



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

DEFORMAČNĚ NAPĚŤOVÁ ANALÝZA BEZMOMENTOVÝCH SKOŘEPIN A VLIV JEJICH ULOŽENÍ NA VZNIK LOKÁLNÍCH OHYBOVÝCH MOMENTŮ

STRAIN-STRESS ANALYSIS OF MEMBRANE SHELLS AND INFLUENCE OF THEIR FIXING ON
ORIGINATION OF LOCAL BENDING MOMENTS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Libor Méheš

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.

BRNO 2023

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Libor Méheš
Studijní program:	Základy strojního inženýrství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.
Akademický rok:	2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Deformačně napěťová analýza bezmomentových skořepin a vliv jejich uložení na vznik lokálních ohybových momentů

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V první části práce bude provedena rešerše z oblasti membránových (bezmomentových) skořepin, jejich možného využití i zásad při jejich návrhu. Následnou – stěžejní – částí práce bude deformačně napěťová analýza vybraných membránových skořepin s využitím jak analytického, tak numerického přístupu (založeného na metodě konečných prvků). K řešení bude využit zvolený matematický SW a výpočtový systém ANSYS, ve kterých budou vytvořeny parametrické výpočtové modely zvolených skořepin. Cílem bude srovnání obou přístupů k řešení a poukázání na omezení membránové teorie a dále analýza vlivu uložení bezmomentových skořepin na vznik lokálních ohybových momentů a odpovídající snížení bezpečnosti skořepiny vůči MS pružnosti. Dle získaných poznatků bude proveden návrh nejvhodnějšího uložení a tento ověřen s využitím numerického modelu. Výstupy práce budou využity jako demonstrační materiál ve výuce předmětu Pružnost a pevnost II.

Cíle bakalářské práce:

- 1) Provést rešerši z oblasti membránových skořepin a jejich návrhu.
- 2) U vybraných bezmomentových skořepin vytvořit parametrické modely, jak analytické tak numerické na bázi MKP. S využitím těchto modelů provést deformačně napěťovou analýzu zvolených skořepin a poukázat na případné rozdíly u obou přístupů.
- 3) U zvolených skořepin analyzovat (s využitím numerického modelu) vliv použitých vazeb/uložení na vznik lokálních ohybových momentů a případnou redukci bezpečnosti dané skořepiny vůči MS pružnosti a dále navrhnout takové uložení, které tyto momenty sníží na co nejnižší úroveň.
- 4) Definovat omezení membránové teorie a doporučení pro nejvhodnější návrh/uložení bezmomentových skořepin.

Seznam doporučené literatury:

ONDRÁČEK, E., VRBKA, J., JANÍČEK, P., Mechanika těles - Pružnost a Pevnost II, skripta, Nakladatelství VUT Brno, 1991.

TIMOSHENKO, S. Theory of Plates and Shells. 2nd ed. New York: McGraw-Hill book company, 1970.

TIMOSHENKO, S. Strength of Materials, Part II. – Advanced theory and Problems. New York, 1941.

VENTSEL, E. and KRAUTHAMMER, T. Thin Plates and Shells - Theory, Analysis and Applications. New York: Marcel Dekker AG, 2001.

ANSYS Inc. ANSYS Release 2021 User's Manual. Pennsylvania: Swanson Analysis Sys. Inc, 2021, www.ansys.com.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá deformačně napěťovou analýzou kulové a toroidní membránové skořepiny. Obě tyto úlohy jsou modelovány podle reálných vodojemů. Je provedena rešerše z oblasti membránové teorie skořepin, využití skořepin a jejich návrhu. Pro účely analýzy byly vytvořeny parametrické výpočtové modely, jak analytické v programu Matlab, tak i numerické na bázi metody konečných prvků v programu Ansys Workbench. Tyto přístupy k řešení a jejich výsledky jsou v práci náležitě porovnány a zhodnoceny. Zvláštní pozornost je přitom věnována možnostem uložení skořepin s ohledem na maximální bezpečnost vůči mezi kluzu. Hlavním výstupem práce je návrh nejvhodnějšího uložení v závislosti na poloze vazby a vytvoření parametrických modelů potřebných k této analýze.

Klíčová slova

Membránová skořepina, analytické řešení, Ansys, Matlab, MKP, deformačně napěťová analýza

Abstract

The bachelor's thesis deals with a stress-strain analysis of spherical and toroidal membrane shells. Both of these tasks are modeled based on real water towers. A literature review is conducted on the field of membrane shell theory, the utilization of shells, and their design. Parametric computational models were created for the purpose of analysis, both analytical in Matlab and numerical based on the finite element method in Ansys Workbench. These solution approaches and their results are properly compared and evaluated in the thesis. Special attention is paid to the possibilities of shell support with respect to maximum safety factor. The main outcome of the thesis is the design of the most suitable support system depending on the connection position, along with the creation of parametric models required for this analysis.

Keywords

Membrane shell, analytical solution, Ansys, Matlab, FEM, stress-strain analysis

Bibliografická citace

MÉHEŠ, Libor. *Deformačně napětíová analýza bezmomentových skořepin a vliv jejich uložení na vznik lokálních ohybových momentů* [online]. Brno, 2023 [cit. 2023-05-26]. Dostupné z: <https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/149227>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.

Prohlášení autora

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci na téma **Deformačně napěťová analýza bezmomentových skořepin a vliv jejich uložení na vznik lokálních ohybových momentů** vypracoval samostatně pod vedením Ing. Oldřicha Ševečka, Ph.D. a s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu.

V Brně dne 26. května 2023

.....
Libor Méheš

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Oldřichu Ševečkovi, Ph.D. za jeho odborné vedení a cenné rady. Dále bych chtěl poděkovat mé rodině a přátelům za velkou podporu během celého studia.

Obsah

1	Úvod.....	10
2	Rešerše z oblasti membránových skořepin	11
2.1	Membránové skořepiny	11
2.1.1	Membránová teorie skořepin	11
2.1.2	Souřadné systémy	11
2.1.3	Deformace a napětí	12
2.1.4	Rovnice potřebné k řešení úloh.....	14
2.1.5	Poloměry křivosti.....	15
2.1.6	Určování bezpečnosti.....	15
2.1.7	Analytické a numerické řešení	16
2.2	Využití membránových skořepin.....	17
2.2.1	Membránové skořepiny v praxi	18
2.3	Návrh bezmomentových skořepin.....	21
2.3.1	Momentové skořepiny a poruchy membránové teorie.....	21
2.3.2	Charakteristická zatížení membránových skořepin	22
2.3.3	Uložení membránových skořepin	24
2.3.4	Ztráta stability skořepin – „buckling“	24
3	Výpočtová analýza vybraných bezmomentových skořepin.....	26
3.1	Kulový vodojem Ohrazenice.....	26
3.1.1	Analytické řešení	26
3.1.2	Numerické řešení	29
3.1.3	Srovnání analytických a numerických výsledků.....	31
3.2	Toroidní vodojem Ciechanów	38
3.2.1	Toroid zatížený vnitřním tlakem	39
3.2.2	Toroid zatížený hydrostatickým tlakem.....	47
4	Závěr	51
	SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	53
	SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	55
	SEZNAM OBRÁZKŮ.....	58

1 Úvod

Membránové (bezmomentové) skořepiny jsou využívány v mnoha odvětvích zejména jako konstrukce sloužící ke skladování materiálů, často se pak objevují také v moderní architektuře, a to díky svému jedinečnému estetickému vzhledu. Hlavními výhodami skořepin je nízká hmotnost a vysoká tuhost, čehož je dosaženo díky vysoce efektivnímu využití daného konstrukčního materiálu. Tyto velmi žádané vlastnosti však kladou vysoké požadavky zejména na stav napjatosti, který by měl být ideálně membránový, což znamená konstantní průběh napětí po tloušťce skořepiny. Vzhledem k této skutečnosti je nutné dobře rozumět charakteru návrhu skořepin z hlediska uložení a poruch membránové teorie, která je platná pouze pro striktně dané podmínky.

Stav napjatosti skořepin úzce souvisí s jejich uložením, kdy v místě reálné vazby dochází vždy do jisté míry k porušení membránového stavu. Toto je způsobeno vnášením ohybových momentů do skořepinové konstrukce, což vyvolává v její tloušťce nepřipustná ohybová napětí. Taková napětí jsou pro membránové skořepiny vysoce nebezpečná vzhledem k malé tloušťce jejich stěn. Z tohoto důvodu je nutné analyzovat uložení skořepin a zvolit ze všech možností jeho umístění tu nejbezpečnější. Pro analýzu jsou zvoleny dva případy reálných vodojemů tvaru koule a toroidu, u kterých je vhodné zkoumat možnosti pozice vazby.

Prvním výstupem práce bude rešerše z oblasti membránových skořepin, která čtenáře seznámí s jejich problematikou a přístupem k analytickému řešení. Bude zde uvedeno rovněž praktické využití skořepin s reálnými příklady a naznačení problematiky návrhu se zaměřením na charakteristická zatížení, uložení a poruchy.

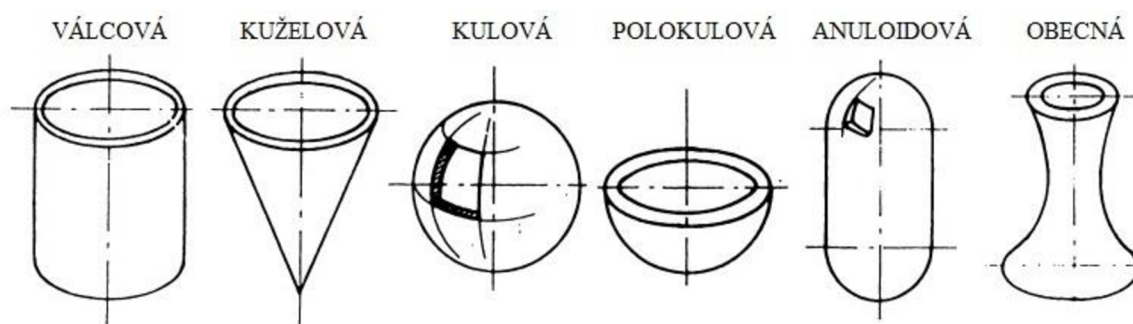
Hlavním cílem této práce je vytvořit parametrické modely, jak analytické v programu Matlab, tak i numerické na bázi metody konečných prvků v programu Ansys Workbench. Díky těmto modelům je následně provedena deformačně napěťová analýza vodojemů a kritické zhodnocení výsledků. Tyto výsledky by měly ukázat, zda je pro danou úlohu možné použít membránovou teorii skořepin a jaké jsou její případná omezení. V případě velkých rozdílů mezi analytickým a numerickým přístupem by mělo být zodpovězeno, proč tento rozdíl nastává. Důležitou součástí práce bude poukázat na vhodnost uložení reálných vodojemů a v případě nutnosti navrhnout jeho nejbezpečnější pozici.

2 Rešerše z oblasti membránových skořepin

Tato kapitola je věnována seznámení s membránovou teorií skořepin, s možnostmi jejich různých tvarů a využití, a také zásadám při jejich návrhu.

2.1 Membránové skořepiny

Membránová neboli bezmomentová skořepina je tenkostěnné, rotačně symetrické těleso, jehož střednicová plocha je vytvořena rotací rovinné tzv. meridiánové křivky kolem osy skořepiny [1]. Nejčastějšími případy meridiánové křivky jsou přímka nebo část kružnice, které se mohou, ale nutně nemusí, dotýkat osy skořepiny. Typický tvar vzniklé skořepiny je např. válcový, kuželový, kulový, paraboloidní, hyperboloidní, toroidní nebo elipsoidní [2]. Příklady některých z těchto tvarů jsou patrné na Obr. 1.



Obr. 1 – Typické tvary bezmomentových skořepin (upraveno dle [1]).

2.1.1 Membránová teorie skořepin

Základní charakteristikou membránových skořepin je rotační symetrie, která musí platit nejen pro geometrii, vazby, materiál a zatížení dané skořepiny, ale zároveň i pro výsledky řešení jako deformace či napětí. Pokud jsou přenášeny pouze membránové síly, tedy síly v rovině či v tečné rovině skořepiny, pak vzniká v tělese napětí konstantního průběhu po tloušťce¹ [3]. Tento stav nazýváme membránová napjatost. „Aby bylo tohoto stavu dosaženo, je nutný cílený konstrukční návrh, který musí splňovat tyto podmínky:

1. Zatížení kolmé k povrchu musí být spojité nebo málo proměnné.
2. Vnější síly (včetně vazebných) musí mít směr tečny k povrchu.
3. Radiální deformace skořepiny nesmí být omezována.
4. Tloušťka stěny skořepiny se nesmí skokově měnit.
5. Střednicová plocha musí být hladká, bez skokových změn křivosti.“ [3]

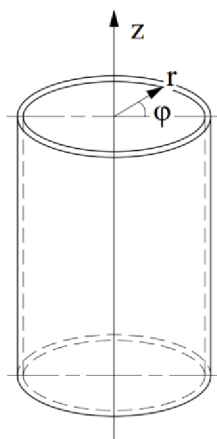
Po dodržení všech takto definovaných podmínek lze úlohu následně řešit pomocí membránové teorie.

2.1.2 Souřadné systémy

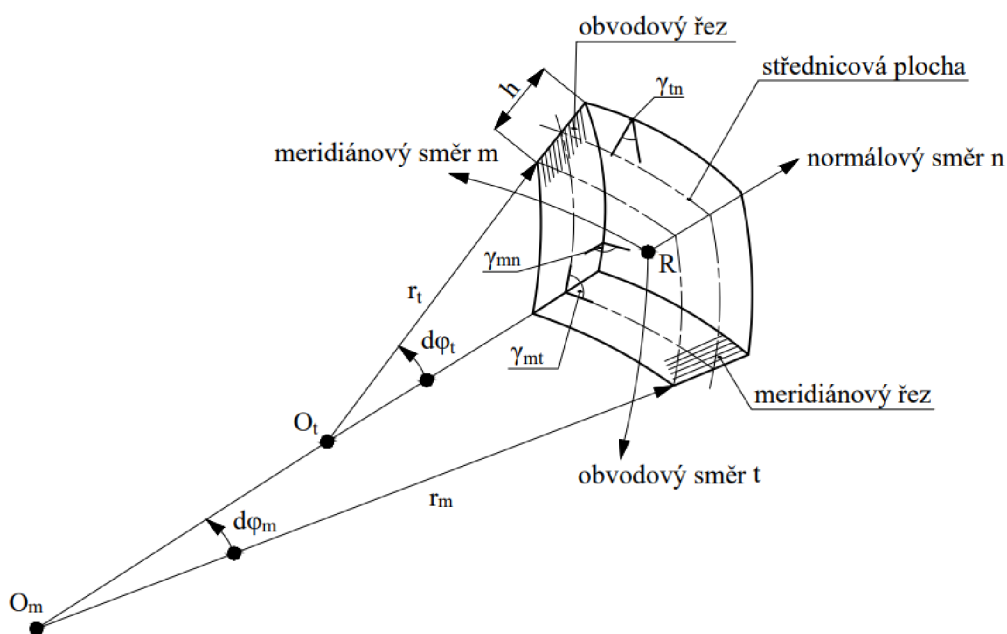
Pro řešení na elementárním prvku jsou využívány dva souřadné systémy (dále jen SS). Válcový, který je globálním SS a je definován pomocí radiální osy r , následně osy z , která je totožná s osou skořepiny a úhlu φ viz Obr. 2. A druhý, lokální pravoúhlý SS, jehož počátek je

¹ Tento předpoklad tedy neuvazuje případné ohybové momenty vznikající například v určitých vazbách skořepin k základnímu tělesu nebo v dnech dané skořepiny při zatížení rotačně symetrickým tlakem. Pro řešení skořepin zatížených momenty (tzv. momentových skořepin) již nelze využít membránové teorie. Tato problematika je detailně rozebrána v kapitole návrhu membránových skořepin.

ve vyšetřovaném bodě R na střednicové ploše, osa n je totožná s osou normály k dané střednicové ploše a další dvě osy m a t jsou osami tečnými k meridiánovému (m) a obvodovému (t) řezu viz Obr. 3 [1].



Obr. 2 – Globální souřadný systém.



Obr. 3 – Elementární prvek (upraveno dle [1]).

O_m – meridiánový střed křivosti, O_t – obvodový (kuželový) střed křivosti, r_m – meridiánový poloměr křivosti, r_t – obvodový (kuželový) poloměr křivosti, h – tloušťka skořepiny.

2.1.3 Deformace a napětí

Z důvodu zachování platnosti membránové teorie předpokládáme u bezmomentových skořepin jen malé deformace, které se pohybují pouze v oblasti elastického chování materiálu. Takovéto deformace jsou ty, jejichž rovnice rovnováhy jsou stejné jak pro nedeformované, tak i pro deformované povrchy a platí Hookův zákon [2]. Nenulová jsou pouze délková přetvoření ε_n , ε_m

a ε_t a jejich směry odpovídají příslušným osám lokálního SS. Úhlová přetvoření jsou nulová v důsledku osové symetrie (γ_{mt}), či předpokladu tenkostěnnosti (γ_{mn} , γ_{tn}) [1]. Délková přetvoření jsou proto přetvořeními v hlavních směrech deformace a deformace je trojosá. Tenzor přetvoření vypadá následovně.

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_t & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

Podle lokálního SS jsou rozlišovány tři napětí v příslušných směrech. Ve směru osy m je to σ_m (meridiánové napětí), ve směru t pak σ_t (obvodové napětí), a σ_n (normálové či radiální napětí) pro směr osy n . Všechna smyková napětí jsou nulová, jelikož jsou nulová i úhlová přetvoření [1]. Normálové napětí je zpravidla zanedbáváno, protože předpokládaná tloušťka tělesa je velmi malá², a jeho velikost je tedy v porovnání s σ_m a σ_t nepodstatná³. Výsledná napjatost je tedy dvouosá a vzniklá napětí jsou zároveň napětími hlavními, což je patrné i ze zapsaného tenzoru napětí v rovnici (2).

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

S takto definovanými napětími je možno získat velikosti délkových přetvoření, jejichž výpočet vychází ze zobecněného Hookova zákona, který platí pro homogenní, izotropní, lineárně pružný materiál. S uvážením $\sigma_n = 0$ dochází k jeho zjednodušení do podoby

(3), (4) a (5), kde E je Youngův modul pružnosti v tahu⁴ a μ je Poissonův poměr⁵. Z možných posunutí na skořepině je zpravidla nejdůležitější to radiální (normálové), které se vypočítá pomocí (6), kde r je poloměr v radiálním směru, tedy ve směru kolmém na osu z globálního SS. Jedná se tedy o jiný poloměr, než je obvodový poloměr r_t , který je kolmý na tečnu k meridiánové křivce v daném místě. Mezi těmito poloměry platí vztah (7) [1].

$$\varepsilon_m = \frac{1}{E}(\sigma_m - \mu\sigma_t) \quad (3)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu\sigma_m) \quad (4)$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E}[-\mu(\sigma_t + \sigma_m)] \quad (5)$$

² Obecně platí mezi charakteristickým rozměrem a tloušťkou skořepiny pro inženýrskou rozlišovací úroveň závislost $\frac{r}{h} \geq 20$ [2]. Tato hranice však nemusí být striktně dodržována. Vždy záleží na přípustné chybě v řešení konkrétního problému.

³ Velikost normálového napětí přibližně odpovídá radiálnímu vnitřnímu tlaku působícího na skořepinu, jehož velikost se pohybuje v rámci jednotek, maximálně desítek, MPa.

⁴ Pro ocel je jeho velikost asi $E = 200 \text{ GPa}$.

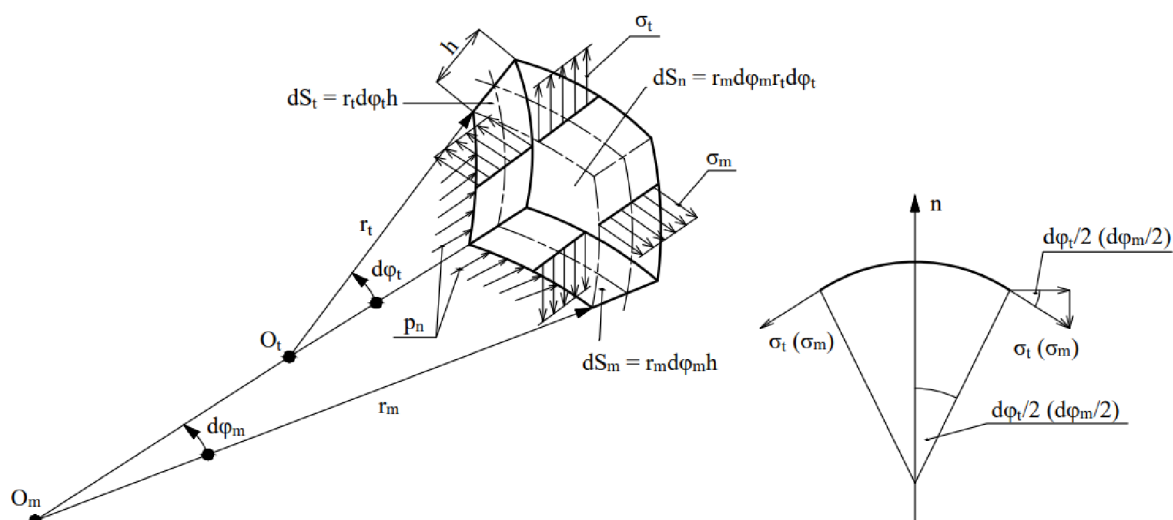
⁵ Typicky u oceli platí $\mu = 0,3$

$$u_r = \varepsilon_t r = \frac{r}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_m) \quad (6)$$

$$r = r_t \sin(\varphi_m) \quad (7)$$

2.1.4 Rovnice potřebné k řešení úloh

K řešení úloh skořepin splňujících předpoklady membránové teorie je zapotřebí dvou rovnic, kterými je možno vyřešit dvě nezávislé neznámé σ_m a σ_t . Těmito rovnicemi jsou Laplaceova rovnice a rovnice rovnováhy v ose z globálního SS. Rovnice rovnováhy v ose z nemá obecnou podobu a je nutno ji vždy pro konkrétní úlohu odvodit. Podobu Laplaceovy rovnice je možno získat pomocí rovnováhy v ose normály n . Pro odvození se zavedou ve směrech jednotlivých os lokálního SS dle Obr. 4 příslušná napětí σ_m , σ_t a elementární prvek je následně zatížen vnitřním tlakem p_n ve směru n . Platí tedy (8).



Obr. 4 – Napětí působící na elementární prvek a jejich rozklad (upraveno dle [1]).

$$\sum_{i=1}^n F_{in} = 0 \quad (8)$$

Rozklad napětí σ_t resp. σ_m do osy n pro jejich příslušné úhly φ_t resp. φ_m je provedeno dle Obr. 4. Úhly φ_t a φ_m jsou velmi malé, a proto lze zapsat následující předpoklad:

$$\sin \frac{d\varphi_t}{2} \approx \frac{d\varphi_t}{2}, \quad \sin \frac{d\varphi_m}{2} \approx \frac{d\varphi_m}{2} \quad (9)$$

Rovnice statické rovnováhy v ose n pak vypadá následovně [1]:

$$-2\sigma_t \frac{d\varphi_t}{2} r_m d\varphi_m h - 2\sigma_m \frac{d\varphi_m}{2} r_t d\varphi_t h + p_n r_m d\varphi_m r_t d\varphi_t = 0 \quad (10)$$

Úpravou je možno získat Laplaceovu rovnici pro řešení membránových skořepin.

$$\frac{\sigma_t}{r_t} + \frac{\sigma_m}{r_m} = \frac{p_n}{h} \quad (11)$$

Mezi napětími působícími na elementární prvek σ_t a σ_m a liniovými silami, které jim odpovídají n_t a n_m existují závislosti (12). Díky těmto vztahům je možno zapsat Laplaceovu rovnici i v další formě (13).

$$n_t = \sigma_t h, n_m = \sigma_m h \quad (12)$$

$$\frac{n_t}{r_t} + \frac{n_m}{r_m} = p_n \quad (13)$$

2.1.5 Poloměry křivosti

Pro získání jednoho z napětí σ_t nebo σ_m pomocí rovnice (11) je nezbytné určit poloměry křivosti r_t a r_m . Tyto poloměry jsou závislé na tvaru skořepiny podle dané úlohy, a proto nelze zapsat jejich obecnou podobu. Je však možno konstatovat, že pro meridiánovou křivku tvaru přímky platí $r_m = \infty$, zatímco r_t má konečnou velikost, která je buďto konstantní (válcový tvar skořepiny), nebo závislá na proměnné veličině (kuželový tvar skořepiny). Dalším speciálním případem je kulová skořepina, pro kterou platí $r_m = r_t = R$, kde R je poloměr koule. Určení velikostí r_t a r_m pro složitější případy je v praktické části této práce pro každou úlohu okomentováno zvlášť stejně jako rovnice rovnováhy v ose z .

2.1.6 Určování bezpečnosti

Z hlediska výsledků výpočtů je stěžejní určit bezpečnost k dané skořepiny. Tato bezpečnost je určována vzhledem k meznímu stavu pružnosti, jelikož je v úlohách uvažován jako materiál konstrukční ocel. Ocel se dá považovat za houževnatý materiál a díky tomu lze využít dvou základních teorií. Tou první je teorie maximálních smykových napětí (též Trescova teorie, zkráceně τ_{max}), která říká, že k plastické deformaci v bodě tělesa dojde tehdy, když maximální smykové napětí v tomto bodě dosáhne kritické hodnoty smykového napětí, při které na zkušebním vzorku ze stejného materiálu při zkoušce tahem vznikly první plastické deformace [4]. Redukované napětí⁶ v souladu s Trescovou teorií se vypočte dle (14). Druhou teorií je teorie

⁶ Veličiny σ_1 , σ_2 a σ_3 označují hlavní napětí seřazená dle velikosti od největšího po nejmenší.

měrné energie napjatosti změny tvaru (tzv. Von Misesova teorie, zkráceně HMH), kdy k plastickým deformacím v bodě tělesa dochází po dosažení takové hodnoty měrné energie napjatosti změny tvaru, která je větší nebo rovna příslušné kritické hodnotě této měrné energie naměřené na zkušebním tělese při vzniku prvních plastických deformací [4]. Vzorec pro redukované napětí je uveden v (15). Bezpečnost tělesa se pak vypočítá díky vztahu (16), kde σ_k je mez kluzu daného tělesa.

$$\sigma_{red}^{\tau_{max}} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (14)$$

$$\sigma_{red}^{HMH} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (15)$$

$$k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{red}} \quad (16)$$

Pro řešení bezpečnosti skořepin je vhodné využívat teorie HMH, jelikož ta na rozdíl od teorie τ_{max} více odpovídá skutečnosti⁷ [4]. Ve vzorci (15) pro bezmomentové skořepiny následně dojde ke zjednodušení, protože je uvažován dříve zmíněný předpoklad, že jedno z hlavních napětí je nulové.

2.1.7 Analytické a numerické řešení

Důležitým výstupem této práce bude konfrontace výsledků získaných analytickým řešením s řešením numerickým pomocí metody konečných prvků (dále jen MKP). Jak pro analytický, tak i pro numerický přístup k řešení problémů je nutné využívat umění modelování. Modelování je proces, při kterém je skutečnému objektu přiřazený model tak, aby obsahoval všechny vlastnosti důležité z hlediska řešení daného problému.

V rámci analytického přístupu je na takovém modelu hledáno řešení ve tvaru spojitých funkcí dle metod matematické analýzy s využitím integrálního a diferenciálního počtu [5]. Pokud je nalezeno analytické řešení, je následně získána jasná funkční závislost mezi vstupy a výstupy řešeného problému. Toto lze pak s výhodou využít pro další řešení úloh podobného charakteru. Pro případ skořepin je pro analytické řešení využívána Laplaceova rovnice a rovnice rovnováhy v ose z globálního SS. Použitelnost analytického přístupu v praxi je však značně omezena pouze na jednoduché tvary těles, které je možno spojitými funkcemi popsat. Při samotném výpočtu je zároveň uvažována řada zjednodušení, která snižují náročnost řešení bez podstatné změny výsledku. Geometrie skutečných v praxi používaných objektů je zpravidla velmi složitá, materiál není homogenní, jeho chování je nelineární a zatížení je obecné a v čase proměnlivé. Z těchto důvodů je analytický přístup vhodný zejména pro získání základní představy o chování reálného objektu, zjednodušeného na analyticky řešitelnou podobu, a nelze

⁷ Mez kluzu ve smyku stanovená pomocí teorie τ_{max} je asi o 15% menší než její hodnota stanovená dle HMH. Teorie maximálních smykových napětí je tedy konzervativní přístup z hlediska výpočtu bezpečnosti, avšak nepříliš dobře odpovídá reálnému chování houževnatých materiálů.

jej použít pro detailní analýzu. V této práci je k analytickému řešení využíván matematický software Matlab.

Numerické řešení je na rozdíl od analytického řešení řešením přibližným. Přejíždí od spjaté formulace problému k formulaci, kde hledáme konečné množství neznámých parametrů aproximujících příslušné funkce – tento proces je nazýván diskretizace [5]. Touto diskretizací vzniká v numerickém přístupu inherentní chyba. Rozdíl mezi analytickým a numerickým přístupem lze snižovat zhušťováním diskretizace. Je zřejmé, že takovým zhušťováním je vytvořeno velké množství rovnic, které je nutné vyřešit a bez použití výpočetní techniky to je prakticky nemožné. Požadavky jsou tedy v numerických úlohách kladeny zejména na používaný hardware, dostupný software a podle složitosti úlohy také na čas. Obrovskou výhodou je však možnost výpočtu jakkoliv geometricky složitých úloh, staticky neurčitých úloh a i jinak komplikovaných úloh, např. z hlediska zatížení. V této práci je pro numerický přístup využívána metoda MKP. MKP je metoda založená na variační formulaci, kdy hledáme minimum energetického funkcionálu, a deformačním přístupem, kde hlavními neznámými jsou funkce posuvů. Detailní popis problematiky MKP lze najít např. v [5] a nebude dále předmětem zájmu této práce.

Z předchozího výkladu je jasné, že mezi analytickým a numerickým přístupem k řešení úloh se vyskytují ve výsledcích jisté rozdíly. Tyto rozdíly jsou detailně zkoumány v praktické části.

2.2 Využití membránových skořepin

Membránové skořepiny jsou hojně využívány v mnoha moderních průmyslových odvětvích, jelikož při dodržení správného konstrukčního návrhu dokážou přenášet velká zatížení i při velmi malé tloušťce jejich stěn. Tato vlastnost se dá s výhodou uplatnit u vysoce namáhaných objektů, které vyžadují nízkou váhu konstrukce, jako je tomu zejména v letectví a kosmonautice, což byly jedny z prvních oblastí aplikace skořepin [6]. Obecně se dá říct, že skořepinové konstrukce jsou dnes ve velkém množství uplatňovány např. ve strojírenství, stavebnictví, lékařství, energetice, automobilovém průmyslu, aerokosmonautice, umění a v nedávných letech i např. v nanotechnologii. Pro detailní popis a analýzu všech objektů zájmu v těchto oborech je zapotřebí znalost chování skořepin při různých stavech zatížení a uložení a z toho vyvodit napětí (resp. bezpečnost) a deformaci. Je tedy nutné využívat membránové teorie pro řešení skořepin splňujících všechny nutné předpoklady, a naopak použít ohybové teorie skořepin k řešení míst výskytu ohybových momentů, jako je tomu u momentových skořepin.

Skořepinové konstrukce mají několik zásadních výhod, které zajišťují jejich široké využití v praxi. Těmito výhodami jsou [2]:

1. Mnohonásobně vyšší tuhost v tahu než v ohybu⁸.
2. Vysoce účinné přenášení zatížení.
3. Vysoká úroveň využití materiálu.
4. Vysoký podíl pevnosti⁹ ku váze, což je jedním z důležitých kritérií návrhu.

⁸ Toto je způsobeno rozložením sil při namáhání tahem, kdy síly mají po celém příčném průřezu daného tělesa stejnou velikost, a je tedy využíváno celého potenciálu užitečných vlastností materiálu. Při tlakovém namáhání je chování analogické, avšak začne se zde nepříznivě projevovat malá tloušťka stěny skořepiny a při nesprávném návrhu dochází k borcení (tzv. buckling). Problematika borcení je vysvětlena v kapitole návrhu.

⁹ Pevnost je v tomto kontextu chápána jako schopnost součásti či konstrukce přenášet zatížení bez porušení, a nikoliv jako vlastnost materiálu.

5. Vysoká tuhost.
6. Minimalizace prostorových nároků při zachování pevnosti.

Další, neméně důležitou vlastností skořepinových struktur je jejich estetický vzhled, čehož je využíváno zejména v architektonickém designu [2].

2.2.1 Membránové skořepiny v praxi

Pro správnou představu o využití skořepin je vhodné uvést jejich ukázky v praxi. Membránové skořepiny se často vyskytují tam, kde můžeme předpokládat rovnoměrné zatížení. Takový typ zatížení se nejčastěji objevuje při skladování materiálů. Skladované materiály mohou v být pevném skupenství, jako je tomu v zemědělství, v kapalném skupenství např. ve formě benzínu či jiných ropných produktů a často také vody a v plynném skupenství např. v hasících přístrojích. Z toho vyplývá, že typickým příkladem využití skořepin jsou vodojemy, různé nádrže, cisterny, tlakové nádoby, sila, ale z důvodu zmíněných výhod skořepin i střechy, bány, trupy lodí, ponorek a letadel, chladicí věže elektráren a mnoho dalších. Vyskytují se také v přírodě ve formě vajících, listů, lebek či ve vnitřním uchu. Nejzajímavější tvary skořepin najdeme zejména v architektuře, kde je samotný vzhled mnohdy důležitější než ekonomičnost výstavby.

Jednou z nejstarších ukázek využití skořepin je chrám Pantheon na Obr. 5. Dnešní podoba Pantheonu byla vystavěna v roce 123 n.l. císařem Hadriánem a díky skvělému stavu je to nejzachovalejší antická památka v Římě [7]. Stavba je tvořena ze dvou částí – předsíně a obrovské betonové kopule vystavěné na válcové základně z cihel tvořících stěnu o tloušťce 6 m. Kopule má průměr 43 m, což z ní činí jednu z největších z klasického, nevyztuženého betonu na světě¹⁰ [7]. Spolu s válcovou základnou je také 43 m vysoká, do celé stavby tak lze vepsat kouli tohoto průměru. Na vrcholu koule najdeme 8 m široký otvor zvaný okulus, který zajišťuje v interiéru dostatek světla přes den a zároveň ukazuje úroveň dovednosti práce inženýrů se skořepinami již v této době. Aby kopule nebyla příliš těžká, využilo se těžkých přísad do betonu jako travertín či opuka pouze ve spodních částech, směrem k vrcholu se přidávaly velice lehké přísady jako je pemza, která dokonce plave na vodní hladině. Dalšími opatřeními bylo například postupné zužování stěny či technika tzv. kazetování, přičemž kazety slouží zároveň i jako dekorace stropu. Jedinečný architektonický design a využití materiálu inspirovaly mnoho pozdějších architektů jako je např. Andrea Palladio či staveb jako např. U. S. Capiol.



Obr. 5 – Pantheon v Římě [8].

¹⁰ Tento návrh by dnes určitě neuspěl, jelikož bez použití železobetonu by se předpokládalo že budova neodolá požadovanému zatížení.

Příkladem známé skořepinové konstrukce v Brně je Pávilon Z patrný na Obr. 6. Tato stavba působila v době svého vzniku v roce 1959 jako zcela unikátní díky svému jedinečnému vzhledu a elegantní konstrukci. Kopulovitá střecha této dnes již kulturní památky je 94 m široká a 42,4 m vysoká [9]. Podle některých zdrojů ze 60. let se v závislosti na teplotě slunečního svitu přes den pohyboval vrcholek kupole až o jeden metr, což je možné díky flexibilní konstrukci z ocelových trubek [9]. V roce 2017 avšak byly po zpevnění konstrukce provedeny měření a pohyb dosahoval hodnoty maximálně v centimetrech. Kdysi největší výstavní pavilon v Československu byl symbolem technologického pokroku právě díky využití mnoha výhod správného návrhu skořepinové konstrukce [10].



Obr. 6 – Pávilon Z v Brně [9].

Sono Centrum v Brně je ukázkou moderního pojetí skořepinových konstrukcí. Jedná se o netradiční multifunkční budovu provozující parkování, hotel, nahrávací studio, restauraci, hudební klub a konferenční sál. Dominantní konstrukcí celé stavby je elipsoidní skořepina tvaru vejce, která spojuje hotel, restauraci a klub v jeden celek. Rozměry rotačního elipsoidu jsou $17,6 \times 17,6 \times 25,2$ m, proto při pohledu zepředu vypadá jako by měl kulovitý tvar, avšak při pohledu z boku je patrné, že tomu tak není. Konstrukce je primárně ze železobetonu a stěna má tloušťku 300 mm [11]. Díky zmiňovanému kulovitému tvaru a černé barvě dvou sousedních vícepodlažních budov je tento počín Ing. Arch. Františka Šmédka unikátní, lze si totiž snadno vytvořit asociaci mezi vzhledem budovy a např. reproduktorem či disko koulí, což bylo architektonickým záměrem. Právě skořepinový návrh s několikavrstvou stěnou z různých materiálů dodává tomuto koncertnímu sálu jeho vynikající akustické vlastnosti, které spolu s moderním vybavením a příjemným designem interiéru dělají z hudebního klubu jeden z nejznámějších v České republice. Pohled zepředu je na Obr. 7.

Jelikož bylo požadavkem architekta, aby skořepina působila jako opticky levitující, velkým problémem bylo samotné vyřešení statiky. Prvotní myšlenkou bylo podepření lokálně čtyřmi šikmými sloupy ve spodní části [11]. Tento návrh je však pro skořepinu nepřijatelný, jelikož dojde ke koncentraci ohybových momentů v místě spojení sloupu a skořepiny, a tedy k jejímu protlačení. V [11] je popsán další postup při řešení tohoto problému, kdy bylo nutné sloupy ustavit do vhodnější pozice v úrovni stropní desky 1. NP. Díky tomuto se vodorovně

síly přenesly do stropních tabulí a svislé síly již nezpůsobovaly příliš velké ohybové momenty¹¹.



Obr. 7 – Sono Centrum [12].

Ukázkou komplexního využití skořepin ve světě je metropolitní divadlo v tchajwanském městě Tchaj-čung architektonického studia Toyo Ito & Associates na Obr. 8. Jedná se o unikátní, multifunkční, železobetonovou stavbu otevřenou v roce 2016, která spojuje kulturní zázemí s obchodním střediskem. Jedinečnost této stavbě propůjčuje její jeskyňovitý systém interiéru tvořený skořepinami viz Obr. 9. Základem této velice složité konstrukce jsou katenoidy, což jsou geometrické útvary zabírající minimální plochu v uzavřeném prostoru, které se následně vyztužovaly přidavnými prvky. Na katenoidy pak bylo nutno připevnit tzv. plugy, tvořící stěny a podlahy. Jelikož častou nevýhodou skořepinových staveb je finančně nákladné bednění, způsobené jejich atypickými tvary, využilo se zde kvůli úspoře příhradových konstrukcí tvořících tvar katenoidu, na které byla později z obou stran připevněna síť zajišťující požadovanou tloušťku stěny 460 mm [13]. I přes komplikovanost interiéru má exteriér záměrně tvar kvádrů, aby celá stavba působila jako řez větším celkem.



Obr. 8 – Metropolitní divadlo v Tchaj-Čungu [14].



Obr. 9 – Model konstrukce [15].

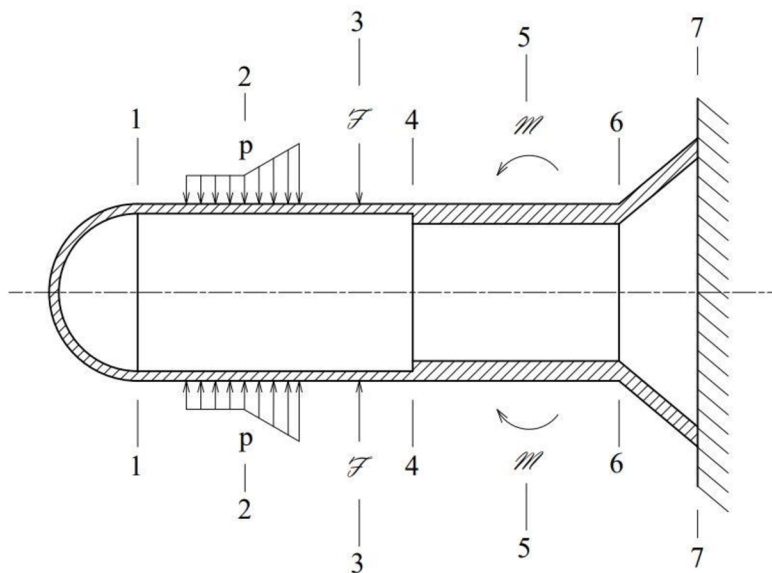
¹¹ Optimální by byl tečný dotyk mezi sloupy a skořepinou, aby došlo k úplné eliminaci momentů pouze na tlakové a tahové namáhání. V tomto případě to však nebylo možné z důvodu správného využití prostoru a splnění požadavků architekta.

2.3 Návrh bezmomentových skořepin

Správný návrh je stěžejní při využívání skořepinových konstrukcí, je důležité uvědomit si, že poškození skořepin již není primárně způsobeno materiálem, jejichž kvalita je čím dál vyšší, nýbrž špatným návrhem a nedodržením požadovaných podmínek membránové teorie. Jakékoliv porušení těchto podmínek vede následně ke vzniku ohybových a krutících momentů (posouvajících sil), a tedy k nesprávnému určení bezpečnosti, pokud uvažujeme pouze membránový stav napjatosti. Takovéto nově vzniklé vnitřní síly a momenty jsou vysoce nebezpečné pro skořepinové konstrukce, jejichž ohybová tuhost $B = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \cong 0$. Z tohoto důvodu je nutné pečlivě rozlišovat oblasti, ve kterých se daná skořepina nachází v membránovém stavu napjatosti od oblastí s výskytem momentů, a tedy s momentovým stavem napjatosti, který je typický pro tzv. momentové skořepiny.

2.3.1 Momentové skořepiny a poruchy membránové teorie

Momentové skořepiny jsou tenkostěnná tělesa, pro která platí stejná základní charakteristika jako pro bezmomentové skořepiny, a to rotační symetrie vstupů i výstupů. Matematicky je jejich řešení, popsané pro válcový tvar např. v [1], mnohem komplikovanější a často je zapotřebí využívat numerických metod, jelikož analytické řešení v uzavřeném tvaru neexistuje. Pokud však uzavřené řešení existuje, jak je tomu např. u válcové momentové skořepiny při určitých zatíženích, má velký význam z hlediska analýzy napjatosti skořepiny při obecných zatíženích. Ohybovou teorii používanou pro řešení momentových skořepin je nutno uplatnit v místech poruchy podmínek membránové teorie. Taková poruchová místa patrná na Obr. 10, kterým je nutno se při návrhu vyvarovat jsou [16]:



Obr. 10 – Poruchy membránové teorie (upraveno dle [1]).

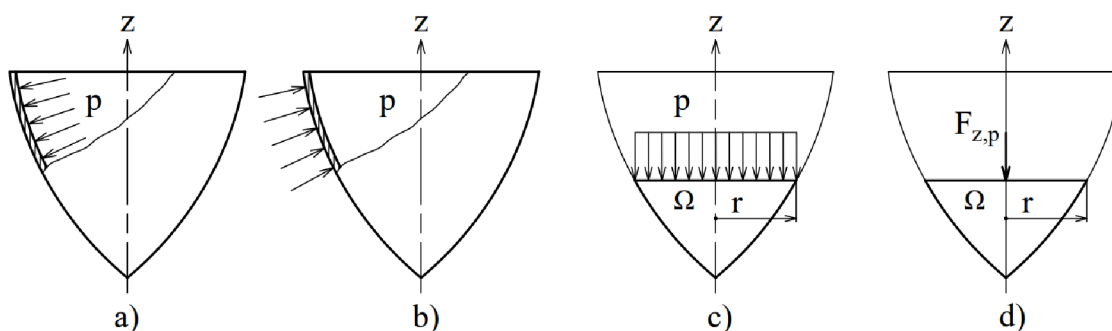
1. Skoková změna křivosti střednicové plochy (řez 1 – 1).
2. Nespojitosť derivace zatížení – změna průběhu tlaku (řez 2 – 2).
3. Nespojité zatížení – liniová síla (řez 3 – 3) nebo liniový moment (řez 5 – 5).
4. Skoková změna tuhosti – změna tloušťky nebo materiálu (řez 4 – 4).
5. Zlom střednicové plochy (řez 6 – 6).
6. Vazba k jinému tělesu – omezení deformace (řez 7 – 7).

2.3.2 Charakteristická zatížení membránových skořepin

Při návrhu jsou u membránových skořepin předpokládány zpravidla tři charakteristické typy zatížení, které jsou rotačně symetrické a splňují podmínky membránové teorie [1].

Konstantní vnitřní nebo vnější tlak p , který působí kolmo na střednicovou plochu, a v Laplaceově rovnici tedy platí že $p_n = p$. Pro silovou rovnováhu na prvku Ω v ose z globálního SS je pak využíván vztah (17). Ukázky jsou na Obr. 11.

$$F_{z,p} = \pi r^2 p \quad (17)$$

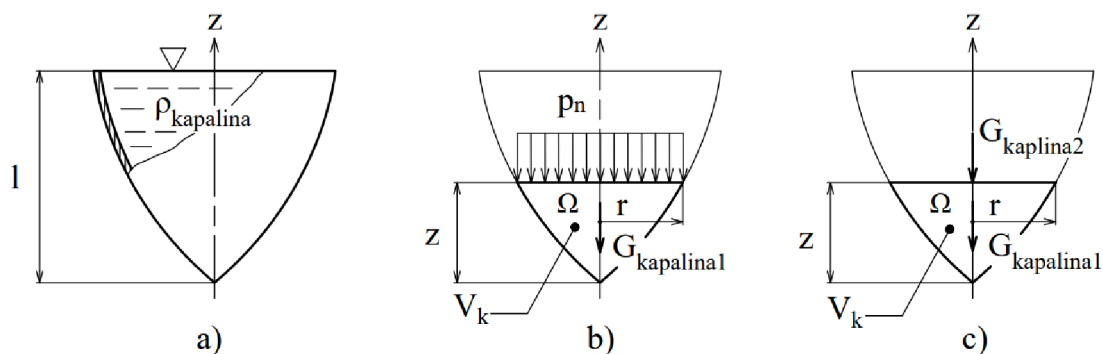


Obr. 11 – Zatížení konstantním tlakem – a) Vnitřní tlak; b) Vnější tlak; c) Tlak působící na prvek Ω ; d) Staticky ekvivalentní náhrada tlaku silou (upraveno dle [1]).

Tlak lineárně závislý na souřadnici z globálního SS, kdy se nejčastěji jedná o hydrostatický tlak kapaliny, který působí ve směru normály střednicové plochy. Pro něj platí $p_n(z) = \rho_{kapalina} g(l - z)$. V ose z globálního SS prvku Ω je nutno uvažovat tíhu kapaliny (18), kde V_k je objem kapaliny obsažené v prvku Ω a $\rho_{kapalina}$ je její hustota, a tíhu vyvolanou kapalinou nad uvolněným prvkem Ω (19). Výsledná síla bude jejich součtem. Takto zatížená skořepina je na Obr. 12.

$$G_{kapalina1} = V_k \rho_{kapalina} g \quad (18)$$

$$G_{kapalina2} = \pi r^2 \rho_{kapalina} g(l - z) \quad (19)$$



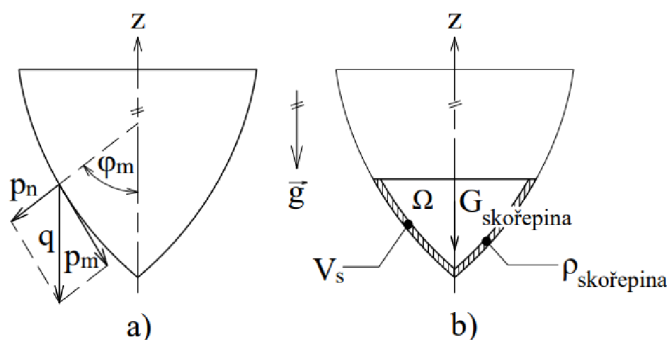
Obr. 12 – Zatížení hydrostatickým tlakem – a) Skořepina naplněná kapalinou; b) Zatížení působící na prvek Ω ; c) Staticky ekvivalentní nahrazení tlaku silou (upraveno dle [1]).

Zatížení vlastní tíhou je posledním charakteristickým zatížením skořepin. Je nutné, aby osa z globálního SS byla rovnoběžná se směrem gravitačního zrychlení g , pak bude toto zatížení splňovat podmínky membránové teorie [1]. Aby bylo možné takovou úlohu vyřešit, je zapotřebí rozdělit měrné objemové zatížení $q = \rho_{skořepina}gh$ (kde h je tloušťka skořepiny) do složek lokálního SS n podle rovnice (20) a m dle vztahu (21). Silová výslednice osy z uvažovaná podle rovnice (22) je úměrná tíze pláště prvku Ω – V_s je tedy objem pláště prvku Ω a $\rho_{skořepina}$ je hustota samotné skořepiny. Zatížení vlastní tíhou je zobrazeno na Obr. 13.

$$p_n(z) = q \cos(\varphi_m) \quad (20)$$

$$p_m(z) = q \sin(\varphi_m) \quad (21)$$

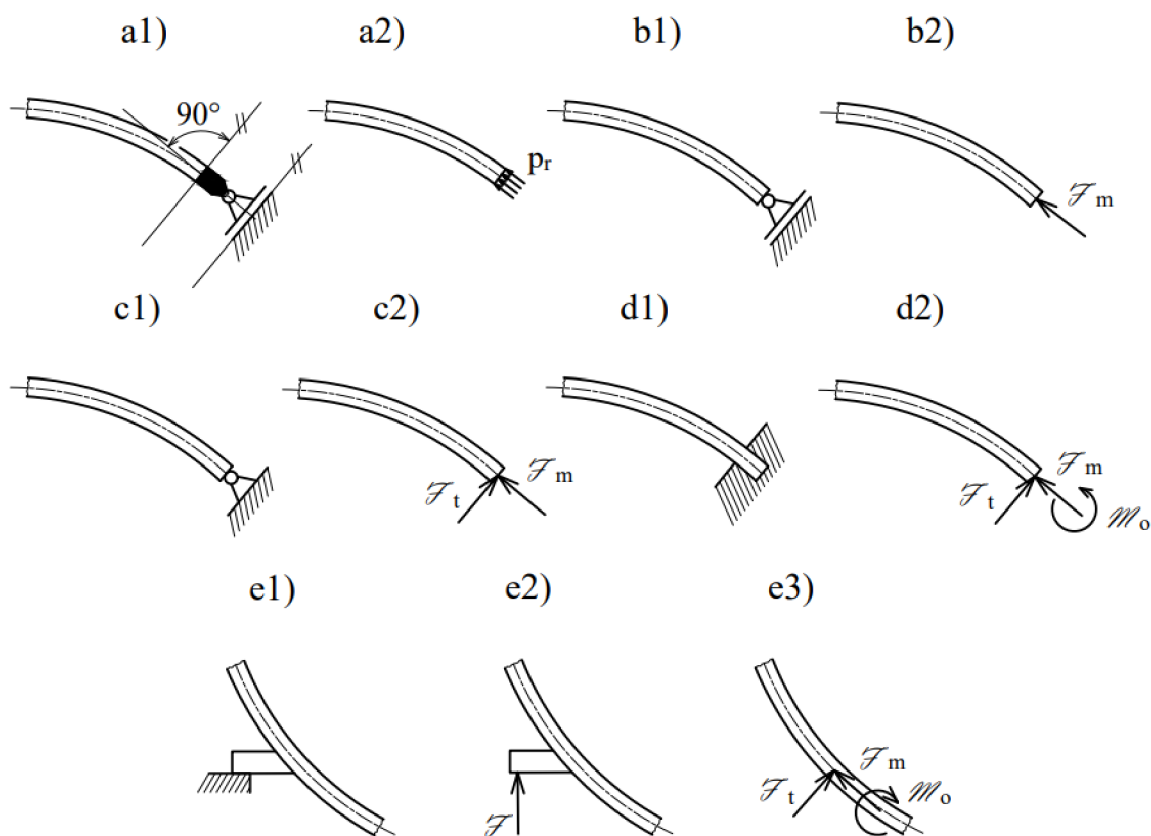
$$G_{skořepina} = V_s \rho_{skořepina} g \quad (22)$$



Obr. 13 – Zatížení vlastní tíhou – a) Rozložení měrného objemového zatížení q na složky; b) Výslednice sil v ose z (upraveno dle [1])

2.3.3 Uložení membránových skořepin

Jednou z nejdůležitějších zásad vhodného návrhu bezmomentových skořepin je jejich správné uložení. Aby byla dodržena membránová teorie, musí stykové síly vazeb působit ve směru tečné roviny ke střednicové ploše okraje skořepiny a jejich rozložení musí být rovnoměrné, stejně jako u σ_m a σ_t . Zároveň tyto vazby nesmí nijak omezovat deformaci skořepiny, předpokládáme tedy kluzné vazby, realizace pomocí vetknutí či rotační vazby není možná. Takovýto návrh je ve skutečnosti velice obtížný a ve vazbách tak vždy vzniká ohybové napětí určité velikosti. V takovýchto případech lze uplatnit Saint-Venantův princip, který říká, že staticky ekvivalentní náhradou skutečného silového působení ve vazbě je ovlivněna napjatost pouze bezprostředního okolí vazby. Membránovou teorii tedy nelze použít přímo v místě vazby, kde musíme využít ideálně metody MKP nebo ohybové teorie skořepin, ale lze ji s jistotou uplatnit v dostatečné vzdálenosti od vazby. Pro tuto vzdálenost platí – čím menší je tloušťka skořepiny, tím rychleji dochází k poklesu ohybových napětí, a tedy k rychlejší obnově membránového stavu napjatosti [2]. Správný návrh uložení je zobrazen na Obr. 14 a1), a2), možnost b1), b2) nesplňuje rovnoměrné rozložení sil po stykové ploše. Další případy jako c1), c2) a d1), d2) jsou nepřijatelné, protože ve skořepině vyvolávají ohybový moment. Na obrázcích e1), e2), e3) je zobrazena vazba mimo okraj skořepiny, kde je vždy vyvolán určitý ohybový moment, a tedy ohybové napětí.



Obr. 14 – Ukázky uložení (upraveno dle [1]).

2.3.4 Ztráta stability skořepin – „buckling“

Nejzávažnější poruchou skořepinových konstrukcí je borcení neboli buckling. Buckling skořepin je pro konstrukci vždy katastrofální, protože po jeho nastání dochází velice rychle ke ztrátě původního tvaru. Návrh s tímto problémem musí počítat a předcházet mu tím, že většina

skořepiny se bude nacházet v tahovém, a nikoliv tlakovém stavu, který způsobuje borcení. Dalšími možnými způsoby je zvětšit tloušťku skořepiny nebo použití výztuží v kritických místech.

Vyhodnocení kritických hodnot zatížení, které způsobí borcení je u skořepin náročné kvůli složitému matematickému popisu zborčených tvarů (jedná se o nelineární úlohu) a jejich možných případech. Skořepiny jsou vysoce citlivé na jakékoliv geometrické imperfekce jako trhliny či jiné vady z výroby, které jsou vždy ve skutečných skořepinách přítomny. Takovéto nepravidelnosti v geometrii skořepiny snižují velikost přípustných kritických zatížení [2]. Pro jejich stanovení se obecně využívá komplikovaných analýz pomocí MKP. Některé jednoduché případy borcení lze však řešit analyticky pomocí metod popsanych ve [2]. Ukázky zborčených konstrukcí jsou na Obr. 15 a Obr. 16.



Obr. 15 – Zborčený vodojem [17].



Obr. 16 – Zborčené silo [18].

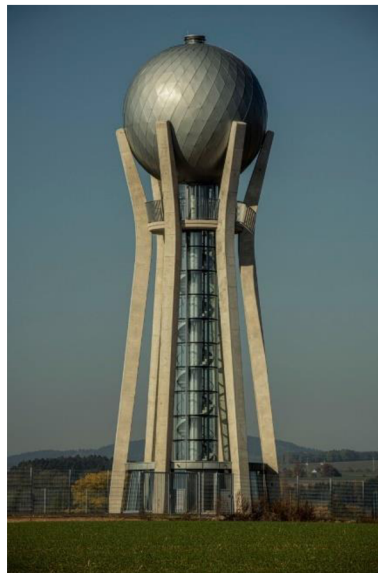
3 Výpočtová analýza vybraných bezmomentových skořepin

V praktické části této práce je provedena deformačně napěťová analýza vybraných skořepinových konstrukcí se zaměřením na jejich uložení a následnou bezpečnost. Vytvořením analytických modelů v programu Matlab a numerických modelů v programu Ansys Workbench budou porovnány výsledky obou přístupů a kriticky zhodnoceno, zda je lze považovat za správné.

3.1 Kulový vodojem Ohrazenice

Vodojem v obci Ohrazenice (Obr. 17) je unikátní stavba zajímavá zejména svým nezvyklým základem. Jedná se o kulovou skořepinu vyrobenou z oceli a osazenou na šesti podporách – betonových sloupech. Údaje potřebné k analýze jsou [19]:

1. Poloměr kulové skořepiny $R = 4 \text{ m}$.
2. Tloušťka stěny skořepiny $h = 0,01 \text{ m}$.
3. Uvažované materiálové charakteristiky oceli – Mez kluzu $\sigma_k = 250 \text{ MPa}$, Youngův modul pružnosti $E = 200 \text{ GPa}$, Poissonův poměr $\mu = 0,3$.
4. Hustota vody $\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$.



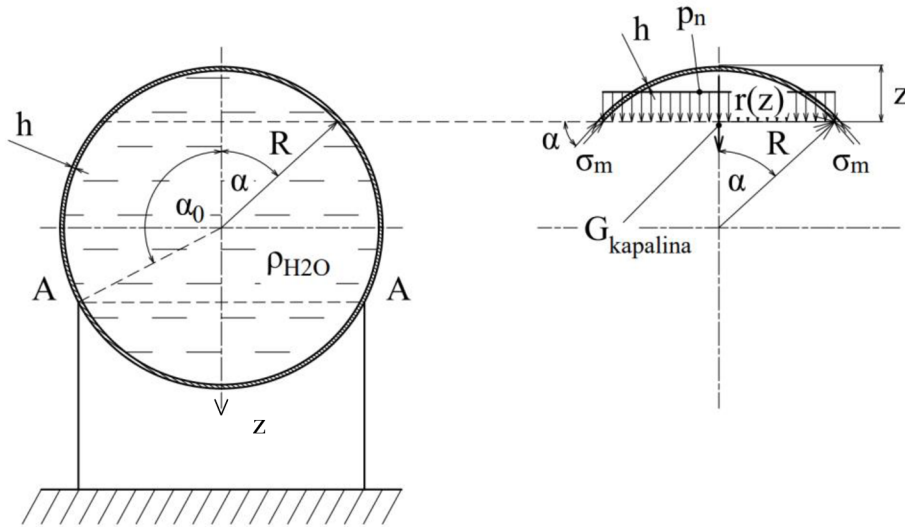
Obr. 17 – Vodojem Ohrazenice [20].

3.1.1 Analytické řešení

Pro analytické řešení je řešena modelová úloha podle Obr. 18. Je uvažována kulová skořepina poloměru R o tloušťce stěny h , která je zcela naplněna vodou hustoty ρ_{H_2O} . Koule je uložena na vazbě AA typu prstence pod úhlem α_0 . Vlastní tíha skořepiny je zanedbána – zda je takovéto zjednodušení přípustné je následně zjištěno porovnáním s výsledky získanými pomocí MKP v programu Ansys Workbench. Aby bylo možno úlohu řešit, je nutno provést obecný řez skořepinou podle Obr. 18. Na prvek získaný řezem působí tlak kapaliny obsažené v jeho vnitřním objemu. Tento tlak je $p_n = \rho_{H_2O} g z$. Po tloušťce stěny skořepiny vzniká meridiánové napětí σ_{m1} (z důvodu jeho nespojitosti v místě vazby dostává index 1). Využitím silové rovnováhy v ose z (zde se jedná o vertikální osu) je možno psát rovnici:

$$-G_{kapalina} + p_n \pi r(z)^2 - \sigma_{m1} 2\pi r(z) h \sin(\alpha) = 0 \quad (23)$$

V této rovnici je nutné před tíhou kapaliny $G_{kapalina}$ použít záporné znaménko, jelikož příspěvek jejího objemu do silové rovnováhy je již zahrnut v tlaku p_n . Z geometrie uříznutého prvku (tvaru kulové úseče) lze psát následující vztahy:



Obr. 18 – Model úlohy pro analytické řešení s obecným řezem skořepinou.

$$r(z) = R \sin(\alpha) \quad (24)$$

$$z = R - R \cos(\alpha) = R(1 - \cos(\alpha)) \quad (25)$$

$$V_{kul, \text{úseč}} = \frac{\pi z^2}{3} (3R - z) = \frac{\pi R^3}{3} (\cos(\alpha) + 2)(1 - \cos(\alpha))^2 \quad (26)$$

$$p_n = \rho_{H_2O} g z = \rho_{H_2O} g R (1 - \cos(\alpha)) \quad (27)$$

$$V_{koule} = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (28)$$

Rozepsáním tíhy kapaliny $G_{kapalina}$ silové rovnováhy (23) je dosaženo tvaru:

$$-V_{kul, \text{úseč}} \rho_{H_2O} g + p_n \pi r(z)^2 - \sigma_{m1} 2\pi r(z) h \sin(\alpha) = 0 \quad (29)$$

S použitím rovnic (24), (26) a (27) je finální podoba silové rovnováhy:

$$-\frac{\pi R^3}{3}(\cos(\alpha) + 2)(1 - \cos(\alpha))^2 \rho_{H_2O} g + \rho_{H_2O} g R(1 - \cos(\alpha))\pi(R \sin(\alpha))^2 - \sigma_{m1} 2\pi R h \sin(\alpha)^2 = 0 \quad (30)$$

Ve zjednodušeném tvaru pak:

$$\sigma_{m1} = \frac{R^2 g \rho_{H_2O} (-2 \cos(\alpha)^2 + \cos(\alpha) + 1)}{6h(\cos(\alpha) + 1)} \quad (31)$$

Využitím Laplaceovy rovnice podle (11), kde $r_m = r_t = R$, a úpravou získáme obvodové napětí σ_{t1} :

$$\sigma_{t1} = \frac{R^2 g \rho_{H_2O} (-4 \cos(\alpha)^2 - \cos(\alpha) + 5)}{6h(\cos(\alpha) + 1)} \quad (32)$$

Napětí σ_{m1} a σ_{t1} platí pro místa nad vazbou AA, tedy $\alpha < \alpha_0$. Pro případy, kdy $\alpha > \alpha_0$ je potřeba do rovnováhy v ose z přidat další člen, kterým je reakční síla ve vazbě AA. Tato síla je úměrná váze kapaliny obsažené v kouli, proto $F_{vazba} = V_{koule} \rho_{H_2O} g$ (jelikož vlastní tíha je zanedbána). Pro nová napětí σ_{m2} a σ_{t2} tedy platí:

$$-G_{kapalina} + p_n \pi r(z)^2 + F_{vazba} - \sigma_{m2} 2\pi r(z) h \sin(\alpha) = 0 \quad (33)$$

Po dosazení potřebných rovnic (24), (26), (27) a (28) je získán následující tvar:

$$-\frac{\pi R^3}{3}(\cos(\alpha) + 2)(1 - \cos(\alpha))^2 \rho_{H_2O} g + \rho_{H_2O} g R(1 - \cos(\alpha))\pi(R \sin(\alpha))^2 + V_{koule} \rho_{H_2O} g - \sigma_{m2} 2\pi R h \sin(\alpha)^2 = 0 \quad (34)$$

Úpravou (34) je vztah pro meridiánové napětí pod vazbou AA σ_{m2} :

$$\sigma_{m2} = \frac{R^2 g \rho_{H_2O} (-2 \cos(\alpha)^2 + 5 \cos(\alpha) - 5)}{6h(\cos(\alpha) - 1)} \quad (35)$$

Přes Laplaceovu rovnici (11) stejně jako v předchozím případě a úpravou je obvodové napětí σ_{t2} :

$$\sigma_{t2} = \frac{R^2 g \rho_{H_2O} (-4 \cos(\alpha)^2 + 7 \cos(\alpha) - 1)}{6h(\cos(\alpha) - 1)} \quad (36)$$

Ze vztahů pro napětí (31), (32), (35) a (36) je vidět, že v bodě $\alpha = \alpha_0$, tedy v místě vazby AA, nastává nespojitost v průběhu napětí. Toto samozřejmě porušuje membránovou teorii skořepin, která předpokládá konstantní průběh napětí po tloušťce. Lze tedy předpokládat že výsledky v místě vazby nebudou správné.

Redukované napětí se vypočte podle vztahu (15) ve zjednodušeném tvaru, kdy $\sigma_1 = \sigma_{t1,2}$, $\sigma_2 = \sigma_{m1,2}$, $\sigma_3 = \sigma_n = 0$, pak platí:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2 - \sigma_m \sigma_t} \quad (37)$$

Bezpečnost vůči mezi kluzu se následně vypočte pomocí rovnice (16). K výpočtu meridiánového, obvodového a normálového přetvoření je využito vztahů

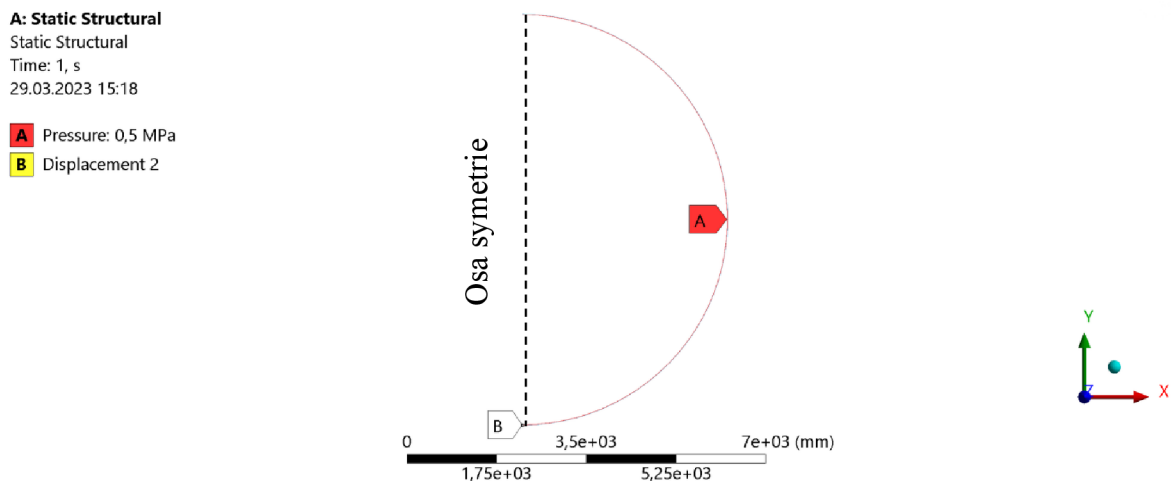
$$(3), (4) \text{ a } (5).$$

Pro obecné analytické řešení byl vytvořen kód v programu Matlab, díky kterému lze jednoduše zkoumat chování skořepiny např. při různých polohách vazby AA.

3.1.2 Numerické řešení

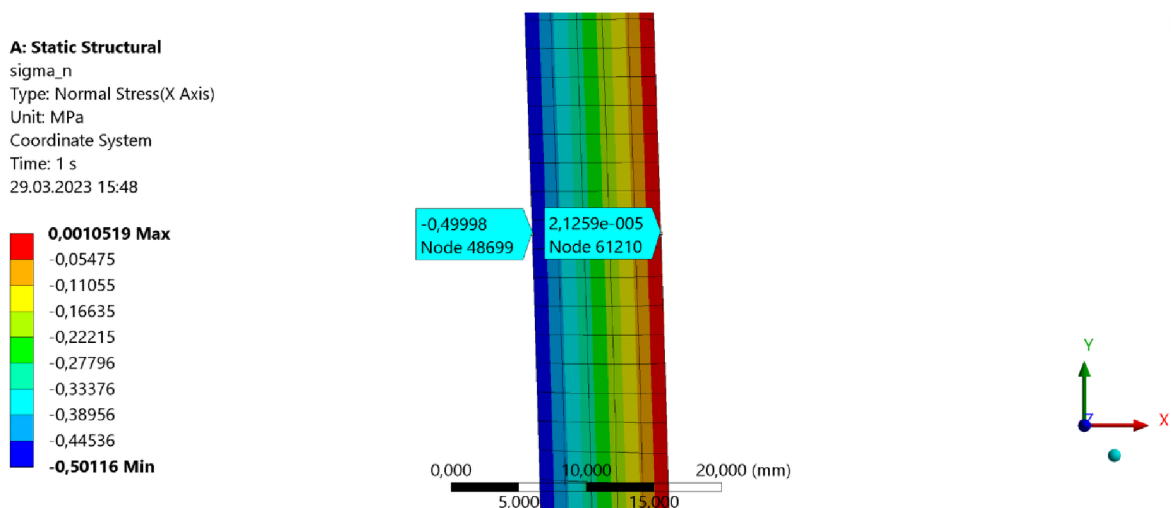
K numerickému řešení je použit program Ansys Workbench, který využívá MKP. Úloha je řešena jako 2D axisymetrická – osová symetrie okolo osy y pomocí 2D kvadratických prvků PLANE183. Model kulové skořepiny je parametrizován – lze měnit základní charakteristiky skořepiny stejně jako polohu vazby pomocí parametru z . Parametr z nabývá hodnot $\langle 0, 2R \rangle$, což je však teoretická hodnota a s velikostí tloušťky skořepiny roste také odchylka od tohoto rozmezí. Toto je nutné mít na paměti a v případě nutnosti je nezbytné si dopočíst skutečnou velikost parametru z se zahrnutím reálné tloušťky skořepiny. Mezi parametrem z polohy vazby a úhlem vazby α_0 platí vztah (25). Aby bylo možné správně zobrazit průběhy meridiánového, obvodového a normálového napětí, je zapotřebí vytvořit a používat válcový SS s počátkem ve středu koule.

Pro správnost numerických výsledků je nutné zvolit na analyzovaném tělese vhodnou síť. Kvalitní síť bylo dosaženo jednoduchou úvahou, kdy při vnitřním tlaku $0,5 \text{ MPa}$ musí normálové napětí σ_n nabývat právě této hodnoty na vnitřním povrchu skořepiny a na vnějším povrchu musí být normálové napětí nulové. Maximální odchylka od analytických výsledků je uvažována do 5 %, zde tedy hodnot $0,025 \text{ MPa}$, daný model pak lze označit za přesný. Jako přijatelné se obecně berou výsledky s chybou do 10 %, vyšší chyba než 10 % naznačuje nesprávnost modelu či analytických výsledků. Aby analýza byla možná, je nutné přidat okrajovou podmínku – nulový posuv v ose y . Poloha této vazby nemá na výsledky vážný vliv, je však vždy umístěna na vnějším povrchu skořepiny. Skořepině je přiřazen materiál se stanovenými charakteristikami. Okrajové podmínky (zkráceně OP) a geometrii lze vidět na Obr. 19.



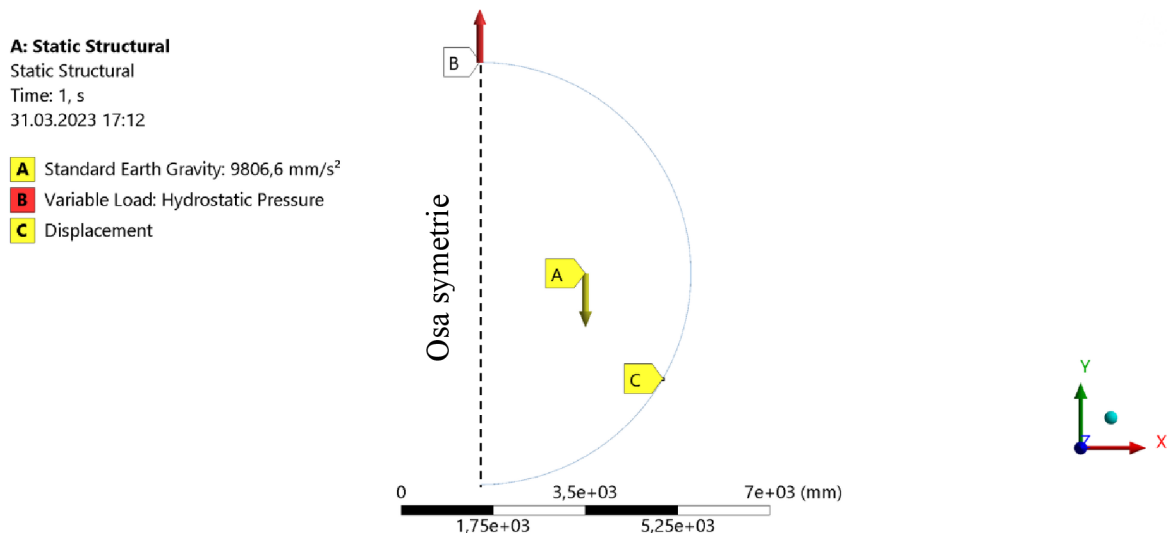
Obr. 19 – Okrajové podmínky a geometrie kulové skořepiny.

Dostatečné přesnosti sítě bylo postupným zjemňováním dosaženo prvky velikosti 2 mm. Při této velikosti obsahuje síť přes tloušťku skořepiny 5 prvků, což je dostatečně vysoké číslo (minimem jsou 3 prvky). Kvalitu sítě ukazuje Obr. 20. Hodnoty normálového napětí nesmí překročit stanovenou odchylku v jakémkoliv místě obou povrchů. Zda je toto splněno je zjištěno vykreslením normálních napětí podél vnitřního, resp. vnějšího povrchu pomocí funkce „path“. Normálové napětí na vnitřním povrchu se při současné síti pohybuje v rozmezí $-0,50116 \text{ MPa}$ až $-0,49961 \text{ MPa}$, na vnějším povrchu pak v rozmezí $-0,00069 \text{ MPa}$ až $0,00105 \text{ MPa}$. Kvalita sítě je tedy dostačující pro přípuštěnou chybu. V místě vazby, tedy pro $\alpha = \alpha_0$, je síť zjemněna na 1 mm, což umožňuje lépe zhodnotit chování skořepiny v tomto místě.



Obr. 20 – Kvalita sítě a hodnoty normálového napětí.

Na Obr. 21 jsou ukázány OP v konečné podobně. Lze vidět, že je uvažován hydrostatický tlak kapaliny, vlastní tíha skořepiny a je zamezeno posuvu v ose y . Hydrostatický tlak je aplikován na celý vnitřní povrch. Vazba, v prostředí Ansys nazývaná „displacement“, je umístěna na vnějším povrchu pro místo $\alpha_0 = 120^\circ$.

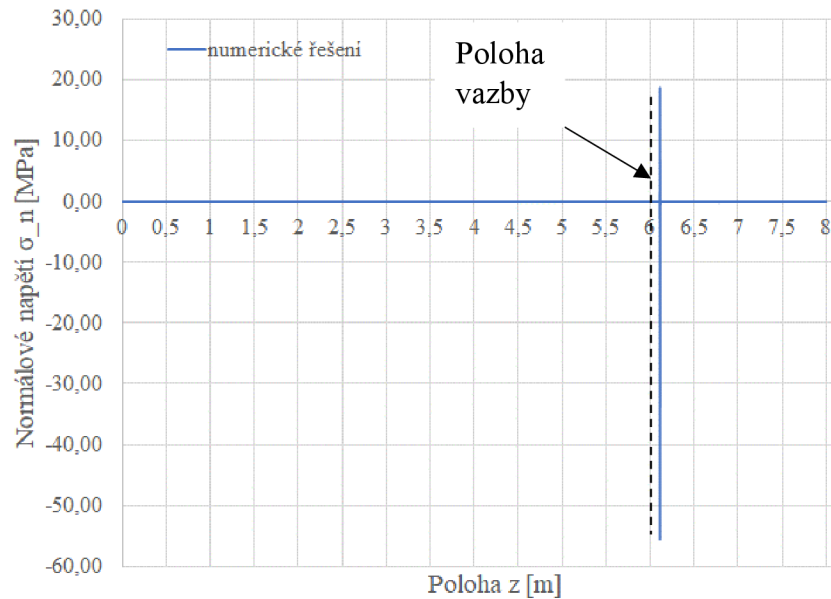


Obr. 21 – Konečné okrajové podmínky.

3.1.3 Srovnání analytických a numerických výsledků

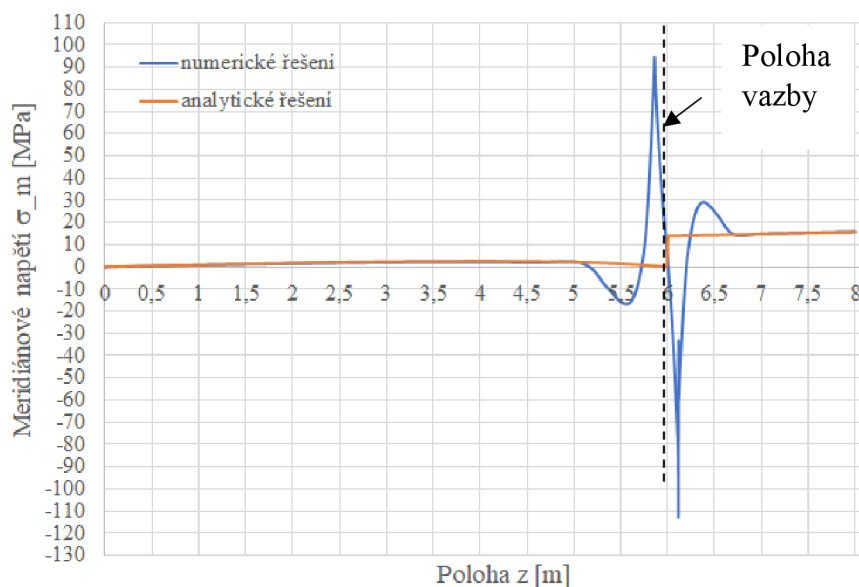
Pro porovnání analytických výsledků s numerickým řešením je zvolena poloha vazby $\alpha_0 = 120^\circ$, což podle rovnice (25) odpovídá $z = 6\text{ m}$. Z Obr. 20 lze vidět, že hodnoty normálového napětí jsou v numerickém přístupu po tloušťce proměnné, což nesouhlasí s membránovou teorií. Konstantní průběh po tloušťce nemají numericky ani meridiánové a obvodové napětí. Tato proměnnost je však zanedbatelná ve všech místech, kde není porušena žádná podmínka membránové teorie. V místě poruchy – např. v místě vazby, bude už velký rozdíl mezi napětími vznikajícími v tloušťce skořepiny. Z tohoto důvodu, a také pro jednodušší srovnání s analytickými výsledky, bude používán aritmetický průměr hodnot na vnějším a vnitřním povrchu. Pouze při vyhodnocování bezpečnosti bude počítáno s absolutními maximy napětí pomocí teorie HMH. Maxima napětí a přetvoření, která se nachází při analytickém přístupu v místě vazby $z = 6\text{ m}$, jsou v numerickém přístupu mírně posunuta do $z = 6,11\text{ m}$, což je způsobeno reálnou tloušťkou skořepiny h .

Normálové napětí u membránových skořepin je v analytickém přístupu k řešení úloh uvažováno nulové v celé tloušťce. Obr. 22 ukazuje, že numerické řešení se v tomto zásadně liší v místě vazby $z = 6\text{ m}$ (hodnota v grafu je numericky mírně rozdílná oproti analytické poloze z důvodu zmíněného výše). V tomto místě tedy neplatí membránová teorie, což bude mít za následek nesprávné analytické výsledky.



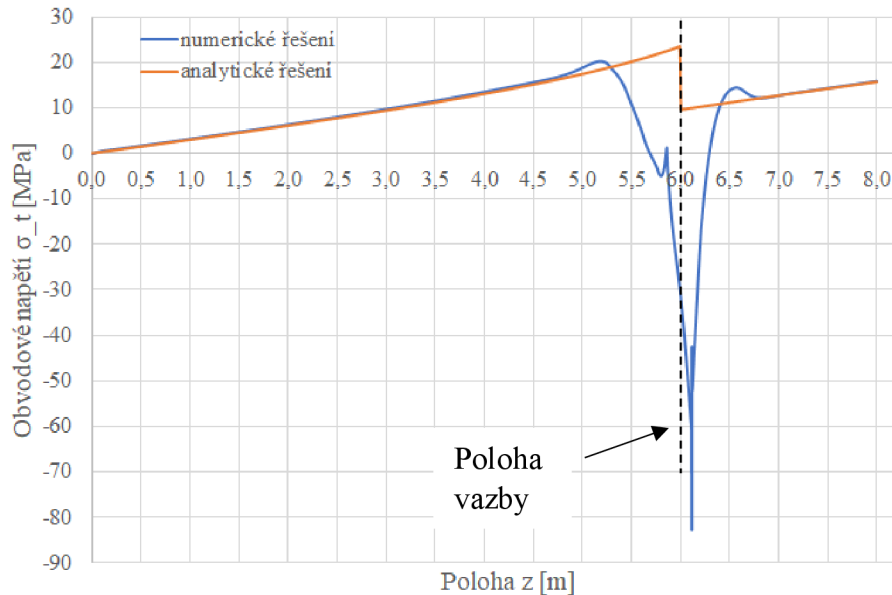
Obr. 22 – Normálové napětí numericky.

Meridiánové napětí (Obr. 23) v analytickém řešení má zlom v místě vazby, jeho maximální hodnota $\sigma_{m,analyticky} = 15,7 \text{ MPa}$ nastává v nejnižším místě skořepiny $z = 8 \text{ m}$. Pro numerické řešení je uvažována vlastní tíha, hodnota pro $z = 8 \text{ m}$ pak je $\sigma_{m,numericky} = 15,8 \text{ MPa}$, což je rozdíl 0,85 %. Obecně se tedy dá říct, že vlastní tíha nemá na správnost výsledků zásadní vliv a lze ji zanedbat. Dále platí, že analytické hodnoty se v dostatečné vzdálenosti od vazby liší od numerických maximálně do 5 %, a jsou proto přesné. Vzdálenost ovlivnění vazbou je pro tento případ od $z = 5 \text{ m}$ do $z = 7 \text{ m}$, v úhlech podle upravené rovnice (25) jsou to $\alpha = 104,5^\circ$ až $\alpha = 138,6^\circ$. Konzervativně řečeno ovlivňuje vazba napětí v okolí 20° od svého umístění $\alpha_0 = 120^\circ$. Hodnoty napětí v místě vazby se střídají v tlaku, resp. tahu a dosahují hodnot asi 100 MPa , od analytického řešení je zde rozdíl ve stovkách procent. V místě vazby $z = 6 \text{ m}$ dochází v analytickém řešení k nespojitosti, která je způsobená vazbovou reakcí.



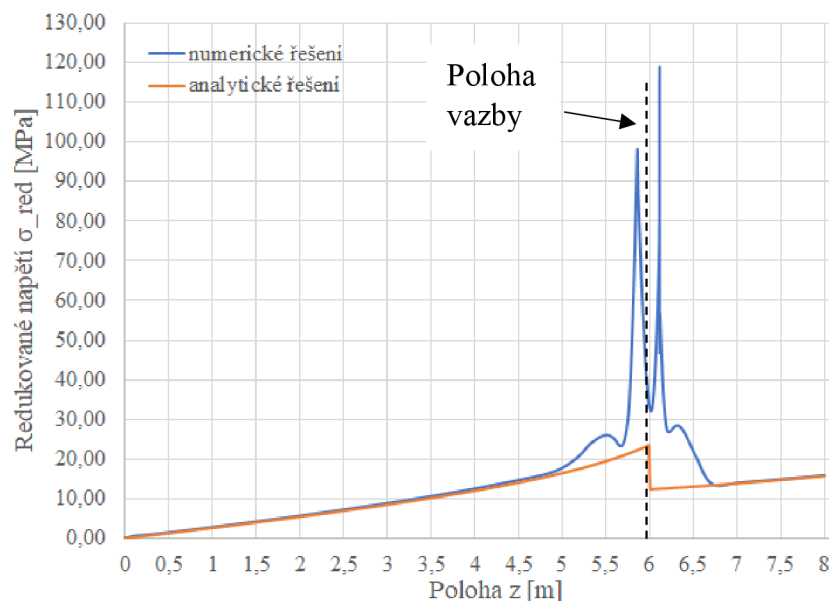
Obr. 23 – Meridiánové napětí numericky a analyticky.

Pro obvodové napětí na Obr. 24 platí obdobné poznatky jako u meridiánového napětí. Vlastní tíha je zanedbatelná a membránová teorie platí v dostatečné vzdálenosti od vazby. Maximální hodnota analytického řešení je $\sigma_{t,analyticky} = 23,5 \text{ MPa}$. Pro numerické výsledky převládá tlakové napětí s maximální absolutní hodnotou $\sigma_{t,numericky} = 82,5 \text{ MPa}$. Z průběhů napětí je jasné, že redukované napětí bude v místě vazby ve skutečnosti mnohem vyšší, než bylo vypočteno analyticky, a reálná bezpečnost tedy bude menší.



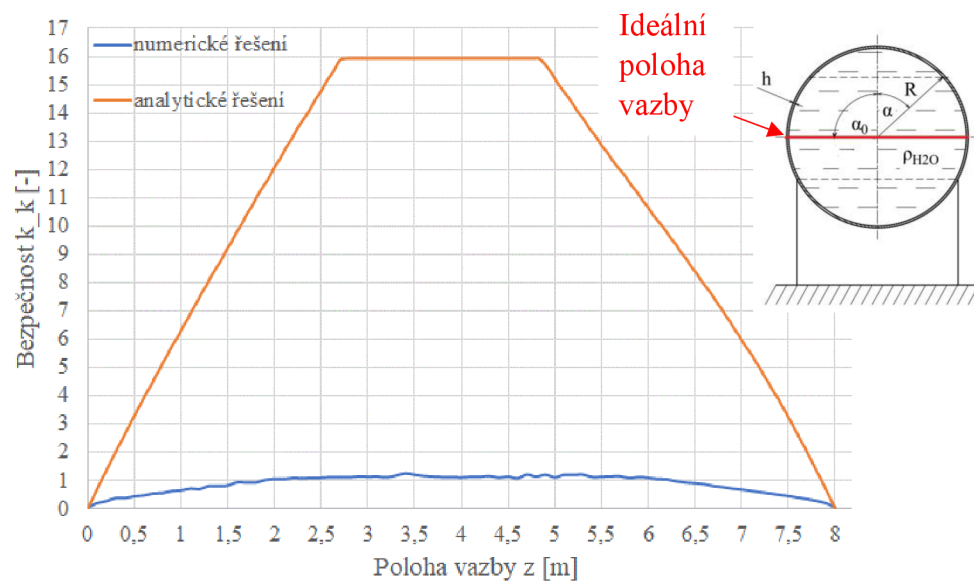
Obr. 24 – Obvodové napětí numericky a analyticky.

Redukované napětí je jak v analytickém, tak i v numerickém přístupu vypočteno pomocí teorie HMM – vztah (15). Jeho hodnota, stejně jako u ostatních napětí, je brána jako průměr hodnot na vnitřním a vnějším povrchu. Maxima uvažovaná u bezpečnosti se proto budou lišit, aby byla vypočtena skutečně nejmenší hodnota. Maximum je v analytickém řešení ve vazbě a jeho hodnota $\sigma_{red,analyticky} = 23,5 \text{ MPa}$, pro numerické řešení jsou polohy maxim stejné jako u meridiánového a obvodového napětí. Maximální hodnota $\sigma_{red,numericky} = 118,8 \text{ MPa}$. Porovnání výsledků je patrné na Obr. 25.



Obr. 25 – Redukované napětí numericky a analyticky.

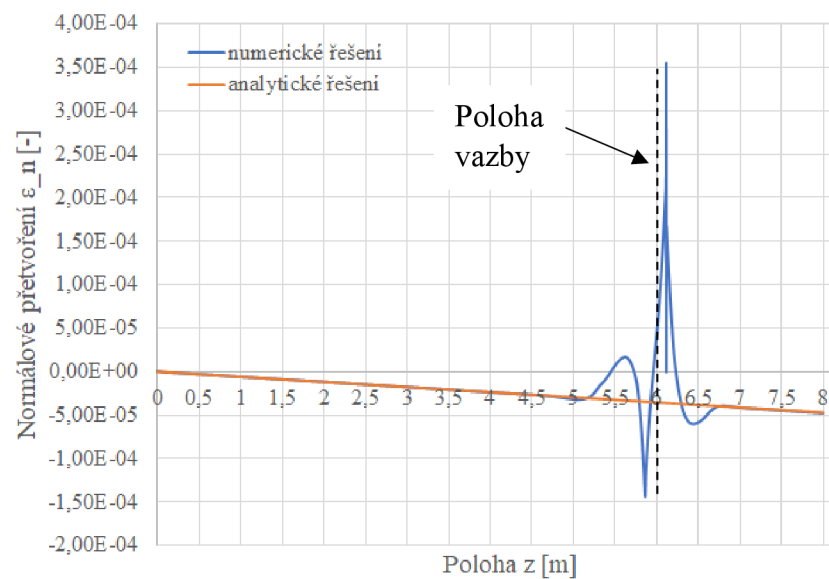
Bezpečnost vůči mezi kluzu v závislosti na poloze vazby kulové skořepiny na Obr. 26 je analyticky vypočtena pro hodnoty α od 0° do 180° , rozdělených po jednom stupni a následně převedených pomocí rovnice (25) na polohu z . Numericky je využito parametrizace úlohy, kdy z je odstupňováno hodnotou $0,1\text{ m}$, od 0 m až po 8 m . Program Ansys Workbench následně dopočte pro tyto hodnoty bezpečnost, či jiné zvolené hodnoty. Z Obr. 26 je vidět, že bezpečnost analytického řešení vychází mnohonásobně vyšší, než je tomu ve skutečnosti při použití numerického výpočtu. Nesprávné použití membránové teorie v místě její poruchy tedy vede k vysokému nadhodnocení bezpečnosti, což je velice nebezpečné. Tomuto je nutné se vyvarovat správným návrhem a správným posouzením úlohy. Pro analytické řešení vychází maximální hodnota bezpečnosti vůči meznímu stavu pružnosti (zkráceně MSP) $k_{k,analyticky} = 15,9277$, a to pro oblast $z = 2,7639\text{ m}$ až po $z = 4,8316\text{ m}$, což podle upraveného vztahu (25) odpovídá úhlům $\alpha = 72^\circ$ až $\alpha = 102^\circ$. V této oblasti není analytická bezpečnost ovlivněna pozicí vazby, jelikož špička napětí způsobená vazbou není maximální špičkou redukovaného napětí. Konzervativní hodnoty nejvhodnějšího umístění vazby podle analytického přístupu jsou tedy pro $\alpha \in \langle 70^\circ, 100^\circ \rangle$. Tyto úhly jsou asymetrické vůči $\alpha = 90^\circ$, což je způsobeno charakterem zatížení skořepiny, kdy nejmenší hodnoty napětí jsou pro $z \rightarrow 0$. Pro numerické řešení je maximální hodnota bezpečnosti $k_{k,numericky} = 1,2596$ pro $z = 3,4\text{ m}$, tedy $\alpha = 81,4^\circ$. Rozložení bezpečnosti je v tomto případě téměř symetrické okolo hodnoty $z = 4\text{ m}$. Nejvyšší hodnoty bezpečnosti (hodnoty bezpečnosti vyšší než 1) se vyskytují v oblasti $z \in \langle 2\text{ m}, 6\text{ m} \rangle$, neboli $\alpha \in \langle 60^\circ, 120^\circ \rangle$, a poté rychle klesají k téměř nulovým hodnotám na pólech koule. Srovnáním analytických a numerických výsledků lze usoudit, že nejvhodnější místo pro umístění vazby je v bezprostřední blízkosti $\alpha = 90^\circ$ ($z = 4\text{ m}$). Na Obr. 17 je patrné, že vodojem v Ohrazenicích tuto podmínku splňuje.



Obr. 26 – Bezpečnost v závislosti na poloze vazby numericky a analyticky.

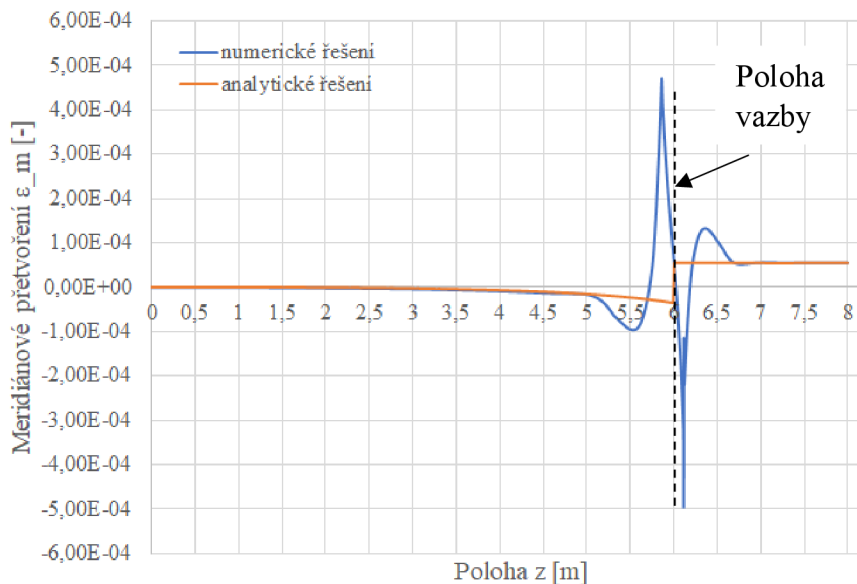
Normálové přetvoření je analyticky vypočteno ze zobecněného Hookova zákona podle vztahu (5). Jeho průběh na Obr. 27 je klesající (záporné hodnoty znamenají zužování) s maximální absolutní hodnotou v nejnižším místě skořepiny $\varepsilon_{n,analyticky} = 0,000047 \approx 0,0047 \%$.

Numericky se výsledky opět zásadně liší pouze v okolí vazby, kde jsou velké rozdíly v napětí, a tedy i v přetvoření. Rozdíly mimo vazbu jsou maximálně do 5 %, neboli přesné. Maximální hodnota $\varepsilon_{n,numericky} = 0,000352 \approx 0,0352 \%$. Lineární pružnost uvažuje maximální velikost přetvoření $\varepsilon = 0,05 \approx 5 \%$, z toho hlediska, ale i z hlediska materiálu (ocel), který je lineárně pružný, je možno označit úlohu za lineární.



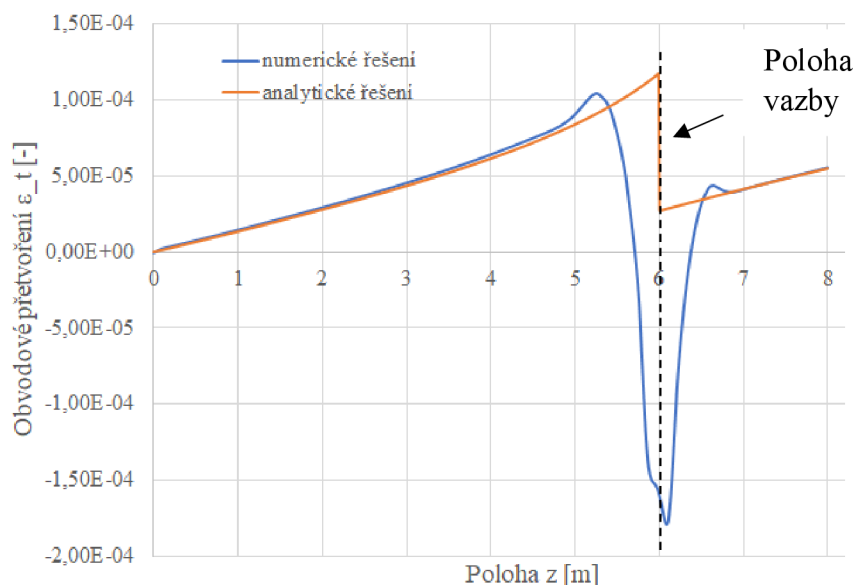
Obr. 27 – Normálové přetvoření numericky a analyticky.

Meridiánové přetvoření dosahuje analyticky maxima pro $z = 8 \text{ m}$, a to $\varepsilon_{m,analyticky} = 0,000055 \approx 0,0055 \%$. Numericky je maximum $\varepsilon_{m,numericky} = 0,000494 \approx 0,0494 \%$. Tyto hodnoty opět splňují podmínky úlohy lineární pružnosti. Membránová teorie platí ve stejných oblastech jako bylo odvozeno výše u meridiánového napětí. Výsledky jsou na *Obr. 28*.



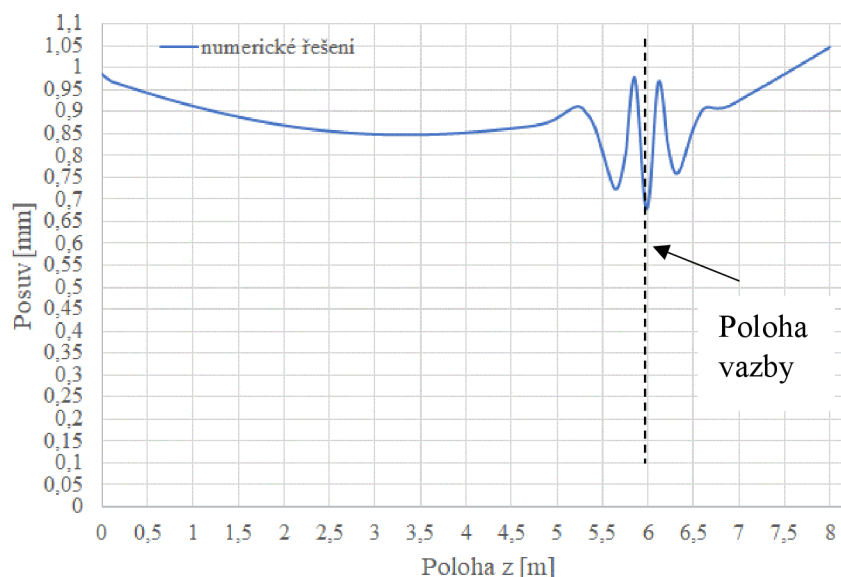
Obr. 28 – Meridiánové přetvoření numericky a analyticky.

Obvodové přetvoření (*Obr. 29*) má své analytické maximum v poloze $z = 6 \text{ m}$ – $\varepsilon_{t,analyticky} = 0,000117 \approx 0,0117 \%$. Hodnoty jsou v celé skořepině pouze kladné, nastává zde tedy roztahování. Numericky je v tomto místě velký propad do až oblasti kontrakce. Maximum se nachází v obvyklém místě s hodnotou $\varepsilon_{t,numericky} = 0,000179 \approx 0,0179 \%$. Opět platí stejné poznatky jako v předešlých případech, rozdíly ve vazbě jsou stovky procent.



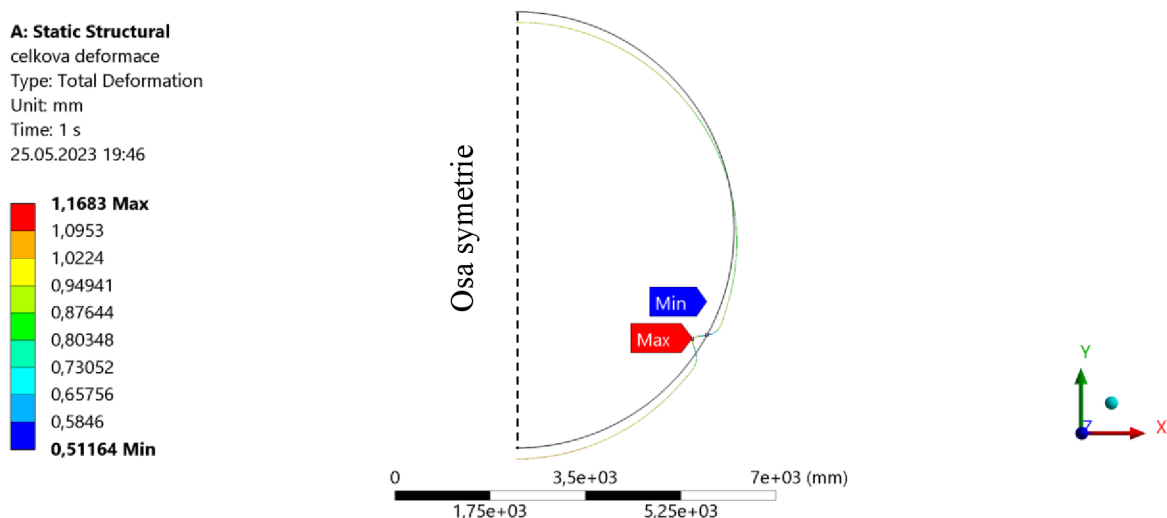
Obr. 29 – Obvodové přetvoření numericky a analyticky.

Celková deformace je vzhledem ke své složitosti řešena pouze numerickým modelem. Deformace skořepiny probíhá ve směru gravitačního zrychlení (záporný směr osy y). Na Obr. 30 je vidět průběh hodnot deformace zprůměrovaných z vnitřního a vnějšího povrchu skořepiny. Nejvyšší hodnota je na spodním pólu kulové skořepiny a je to $\delta_{celková} = 1,047 \text{ mm}$. Deformace se proto dá označit jako malá z hlediska vlivu na změnu geometrie skořepiny, což potvrzuje lineárnost úlohy. Hodnotou posuvu je zde myšleno posunutí zdeformovaného stavu od původního nezdeformovaného stavu.



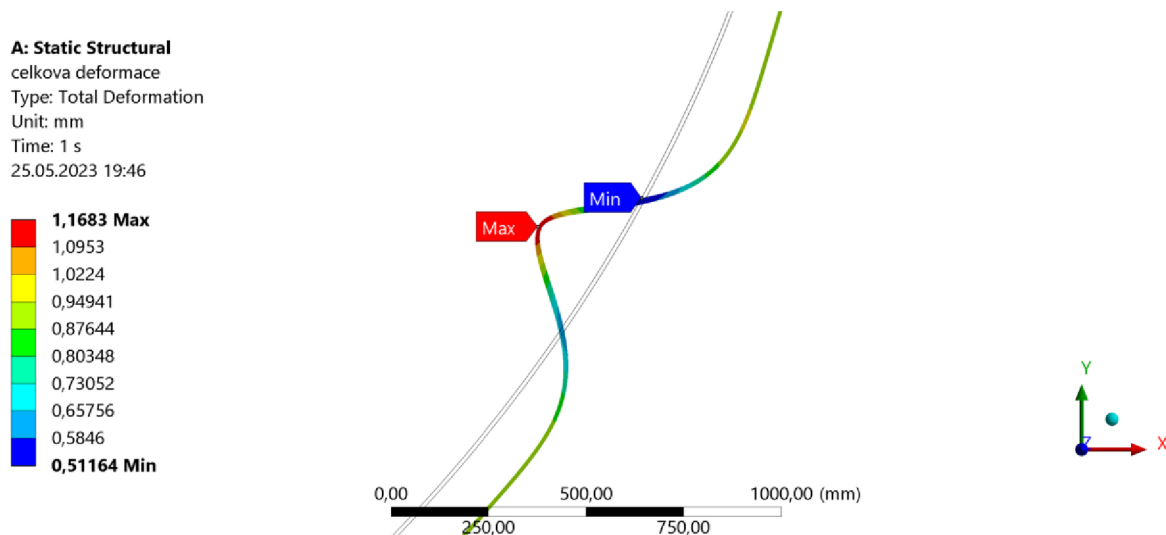
Obr. 30 – Celková deformace numericky.

Na Obr. 31 je vidět skořepina v nezdeformovaném (černá) a zdeformovaném (barevná) stavu, je vhodné si povšimnout že absolutní maxima, stejně jako u redukovaného napětí, jsou jiná oproti těm v Obr. 30. Toto je způsobeno výše zmíněným průměrováním dat v grafech. Skutečná maximální deformace tedy nastává v místě vazby a je rovna $\delta_{celková} = 1,1683 \text{ mm}$. Deformovaný tvar na Obr. 31 není ve skutečném měřítku, aby byly dobře viditelné rozdíly.



Obr. 31 – Celková deformace.

Detail deformace způsobené vazbou je na Obr. 32, měřítko je pro přehlednost 190krát větší. Styk mezi skořepinou a prstencovitou vazbou je modelován jako křivka (bod na vnější meridiánové křivce). Pro komplexnější analýzu by bylo možno vytvořit skutečný model šesti betonových sloupů a zkoumat jejich styčnou plochu. Takto detailní analýza však není předmětem této práce a k porovnání výsledků analytického a numerického modelu stačí uvažovat nejnebezpečnější případ, což bylo provedeno.



Obr. 32 – Detail deformace v místě vazby.

3.2 Toroidní vodojem Ciechanów

V polském městě Ciechanów (Obr. 33) se nachází unikátní vodojem tvaru toroidu. Tato sama o sobě neobvyklá stavba je připevněna k prutové základové konstrukci, která je stylizována jako hyperboloid. Celý vodojem je ocelový. V roce 2017 došlo k revitalizaci budovy po jejím rychlém proslavení v předcházejících letech 2013 a 2014 [21].



Obr. 33 – Vodojem v městě Ciechanów [22].

Údaje potřebné k analýze jsou tyto [21]:

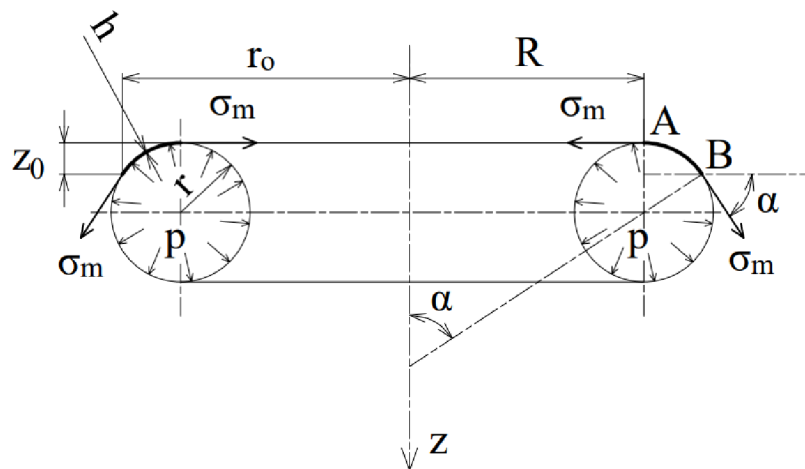
1. Poloměr trubice toroidu $r = 3 \text{ m}$.
2. Tloušťka stěny toroidu $h = 0,1 \text{ m}$.
3. Vzdálenost středu trubice od středu toroidu $R = 8,75 \text{ m}$.

4. Uvažované materiálové charakteristiky oceli – Mez kluzu $\sigma_k = 250 \text{ MPa}$, Youngův modul pružnosti $E = 200 \text{ GPa}$, Poissonův poměr $\mu = 0,3$.
5. Uvažovaný vnitřní tlak $p = 0,5 \text{ MPa}$.
6. Hustota vody $\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Tato úloha bude řešena pro dva případy zatížení. Prvním případem je zatížení vnitřním tlakem o velikosti $p = 0,5 \text{ MPa}$, kdy vzhledem ke složitosti bude analytické řešení provedeno bez uvažování vazby a vlastní tíhy. Analýza jejich vlivu na řešení bude provedena numericky v programu Ansys a výsledky budou následně porovnány graficky. V druhém případě bude vnitřní tlak nahrazen tlakem hydrostatickým (jako u reálného vodojemu) a analýza se provede znovu, v tomto případě však pouze numericky.

3.2.1 Toroid zatížený vnitřním tlakem

Analyticky je provedeno řešení modelové úlohy podle Obr. 34. Jedná se o toroidní skořepinu zatíženou vnitřním tlakem p , u které je proveden obecný řez AB pod úhlem α . Bod A se nachází ve vzdálenosti středu trubice od středu toroidu, označené R . Bod B je pak v obecné vzdálenosti r_o , vyjádřené vztahem. Po tloušťce stěny skořepiny h vzniká meridiánové napětí σ_m . Poloměr trubice je r . Výška řezu AB z_0 je zavedena pro přepočítání obecné polohy vazby, zadané při numerickém řešení v programu Ansys pomocí vzdálenosti z_0 , na úhel α . Pro řešení bude opět využito silové rovnováhy v ose z a Laplaceovy rovnice.



Obr. 34 – Model toroidní skořepiny pro analytické řešení.

Geometrické vztahy potřebné pro řešení jsou tyto:

$$r_o = R + r \sin(\alpha) \quad (38)$$

$$z_0 = r(1 - \cos(\alpha)) \quad (39)$$

$$r_t = \frac{r_o}{\sin(\alpha)}, r_m = r \quad (40)$$

Pro rovnováhu v ose z platí rovnice (41), kde první člen vyjadřuje průmět meridiánového napětí σ_m , působícího po tloušťce h v bodě B, do osy z a druhý člen vyjadřuje tlak na promítnutou plochu řezu AB:

$$\sigma_m 2\pi r_o h \sin(\alpha) - p\pi(r_o^2 - R^2) = 0 \quad (41)$$

Po úpravě silové rovnováhy (41) a využitím vztahu (38) lze psát rovnici obecného meridiánového napětí (42) v závislosti na úhlu α , což je z hlediska analýzy nejjednodušší podoba. Úhel α nabývá hodnot $\langle 0^\circ, 360^\circ \rangle$.

$$\sigma_m = \frac{pr(2R + r \sin(\alpha))}{2h(R + r \sin(\alpha))} \quad (42)$$

Pro výpočet obvodového napětí σ_t se využije Laplaceovy rovnice (11), kde $p_n = p$ a poloměry křivosti odpovídají (40). Úpravou se získá jednoduchý konstantní tvar:

$$\sigma_t = \frac{pr}{2h} \quad (43)$$

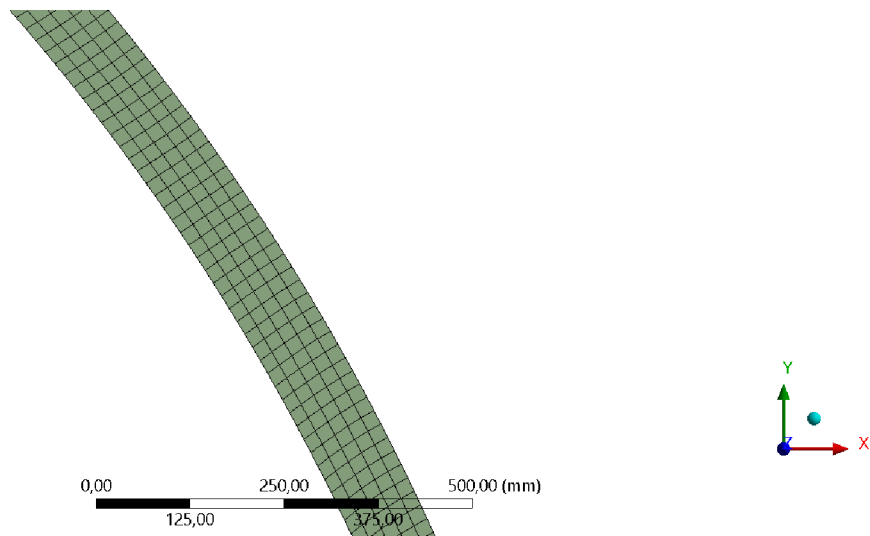
Díky takto získaným napětím už lze snadno dopočítat redukované napětí dle vztahu (37) a dále bezpečnost vůči mezi kluzu podle rovnice (16). Přetvoření jsou opět spočítány dle

(3), (4) a (5).

Celá úloha je naprogramována v programu Matlab, kde lze jednoduše měnit geometrické rozměry, materiálové vlastnosti a velikost tlakového zatížení skřepiny a zkoumat jejich vliv.

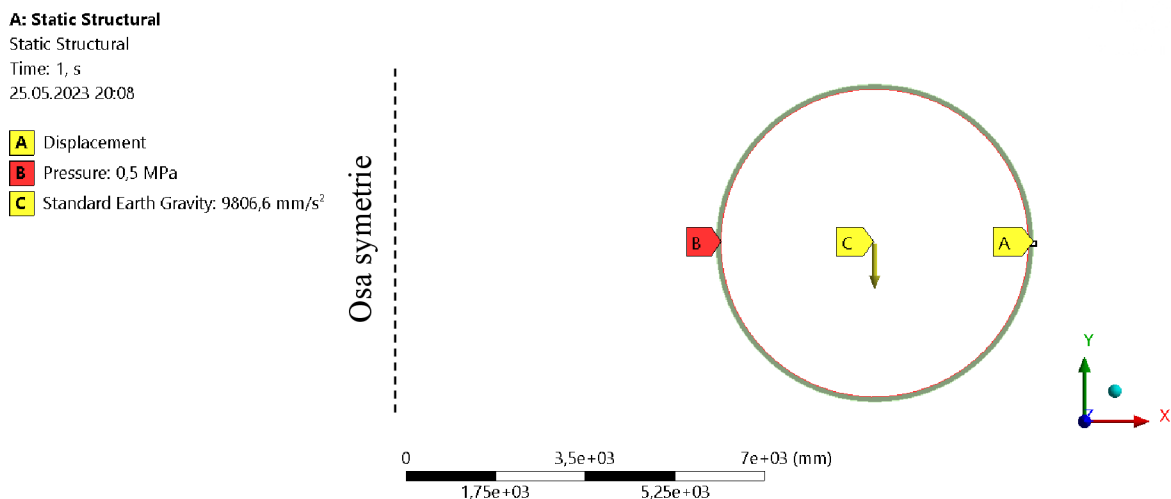
Numericky je úloha řešena podobně jako v případě kulové skořepiny. Jedná se o 2D axisymetrickou analýzu v programu Ansys Workbench pomocí MKP. Celý model je parametrizován a lze tak měnit základní rozměry skořepiny, vlastnosti materiálu a polohu vazby typu prstence na vnějším povrchu trubice toroidu. Poloha vazby z se musí měnit ve dvou rozmezích pro $\langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$ a $\langle 180^\circ, 360^\circ \rangle$, kdy parametr z v obou případech nabývá hodnot $\langle 0, 2r \rangle$ (hodnoty 0 nabývá parametr z na horním vrcholu trubice a hodnoty $2r$ na spodním vrcholu, jak je zakótováno na Obr. 34 pro z_0). Při parametrické analýze vlivu vazby je pak nutné mít vazbu (v programu Ansys Workbench se jedná o „displacement“) nastavenou na správném bodě geometrie, jehož pozice bude měněna pomocí parametru z , aby se skutečně jednalo o pohyb vazby, a nikoliv pouze geometrického bodu, což by na výsledky nemělo vliv. Na základě vložených údajů je následně vypočítáno redukované napětí a bezpečnost vůči mezi kluzu. V poloze vazby z způsobuje od teoretických hodnot $\langle 0, 2r \rangle$ reálná tloušťka h odchylku, což je nutné mít na paměti a v případě vyšších tloušťek zavést korekci, jak bylo řečeno u úlohy s kulovou skořepinou. Pro správné zobrazení jednotlivých napětí je zapotřebí vytvořit a používat válcový SS, jehož střed je shodný se středem trubice toroidu.

Kvalitní síť bylo dosaženo stejným postupem jako v předešlé úloze s kulovou skořepinou. Pro geometrické rozměry toroidní skořepiny byla zvolena vhodná velikost prvku 20 mm a v místě vazby byla vytvořena jemnější síť o velikosti prvku 5 mm. Minimální počet prvků přes tloušťku toroidní skořepiny je 5, což je dostatečně vysoké číslo. Kvalita sítě je viditelná na Obr. 35.



Obr. 35 – Kvalita sítě toroidní skořepiny.

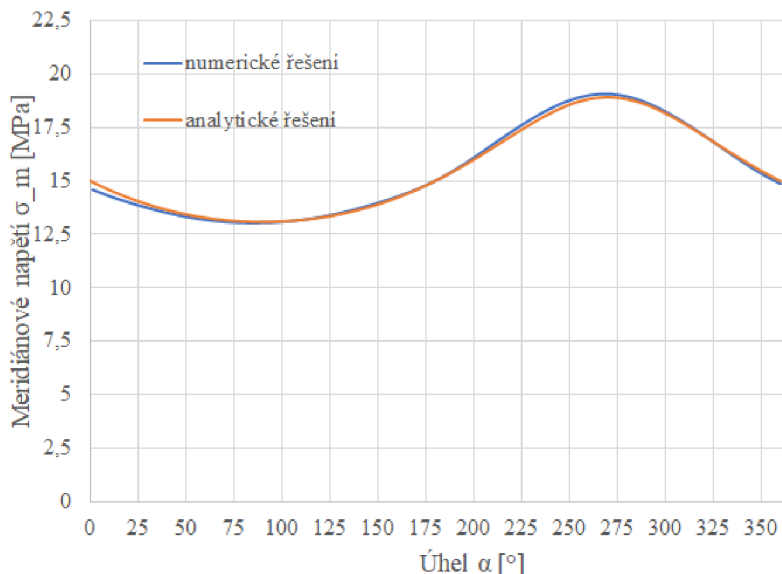
Následně byly vytvořeny okrajové podmínky – vazby a zatížení. Z hlediska zatížení je uvažován vnitřní tlak $p = 0,5 \text{ MPa}$, oproti analytickému přístupu je pak zavedena i vlastní tíha toroidu a vazba (zamezení pohybu v ose y) s výchozí polohou $z = r = 3 \text{ m}$ ($\alpha = 90^\circ$), která je použita pro celou analýzu. OP jsou patrné na Obr. 36.



Obr. 36 – Okrajové podmínky pro toroidní skořepinu.

Porovnání výsledků obou přístupů k řešení toroidní skořepiny je provedeno graficky. Numericky jsou hodnoty napětí opět průměrem vnitřního a vnějšího povrchu toroidu.

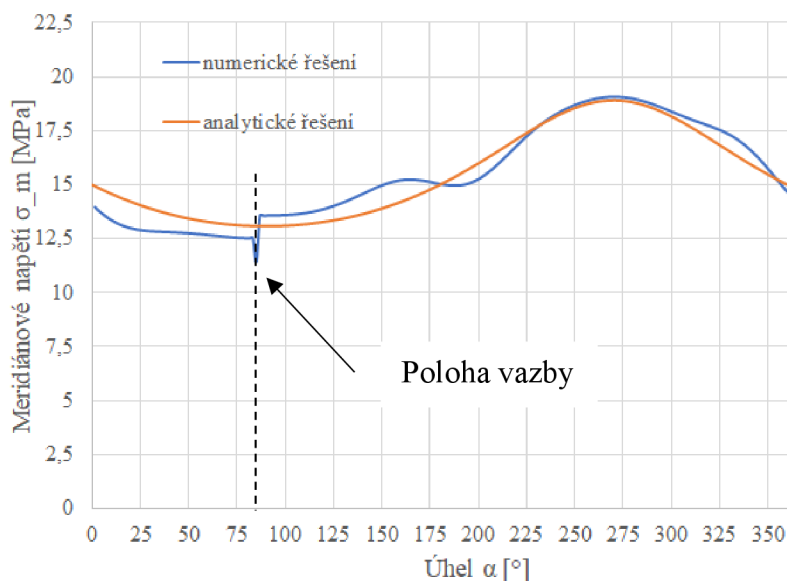
Meridiánové napětí je pro případ bez uvažování vlastní tíhy toroidu (Obr. 37) téměř totožné analyticky i numericky (odchylka nepřekračuje hodnotu 5 %). Tímto je ověřena správnost analytického modelu a membránová teorie je platná.



Obr. 37 – Meridiánové napětí toroidu bez vlastní tíhy numericky a analyticky.

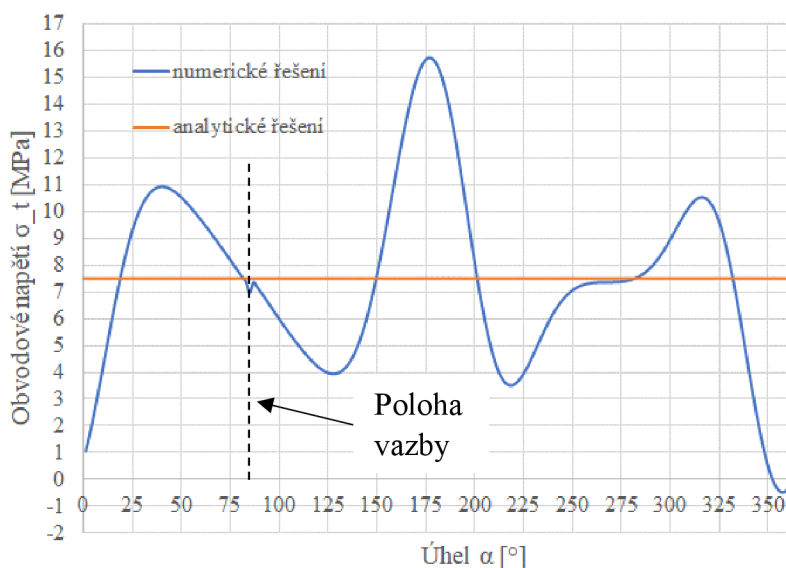
Na Obr. 38 je vidět meridiánové napětí při uvažování vlastní tíhy v numerickém řešení, výsledky se nyní zásadně liší, což ukazuje, že v tomto případě není možno vlastní tíhu skořepiny zanedbat, což je způsobeno jejími geometrickými rozměry, zejména pak tloušťkou skořepiny, která je desetinásobně vyšší, než tomu bylo u kulové skořepiny. Maximální odchylka je v místě vazby ($\alpha = 90^\circ$) a její hodnota je 14,2 %. Membránová teorie již tedy není platná.

Všechny následující grafy již budou uvažovat vlastní tíhu skořepiny. Maximální hodnoty meridiánového napětí se nachází v $\alpha = 270^\circ$ a jsou to $\sigma_{m,analytický} = 18,9 \text{ MPa}$ a $\sigma_{m,numerický} = 19,1 \text{ MPa}$. Vliv vazby však není v porovnání s kulovou skořepinou příliš výrazný na průběh napětí a převládá vliv vlastní tíhy.



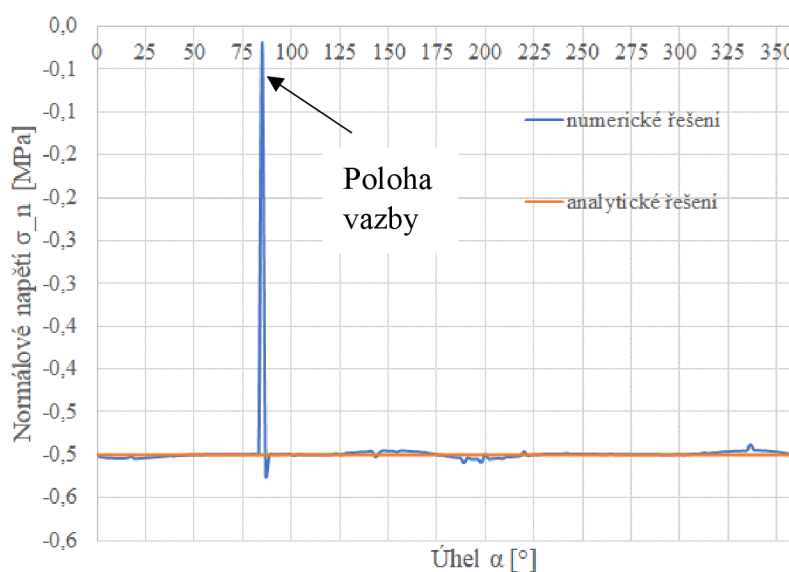
Obr. 38 – Meridiánové napětí toroidu s vlastní tíhou numericky a analyticky.

U *obvodového napětí* na Obr. 39 jsou rozdíly mnohem výraznější. Oproti konstantní analytické hodnotě $\sigma_{t,analyticky} = 7,5 \text{ MPa}$ je maximum numerického přístupu v $\alpha = 180^\circ$ $\sigma_{t,numericky} = 15,7 \text{ MPa}$. Vliv vazby v $\alpha = 90^\circ$ je téměř nepatrný a zásadně převládá vliv vlastní tíhy skořepiny, který určitě není možno zanedbat.



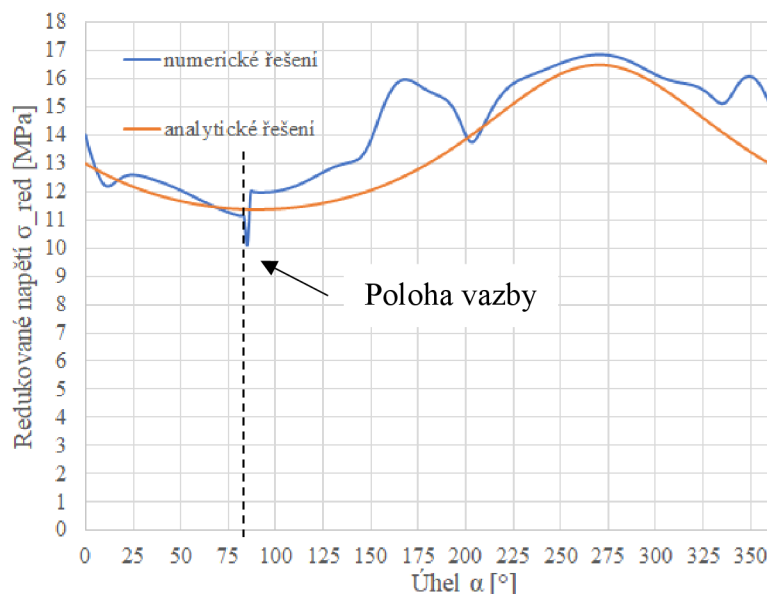
Obr. 39 – *Obvodové napětí toroidu s vlastní tíhou numericky a analyticky.*

Normálové napětí (Obr. 40) je možno u analytického řešení uvažovat $\sigma_{n,analyticky} = -0,5 \text{ MPa}$, což je malá hodnota a nedojde tak k porušení membránové teorie. Numericky dojde k největšímu rozdílu v místě vazby ($\alpha = 90^\circ$), tento rozdíl však z hlediska velikosti není příliš velký (asi $0,5 \text{ MPa}$), a proto se v místě vazby nijak zásadně nemění průběh u ostatních napětí.



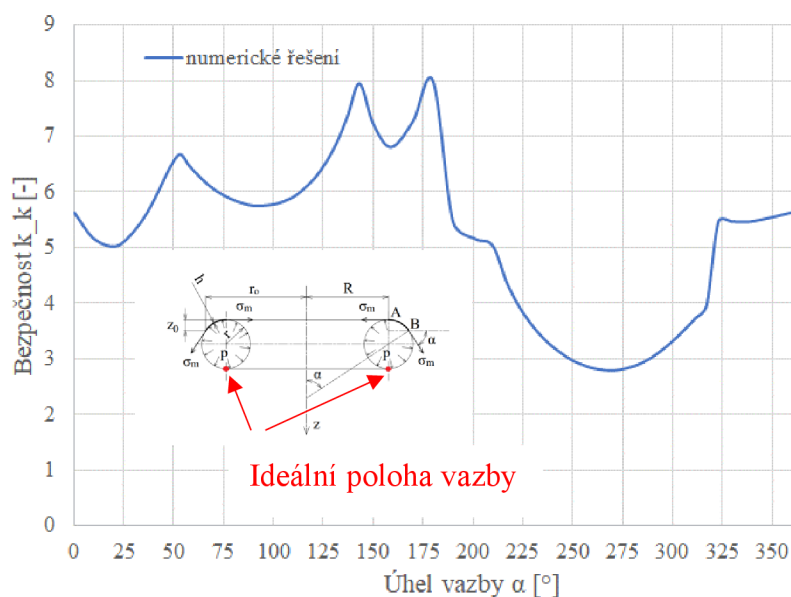
Obr. 40 – *Normálové napětí toroidu s vlastní tíhou numericky a analyticky.*

Redukované napětí (Obr. 41) se analyticky i numericky počítá dle teorie HMM. Maximum se nachází v $\alpha = 270^\circ$, hodnotami $\sigma_{red,analyticky} = 16,5 \text{ MPa}$ a $\sigma_{red,numericky} = 16,9 \text{ MPa}$.



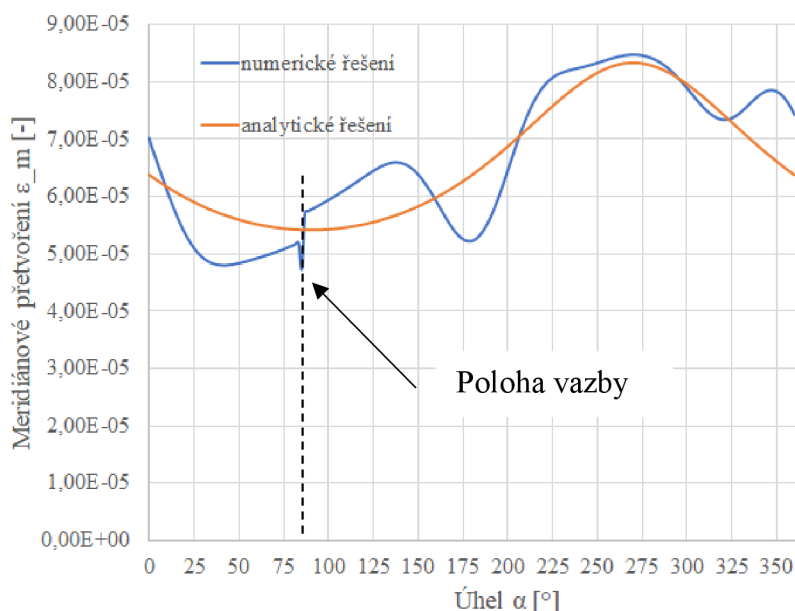
Obr. 41 – Redukované napětí toroidu s vlastní tíhou numericky a analyticky.

Bezpečnost vůči mezi kluzu v závislosti na poloze vazby je na Obr. 42. Hodnota bezpečnosti je pro všechny polohy vazby vyšší než 1. Obecně vychází vyšší hodnoty pro vnější stranu trubice ($\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$) a nižší hodnoty pro vnitřní stranu ($\alpha \in (180^\circ, 360^\circ)$). Maximální bezpečnost vychází $k_{k,numericky,max} = 8,02$ pro $\alpha = 180^\circ$. Minimální hodnota bezpečnosti je pak $k_{k,numericky,min} = 2,79$ pro $\alpha = 270^\circ$. Hodnoty bezpečnosti nelze počítat přímo z redukovaného napětí na Obr. 41, jelikož se zde jedná o průměrované hodnoty, a nikoliv o maximální hodnotu. Ideální oblast umístění vazby je pak $\alpha \in (140^\circ, 180^\circ)$. Pro analytický přístup nelze tento graf vykreslit, jelikož nebyla v analytickém modelu uvažována vazba. Z Obr. 33 jde vidět, že skutečná vazba toroidního vodojemu ve městě Ciechanów se nachází zhruba v místě $\alpha = 180^\circ$, výsledky analýzy tedy souhlasí s realitou.



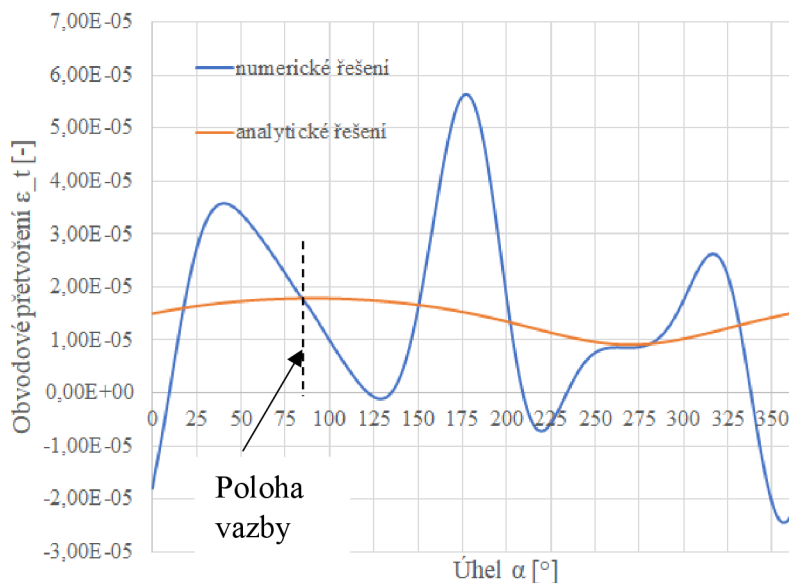
Obr. 42 – Bezpečnost vůči mezi kluzu v závislosti na poloze vazby toroidní skořepiny s vlastní tíhou numericky.

Meridiánové přetvoření (Obr. 43) taktéž potvrzuje, že vlastní tíhu nelze zanedbat a membránová teorie je neplatná. Z hlediska hodnot jsou maximální hodnoty pro $\alpha = 270^\circ$ $\varepsilon_{m,analyticky} = 0,0000833 \approx 0,00833 \%$ a $\varepsilon_{m,numericky} = 0,0000847 \approx 0,00847 \%$.



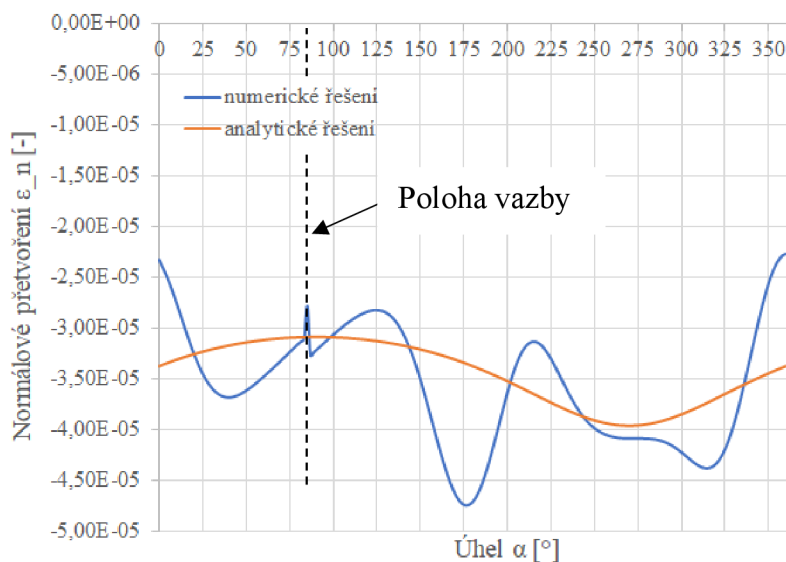
Obr. 43 – Meridiánové přetvoření toroidu s vlastní tíhou numericky a analyticky.

U obvodového přetvoření (Obr. 44) stejně jako obvodového napětí jsou vyšší rozdíly mezi hodnotami obou přístupů, než je tomu u meridiánového přetvoření, resp. napětí. Maximální přetvoření je $\varepsilon_{t,analyticky} = 0,0000179 \approx 0,00179 \%$ v $\alpha = 90^\circ$ a $\varepsilon_{t,numericky} = 0,0000563 \approx 0,00563 \%$ v $\alpha = 270^\circ$.



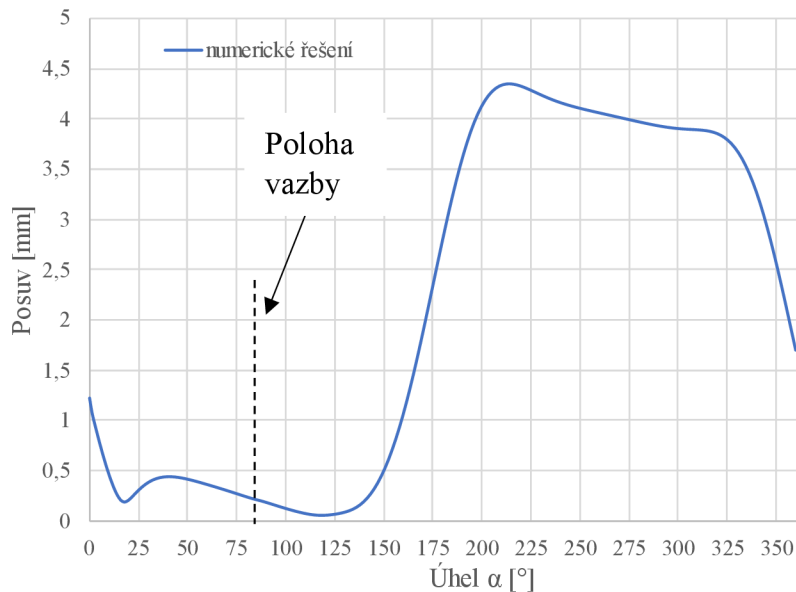
Obr. 44 – Obvodové přetvoření toroidu s vlastní tíhou numericky a analyticky.

Normálové přetvoření je na Obr. 45. Maximální hodnoty jsou v absolutní hodnotě pro $\varepsilon_{n,analyticky} = 0,0000396 \approx 0,00396 \%$ v $\alpha = 270^\circ$ a $\varepsilon_{n,numericky} = 0,0000475 \approx 0,00475\%$. Hodnoty všech přetvoření jsou menší než $\varepsilon = 0,05 \approx 5 \%$, úlohu lze označit za lineární.



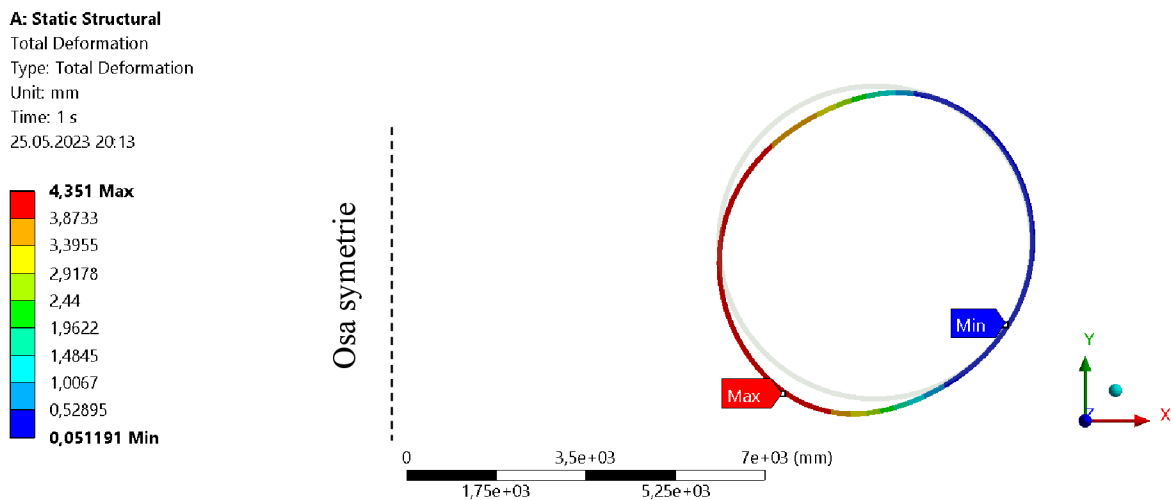
Obr. 45 – Normálové přetvoření toroidu s vlastní tíhou numericky a analyticky.

Celková deformace je kvůli složitosti vykreslena pouze numericky na Obr. 46. Hodnoty deformace jsou opět průměrovány z vnitřního a vnějšího povrchu trubice toroidu. Vyšší hodnoty deformace se nachází v oblasti pro $\alpha > 180^\circ$. Maximální deformace $\delta_{celková} = 4,35 \text{ mm}$ pro $\alpha = 210^\circ$. Posuvem je zde myšlena vzdálenost posunutí zdeformovaného od nezdeformovaného stavu.



Obr. 46 – Celková deformace toroidu s vlastní tíhou.

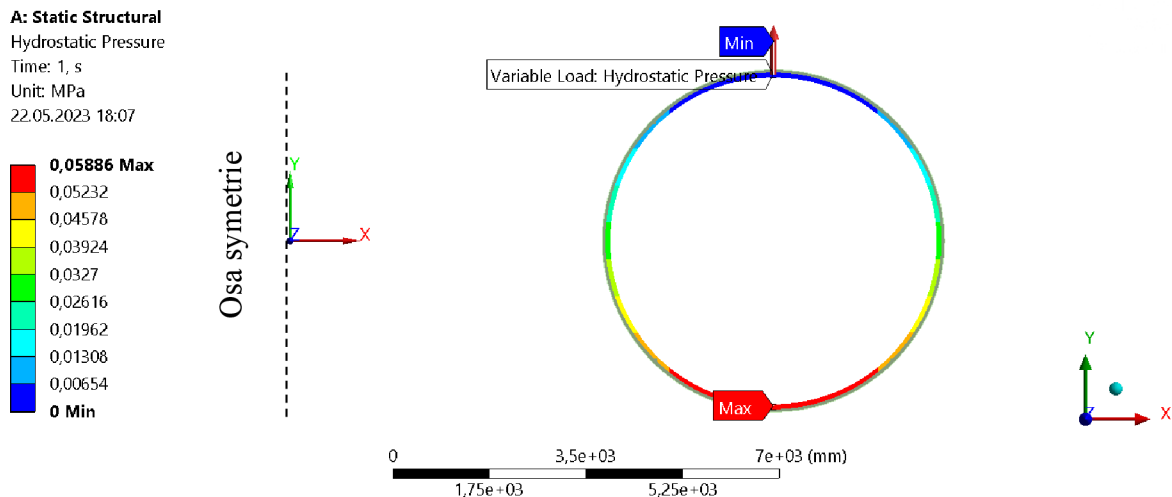
Zdeformovaný (barevná) a nezdeformovaný (bílá) stav toroidu je na Obr. 47. Deformace převládá na vnitřní straně toroidu. Maximální deformace $\delta_{celková} = 4,351 \text{ mm}$, se liší od Obr. 46, jelikož se jedná o absolutní maximum. Měřitko je 100krát zvětšeno kvůli dobré viditelnosti.



Obr. 47 – Zdeformovaný a nezdeformovaný stav toroidu.

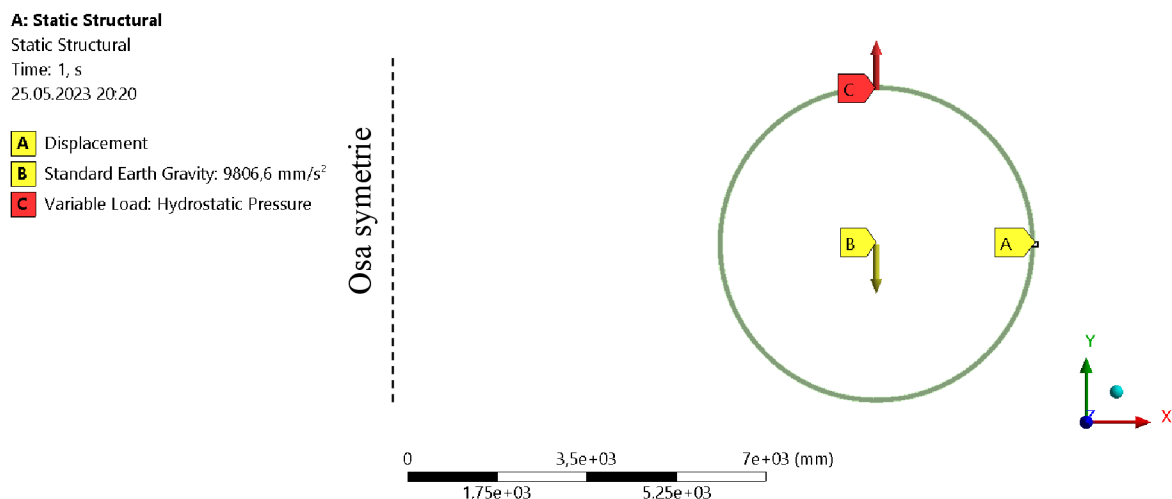
3.2.2 Toroid zatížený hydrostatickým tlakem

Aby byla posouzena také reálná úloha vodojemu, je nutné nahradit vnitřní tlak tlakem hydrostatickým od kapaliny (vody) v celém objemu trubice toroidu. Rozložení hydrostatického tlaku je na Obr. 48, jeho maximální hodnota $p = 0,05886 \text{ MPa}$ je v nejnižším bodě trubice.



Obr. 48 – Hydrostatický tlak.

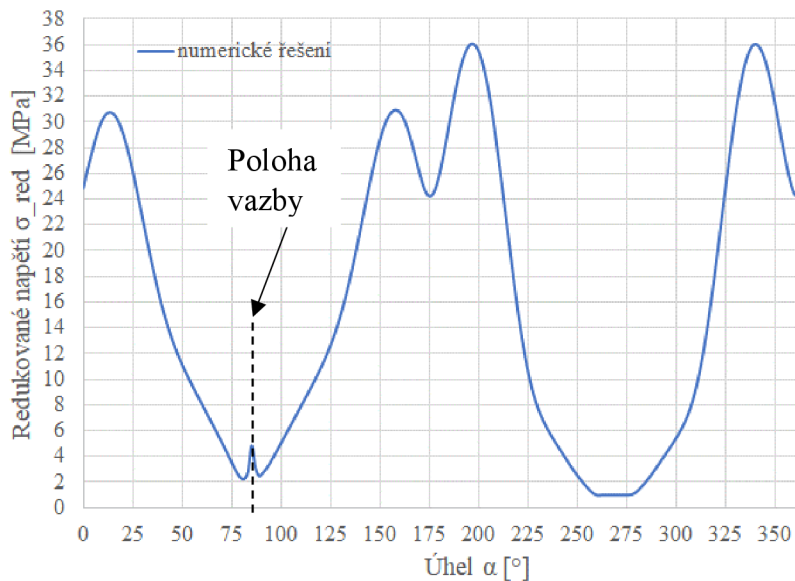
Tento případ bude analyzován pouze numericky, kdy v programu Ansys Workbench zůstanou zachována všechna nastavení předchozí analýzy toroidu, avšak dojde ke zmíněné změně OP. Nové OP jsou na Obr. 49.



Obr. 49 – Okrajové podmínky pro toroidní skořepinu s hydrostatickým tlakem.

Jelikož není uvažován analytický model, jsou nejdůležitějšími výstupy této úlohy redukované napětí dle teorie HMM, bezpečnost vůči mezi kluzu v závislosti na poloze vazby a deformace. Jejich grafy jsou vykresleny stejnými postupy jako v předešlých případech – hodnoty jsou průměrovány z vnitřního a vnějšího povrchu trubice toroidu.

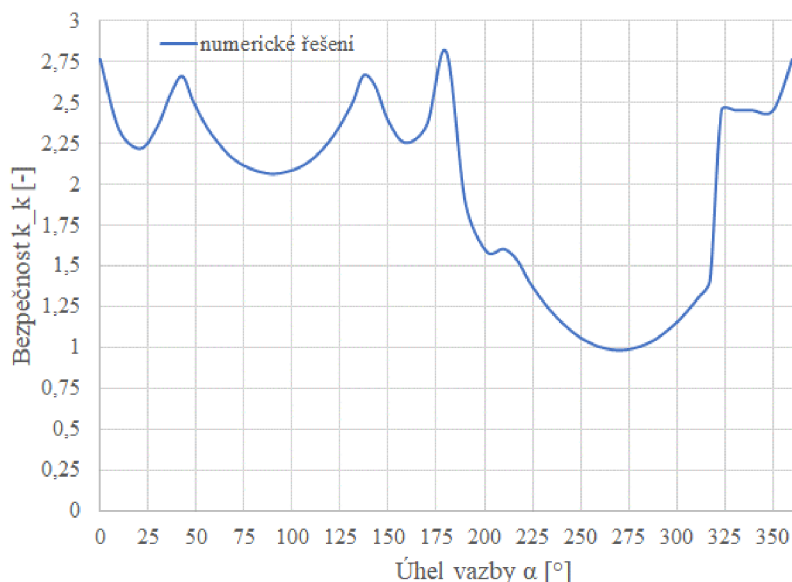
Redukované napětí pro toroid s hydrostatickým tlakem na Obr. 50 má svá minima pro $\alpha = 90^\circ$ a $\alpha = 270^\circ$. Maximální hodnota se nachází v $\alpha = 200^\circ$ a je to $\sigma_{red, numericky} = 36 \text{ MPa}$. Maximální hodnota vnitřního tlaku $p = 0,5 \text{ MPa}$ v první části úlohy s toroidní skořepinou je několiknásobně vyšší, než je maximální hodnota $p = 0,05886 \text{ MPa}$ tlaku hydrostatického. Maximální hodnota redukovaného napětí při zatížení hydrostatickým tlakem je přesto asi dvakrát vyšší než u vnitřního symetrického tlaku, což je způsobeno nerovnoměrným rozložením tlaku a vlastní tíhou kapaliny.



Obr. 50 – Redukované napětí toroidu s hydrostatickým tlakem a vlastní tíhou numericky.

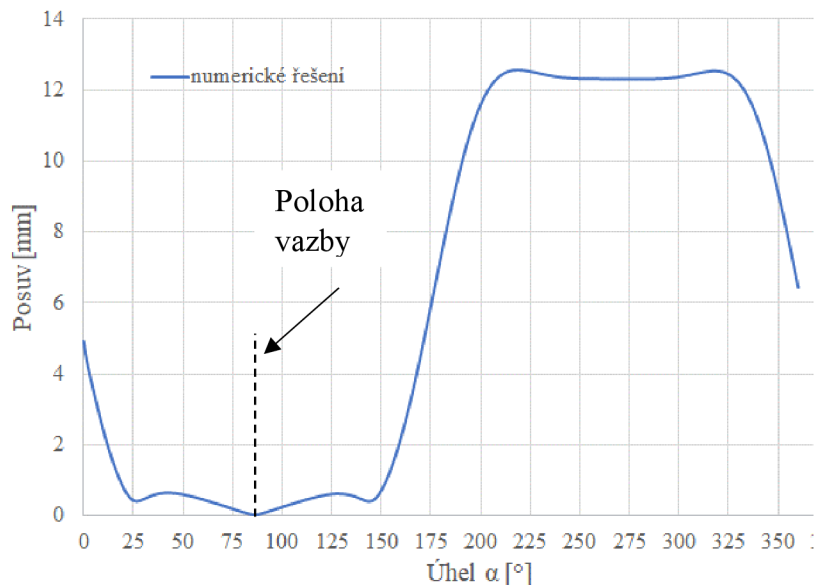
Pro bezpečnost vůči mezi kluzu v závislosti na poloze vazby toroidu s hydrostatickým tlakem je grafické zobrazení na Obr. 51. Vyšší hodnoty bezpečnosti jsou opět jako u vnitřního tlaku pro $\alpha \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$. Nejvyšší bezpečnost vychází pro $\alpha = 180^\circ$ $k_{k,numericky,max} = 2,8143$. Což je zásadně nižší hodnota než u zatížení vnitřním tlakem. Bezpečnost v $\alpha = 270^\circ$ dokonce klesne pod hodnotu 1 a je to $k_{k,numericky,min} = 0,985$.

Obecně tedy platí pro oba případy zatížení, že nejlepší oblast umístění vazby je na vnější straně povrchu ($\alpha \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$) a blízko hodnoty $\alpha = 180^\circ$.



Obr. 51 – Bezpečnost vůči mezi kluzu v závislosti na poloze vazby toroidní skořepiny s hydrostatickým tlakem numericky.

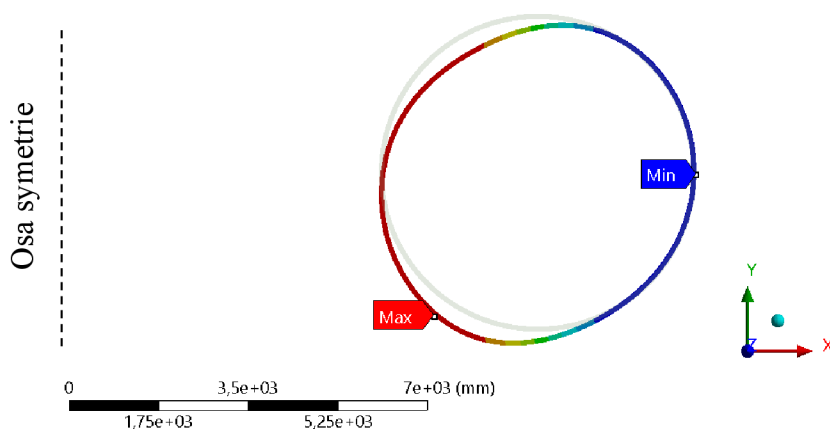
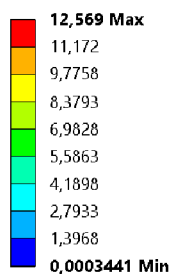
Celková deformace je pro hydrostatický tlak (Obr. 52) tvarem grafu podobná Obr. 46. Hodnoty deformace jsou však pro $\alpha > 180^\circ$ mnohem vyšší. Maximální deformace je $\delta_{celková} = 12,565 \text{ mm}$ pro $\alpha = 220^\circ$. Toto je způsobeno vlastní tíhou kapaliny. Posuvem je zde opět myšlena vzdálenost posunutí zdeformovaného vůči nezdeformovanému stavu.



Obr. 52– Celková deformace toroidu s vlastní tíhou a hydrostatickým tlakem.

Zdeformovaný (barevná) a nezdeformovaný (bílá) stav toroidní skořepiny s hydrostatickým tlakem je na Obr. 53. Deformace probíhá ve směru gravitačního zrychlení (záporný směr osy y) a převládá na vnitřní straně trubice toroidu. Maximální hodnota se liší od Obr. 52, jelikož se jedná o absolutní maximum, a nikoliv zprůměrovanou hodnotu, číselně je to $\delta_{celková} = 12,569 \text{ mm}$.

A: Static Structural
Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: mm
Time: 1 s
25.05.2023 20:24



Obr. 53 – Zdeformovaný a nezdeformovaný stav toroidu s hydrostatickým tlakem.

4 Závěr

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo vytvoření analytických a numerických parametrických modelů pro zvolený kulový a toroidní vodojem. Oba vodojemy byly řešeny na úrovni membránových skořepin. Parametrické modely byly pro analytický přístup vytvořeny v programu Matlab a pro numerický přístup v rozhraní Ansys Workbench, což umožnilo detailní deformačně napěťovou analýzu obou úloh.

Aby bylo vytvoření parametrických modelů možné, provedla se nejdříve rešerše objasňující stěžejní znalosti potřebné pro řešení analytických úloh membránových skořepin. Následně byl porovnán analytický a numerický přístup k řešení a poukázáno na jejich vzájemné rozdíly. Pro správné pochopení důležitosti skořepinových konstrukcí byly stručně zmíněny jejich výhody a využití v praxi. Důležitým výstupem rešeršní části bylo získat přehled o návrhu skořepin, zejména pak o omezeních membránové teorie skořepin, charakteristických zatíženích, vhodném uložení a poruchách

V praktické části se jako první úloha uvažovala kulová skořepina uložená na vazbě typu prstence, která je zcela naplněna vodou. Podle stanoveného modelu bylo vytvořeno analytické řešení, pro které byl napsán kód v programu Matlab. Numericky se k analytickému modelu přidala v prostředí Ansys Workbench také vlastní tíha skořepiny. Porovnáním výsledků obou přístupů bylo zjištěno, že vlastní tíha pro geometrické rozměry dané reálným vodojemem v obci Ohrazenice je zanedbatelná. K zásadním rozdílům vyšším než 10 % mezi oběma přístupy docházelo v místě vazby, kde byla porušena membránová teorie, a analytické výsledky tedy nebyly přesné. Oblast ovlivnění napjatosti vazbou vyšla $\alpha = 20^\circ$ od místa jejího umístění. Nejdůležitějším výsledkem bylo zjištění nejvhodnějšího umístění vazby, pro numerické řešení to bylo pro místo $\alpha = 81,4^\circ$ a hodnota bezpečnosti vůči mezi kluzu v tomto místě $k_{k,numericky} = 1,26$. Vhodná oblast uložení je pak celkově v bezprostředním okolí místa $\alpha = 90^\circ$. Analytické výsledky bezpečnosti byly vzhledem k porušení membránové teorie v místě vazby nadhodnocené a nereálné. Hodnoty přetvoření byly menší než 5 %, a úloha je proto lineární.

Druhá úloha toroidní skořepiny, jejíž geometrické hodnoty a tvar byly převzaty z vodojemu v polském městě Ciechanów, byla rozdělena na dvě části pro dva typy zatížení – vnitřní tlak a hydrostatický tlak kapaliny. Analytické řešení bylo vzhledem ke složitějšímu tvaru toroidu vytvořeno pro model bez vazby zatížený vnitřním tlakem, kód byl sepsán v programu Matlab. Numericky se uvažovala vlastní tíha a také prstencovitá vazba. Porovnáním výsledků obou přístupů bylo zjištěno, že vlastní tíha má v tomto případě nezanedbatelný vliv a je nutno ji uvažovat. Toto mělo za následek velké rozdíly mezi analytickým a numerickým přístupem, kdy analytické výsledky neodpovídaly realitě. Maximální bezpečnost vycházela pro případ zatížení vnitřním tlakem v místě $\alpha = 180^\circ$ a to $k_{k,numericky,max} = 8,02$. Vhodná oblast uložení pak byla co nejbližší místa nejvyšší bezpečnosti a pro $\alpha \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$, tedy na vnější straně trubice toroidu. Co se týče případu s hydrostatickým tlakem, zůstaly všechny poznatky první části úlohy zachovány, avšak hodnota nejvyšší bezpečnosti byla v tomto případě nižší, a to $k_{k,numericky,max} = 2,81$. To je způsobeno vlastní tíhou kapaliny. Přetvoření bylo posuzováno pouze pro zatížení vnitřním tlakem a úloha je lineární.

V obou úlohách odpovídaly místa optimálního umístění vazby reálným umístěním na vodojemech. Tímto byly úspěšně splněny všechny cíle vytyčené v úvodu této práce.

Analýzy by bylo možné dále rozšířit zejména v numerickém modelu, kdy by se vytvořil reálný model základové konstrukce a provedla se analýza její stykové oblasti se skořepinou. U takto komplexního modelu by bylo možné analyzovat kromě vhodné polohy vazby také její natočení vůči skořepině. Z rešeršní části práce je známo, že ideální vazba by se skořepiny dotýkala tečně ke střednicové ploše. Plošné rozložení stykového zatížení ve vazbě by zároveň snížilo špičky v průběhu jednotlivých napětí. Takto složitá úloha však není předmětem této práce.

V příloze této práce jsou dostupné analytické i numerické modely, které byly použity pro řešení obou úloh. Modely jsou plně parametrizovány, a čtenář si tak může provést i vlastní analýzu.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] ONDRÁČEK, Emanuel. *Mechanika těles: pružnost a pevnost II*. Vyd. 4., přeprac., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-214-3260-8.
- [2] VENTSEL, Eduard a Theodor KRAUTHAMMER. *Thin plates and shells: theory, analysis, and applications*. První vydání. New York: Marcel Dekker, 2001. ISBN 08-247-0575-0.
- [3] BURŠA, Jiří. *Rotačně symetrická membránová skořepina* [online]. In: . [cit. 2023-01-25]. Dostupné z: http://www.old.umt.fme.vutbr.cz/~jbursa/Stud_opory/10-prednaska.pdf
- [4] SHIGLEY, Joseph, Charles MISCHKE a Richard BUDYNAS, Miloš VLK, ed. *Konstruování strojních součástí*. 1. vyd. Přeložil Martin HARTL. V Brně: VUTIUM, 2010. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [5] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v Inženýrských výpočtech* [online]. [cit. 2023-02-12]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP%20v%20inzenyrskych%20vypoctech/RIV.pdf>
- [6] ALTENBACH, Holm a Victor EREMEYEV, ed. *Shell-like Structures: Advanced Theories and Applications*. První vydání. Springer, 2017. ISBN 978-3-319-42275-6.
- [7] RAMADAN, Mohamed a Khaled DEWIDAR. *The Pantheon* [online]. In: . [cit. 2023-02-18]. Dostupné z: doi:10.13140/RG.2.2.31982.82247
- [8] *Pantheon v Římě* [online]. In: . [cit. 2023-02-18]. Dostupné z: <http://web.mit.edu/21h.405/www/Pantheon/Pantheon/Dome.html>
- [9] Pavilon Z: šedesátník s unikátní střechou, pod kterou se vejde veletrh i olympijský festival. In: *BVV* [online]. [cit. 2023-02-19]. Dostupné z: <https://www.bvv.cz/media/tiskove-zpravy/pavilon-z-sedesatnik-s-unikatni-strechou/>
- [10] Pavilon Z. In: *Archiweb* [online]. [cit. 2023-02-19]. Dostupné z: <https://www.archiweb.cz/b/pavilon-z>
- [11] Konstrukční řešení objektu Sono Centra. In: *Ebeton* [online]. [cit. 2023-02-19]. Dostupné z: https://www.ebeton.cz/clanky/2020_1_42_konstrukcni-reseni-objektu-sono-centra/
- [12] Sono Centrum: pohled zepředu. In: *Brnoconvention* [online]. [cit. 2023-02-19]. Dostupné z: <https://www.brnoconvention.cz/prostory/sono-centrum/>
- [13] SEDLÁŘOVÁ, Barbora a Lucie ŠIMEČKOVÁ. Metropolitní divadlo v tchajwanském městě tchaj-čung. In: *Ebeton* [online]. [cit. 2023-02-26]. Dostupné z:

<https://www.ebeton.cz/clanky/2018-1-38-metropolitni-divadlo-v-tchajwanskem-meste-tchaj-cung/>

- [14] BAAN, Iwan. Taichung OP. In: *Iwan* [online]. [cit. 2023-02-26]. Dostupné z: <https://iwan.com/portfolio/taichung-opera-house-toyo-ito/#23161>
- [15] Structure concept model. In: *Domusweb* [online]. [cit. 2023-02-26]. Dostupné z: https://www.domusweb.it/en/news/2014/10/24/_toyo_ito.html
- [16] BURŠA, Jiří. *Válcová momentová skořepina* [online]. In: . [cit. 2023-02-27]. Dostupné z: http://www.old.umt.fme.vutbr.cz/~jbursa/Stud_opory/11-prednaska.pdf
- [17] Buckled water tower. In: *Shellbuckling* [online]. [cit. 2023-03-13]. Dostupné z: https://shellbuckling.com/presentations/buckledShells/pages/page_6.html
- [18] Buckled tall steel tank. In: *Shellbuckling* [online]. [cit. 2023-03-13]. Dostupné z: https://shellbuckling.com/presentations/unstiffenedCylinders/pages/page_119.html
- [19] CHAROUSEK, Pavel. STAVBA UNIKÁTNÍHO VĚŽOVÉHO VODOJEMU BUDE DOKONČENA NA KONCI LÉTA. In: *Turnovskovakci* [online]. 2019 [cit. 2023-05-20]. Dostupné z: <https://www.turnovskovakci.cz/fotoreportaze/stavba-unikatniho-vezoveho-vodojemu-bude-dokoncena-na-konci-leta/>
- [20] Vodojem Ohrazenice. In: *Profesprojekt* [online]. [cit. 2023-03-27]. Dostupné z: <https://profesprojekt.cz/portfolio-items/vezovy-vodojem-ohrazenice/>
- [21] *About the Park* [online]. In: *Parknaukitorus* . [cit. 2023-05-20]. Dostupné z: https://parknaukitorus.pl/en/about-the-science-park/?fbclid=IwAR1E9yxzvJ-JHseNzVS4F5YIdL5lo_f6q0AFaKPwCIgMeEUndHoA7ESiRlo
- [22] Ciechanów water tower. In: *Parknaukitorus* [online]. [cit. 2023-05-20]. Dostupné z: https://parknaukitorus.pl/en/gallery/nggallery/galeria/wieza-cisnien-dzis-3/?fbclid=IwAR1vWaeDnU845iz3OrreRWx3pHhR3qd2iOReBmmzPbI49mdEwhtnP4r_zTc

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

Symbol	Veličina	Jednotka
B	Tuhost v ohybu	$MPa \cdot mm^3$
E	Youngův modul pružnosti v tahu	GPa
F_{in}	Síly v normálovém směru	N
F_{vazba}	Reakční síla ve vazbě u kulové skořepiny	N
$F_{z,p}$	Síla v ose z způsobená tlakem p	N
$G_{kapalina}$	Tíha kapaliny v kulové skořepině	N
$G_{kapalina1}$	Tíha kapaliny	N
$G_{kapalina2}$	Tíha kapaliny nad prvkem Ω	N
h	Tloušťka stěny skořepiny	mm
HMH	Von Misesova teorie	—
k	Bezpečnost vůči mezi kluzu	—
l	Výška skořepiny	m
m	Meridiánový směr	—
MKP	Metoda konečných prvků	—
MSP	Mezní stav pružnosti	—
n	Normálový směr	—
n_m	Meridiánová liniová síla	$F \cdot mm^{-1}$
n_t	Obvodová liniová síla	$F \cdot mm^{-1}$
O_m	Meridiánový střed křivosti	—
OP	Okrajové podmínky	—
O_t	Kuželový střed křivosti	—
p_m	Meridiánový tlak	MPa
p_n	Normálový tlak	MPa
p	Tlak	Pa
q	Měrné objemové zatížení	Pa
R	Hlavní poloměr skořepiny	m
r	Poloměr v radiálním směru	m
r_m	Meridiánový poloměr křivosti	m
r_o	Obecný poloměr toroidu	m

r_t	Kuželový poloměr křivosti	m
SS	Souřadný systém	—
t	Obvodový směr	—
T_ε	Tenzor přetvoření	Pa
T_σ	Tenzor napětí	Pa
u_r	Radiální posunutí	mm
V_k	Objem kapaliny obsažené v prvku Ω	m^3
V_{koule}	Objem kulové skořepiny	m^3
$V_{kul,úseč}$	Objem kulové úseče	m^3
V_s	Vlastní objem skořepiny	m^3
z	Vertikální poloha	m
z_0	Poloha na toroidu	m
α	Úhel polohy na skořepině	$^\circ$
α_0	Výchozí poloha vazby na kulové skořepině	$^\circ$
γ_{mn}	Úhlové přetvoření v rovině mn	—
γ_{mt}	Úhlové přetvoření v rovině mt	—
γ_{tn}	Úhlové přetvoření v rovině tn	—
δ	Deformace	mm
ε_m	Meridiánové přetvoření	—
ε_n	Normálové přetvoření	—
ε_t	Obvodové přetvoření	—
μ	Poissonův poměr	—
ρ_{H2O}	Hustota vody	$kg \cdot m^{-3}$
$\rho_{kapalina}$	Hustota kapaliny	$kg \cdot m^{-3}$
$\rho_{skořepina}$	Hustota materiálu skořepiny	$kg \cdot m^{-3}$
σ_k	Mez kluzu materiálu	MPa
σ_m	Meridiánové napětí	MPa
σ_{m1}	Meridiánové napětí nad vazbou AA u kulové skořepiny	MPa
σ_{m2}	Meridiánové napětí pod vazbou AA u kulové skořepiny	MPa
σ_n	Normálové napětí	MPa
σ_{red}^{HMH}	Redukované napětí dle teorie HMH	MPa
$\sigma_{red}^{\tau_{max}}$	Redukované napětí dle Trescovy teorie	MPa

σ_{red}	Redukované napětí	<i>MPa</i>
σ_t	Obvodové napětí	<i>MPa</i>
σ_{t1}	Obvodové napětí nad vazbou AA u kulové skořepiny	<i>MPa</i>
σ_{t2}	Obvodové napětí pod vazbou AA u kulové skořepiny	<i>MPa</i>
σ_1	První hlavní napětí	<i>Pa</i>
σ_2	Druhé hlavní napětí	<i>Pa</i>
σ_3	Třetí hlavní napětí	<i>Pa</i>
τ_{max}	Trescova teorie	–
φ	Úhel definující válcový souřadný systém	°
φ_m	Úhel meridiánového řezu	°
φ_t	Úhel kuželového řezu	°
Ω	Uvažovaný prvek tělesa	–

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1 – Typické tvary bezmomentových skořepin (upraveno dle [1]).	11
Obr. 2 – Globální souřadný systém.	12
Obr. 3 – Elementární prvek (upraveno dle [1]).	12
Obr. 4 – Napětí působící na elementární prvek a jejich rozklad (upraveno dle [1]).	14
Obr. 5 – Pantheon v Římě [8].	18
Obr. 6 – Pávilon Z v Brně [9].	19
Obr. 7 – Sono Centrum [12].	20
Obr. 8 – Metropolitní divadlo v Tchaj-Čungu [14].	20
Obr. 9 – Model konstrukce [15].	20
Obr. 10 – Poruchy membránové teorie (upraveno dle [1]).	21
Obr. 11 – Zatížení konstantním tlakem – a) Vnitřní tlak; b) Vnější tlak; c) Tlak působící na prvek Ω ; d) Staticky ekvivalentní náhrada tlaku silou (upraveno dle [1]).	22
Obr. 12 – Zatížení hydrostatickým tlakem – a) Skořepina naplněná kapalinou; b) Zatížení působící na prvek Ω ; c) Staticky ekvivalentní nahrazení tlaku silou (upraveno dle [1]).	23
Obr. 13 – Zatížení vlastní tíhou – a) Rozložení měrného objemového zatížení q na složky; b) Výslednice sil v ose z (upraveno dle [1]).	23
Obr. 14 – Ukázky uložení (upraveno dle [1]).	24
Obr. 15 – Zborcený vodojem [17].	25
Obr. 16 – Zborcené silo [18].	25
Obr. 17 – Vodojem Ohrazenice [20].	26
Obr. 18 – Model úlohy pro analytické řešení s obecným řezem skořepinou.	27
Obr. 19 – Okrajové podmínky a geometrie kulové skořepiny.	30
Obr. 20 – Kvalita sítě a hodnoty normálového napětí.	30
Obr. 21 – Konečné okrajové podmínky.	31
Obr. 22 – Normálové napětí numericky.	32
Obr. 23 – Meridiánové napětí numericky a analyticky.	32
Obr. 24 – Obvodové napětí numericky a analyticky.	33
Obr. 25 – Redukované napětí numericky a analyticky.	34
Obr. 26 – Bezpečnost v závislosti na poloze vazby numericky a analyticky.	35
Obr. 27 – Normálové přetvoření numericky a analyticky.	35
Obr. 28 – Meridiánové přetvoření numericky a analyticky.	36
Obr. 29 – Obvodové přetvoření numericky a analyticky.	36
Obr. 30 – Celková deformace numericky.	37
Obr. 31 – Celková deformace.	37
Obr. 32 – Detail deformace v místě vazby.	38
Obr. 33 – Vodojem v městě Ciechanów [22].	38
Obr. 34 – Model toroidní skořepiny pro analytické řešení.	39
Obr. 35 – Kvalita sítě toroidní skořepiny.	41
Obr. 36 – Okrajové podmínky pro toroidní skořepinu.	41
Obr. 37 – Meridiánové napětí toroidu bez vlastní tíhy numericky a analyticky.	42
Obr. 38 – Meridiánové napětí toroidu s vlastní tíhou numericky a analyticky.	42
Obr. 39 – Obvodové napětí toroidu s vlastní tíhou numericky a analyticky.	43
Obr. 40 – Normálové napětí toroidu s vlastní tíhou numericky a analyticky.	43
Obr. 41 – Redukované napětí toroidu s vlastní tíhou numericky a analyticky.	44

Obr. 42 – Bezpečnost vůči mezi kluzu v závislosti na poloze vazby toroidní skořepiny s vlastní tíhou numericky.	45
Obr. 43 – Meridiánové přetvoření toroidu s vlastní tíhou numericky a analyticky.	45
Obr. 44 – Obvodové přetvoření toroidu s vlastní tíhou numericky a analyticky.	46
Obr. 45 – Normálové přetvoření toroidu s vlastní tíhou numericky a analyticky.	46
Obr. 46 – Celková deformace toroidu s vlastní tíhou.	47
Obr. 47 – Zdeformovaný a nezdeformovaný stav toroidu.	47
Obr. 48 – Hydrostatický tlak.	48
Obr. 49 – Okrajové podmínky pro toroidní skořepinu s hydrostatickým tlakem.	48
Obr. 50 – Redukované napětí toroidu s hydrostatickým tlakem a vlastní tíhou numericky. ...	49
Obr. 51 – Bezpečnost vůči mezi kluzu v závislosti na poloze vazby toroidní skořepiny s hydrostatickým tlakem numericky.	49
Obr. 52– Celková deformace toroidu s vlastní tíhou a hydrostatickým tlakem.	50
Obr. 53 – Zdeformovaný a nezdeformovaný stav toroidu s hydrostatickým tlakem.	50