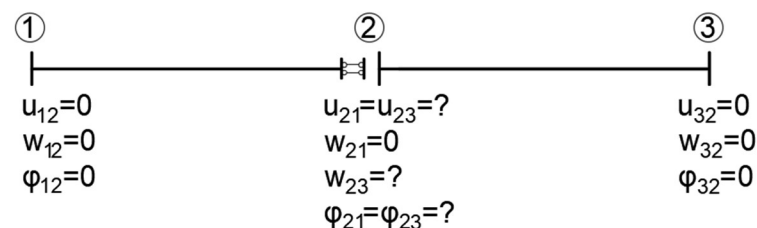
Obr. 5. 17: Výpočtový model č. 1, příklad č. 3

Výpočtový model č.2 je se skládá z prutů obsahující *posuvné vetknutí kolmo na osu prutu*, kodové čísla *111\_101* a *101\_111*. Neznámé parametry deformace jsou  $u_2$  a  $\varphi_2$ . Model je znázorněn na obr. 5.18:



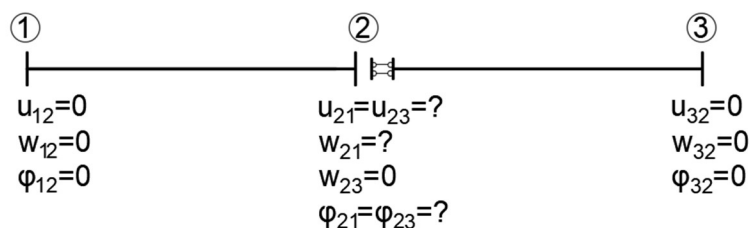
Obr. 5. 18: Výpočtový model č. 2, příklad č. 3

Výpočtový model č. 3 se skládá z prutů s kodovými čísly *111-101* a *111\_111*. Neznámé parametry deformace jsou  $u_2$ ,  $w_{23}$  a  $\varphi_2$ . Model je znázorněn na obr. 5.19:



Obr. 5. 19: Výpočtový model č. 3, příklad č. 3

Výpočtový model č. 4 je podobný modelu č. 3, kodové čísla prutů jsou *111\_111* a *101\_111*. Model je možné vidět na obr. 5.20:



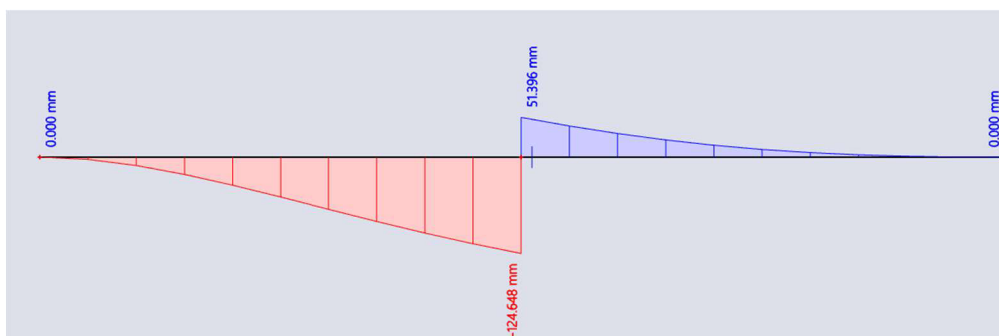
Obr. 5. 20: Výpočtový model č. 4, příklad č. 3

Shrnutí výsledků z výpočtu v MATLABu je znázorněno v tabulce 5.8:

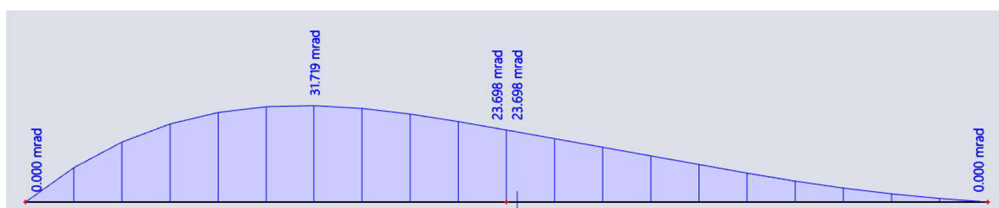
Tabulka 5. 8: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 3

Parametry deformací						
№ Modelů	$u_2$ [mm]	$w_{21}$ [mm]	$w_{23}$ [mm]	$\varphi_2$ [mrad]	Celkový počet	Počet neznámých
1	0	123.7300	-51.176	-23.580	10	4
2	0	-	-	-23.580	9	2
3	0	-	-51.176	-23.580	10	3
4	0	123.730	-	-23.580	10	3

Hodnoty parametrů deformací musí být dále zkontrolovány pomocí SCIA Engineer, k ověření, zda odvození matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil v podkapitole 4.3 bylo uděláno správně.



Obr. 5. 21: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 3



Obr. 5. 22: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 3

Odzovení bylo provedeno správně, porovnání výsledku deformace, reakce a vnitřních sil je znázorněno v tabulkách 5.9, 5.10 a 5.11:

Tabulka 5. 9: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 3

Deformace			
Typ	MATLAB [mrad, mm]	SCIA [mrad,mm]	Rozdíl [%]
$u_2$	0.000	0.000	0.000
$w_{21}$	123.7300	124.648	0.742
$w_{23}$	-51.176	-51.396	0.430
$\varphi_2$	-23.580	-23.698	0.500

Tabulka 5.10: Porovnání výsledků reakce, příklad č. 3

Reakce			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
$R_{1x}$	0.000	0.000	0.000
$R_{1z}$	-25.000	-25.000	0.000
$M_1$	51.146	51.146	0.000
$R_{3x}$	0.000	0.000	0.000
$R_{3z}$	-3.000	-3.000	0.000
$M_3$	3.854	3.854	0.000

Tabulka 5. 11: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 3

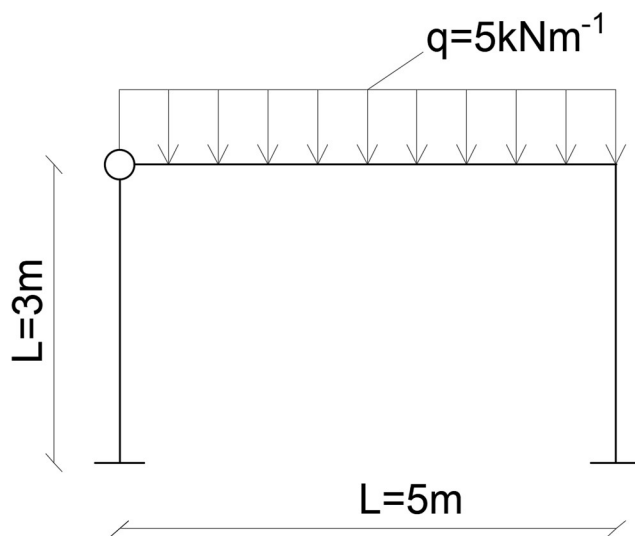
Vnitřní síly			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
$N_{12}$	0.000	0.000	0.000
$V_{12}$	25.000	25.000	0.000
$M_{12}$	-51.146	-51.146	0.000
$N_{21}$	0.000	0.000	0.000
$V_{21}$	0.000	0.000	0.000
$M_{21}$	11.354	11.354	0.000
$N_{23}$	0.000	0.000	0.000
$V_{23}$	0.000	0.000	0.000
$M_{23}$	11.354	11.354	0.000
$N_{32}$	0.000	0.000	0.000
$V_{32}$	-3.000	-3.000	0.000
$M_{32}$	3.854	3.854	0.000

Výsledné hodnoty z MATLABu a SCIA Engineer se liší minimalně. Což potvrzuje správnost odvození matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil pro typy prutů s uvolněním  $111\_101$  a  $101\_111$ . Stejně jako v příkladu č. 2, výpočtový model s uvolněním má nejmenší počet neznámých.



## 5.4 Příklad č. 4

Další příklad, který byl spočítán je rámová konstrukce s kloubem. Statické schéma je možné vidět na obr. 5.23:



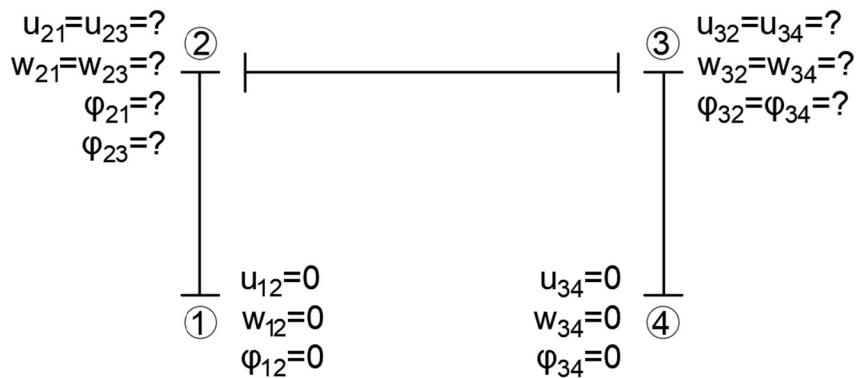
Obr. 5. 22. Statické schéma příkladu č. 4

V tomto příkladu se aplikuje postup převedení matice tuhosti  $[K_{ab}]$  a vektoru primárních koncových sil  $\{\bar{R}\}$  z lokálního do globálního souřadnicového systému transformační maticí  $[T_{ab}]$ . Převedení v MATLABu se provede s pomocí funkce  $T\_matice$ , výpis funkce je znázorněn na obr. 5. 23:

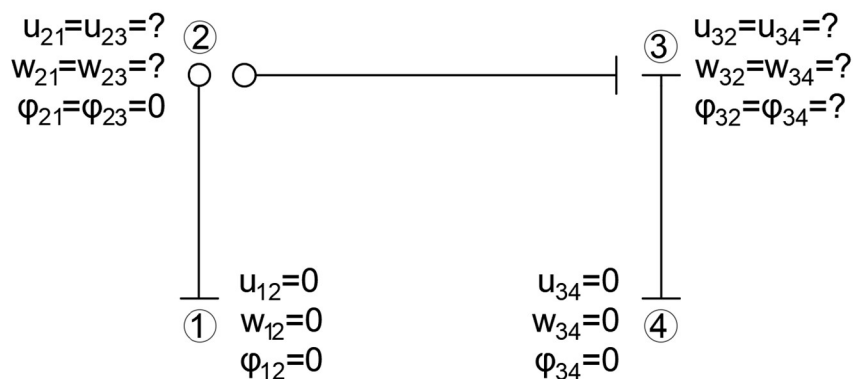
```
function T = T_matice(alfa)
alfa = input ('enter the angle'); %radiany
beta = alfa*pi/180;
T = [ cos(beta), sin(beta), 0, -0, 0, 0;
      -sin(beta), cos(beta), 0, 0, 0, 0;
      0, 0, 1, 0, 0, 0;
      0, 0, 0, cos(beta), sin(beta), 0;
      0, 0, 0, -sin(beta), cos(beta), 0;
      0, 0, 0, 0, 0, 1]
end
```

Obr. 5. 23. Transformační matice v MATLABu

Dalším krokem je sestavení výpočtových modelů. Pro analýzu konstrukcí jsou sestaveny pouze dva výpočtové modely. Model č.1 obsahuje pouze pruty s kódovým číslem  $111\_111$ . Model č.2 obsahuje pruty typu  $111\_110$ ,  $110\_111$  a  $111\_111$ .



Obr. 5. 24: Výpočtový model č.1, příklad č. 4



Obr. 5. 25: Výpočtový model č.2, příklad č. 4

Po aplikaci okrajových podmínek, obsahuje model č.1 celkem sedm neznámých parametrů deformací. Využitím kondenzace je možné zmenšit počet neznámých. Například po odkondenzování pootočení ve styčnicku číslo dva, má model č.2 pouze pět neznámých parametrů deformací.

Výpočet byl proveden v MATLABu, shrnutí je možné vidět v tabulce č. 5.12:

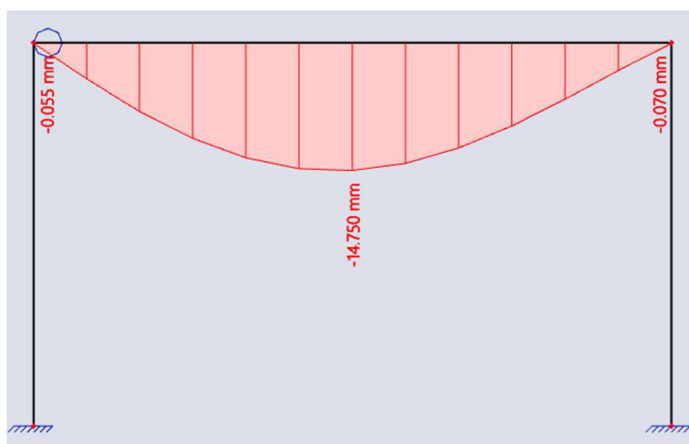
Tabulka 5. 12: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 4

Parametry deformací		
№ Modelů	1	2
$u_2$ [mm]	-8.219	-8.219
$w_2$ [mm]	0.055	0.055
$\varphi_{21}$ [mrad]	4.110	-
$\varphi_{23}$ [mrad]	-9.912	-
$u_3$ [mm]	-8.234	-8.234
$w_3$ [mm]	0.070	0.070
$\varphi_3$ [mrad]	6.859	6.959
Celkový počet	13	12
Počet neznámých	7	5

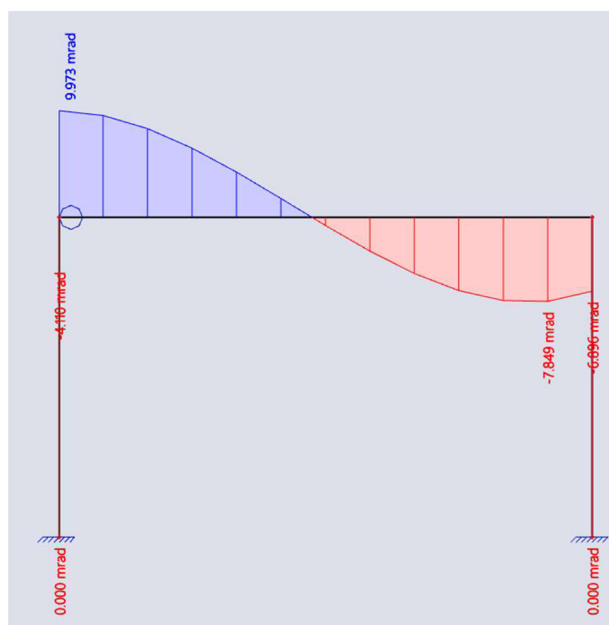
Spočítané parametry deformací ve SCIA Engineer:



Obr. 5. 26: Vodorvný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 4



Obr. 5. 27: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 4



Obr. 5. 28: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 4

Porovnání výsledku deformace, reakce a vnitřních sil mezi výpočtem v MATLABu a SCIA Engineer je znázorněno v tabulkách 5.13, 5.14 a 5.15:

Tabulka 5. 13: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 4

Deformace			
Typ	MATLAB [mrad, mm]	SCIA [mrad,mm]	Rozdíl [%]
$u_2$	-8.219	-8.247	0.341
$w_2$	0.055	0.055	0.000
$\varphi_{21}$	4.110	4.110	0.000
$\varphi_{23}$	-9.912	-9.973	0.615
$u_3$	-8.234	-8.262	0.340
$w_3$	0.070	0.070	0.000
$\varphi_3$	6.859	6.896	0.539

Tabulka 5. 14: Porovnání výsledků reakce, příklad č. 4

Reakce			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
$R_{1x}$	1.836	1.827	0.493
$R_{1z}$	11.030	11.032	0.018
$M_1$	-5.507	-5.481	0.474
$R_{4x}$	-13.970	-13.968	0.014
$R_{4z}$	-1.836	-1.827	0.493
$M_4$	-1.842	-1.857	0.814

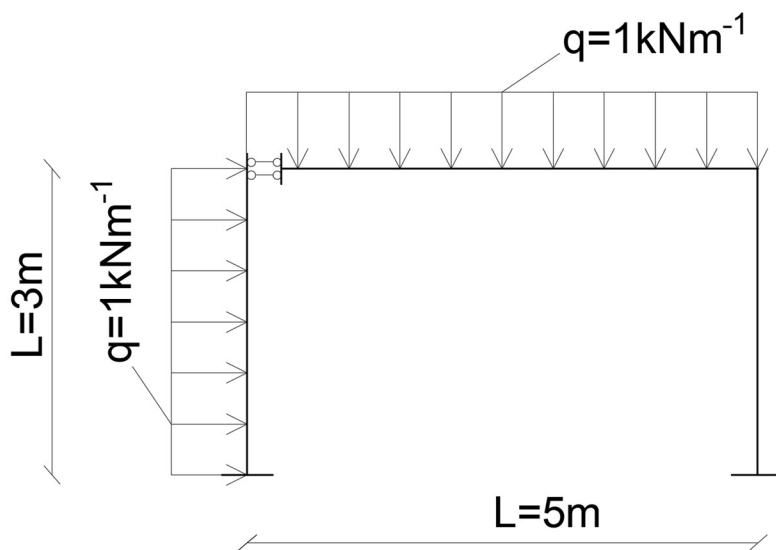
Tabulka 5. 15: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 4

Vnitřní síly				
Typ		MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
Prut 1-2	$N_{12}$	-11.030	-11.032	0.000
	$V_{12}$	-1.836	-1.827	0.493
	$M_{12}$	5.507	5.481	0.474
	$N_{21}$	-11.030	-11.032	0.018
	$V_{21}$	-1.836	-1.827	0.493
	$M_{21}$	0.000	0.000	0.000
Prut 2-3	$N_{23}$	-1.836	-1.827	0.493
	$V_{23}$	11.030	11.032	0.018
	$M_{23}$	0.000	0.000	0.000
	$N_{32}$	-1.836	-1.827	0.493
	$V_{32}$	-13.970	-13.968	0.014
	$M_{32}$	-7.349	-7.338	0.150
Prut 3-4	$N_{34}$	-13.970	-13.968	0.014
	$V_{34}$	1.836	1.827	0.493
	$M_{34}$	-7.349	-7.338	0.150
	$N_{43}$	-13.970	-13.968	0.014
	$V_{43}$	1.836	1.827	0.493
	$M_{43}$	-1.842	-1.857	0.814

Jak je vidět z tabulek 5.13, 5.14 a 5.15, rozdíl mezi výpočtem pomocí MATLABu a SCIA Engineer je minimalní. Tím byl zkontrolován výpočet deformace, reakce a vnitřních sil provedený na ramové konstrukci v MATLABu. Výpočtové modely s kloubem obsahuje nejmenší počet neznámých parametrů deformací.

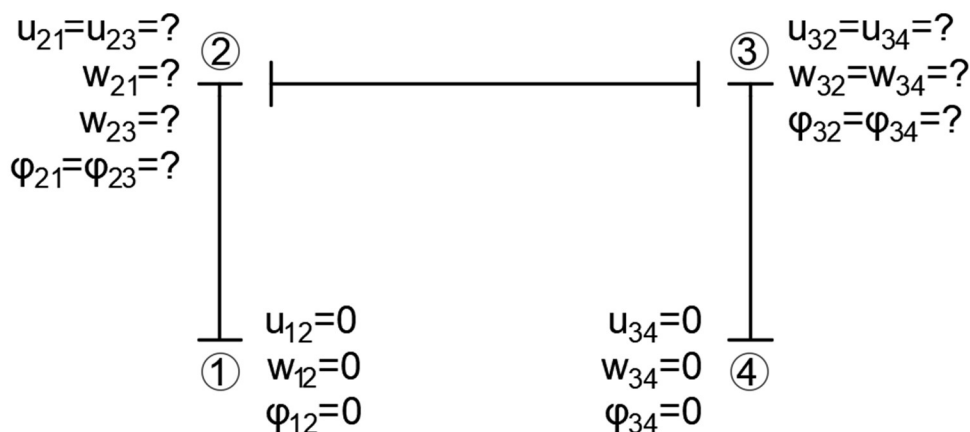
### 5.5 Příklad č. 5

Příklad č. 5 je rámová konstrukce s *posuvným vetknutím kolmo na osu prutu* a navíc vodorovným spojitým zatížením. Statické schéma je znázorněno na obr. 5.29:

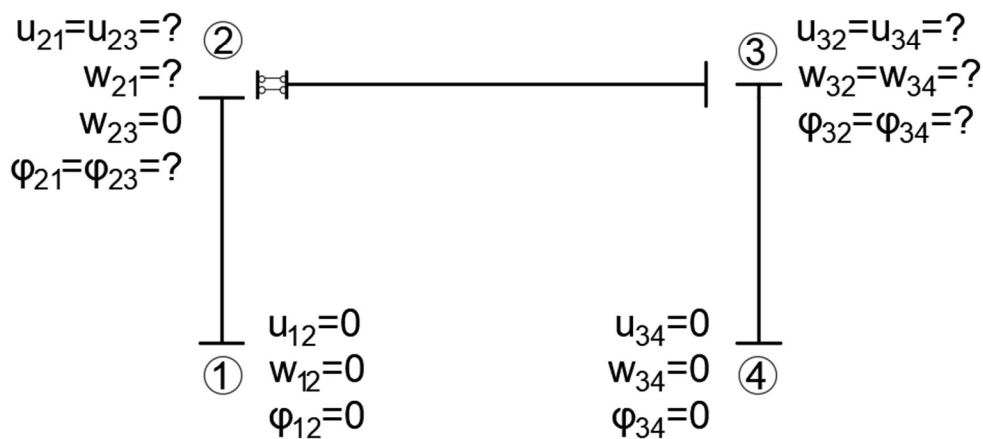


Obr. 5. 29: Statické schéma příkladu č. 5

Celkem jsou sestavené dva výpočtové modely. Model č.1 obsahuje pouze základní typ prutu *vetknuti\_vetknuti*. Model č. 2 je sestaven z prutů *vetknuti\_vetknuti* a z prutu obsahující *posuvné vetknutí kolmo na osu prutu*, kódové číslo je 101\_111. Výpočtové modely jsou znázorněny na obrázcích 5.30 a 5.31:



Obr. 5. 30: Výpočtový model č. 1, příklad č. 5



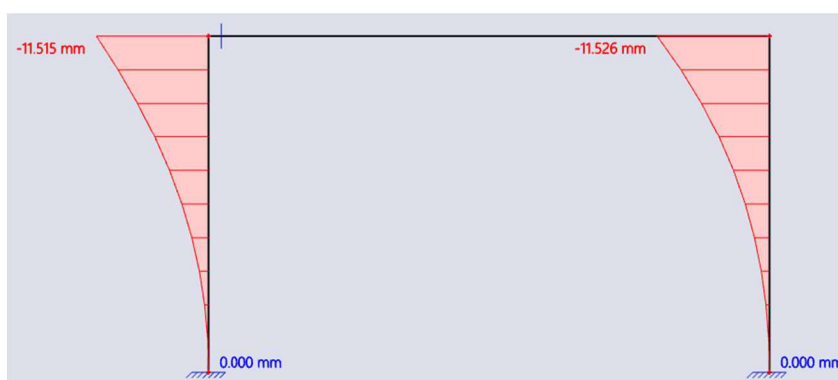
Obr. 5. 31: Výpočtový model č. 2, příklad č. 5

Shrnutí výpočtu z MATLABu je možné vidět v tabulce č. 5.16:

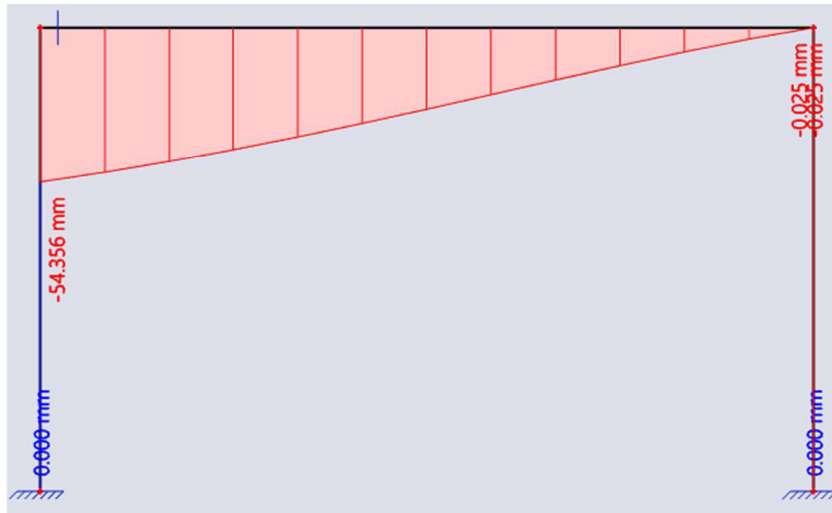
Tabulka 5. 16: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 5

Parametry deformací		
№ Modelů	1	2
$u_2$ [mm]	-11.468	-11.468
$w_{21}$ [mm]	0	0
$w_{23}$ [mm]	54.026	-
$\varphi_2$ [mrad]	7.716	7.716
$u_3$ [mm]	-11.480	-11.480
$w_3$ [mm]	0.025	0.025
$\varphi_3$ [mrad]	8.702	8.702
Celkový počet	13	12
Počet neznámých	7	6

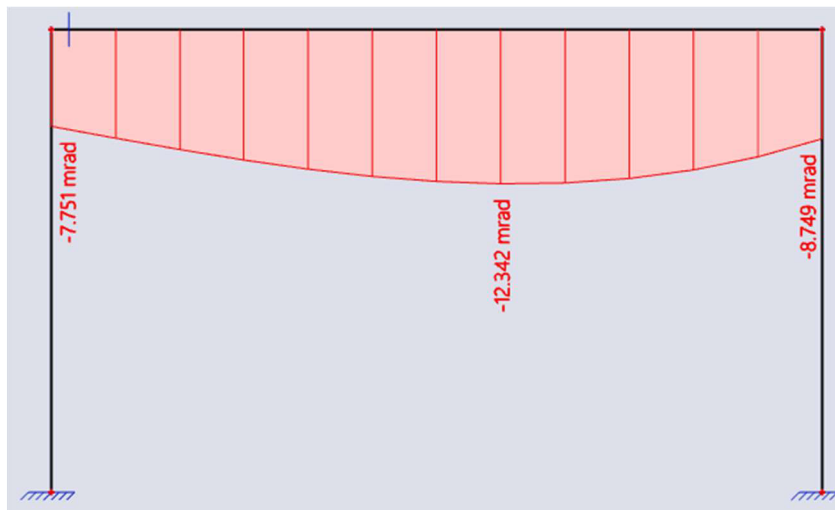
Kontrola výpočtu ve SCIA Engineer:



Obr. 5. 32: Vodorný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 5



Obr. 5. 33: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 5



Obr. 5. 34: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 5

Porovnání výsledku deformace, reakce a vnitřních sil mezi výpočtem v MATLABu a SCIA Engineer je zobrazeno v tabulkách 5.17, 5.18 a 5.19:

Tabulka 5. 17: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 5

Deformace			
Typ	MATLAB [mrad, mm]	SCIA [mrad,mm]	Rozdíl [%]
$u_2$	-11.468	-11.515	0.410
$w_{21}$	0.000	0.000	0.000
$w_{23}$	54.026	54.356	0.611
$\varphi_2$	7.716	7.751	0.454
$u_3$	-11.480	-11.526	0.401
$w_3$	0.025	0.025	0.000
$\varphi_3$	8.702	8.749	0.540

Tabulka 5.18: Porovnání výsledků reakce, příklad č. 5

Reakce			
Typ	MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
$R_{1x}$	-1.595	-1.599	0.251
$R_{1z}$	0.000	0.000	0.000
$M_1$	-4.277	-4.270	0.164
$R_{4x}$	1.405	1.401	0.286
$R_{4z}$	-5.000	-5.000	0.000
$M_4$	-3.723	-3.730	0.188

Tabulka 5. 19: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 5

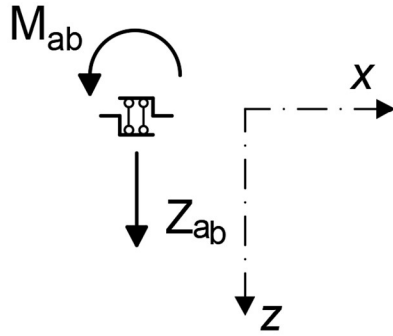
Vnitřní síly				
Typ		MATLAB [kN, kNm]	SCIA [kN, kNm]	Rozdíl [%]
Prut 1-2	$N_{12}$	0.000	0.000	0.000
	$V_{12}$	1.595	1.599	0.251
	$M_{12}$	4.277	4.270	0.164
	$N_{21}$	0.000	0.000	0.000
	$V_{21}$	-1.405	-1.401	0.286
	$M_{21}$	4.563	4.566	0.000
Prut 2-3	$N_{23}$	-1.405	-1.401	0.286
	$V_{23}$	0.000	0.000	0.000
	$M_{23}$	4.563	4.566	0.000
	$N_{32}$	-1.405	-1.401	0.286
	$V_{32}$	-5.000	-5.000	0.000
	$M_{32}$	-7.937	-7.934	0.038
Prut 3-4	$N_{34}$	-5.000	-5.000	0.000
	$V_{34}$	1.405	1.401	0.286
	$M_{34}$	-7.937	-7.934	0.038
	$N_{43}$	-5.000	-5.000	0.000
	$V_{43}$	1.405	1.401	0.000
	$M_{43}$	-3.720	-3.730	0.188

Rozdíl mezi výpočtem pomocí MATLABu a SCIA Engineer je minimalní. Tím byl zkontrolován výpočet deformace, reakce a vnitřních sil provedený na ramové konstrukci s vodorovným zatížením a posuvným vetknutím kolmo na osu prutu v MATLABu. Výpočtový model č.2 s uvolněním má menší počet neznámých parametrů deformací s porovnání s modelem č.1, obsahující pouze typ prutu *vetknutí-vetknutí*.

## 5. 6 Příklad č. 6

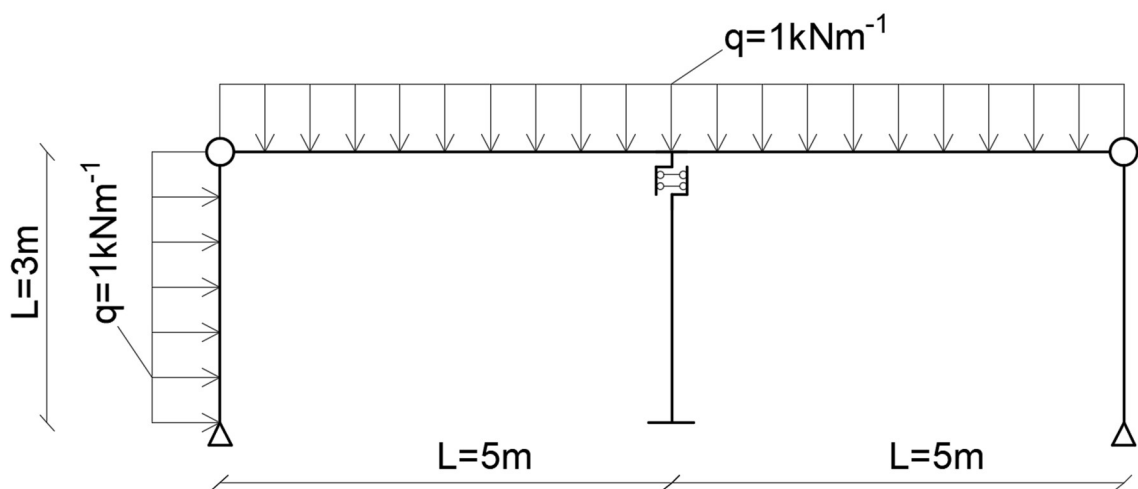
Příklad č. 6 je rámová konstrukce o dvou poli s posuvným vetknutím ve směru osy prutu. Vodorovné pruty mezi sebou jsou spojené monolitické. Označení posuvného vetknutí je znázorněno na obr. 5.35:





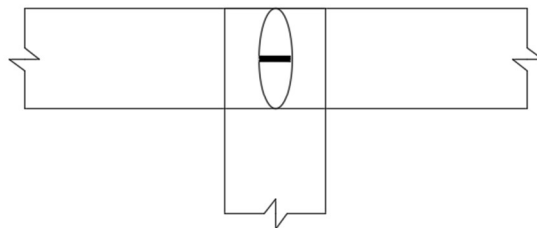
Obr. 5. 35: Posuvné vetknutí ve směru osy prutu, převzato z [7].

Statické schéma příkladu č. 6 je zobrazeno na obr. 5.36:



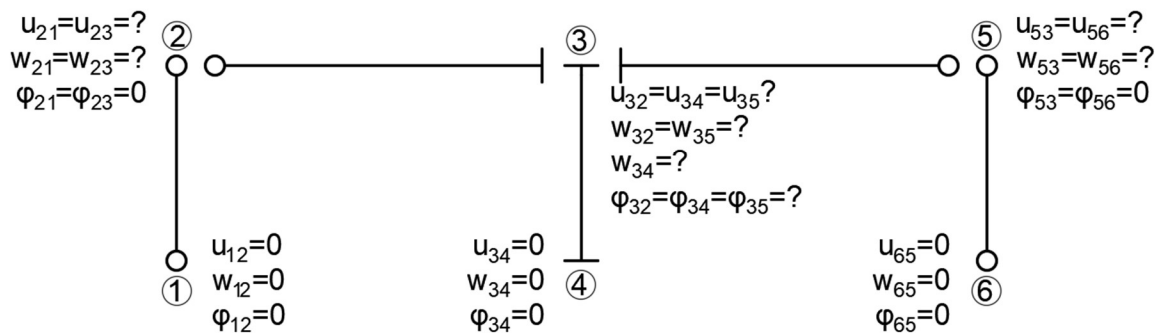
Obr. 5. 36: Statické schéma příkladu č. 6

Posuvné vetknutí umožňuje nezávislý svislý průhyb vodorovných prutů které jsou monolitické spojené. Pro lepší představu na obr. 5.37 je vidět schéma připojení vodorovných prutů a svislého prutu s *posuvným vetknutím*:

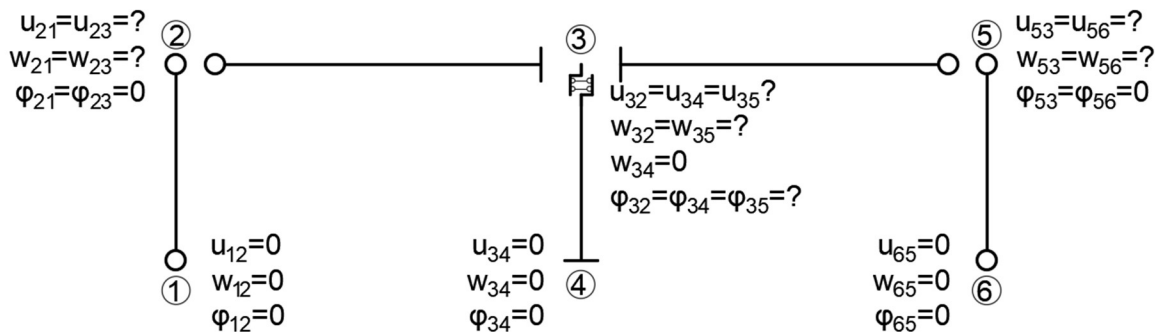


Obr. 5. 37: Schéma připojení příkladu č. 6

Celkem jsou sestávené dva výpočtové modely. Výpočtový model č. 1 se sestáven pouze ze základních typů prutu znázorněných na obr. 2.1, 2.2, 2.3 a 2.4. Výpočtový model č. 2 obsahuje prut s *posuvným vetknutím ve směru osy prutu*. Výpočtové modely je vidět na obr. 5.38 a 5.39:



Obr. 5. 38: Výpočtový model č. 1, příklad č. 6



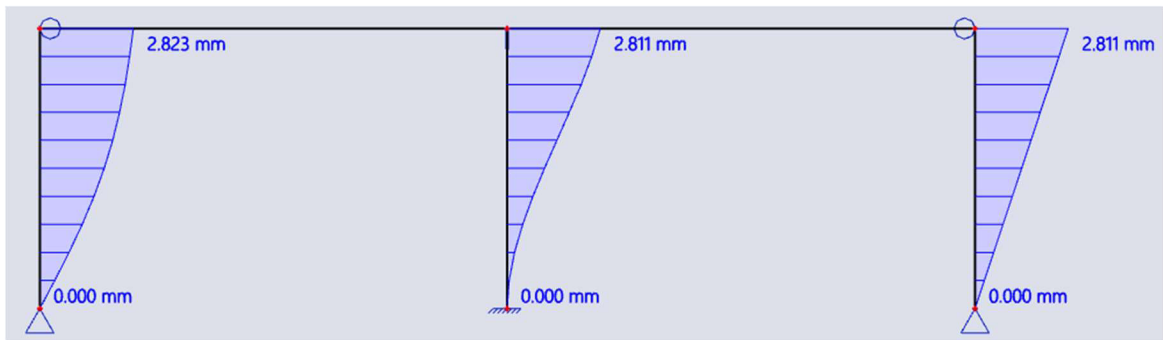
Obr. 5. 39: Výpočtový model č. 2, příklad č. 6

Shrnutí výpočtu z MATLABu je možné vidět v tabulce č. 5.20:

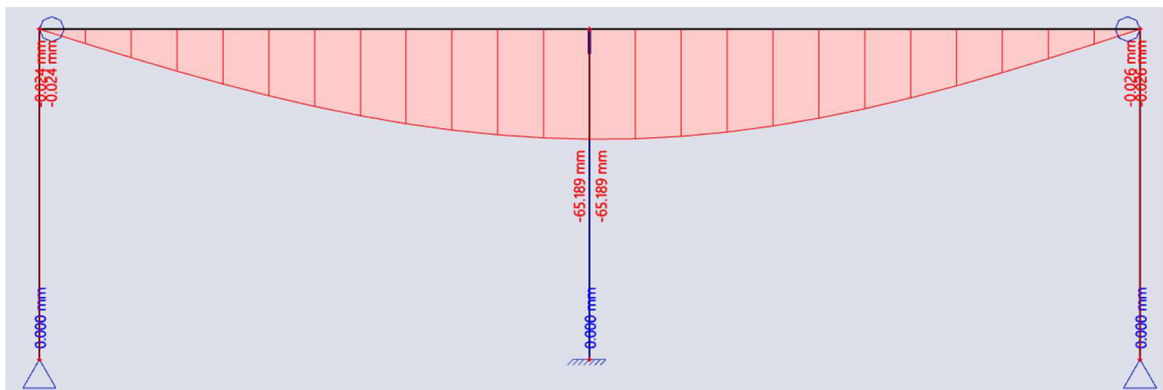
Tabulka 5. 20: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 6

Parametry deformací		
№ Modelů	1	2
$u_2$ [mm]	-2.787	-2.787
$w_2$ [mm]	-0.024	-0.024
$u_3$ [mm]	-2.774	-2.774
$w_{32}=w_{35}$ [mm]	-64.805	-64.805
$w_{34}$ [mm]	0.000	-
$\varphi_3$ [mrad]	0.730	0.730
$u_5$ [mm]	-2.744	-2.744
$w_5$ [mm]	-0.026	-0.026
Celkový počet	19	19
Počet neznámých	8	7

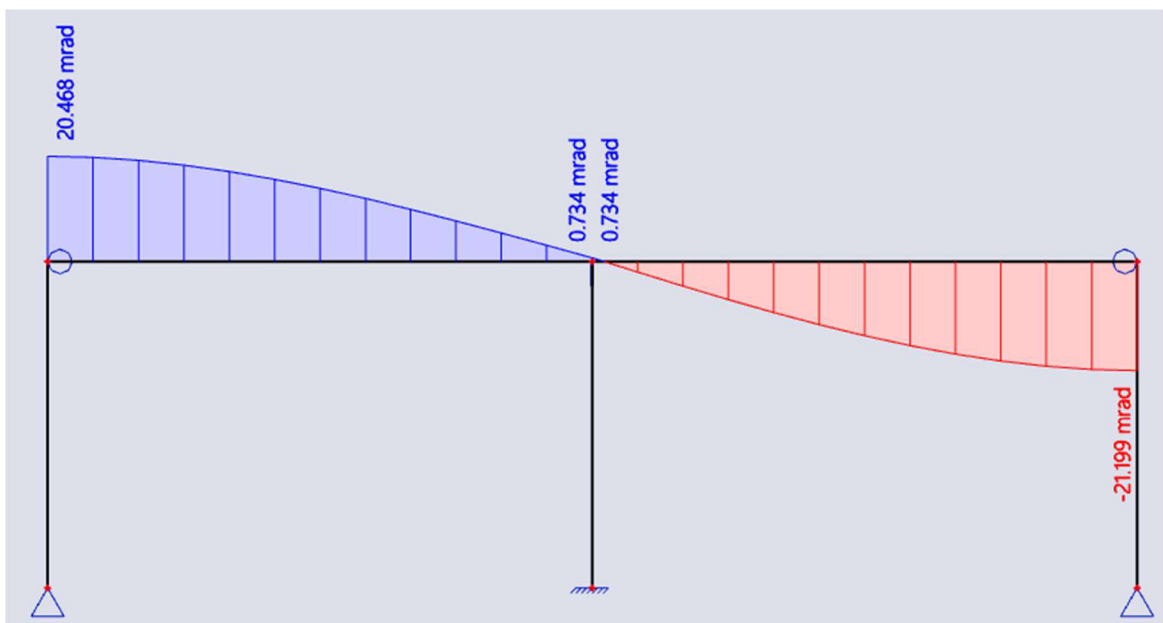
Deformací ve SCIA Engineer jsou znázorněny na obr. 5.40, 5.41 a 5.42:



Obr. 5. 40: Vodorvný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 6



Obr. 5. 41: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 6



Obr. 5. 42: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 6

Porovnání výsledků neznámých parametrů deformací:

Tabulka 5. 21: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 6

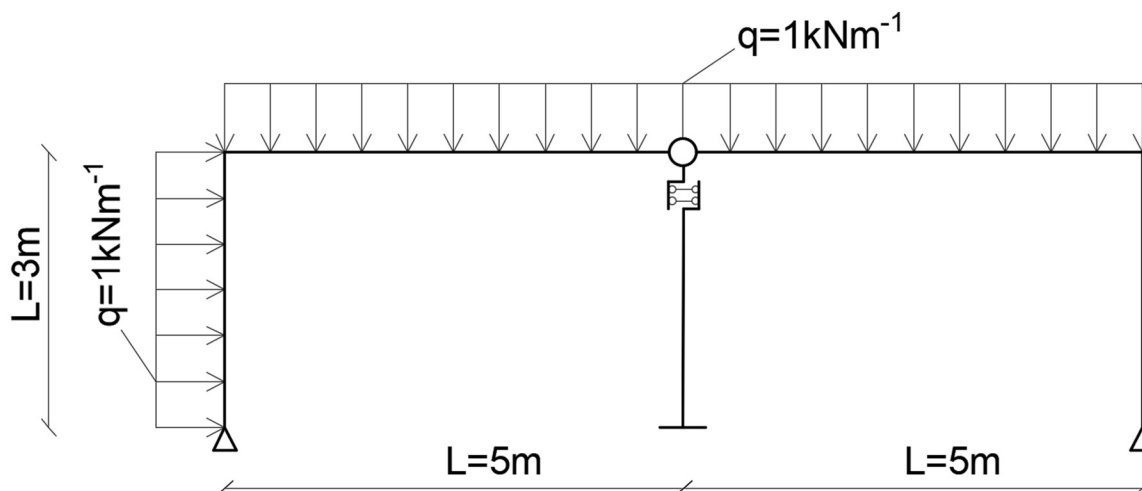
Deformace			
Typ	MATLAB [mrad, mm]	SCIA [mrad,mm]	Rozdíl [%]
$u_2$	-2.787	-2.823	1.292
$w_2$	-0.024	-0.024	0.000
$u_3$	-2.774	-2.811	1.334
$w_{32}=w_{35}$	-64.805	-65.189	0.593
$w_{34}$	0.000	0.000	0.000
$\varphi_3$	0.730	0.734	0.548
$u_5$	-2.744	-2.811	2.442
$w_5$	-0.026	-0.026	0.000

Výsledné hodnoty z MATLABu a SCIA Engineer se liší minimalně. Rozdíl je způsoben zahrnutím vlivu posouvajících a normálových sil ve SCIA Engineer. Tímto příkladem bylo zkontrolováno odvození maticí tuhosti pro prut s *posuvným vetknutím ve směru osy prutu*. Výpočtový model s prutem obsahující uvolnění umožňuje vyřešit konstrukce s minimální stupni přetvarné neurčitosti.

### 5. 7 Příklad č. 7

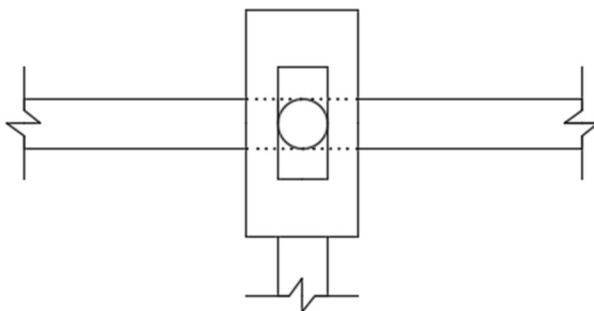
Příklad č. 7 je rámová konstrukce o dvou poli s *posuvným vetknutím ve směru osy prutu*. Vodorovné pruty mezi sebou jsou spojené kloubově.

Statické schéma příkladu č. 6 je zobrazeno na obr. 5.43:



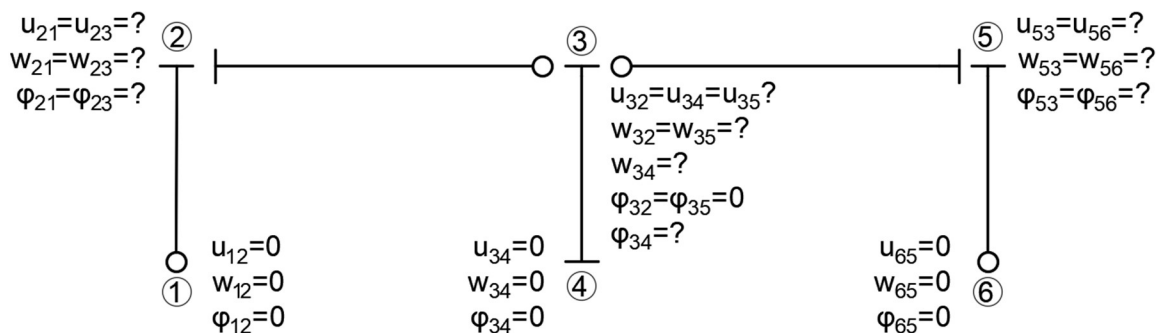
Obr. 5. 43: Statické schéma příkladu č. 7

Detail kloubově spojených vodorovných prutů a prutu s posuvným vetknutím ve směru osy prutu je znázorněná na obr. 5.44:

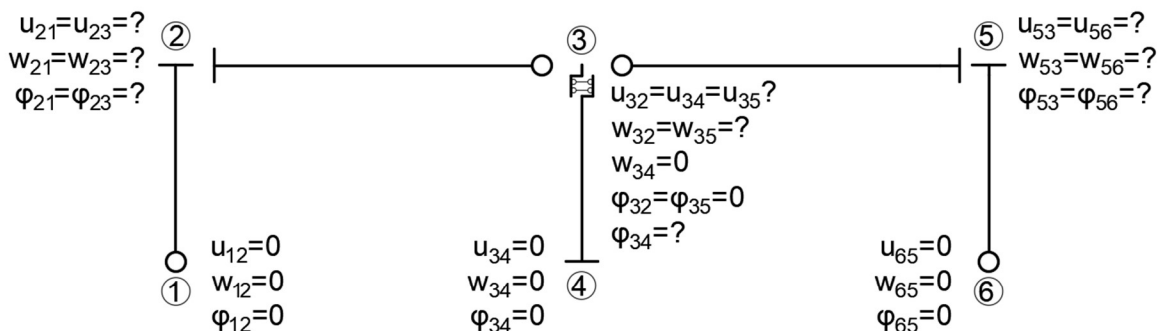


Obr. 5. 44: Schéma připojení příkladu č. 7

Výpočtové modely jsou provedené stejným principem jak v příkladu č. 6. Výpočtový model č.1 obsahuje pouze základní typy prutů. Výpočtový model č.2 má prut s posuvným vetknutím ve směru osy prutu. Výpočtové modely je vidět na obr. 5.45 a 5.46:



Obr. 5. 45: Výpočtový model č .1, příklad č. 7



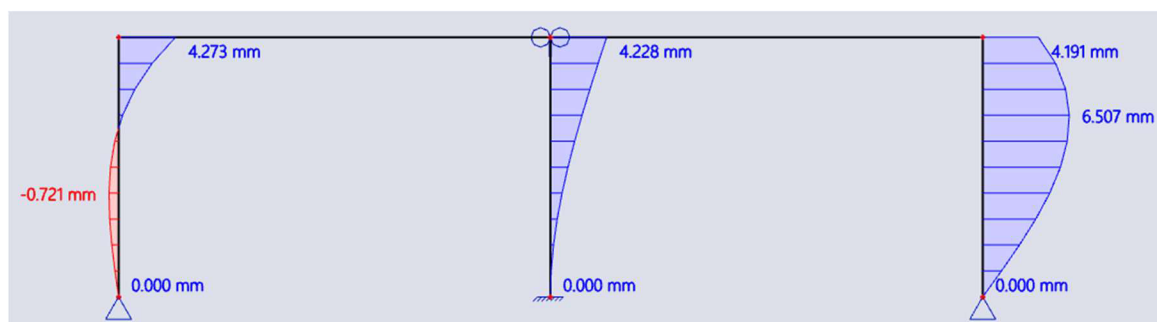
Obr. 5. 46: Výpočtový model č .2, příklad č. 7

Výpočet byl proveden v MATLABu, shrnutí je možné vidět v tabulce č. 5.24:

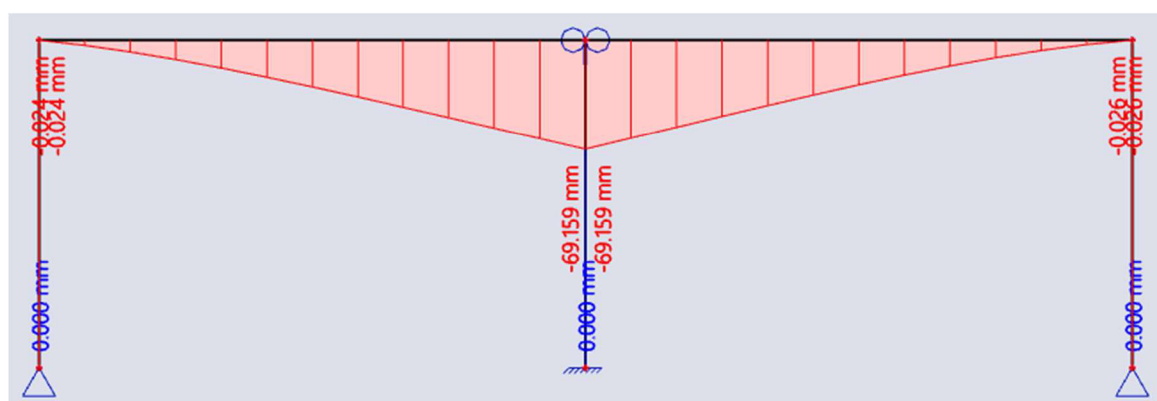
Tabulka 5. 22: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 7

Parametry deformací		
№ Modelů	1	2
$u_2$ [mm]	-4.241	-4.241
$w_2$ [mm]	-0.024	-0.024
$\varphi_2$ [mrad]	6.653	6.653
$u_3$ [mm]	-4.196	-4.196
$w_{32}=w_{35}$ [mm]	-68.657	-68.657
$w_{34}$ [mm]	0.000	-
$\varphi_{34}$ [mrad]	2.098	2.098
$u_5$ [mm]	-4.159	-4.159
$w_5$ [mm]	-0.026	-0.026
$\varphi_5$ [mrad]	-5.253	-5.253
Celkový počet	20	20
Počet neznámých	10	9

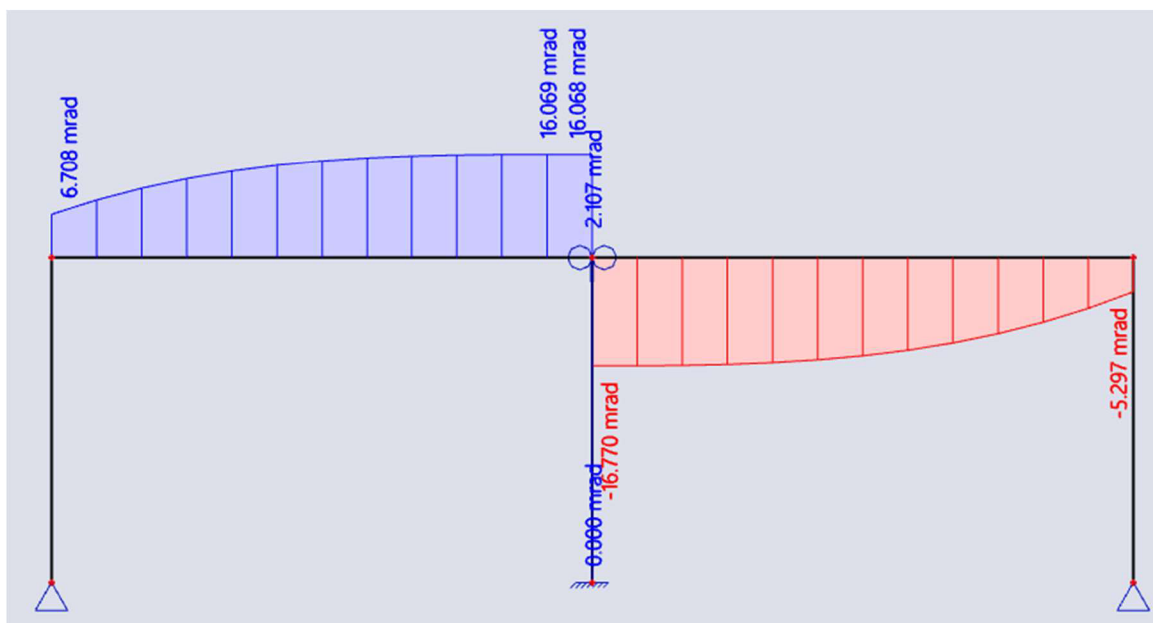
Kontrola výpočtu ve SCIA Engineer:



Obr. 5. 47: Vodorvný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 7



Obr. 5. 48: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 7



Obr. 5. 49: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 7

Porovnání výsledků neznámých parametrů deformací výpočitaných v MATLABu a SCIA Engineer:

Tabulka 5. 23: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 7

Deformace			
Typ	MATLAB [mrad, mm]	SCIA [mrad,mm]	Rozdíl [%]
$u_2$	-4.241	-4.273	0.755
$w_2$	-0.024	-0.024	0.000
$\varphi_2$	6.653	6.708	0.827
$u_3$	-4.196	-4.228	0.763
$w_{32} = w_{35}$	-68.657	-69.159	0.731
$w_{34}$	0.000	0.000	0.000
$\varphi_{34}$	2.098	2.107	0.429
$u_5$	-4.159	-4.191	0.769
$w_5$	-0.026	-0.026	0.000
$\varphi_5$	-5.253	-5.297	0.838

Výsledné hodnoty z MATLABu a SCIA Engineer se liší minimalně. Výpočtový model obsahující všechny uvolnění umožňuje vyřešit konstrukce s minimální stupni přetvarné neurčitosti.

## 6. Závěr

V teoretické části se má bakalářská práce zaměřuje na popis postupů výpočtu prutových konstrukcí obecnou deformační a silovou metodou.

V praktické části popisují odvození matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil pro základní typ prutu: oboustranně vetknutý a pro prut s posuvným vetknutím kolmo na osu prutu.

Dále se v práci zaměřuji na analýzu prutových konstrukcí. Pro analýzu je zvoleno sedm příkladů obsahujících základní typy připojení a jiné jako posuvné vetknutí kolmo nebo ve směru osy prutu.

Pro každý příklad jsem vytvořil výpočtové modely a výpočet deformací jsem provedl v MATLABu s použitím odvozených matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil. Výsledky z MATLABu jsou porovnány s různými výpočtovými modely. Ve výsledných tabulkách je vidět, že výpočtové modely obsahující kloubové typy podepření mají minimální stupeň přetvárné neurčitosti. Největší stupeň přetvárné neurčitosti mají modely obsahující oboustranně vetknuté pruty.

Výsledky z MATLABu jsem dále porovnal s výpočtem deformací ve SCIA Engineer. Tím jsem ověřil správnost ručně odvozených matic tuhosti a vektorů primárních koncových sil.

Rozdíl mezi výpočtem v MATLABu a ve SCIA Engineer je minimální a to pouze v rozsahu 1-2%. Rozdíl je způsobený zahrnutím vlivu posouvajících sil ve SCIA Engineer.

Pro příklady č. 1,2,3,4 a 5 jsem vypočítal hodnoty reakcí a vnitřních sil v MATLABu.

Výsledky jsem opět porovnal s hodnotami ve SCIA Engineer a rozdíl je menší než jedno procento.

Tímto jsem tedy ověřil různé postupy modelování kloubů v obecné deformační metodě a analýzu prutové konstrukcí s využitím MATLABu.



## Literatura

- [1] Kadlčák J., Kytýr J. - *Statika stavebních konstrukcí II*. 2. vyd. Brno: VUTIUM, 2001. Učebnice. ISBN 80-214-1648-3.
- [2] Kytýr, J., Gratza, R., Plášek, J., Ridoško, T., Ekr, J.: *STATIKA II – Řešené příklady*. Skriptum. Brno, 2016. ISBN 978-80-7204-946-2.
- [3] Frantík P., *Postup při výpočtu prutové konstrukce obecnou deformační metodou*, 2007. Dostupné z: <http://www.kitnarf.cz/publications/2007/2007.11.odm/2007.11.odm.pdf>
- [4] Šmilauer V., *SMA2 – Přednáška 05, Matice tuhosti prutu*, 2012. Dostupné z: [https://mech.fsv.cvut.cz/homeworks/student/SMA2/SMA2\\_prednaska\\_05\\_matice\\_tuhosti\\_prutu.pdf](https://mech.fsv.cvut.cz/homeworks/student/SMA2/SMA2_prednaska_05_matice_tuhosti_prutu.pdf)
- [5] Kadlčák J., Kolář A., Kytýr J., Maurer E., - *Statika stavebních konstrukcí I*. Brno: Vysoké Učení Technické v Brně, 1996. ISBN 80-214-0809-X.
- [6] Kytýr J., Frantík P., *Statika I Modul BD03 – M01 Rozšířený Průvodce*, 2005. Dostupné z: [https://www.fce.vutbr.cz/STM/masek.j/BD03-Statika\\_I\\_M01-Statika\\_I.pdf](https://www.fce.vutbr.cz/STM/masek.j/BD03-Statika_I_M01-Statika_I.pdf)
- [7] Frantík P., Štafa M., Pail T., *Algoritmus silové metody*, 2012. Dostupné z: <http://www.kitnarf.cz/publications/2012/2012.05.mm/2012.05.mm.pdf>
- [8] *Tabulky BD004* Dostupné z: <https://www.fce.vutbr.cz/STM/masek.j/bd004/tabulky.pdf>
- [9] Krejsa M., *Speciální numerické metody*. Učební materiály. 2022. Dostupné z: [http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/spec\\_num\\_tisk.pdf](http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/spec_num_tisk.pdf)
- [10] Krejsa M., *Algoritmizace inženýrských výpočtů*. Učební materiály. 2021. Dostupné z: <http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/algoritmy.pdf>
- [11] Zaplatílek K., *MATLAB pro začínající uživatele*, 2020. ISBN 978-80-263-1589-6

## Seznam příloh

1. Ručné odvození.pdf
2. Matice tuhosti prutů.pdf
3. Primární vektory koncových sil.pdf
4. MATLAB
  - 4.1. Příklad č. 1
    - F\_zatizeni\_111\_111.m
    - Příklad\_1.m
    - q\_zatizeni\_111\_111.m
    - vetknuti\_vetknuti.m
    - Vypis.m
  - 4.2. Příklad č. 2
    - 4.2.1 Model\_1
      - F\_zatizeni\_111\_111.m
      - Příklad\_2.m
      - q\_zatizeni\_111\_111.m
      - vetknuti\_vetknuti.m
    - 4.2.2 Model\_2
      - F\_zatizeni\_110\_111.m
      - kloub\_vetknuti.m
      - Příklad\_2.m
      - q\_zatizeni\_111\_110.m
      - vetknuti\_kloub.m
    - 4.2.3 Model\_3
      - F\_zatizeni\_111\_111.m
      - q\_zatizeni\_111\_110.m
      - vetknuti\_kloub.m
      - vetknuti\_vetknuti.m
    - 4.2.4 Model\_4
      - F\_zatizeni\_110\_111.m
      - kloub\_vetknuti.m

- Příklad\_2.m
- q\_zatizeni\_111\_111.m
- vetknuti\_vetknuti.m

#### 4.3 Příklad 3

##### 4.3.1 Model 1

- F\_zatizeni\_111\_111.m
- Příklad\_3.m
- q\_zatizeni\_111\_111.m
- vetknuti\_vetknuti.m

##### 4.3.2 Model\_2

- F\_zatizeni\_101\_111.m
- posuvne\_vetknuti\_vetknuti.m
- Příklad\_3.m
- q\_zatizeni\_111\_101.m
- vetknuti\_posuvne\_vetknuti.m

##### 4.3.3 Model\_3

- F\_zatizeni\_111\_111.m
- Příklad\_3.m
- q\_zatizeni\_111\_101.m
- vetknuti\_posuvne\_vetknuti.m
- vetknuti\_vetknuti.m

##### 4.3.4 Model\_4

- F\_zatizeni\_101\_111.m
- posuvne\_vetknuti\_vetknuti.m
- Příklad\_3.m
- q\_zatizeni\_111\_111.m
- vetknuti\_vetknuti.m

#### 4.4 Příklad 4

##### 4.4.1 Model\_1

- Příklad\_4.m
- q\_zatizeni\_111\_111.m

- T\_matice.m
- vetknuti\_vetknuti.m

#### 4.4.2 Model\_2

- kloub\_vetknuti.m
- Příklad\_4.m
- q\_zatizeni\_110\_111.m
- T\_matice.m
- vetknuti\_kloub.m
- vetknuti\_vetknuti.m

### 4.5 Příklad 5

#### 4.5.1 Model\_1

- Příklad\_5.m
- q\_zatizeni\_111\_111.m
- T\_matice.m
- vetknuti\_vetknuti.m

#### 4.5.2 Model\_2

- posuvne\_vetknuti\_vetknuti.m
- Příklad\_5.m
- q\_zatizeni\_101\_111.m
- q\_zatizeni\_111\_111.m
- T\_matice.m
- vetknuti\_vetknuti.m

### 4.6 Příklad 6

#### 4.6.1 Model\_1

- kloub\_kloub.m
- kloub\_vetknuti.m
- Příklad\_6.m
- q\_zatizeni\_110\_110.m
- q\_zatizeni\_110\_111.m
- q\_zatizeni\_111\_110.m
- T\_matice.m

- vetknuti\_kloub.m
- vetknuti\_vetknuti.m

#### 4.6.2 Model\_2

- kloub\_kloub.m
- kloub\_vetknuti.m
- posuvne\_vetknuti\_vetknuti.m
- Příklad\_6.m
- q\_zatizeni\_110\_110.m
- q\_zatizeni\_110\_111.m
- q\_zatizeni\_111\_110.m
- T\_matice.m
- vetknuti\_kloub.m
- vetknuti\_vetknuti.m

### 4.7 Příklad 7

#### 4.7.1 Model\_1

- kloub\_kloub.m
- kloub\_vetknuti.m
- Příklad\_7.m
- q\_zatizeni\_110\_110.m
- q\_zatizeni\_110\_111.m
- q\_zatizeni\_111\_110.m
- T\_matice.m
- vetknuti\_kloub.m
- vetknuti\_vetknuti.m

#### 4.7.2 Model\_1

- kloub\_kloub.m
- kloub\_vetknuti.m
- posuvne\_vetknuti\_vetknuti.m
- Příklad\_7.m
- q\_zatizeni\_110\_110.m
- q\_zatizeni\_110\_111.m

- q\_zatizeni\_111\_110.m
- T\_matice.m
- vetknuti\_kloub.m
- vetknuti\_vetknuti.m

## Seznam obrázků

Obr. 2.1: Oboustranně monolitický připojený prut .....	2
Obr. 2.2: Levostranně kloubově připojený prut .....	3
Obr. 2.3: Pravostranně kloubově připojený prut .....	3
Obr. 2.4: Obostranně kloubově připojený prut .....	3
Obr. 2.5: Konvence parametrů deformací prutu $ab$ .....	3
Obr. 2.6: Konvence primárních koncových sil .....	4
Obr. 2.7: Lokální a globální souřadnicový systém .....	4
Obr. 3. 1: Princip Vereščagina pravidla .....	9
Obr. 4. 1: Typ připojení 111 .....	10
Obr. 4. 2: Statické schéma, typ 111-111 .....	12
Obr. 4. 3: Schéma deformací, typ 111-111 .....	12
Obr. 4. 4: Aplikace jednotkového posunu $u_{ab}$ ve styčniku $a$ , typ 111-111 .....	13
Obr. 4. 5: Aplikace jednotkového posunu $w_{ab}$ ve styčniku $a$ , typ 111-111 .....	14
Obr. 4. 6: Základní soustava pro $w_{ab}$ , typ 111-111 .....	15
Obr. 4. 7: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS0$ $w_{ab}$ , typ 111-111 .....	15
Obr. 4. 8: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS1$ $w_{ab}$ , typ 111-111 .....	15
Obr. 4. 9: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS2$ $w_{ab}$ , typ 111-111 .....	15
Obr. 4. 10: Aplikace jednotkového pootočení $\varphi_{ab}$ ve styčniku $a$ , typ 111-111 .....	17
Obr. 4. 11: Základní soustava pro $\varphi_{ab}$ , typ 111-111 .....	17
Obr. 4. 12: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS0$ $\varphi_{ab}$ , typ 111-111 .....	18
Obr. 4. 13: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS1$ $\varphi_{ab}$ , typ 111-111 .....	18
Obr. 4. 14: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS2$ $\varphi_{ab}$ , typ 111-111 .....	18
Obr. 4. 15: Matice tuhosti typ 111-111, převzato z přílohy č. 2 .....	19
Obr. 4. 16: Matice tuhosti typ 111-111, převzato z literatury [8] .....	20
Obr. 4. 17: Statické schéma pro zatížení $q$ , typ 111-111 .....	20
Obr. 4. 18: Základní soustava pro zatížení $q$ , typ 111-111 .....	21
Obr. 4. 19: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS0$ zatížení $q$ , typ 111-111 .....	21
Obr. 4. 20: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS1$ zatížení $q$ , typ 111-111 .....	21
Obr. 4. 21: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS2$ zatížení $q$ , typ 111-111 .....	21
Obr. 4. 22: Statické schéma pro osamělou sílu $F_z$ , typ 111-111 .....	23
Obr. 4. 23: Základní soustava pro osamělou sílu $F_z$ , typ 111-111 .....	23
Obr. 4. 24: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS0$ osamělá síla $F_z$ , typ 111-111 .....	23
Obr. 4. 25: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS1$ osamělá síla $F_z$ , typ 111-111 .....	24
Obr. 4. 26: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS2$ osamělá síla $F_z$ , typ 111-111 .....	24
Obr. 4. 27: Typ připojení 101 .....	25
Obr. 4. 28: : Statické schéma, typ 101-111 .....	26
Obr. 4. 29: Schéma deformací, typ 101-111 .....	26
Obr. 4. 30: Aplikace jednotkového pootočení $\varphi_{ab}$ ve styčniku $a$ , typ 101-111 .....	26
Obr. 4. 31: Základní soustava pro $\varphi_{ab}$ , typ 101-111 .....	27
Obr. 4. 32: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS0$ $\varphi_{ab}$ , typ 101-111 .....	27
Obr. 4. 33: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS1$ $\varphi_{ab}$ , typ 101-111 .....	27
Obr. 4. 34: Matice tuhosti typ 101-111, převzato z přílohy č. 3. ....	28
Obr. 4. 35: Statické schéma pro zatížení $q$ , typ 101-111 .....	28
Obr. 4. 36: Základní soustava pro zatížení $q$ , typ 101-111 .....	29
Obr. 4. 37: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro $ZS0$ zatížení $q$ , typ 101-111 .....	29

Obr. 4. 38: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 zatížení $q$ , typ 101-111 .....	29
Obr. 4. 39: Statické schéma pro osamělou sílu $F_z$ , typ 101-111.....	30
Obr. 4. 40: Základní soustava pro osamělou sílu $F_z$ , typ 101-111 .....	30
Obr. 4. 41: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS0 osamělá síla $F_z$ , typ 101-111 .....	30
Obr. 4. 42: Statické schéma a průběh ohybových momentů pro ZS1 osamělá síla $F_z$ , typ 101-111 .....	30
Obr. 5. 1: Statické schéma příkladu č. 1.....	32
Obr. 5. 2: Průřezové a materialové charakteristiky .....	32
Obr. 5. 3: Výpočtový model příklad č.1.....	32
Obr. 5. 4: Funkce vetknuti_vetknuti v MATLABu.....	33
Obr. 5. 5: Algoritmus sestavení globální matice tuhosti celé konstrukce .....	33
Obr. 5. 6: Algoritmus sestavení globálního vektoru primárních koncových sil.....	34
Obr. 5. 7: Výpis globálního vektoru neznámých parametrů deformací v MATLABu .....	34
Obr. 5. 8: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 1 .....	34
Obr. 5. 9: Statické schéma příkladu č. 2.....	36
Obr. 5. 10: Výpočtový model č. 1, příklad č. 2 .....	36
Obr. 5. 11: Výpočtový model č. 2, příklad č. 2 .....	36
Obr. 5. 12: Výpočtový model č. 3, příklad č. 2 .....	36
Obr. 5. 13: Výpočtový model č. 4, příklad č. 2 .....	36
Obr. 5. 14: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 2.....	37
Obr. 5. 15: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 2 .....	37
Obr. 5. 16: Statické schéma příkladu č. 3.....	39
Obr. 5. 17: Výpočtový model č. 1, příklad č. 3 .....	39
Obr. 5. 18: Výpočtový model č. 2, příklad č. 3 .....	39
Obr. 5. 19: Výpočtový model č. 3, příklad č. 3 .....	39
Obr. 5. 20: Výpočtový model č. 4, příklad č. 3 .....	40
Obr. 5. 21: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 3.....	40
Obr. 5. 22. Statické schéma příkladu č. 4.....	42
Obr. 5. 23. Transformační matice v MATLABu.....	42
Obr. 5. 24: Výpočtový model č.1, příklad č. 4 .....	43
Obr. 5. 25: Výpočtový model č.2, příklad č. 4 .....	43
Obr. 5. 26: Vodorný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 4 .....	44
Obr. 5. 27: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 4.....	44
Obr. 5. 28: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 4 .....	44
Obr. 5. 29: Statické schéma příkladu č. 5.....	46
Obr. 5. 30: Výpočtový model č. 1, příklad č. 5 .....	46
Obr. 5. 31: Výpočtový model č. 2, příklad č. 5 .....	47
Obr. 5. 32: Vodorný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 5 .....	47
Obr. 5. 33: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 5.....	48
Obr. 5. 34: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 5 .....	48
Obr. 5. 35: Posuvné vetknutí ve směru osy prutu, převzato z [7]. .....	50
Obr. 5. 36: Statické schéma příkladu č. 6.....	50
Obr. 5. 37: Schéma připojení příkladu č. 6 .....	50
Obr. 5. 38: Výpočtový model č. 1, příklad č. 6.....	51
Obr. 5. 39: Výpočtový model č. 2, příklad č. 6.....	51
Obr. 5. 40: Vodorný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 6 .....	52
Obr. 5. 41: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 6.....	52
Obr. 5. 42: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 6 .....	52
Obr. 5. 43: Statické schéma příkladu č. 7.....	53
Obr. 5. 44: Schéma připojení příkladu č. 7 .....	54
Obr. 5. 45: Výpočtový model č. 1, příklad č. 7.....	54
Obr. 5. 46: Výpočtový model č. 2, příklad č. 7.....	54
Obr. 5. 47: Vodorný posun ve SCIA Engineer, příklad č. 7 .....	55



Obr. 5. 48: Svislý posun ve SCIA Engineer, příklad č. 7.....	55
Obr. 5. 49: Pootočení ve SCIA Engineer, příklad č. 7.....	56

## Seznam tabulek

Tabulka 4. 1: Typy prutu.....	11
Tabulka 5. 1: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 1.....	34
Tabulka 5. 2: Porovnání výsledků reakcí, příklad č. 1.....	35
Tabulka 5. 3: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 1.....	35
Tabulka 5. 4: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 2.....	37
Tabulka 5. 5: Porovnání výsledků deformací, příklad č. 2.....	37
Tabulka 5. 6: Porovnání výsledků reakcí, příklad č. 2.....	38
Tabulka 5. 7: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 2.....	38
Tabulka 5. 8: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 3.....	40
Tabulka 5. 9: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 3.....	41
Tabulka 5.10: Porovnání výsledků reakce, příklad č. 3.....	41
Tabulka 5. 11: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 3.....	41
Tabulka 5. 12: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 4.....	43
Tabulka 5. 13: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 4.....	45
Tabulka 5. 14: Porovnání výsledků reakce, příklad č. 4.....	45
Tabulka 5. 15: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 4.....	45
Tabulka 5. 16: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 5.....	47
Tabulka 5. 17: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 5.....	48
Tabulka 5.18: Porovnání výsledků reakce, příklad č. 5.....	49
Tabulka 5. 19: Porovnání výsledků vnitřních sil, příklad č. 5.....	49
Tabulka 5. 20: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 6.....	51
Tabulka 5. 21: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 6.....	53
Tabulka 5. 22: Shrnutí výsledku z MATLABu, příklad č. 7.....	55
Tabulka 5. 23: Porovnání výsledků deformace, příklad č. 7.....	56