



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

# POPIS ROZLOŽENÍ NAPĚTÍ V OKOLÍ OSTRÉHO VRUBU

A STUDY OF THE STRESS DISTRIBUTION NEAR THE SHARP NOTCH TIP

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

## AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Tomáš Beňo

## VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

BRNO 2018

## Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Tomáš Beňo</b>
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	<b>doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

### Popis rozložení napětí v okolí ostrého vrubu

#### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Vrub je běžnou součástí technických konstrukcí a také možným zdrojem problémů jejich provozu a užití. Z hlediska rozložení napětí se vrub chová jako jeho koncentrátor způsobující nukleaci a následný růst trhlin ze svého kořene. Cílem uchazeče bude se seznámit s problematikou popisu rozložení napětí v blízkosti kořene ostrého vrubu a aplikací základních principů lomové mechaniky na vyhodnocování iniciace a budoucího růstu trhlin v jeho okolí.

#### Cíle bakalářské práce:

1. Aplikace teorie lomové mechaniky na některé konfigurace trhliny, vrubu.
2. Analytický popis napětí v okolí kořene vrubu.
3. Vyjádření exponentů singularity napětí vrubu pro různé materiálové kombinace a geometie vrubu

#### Seznam doporučené literatury:

- BROBERG, K. B.: Cracks and Fracture, Academic Press, 1999.
- SUN, C. T., JIN, Z. H.: Fracture Mechanics, Elsevier, 2012.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Předkládaná bakalářská práce se zabývá popisem rozložení napětí v okolí ostrého vrubu. V teoretické části je popsána historie lomové mechaniky a její základní principy. V praktické části jsem se zabýval spočtením exponentů singularity napětí v závislosti na geometrii konkrétního vrubu.

## **Abstract**

This bachelor's thesis is studying problems of stress distribution near the sharp notch tip. The theoretical part discloses the history of fracture mechanics and its basic principles. The practical part solves stress singularity exponents for geometry of particular notch.

## **Klíčová slova**

Vrub, trhlina, napětí, napěťová singularita, exponent napěťové singularity

## **Key words**

Notch, crack, stress, stress singularity, stress singularity exponent



BEŇO, T. *Popis rozložení napětí v okolí ostrého vrubu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 27 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D..

## **Čestné prohlášení**

Prohlašuji, že tuto bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně, pod odborným vedením s použitím literatury a pramenů uvedených v příloze této práce.

V Brně dne 24.5.2018

.....

Tomáš Beňo

## **Poděkování**

Tímto bych se chtěl poděkovat vedoucímu práce, pánu doc. Ing. Tomáši Profantovi, PhD. za pomoc, ochotu a cenné rady při tvorbě této bakalářské práce.

## Obsah

1 Úvod .....	9
2 Lomová mechanika .....	10
2.1 Selhání pevných materiálů .....	10
2.2 Koncepty lomové mechaniky .....	12
2.3 Historie lomové mechaniky .....	14
2.3.1 Griffithova lomová teorie .....	14
3 Rozložení napětí v okolí kořene ostrého vrubu .....	15
3.1 Módy zatěžování a faktor intenzity napětí .....	15
3.2 Airyho napěťová funkce .....	16
3.3 Williamsovo pole v kořeni vrubu .....	18
3.4 Napětí a deformace podle Williamse pro mód I a II .....	18
4 Výpočet exponentu singularity .....	19
4.1 Analytické řešení problému .....	19
4.2 Numerické řešení exponentů singularity .....	20
4.2.1 Definování matice a jejího determinantu .....	20
4.2.2 Numerický výpočet exponentu singularity .....	21
4.3 Vyčíslení exponentů singularity pro určité konfigurace .....	22
5 Závěr .....	25
6 Literatura .....	26
7 Přílohy .....	27

# 1 Úvod

Za posledních 100 let se svět rozvíjí velice dynamickým tempem. Tento rozvoj přináší enormní nárůst požadavek kladených na výrobky ve všech průmyslových odvětvích. Snažíme se docílit prodloužení trvanlivosti konstrukcí, které jsou namáhány víc. Rovněž se snažíme zvýšit jejich bezpečnost, předcházet jejich haváriím, teda ztrátám na životech či ujme na majetku. Tento růst tedy nutí i vědce a inženýři k vývoji lepších materiálů, k stavbě lepších konstrukcí a v neposledním řadě k přesnějšímu předvídání eventuálních kolapsů.

Lomová mechanika jako vědní obor se zabývá porušením materiálů v důsledku trhliny, respektive koncentrátoru napětí, kterým může být i obyčejní šroub nebo jiný konstrukční prvek, který je součástí běžného strojírenského produktu. Je důležitým nástrojem pro analýzu a dizajn těchto výrobků, jak z hlediska inženýrského, tak z hlediska materiálového. Řešení problémů této vědní disciplíny každodenně přispívá k pokroku nejen v inženýrských disciplínách. Pomáhá tedy světu dosahovat vyšších cílů.

V předkládané bakalářské práci se budu zabývat jedním z nejrozšířenějších, no o to méně předvídatelných fenoménů, zvaným vrub. Vrub je významným koncentrátorem napětí a součástí nespočetného množství konstrukcí. Vyznačuje se tím, že v oblasti jeho kořene se formuje oblast s vysokými napěťovými gradienty, která se nazývá napěťová singularita. Tato singularita značně ovlivňuje rozložení napětí v okolí takového prvku a komplikuje způsoby, kterými možno předvídat porušení tělesa.

Úvod práce je věnovaný popisu některých základních principů a koncepcí, v kterých se podrobněji rozebírá problematika singularity i to, jak se měnili přístupy pro řešení těchto problémů. Další části jsou pak vysvětleny a analyticky odvozeny některé metody pro popis napětí v okolí vrubu. Na závěr jsem se věnoval numerickému řešení exponentů singularity pro určité geometrie vrubu, kterého výsledkem je popis závislosti mezi geometrií a velikostí exponentu singularity.

## 2 Lomová mechanika

### 2.1 Selhání pevných materiálů

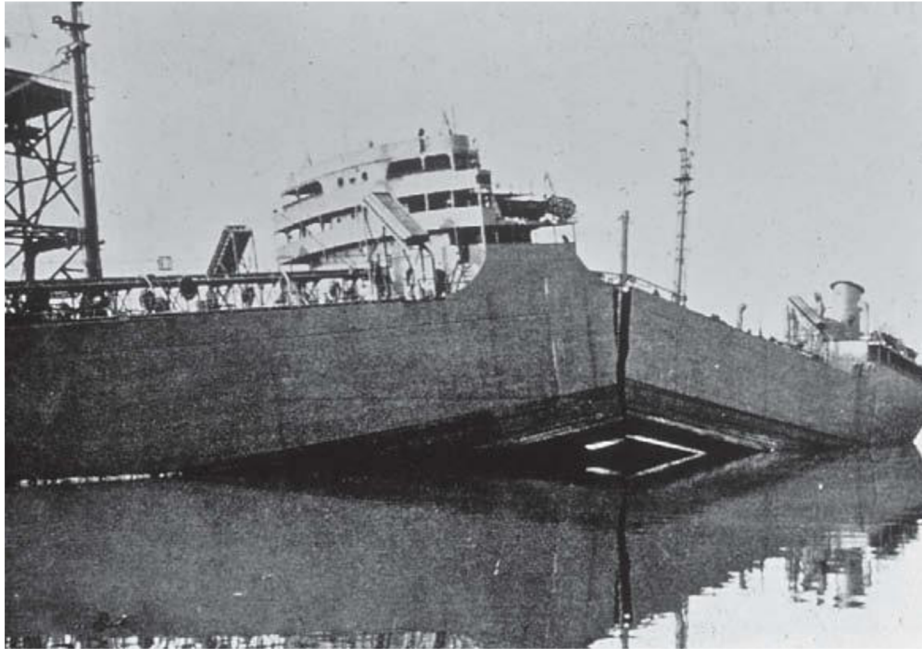
Deformace pevných struktur může být různorodá. Konstrukce může selhat v důsledku elastické deformace, jak je to v případě ztráty vzpěrné stability konstrukce. Tento případ je však poněkud speciálním. Dvěma hlavními formami selhání konstrukcí jsou plastická deformace, která je ve své podstatě pokračováním elastické deformace při vyvolání napětí za mezí kluzu, a která je oproti elastické deformaci trvalá, a lom dané struktury, respektive konstrukce. Plasticita však byla zkoumána po více než sto let a jsme schopni ji bez větších problémů předvídat. [1]

Lom materiálů je však mnohem náhodnější jev, který nelze vždy určit se stoprocentní pravděpodobností, jelikož doň vstupuje mnoho faktorů, které nejsou vždy explicitně předvídatelné. Při lomu jako takovému dochází k úplné ztrátě zátěžové únosnosti konstrukce v důsledku porušení celistvosti konstrukce a jejímu rozdělení na dvě nebo více částí. Na rozdíl od plasticity, předpovídání lomové pevnosti materiálů bylo před rozvojem lomové mechaniky jako vědního oboru založeno pouze na fenomenologických přístupech, kde kritéria selhání v důsledku namáhání konstrukce byly určovány pouze porovnáním s experimentálními výsledky. V běžně užívaných kritériích selhání jako například teorie maximálních hlavních napětí je oblast selhání konstruována na základě omezeného množství experimentálně zjištěných dat. Dle této podmínky se lom objevuje v případě, že hlavní napětí překročí napětí lomové tedy

$$\sigma_1 \geq \sigma_f \quad [2.1]$$

kde  $\sigma_1$  je největší hlavní napětí a  $\sigma_f$  je napětí lomové, respektive tahová pevnost daného materiálu. Oblast selhání byla též modifikována pro rozlišení zátěží tahovým a tlakovým namáháním a pro sečtení efektů různých kombinací namáhání.

Obecně klasické fenomenologické teorie selhání předvídají porušení materiálů a struktur poměrně přesně pokud se jedná o situace, kde je pole napětí konstantní nebo se mění jen málo. V případech, že jsou přítomné vysoko napěťové gradienty, nejsou tyto teorie spolehlivé. V minulosti jsme se setkali se selháním konstrukcí, kde napětí byly hluboko pod kritickými hodnotami reprezentovanými lomovými napětími, které jsou definovány těmito klasickými přístupy. Nejčastěji bývají zmíněny porušení nákladních lodí Liberty, (obrázek č. 1.1) které byly postaveny během Druhé světové války. Z 2700 lodí byla více než stovka vážně poškozena, přičemž 10 se rozlomilo na dvě části. Inicivace trhlin v daném případě nastala ve svarech, které nebyly připraveny na chladné vody Atlantického oceánu a byli významnými koncentrátory napětí. Tyto lomy vedli ke katastrofálním haváriím a ztrátám na lidských životech. Dalšími případy byli pak selhání trupů dopravních letadel de Havilland Comet, kde se trhliny šířily v důsledku zle navržených oken letadla a selhání rotorů parních turbín v padesátých letech. [1]



*Obr. č. 2.1 Selhání konstrukce lodě Liberty*

Všechny tyto události vedly ke zjištění, že primárním důvodem selhání konstrukcí jsou defekty, respektive trhliny a jiné nedostatky, které vedou ke koncentraci napětí v materiálu a dále k jeho lomu. Tyto nedostatky mohou vzniknout jak během výroby dané konstrukce, tak během její používání a jejich vznik není snadno předvídatelný. Například kalení želených litin vede ke vzniku mikrotrhlin v tomto materiálu. Cyklické zatěžování rovněž vede k hromadění poškození a následné iniciaci trhliny, ze které se pak šíří lom. Napětí v okolí čela trhliny je mnohem větší než napětí, které je přípustné v materiálu, a které je zjišťováno experimentálně v laboratorních podmínkách. Napětí v okolí trhliny pak vede k šíření lomu, který může mít tragické následky. [1]



*Obr. č. 2.2: Letadlo de Havilland Comet*

## 2.2 Koncepty lomové mechaniky

V současnosti se lomová mechanika jako předmět inženýrských věd zabývá lomem konstrukcí v důsledku iniciace a šíření trhliny. Poznáme dva hlavní přístupy pro stanovení okrajových podmínek šíření lomu. První, posouzení napětí na čele trhliny, který je lokálním přístupem; druhým je energetická bilance, respektive přístup globální. Při posuzování napětí na čele trhliny jsou nejdříve analyzovány průběhy napětí a posuvů na čele trhliny, pak jsou zjišťovány parametry, které tyto průběhy ovlivňují. Lineárně elastické analýzy porušených vzorků ukazují, že napětí v okolí čela trhliny se mění s  $r^{-1/2}$ , kde  $r$  je vzdálenost od čela trhliny. Napětí pak roste bez omezení limitně k nekonečnu se zmenšující se vzdáleností ke kořeni trhliny. Přítomnost napětí pak způsobuje, že klasické přístupy posouzení pevnosti materiálů jsou nepoužitelné.

Základní koncepcí lomové mechaniky je přijmout teoretickou napětovou singularitu v oblasti kořene trhliny, ale ne použití tohoto napětí k určení šíření trhliny. Tato koncepce předpokládá, že napětí na kořeni trhliny je limitováno mezi kluzu nebo přitažlivými silami mezi atomy látky a že napětí singularity je výsledkem lineární elasticity. [1]

Napětí na v blízkosti kořene trhliny v lineárně elastických materiálech jsou nezávislé na zatížení a geometrii konstrukce a mají následovní formu:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} * \cos \frac{1}{2} \theta * \left( 1 - \sin \frac{1}{2} \theta * \sin \frac{3}{2} \theta \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} * \cos \frac{1}{2} \theta * \left( 1 + \sin \frac{1}{2} \theta * \sin \frac{3}{2} \theta \right) \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} * \sin \frac{1}{2} \theta * \cos \frac{1}{2} \theta * \cos \frac{3}{2} \theta\end{aligned}\quad [2.2]$$

kde  $K_I$  je faktor intenzity napětí, který závisí na módu namáhání a geometrii trhliny, která je určena polárními souřadnicemi  $r$  a  $\theta$  se středem v kořeni trhliny. Je předpokládáno, že zatížení a geometrie jsou symetrické v okolí vzniklé trhliny. Rovnice ukazují, že napětí je lineárně závislé na  $K_I$ , tedy na faktoru intenzity napětí v okolí čela trhliny.

Na základě pozorování, Irwin navrhl lomové kritérium, které stanovuje, že růst trhliny se objevuje v případě, že faktor intenzity napětí dosáhne kritické hodnoty:

$$K_I = K_{Ic} \quad [2.3]$$

kde  $K_{Ic}$  je materiálová charakteristika nazývána lomová houževnatost a je zjišťována experimentálně. Toto lomové kritérium pro tuhé látky je značně odlišné od klasických lomových kritérií založených na napětí. Nepoužívá explicitně napětí, ale adekvátní faktor rozložení napětí v okolí kořene trhliny. Faktor intenzity napětí  $K_I$  je sice úměrný použitému zatížení, ale jeho jednotkou je  $MPa * m^{-\frac{1}{2}}$ , co značí vliv rozměrů.  $K_{Ic}$  jako materiálová charakteristika uvádí odpor materiálu vůči šíření trhliny.



Kritérium použité pro porovnání faktoru intenzity napětí a lomové houževnatosti je založeno na teorii lineární elasticity, kde existuje záporná odmocnina singularity napětí a faktor intenzity napětí je tedy jednoznačně určený. Skutečný proces lomu v kořeni trhliny však teorií lineární elasticity nelze určit. Použitelnost tohoto kritéria je založená na podmínce, že oblast iniciace (procesní zóna) lomu je dostatečně malá na to, aby se bez potíží vešla do singularity napětí určené faktorem intenzity napětí  $K_I$ . [1]

Druhý přístup na stanovení lomových kritérií je založený na zhodnocení celkové energetické bilance během šíření lomu. Nejdřív je určena potenciální energie poškozeného tuhého tělesa za daného zatížení, pak je vyšetřováno šíření lomu. Uvažujíc rovinné, pružné těleso s trhlinou o délce  $a$ , celková potenciální energie systému na jednotku tloušťky je závislá na délce trhliny. Pro infinitezimální trhlinu o délce  $da$  je úbytek potenciální energie  $-dW_{el}$ . Griffith předpokládal, že tento úbytek energie na tělese by se projevil jako přírůstek povrchové energie na nově vzniknutém povrchu trhliny. Označíme-li jednotkovou povrchovou energii písmenkem  $\gamma$ , kterou můžeme vypočítat pomocí klasické fyziky pevných látek, celková povrchová energie povrchu trhliny bude rovna  $2da\gamma$ . Pak je energetická bilance rovna:

$$-dW = 2da\gamma \text{ nebo } -\frac{dW_{el}}{da} = 2\gamma$$

Zavedeme-li veličinu, kterou nazveme hnací silou trhliny a označíme ji  $G$ , můžeme ji definovat jako pokles jednotkové potenciální energie způsobené šířením trhliny za stálého zatížení

$$G = -\frac{dW_{el}}{da} \quad [2.4]$$

potom kritérium šíření trhliny, respektive lomu materiálu stanovené tímto přístupem je:

$$G = G_C = 2\gamma$$

Toto kritérium lomu materiálu je, podobně jako koncepce faktoru intenzity napětí, velmi odlišné od klasických lomových kritérií. Zahrnuje celkovou energii konstrukce, rovněž povrchovou energii tuhého tělesa, která existuje v případě, že uvažujeme o látkách na atomární úrovni. V analogii s lomovou houževnatostí  $K_{IC}$ , je pak zavedena další materiálová charakteristika  $G_{IC}$ , která má rozměr  $J/m^2$ . Tyto kritéria jsou ekvivalentními. Avšak experimentálně zjištěná rychlost uvolňování energie pro konstrukční materiály, zejména oceli, je mnohonásobně vyšší než  $2\gamma$ . Je to způsobené faktem, že plastické deformace v oblasti kořene trhliny významně přispívají k odporu materiálu vůči šíření trhliny. [1]

Lomová mechanika zavádí dvě nové koncepce pro předpoklad vzniku lomu. První je K-koncepce, nebo koncepce faktoru intenzity napětí, druhou je potom koncepce rychlosti uvolňování energie, nebo G-koncepce.

Při užití faktoru intenzity napětí na předvídaní lomového chování musíme nejdřív určit tento faktor pro dané zatížení a danou geometrii. Druhým krokem je určení lomové houževnatosti daného materiálu a pak následuje jejich porovnání, ze kterého můžeme následně spočítat maximální přípustné zatížení konstrukce pro danou geometrii trhliny a daný způsob namáhání, nebo maximální délku trhliny pro plánované zatížení. Výhodou K-koncepce je nepochybně relativní jednoduchost výpočtu faktoru intenzity za určitých podmínek, a jednoduchost experimentálního určení lomové houževnatosti daného materiálu. Naopak, G-koncepce, respektive rychlost uvolňování energie, je víc rozšířena pro případy, kde musíme započítat nelineární chování, protože tento způsob je univerzálnější.

Faktory intenzity napětí a rychlost uvolňování energie stojí za zrodem konceptu lineárně elastické lomové mechaniky. Tento koncept považuje tuhé tělesa za lineárně elastické, a tvrdí, že nelineární chování je minimální, teda může být ignorováno. Kým faktor intenzity napětí může být použit pro předvídání lomu, pokud jsou plastické deformace malé a vyskytují se jen v oblasti blízké kořeni trhliny, přístup rychlosti šíření energie lze aplikovat, když materiál podléhá velkým plastickým deformacím. Pro chování lomu za nelineárních deformací bylo navrženo několik přístupů, ku příkladu J-integrál, nebo rozevření trhliny u kořene, avšak se nestali tak úspěšnými jak kritérium faktoru intenzity napětí, nebo rychlost uvolňování energie.

## 2.3 Historie lomové mechaniky

### 2.3.1 Griffithova lomová teorie

Za vznik lomové mechaniky jako vědního oboru je považována průlomová práce Alan Arnold Griffitha, který se zabýval studiem křehkého lomu skla. Už před jeho prací bylo známo, že teoretická síla potřebná pro lom skla určena na základě přerušení atomových vazeb řádově přesahuje tehdejší laboratorní vybavení. Věřil ale, že tato síla by se mohla několikanásobně snížit v případě, že by sklo obsahovalo mikrotrhliny, které by se rozšiřovali pod vlivem této síly.

Griffith přijal myšlenku přístupu skrz energetickou bilanci, na určení lomové síly, která říká, že práce během šíření trhliny musí být rovna nárůstu povrchové energie na těchto nově vzniknutých površích. Pro výpočet deformační energie ve zlomené konstrukci odvodil napěťové pole na nekonečné desce s trhlinou po celé tloušťce, zatížené biaxiálně, z řešení koncentrace napětí v okolí eliptické díry tak, že zredukoval minoritní osu na nulu. Tak byl Griffith schopný vypočítat celkové potenciální energie před a po rozšíření trhliny. Rozdíl těchto energií byl roven nárůstu povrchové energie. [1]

Z Griffithovy teorie vyplývá, že lomová pevnost tuhé látky s trhlinou je úměrná odmocnině z podílu povrchové energie a délky trhliny jak je možné vidět v rovnici č. 2.5:

$$\sigma_f \propto \sqrt{\frac{\gamma_c E}{a}} \quad [2.5]$$

přičemž  $\sigma_f$  odpovídá zatížení při lomu,  $\gamma_c$  je povrchová energie,  $E$  Youngův modul pružnosti a  $a$  je polovina délky trhliny. Tento vztah ukazuje, specifickou závislost mezi napětím vyvolaným zatížením a charakteristickým rozměrem trhliny. Tato teorie je zlomovou v oblasti lomové mechaniky, protože vysvětluje, proč je rozdíl mezi teoretickým a experimentálně změřeným zatížením součástí řádový. Ukazuje fyzikální mechanismus, který kontroluje proces lomu, který chybí fenomenologickým přístupům. Jelikož tyto zjištění Griffith pozoroval na skle, v pozdějších letech byla tato teorie modifikována Orowanem a Irwinem, který navrhli přidání konstanty 2 k povrchové energii  $\gamma_c$ , z důvodu, že při kovech je nutné zohlednit existenci plastických deformací v okolí trhliny nebo jiného koncentrátoru napětí, rovněž pak práci  $\gamma_p$ , která je označovaná jako plastická a je mnohem větší v porovnání s povrchovou energií.

### 3 Rozložení napětí v okolí kořene ostrého vrubu

Křehký lom v tuhých látkách je při svém růstu řízen polem napětí v okolí kořene koncentrátoru napětí a zároveň parametry opisujícími odpor této tuhé látky vůči růstu lomu. Analýzy napětí v okolí kořene vrubu tvoří neodmyslitelnou část lomové mechaniky. Pro křehké materiály, které vykazují lineárně elastické chování používáme pro výpočet napětí a deformací metody elasticity. Těmito metodami jsou jak metody analytické, například funkce komplexních potenciálů a metoda integrální transformace, tak numerické metody, například metoda konečných prvků.

#### 3.1 Módy zatěžování a faktor intenzity napětí

Lom v tuhých látkách vzniká rozpojením lomových ploch. Koncentrací, respektive spojením dvou takových lomových ploch vzniká výraznější trhlinka. Předpokládá se, že tyto plochy leží před deformací materiálu na stejném povrchu. Když tento materiál pak podléhá vnějšímu zatížení, tyto plochy se pohybují s ohledem na sebe navzájem, a tyto pohyby můžeme v lokálním karteziánském souřadnicovém systému, který má počátek právě v kořeni první výraznější trhlinky, popsat jako posuvy  $u_x$ ,  $u_y$  a  $u_z$ . Osy souřadnicového systému jsou dány následovně: osa  $x$  je kolmá na kořen této trhlinky, osa  $y$  je kolmá na čelo trhlinky a osa  $z$  je rovnoběžná s kořenem. [1]

Nacházejí se zde tři nezávislé způsoby zatěžování, které korespondují se základními módy zatěžování podle Irwina. Tyto módy zvykneme nazývat: mód I (tahový), mód II (smykový), mód III (smykový antirovinný). Každý způsob zatěžování může být popsán jedním z těchto troch módů, nebo jejich kombinací. [3]

1. Mód I – tahový, povrchy trhlinky vykazují posuv v směru osy  $y$ , přičemž posuvy  $u_x$ ,  $u_z$  jsou nulové.
2. Mód II – smykový, v tomto případě nastává posuv v směru osy  $x$ , lomové plochy se po sobě kloužou
3. Mód III – smykový antirovinný, k posuvu dochází v směru osy  $z$

Tři základní módy namáhání mohou být přesněji popsány přidruženými napětími před kořenem trhlinky, které jsou dvourozměrnými:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi x}} + O(\sqrt{x}), \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi x}} + O(\sqrt{x}), \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{yz} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi x}} + O(\sqrt{x}), \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0\end{aligned}\quad [3.1]$$

kde parametry  $K_I$ ,  $K_{II}$  a  $K_{III}$  jsou faktory intenzity napětí pro příslušný mód zatěžování. [2]

Uvedené rovnice nám ukazují, že napětí jsou nepřímo úměrně odmocnině ze vzdálenosti od singularity napětí v kořeni trhlinky, přičemž faktory intenzity napětí měří velikost vlivu této singularity. Faktor intenzity napětí je poměrně novým konceptem v mechanice tuhých látek ale

hraje velkou roli při studiu podmínek lomu. Opět existuje několik metod pro zjištění tohoto parametru zahrnující metody analytické a numerické, nebo metody experimentální.

### 3.2 Airyho napět'ová funkce

Základní rovnice elasticity jsou rovnicemi rovnováhy napětí, deformací v důsledku těchto napětí a Hookeova zákona, který spojuje napětí a přetvoření. V oblasti rovinných napětí a rovinných deformací tyto rovnice vypadají následovně:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad [3.2]$$

kde  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  a  $\sigma_{xy}$  jsou napětí, přičemž  $x$ ,  $y$  jsou Karteziánské souřadnice. Přetvoření a deformace jsou pak ve vztahu:

$$e_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, e_{xy} = \frac{1}{2} * \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad [3.3]$$

zatím co  $e_{xx}$ ,  $e_{yy}$  a  $e_{xy}$  jsou prvky tenzoru přetvoření a  $u_x$ , respektive  $u_y$  jsou posuvy ve směrech os  $x$  a  $y$ . Vztah mezi napětím a přetvořením je pak:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda'(e_{xx} + e_{yy}) + 2Ge_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda'(e_{xx} + e_{yy}) + 2Ge_{yy} \\ \sigma_{xy} &= 2Ge_{xy}\end{aligned}\quad [3.4]$$

kde  $G$  označuje modul pružnosti ve smyku a řecké písmeno lambda

$$\lambda' = \frac{3 - \kappa}{\kappa - 1} * G$$

přičemž  $\kappa$  rozlišujeme pro dva případy:

$$\text{Rovinná deformace } \kappa = 3 - 4\mu$$

$$\text{Rovinná napjatost } \kappa = \frac{3 - \mu}{1 + \mu}$$

kde v obou případech  $\mu$  značí Poissonovu konstantu, která je pro ocel přibližně 0,3. Dalším dosazením do rovnice (3.2) a zkrácením posuvů dostáváme rovnici pro vztah mezi jednotlivými složkami tenzoru přetvoření, též nazývaný podmínka kompatibility:

$$\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial x \partial y} \quad [3.5]$$

Dalšími úpravami a dosazením, respektive použitím rovnic rovnováhy (3.2), vztahů mezi napětím a přetvořením (3.4) a zahrnutím podmínky kompatibility můžeme napětí vyjádřit následovně:

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad [3.6]$$

kde Laplaceovský operátor:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Airyho napěťovou funkci  $\phi$  můžeme následně definovat skrz vztahy pro výpočet napětí, respektive složek tenzoru napětí jak:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \sigma_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad [3.7]$$

Použitím takového vztahu jsou rovnice rovnováhy automaticky v pořádku, takže zůstává vyřešit vztahy kompatibility:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \phi &= \nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \\ \nabla^4 &= \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \end{aligned} \quad [3.8]$$

Laplaceovský operátor Nabla se nazývá i biharmonický operátor, z čehož plyne, že jakákoli funkce  $\phi$ , která odpovídá řešení funkce (3.6) je funkcí biharmonickou. Jakmile je Airyho napěťová funkce známá, jsme schopni vyřešit velikost napětí (3.7) a následně dle rovnic (3.3) a (3.4) můžeme spočítat přetvoření a deformaci. [1]

Airyho napěťovou funkci je za účelem dalších výpočtů popisu rozložení napětí transformovat do polárních souřadnic. Tuto transformaci provedeme na základě vztahu pro transformaci mezi karteziánským a polárním souřadnicovým systémem:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \mathbf{T}_p &= \mathbf{C} \mathbf{T} \\ \mathbf{T}_p &= \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad [3.9]$$

kde  $\mathbf{C}$  je transformační matice:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad [3.10]$$

matice  $\mathbf{T}$  je tenzorem napětí v karteziánském souřadnicovém systému:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad [3.11]$$

a matice  $\mathbf{T}_p$  je tenzorem napětí v polárním souřadnicovém systému:

$$\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad [3.12]$$

### 3.3 Williamsove pole v kořeni vrubu

Společnou charakteristikou metod řešení problematiky ostrých vrubů je fakt, že napětí se v blízkosti ostrého vrubu chovají singulárně, a že funkce, kterými jsou tyto napětí, respektive deformace v okolí takového místa jednoznačně popsány, nezávisí na zatížení ani geometrii konstrukce. Ku příkladu, napětí v blízkém okolí ostrého vrubu, který se nachází na nekonečné desce, která je zatížená vzdálenou silou je stejné, jak kdyby tato síla působila na čele tohoto vrubu. Tento fakt týkající se jedinečné funkce pro popis rozložení napětí lze ověřit použitím Williamsovi metody rozvoje vlastní funkce pro různé okrajové podmínky, geometrické i silové.

### 3.4 Napětí a deformace podle Williamse pro mód I a II

Je dokázáno, že napětí a posuvy mohou být vyjádřeny pomocí Airyho napěťové funkce  $\phi$ , které splňuje následující biharmonickou rovnici, která se zvykne nazývat stěnovou funkcí: [1]

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 0$$

kde operátor Nabla  $\nabla^2$  v polárním souřadnicovém systému  $(r, \theta)$  a s počátkem v kořeni vrubu je dán jako:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad [3.13]$$

Airyho napěťová funkce v blízkosti kořene ostrého vrubu se rozvíjí dle:

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_n+1} F_n(\theta) \quad [3.14]$$

kde  $\lambda_n$  je vlastní hodnotou, která má být zjištěna a  $F_n(\theta)$  jsou odpovídající vlastní funkce. Substitucí těchto výrazů do počáteční biharmonické funkce pak získáváme rovnici:

$$\frac{d^4 F_n(\theta)}{d\theta^4} + 2(\lambda_n^2 + 1) \frac{d^2 F_n(\theta)}{d\theta^2} + (\lambda_n^2 - 1)^2 F_n(\theta) = 0 \quad [3.15]$$

Respektive rovnicí pro řešení  $F_n(\theta)$ :

$$F_n(\theta) = A_n \sin(\lambda_n + 1)\theta + B_n \cos(\lambda_n + 1)\theta + C_n \sin(\lambda_n - 1)\theta + D_n \cos(\lambda_n - 1)\theta$$

kde  $A_n, B_n, C_n, D_n$  jsou neznámé konstanty. Napětí pak musí ještě splňovat okrajové podmínky podélně s povrchem vrubu:

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{r\theta} = 0, \theta = \pm\pi$$

## 4 Výpočet exponentu singularity

### 4.1 Analytické řešení problému

Jak můžeme vidět z Airyho napěťové funkce v blízkosti kořene vrubu (3.14), výpočet exponentu singularity  $\lambda_n$  je základním předpokladem pro výpočet a popis napětí v okolí ostrého vrubu. Jedná se o vlastní hodnotu  $\lambda_n$  funkce  $F_n$ , která je závislá na úhlu  $\theta$  a je odvozena z rovnice (3.15)

Otevření vrubu je všeobecně popsáno dvěma úhly  $\theta_1$  a  $\theta_2$ . Funkci  $F_n(\theta)$  musíme pro získání řešení derivovat podle úhlu  $\theta$ . Derivace této funkce pak vypadá následovně:

$$\frac{dF_n(\theta)}{d\theta} = A_n * (\lambda_n + 1) * \cos(\theta(\lambda_n + 1)) - B_n * (\lambda_n + 1) * \sin(\theta(\lambda_n + 1)) + C_n * (\lambda_n - 1) * \cos(\theta(\lambda_n - 1)) - D_n * (\lambda_n - 1) * \sin(\theta(\lambda_n - 1))$$

Vzhledem k tomu, že úhly  $\theta$  známe dva, máme dohromady čtyři rovnice, které se rovnají nulovému vektoru. Jedná se tedy o soustavu čtyř rovnic, která obsahuje však ještě stále pět neznámých parametrů – kromě  $\lambda_n$ , máme ještě konstanty  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  a  $D_n$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_1(\lambda + 1)) & \cos(\theta_1(\lambda + 1)) & \sin(\theta_1(\lambda - 1)) & \cos(\theta_1(\lambda - 1)) \\ (\lambda + 1)\cos(\theta_1(\lambda + 1)) & -(\lambda + 1)\sin(\theta_1(\lambda + 1)) & (\lambda - 1)\cos(\theta_1(\lambda - 1)) & -(\lambda - 1)\sin(\theta_1(\lambda - 1)) \\ \sin(\theta_2(\lambda + 1)) & \cos(\theta_2(\lambda + 1)) & \sin(\theta_2(\lambda - 1)) & \cos(\theta_2(\lambda - 1)) \\ (\lambda + 1)\cos(\theta_2(\lambda + 1)) & (\lambda + 1)\sin(\theta_2(\lambda + 1)) & (\lambda - 1)\cos(\theta_2(\lambda - 1)) & (\lambda - 1)\sin(\theta_2(\lambda - 1)) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \\ D_n \end{bmatrix}$$

přičemž dále zapíšeme do maticové rovnice:

$$\mathbf{A} * \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad [4.1]$$

Z rovnice 4.1 pak vyplývá, že vektor  $\mathbf{k}$  se musí rovnat nule. Tím pádem by se však stala nulovou celá rovnice a k řešení exponentů singularity pro jednotlivé hodnoty úhlů otevření vrubu  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  bychom nebyli schopni se dopočítat. Užijeme tedy poznatku z matematiky, že když se pravá strana rovnice rovná levé straně rovnice, potom tato rovnice má nekonečně mnoho řešení. Toho docílíme tak, že vypočítáme determinant matice  $\mathbf{A}$   $\det(\mathbf{A})$  a položíme ho roven nule. Tím se dostáváme k nelineární rovnici, která má nekonečně mnoho řešení, pouze dvě však leží v intervalu  $(0, 1)$ . Právě hodnoty exponentu singularity  $\lambda_n$ , které leží v daném intervalu jsou ty, které nás budou zajímat, a prostřednictvím kterých můžeme teoreticky spočítat rozložení napětí v okolí vrubu.

## 4.2 Numerické řešení exponentů singularity

Pro numerické řešení exponentů singularity pro různé konfigurace úhlů  $\theta_1$  a  $\theta_2$  jsme použili nástroj Jupyter notebook založen na programovacím jazyku Python, konkrétně na verzi Python 3.6 a knižnici pro symbolické výpočty v Pythonu, která se jmenuje „SymPy“. Výsledný skript je přiložen v příloze, pro vysvětlení postupu numerického řešení budou uvedeny některé části řešení

### 4.2.1 Definování matice a jejího determinantu

Jak už bylo zmíněno, prvním krokem řešení exponentu singularity je sestavení maticové rovnice (4.1), které uskutečňujeme na základě funkce  $F_n(\theta)$  a její derivací. Řešení pomocí knihovně „sympy“ obnáší zavedení symbolů a definování funkce  $F_n(\theta)$ :

```
In [12]: 1 A, B, C, D, t, l = sp.symbols('r'A B C D \theta \lambda')
2 F=A*sp.sin((l+1)*t)+B*sp.cos((l+1)*t)+C*sp.sin((l-1)*t)+D*sp.cos((l-1)*t)
3 t1,t2 = sp.symbols('theta1,theta2')
4 F
```

```
Out[12]: A sin( $\theta(\lambda + 1)$ ) + B cos( $\theta(\lambda + 1)$ ) + C sin( $\theta(\lambda - 1)$ ) + D cos( $\theta(\lambda - 1)$ )
```

```
In [12]: 1 A, B, C, D, t, l = sp.symbols('r'A B C D \theta \lambda')
2 F=A*sp.sin((l+1)*t)+B*sp.cos((l+1)*t)+C*sp.sin((l-1)*t)+D*sp.cos((l-1)*t)
3 t1,t2 = sp.symbols('theta1,theta2')
4 F
```

```
Out[12]: A sin( $\theta(\lambda + 1)$ ) + B cos( $\theta(\lambda + 1)$ ) + C sin( $\theta(\lambda - 1)$ ) + D cos( $\theta(\lambda - 1)$ )
```

Obr. č. 4.1 Symbolika a funkce

V následujícím kroku pak přidáme k původní funkci ještě její první derivaci podle úhlu  $\theta$ :

```
In [13]: 1 sigma_tt = F
2 sigma_rt = sp.diff(F, t)
```

Obr. č. 4.2: Uskutečnění derivace funkce  $F_n(\theta)$

Na obrázku 4.1 můžeme vidět kromě zavedení globálních neznámých navíc zavedení symbolických proměnných  $t1$  a  $t2$ , které reprezentují úhly  $\theta_1$  a  $\theta_2$ . Po derivaci, která je na obrázku 4.2 můžeme tedy sestavit soustavu čtyř rovnic o pěti neznámých, které se všechny rovnají nule, zapsat následovně:

```
In [14]: 1 eqn1=sigma_tt.subs(t,t1)
2 eqn2=sigma_rt.subs(t,t1)
3 eqn3=sigma_tt.subs(t,-t2)
4 eqn4=sigma_rt.subs(t,-t2)
5 eqn1,eqn2,eqn3,eqn4
```

```
Out[14]: (A sin( $\theta_1(\lambda + 1)$ ) + B cos( $\theta_1(\lambda + 1)$ ) + C sin( $\theta_1(\lambda - 1)$ ) + D cos( $\theta_1(\lambda - 1)$ ),
A( $\lambda + 1$ ) cos( $\theta_1(\lambda + 1)$ ) - B( $\lambda + 1$ ) sin( $\theta_1(\lambda + 1)$ ) + C( $\lambda - 1$ ) cos( $\theta_1(\lambda - 1)$ ) - D( $\lambda - 1$ ) sin( $\theta_1(\lambda - 1)$ ),
-A sin( $\theta_2(\lambda + 1)$ ) + B cos( $\theta_2(\lambda + 1)$ ) - C sin( $\theta_2(\lambda - 1)$ ) + D cos( $\theta_2(\lambda - 1)$ ),
A( $\lambda + 1$ ) cos( $\theta_2(\lambda + 1)$ ) + B( $\lambda + 1$ ) sin( $\theta_2(\lambda + 1)$ ) + C( $\lambda - 1$ ) cos( $\theta_2(\lambda - 1)$ ) + D( $\lambda - 1$ ) sin( $\theta_2(\lambda - 1)$ ))
```

Obr. č. 4.3: Vypsání rovnic s dosazením jednotlivých úhlů

Vzhledem k tomu, že matici nechceme skládat mechanicky, použijeme mezikrok, který nám přiřadí danou část funkce úhlů  $\theta$  pro každý z koeficientů  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  a  $D_n$ :



```
In [22]: 1 koeffeqn1=eqn1.collect((A,B,C,D),evaluate=False)
2 koeffeqn2=eqn2.collect((A,B,C,D),evaluate=False)
3 koeffeqn3=eqn3.collect((A,B,C,D),evaluate=False)
4 koeffeqn4=eqn4.collect((A,B,C,D),evaluate=False)
5 koeffeqn1,koeffeqn2,koeffeqn3,koeffeqn4

Out[22]: ((1 : A sin(θ1(λ + 1)), B : cos(θ1(λ + 1)), C : sin(θ1(λ - 1)), D : cos(θ1(λ - 1))), (1 : A(λ + 1)cos(θ1(λ + 1)),
B : -(λ + 1)sin(θ1(λ + 1)), C : (λ - 1)cos(θ1(λ - 1)), D : -(λ - 1)sin(θ1(λ - 1))), (1 : -A sin(θ2(λ + 1)), B : cos(θ2(λ + 1)),
C : -sin(θ2(λ - 1)), D : cos(θ2(λ - 1))), (1 : A(λ + 1)cos(θ2(λ + 1)), B : (λ + 1)sin(θ2(λ + 1)), C : (λ - 1)cos(θ2(λ - 1)),
D : (λ - 1)sin(θ2(λ - 1)))
```

Obr. č. 4.4: Přirazení funkce proměnné  $\theta$  koeficientům  $A_n, B_n, C_n, D_n$

Po tomto kroku už můžeme bez potíží sestavit matici  $A$ , která bude mít rozměr  $4 \times 4$  a bude obsahovat na jednotlivých pozicích funkce úhlů  $\theta$  spolu s exponentem singularity  $\lambda_n$ :

```
In [16]: 1 A=sp.Matrix([[koeffeqn1[A],koeffeqn1[B],koeffeqn1[C],koeffeqn1[D]], \
2 [koeffeqn2[A],koeffeqn2[B],koeffeqn2[C],koeffeqn2[D]], \
3 [koeffeqn3[A],koeffeqn3[B],koeffeqn3[C],koeffeqn3[D]], \
4 [koeffeqn4[A],koeffeqn4[B],koeffeqn4[C],koeffeqn4[D]]])
5 A

Out[16]: 
$$\begin{bmatrix} \sin(\theta_1(\lambda + 1)) & \cos(\theta_1(\lambda + 1)) & \sin(\theta_1(\lambda - 1)) & \cos(\theta_1(\lambda - 1)) \\ (\lambda + 1)\cos(\theta_1(\lambda + 1)) & -(\lambda + 1)\sin(\theta_1(\lambda + 1)) & (\lambda - 1)\cos(\theta_1(\lambda - 1)) & -(\lambda - 1)\sin(\theta_1(\lambda - 1)) \\ -\sin(\theta_2(\lambda + 1)) & \cos(\theta_2(\lambda + 1)) & -\sin(\theta_2(\lambda - 1)) & \cos(\theta_2(\lambda - 1)) \\ (\lambda + 1)\cos(\theta_2(\lambda + 1)) & (\lambda + 1)\sin(\theta_2(\lambda + 1)) & (\lambda - 1)\cos(\theta_2(\lambda - 1)) & (\lambda - 1)\sin(\theta_2(\lambda - 1)) \end{bmatrix}$$

```

Obr. č. 4.5: Sestavení matice  $A$

Dále informačně uvedu, jak vypadá determinant této matice, který pokládáme roven nule:

```
In [21]: 1 A.det()

Out[21]: 
$$\begin{aligned} & \lambda^2 \sin^2(\lambda\theta_1 - \theta_1) \sin^2(\lambda\theta_2 + \theta_2) + \lambda^2 \sin^2(\lambda\theta_1 - \theta_1) \cos^2(\lambda\theta_2 + \theta_2) - 2\lambda^2 \sin(\lambda\theta_1 - \theta_1) \sin(\lambda\theta_1 + \theta_1) \sin(\lambda\theta_2 - \theta_2) \sin(\lambda\theta_2 + \theta_2) - 2\lambda^2 \sin \\ & (\lambda\theta_1 - \theta_1) \sin(\lambda\theta_1 + \theta_1) \cos(\lambda\theta_2 - \theta_2) \cos(\lambda\theta_2 + \theta_2) + 2\lambda^2 \sin(\lambda\theta_1 - \theta_1) \sin(\lambda\theta_2 - \theta_2) \cos(\lambda\theta_1 + \theta_1) \cos(\lambda\theta_2 + \theta_2) - 2\lambda^2 \sin(\lambda\theta_1 - \theta_1) \sin \\ & (\lambda\theta_2 + \theta_2) \cos(\lambda\theta_1 + \theta_1) \cos(\lambda\theta_2 - \theta_2) + \lambda^2 \sin^2(\lambda\theta_1 + \theta_1) \sin^2(\lambda\theta_2 - \theta_2) + \lambda^2 \sin^2(\lambda\theta_1 + \theta_1) \cos^2(\lambda\theta_2 - \theta_2) - 2\lambda^2 \sin(\lambda\theta_1 + \theta_1) \sin \\ & (\lambda\theta_2 - \theta_2) \cos(\lambda\theta_1 - \theta_1) \cos(\lambda\theta_2 + \theta_2) + 2\lambda^2 \sin(\lambda\theta_1 + \theta_1) \sin(\lambda\theta_2 + \theta_2) \cos(\lambda\theta_1 - \theta_1) \cos(\lambda\theta_2 - \theta_2) + \lambda^2 \sin^2(\lambda\theta_2 - \theta_2) \cos^2(\lambda\theta_1 + \theta_1) \\ & - 2\lambda^2 \sin(\lambda\theta_2 - \theta_2) \sin(\lambda\theta_2 + \theta_2) \cos(\lambda\theta_1 - \theta_1) \cos(\lambda\theta_1 + \theta_1) + \lambda^2 \sin^2(\lambda\theta_2 + \theta_2) \cos^2(\lambda\theta_1 - \theta_1) + \lambda^2 \cos^2(\lambda\theta_1 - \theta_1) \cos^2(\lambda\theta_2 + \theta_2) - 2\lambda^2 \cos \\ & (\lambda\theta_1 - \theta_1) \cos(\lambda\theta_1 + \theta_1) \cos(\lambda\theta_2 - \theta_2) \cos(\lambda\theta_2 + \theta_2) + \lambda^2 \cos^2(\lambda\theta_1 + \theta_1) \cos^2(\lambda\theta_2 - \theta_2) - \sin^2(\lambda\theta_1 - \theta_1) \sin^2(\lambda\theta_2 + \theta_2) - \sin^2(\lambda\theta_1 - \theta_1) \cos^2 \\ & (\lambda\theta_2 + \theta_2) + 2 \sin(\lambda\theta_1 - \theta_1) \sin(\lambda\theta_1 + \theta_1) \sin(\lambda\theta_2 - \theta_2) \sin(\lambda\theta_2 + \theta_2) - 2 \sin(\lambda\theta_1 - \theta_1) \sin(\lambda\theta_1 + \theta_1) \cos(\lambda\theta_2 - \theta_2) \cos(\lambda\theta_2 + \theta_2) - 2 \sin \\ & (\lambda\theta_1 - \theta_1) \sin(\lambda\theta_2 - \theta_2) \cos(\lambda\theta_1 + \theta_1) \cos(\lambda\theta_2 + \theta_2) - 2 \sin(\lambda\theta_1 - \theta_1) \sin(\lambda\theta_2 + \theta_2) \cos(\lambda\theta_1 + \theta_1) \cos(\lambda\theta_2 - \theta_2) - \sin^2(\lambda\theta_1 + \theta_1) \sin^2 \\ & (\lambda\theta_2 - \theta_2) - \sin^2(\lambda\theta_1 + \theta_1) \cos^2(\lambda\theta_2 - \theta_2) - 2 \sin(\lambda\theta_1 + \theta_1) \sin(\lambda\theta_2 - \theta_2) \cos(\lambda\theta_1 - \theta_1) \cos(\lambda\theta_2 + \theta_2) - 2 \sin(\lambda\theta_1 + \theta_1) \sin(\lambda\theta_2 + \theta_2) \cos \\ & (\lambda\theta_1 - \theta_1) \cos(\lambda\theta_2 - \theta_2) - \sin^2(\lambda\theta_2 - \theta_2) \cos^2(\lambda\theta_1 + \theta_1) - 2 \sin(\lambda\theta_2 - \theta_2) \sin(\lambda\theta_2 + \theta_2) \cos(\lambda\theta_1 - \theta_1) \cos(\lambda\theta_1 + \theta_1) - \sin^2(\lambda\theta_2 + \theta_2) \cos^2 \\ & (\lambda\theta_1 - \theta_1) - \cos^2(\lambda\theta_1 - \theta_1) \cos^2(\lambda\theta_2 + \theta_2) + 2 \cos(\lambda\theta_1 - \theta_1) \cos(\lambda\theta_1 + \theta_1) \cos(\lambda\theta_2 - \theta_2) \cos(\lambda\theta_2 + \theta_2) - \cos^2(\lambda\theta_1 + \theta_1) \cos^2(\lambda\theta_2 - \theta_2) \end{aligned}$$

```

Obr. č. 4.6: Determinant matice  $A$

#### 4.2.2 Numerický výpočet exponentu singularity

Po tom, co jsme vyjádřili determinant matice zůstává už jenom numerický výpočet koeficientů, kterého prvním krokem je dosazení konkrétních hodnot za úhly:

```
In [24]: 1 # Zavedení vstupů pro úhly Theta 1 a Theta 2
2
3 t1=sp.pi
4 t2=0.85*sp.pi
```

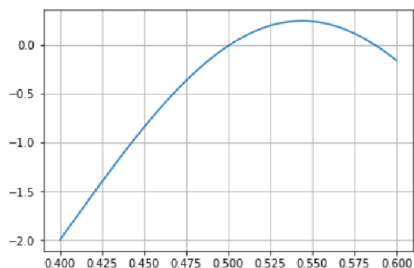
Obr. č. 4.7: Dosazení za úhly

Další řešení už přechází v numerický výpočet, kde v prvním kroku položíme determinant roven nule, následně vyjádřím z funkce  $\lambda_n$ , vše pomocí příkazu „*lambdify*“, který slouží právě pro zjednodušení rovnic pro numerický výpočet. Dále si necháme vykreslit graf, kde se naše funkce závislá na úhlech  $\theta_1$  a  $\theta_2$  přetíná s funkční hodnotou 0. Na intervalu  $(0,1)$  by tyto případy měli být dva. Pokud tomu tak není, exponent singularity s vysokou pravděpodobností nabývá komplexních hodnot. Vykreslení grafu probíhá s pomocí knihovny „*matplotlib*“.

```
In [85]: 1 # Vytvoření funkce pro numerický výpočet exponentů singularity
2
3 detA=sp.lambdify(1,sp.det(A))
```

```
In [86]: 1 # Vytvoření grafu
2
3 x_plot=np.linspace(0.4,0.6,100)
4 y_plot=detA(x_plot)
```

```
In [87]: 1 # Vykreslení grafu
2
3 fig,ax=plt.subplots()
4 ax.plot(x_plot,y_plot)
5 plt.grid(True)
```



Obr. č. 4.8: Vyřešení rovnice pro danou konfiguraci úhlů

V posledním kroku už jen vypočítáme dle nastavení intervalu x-ové souřadnice bodů, kde se funkce přetíná s nulou, a které jsou tedy hledaným řešením exponentu singularity. Tyto výpočty provedeme pro ověření, kromě knihovny „sympy“ i v knihovně „scipy“ a sice Newtonovou interpolační metodou:

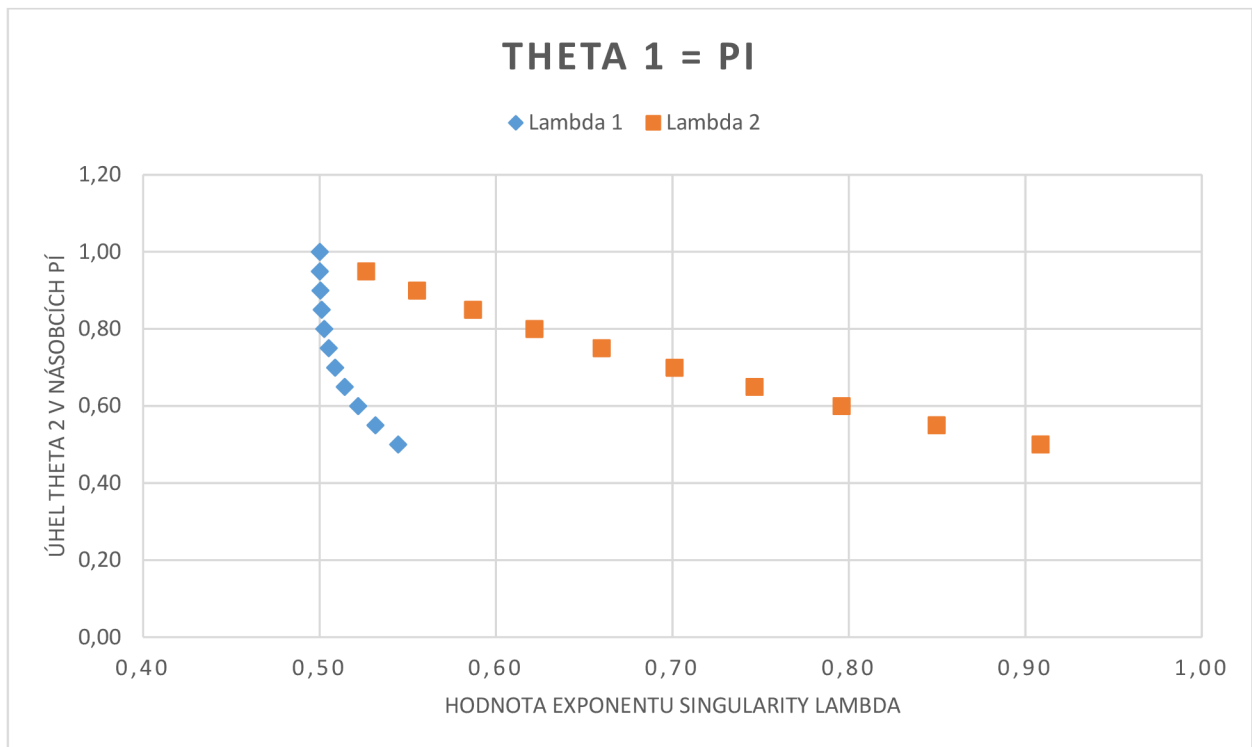
```
In [88]: 1 # Numerické řešení hodnot pro daný interval prostřednictvím nelineárního řešiče knihovny sympy a Newtonovy metody z
2 # knihovny scipy
3
4 sol_sympy=sp.nsolve(sp.det(A),0.6)
5 sol_scipy=newton(detA,0.6)
6 print(sol_sympy,sol_scipy)

0.586949844227649 0.586949844227727
```

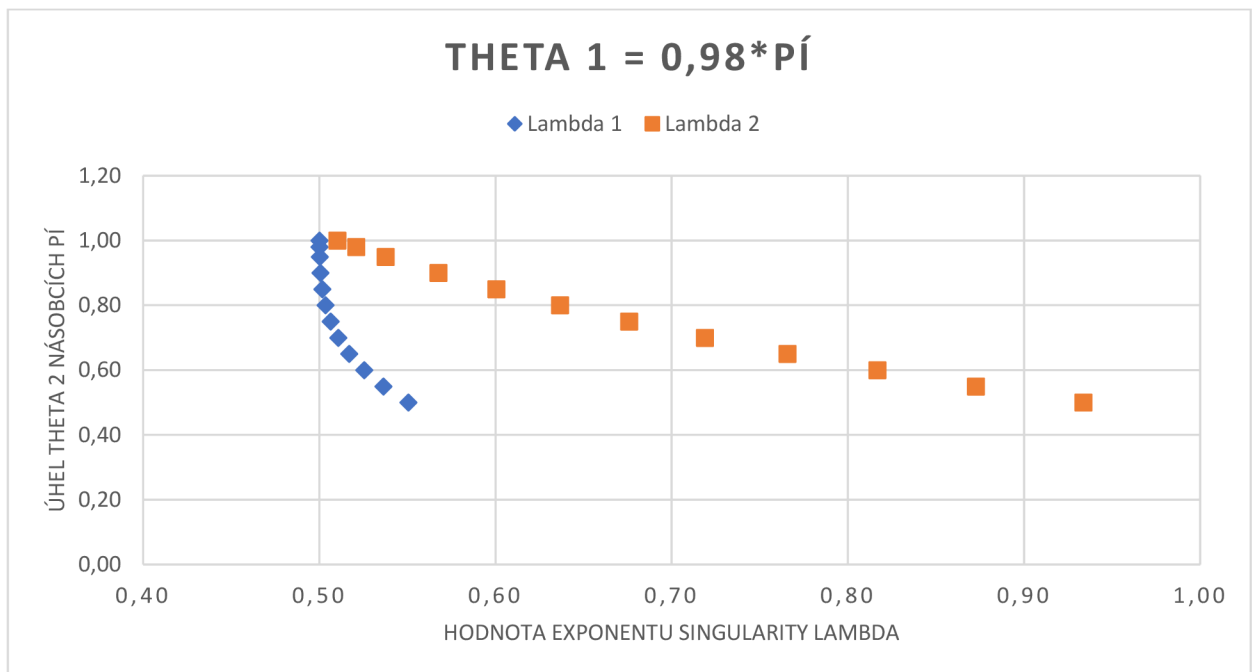
Obr. č. 4.9: Provedení finálního numerického řešení

### 4.3 Vyčíslení exponentů singularity pro určité konfigurace

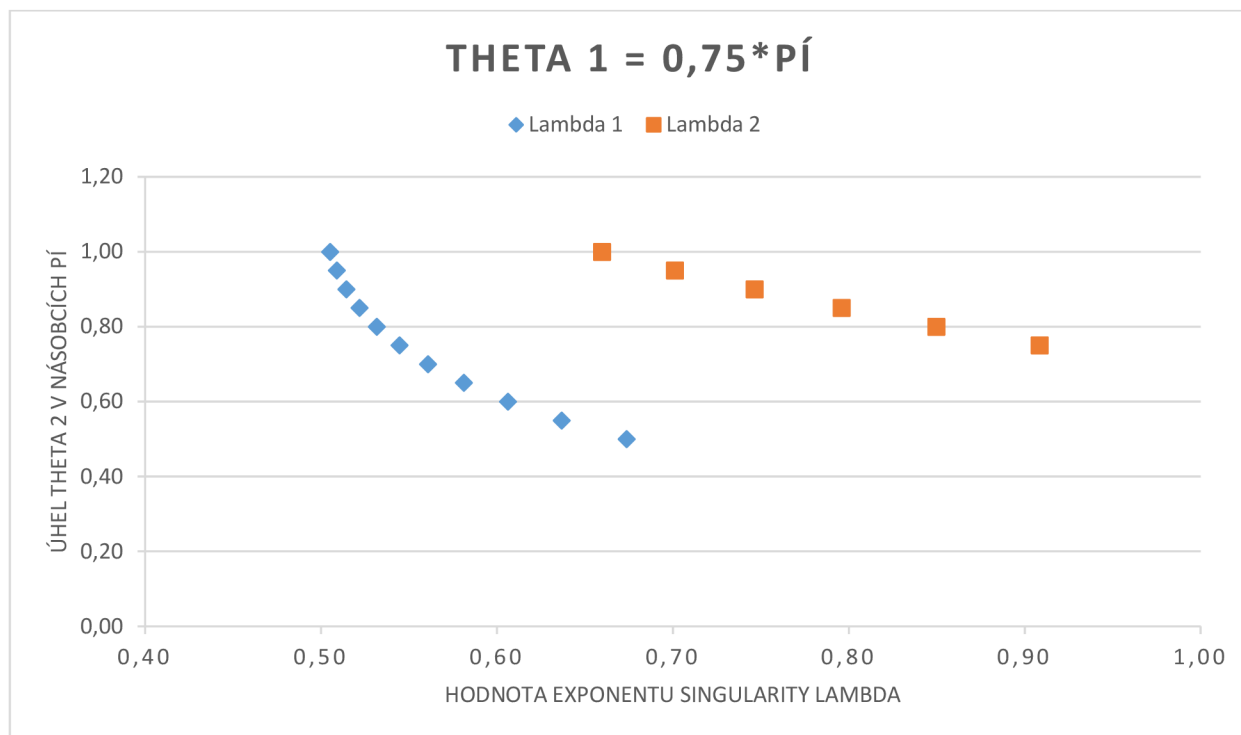
Navržený program jsme využili pro výpočet exponentů singularity pro různé konfigurace úhlů  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  a následně jsme hledali závislosti mezi otevřením vrubu popsáním úhly a exponentem singularity, prostřednictvím kterého, bychom spočítali napětí pro konkrétní poloměry. Jeden úhel jsme si zadali jako konstantu (ve všech případech  $\theta_1$ ), druhý úhel se měnil po 0,05 - násobcích  $\pi$ . Tabulka spočtených hodnot je k dispozici v příloze. Dále jsem z těchto hodnot sestrojil grafy pro posouzení závislosti mezi úhlem rozevření a exponentem singularity. Grafy vypadají následovně:



*Graf č. 4.1: Úhel  $\theta_1$  je roven  $\pi$*



*Graf č. 4.2: Úhel  $\theta_1$  je roven  $\pi * 0,98$*



Graf č. 4.3: Úhel  $\theta_1$  je roven  $\pi * 0,75$

V grafech je možné jednoznačně pozorovat, že obě řešení exponentu singularity pro interval  $(0,1)$  se zvětšujícím úhlem otevření vrubu rostou. I když konkrétní čísla pro jednotlivé případy zcela shodní nejsou, průběh těchto růstů je přibližně stejný. Můžeme pozorovat, že řešení pro daný interval jestvuje právě jedno řešení tehdy, když je celkový úhel větší než  $\frac{\pi}{2}$  rad, nebo když je úhel rozevření nulový, jak ukazuje horní bod v grafu 3.1. Pokud vyšetřujeme případy pro úhel  $\theta_2$ , který se zmenšuje od  $\pi$  směrem dole tak, že celkový úhel rozevření se zvětšuje pozorujeme rostoucí rozdíl mezi jednotlivými řešeními pro  $\lambda_n$ .

## 5 Závěr

Cílem této práce bylo pochopení některých základních principů lomové mechaniky, obeznámení se s její historií, odvození analytického popisu rozložení napětí v okolí ostrého vrubu a numerický výpočet exponentu singularity pro vybrané konfigurace geometrie.

V první části jsem se zabýval lomovou mechanikou jako takou, nastudoval jsem si a zpracoval její historický vývoj, popsal přístupy k řešení problematiky trhlin  $G$  – koncepcí a  $K$  – koncepcí, respektive shrnul jejich výhody, nevýhody a možnosti aplikovatelnosti. Na příkladech lodí Liberty, nebo letadel De Havillan Comet jsem demonstroval, proč je nutné se touto problematikou zabývat a proč ji nemůžeme opomínat.

Další část byla věnována pojednání o módech zatížení, které nám pomáhají popsat a blíže specifikovat napětí, které se vyskytuje v okolí kořene ostrého vrubu. V této části jsem se dále věnoval analytickému odvození Airyho napěťové funkce, která je pro popis námi hledaného napětí nezbytná a její transformaci do polárních souřadnic. Následně jsme analyticky odvodili tzv. Williamsovu metodu pro zjištění napětí na základě poznatků o Airyho napěťové funkci. Williamsovu metodu jsme následně použili pro zjištění exponentů singularity pro různé geometrie vrubů.

Ve třetí části jsme se zabývali numerickým řešením exponentů singularity. Tento výpočet jsme prováděli pomocí prostředí Jupyter notebook, který funguje na platformě jazyka Python. Neméně důležitou součástí byly knihovny pro řešení symbolických úloh „SymPy“ a pro řešení složitých problémů a nelinearit „Scipy“. Prostřednictvím postupu popsaného v části o analytickém odvození jsme vypracovali skript, který při zadání okrajových podmínek o velikostech úhlů popisujících geometrii vrubu byl schopen najít řešení pro exponenty singularity  $\lambda_n$  nacházející se v intervalu mezi 0 a 1. Za předpokladu, že jeden úhel z dvojice bude konstantní jsme spočítávali exponenty pro měnící se druhý úhel. To jsme udělali pro několik hodnot úhlu konstantního, kde pro každou bylo několik úhlů, které se měnily. Z těchto údajů jsme sestrojili grafy závislosti exponentu singularity na úhle otevíření vrubu. Tyto závislosti jednoznačně prokázali souvislost mezi tímto exponentem a úhlem. V práci bude dále možné pokračovat určením velikosti napětí pro některé vybrané případy a detailnímu popisu vysoko-napěťového gradientu v okolí kořene ostrého vrubu.

## 6 Literatura

- [1] SUN, C.T. – JIN, Z.-H.. *Fracture mechanics*. 1 ed. Amsterdam: Academic Press, 2012, 311 p. ISBN 978-0-12-385001-0.
- [2] ONDRÁČEK, Emanuel, Jan VRBKA a Přemysl JANÍČEK. *Mechanika těles: pružnost a pevnost. II*. Brno: CERM, 2002, 262 s. : il. ; 30 cm. ISBN 80-214-2214-9.
- [3] BROBERG, Bertram K. *Cracks and fracture*. San Diego: Academic Press, 1999, xvi, 752 s. : il. ISBN 0-12-134130-5.

## 7 Přílohy

1. [Exponent singularity.html](#) – vyobrazení programu na výpočet exponentů singularity pouze pro čtení
2. [Exponent singularity.ipynb](#) – program pro výpočet exponentů singularity ve formátu pro Jupyter notebook
3. [BP – výsledky.xlsx](#) – tabulka vypočítaných hodnot, zdrojový soubor pro grafy