UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Singulární Dirichletovy úlohy pro rovnici druhého řádu

Mgr. Jakub Stryja

DISERTAČNÍ PRÁCE

Školitel: Prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.

Olomouc, 2011

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem na základě zadání vytvořil tuto disertační práci samostatně pod vedením paní profesorky RNDr. Ireny Rachůnkové, DrSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Ostravě dne 25. 8. 2011

Poděkování

Rád bych poděkoval paní profesorce Ireně Rachůnkové za čas, který věnovala konzultacím, za její cenné připomínky a rady a za její obětavý přístup, který umožnil vznik této práce. Dále bych rád poděkoval své rodině i přátelům, a především své ženě za podporu, za trpělivost a pochopení, které se mnou měli.

Anotace

Teorii diferenciálních rovnic je v současné době věnovaná velká pozornost. Je to způsobeno množstvím aplikací v různých vědních disciplínách i v technické praxi.

Hlavním cílem této práce je nalézt postačující podmínky pro existenci řešení singulární okrajové úlohy druhého řádu. K důkazu existence řešení jsou využity metody teorie diferenciálních rovnic. Jedná se především o metodu apriorních odhadů a metodu horních a dolních funkcí. Dále jsou využity principy funkcionální analýzy, a to konkrétně teorie pevných bodů v Banachových prostorech.

V první kapitole jsou zavedeny základní definice. Jsou zde uvedeny věty, které jsou v práci využity a dále je nastíněn úvod do problematiky.

Druhá kapitola se zabývá regulárním problémem. Jsou zde dokázány věty zaručující existenci řešení regulárního problému včetně jejich odhadů. Tyto věty jsou využity ve třetí kapitole.

Hlavní výsledky práce jsou obsaženy ve třetí kapitole. Zde jsou nejprve vysloveny dva obecné existenční principy pro singulární problém a s jejich pomocí dokázány tři aplikace. V první aplikaci je studován problém bez ϕ-Laplaciánu. Singularity můžou být pouze v prostorových proměnných. Výsledky této aplikace jsou uvedeny v článku [41]. V druhé aplikaci je studován problém s ϕ-Laplaciánem. Singularity můžou být v časové a první prostorové proměnné. Tato kapitola je založena na práci [42]. V třetí aplikaci je opět studován problém s ϕ-Laplaciánem a singularity mohou být ve všech třech proměnných. Dosažené výsledky se objeví v článku [43].

Další možnosti zkoumání jsou vidět v článku [49]. Jsou zde na reálné polopřímce studovány singulární rovnice, které zobecňují rovnice zkoumané například v hydrodynamice nebo v nelineární teorii pole.

Annotation

On the differential equations theory is given focus now, because this theory has many applications in various disciplinary and in technical practice.

The main aim of thesis is to give sufficient conditions for solvability of second order singular Dirichlet problem for ordinary differential equations. Main tools of investigation are the method of lower and upper functions, method of apriori estimates for differential equations and fixed point theory in Banach spaces.

In the first section we focus on basic definitions and theorems, which are used in the thesis and further on the introduction to the problem is described briefly.

The second section covers the regular problem. Here theorems give existence of solutions and estimates of solutions too. These results are used in the third section.

The main result of this work is contained in the third section. First we prove two general existence principles for singular problem and then we use these principles to prove three applications. In the first application we study problem without ϕ-Laplacian. Singularities can be only in space variables. The results are contained in [41]. In the second application we consider the problem with ϕ-Laplacian and singularities can be in the time and in the first space variable. This application is based on the paper [42]. In the third application the problem with ϕ-Laplacian is considered again. Singularities can be in all three variables. Results of this application appear in [43].

The next ways are contained in [49]. This work studies singular equations on the real half-line, which generalize equations studied for example in hydrodynamics or nonlinear field theory.

Obsah

1 Úvod **7**
1.1 Současný stav problematiky . . . 7
1.2 Cíle disertační práce . . . 8
1.3 Použité metody . . . 9
1.4 Výsledky disertační práce . . . 9
1.5 Označení a základní definice . . . 10
1.6 Věty použité v práci . . . 12
1.7 Úvod do problematiky . . . 14
1.7.1 Singularity . . . 14
1.7.2 Formulace problému . . . 16
1.7.3 Řešení . . . 16
1.7.4 Singulární body . . . 22
1.7.5 Horní a dolní funkce . . . 23

2 Regulární problém **27**
2.1 Existenční věta Fredholmova typu . . . 27
2.2 Metoda horních a dolních funkcí . . . 33

3 Singulární problém **35**
3.1 Existenční principy . . . 36
3.2 První aplikace . . . 41
3.3 Druhá aplikace . . . 54
3.4 Třetí aplikace . . . 65

4 Závěr **75**

Literatura **78**

Příloha **82**

1 Úvod

1.1 Současný stav problematiky

Ve fyzice a jiných vědách často narážíme na problém nalezení řešení diferenciálních rovnic typu
$$u^{(n)}(t) = f\left(t, u(t), u'(t), \cdots, u^{(n-1)}(t)\right) \ .$$
Klasické výsledky se týkají regulárních problémů kde platí, že funkce f splňuje Carathéodoryho podmínky. V praxi se však často ukazuje, že funkce f Carathéodoryho podmínky nesplňuje a problém je tedy singulární.

Pro ilustraci uveďme příklad z hydrodynamiky a z teorie hraničních vrstev viz [16], [17] a [18]. Jedná se o rovnici druhého řádu

$$u''(t) + \frac{\psi(t)}{u^{\lambda}(t)} = 0 \ , \tag{1.1}$$

kde $\lambda \in (0; \infty)$, $\psi \in C\,(0; 1)$ a $\psi \notin L^1\,\langle 0; 1\rangle$. Tato rovnice je známá jako zobecněná Emden-Fowlerova rovnice. Spolu s Dirichletovými počátečními podmínkami ji studoval v roce 1979 Taliaferro viz [55] a poté mnoho jiných autorů. Funkce $f(t, x) = \psi(t)x^{-\lambda}$ nesplňuje Carathéodoryho podmínky na intervalu $\langle 0; 1\rangle \times \langle 0; \infty\,)$ a problém najít nezáporné řešení této rovnice je singulární.

Obecnými existenčními principy pro rovnice vyšších řádů se singularitami v prostorových proměnných se zabývali například Agarwal, Eloe, Henderson, Lakshmikantham, O'Regan, Rachůnková a Staněk.

Obecné existenční principy pro diferenciální rovnice druhého řádu byly studovány Agarvalem, O'Reganem a Staňkem v článku [8] nebo Rachůnkovou, Staňkem a Tvrdým v [39]. Některé další principy pro regulární rovnice s ϕ-Laplaciánem pro Dirichletovu úlohu jsou uvedeny v [32].

Se systematickým studiem Dirichletova problému, který má současně časové a prostorové singularity, začal v roce 1979 Taliaferro v článku [55]. Nalezl zde nutné a postačující podmínky pro existenci řešení rovnice (1.1). V roce 1988 studovali obecnější problém

$$u''(t) + f(t, u(t), u'(t)) = 0 \ , \quad u(0) = u(1) = 0 \ , \tag{1.2}$$

Bobisud, O'Regan a Royalty. Jejich výsledky vyšly v článku [14]. V roce 1989 Gatica, Oliker a Waltman dokázali větu o pevném bodě pro klesající operátor na kuželu a pomocí této věty ukázali existenci řešení Dirichletova problému

$$u''(t) + f(t, u(t)) = 0 \ , \quad u(0) = u(T) = 0 \ . \tag{1.3}$$

V těchto pracích byla funkce f pro velká x a $|y|$ omezená. Rozšíření těchto výsledků na funkce, které mohou mít ve třetí proměnné y lineární růst, publikovali v roce 1991 Baxley [11] a v roce 1992 Tineo [56]. V roce 1996 v článku [2] Agarwal a O'Regan dokázali existenci kladného řešení pro funkci f, která měla superlineární růst v proměnné x. V roce 1999 bylo poprvé dosaženo násobných výsledků. V článku [4] Agarwal s O'Reganem dokázali existenci dvou různých kladných w-řešení. Všechny výše uvedené výsledky jsou založeny na faktu, že nelinearity zkoumané v těchto rovnicích jsou kladné.

Odstranit tento předpoklad pro rovnici (1.3) se podařilo Lomtatidzemu v roce 1987 v článku [28] nebo v roce 1994 Habetsovi se Zanolinem v [21] a pro rovnici (1.2) v roce 2002 Jiangovi v článku [24] a v roce 2003 Agarwalovi se Staňkem v článku [9] a také Lomtatidzemu s Torresem v [29].

Výsledky zabývající se problémem s ϕ-Laplaciánem a singularitami měnícími znaménko publikovali v roce 1996 Wang s Gaem v práci [59], v roce 2001 v článku [23] Jiang a v roce 2003 Agarwal, Lü a O'Regan v [1].

Další výsledky pro problémy s kladnými, ale i znaménko měnícími singularitami můžeme najít v monografiích Kiguradzeho [25] (1975), Kiguradzeho se Shekhterem [26] (1987), O'Regana [33] (1994), Agarwala s O'Reganem [5] (2003) a [6] (2004). Dále existuje velká skupina článků, které zkoumají Dirichletův problém pouze se singularitami v časové proměnné. Některé z výsledků jsou obsaženy ve výše uvedených monografiích.

První výsledky týkající se Dirichletova problému, který může mít prostorové singularity prvního i druhého typu současně, vyšly v práci Staňka [52] v roce 2001 a v roce 2003 v práci Rachůnkové a Staňka [35]. Výsledky týkající se singulárních problémů na kompaktním intervalu $\langle 0; T\rangle$ jsou shrnuty v [39] (2006) a také v monografii [40] (2008).

Numerické algoritmy a výpočty řešení pro singulární Dirichletovy problémy vyšly v pracích Baxleyho [12] (1995) a Baxleyho s Thompsonem [13] (2000).

1.2 Cíle disertační práce

Práce se zabývá existencí řešení singulární úlohy druhého řádu. Jedná se o Dirichletův problém pro obyčejnou diferenciální rovnici s ϕ-Laplaciánem typu

$$(\phi(u'(t)))' + f(t, u(t), u'(t)) = 0\ , \quad u(0) = u(T) = 0\ .$$

Funkce $f(t, x, y)$ může mít singularity v časové proměnné t v bodech 0 a T a v prostorových proměnných pro $x = 0$ a $y = 0$.

Cílem je pro určitou třídu funkcí f dokázat existenci řešení úlohy, které je kladné na intervalu $(0; T)$. Práce je rozdělena do čtyř částí. V první části je nastíněn úvod do problematiky. Je zde zavedeno základní označení a jsou vysloveny věty, které potřebujeme k řešení naší úlohy. Druhá část se zabývá existencí řešení pomocné regulární úlohy. Jsou zde vysloveny věty zaručující nejenom existenci řešení, ale také zaručující odhady těchto řešení. V třetí části se dostáváme k řešení naší singulární úlohy. Nejprve jsou vysloveny obecné existenční principy zajišťující existenci řešení úlohy. Tyto principy nekladou požadavky přímo na funkci f a nejsou tedy vhodné pro praktické využití. Dále jsou zkoumány aplikace těchto principů vedoucí k nalezení řešení kladného na intervalu $(0; T)$, které kladou požadavky přímo na funkci f. Čtvrtá část se zabývá singulárním problémem na reálné polopřímce.

Analytický důkaz existence řešení je velmi důležitý pro numerické řešení problému. Pokud totiž nemáme zaručenu existenci řešení, nevíme, zda má vůbec smysl úlohu numericky řešit. To platí zejména pro singulární úlohy, v okolí jejichž singularit numerické simulace často selhávají.

1.3 Použité metody

V práci jsou použity metody teorie diferenciálních rovnic a funkcionální analýzy.

První z nich je metoda apriorních odhadů řešení. U apriorních odhadů nemáme zaručenu existenci řešení. Ukážeme však, že pokud bude řešení existovat, pak musí splňovat tyto odhady. Apriorních odhadů využijeme v důkazech aplikačních vět ke konstrukci omezené množiny Ω, která splňuje předpoklady obecného principu.

Ve druhé a třetí aplikaci je použita metoda horních a dolních funkcí. Hlavní podmínkou aplikace této metody je existence dolní a horní funkce úlohy. Jedná se o funkce splňující diferenciální nerovnosti odvozené z diferenciální rovnice dané úlohy a dále splňující nerovnosti vycházející z okrajových podmínek úlohy. V našem případě jsou funkce dobře uspořádané, tj. horní funkce je větší nebo rovna dolní funkci na intervalu $\langle 0;T\rangle$. Řešení úlohy potom leží mezi těmito funkcemi.

Dalším důležitým nástrojem je teorie pevných bodů v Banachových prostorech. Okrajovou úlohu převedeme do operátorového tvaru, problém hledání řešení okrajové úlohy na úlohu hledání pevného bodu operátoru. V práci je k důkazu existence pevného bodu použita Schauderova věta o pevném bodě. K tomu, abychom mohli aplikovat Schauderovu větu musíme ukázat, že náš operátor je kompaktní a zobrazuje omezenou množinu Ω samu na sebe. Podstatnou část důkazu tedy tvoří apriorní odhady řešení, které je možné učinit právě díky vlastnostem dolních a horních funkcí. K důkazu kompaktnosti operátoru se používá Arzelà - Ascoliho věta, která mluví o existenci konvergentní podposloupnosti posloupnosti spojitých funkcí.

1.4 Výsledky disertační práce

Hlavní výsledky práce jsou obsaženy v její třetí kapitole. Nejprve jsou vysloveny dva obecné existenční principy (věty 3.2 a 3.3) a s jejich pomocí dokázány tři aplikace (věty 3.6, 3.13 a 3.16) ve formě nových existenčních kritérií.

V první aplikaci je studován problém bez ϕ-Laplaciánu. Singularity můžou být pouze v prostorových proměnných. Funkce $f(t,x,y)$ může mít slabou i silnou singularitu v proměnné x a slabou singularitu v proměnné y. Hledáme řešení kladné na intervalu $(0;T)$. Platí tedy, že $f(t,x,y) \in Car(\langle 0;T\rangle \times \mathcal{D})$, kde $\mathcal{D} = (0;\infty) \times \mathbb{R}_0$. Dále má funkce $f(t,x,y)$ v proměnných x, y sublineární růst nebo lineární růst s malými koeficienty. Výsledek je formulován ve větě 3.6 a vyšel v článku [41]. První existenční výsledky pro Dirichletův problém se singularitami v obou prostorových proměnných byly zveřejněny Staňkem v článku [52]. Předpokládalo se zde, že funkce $f(t,x,y)$ je kladná a v okolí singulárního bodu $x = 0$ je kontrolována integrovatelnou funkcí $\omega_0(x)$ (jednalo se tedy o slabou singularitu). V první aplikaci je tento výsledek zobecněn.

V druhé aplikaci je studován problém s ϕ-Laplaciánem. Singularity můžou být v časové proměnné t a první prostorové proměnné x. Funkce $f(t,x,y)$ může mít v proměnné x

libovolný a v proměnné y kvadratický růst. Tato kapitola je založena na práci [42] a výsledek je obsažen ve větě 3.13. Věta zobecňuje větu 3.6 a také dřívější výsledky Agarwala, Lüa s O'Reganem [1], Jianga [23], Staňka [53] a Wanga s Gaoem [59].

Ve třetí aplikaci je opět studován problém s ϕ-Laplaciánem. Singularity mohou být ve všech třech proměnných. Funkce $f(t, x, y)$ může mít časové singularity pro $t = 0$ a $t = T$ a dále může mít silné i slabé singularity v nule v prostorových proměnných x i y. Navíc, narozdíl od předchozí aplikace, může mít funkce f v proměnných x a y libovolný růst. Dosažené výsledky jsou uvedeny ve větě 3.16 a objeví se v článku [43].

Všechny tři články jsou rovněž obsaženy v monografii [40] v kapitole 7, Dirichletův problém.

Ve čtvrté části je řešen singulární problém na reálné polopřímce. Je zde zkoumána nejen existence řešení, ale také jeho chování pro $t \to \infty$.

1.5 Označení a základní definice

Symbolem $\mathbb{N}$ označujeme množinu všech přirozených čísel, symbolem $\mathbb{R}$ značíme množinu všech reálných čísel. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ rozumíme symbolem $\mathbb{R}^n$ n-tou kartézskou mocninu množiny $\mathbb{R}$. Na $\mathbb{R}$ uvažujeme σ-algebru všech lebesgueovsky měřitelných množin a na tomto systému definovanou Lebesgueovu míru.

Je-li $A \subseteq \mathbb{R}$ lebesgueovsky měřitelná množina, říkáme, že nějaké tvrzení platí pro skoro všechna $x \in A$ (pro s. v. $x \in A$, skoro všude v A), existuje-li množina nulové míry $B \subseteq A$ tak, že tvrzení platí pro všechna $x \in A \setminus B$.

V dalším textu budeme používat následující označení:

$\emptyset$ - prázdná množina; $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $J \subseteq \mathbb{R}$; $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$; $\operatorname{meas} J$ - Lebesgueova míra množiny J; $\min A$ - minimum množiny A; $\max A$ - maximum množiny A; $\inf A$ - infimum množiny A; $\sup A$ - supremum množiny A; $\operatorname{sgn} x$ - funkce signum.

- $C\langle a; b\rangle$ - Banachův prostor funkcí spojitých na intervalu $\langle a; b\rangle$ s normou

$$\|f\|_{C\langle a;b\rangle} = \max\{|f(t)| : \ t \in \langle a; b\rangle\} \ .$$

- $C^m\langle a; b\rangle$ - Banachův prostor funkcí spojitých se spojitými derivacemi až do řádu m na intervalu $\langle a; b\rangle$ s normou

$$\|f\|_{C^m\langle a;b\rangle} = \sum_{i=0}^{m} \left\|f^{(i)}\right\|_{C\langle a;b\rangle} \ .$$

- $C(a; b)$ - množina funkcí spojitých na intervalu $(a; b)$.
- $C^m(a; b)$ - množina funkcí spojitých se spojitými derivacemi až do řádu m na intervalu $(a; b)$.
- $AC\langle a; b\rangle$ - množina absolutně spojitých funkcí na intervalu $\langle a; b\rangle$.

- $AC_{loc}(J)$ - množina absolutně spojitých funkcí $f \in AC\langle a;b\rangle$ pro všechny $\langle a;b\rangle \subset J$.
- $AC^1\langle a;b\rangle$ - množina funkcí s absolutně spojitou derivací na intervalu $\langle a;b\rangle$.
- $L\langle a;b\rangle$ - Banachův prostor funkcí lebesgueovsky integrovatelných na intervalu $\langle a;b\rangle$ s normou
$$\|f\|_{L\langle a;b\rangle} = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\ .$$
- $L_{loc}(J)$ - množina lebesgueovsky integrovatelných funkcí $f \in L\langle a;b\rangle$ pro všechny $\langle a;b\rangle \subset J$.
- $Lip\langle a;b\rangle$ - množina funkcí spňujících na intervalu $\langle a;b\rangle$ Lipchitzovu podmínku, tj. $f \in Lip\langle a;b\rangle$ když existuje konstanta $L > 0$ tak, že pro všechna $t_1, t_2 \in \langle a;b\rangle$ platí
$$|f(t_1) - f(t_2)| \le L|t_1 - t_2|\ .$$
- $Lip_{loc}(J)$ - množina funkcí $f \in Lip\langle a;b\rangle$ pro všechny $\langle a;b\rangle \subset J$.
- $Car(\langle a;b\rangle \times \mathcal{M})$ - množina funkcí $f:\ \langle a;b\rangle \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ splňujících Carathéodoryho podmínky na $\langle a;b\rangle \times \mathcal{M}$, tj.
  1. $f(\cdot,x,y):\ \langle a;b\rangle \to \mathbb{R}$ je měřitelná pro všechna $[x,y] \in \mathcal{M}$;
  2. $f(t,\cdot,\cdot):\ \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ je spojitá pro s. v. $t \in \langle a;b\rangle$;
  3. pro každou kompaktní množinu $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$ existuje funkce $m_{\mathcal{K}} \in L\langle a;b\rangle$ taková, že
  $$|f(t,x,y)| \le m_{\mathcal{K}}(t) \text{ pro s. v. } t \in \langle a;b\rangle \text{ a všechna } [x,y] \in \mathcal{K}\ .$$
- $Car((a;b) \times \mathcal{M})$ - množina funkcí $f \in Car(\langle c;d\rangle \times \mathcal{M})$ pro všechna $\langle c;d\rangle \subset (a;b)$.
- Posloupnost funkcí $\{f_n\} \subset C\langle a;b\rangle$ nazveme *stejně spojitou* na intervalu $\langle a;b\rangle$, jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $t_1, t_2 \in \langle a;b\rangle$ platí
$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \varepsilon$$
pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
- Nechť X je Banachův prostor. Řekneme, že množina $\Omega \subset X$ je *relativně kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\} \subset \Omega$ můžeme vybrat konvergentní podposloupnost (limita nemusí ležet v množině Ω).
- Nechť X je Banachův prostor. Řekneme, že množina $\Omega \subset X$ je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti $\{x_n\} \subset \Omega$ můžeme vybrat konvergentní podposloupnost, jejíž limita leží v Ω.

- Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $\Omega \subset X$. Řekneme, že operátor $\mathcal{F} : \Omega \to Y$ je *spojitý v bodě* $x_0 \in \Omega$, jestliže pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in \Omega$, $\|x - x_0\| < \delta$ platí $\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(x_0)\| < \varepsilon$. Řekneme, že operátor $\mathcal{F} : \Omega \to Y$ je *spojitý v* Ω, pokud je spojitý pro všechna $x \in \Omega$.

- Nechť X, Y jsou Banachovy prostory, $\Omega \subset X$. Řekneme, že operátor $\mathcal{F} : \Omega \to Y$ je *kompaktní*, jestliže je $\mathcal{F}$ spojitý a množina $\mathcal{F}(\Omega)$ je relativně kompaktní.

1.6 Věty použité v práci

Věta 1.1 (Absolutní spojitost Lebesgueova integrálu, [54] str. 119) *Nechť f je funkce integrovatelná na množině X. Pak k libovolnému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje reálné $\delta > 0$ tak, že pro každou měřitelnou množinu $E \subseteq X$ s mírou vyhovující nerovnosti* $\operatorname{meas}(E) < \delta$ *platí odhad*

$$\int\limits_E |f(t)| \, \mathrm{d}t < \varepsilon \ .$$

Věta 1.2 (Arzelà - Ascoli věta, [40] str. 244) *Zvolme $m \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že $\{f_n\} \subset C^m \langle a; b\rangle$. Nechť $\left\{f_n^{(m)}\right\}$ je posloupnost stejně spojitých funkcí na intervalu $\langle a; b\rangle$ a nechť existuje kladná konstanta $K > 0$ taková, že*

$$\left\|f_n^{(i)}\right\|_{C\langle a;b\rangle} \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \quad 0 \leq i \leq m.$$

Potom existují podposloupnost $\{f_{k_n}\}$ vybraná z $\{f_n\}$ a funkce $f \in C^m \langle a; b\rangle$ takové, že

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{k_n} - f\|_{C^m\langle a;b\rangle} = 0 \ ,$$

tj. $\lim\limits_{n\to\infty} f_{k_n}^{(i)}(t) = f^{(i)}(t)$ *stejnoměrně na $\langle a; b\rangle$ pro $0 \leq i \leq m$.*

Věta 1.3 (Bolzanova - Weierstrassova věta, [15] str. 63) *Z každé omezené posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Věta 1.4 (Cantorova věta, [15] str. 148) *Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$, pak je na tomto intervalu spojitá stejnoměrně.*

Věta 1.5 (Fatouovo lemma, [54] str. 42) *Jestliže $f_n \in L\langle a; b\rangle$ pro všechna přirozená n, jestliže vztah $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ je splněn s. v. na $\langle a; b\rangle$ a jestliže konečně existuje konstanta K tak, že pro všechna přirozená n platí*

$$\int_a^b |f_n(t)| \, \mathrm{d}t \leq K \ ,$$

pak $|f| \in L\langle a; b\rangle$, $\int_a^b |f(t)| \, \mathrm{d}t \leq K$ a tedy také $f \in L\langle a; b\rangle$.

Věta 1.6 (Lagrangeova věta o střední hodnotě, [50] str. 375) *Nechť $f(t)$ je spojitá v $\langle a;b\rangle$ a má derivaci (vlastní nebo nevlastní) v $(a;b)$. Pak existuje alespoň jeden bod $t_0 \in (a;b)$ tak, že*

$$f'(t_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ čili } f(b)-f(a) = (b-a)f'(t_0)\ .$$

Věta 1.7 (Lebesgueova věta, [40] str. 242) *Nechť $f_n, m \in L\langle 0;T\rangle$ splňují*

$$|f_n(t)| \le m(t) \text{ pro s. v. } t \in \langle 0;T\rangle \text{ a všechna } n \in \mathbb{N}\ ,$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \text{ pro s. v. } t \in \langle 0;T\rangle\ .$$

Potom $f \in L\langle 0;T\rangle$ a platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Věta 1.8 (Limitní přechod za znakem integrálu, [50] str. 610) *Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí definovaných na intervalu $\langle a;b\rangle$. Nechť je tato posloupnost stejnoměrně konvergentní v $\langle a;b\rangle$ a nechť funkce $f(t), f_n(t)$ jsou integrovatelné v $\langle a;b\rangle$. Pak*

$$\int_a^t f(s)\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty}\int_a^t f_n(s)\,\mathrm{d}s \text{ pro každé } t \in \langle a;b\rangle\ ,$$

tj.

$$\int_a^t \lim_{n\to\infty} f_n(s)\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty}\int_a^t f_n(s)\,\mathrm{d}s\ ;$$

přitom posloupnost funkcí

$$F_n(t) = \int_a^t f_n(s)\,\mathrm{d}s$$

je stejnoměrně konvergentní v $\langle a;b\rangle$.

Věta 1.9 (Rolleova věta, [50] str. 375) *Nechť $f(t)$ je v $\langle a;b\rangle$ spojitá a má v $(a;b)$ derivaci (vlastní nebo nevlastní). Nechť dále $f(a) = f(b)$. Pak existuje aspoň jeden takový bod $t_0 \in (a;b)$, že $f'(t_0) = 0$ (v t_0 je tedy tečna grafu rovnoběžná s osou x).*

Věta 1.10 (Schauderova věta o pevném bodě, [40] str. 246) *Nechť X je Banachův prostor, $\Omega \subset X$ je neprázdná, uzavřená a konvexní množina a $\mathcal{F} : \Omega \to \Omega$ je kompaktní operátor. Potom má operátor $\mathcal{F}$ pevný bod, tj. existuje $x_0 \in \Omega$ tak, že $\mathcal{F}(x_0) = x_0$.*

Věta 1.11 ([50] str. 356) *Funkce složená ze spojitých funkcí je spojitá. Podrobněji: Je-li $f(t)$ spojitá v a, $g(s)$ spojitá v odpovídajícím bodě $s_0 = g(a)$, pak funkce $y = g(f(t))$ je spojitá v bodě a.*

Věta 1.12 ([50] str. 359) *Je-li $f(t)$ absolutně spojitá v intervalu $\langle a;b\rangle$, pak je v tomto intervalu spojitá a má tam konečnou variaci.*

Věta 1.13 ([27] str. 313) *Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : \langle a;b\rangle \to \mathbb{R}$, $t_0 \in \langle a;b\rangle$, $c \in \mathbb{R}$. Nechť existuje $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a je $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$. Položme $g(t) = c + \int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s$ pro $t \in \langle a;b\rangle$. Potom funkce $g(t)$ je absolutně spojitá a $f(t)$ je derivace funkce $g(t)$ v bodě t pro skoro všechna t.*

1.7 Úvod do problematiky

V teorii parciálních diferenciálních rovnic je zkoumána p-Laplaceova rovnice

$$\operatorname{div}\left(|\bigtriangledown v|^{p-2} \bigtriangledown v\right) = h(|x|, v) \ ,$$

kde div je divergence, $\bigtriangledown$ je gradient, $p > 1$ a $|x|$ je Eukleidovská norma v $\mathbb{R}^n$. Radiálně symetrická řešení této rovnice (to jsou řešení, která závisí pouze na proměnné $r = |x|$) splňují obyčejnou diferenciální rovnici

$$r^{1-n}\left(r^{n-1}|v'|^{p-2}v'\right)' = h(r, v)$$

(derivace jsou podle proměnné r).

Jestliže $p = n$, substitucí $t = \ln r$ dostaneme rovnici

$$\left(|u'|^{p-2}u'\right)' = e^{nt}h(e^t, u)$$

a pro $p \neq n$ substitucí $t = r^{\frac{p-n}{p-1}}$ rovnici

$$\left(|u'|^{p-2}u'\right)' = \left|\frac{p-1}{p-n}\right|^p t^{\frac{p-n}{p(1-n)}} h\left(t^{\frac{p-1}{p-n}}, u\right)$$

(derivace jsou podle proměnné t).

Operátor $u \to (|u'|^{p-2}u')'$ se nazývá jednodimenzionální p-Laplacián a jeho zobecněním je ϕ-Laplacián

$$u \to (\phi(u'))' \ ,$$

kde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rostoucí homeomorfismus s $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Užití obecného ϕ-Laplaciánu často umožní jasnější výklad a lepší pochopení metod, které nezávisí na konkrétním tvaru ϕ-Laplaciánu, ale pouze na některých jeho typických vlastnostech.

1.7.1 Singularity

Předpokládejme, že $T \in (0;\infty)$, $\mathcal{D} = (\mathfrak{A}_1 \setminus \{0\}) \times (\mathfrak{A}_2 \setminus \{0\})$, kde $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathbb{R}$ jsou uzavřené intervaly obsahující 0 a dále že $f \in Car((0;T) \times \mathcal{D})$.

Definice 1.14 Funkce $f(t,x,y)$ má *singularitu v časové proměnné v bodě* $t = 0$, jestliže existuje bod $[x,y] \in \mathcal{D}$ takový, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$\int_0^\varepsilon |f(t,x,y)|\,\mathrm{d}t = \infty \ .$$

Definice 1.15 Funkce $f(t,x,y)$ má *singularitu v časové proměnné v bodě* $t = T$, jestliže existuje bod $[x,y] \in \mathcal{D}$ takový, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ platí

$$\int_{T-\varepsilon}^{T} |f(t,x,y)| \,\mathrm{d}t = \infty \ .$$

Příklad 1.16 Následující funkce má singularitu v časové proměnné v bodě $t = 0$ pro $\alpha \geq 1$ a v bodě $t = T$ pro $\beta \geq 1$.

$$f(t,x,y) = \frac{1}{t^{\alpha}(T-t)^{\beta}} + x^2 + y^2 \ .$$

Definice 1.17 Funkce $f(t,x,y)$ má *singularitu v prostorové proměnné* x pro $x = 0$, jestliže existuje množina nenulové míry $J \subset \langle 0;T \rangle$ taková, že pro s. v. $t \in J$ a nějaké $y \in \mathfrak{A}_2 \setminus \{0\}$ platí

$$\limsup_{x \to 0} |f(t,x,y)| = \infty \ .$$

Tuto singularitu nazveme *slabou singularitou v* x, jestliže existují kladná konstanta $c > 0$ a funkce $m \in L\,\langle 0;c \rangle$ tak, že pro všechna $x \in (0;c)$, všechna $y \in \mathfrak{A}_2 \setminus \{0\}$ a pro s. v. $t \in \langle 0;T \rangle$ platí

$$|f(t,x,y)| \leq m(x) \ .$$

Singularitu v proměnné x nazveme *silnou singularitou v* x, pokud není slabou singularitou v x.

Definice 1.18 Funkce $f(t,x,y)$ má *singularitu v prostorové proměnné* y pro $y = 0$, jestliže existuje množina nenulové míry $J \subset \langle 0;T \rangle$ taková, že pro s. v. $t \in J$ a nějaké $x \in \mathfrak{A}_1 \setminus \{0\}$ platí

$$\limsup_{y \to 0} |f(t,x,y)| = \infty \ .$$

Tuto singularitu nazveme *slabou singularitou v* y, jestliže existují kladná konstanta $c > 0$ a funkce $m \in L\,\langle 0;c \rangle$ tak, že pro všechna $y \in (0;c)$, všechna $x \in \mathfrak{A}_1 \setminus \{0\}$ a pro s. v. $t \in \langle 0;T \rangle$ platí

$$|f(t,x,y)| \leq m(y) \ .$$

Singularitu v proměnné y nazveme *silnou singularitou v* y, pokud není slabou singularitou v y.

Příklad 1.19 Funkce

$$f(t,x,y) = t + x^2 + y^2 + \frac{1}{|x|^{\alpha}} + \frac{1}{|y|^{\beta}} \ , \quad \alpha, \beta > 0$$

má singularitu v prostorové proměnné x v bodě $x = 0$. Tato singularita je slabá pro $\alpha \in (0;1)$ a silná pro $\alpha \geq 1$. Dále má singularitu v prostorové proměnné y pro $y = 0$. Tato singularita je slabá pro $\beta \in (0;1)$ a silná pro $\beta \geq 1$.

1.7.2 Formulace problému

V práci budeme zkoumat existenci řešení Dirichletovy singulární úlohy druhého řádu s ϕ-Laplaciánem typu

$$(\phi(u'(t)))' + f(t, u(t), u'(t)) = 0 \ , \quad u(0) = u(T) = 0 \ , \tag{1.4}$$

kde $T \in (0; \infty)$, ϕ je rostoucí lichý homeomorfismus s $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f \in Car((0;T) \times \mathcal{D})$, $\mathcal{D} = (\mathfrak{A}_1 \setminus \{0\}) \times (\mathfrak{A}_2 \setminus \{0\})$. $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathbb{R}$ jsou uzavřené intervaly obsahující nulu. Budeme dokazovat existenci řešení pro které platí $u(t) \in \mathfrak{A}_1$, $u'(t) \in \mathfrak{A}_2$, $t \in \langle 0; T\rangle$.

Funkce $f(t, x, y)$ může mít singularity v časové proměnné t v bodech 0 a T a v prostorových proměnných pro $x = 0$ a $y = 0$.

Definice 1.20 Nechť $f \in Car(\langle 0;T\rangle \times \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)$, potom řekneme, že úloha (1.4) je *regulární*, a pokud $f \notin Car(\langle 0;T\rangle \times \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2)$, je úloha *singulární*.

Abychom ukázali existenci řešení singulární úlohy (1.4), nadefinujeme nejprve posloupnost regulárních úloh

$$(\phi(u'(t)))' + f_n(t, u(t), u'(t)) = 0 \ , \quad u(0) = u(T) = 0 \ , \tag{1.5}$$

kde $f_n \in Car(\langle 0;T\rangle \times \mathbb{R}^2)$, $n \in \mathbb{N}$. Dále ukážeme, že jednotlivé regulární úlohy mají řešení u_n, že posloupnost řešení u_n regulárních úloh konverguje a že limitní funkce u je řešením singulární úlohy (1.4).

1.7.3 Řešení

Definice 1.21 *Řešením úlohy* (1.4) nazveme funkci $u : \langle 0;T\rangle \to \mathbb{R}$ s $\phi(u') \in AC\,\langle 0;T\rangle$ splňující rovnici

$$(\phi(u'(t)))' + f(t, u(t), u'(t)) = 0$$

s. v. na intervalu $\langle 0;T\rangle$ a splňující počáteční podmínky $u(0) = u(T) = 0$.

Poznámka 1.22 Pro $\phi(u') \in AC\,\langle 0;T\rangle$ podle věty 1.12 platí, že $\phi(u') \in C\,\langle 0;T\rangle$. Dále protože ϕ je homeomorfismus, je zobrazení ϕ^{-1} spojité a dle věty 1.11 je $\phi^{-1}(\phi(u')) = u' \in C\,\langle 0;T\rangle$. Vidíme, že pro řešení úlohy (1.4) platí $u \in C^1\,\langle 0;T\rangle$.

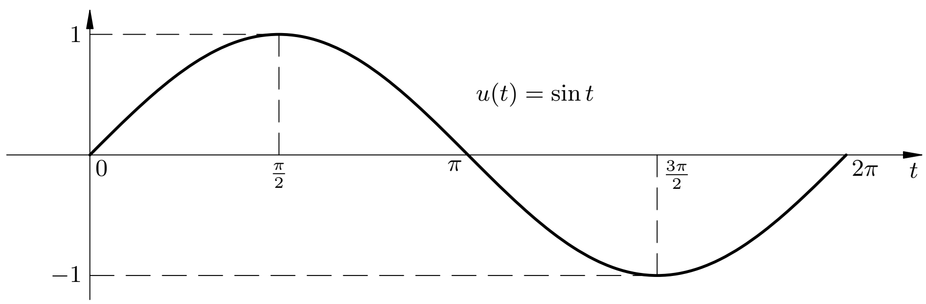
Příklad 1.23 Okrajová úloha

$$\left(u'^3(t)\right)' + \frac{\sin t \cos t}{t u(t) u'(t)} + 3u(t)u'^2(t) - \frac{1}{t} = 0 \ , \quad u(0) = u(2\pi) = 0$$

je singulární. Máme $T = 2\pi$. Jedná se o úlohu s ϕ-Laplaciánem, kde $\phi(x) = x^3$. Funkce

$$f(t, x, y) = \frac{\sin t \cos t}{txy} + 3xy^2 - \frac{1}{t}$$

má časovou singularitu v $t = 0$ a také silné prostorové singularity pro $x, y = 0$. Navíc je v proměnných x a y neomezená.



Obrázek 1: Řešení u.

Řešením této úlohy je funkce

$$u(t) = \sin t \ , \quad t \in \langle 0; 2\pi \rangle$$

(viz obrázek 1).

Funkce u splňuje okrajové podmínky. Dále dostáváme

$$u'(t) = \cos t \ , \quad u'^3(t) = \cos^3 t \ , \quad \big(u'^3(t)\big)' = -3 \sin t \cos^2 t \ .$$

Vidíme, že platí $\phi(u'(t)) = u'^3(t) = \cos^3 t$. Tato funkce je na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$ spojitá a podle věty 1.4 (Cantorova věta) je $\phi(u') \in AC \langle 0; 2\pi \rangle$. Po dosazení do rovnice máme

$$-3 \sin t \cos^2 t + \frac{\sin t \cos t}{t \sin t \cos t} + 3 \sin t \cos^2 t - \frac{1}{t} = 0 \ .$$

Rovnice je splněna pro s. v. $t \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

V literatuře není definice řešení jednotná. V některých pracích (například [6], [25] nebo [26]) nemusí $\phi(u')$ patřit do $AC \langle 0; T \rangle$. Zaveďme tedy pojem w-řešení.

Definice 1.24 Funkci $u \in C \langle 0; T \rangle$ nazveme *w-řešením úlohy* (1.4), jestliže existuje konečný počet bodů $t_i \in \langle 0; T \rangle$, $i = 1, \cdots, p$ tak, že pokud označíme $J = \langle 0; T \rangle \setminus \{t_i\}_{i=1}^{p}$, potom $\phi(u') \in AC_{loc}(J)$, u splňuje rovnici

$$(\phi(u'(t)))' + f(t, u(t), u'(t)) = 0$$

pro s. v. $t \in \langle 0; T \rangle$ a splňuje také počáteční podmínky $u(0) = u(T) = 0$.

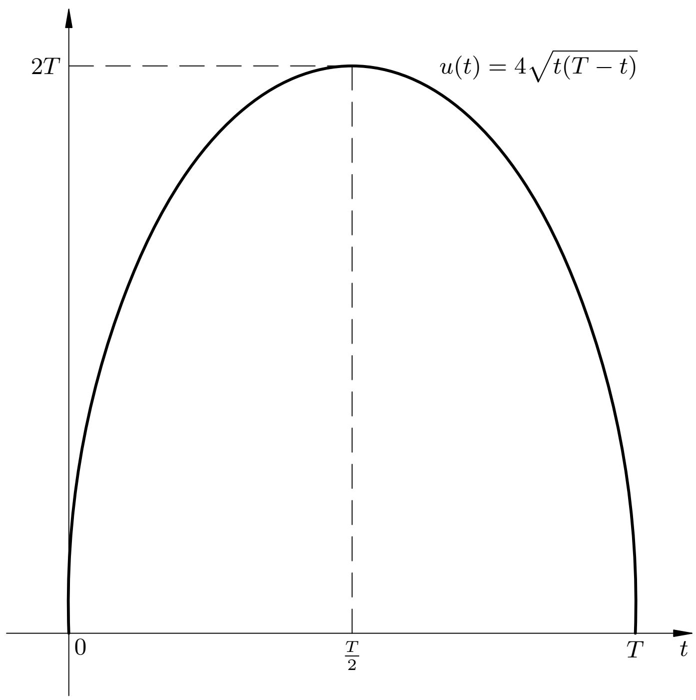
Poznámka 1.25 Každé řešení úlohy (1.4) je w-řešením úlohy (1.4).

Příklad 1.26 Uvažujme úlohu

$$u''(t) + \frac{4T^2}{t(T-t)u(t)} = 0 \ , \quad u(0) = u(T) = 0 \ .$$

Tato úloha je singulární. Funkce

$$f(t, x, y) = \frac{4T^2}{t(T-t)x}$$



Obrázek 2: Řešení u.

má singularity v časové proměnné pro $t = 0$, $t = T$ a v první prostorové proměnné má silnou singularitu pro $x = 0$.

Funkce

$$u(t) = 4\sqrt{t(T-t)}\ , \quad t \in \langle 0; T\rangle$$

(viz obrázek 2) je w-řešením této úlohy. Platí, že $u \in C\,\langle 0; T\rangle$,

$$u'(t) = \frac{2T-4t}{\sqrt{t(T-t)}}\ , \quad u''(t) = \frac{-T^2}{\sqrt{t^3(T-t)^3}}\ ,$$

$$\lim_{t\to 0+} u'(t) = \infty\ , \quad \lim_{t\to T-} u'(t) = -\infty\ .$$

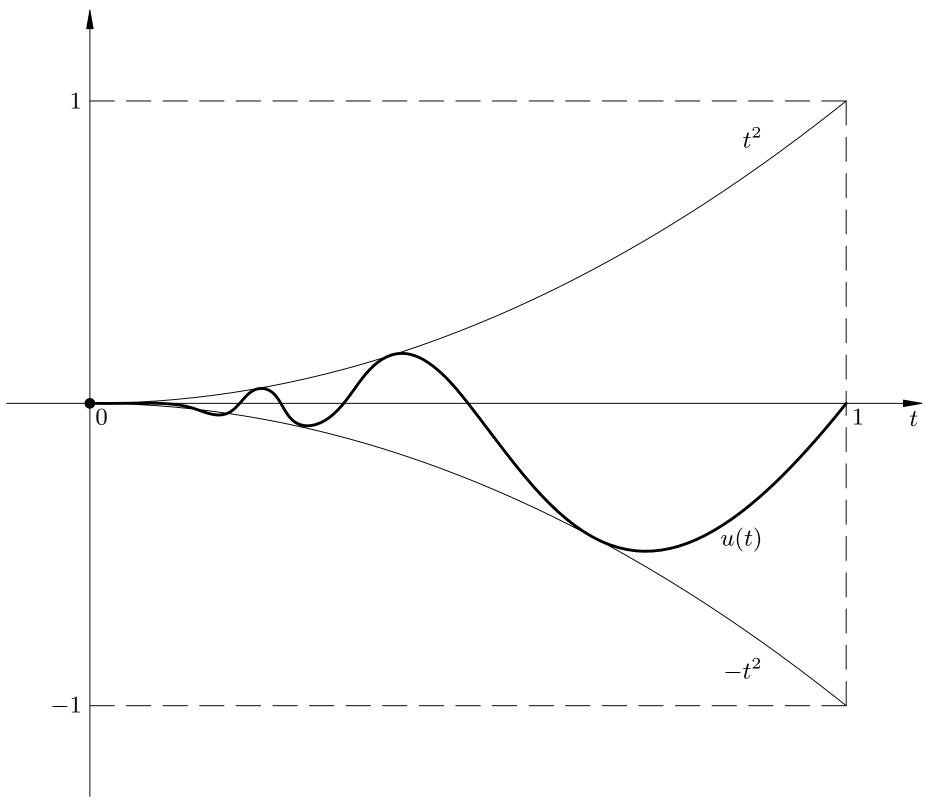
V bodech 0 a T nemá u první, a tedy ani druhou derivaci. Máme $u \in C^2\,(0; T)$ a z toho dostáváme $u' \in AC_{loc}\,(0; T)$. Funkce u splňuje okrajové podmínky a po dosazení je rovnice splněna na intervalu $(0; T)$. Protože neplatí, že je u' absolutně spojitá na uzavřeném intervalu $\langle 0; T\rangle$, není funkce u řešením naší úlohy.

Příklad 1.27 Okrajová úloha

$$u''(t) + \frac{(2t^2+\pi^2)u(t)}{t^4} - \frac{2u'(t)}{t} = 0\ , \quad u(0) = u(1) = 0$$

je opět singulární. Funkce

$$f(t, x, y) = \frac{(2t^2+\pi^2)x}{t^4} - \frac{2y}{t}$$



Obrázek 3: Řešení u.

má singularitu v $t = 0$.

w-řešením této úlohy je funkce

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t = 0 \\ t^2 \sin \dfrac{\pi}{t} & \text{pro } t \in (0; 1\rangle \end{cases} \tag{1.6}$$

(viz obrázek 3). Platí

$$u'(t) = 2t \sin \frac{\pi}{t} - \pi \cos \frac{\pi}{t} \ , \quad u''(t) = \left(2 - \frac{\pi^2}{t^2} \right) \sin \frac{\pi}{t} - \frac{2\pi}{t} \cos \frac{\pi}{t} \ ,$$

a tedy $\lim\limits_{t \to 0+} u'(t)$ neexistuje. V bodě $t = 0$ neexistuje u' a dostáváme $u \in C^2 \left(0; 1\right\rangle$ a $u' \in AC_{loc} \left(0; 1\right\rangle$. Funkce u splňuje okrajové podmínky a po dosazení do rovnice dostaneme

$$\left(2 - \frac{\pi^2}{t^2} \right) \sin \frac{\pi}{t} - \frac{2\pi}{t} \cos \frac{\pi}{t} + \frac{(2t^2 + \pi^2) t^2 \sin \frac{\pi}{t}}{t^4} - \frac{2 \left(2t \sin \frac{\pi}{t} - \pi \cos \frac{\pi}{t} \right)}{t} =$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{t} - \frac{\pi^2}{t^2} \sin \frac{\pi}{t} - \frac{2\pi}{t} \cos \frac{\pi}{t} + 2 \sin \frac{\pi}{t} + \frac{\pi^2}{t^2} \sin \frac{\pi}{t} - 4 \sin \frac{\pi}{t} + \frac{2\pi}{t} \cos \frac{\pi}{t} = 0 \ .$$

Rovnice je splněna pro s. v. $t \in \langle 0;1\rangle$, u' není absolutně spojitá na uzavřeném intervalu $\langle 0;1\rangle$ a u není řešením naší úlohy.

Příklad 1.28 Funkce (1.6) je w-řešením také složitější úlohy

$$u''(t) + \left(\frac{4t^2+2\pi^2}{t^3}\sin\frac{\pi}{t} - \frac{2\pi t^2+\pi^3}{t^4}\cos\frac{\pi}{t}\right)\frac{u(t)}{u'(t)} - 4\sin\frac{\pi}{t} + \frac{2\pi}{t}\cos\frac{\pi}{t} = 0\ ,$$

$$u(0) = u(1) = 0\ .$$

Funkce

$$f(t,x,y) = \left(\frac{4t^2+2\pi^2}{t^3}\sin\frac{\pi}{t} - \frac{2\pi t^2+\pi^3}{t^4}\cos\frac{\pi}{t}\right)\frac{x}{y} - 4\sin\frac{\pi}{t} + \frac{2\pi}{t}\cos\frac{\pi}{t}$$

má opět singularitu v $t = 0$, a navíc také silnou singularitu v $y = 0$. Přímým dosazením do rovnice můžeme opět ověřit, že je splněna pro s. v. $t \in \langle 0;1\rangle$.

$$\left(2 - \frac{\pi^2}{t^2}\right)\sin\frac{\pi}{t} - \frac{2\pi}{t}\cos\frac{\pi}{t} + \left(\frac{4t^2+2\pi^2}{t^3}\sin\frac{\pi}{t} - \frac{2\pi t^2+\pi^3}{t^4}\cos\frac{\pi}{t}\right)\frac{t^2\sin\frac{\pi}{t}}{2t\sin\frac{\pi}{t} - \pi\cos\frac{\pi}{t}} -$$

$$-4\sin\frac{\pi}{t} + \frac{2\pi}{t}\cos\frac{\pi}{t} =$$

$$= \left(-2 - \frac{\pi^2}{t^2}\right)\sin\frac{\pi}{t} + \left(\frac{4t^2+2\pi^2}{t^3}\sin\frac{\pi}{t} - \frac{2\pi t^2+\pi^3}{t^4}\cos\frac{\pi}{t}\right)\frac{t^2\sin\frac{\pi}{t}}{2t\sin\frac{\pi}{t} - \pi\cos\frac{\pi}{t}} =$$

$$= \left(-2\sin\frac{\pi}{t} - \frac{\pi^2}{t^2}\sin\frac{\pi}{t}\right)\frac{2t\sin\frac{\pi}{t} - \pi\cos\frac{\pi}{t}}{2t\sin\frac{\pi}{t} - \pi\cos\frac{\pi}{t}} +$$

$$+\frac{\frac{4t^2+2\pi^2}{t}\sin^2\frac{\pi}{t} - \frac{2\pi t^2+\pi^3}{t^2}\sin\frac{\pi}{t}\cos\frac{\pi}{t}}{2t\sin\frac{\pi}{t} - \pi\cos\frac{\pi}{t}} =$$

$$= \frac{-4t\sin^2\frac{\pi}{t} - \frac{2\pi^2}{t}\sin^2\frac{\pi}{t} + 2\pi\sin\frac{\pi}{t}\cos\frac{\pi}{t} + \frac{\pi^3}{t^2}\sin\frac{\pi}{t}\cos\frac{\pi}{t}}{2t\sin\frac{\pi}{t} - \pi\cos\frac{\pi}{t}} +$$

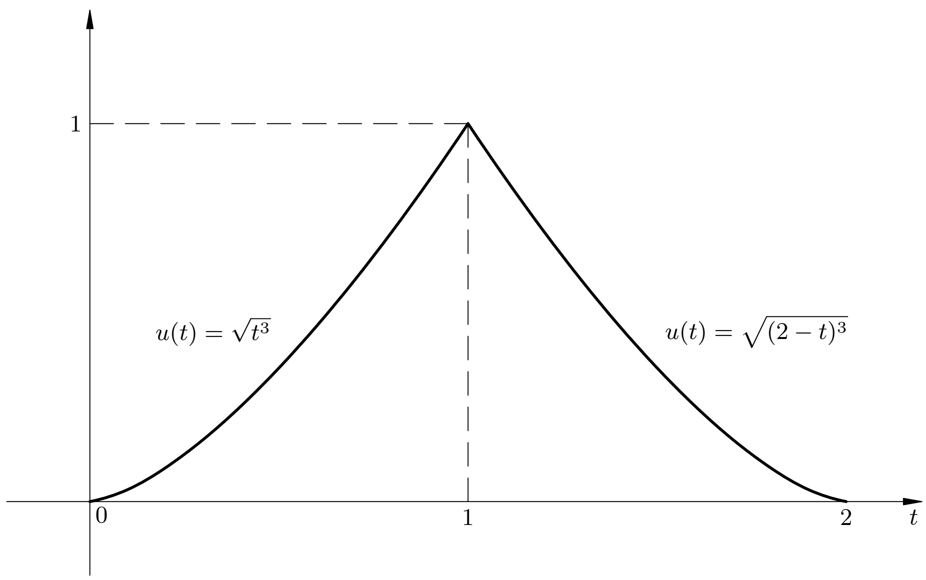
$$+\frac{\frac{4t^2+2\pi^2}{t}\sin^2\frac{\pi}{t} - \frac{2\pi t^2+\pi^3}{t^2}\sin\frac{\pi}{t}\cos\frac{\pi}{t}}{2t\sin\frac{\pi}{t} - \pi\cos\frac{\pi}{t}} = 0\ .$$

Příklad 1.29 Singulární okrajová úloha se slabou singularitou v $x = 0$

$$u''(t) - \frac{3}{4\sqrt[3]{u(t)}} = 0\ , \quad u(0) = u(2) = 0$$

má w-řešení

$$u(t) = \begin{cases} \sqrt{t^3} & \text{pro } t \in \langle 0;1\rangle \\ \sqrt{(2-t)^3} & \text{pro } t \in (1;2\rangle \end{cases}$$



Obrázek 4: Řešení u.

(viz obrázek 4). Toto w-řešení opět není řešením úlohy.

Platí

$$u'(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{t} & \text{pro } t \in \langle 0; 1) \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2-t} & \text{pro } t \in (1; 2\rangle \end{cases}, \qquad u''(t) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{t}} & \text{pro } t \in \langle 0; 1) \\ \frac{3}{4\sqrt{2-t}} & \text{pro } t \in (1; 2\rangle \end{cases},$$

$$\lim_{t \to 1-} u'(t) = \frac{3}{2}, \quad \lim_{t \to 1+} u'(t) = -\frac{3}{2}.$$

Máme $u \in C\langle 0; 2\rangle$, $u \in C^2(0; 1)$, $u \in C^2(1; 2)$, $u' \in AC_{loc}(J)$, kde $J = (0; 1) \cup (1; 2)$ a $u' \notin AC\langle 0; 2\rangle$.

Příklad 1.30 Mějme úlohu

$$(u'^3(t))' + \frac{(3-3t)u'(t)}{t(2-t)u^2(t)} = 0, \quad u(0) = u(2) = 0.$$

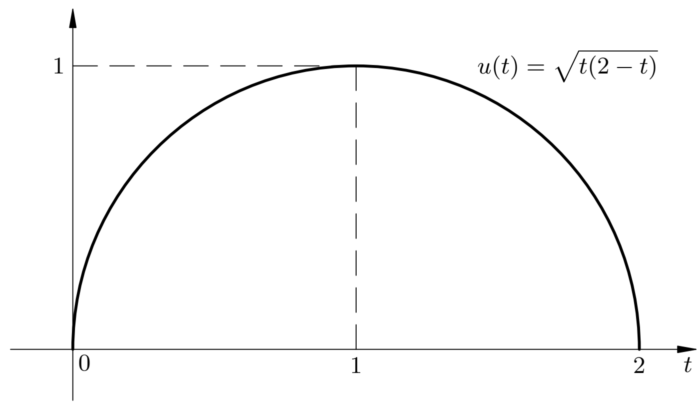
Jedná se o úlohu s ϕ-Laplaciánem, kde $\phi(x) = x^3$. Úloha je singulární, funkce

$$f(t, x, y) = \frac{(3-3t)y}{t(2-t)x^2}$$

má singularitu v časové proměnné pro $t = 0$, $t = 2$ a silnou singularitu v první prostorové proměnné pro $x = 0$.

Funkce

$$u(t) = \sqrt{t(2-t)}, \quad t \in \langle 0; 2\rangle$$



Obrázek 5: Řešení u.

(viz obrázek 5) je w-řešením, ale není řešením úlohy.

Platí $u \in C\langle 0;2\rangle$,

$$u'(t) = \frac{1-t}{\sqrt{t(2-t)}}\ , \quad u'^3(t) = \frac{(1-t)^3}{\sqrt{t^3(2-t)^3}}\ , \quad (u'^3(t))' = \frac{-3(1-t)^2}{\sqrt{t^5(2-t)^5}}\ ,$$

$$\lim_{t\to 0+} u'(t) = \infty\ , \quad \lim_{t\to 2-} u'(t) = -\infty\ .$$

Dále platí $u \in C^2(0;2)$, $\phi(u') \in AC_{loc}(0;2)$, $\phi(u') \notin AC\langle 0;2\rangle$. Funkce u splňuje okrajové podmínky a po dosazení máme

$$\frac{-3(1-t)^2}{\sqrt{t^5(2-t)^5}} + \frac{(3-3t)}{t(2-t)}\frac{1-t}{\sqrt{t(2-t)}}\frac{1}{t(2-t)} = 0\ .$$

Rovnice je splněna na intervalu $(0;2)$.

1.7.4 Singulární body

Definice 1.31 Nechť f má singularitu v proměnné x resp. y v bodě 0 a u je řešení úlohy (1.4). Bod t_0 resp. t_1 nazveme *singulární bod příslušný řešení* u, pokud $u(t_0) = 0$ resp. $u'(t_1) = 0$.

Poznámka 1.32 Rozlišujeme dva typy singulárních bodů. U singulárních bodů I. typu známe jejich umístění v intervalu $\langle 0;T\rangle$ a u singulárních bodů II. typu jejich umístění v intervalu $\langle 0;T\rangle$ neznáme.

Příklad 1.33 Uvažujme úlohu

$$u''(t) + 1 + \frac{t^2(1-t)^2}{u^2(t)} = 0\ , \quad u(0) = u(1) = 0\ . \tag{1.7}$$

Vidíme, že $T = 1$, $\phi(x) \equiv x$,

$$f(t,x,y) = 1 + \frac{t^2(1-t)^2}{x^2}\ .$$

Protože u'' je záporná, každé řešení úlohy je kladné na intervalu $(0;1)$. Vzhledem k počátečním podmínkám máme singulární body $t=0$ a $t=1$. Jedná se o singulární body I. typu. Funkce f má singularitu pouze v proměnné x a žádný jiný bod nemůže být singulární.

Příklad 1.34 Uvažujme úlohu

$$\left(u'^5(t)\right)' + (1-u'^2(t))\left(\frac{1}{u^2(t)} + \frac{1}{u'^2(t)}\right) = 0\ , \quad u(0)=u(1)=0\ . \tag{1.8}$$

Máme $T=1$, $\phi(x)=x^5$,

$$f(t,x,y) = (1-y^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\ .$$

Funkce f má singularity v $x=0$ a $y=0$.

Vzhledem k počátečním podmínkám má libovolné řešení u této úlohy singulární body I. typu v bodech 0 a 1. Dále protože $u \in C^1\langle 0;1\rangle$ existuje dle věty 1.9 (Rolleova věta) alespoň jeden bod $t_0 \in (0;1)$, $u'(t_0)=0$. Bod t_0 je singulární bod II. typu.

1.7.5 Horní a dolní funkce

Při vyšetřování regulárních i singulárních okrajových problémů je často použita metoda horních a dolních funkcí viz například De Coster, Habets [19], Kiguradze, Shekhter [26] nebo Vasiljev, Klokov [58]. V některých pracech jsou horní a dolní funkce nazývány horní a dolní řešení. Existuje více typů definic. Uveďme zde definice pro Dirichletovu úlohu (1.4) vhodné pro naše účely.

Definice 1.35 Funkce $\sigma \in C\langle 0;T\rangle$ se nazývá *horní funkce úlohy* (1.4), jestliže existuje konečná množina $S \subset (0;T)$ taková, že $\phi(\sigma') \in AC_{loc}((0;T)\setminus S)$,

$$\sigma'(s+) := \lim_{t\to s+} \sigma'(t) \in \mathbb{R}\ , \quad \sigma'(s-) := \lim_{t\to s-} \sigma'(t) \in \mathbb{R} \text{ pro všechna } s \in S\ ,$$

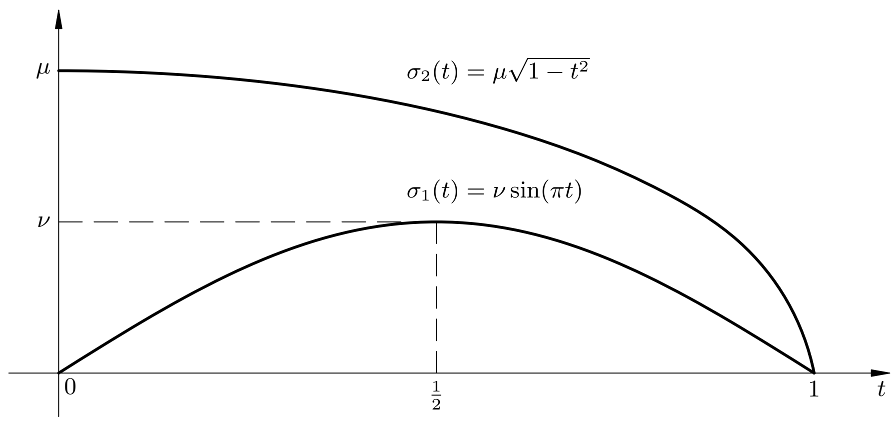
$$(\phi(\sigma'(t)))' + f(t,\sigma(t),\sigma'(t)) \le 0 \text{ pro s. v. } t \in \langle 0;T\rangle\ ,$$
$$\sigma(0) \ge 0\ , \quad \sigma(T) \ge 0\ , \quad \sigma'(s-) > \sigma'(s+) \text{ pro všechna } s \in S\ .$$

Definice 1.36 Funkce $\sigma \in C\langle 0;T\rangle$ se nazývá *dolní funkce úlohy* (1.4), jestliže existuje konečná množina $S \subset (0;T)$ taková, že $\phi(\sigma') \in AC_{loc}((0;T)\setminus S)$,

$$\sigma'(s+) := \lim_{t\to s+} \sigma'(t) \in \mathbb{R}\ , \quad \sigma'(s-) := \lim_{t\to s-} \sigma'(t) \in \mathbb{R} \text{ pro všechna } s \in S\ ,$$

$$(\phi(\sigma'(t)))' + f(t,\sigma(t),\sigma'(t)) \ge 0 \text{ pro s. v. } t \in \langle 0;T\rangle\ ,$$
$$\sigma(0) \le 0\ , \quad \sigma(T) \le 0\ , \quad \sigma'(s-) < \sigma'(s+) \text{ pro všechna } s \in S\ .$$

Poznámka 1.37 Z $\phi(\sigma') \in AC_{loc}((0;T)\setminus S)$ dostaneme $\sigma' \in AC_{loc}((0;T)\setminus S)$.



Obrázek 6: Dolní a horní funkce úlohy.

Příklad 1.38 Uvažujme problém

$$u''(t) + \frac{a}{u^2(t)} - \frac{b}{u(t)} + c\sin(2\pi t) = 0 \ , \quad u(0) = u(1) = 0 \ ,$$

kde $a, b, c > 0$. Vidíme, že $\phi(x) \equiv x$ a že funkce

$$f(t, x, y) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x} + c\sin(2\pi t)$$

má singularitu v $x = 0$.

Zvolme

$$\sigma_1(t) = \nu \sin(\pi t) \ , \quad \sigma_2(t) = \mu\sqrt{1-t^2} \ , \quad t \in \langle 0; 1\rangle$$

(viz obrázek 6).

Ukážeme, že funkce σ_1 je pro dostatečně malé $\nu > 0$ dolní funkcí úlohy. Ověříme podmínky z definice 1.36. Platí $\sigma_1(0) = \sigma_1(1) = 0$,

$$\sigma_1'(t) = \nu\pi\cos(\pi t) \ , \quad \sigma_1''(t) = -\nu\pi^2\sin(\pi t) \ , \quad t \in \langle 0; 1\rangle \ .$$

Množina S je prázdná, $\sigma_1 \in C^2\langle 0; 1\rangle$, a tedy $\sigma_1' \in AC\langle 0; 1\rangle$. Zbývá ukázat, že funkce σ_1 splňuje nerovnost odvozenou z naší rovnice. Dosadíme-li do levé strany nerovnice dostaneme

$$-\nu\pi^2\sin(\pi t) + \frac{a}{\nu^2\sin^2(\pi t)} - \frac{b}{\nu\sin(\pi t)} + c\sin(2\pi t) =$$

$$= \frac{-\nu^3\pi^2\sin^3(\pi t) + a - b\nu\sin(\pi t) + c\nu^2\sin^2(\pi t)\sin(2\pi t)}{\nu^2\sin^2(\pi t)} \ .$$

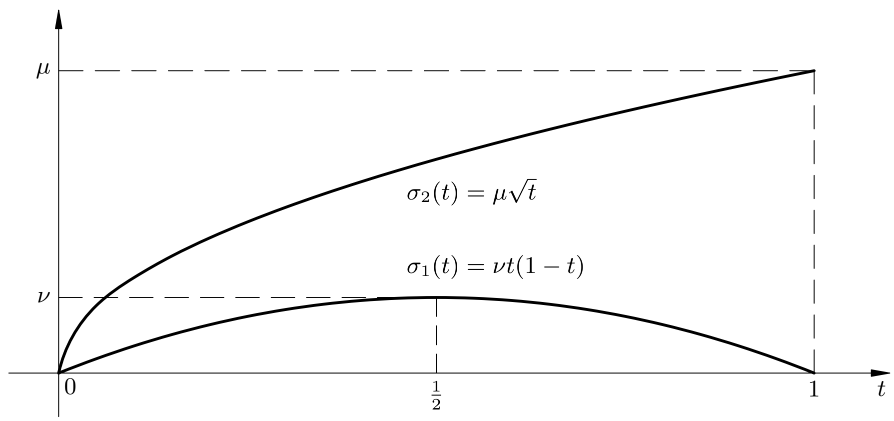
Chceme ukázat, že tento zlomek je nezáporný pro s. v. $t \in \langle 0; 1\rangle$. Jmenovatel je kladný pro $t \in (0; 1)$, funkce sinus je omezená a stačí ukázat, že

$$-\pi^2\nu^3 - c\nu^2 - b\nu + a \geq 0 \ .$$

Po úpravě máme
$$a \geq \pi^2\nu^3 + c\nu^2 + b\nu \ .$$
Na pravé straně nerovnice je polynom třetího stupně pro proměnnou ν, který má jeden z kořenů nulový. Zvolíme-li ν dostatečně malé, je nerovnost splněna. Funkce σ_1 splňuje všechny podmínky definice a je dolní funkcí naší úlohy.

Funkce σ_2 je pro dostatečně velké $\mu > 0$ horní funkcí naší úlohy. Ověříme podmínky definice 1.35. Platí $\sigma_2 \in C\,\langle 0;1\rangle$, $\sigma_2(0) = \mu > 0$, $\sigma_2(1) = 0$,
$$\sigma_2'(t) = -\frac{\mu t}{\sqrt{1-t^2}} \ , \quad \sigma_2''(t) = -\frac{\mu}{\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}} \ , \quad t \in \langle 0; 1\,) \ .$$
Množina S je opět prázdná, $\lim\limits_{t\to 1-} \sigma_2'(t) = -\infty$, $\sigma_2 \in C^2\,\langle 0;1\,)$, a tedy $\sigma_2' \in AC_{loc}\,\langle 0;1\,)$. Zbývá ukázat, že pro s. v. $t \in \langle 0;1\rangle$ platí
$$-\frac{\mu}{\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}} + \frac{a}{\mu^2\left(1-t^2\right)} - \frac{b}{\mu\sqrt{1-t^2}} + c\sin(2\pi t) \leq 0 \ .$$
Levou stranu nerovnice převedeme na jeden zlomek
$$\frac{-\mu^3 + a\sqrt{1-t^2} - b\mu\left(1-t^2\right) + c\mu^2\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}\sin(2\pi t)}{\mu^2\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}} \leq 0 \ .$$
Jmenovatel je pro $t \in \langle 0;1\,)$ kladný, funkce $\sqrt{1-t^2}$, $1-t^2$, $\sqrt{(1-t^2)^3}$ a $|\sin(2\pi t)|$ nabývají na intervalu $\langle 0;1\rangle$ hodnoty mezi nulou a jedničkou. Zvolme libovolné $t_0 \in \langle 0;1\rangle$. Máme
$$-\mu^3 + a\sqrt{1-t_0^2} - b\mu\left(1-t_0^2\right) + c\mu^2\sqrt{\left(1-t_0^2\right)^3}\sin(2\pi t_0) \leq -\mu^3 + c\mu^2 + a < 0$$
pro μ dostatečně velké. Všechny podmínky definice 1.35 jsou splněny a funkce σ_2 je horní funkcí úlohy.

Příklad 1.39 Mějme úlohu
$$\left(u'^3(t)\right)' + \frac{a}{u^2(t)} - bu(t) + \frac{c}{u'^2(t)} + \frac{1}{\sqrt{t^3}} = 0 \ , \quad u(0) = u(1) = 0 \ ,$$
kde $a, b, c > 0$. Jedná se o úlohu s ϕ-Laplaciánem, kde $\phi(x) = x^3$. Funkce
$$f(t,x,y) = \frac{a}{x^2} - bx + \frac{c}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{t^3}}$$
má singularitu v časové proměnné pro $t = 0$ a dále silné singularity v prostorových proměnných pro $x = 0$ a $y = 0$.



Obrázek 7: Horní a dolní funkce úlohy.

Zvolme

$$\sigma_1(t) = \nu t(1-t)\ , \quad \sigma_2(t) = \mu\sqrt{t}, \quad t \in \langle 0; 1\rangle$$

(viz obrázek 7).

Pro dostatečně malé $\nu > 0$ je funkce σ_1 dolní funkcí naší úlohy. Platí $\sigma_1(0) = \sigma_1(1) = 0$ a

$$\sigma_1'(t) = \nu(1-2t)\ , \quad \phi(\sigma_1'(t)) = \sigma_1'^3(t) = \nu^3(1-2t)^3\ , \quad (\sigma_1'^3(t))' = -6\nu^3(1-2t)^2\ , \quad t \in \langle 0; 1\rangle\ .$$

Proto $\phi(\sigma_1') \in AC\,\langle 0; 1\rangle$ a dále

$$-6\nu^3(1-2t)^2 + \frac{a}{\nu^2 t^2(1-t)^2} - b\nu t(1-t) + \frac{c}{\nu^2(1-2t)^2} + \frac{1}{\sqrt{t^3}} \geq$$

$$\geq \frac{-6\nu^5 t^2(1-t)^2(1-2t)^4 + a(1-2t)^2 - b\nu^3 t^3(1-t)^3(1-2t)^2 + ct^2(1-t)^2}{\nu^2 t^2(1-t)^2(1-2t)^2}\ .$$

Jmenovatel zlomku je pro $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ kladný, funkce $a(1-2t)^2 + ct^2(1-t)^2$ je kladná na intervalu $\langle 0; 1\rangle$, a tedy existuje konstanta $\varepsilon > 0$ taková, že $a(1-2t)^2 + ct^2(1-t)^2 > \varepsilon$ pro $t \in \langle 0; 1\rangle$.

$$-6\nu^5 t^2(1-t)^2(1-2t)^4 + a(1-2t)^2 - b\nu^3 t^3(1-t)^3(1-2t)^2 + ct^2(1-t)^2 \geq -6\nu^5 - b\nu^3 + \varepsilon > 0$$

pro ν dostatečně malé, a tedy i čitatel zlomku je kladný. Pro dostatečně malé ν splňuje funkce σ_1 všechny předpoklady definice 1.36.

Pro dostatečně velké $\mu > 0$ je funkce σ_2 horní funkcí úlohy. Platí $\sigma_2(0) = 0$, $\sigma_2(1) = \mu > 0$ a

$$\sigma_2'(t) = \frac{\mu}{2\sqrt{t}}\ , \quad \phi(\sigma_2'(t)) = \sigma_2'^3(t) = \frac{\mu^3}{8\sqrt{t^3}}\ , \quad (\sigma_2'^3(t))' = -\frac{3\mu^3}{16\sqrt{t^5}}\ , \quad t \in (0; 1\rangle\ .$$

Proto $\sigma_2 \in C\langle 0;1\rangle$, $\phi(\sigma_2') \in AC_{loc}(0;1\rangle$, a dále pro $t \in (0;1\rangle$

$$-\frac{3\mu^3}{16\sqrt{t^5}} + \frac{a}{\mu^2 t} - b\mu\sqrt{t} + \frac{4ct}{\mu^2} + \frac{1}{\sqrt{t^3}} =$$

$$= \frac{-3\mu^5 + 16at\sqrt{t} - 16b\mu^3t^3 + 64ct^3\sqrt{t} + 16\mu^2 t}{16t^2\sqrt{t}\mu^2} \leq$$

$$\leq \frac{-3\mu^5 + 16at\sqrt{t} + 64ct^3\sqrt{t} + 16\mu^2 t}{16t^2\sqrt{t}\mu^2} \leq \frac{-3\mu^5 + 16a + 64c + 16\mu^2}{16t^2\sqrt{t}\mu^2} .$$

Jmenovatel zlomku je pro $t \in (0;1\rangle$ kladný a v čitateli máme polynom pátého stupně pro proměnnou μ, který má záporný první koeficient. Pro μ dostatečně velké je zlomek záporný a funkce σ_2 splňuje všechny předpoklady definice 1.35.

2 Regulární problém

K důkazu existence řešení singulární úlohy potřebujeme zkonstruovat posloupnost regulárních úloh. Proto v této kapitole dokážeme dvě existenční věty pro regulární problém

$$(\phi(u'(t)))' + g(t, u(t), u'(t)) = 0\ , \quad u(0) = u(T) = 0\ , \tag{2.1}$$

kde $g \in Car(\langle 0;T\rangle \times \mathbb{R}^2)$.

2.1 Existenční věta Fredholmova typu

První existenční věta se týká regulární úlohy (2.1) s omezenou nelinearitou. Úloha (2.1) pro $\phi(x) \equiv x$ je vyšetřována například v [58]. Zde ukážeme existenci řešení pro obecnější ϕ. Předpokládáme, že ϕ je rostoucí lichý homeomorfismus s $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Nejprve dokážeme dvě pomocná lemmata.

Lemma 2.1 *Nechť $f_n \in C\langle a;b\rangle$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, nechť posloupnost $\{f_n\}$ stejnoměrně konverguje k funkci f na intervalu $\langle a;b\rangle$ a nechť $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom posloupnost $\{g(f_n)\}$ stejnoměrně konverguje k funkci $g(f)$ na intervalu $\langle a;b\rangle$.*

Důkaz: Existuje kladná konstanta $K > 0$ taková, že $|f_n(t)| < K$ pro všechna $t \in \langle a;b\rangle$ a všechna $n \in \mathbb{N}$. Označme $K_1 = 2K + 1$. Funkce g je na intervalu $\langle -K_1;K_1\rangle$ spojitá a je tedy dle věty 1.4 (Cantorova věta) na tomto intervalu stejnoměrně spojitá tj. pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x_1, x_2 \in \langle -K_1;K_1\rangle$, $|x_1 - x_2| < \delta$ platí

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon\ .$$

Dále posloupnost $\{f_n\}$ stejnoměrně konverguje k funkci f na intervalu $\langle a;b\rangle$, tj. pro libovolné $\varepsilon_1 > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ a pro všechna $t \in \langle a;b\rangle$ platí

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon_1\ .$$

Navíc

$$|f_n(t) - f(t)| < K_1 \ .$$

Pokud zvolíme $\varepsilon_1 < \delta$ a označíme $x_1 = f_n(t)$, $x_2 = f(t)$ dostáváme, že posloupnost $\{g(f_n)\}$ stejnoměrně konverguje k funkci $g(f)$ v intervalu $\langle a; b\rangle$. □

Lemma 2.2 *Nechť $f_n \in C\langle a; b\rangle$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, nechť je posloupnost $\{f_n\}$ stejně spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$, nechť existuje konstanta $K > 0$ taková, že $|f_n(t)| < K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $t \in \langle a; b\rangle$, a nechť je funkce $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá. Potom je posloupnost $\{g(f_n)\}$ stejně spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$.*

Důkaz: Označme $K_1 = 2K+1$. Funkce g je na intervalu $\langle -K_1; K_1\rangle$ spojitá a je tedy dle věty 1.4 (Cantorova věta) na tomto intervalu stejnoměrně spojitá tj. pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_1 > 0$ tak, že pro všechna $x_1, x_2 \in \langle -K_1; K_1\rangle$, $|x_1 - x_2| < \delta_1$ platí

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon \ .$$

Posloupnost $\{f_n\}$ je stejně spojitá na intervalu $\langle a; b\rangle$, tj. pro libovolné $\varepsilon_1 > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $t_1, t_2 \in \langle a; b\rangle$, $|t_1 - t_2| < \delta$ platí

$$|f_n(t_1) - f_n(t_2)| < \varepsilon_1 \ .$$

Označme $x_1 = f_n(t_1)$, $x_2 = f_n(t_2)$. Potom $|x_1 - x_2| < K_1$ a pokud zvolíme $\varepsilon_1 < \delta_1$ dostaneme, že posloupnost $\{g(f_n)\}$ je stejně spojitá v intervalu $\langle a; b\rangle$. □

Věta 2.3 (Existenční věta Fredholmova typu) *Nechť $g \in Car(\langle 0; T\rangle \times \mathbb{R}^2)$, ϕ je rostoucí lichý homeomorfismus s $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Předpokládejme, že existuje funkce $m \in L\langle 0; T\rangle$ tak, že*

$$|g(t,x,y)| \le m(t) \ \textit{pro s. v.}\ t \in \langle 0; T\rangle \ \ \textit{a všechna}\ x, y \in \mathbb{R} \ . \tag{2.2}$$

Potom má úloha (2.1) *řešení.*

Důkaz:
1. krok - řešení pomocné úlohy.
Uvažujme pomocnou úlohu

$$(\phi(u'(t)))' = b(t) \ , \quad u(0) = u(T) = 0 \ , \tag{2.3}$$

kde $b \in L\langle 0; T\rangle$. Potom u je řešení úlohy (2.3) právě když $u \in C^1\langle 0; T\rangle$ splňuje rovnice

$$u(t) = \int_0^t \phi^{-1}\left(\phi(u'(0)) + \int_0^s b(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}s \tag{2.4}$$

a

$$\int_0^T \phi^{-1}\left(\phi(u'(0)) + \int_0^s b(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}s = 0 \ . \tag{2.5}$$

Můžeme to ověřit přímým výpočtem. Integrujme rovnici $(\phi(u'(t)))' = b(t)$ od 0 do s a dostaneme

$$\phi(u'(s)) - \phi(u'(0)) = \int_0^s b(z)\,\mathrm{d}z\ ,$$

$$u'(s) = \phi^{-1}\left(\phi(u'(0)) + \int_0^s b(z)\,\mathrm{d}z\right)\ .$$

Další integrací od 0 do t máme

$$u(t) = u(t) - u(0) = \int_0^t \phi^{-1}\left(\phi(u'(0)) + \int_0^s b(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}s\ .$$

Protože $u(T) = 0$ platí

$$\int_0^T \phi^{-1}\left(\phi(u'(0)) + \int_0^s b(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}s = 0\ .$$

2. krok - definice funkcionálu γ.

Pro všechna $\ell \in C\langle 0;T\rangle$ definujme funkci

$$\psi_\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad \psi_\ell(x) = \int_0^T \phi^{-1}(x + \ell(s))\,\mathrm{d}s\ .$$

Vzhledem k předpokladům, že ϕ je rostoucí lichý homeomorfismus s $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, je také ϕ^{-1} rostoucí a $\phi^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Funkce ψ_ℓ je spojitá, rostoucí s $\psi_\ell(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Tedy rovnice $\psi_\ell(x) = 0$ má jediný kořen $x = \gamma(\ell) \in \mathbb{R}$ a můžeme definovat funkcionál

$$\gamma : C\langle 0;T\rangle \to \mathbb{R}\ , \quad \psi_\ell(\gamma(\ell)) = 0\ .$$

3. krok - funkcionál γ zobrazuje omezené množiny na omezené množiny.

Sporem ukážeme, že funkcionál γ zobrazuje omezené množiny na omezené množiny. Předpokládejme, že $\Omega \subset C\langle 0;T\rangle$, $K \in (0,\infty)$ a také že $\|\ell\|_{C\langle 0;T\rangle} \le K$ pro všechna $\ell \in \Omega$. Dostáváme

$$\gamma(\ell) - K \le \min\{\gamma(\ell) + \ell(s) :\ s \in \langle 0;T\rangle\} \le \max\{\gamma(\ell) + \ell(s) :\ s \in \langle 0;T\rangle\} \le \gamma(\ell) + K\ .$$

Dále předpokládejme, že existuje posloupnost $\{\ell_n\} \subset \Omega$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(\ell_n) = \infty \text{ nebo } \lim_{n\to\infty} \gamma(\ell_n) = -\infty\ .$$

Nechť platí první možnost. Potom platí

$$0 = \lim_{n\to\infty} \psi_{\ell_n}(\gamma(\ell_n)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \phi^{-1}(\gamma(\ell_n) + \ell_n(s))\,\mathrm{d}s \ge$$

$$\ge \lim_{n\to\infty} \int_0^T \phi^{-1}(\gamma(\ell_n) - K)\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty} T\phi^{-1}(\gamma(\ell_n) - K) = \infty\ ,$$

což je spor.

Nyní předpokládejme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\ell_n) = -\infty$. Potom

$$0 = \lim_{n\to\infty} \psi_{\ell_n}(\gamma(\ell_n)) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \phi^{-1}(\gamma(\ell_n) + \ell_n(s))\,\mathrm{d}s \le$$

$$\le \lim_{n\to\infty} \int_0^T \phi^{-1}(\gamma(\ell_n) + K)\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty} T\phi^{-1}(\gamma(\ell_n) + K) = -\infty \ .$$

Dostáváme opět spor.

Tedy $\gamma(\Omega)$ je omezená množina.

4. krok - funkcionál γ je spojitý.

Uvažujme posloupnost $\{\ell_n\} \subset C\langle 0;T\rangle$ a předpokládejme, že $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n = \ell_0$ v $C\langle 0;T\rangle$, tj. posloupnost $\{\ell_n\}$ stejnoměrně konverguje k funkci ℓ_0 na intervalu $\langle 0;T\rangle$.

Podle třetího kroku důkazu je posloupnost $\{\gamma(\ell_n)\} \subset \mathbb{R}$ omezená a dle věty 1.3 (Bolzanova - Weierstrassova věta) můžeme vybrat podposloupnost tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\ell_{k_n}) = x_0 \in \mathbb{R}$. Dostáváme, že součet posloupností $\{\gamma(\ell_{k_n}) + \ell_{k_n}(t)\}$ stejnoměrně konverguje k funkci $x_0 + l_0(t)$ na intervalu $\langle 0;T\rangle$. ϕ^{-1} je zobrazení spojité na $\mathbb{R}$ a dle lemmatu 2.1 je posloupnost $\{\phi^{-1}(\gamma(\ell_{k_n}) + \ell_{k_n}(t))\}$ stejnoměrně konvergentní na intervalu $\langle 0;T\rangle$. Dále

$$0 = \psi_{\ell_{k_n}}(\gamma(\ell_{k_n})) = \int_0^T \phi^{-1}(\gamma(\ell_{k_n}) + \ell_{k_n}(s))\,\mathrm{d}s \ ,$$

což pro $n \to \infty$ užitím věty 1.8 (Limitní přechod za znakem integrálu) dává

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \phi^{-1}(\gamma(\ell_{k_n}) + \ell_{k_n}(s))\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^T \lim_{n\to\infty} \phi^{-1}(\gamma(\ell_{k_n}) + \ell_{k_n}(s))\,\mathrm{d}s = \int_0^T \phi^{-1}(x_0 + \ell_0(s))\,\mathrm{d}s = \psi_{\ell_0}(x_0) \ .$$

Vzhledem k druhému kroku důkazu dostaneme $x_0 = \gamma(\ell_0)$. Z toho plyne že libovolná konvergentní podposloupnost $\{\gamma(\ell_n)\}$ má stejnou limitu $\gamma(\ell_0)$. Protože $\{\gamma(\ell_n)\}$ je omezená množina, dostáváme $\gamma(\ell_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma(\ell_n)$.

5. krok - definice operátoru $\mathcal{F}$.

Definujme operátory $\mathcal{N} : C^1\langle 0;T\rangle \to C\langle 0;T\rangle$ a $\mathcal{F} : C^1\langle 0;T\rangle \to C^1\langle 0;T\rangle$ takto

$$(\mathcal{N}(u))(t) = -\int_0^t g(s, u(s), u'(s))\,\mathrm{d}s$$

a

$$(\mathcal{F}(u))(t) = \int_0^t \phi^{-1}(\gamma(\mathcal{N}(u)) + (\mathcal{N}(u))(s))\,\mathrm{d}s \ .$$

Spojitost $(\mathcal{N}(u))(t)$ je zaručena splněním Carathéodoryho podmínek pro funkci g.

V prvním kroku důkazu jsme ukázali, že $u \in C^1\langle 0;T\rangle$ je řešením úlohy (2.3), právě když splňuje rovnice (2.4) a (2.5). Zvolme $b(t) = -g(t, u(t), u'(t))$, potom

$$(\mathcal{N}(u))(s) = -\int_0^s g(z, u(z), u'(z))\,\mathrm{d}z = \int_0^s b(z)\,\mathrm{d}z$$

a

$$u(t) = \int_0^t \phi^{-1}(\phi(u'(0)) + (\mathcal{N}(u))(s))\,\mathrm{d}s\ .$$

Dále

$$\int_0^T \phi^{-1}(x + \ell(s))\,\mathrm{d}s = 0 \Leftrightarrow x = \gamma(\ell)\ ,$$

a tedy

$$\int_0^T \phi^{-1}(\phi(u'(0)) + (\mathcal{N}(u))(s))\,\mathrm{d}s = 0 \Leftrightarrow \phi(u'(0)) = \gamma(\mathcal{N}(u))\ .$$

Vidíme, že $u \in C^1\langle 0;T\rangle$ je řešení úlohy (2.1), právě když splňuje rovnice

$$u(t) = \int_0^t \phi^{-1}(\phi(u'(0)) + (\mathcal{N}(u))(s))\,\mathrm{d}s\ , \quad \phi(u'(0)) = \gamma(\mathcal{N}(u))$$

a proto je operátorová rovnice $u = \mathcal{F}(u)$ ekvivalentní s úlohou (2.1). Dále stačí ukázat, že operátor $\mathcal{F}$ má pevný bod.

6. krok - spojitost operátoru $\mathcal{F}$.

Nejprve ukážeme, že operátor $\mathcal{N}$ je spojitý. Protože funkce $g(t,x,y)$ splňuje Carathéodoryho podmínky na $\langle 0;T\rangle \times \mathbb{R}^2$ je ve své druhé a třetí proměnné spojitá. Zvolme libovolné $w_0 \in C^1\langle 0;T\rangle$ a libovolné $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $w \in C^1\langle 0;T\rangle$, $\|w - w_0\|_{C^1\langle 0;T\rangle} < \delta$, $s \in \langle 0;T\rangle$ platí

$$|g(s, w(s), w'(s)) - g(s, w_0(s), w_0'(s))| < \frac{\varepsilon}{T}\ .$$

Pro $t \in \langle 0;T\rangle$ dostaneme

$$|(\mathcal{N}(w))(t) - (\mathcal{N}(w_0))(t)| = \left| -\int_0^t g(s, w(s), w'(s))\,\mathrm{d}s + \int_0^t g(s, w_0(s), w_0'(s))\,\mathrm{d}s \right| =$$

$$= \left| \int_0^t g(s, w_0(s), w_0'(s)) - g(s, w(s), w'(s))\,\mathrm{d}s \right| < \varepsilon\ .$$

Vidíme, že $\|\mathcal{N}(w) - \mathcal{N}(w_0)\|_{C\langle 0;T\rangle} < \varepsilon$, a tedy operátor $\mathcal{N}$ je spojitý ve w_0. Protože w_0 byla libovolná funkce z prostoru $C^1\langle 0;T\rangle$, je operátor $\mathcal{N}$ spojitý na $C^1\langle 0;T\rangle$.

Nyní ukážeme, že operátor $\mathcal{F}$ je spojitý. Zvolme libovolné $w_1 \in C^1\langle 0;T\rangle$ a libovolné $\varepsilon_1 > 0$. Protože funkcionál γ i operátor $\mathcal{N}$ jsou spojité, pro libovolné $\varepsilon_2 > 0$ existuje $\delta_2 > 0$ tak, že pro $s \in \langle 0;T\rangle$ a pro všechna $w \in C^1\langle 0;T\rangle$, $\|w - w_1\|_{C^1\langle 0;T\rangle} < \delta_2$ platí

$$|\gamma(\mathcal{N}(w)) + (\mathcal{N}(w))(s) - \gamma(\mathcal{N}(w_1)) + (\mathcal{N}(w_1))(s)| < \varepsilon_2\ .$$

Dále existuje konstanta $K_1 > 0$ taková, že $|\gamma(\mathcal{N}(w)) + (\mathcal{N}(w))(s)| < K_1$. Funkce $\phi^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a podle věty 1.4 (Cantorova věta) je na intervalu $\langle -K_1; K_1\rangle$ stejnoměrně spojitá. Existuje tedy $\delta_1 > 0$ tak, že pro všechna $x_1, x_2 \in \langle -K_1; K_1\rangle$, $|x_1 - x_2| < \delta_1$ platí

$$\left|\phi^{-1}(x_1) - \phi^{-1}(x_2)\right| < \frac{\varepsilon_1}{T+1} \ .$$

Označme $x_1 = \gamma(\mathcal{N}(w)) + (\mathcal{N}(w))(s)$, $x_2 = \gamma(\mathcal{N}(w_1)) + (\mathcal{N}(w_1))(s)$ a zvolme $\varepsilon_2 < \delta_1$. Pro $t \in \langle 0; T\rangle$ dostaneme

$$|(\mathcal{F}(w))(t) - (\mathcal{F}(w_1))(t)| =$$
$$= \left|\int_0^t \phi^{-1}(\gamma(\mathcal{N}(w)) + (\mathcal{N}(w))(s))\,\mathrm{d}s - \int_0^t \phi^{-1}(\gamma(\mathcal{N}(w_1)) + (\mathcal{N}(w_1))(s))\,\mathrm{d}s\right| =$$
$$= \left|\int_0^t \phi^{-1}(\gamma(\mathcal{N}(w)) + (\mathcal{N}(w))(s)) - \phi^{-1}(\gamma(\mathcal{N}(w_1)) + (\mathcal{N}(w_1))(s))\,\mathrm{d}s\right| < \frac{T\varepsilon_1}{T+1} \ .$$

Dále

$$|((\mathcal{F}(w))(t))' - ((\mathcal{F}(w_1))(t))'| =$$
$$= \left|\phi^{-1}(\gamma(\mathcal{N}(w)) + (\mathcal{N}(w))(t)) - \phi^{-1}(\gamma(\mathcal{N}(w_1)) + (\mathcal{N}(w_1))(t))\right| < \frac{\varepsilon_1}{T+1} \ .$$

Dohromady máme, že pro $w_1 \in C^1\langle 0; T\rangle$ a libovolné ε_1 existuje δ_2 tak, že pro $w \in C^1\langle 0; T\rangle$, $\|w - w_1\|_{C^1\langle 0;T\rangle} < \delta_2$ platí

$$\|\mathcal{F}(w) - \mathcal{F}(w_1)\|_{C^1\langle 0;T\rangle} < \frac{T\varepsilon_1}{T+1} + \frac{\varepsilon_1}{T+1} = \varepsilon_1 \ .$$

Operátor $\mathcal{F}$ je spojitý v $w_1 \in C^1\langle 0; T\rangle$, a protože w_1 byl libovolný prvek $C^1\langle 0; T\rangle$, je spojitý na $C^1\langle 0; T\rangle$.

7. krok - pevný bod operátoru $\mathcal{F}$.

Zvolme libovolnou posloupnost $\{u_n\} \subset C^1\langle 0; T\rangle$ a označme $v_n = \mathcal{F}(u_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Abychom mohli použít Schauderovu větu o pevném bodě ukážeme, že z $\{v_n\}$ lze vybrat podposloupnost konvergentní v $C^1\langle 0; T\rangle$.

$$v_n'(t) = \phi^{-1}\left(\gamma\left(\mathcal{N}\left(u_n\right)\right) + \left(\mathcal{N}\left(u_n\right)\right)(t)\right) \quad \text{pro } t \in \langle 0; T\rangle \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Podmínka (2.2) zajišťuje, že existuje konstanta $K_2 > 0$ tak, že $||\mathcal{N}(u_n)||_{C\langle 0;T\rangle} \le K_2$. Funkcionál γ zobrazuje omezené množiny na omezené množiny a dostáváme tedy, že posloupnosti $\{v_n\}$ a $\{v_n'\}$ jsou omezené na intervalu $\langle 0; T\rangle$.

Z podmínky (2.2) a věty 1.1 (Absolutní spojitost Lebesgueova integrálu) plyne, že pro libovolné $\varepsilon_3 > 0$ existuje $\delta_3 > 0$ tak, že pro všechna $t_1, t_2 \in \langle 0; T\rangle$, $|t_1 - t_2| < \delta_3$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|(\mathcal{N}(u_n))(t_1) - (\mathcal{N}(u_n))(t_2)| \le \left|\int_{t_1}^{t_2} m(s)\,\mathrm{d}s\right| < \varepsilon_3 \ .$$

Posloupnosti $\{\mathcal{N}(u_n)\}$ i $\{\gamma(\mathcal{N}(u_n))+\mathcal{N}(u_n)\}$ jsou stejně spojité a existuje konstanta $K_3 > 0$ tak, že $|\gamma(\mathcal{N}(u_n)) + (\mathcal{N}(u_n))(t)| < K_3$, ϕ^{-1} je spojité zobrazení a užitím lemmatu 2.2 dostáváme, že posloupnost $\{v_n'\}$ je stejně spojitá na intervalu $\langle 0; T\rangle$.

Dle věty 1.2 (Arzelà - Ascoli věta) můžeme najít podposloupnost $\{v_{k_n}\}$ konvergentní v $C^1\langle 0; T\rangle$.

Dokázali jsme, že operátor $\mathcal{F}$ je kompaktní na $C^1\langle 0; T\rangle$. Podle věty 1.10 (Schauderova věta o pevném bodě) má operátor $\mathcal{F}$ pevný bod, který je řešením úlohy (2.1). $\square$

2.2 Metoda horních a dolních funkcí

Druhá i třetí existenční věta jsou založeny na metodě horních a dolních funkcí. Nejprve vyslovíme pomocné lemma.

Lemma 2.4 ([44] str. 529) *Nechť $g \in Car(\langle 0; T\rangle \times \mathbb{R}^2)$, σ_1, σ_2 jsou dolní a horní funkce úlohy (2.1), které mají konečné derivace v bodech 0 a T. Pro $\varepsilon \in \langle 0; 1\rangle$ a s. v. $t \in \langle 0; T\rangle$ definujme funkce*

$$\omega_i(t,\varepsilon) = \sup\left\{|g(t,\sigma_i(t),\sigma_i'(t)) - g(t,\sigma_i(t),y)| : \ |y-\sigma_i'(t)| \le \varepsilon\right\} \ , \quad i = 1,2 \ .$$

Potom funkce ω_i splňují Carathéodoryho podmínky na $\langle 0; T\rangle \times \langle 0; 1\rangle$ pro $i = 1, 2$.

Věta 2.5 (Metoda horních a dolních funkcí) *Nechť $g \in Car(\langle 0; T\rangle \times \mathbb{R}^2)$, ϕ je rostoucí lichý homeomorfismus s $\phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Nechť σ_1 a σ_2 jsou dolní funkce a horní funkce úlohy (2.1) mající konečné derivace v bodech 0 a T a nechť $\sigma_1(t) \le \sigma_2(t)$ pro $t \in \langle 0; T\rangle$. Předpokládejme, že existuje funkce $m \in L\langle 0; T\rangle$ taková, že*

$$|g(t,x,y)| \le m(t) \text{ pro s. v. } t \in \langle 0; T\rangle \text{ a všechna } x \in \langle \sigma_1(t); \sigma_2(t)\rangle \ , \ y \in \mathbb{R} \ .$$

Potom má úloha (2.1) řešení u pro které platí

$$\sigma_1(t) \le u(t) \le \sigma_2(t) \text{ pro } t \in \langle 0; T\rangle \ . \tag{2.6}$$

Důkaz:

1. krok - konstrukce pomocné úlohy.

Pro s. v. $t \in \langle 0; T\rangle$ a všechny $x, y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \langle 0; 1\rangle$ definujme

$$\widetilde{g}(t,x,y) = \begin{cases} g(t,\sigma_1(t),y) + \omega_1\left(t, \dfrac{\sigma_1(t)-x}{\sigma_1(t)-x+1}\right) + \dfrac{\sigma_1(t)-x}{\sigma_1(t)-x+1} & \text{pro } x < \sigma_1(t) \\[2ex] g(t,x,y) & \text{pro } x \in \langle\sigma_1(t);\sigma_2(t)\rangle \\[2ex] g(t,\sigma_2(t),y) - \omega_2\left(t, \dfrac{x-\sigma_2(t)}{x-\sigma_2(t)+1}\right) - \dfrac{x-\sigma_2(t)}{x-\sigma_2(t)+1} & \text{pro } x > \sigma_2(t), \end{cases}$$

kde

$$\omega_i(t,\varepsilon) = \sup\left\{|g(t,\sigma_i(t),\sigma_i'(t)) - g(t,\sigma_i(t),y)| : \ |y-\sigma_i'(t)| \le \varepsilon\right\} \ , \quad i=1,2 \ .$$

Podle lemmatu 2.4 jsou funkce $\omega_i \in Car(\langle 0;T\rangle \times \langle 0;1\rangle)$ pro $i=1,2$. Dále jsou nezáporné, neklesající ve své druhé proměnné a $\omega_i(t,0)=0$ pro s. v. $t\in\langle 0;T\rangle$, $i=1,2$. Platí $\widetilde{g}\in Car(\langle 0;T\rangle\times\mathbb{R}^2)$ a existuje $\widetilde{m}\in L\,\langle 0;T\rangle$ tak, že

$$|\widetilde{g}(t,x,y)| \le \widetilde{m}(t) \text{ pro s. v. } t\in\langle 0;T\rangle \text{ a všechna } x,y\in\mathbb{R} \ .$$

Tedy podle věty 2.3 má pomocná úloha

$$(\phi(u'(t)))' + \widetilde{g}(t,u(t),u'(t)) = 0 \ , \quad u(0)=u(T)=0$$

řešení u.

2. krok - řešení u pomocné úlohy leží mezi funkcemi σ_1 a σ_2.

Sporem ukážeme, že platí odhad (2.6).

Označme $v_1(t)=\sigma_1(t)-u(t)$ pro $t\in\langle 0;T\rangle$ a předpokládejme, že $\max\{v_1(t) : t\in\langle 0;T\rangle\} = v_1(t_0) > 0$. Protože $u(0)=u(T)=0$ a $\sigma_1(0)\le 0$, $\sigma_1(T)\le 0$, dostáváme $t_0\in(0;T)$. $u\in C^1\langle 0;T\rangle$, a navíc dle definice 1.36 máme $\sigma_1\in C\,\langle 0;T\rangle$ a pro $s\in S$ platí $\sigma_1'(s-) < \sigma_1'(s+)$. Dostáváme $v_1'(s-) = \sigma_1'(s-) - u'(s)$, $v_1'(s+) = \sigma_1'(s+) - u'(s)$, a tedy $v_1'(s-) < v_1'(s+)$ pro $s\in S$. Vidíme, že bod $t_0\in(0;T)\setminus S$ a $v'(t_0)=0$. To zaručuje existenci $t_1\in(t_0;T)$ tak, že $\langle t_0;t_1\rangle \cap S = \emptyset$,

$$v_1(t) > 0 \text{ a } |v_1'(t)| < \frac{v_1(t)}{v_1(t)+1} < 1 \text{ pro } t\in\langle t_0;t_1\rangle \ .$$

Potom

$$\begin{gathered}(\phi(\sigma_1'(t)))' - (\phi(u'(t)))' = (\phi(\sigma_1'(t)))' + \widetilde{g}(t,u(t),u'(t)) = \\ = (\phi(\sigma_1'(t)))' + g(t,\sigma_1(t),u'(t)) + \omega_1\left(t,\frac{v_1(t)}{v_1(t)+1}\right) + \frac{v_1(t)}{v_1(t)+1} > \\ > (\phi(\sigma_1'(t)))' + g(t,\sigma_1(t),u'(t)) + \omega_1\left(t,|v_1'(t)|\right) \ge \\ \ge (\phi(\sigma_1'(t)))' + g(t,\sigma_1(t),u'(t)) + g(t,\sigma_1(t),\sigma_1'(t)) - g(t,\sigma_1(t),u'(t)) = \\ = (\phi(\sigma_1'(t)))' + g(t,\sigma_1(t),\sigma_1'(t)) \ge 0\end{gathered}$$

pro s. v. $t\in\langle t_0;t_1\rangle$.

$$0 = v_1'(t_0) = \sigma_1'(t_0) - u'(t_0) = \phi(\sigma_1'(t_0)) - \phi(u'(t_0)) \ ,$$

a proto

$$0 < \int_{t_0}^{t} (\phi(\sigma_1'(s)))' - (\phi(u'(s)))'\,\mathrm{d}s = \phi(\sigma_1'(t)) - \phi(u'(t)) \ , \quad t\in(t_0;t_1\rangle \ .$$

ϕ je rostoucí, a tedy $v_1' = \sigma_1' - u' > 0$ na $(t_0; t_1\rangle$, což je spor s předpokladem, že v_1 má své maximum v bodě t_0.

Druhou nerovnost dokážeme podobně. Označme $v_2(t) = u(t) - \sigma_2(t)$ pro $t \in \langle 0; T\rangle$ a předpokládejme, že $\max\{v_2(t) : t \in \langle 0; T\rangle\} = v_2(t_2) > 0$. Protože $u(0) = u(T) = 0$ a $\sigma_2(0) \geq 0$, $\sigma_2(T) \geq 0$, dostáváme $t_2 \in (0; T)$. $u \in C^1\langle 0; T\rangle$, a navíc dle definice 1.35 máme $\sigma_2 \in C\langle 0; T\rangle$ a pro $s \in S$ platí $\sigma_2'(s-) > \sigma_2'(s+)$. Dostáváme $v_2'(s-) = u'(s) - \sigma_2'(s-)$, $v_2'(s+) = u'(s) - \sigma_2'(s+)$, a tedy $v_2'(s-) < v_2'(s+)$ pro $s \in S$. Vidíme, že bod $t_2 \in (0; T) \setminus S$ a $v_2'(t_2) = 0$. To zaručuje existenci $t_3 \in (t_2; T)$ tak, že $\langle t_2; t_3\rangle \cap S = \emptyset$,

$$v_2(t) > 0 \text{ a } |v_2'(t)| < \frac{v_2(t)}{v_2(t)+1} < 1 \text{ pro } t \in \langle t_2; t_3\rangle \ .$$

Potom

$$\begin{gathered}(\phi(u'(t)))' - (\phi(\sigma_2'(t)))' = -\widetilde{g}(t, u(t), u'(t)) - (\phi(\sigma_2'(t)))' = \\ = -g(t, \sigma_2(t), u'(t)) + \omega_2\left(t, \frac{v_2(t)}{v_2(t)+1}\right) + \frac{v_2(t)}{v_2(t)+1} - (\phi(\sigma_2'(t)))' > \\ > -g(t, \sigma_2(t), u'(t)) + \omega_2\left(t, |v_2'(t)|\right) - (\phi(\sigma_2'(t)))' \geq \\ \geq -g(t, \sigma_2(t), u'(t)) + g(t, \sigma_2(t), u'(t)) - g(t, \sigma_2(t), \sigma_2'(t)) - (\phi(\sigma_2'(t)))' = \\ = -g(t, \sigma_2(t), \sigma_2'(t)) - (\phi(\sigma_2'(t)))' \geq 0\end{gathered}$$

pro s. v. $t \in \langle t_2; t_3\rangle$.

$$0 = v_2'(t_2) = \sigma_2'(t_2) - u'(t_2) = \phi(\sigma_2'(t_2)) - \phi(u'(t_2)) \ ,$$

a proto

$$0 < \int_{t_2}^{t} (\phi(u'(s)))' - (\phi(\sigma_2'(s)))' \,\mathrm{d}s = \phi(u'(t)) - \phi(\sigma_2'(t)) \ , \quad t \in (t_2; t_3\rangle \ .$$

ϕ je rostoucí, a tedy $v_2' = u' - \sigma_2' > 0$ na $(t_2; t_3\rangle$, což je spor s předpokladem, že funkce v_2 má své maximum v bodě t_2.

Funkce u splňuje odhad (2.6) a vzhledem k definici funkce $\widetilde{g}$ je řešením úlohy (2.1). □

3 Singulární problém

Nejprve vyslovíme dva obecné existenční principy zaručující existenci řešení singulární úlohy. Tyto principy nekladou požadavky přímo na funkci f a nejsou vhodné pro aplikace. Ve druhé části této kapitoly budeme tyto principy aplikovat a vyslovíme věty, které kladou požadavky přímo na funkci f a které zajišťují existenci řešení singulární úlohy.

3.1 Existenční principy

Existenční principy uvedené ve větách 3.2 a 3.3 kladou požadavky na aproximující regulární funkce f_n a na řešení u_n regulárních úloh (1.5) pro $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že za daných předpokladů řešení těchto regulárních úloh konvergují k řešení nebo w-řešení u singulární úlohy (1.4). Nejprve dokážeme pomocné lemma.

Lemma 3.1 *Nechť $f_n \in C^1\langle a;b\rangle$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Nechť existuje kladná konstanta $K > 0$ taková, že $\|f_n'\|_{C\langle a;b\rangle} < K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom je posloupnost $\{f_n\}$ stejně spojitá v intervalu $\langle a;b\rangle$.*

Důkaz: Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Nechť $\delta < \frac{\varepsilon}{K}$, $t_1, t_2 \in \langle a;b\rangle$, $t_1 \le t_2$, $t_2 - t_1 < \delta$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Potom existuje dle věty 1.6 (Lagrangeova věta o střední hodnotě) $t_0 \in (t_1;t_2)$ tak, že platí

$$|f_{n_0}(t_1) - f_{n_0}(t_2)| \le |f_{n_0}'(t_0)|(t_2 - t_1) < K\delta < \varepsilon \ .$$

Protože n_0 je libovolné přirozené číslo, platí nerovnost

$$|f_n(t_1) - f_n(t_2)| \le \varepsilon$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a posloupnost $\{f_n\}$ je stejně spojitá v intervalu $\langle a;b\rangle$. □

Nechť $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathbb{R}$ jsou uzavřené intervaly obsahující nulu, $\mathcal{D} = (\mathfrak{A}_1 \setminus \{0\}) \times (\mathfrak{A}_2 \setminus \{0\})$.

Věta 3.2 (První existenční princip) *Nechť $f \in Car((0;T) \times \mathcal{D})$, $\mathcal{D} = (\mathfrak{A}_1 \setminus \{0\}) \times (\mathfrak{A}_2 \setminus \{0\})$, $f_n \in Car(\langle 0;T\rangle \times \mathbb{R}^2)$, $\varepsilon_n > 0$, $\eta_n > 0$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$. Dále pro $n > \frac{2}{T}$ označme $\Delta_n = \left\langle \frac{1}{n}; T - \frac{1}{n} \right\rangle$. Předpokládejme, že*

(1) *$f_n(t,x,y) = f(t,x,y)$ pro s. v. $t \in \Delta_n$ a všechna $[x,y] \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, $|x| \ge \varepsilon_n$, $|y| \ge \eta_n$, $n > \frac{2}{T}$;*

(2) *existuje omezená množina $\Omega \subset C^1\langle 0;T\rangle$ taková, že pro všechna $n > \frac{2}{T}$ má úloha (1.5) řešení $u_n \in \Omega$ a dále, že $[u_n(t), u_n'(t)] \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ pro $t \in \langle 0;T\rangle$.*

(*i*) *Potom existuje funkce $u \in C\langle 0;T\rangle$ a podposloupnost $\{u_\ell\} \subseteq \{u_n\}$ tak, že*

$$\lim_{\ell\to\infty} u_\ell(t) = u(t) \text{ stejnoměrně na } \langle 0;T\rangle \ . \tag{3.1}$$

(3) *Pokud navíc existuje konečná množina $S = \{s_1, \cdots, s_p\} \subset (0;T)$ taková, že na každém intervalu $\langle a;b\rangle \subset (0;T) \setminus S$ je posloupnost $\{\phi(u_\ell')\}$ stejně spojitá,*

(*ii*) *pak $u \in C^1((0;T) \setminus S)$ a existuje podposloupnost $\{u_k\} \subseteq \{u_\ell\}$ tak, že*

$$\lim_{k\to\infty} u_k'(t) = u'(t) \text{ lokálně stejnoměrně na } (0,T) \setminus S \ . \tag{3.2}$$

(4) *Dále předpokládejme, že množina S má tvar*

$$S = \{s \in (0;T) : \ u(s) = 0 \text{ nebo } u'(s) = 0 \text{ nebo } u'(s) \text{ neexistuje}\} \ .$$

(*iii*) *Potom* $\phi(u') \in AC_{loc}((0;T) \setminus S)$ *a funkce u je w-řešení úlohy* (1.4).

(5) *Označme* $s_0 = 0$, $s_{p+1} = T$. *Jestliže existují* $\eta \in \left(0; \frac{T}{2}\right)$, $\lambda_0, \mu_0, \lambda_1, \mu_1, \cdots, \lambda_{p+1}, \mu_{p+1} \in \{-1, 1\}$, $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 > \frac{2}{T}$ *a* $\psi \in L\langle 0;T\rangle$ *tak, že*

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_i f_k\left(t, u_k(t), u_k'(t)\right) \geq \psi(t) \quad \textit{pro s. v. } t \in (s_i - \eta, s_i) \cap (0;T) \ , \\ \\ \mu_i f_k(t, u_k(t), u_k'(t)) \geq \psi(t) \quad \textit{pro s. v. } t \in (s_i, s_i + \eta) \cap (0;T) \ , \\ \\ \textit{pro všechna } i \in \{0, \cdots, p+1\} \ , \quad k \in \mathbb{N} \ , \quad k \geq k_0 \ , \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

(*iv*) *pak* $\phi(u') \in AC\langle 0;T\rangle$ *a funkce u je řešení úlohy* (1.4) *splňující* $[u(t), u'(t)] \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ *pro* $t \in \langle 0;T\rangle$.

Důkaz:

1. krok - stejnoměrná konvergence posloupnosti řešení.

Podle předpokladu (2) existuje konstanta $K > 0$ a posloupnost $\{u_n\}$ řešení úloh (1.5) tak, že

$$\|u_n\|_{C^1\langle 0;T\rangle} \leq K \text{ pro všechna } n > \frac{2}{T} \ . \tag{3.4}$$

Tedy posloupnost $\{u_n\}$ je omezená v $C\langle 0;T\rangle$. Navíc platí

$$\|u_n'\|_{C\langle 0;T\rangle} \leq K \text{ pro všechna } n > \frac{2}{T} \ .$$

Podle lemmatu 3.1 je posloupnost $\{u_n\}$ stejně spojitá na intervalu $\langle 0;T\rangle$ a podle věty 1.2 (Arzelà - Ascoli věta) můžeme vybrat podposloupnost $\{u_\ell\}$ tak, že

$$\lim_{\ell\to\infty} u_\ell(t) = u(t) \text{ stejnoměrně na } \langle 0;T\rangle \ , \quad u \in C\langle 0;T\rangle \ .$$

2. krok - lokální stejnoměrná konvergence posloupnosti derivací řešení.

Nyní předpokládejme, že platí také předpoklad (3). Zvolme libovolný interval $\langle a_1; b_1\rangle \subset (0;T)\setminus S$. Posloupnost $\{\phi(u_\ell')\}$ je stejně spojitá na intervalu $\langle a_1; b_1\rangle$. Dle (3.4) je posloupnost $\{u_\ell'\}$ omezená v $C\langle a_1; b_1\rangle$. Protože ϕ je homeomorfismus, je v $C\langle a_1; b_1\rangle$ omezená také posloupnost $\{\phi(u_\ell')\}$. Podle věty 1.2 (Arzelà - Ascoli věta) můžeme vybrat podposloupnost $\{\phi(u_{k_1})\} \subseteq \{\phi(u_\ell)\}$ takovou, že

$$\lim_{k_1\to\infty} \phi(u_{k_1}'(t)) = \phi(u'(t)) \text{ stejnoměrně na } \langle a_1; b_1\rangle \ .$$

ϕ^{-1} je spojité zobrazení a dle lemmatu 2.1 platí

$$\lim_{k_1\to\infty} u_{k_1}'(t) = u'(t) \text{ stejnoměrně na } \langle a_1; b_1\rangle \ .$$

Nyní vyberme $\langle a_2; b_2\rangle \subset (0;T) \setminus S$. Opakováním předchozího postupu můžeme z posloupnosti $\{u_{k_1}\}$ vybrat podposloupnost $\{u_{k_2}\}$ stejnoměrně konvergentní na $\langle a_2; b_2\rangle$. Opakováním tohoto postupu dostaneme posloupnost $\{u_{k_n}\}$, pro jednoduchost ji označme $\{u_k\}$, která splňuje (3.2). Protože $\{u_k\}$ je vybraná z posloupnosti $\{u_\ell\}$, vzhledem k (3.1), máme $u \in C^1((0;T) \setminus S)$.

3. krok - existence w-řešení singulární úlohy.

Dále předpokládejme, že platí předpoklad (4). Definujme množiny

$$V = \{t \in (0,T) : \ f(t,\cdot,\cdot) : \mathcal{D} \to \mathbb{R} \text{ není spojitá}\} ,$$

$$U = (0;T) \setminus (S \cup V) .$$

Protože funkce f splňuje Catathéodoryho podmínky, máme

$$\operatorname{meas}(S \cup V) = 0 . \tag{3.5}$$

Zvolme libovolné $t_0 \in U$. Potom existuje $k_1 > \frac{2}{T}$ tak, že pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_1$ platí

$$t_0 \in \Delta_k , \quad |u_k(t_0)| > \varepsilon_k , \quad |u_k'(t_0)| > \eta_k .$$

Dle předpokladu (1) máme

$$f_k(t, u_k(t), u_k'(t)) = f(t, u_k(t), u_k'(t)) \text{ pro s. v. } t \in \Delta_k$$

a podle (3.1), (3.2) a (3.5) dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} f_k(t, u_k(t), u_k'(t)) = f(t, u(t), u'(t)) \text{ pro s. v. } t \in \langle 0;T\rangle . \tag{3.6}$$

Protože u_k jsou řešení úloh (1.5), platí

$$-(\phi(u_k'(t)))' = f_k(t, u_k(t), u_k'(t)) \text{ pro s. v. } t \in \langle 0;T\rangle , \quad \forall k \in \mathbb{N} . \tag{3.7}$$

Nyní vyberme libovolný interval $\langle c;d\rangle \subset (0;T) \setminus S$ a integrujme rovnici (3.7). Dostáváme

$$-\phi(u_k'(t)) + \phi(u_k'(c)) = \int_c^t f_k(s, u_k(s), u_k'(s))\,\mathrm{d}s \text{ pro všechna } t \in \langle c;d\rangle . \tag{3.8}$$

Navíc existuje $k_2 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_2$

$$|f_k(t, u_k(t), u_k'(t))| \leq m(t) \text{ pro s. v. } t \in \langle c;d\rangle ,$$

kde

$$m(t) = \sup\{|f(t,x,y)| : \ \varepsilon_{k_2} \leq |x| \leq K; \ \eta_{k_2} \leq |y| \leq K; \ x \in \mathfrak{A}_1; \ y \in \mathfrak{A}_2\} \in L\langle c;d\rangle .$$

Máme $m \in L\langle c;d\rangle$ a užitím věty 1.7 (Lebesgueova věta) na intervalu $\langle c;d\rangle$ dostaneme $f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) \in L\langle c;d\rangle$. Navíc

$$\lim_{k\to\infty} \int_c^d f_k(s, u_k(s), u_k'(s))\,\mathrm{d}s = \int_c^d f(s, u(s), u'(s))\,\mathrm{d}s . \tag{3.9}$$

Podle (3.1), (3.2), (3.8) a (3.9) máme

$$-\phi(u'(t)) + \phi(u'(c)) = \int_c^t f(s, u(s), u'(s))\,\mathrm{d}s \text{ pro všechna } t \in \langle c; d\rangle \ . \tag{3.10}$$

Dle věty 1.13 dostáváme $\phi(u') \in AC\,\langle c; d\rangle$, a protože $\langle c; d\rangle$ je libovolný uzavřený podinterval $(0;T) \setminus S$, máme $\phi(u') \in AC_{loc}((0;T) \setminus S)$.

Derivováním (3.10) dostáváme, že funkce u splňuje rovnici (1.4) pro s. v. $t \in \langle 0; T\rangle$.

Protože funkce u_k jsou řešení regulárních úloh (1.5), platí, že $u_k(0) = u_k(T) = 0$, a proto podle (3.1) splňuje funkce u okrajové podmínky $u(0) = u(T) = 0$, a je tedy w-řešením úlohy (1.4).

4. krok - existence řešení singulární úlohy.

Zbývá ukázat, že $\phi(u') \in AC\,\langle 0; T\rangle$.

Nechť platí také předpoklad (5). Zvolme $i \in \{0, \cdots, p+1\}$ a označme $(c_i, d_i) = (s_i - \eta, s_i) \cap (0;T)$. Dále pro $k > \frac{2}{T}$ a pro s. v. $t \in (c_i, d_i)$ označme

$$h_k(t) = \lambda_i f_k(t, u_k(t), u_k'(t)) + |\psi(t)| \ ,$$

$$h(t) = \lambda_i f(t, u(t), u'(t)) + |\psi(t)| \ .$$

Potom $h_k \in L\,\langle c_i; d_i\rangle$ a vzhledem k (3.6) máme

$$\lim_{k\to\infty} h_k(t) = h(t) \text{ pro s. v. } t \in \langle c_i; d_i\rangle \ .$$

Integrací (3.7) na intervalu $\langle c_i; d_i\rangle$ dostáváme

$$-\phi(u_k'(d_i)) + \phi(u_k'(c_i)) = \int_{c_i}^{d_i} f_k(s, u_k(s), u_k'(s))\,\mathrm{d}s \ .$$

Tedy dle (3.3) a (3.4) máme pro $k \geq k_0$

$$\int_{c_i}^{d_i} |h_k(s)|\,\mathrm{d}s = \int_{c_i}^{d_i} h_k(s)\,\mathrm{d}s = \lambda_i \int_{c_i}^{d_i} f_k(s, u_k(s), u_k'(s))\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \int_{c_i}^{d_i} |\psi(s)|\,\mathrm{d}s \leq |\phi(u_k'(d_i))| + |\phi(u_k'(c_i))| + \int_{c_i}^{d_i} |\psi(s)|\,\mathrm{d}s \leq K_1 \ ,$$

kde $K_1 = 2\phi(K) + \|\psi\|_{L\langle 0;T\rangle}$. Užitím věty 1.5 (Fatouovo lemma) dostaneme $h \in L\,\langle c_i; d_i\rangle$ a máme tedy $f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) \in L\,\langle c_i; d_i\rangle$.

Jestliže $(c_i, d_i) = (s_i, s_i + \eta) \cap (0;T)$ postupujeme obdobně.

Máme $f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) \in L\,\langle 0; T\rangle$ a rovnice v (3.10) je splněna pro $t \in \langle 0; T\rangle$. Podle věty 1.13 dostáváme $\phi(u') \in AC\,\langle 0; T\rangle$. Ukázali jsme, že funkce u je řešení úlohy (1.4).

Vzhledem k předpokladu (2), (3.1), (3.2) a tomu, že $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ jsou uzavřené intervaly dostáváme $[u(t), u'(t)] \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ pro $t \in \langle 0; T\rangle$. $\square$

Druhý existenční princip (věta 3.3) se od prvního (věta 3.2) liší pouze v předpokladu (5).

Věta 3.3 (Druhý existenční princip) *Nechť* $f \in Car((0;T) \times \mathcal{D})$, $\mathcal{D} = (\mathfrak{A}_1 \setminus \{0\}) \times (\mathfrak{A}_2 \setminus \{0\})$, $f_n \in Car(\langle 0;T\rangle \times \mathbb{R}^2)$, $\varepsilon_n > 0$, $\eta_n > 0$ *pro* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$. *Dále pro* $n > \frac{2}{T}$ *označme* $\Delta_n = \left\langle \frac{1}{n}; T - \frac{1}{n}\right\rangle$. *Předpokládejme, že*

(1) $f_n(t,x,y) = f(t,x,y)$ *pro s. v.* $t \in \Delta_n$ *a všechna* $[x,y] \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, $|x| \geq \varepsilon_n$, $|y| \geq \eta_n$, $n > \frac{2}{T}$;

(2) *existuje omezená množina* $\Omega \subset C^1\langle 0;T\rangle$ *taková, že pro všechna* $n > \frac{2}{T}$ *má úloha* (1.5) *řešení* $u_n \in \Omega$ *a dále, že* $[u_n(t), u_n'(t)] \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ *pro* $t \in \langle 0;T\rangle$.

(i) *Potom existuje funkce* $u \in C\langle 0;T\rangle$ *a podposloupnost* $\{u_\ell\} \subseteq \{u_n\}$ *tak, že*

$$\lim_{\ell\to\infty} u_\ell(t) = u(t) \text{ stejnoměrně na } \langle 0;T\rangle \ .$$

(3) *Pokud navíc existuje konečná množina* $S = \{s_1, \cdots, s_p\} \subset (0;T)$ *taková, že na každém intervalu* $\langle a;b\rangle \subset (0;T) \setminus S$ *je posloupnost* $\{\phi(u_\ell')\}$ *stejně spojitá,*

(ii) *pak* $u \in C^1((0;T) \setminus S)$ *a existuje podposloupnost* $\{u_k\} \subseteq \{u_\ell\}$ *tak, že*

$$\lim_{k\to\infty} u_k'(t) = u'(t) \text{ lokálně stejnoměrně na } (0,T) \setminus S \ .$$

(4) *Dále předpokládejme, že množina* S *má tvar*

$$S = \{s \in (0;T) : \ u(s) = 0 \text{ nebo } u'(s) = 0 \text{ nebo } u'(s) \text{ neexistuje}\} \ .$$

(iii) *Potom* $\phi(u') \in AC_{loc}((0;T) \setminus S)$ *a funkce* u *je* w*-řešení úlohy* (1.4).

$(5a)$ *Označme* $s_0 = 0$, $s_{p+1} = T$. *Jestliže existují* $\eta \in \left(0; \frac{T}{2}\right)$, $\lambda_0, \mu_0, \lambda_1, \mu_1, \cdots, \lambda_{p+1}, \mu_{p+1} \in \{-1, 1\}$, $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 > \frac{2}{T}$ *a* $\psi \in L\langle 0;T\rangle$ *tak, že*

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_i f_k\left(t, u_k(t), u_k'(t)\right) \operatorname{sgn} u_k'(t) \geq \psi(t) \text{ pro s. v. } t \in (s_i - \eta, s_i) \cap (0;T) \ , \\[1em] \mu_i f_k(t, u_k(t), u_k'(t)) \operatorname{sgn} u_k'(t) \geq \psi(t) \text{ pro s. v. } t \in (s_i, s_i + \eta) \cap (0;T) \ , \\[1em] \text{pro všechna } i \in \{0, \cdots, p+1\} \ , \quad k \in \mathbb{N} \ , \quad k \geq k_0 \ , \end{array}\right\} \qquad (3.11)$$

(iv) *pak* $\phi(u') \in AC\langle 0;T\rangle$ *a funkce* u *je řešení úlohy* (1.4) *splňující* $[u(t), u'(t)] \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ *pro* $t \in \langle 0;T\rangle$.

Důkaz: První tři kroky důkazu jsou shodné s důkazem věty 3.2. Uvedeme zde tedy pouze čtvrtý krok důkazu.

4. krok - existence řešení singulární úlohy.

Opět chceme ukázat, že $\phi(u') \in AC\langle 0;T\rangle$.

Nechť platí předpoklad (5a). Zvolme $i \in \{0, \cdots, p+1\}$ a označme $(c_i, d_i) = (s_i - \eta, s_i) \cap (0;T)$. Dále pro $k > \frac{2}{T}$ a pro s. v. $t \in (c_i, d_i)$ označme

$$h_k(t) = \lambda_i f_k(t, u_k(t), u_k'(t)) \operatorname{sgn} u_k'(t) + |\psi(t)| \ ,$$

$$h(t) = \lambda_i f(t, u(t), u'(t)) \operatorname{sgn} u_k'(t) + |\psi(t)| \ .$$

Vzhledem k předpokladu (4) máme $u'(t) \neq 0$, dále $h_k \in L\langle c_i; d_i \rangle$ a vzhledem k (3.1), (3.2) a (3.6) dostáváme

$$\lim_{k\to\infty} h_k(t) = h(t) \text{ pro s. v. } t \in \langle c_i; d_i \rangle \ .$$

Vynásobením rovnice (3.7) $\operatorname{sgn} u_k'(t)$ a následnou integrací na intervalu $\langle c_i; d_i \rangle$ dostáváme pro $k \geq k_0$

$$\left| \int_{c_i}^{d_i} f_k(s, u_k(s), u_k'(s)) \operatorname{sgn} u_k'(s) \, \mathrm{d}s \right| \leq \phi(|u_k'(d_i)|) + \phi(|u_k'(c_i)|) \ .$$

Dle (3.4) je posloupnost $\{\phi(u_k')\}$ omezená a podle (3.3) pro $k \geq k_0$ platí

$$\int_{c_i}^{d_i} |h_k(s)| \, \mathrm{d}s = \int_{c_i}^{d_i} h_k(s) \, \mathrm{d}s \leq \lambda_i \int_{c_i}^{d_i} f_k(s, u_k(s), u_k'(s)) \operatorname{sgn} u_k'(s) \, \mathrm{d}s +$$

$$+ \int_{c_i}^{d_i} |\psi(s)| \, \mathrm{d}s \leq \phi(|u_k'(d_i)|) + \phi(|u_k'(c_i)|) + \int_{c_i}^{d_i} |\psi(s)| \, \mathrm{d}s \leq K_1 \ ,$$

kde $K_1 = 2\phi(K) + \|\psi\|_{L\langle 0;T \rangle}$. Užitím věty 1.5 (Fatouovo lemma) dostaneme $h \in L\langle c_i; d_i \rangle$ a máme tedy $f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) \in L\langle c_i; d_i \rangle$.

Jestliže $(c_i, d_i) = (s_i, s_i + \eta) \cap (0;T)$ postupujeme obdobně.

Máme $f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) \in L\langle 0;T \rangle$ a rovnice v (3.10) je splněna pro $t \in \langle 0;T \rangle$. Podle věty 1.13 dostáváme $\phi(u') \in AC\langle 0;T \rangle$. Ukázali jsme, že funkce u je řešení úlohy (1.4).

Vzhledem k předpokladu (2), (3.1), (3.2) a tomu, že $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ jsou uzavřené intervaly dostáváme $[u(t), u'(t)] \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ pro $t \in \langle 0;T \rangle$. □

3.2 První aplikace

V této první aplikaci budeme studovat problém bez ϕ-Laplaciánu. Předpokládáme, že $\phi(x) \equiv x$. Úloha (1.4) přejde na úlohu

$$u''(t) + f(t, u(t), u'(t)) = 0 \ , \quad u(0) = u(T) = 0 \ . \tag{3.12}$$

Budeme dokazovat existenci řešení kladného na intervalu $(0;T)$. Funkce $f(t,x,y)$ může mít slabou i silnou singularitu v proměnné x a slabou singularitu v proměnné y. Platí tedy, že $f(t,x,y) \in Car(\langle 0;T \rangle \times \mathcal{D})$, kde $\mathcal{D} = (0;\infty) \times \mathbb{R}_0$. Dále má funkce $f(t,x,y)$ v proměnných x, y sublineární růst nebo lineární růst s malými koeficienty. Důkaz aplikační věty 3.6 je založen na větě 3.2 (První existenční princip). Abychom mohli tuto větu aplikovat, potřebujeme zkonstruovat omezenou množinu Ω. Ke konstrukci této množiny užijeme metodu apriorních odhadů. Nyní vyslovíme dvě pomocná lemmata.

Lemma 3.4 *Nechť $c > 0$. Potom existuje $\eta > 0$ takové, že pro všechny funkce $u \in AC^1\langle 0;T\rangle$ splňující podmínky*

$$c \leq -u''(t) \text{ pro s. v. } t \in \langle 0;T\rangle \ , \quad u(0) = u(T) = 0 \tag{3.13}$$

platí odhad $\|u\|_{C\langle 0;T\rangle} \geq \eta$.

Důkaz: Nechť $G(t,s)$ je Greenova funkce úlohy (viz například [51] str. 86 - 91)

$$-u''(t) = 0 \ , \quad u(0) = u(T) = 0 \ . \tag{3.14}$$

Potom

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t(T-s)}{T} & \text{pro } 0 \leq t \leq s \leq T \\[2ex] \dfrac{s(T-t)}{T} & \text{pro } 0 \leq s \leq t \leq T \ . \end{cases}$$

Definujme

$$\Phi(t,s) = \frac{G(t,s)}{t(T-t)} \text{ pro } [t,s] \in (0;T) \times (0;T) \ .$$

Pro libovolné $s \in (0;T)$ dostaneme

$$\lim_{t \to 0+} \Phi(t,s) = \lim_{t \to 0+} \frac{t(T-s)}{t(T-t)T} = \frac{T-s}{T^2} \ ,$$

$$\lim_{t \to T-} \Phi(t,s) = \lim_{t \to T-} \frac{s(T-t)}{t(T-t)T} = \frac{s}{T^2} \ .$$

$\Phi(t,s)$ můžeme spojitě rozšířit na interval $\langle 0;T\rangle$ a pro všechna $s \in (0;T)$ máme $\Phi(t,s) > 0$ pro $t \in \langle 0;T\rangle$.

Definujme

$$F(t) = \int_0^T \Phi(t,s)\,\mathrm{d}s \text{ pro } t \in \langle 0;T\rangle \ .$$

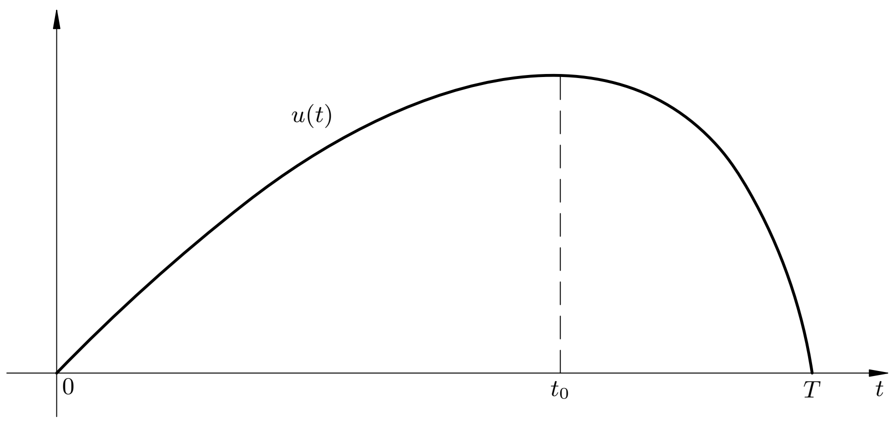
Pro všechna $t \in \langle 0;T\rangle$ existuje $d_0 > 0$ tak, že $d_0 \leq cF(t)$. $G(t,s)$ je Greenova funkce úlohy (3.14), a tedy z rovnice $-u'' = -u''$ dostaneme (viz například [51] str. 89)

$$u(t) = -\int_0^T G(t,s)u''(s)\,\mathrm{d}s \geq \int_0^T G(t,s)c\,\mathrm{d}s =$$

$$= t(T-t)c\int_0^T \Phi(t,s)\,\mathrm{d}s = t(T-t)cF(t) \geq t(T-t)d_0 \ .$$

$$\|u\|_{C\langle 0;T\rangle} \geq u\left(\frac{T}{2}\right) \geq \frac{T^2 d_0}{4} = \eta \ .$$

□



Obrázek 8: Řešení u.

Lemma 3.5 *Nechť $c, \gamma, \delta \in (0;\infty)$, $\alpha, \beta \in \langle 0;1\rangle$. Předpokládejme, že existují kladné, nerostoucí funkce $\omega_0, \omega_1 \in C\,(0;\infty)$ a nezáporné funkce $h_0, h_1, h_2 \in L\,\langle 0;T\rangle$ splňující*

$$\int_0^T \left(t^\gamma + t^\delta\right)\omega_0(t)\,\mathrm{d}t < \infty\ , \quad \int_0^T \omega_1(t)\,\mathrm{d}t < \infty\ . \tag{3.15}$$

$$\left.\begin{array}{ll} T\|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle} < 1 & \textit{pro } \alpha = 1,\ \beta < 1\ , \\[2ex] \|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle} < 1 & \textit{pro } \alpha < 1,\ \beta = 1\ , \\[2ex] T\|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle} + \|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle} < 1 & \textit{pro } \alpha = \beta = 1\ . \end{array}\right\} \tag{3.16}$$

Potom existuje $r > 1$ takové, že pro všechna $u \in AC^1\,\langle 0;T\rangle$ splňující (3.13) *a*

$$\left.\begin{array}{r} -u''(t) \le [\omega_0(1) + \omega_0(u(t))]\, t^\gamma (T-t)^\delta + \omega_1(1) + \omega_1(|u'(t)|) + h_0(t) + \\[2ex] +h_1(t)\left[(u(t))^\alpha + 1\right] + h_2(t)\left[|u'(t)|^\beta + 1\right] \end{array}\right\} \tag{3.17}$$

platí odhad $\|u\|_{C^1\langle 0;T\rangle} \le r$.

Důkaz: Z podmínky (3.13) dostáváme, že u je nezáporná, konkávní a že existuje $t_0 \in \langle 0;T\rangle$ tak, že $u'(t_0) = 0$ (viz obrázek 8). Podle lemmatu 3.4 existuje $\eta > 0$ tak, že

$$\eta\frac{t}{T} \le \eta\frac{t}{t_0} \le u(t) \text{ pro } t \in \langle 0;t_0\rangle\ , \tag{3.18}$$

$$\eta\frac{T-t}{T} \le \eta\frac{T-t}{T-t_0} \le u(t) \text{ pro } t \in \langle t_0;T\rangle\ . \tag{3.19}$$

Protože ω_0 je nerostoucí funkce, máme

$$\int_0^T t^\gamma (T-t)^\delta \omega_0(u(t))\,\mathrm{d}t \le \int_0^{t_0} t^\gamma (T-t)^\delta \omega_0(u(t))\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^T t^\gamma (T-t)^\delta \omega_0(u(t))\,\mathrm{d}t \le$$

$$\leq \int_0^{t_0} t^\gamma (T-t)^\delta \omega_0\left(\frac{\eta t}{T}\right) \mathrm{d}t + \int_{t_0}^T t^\gamma (T-t)^\delta \omega_0\left(\frac{\eta(T-t)}{T}\right) \mathrm{d}t \leq$$
$$\leq T^\delta \int_0^{t_0} t^\gamma \omega_0\left(\frac{\eta t}{T}\right) \mathrm{d}t + T^\gamma \int_{t_0}^T (T-t)^\delta \omega_0\left(\frac{\eta(T-t)}{T}\right) \mathrm{d}t \ .$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\eta < \min\{1, T\}$. Podle (3.15) užitím substituce $z = \frac{\eta t}{T}$ v prvním integrálu a $z = \frac{\eta(T-t)}{T}$ v druhém integrálu dostáváme

$$\int_0^T t^\gamma (T-t)^\delta \omega_0(u(t))\,\mathrm{d}t \leq$$
$$\leq T^\delta \frac{T}{\eta} \int_0^{\frac{\eta t_0}{T}} \left(\frac{Tz}{\eta}\right)^\gamma \omega_0(z)\,\mathrm{d}z - T^\gamma \frac{T}{\eta} \int_{\frac{\eta(T-t_0)}{T}}^0 \left(\frac{Tz}{\eta}\right)^\delta \omega_0(z)\,\mathrm{d}z \leq$$
$$\leq \frac{T^{\delta+1}}{\eta} \left(\frac{T}{\eta}\right)^\gamma \int_0^{\frac{\eta t_0}{T}} z^\gamma \omega_0(z)\,\mathrm{d}z + \frac{T^{\gamma+1}}{\eta} \left(\frac{T}{\eta}\right)^\delta \int_0^{\frac{\eta(T-t_0)}{T}} z^\delta \omega_0(z)\,\mathrm{d}z \leq$$
$$\leq \left(\frac{T}{\eta}\right)^{\gamma+\delta+1} \int_0^T \left(z^\gamma + z^\delta\right) \omega_0(z)\,\mathrm{d}z = A < \infty \ ,$$

kde konstanta A nezávisí na funkci u. Integrací nerovnice $c \leq -u''$ máme

$$c(t_0 - t) \leq u'(t) = |u'(t)| \text{ pro } t \in \langle 0; t_0\rangle \ , \tag{3.20}$$

$$c(t - t_0) \leq -u'(t) = |u'(t)| \text{ pro } t \in \langle t_0; T\rangle \ . \tag{3.21}$$

Protože je ω_1 nerostoucí funkce, máme

$$\int_0^T \omega_1(|u'(t)|)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_0} \omega_1(|u'(t)|)\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^T \omega_1(|u'(t)|)\,\mathrm{d}t \leq$$
$$\leq \int_0^{t_0} \omega_1\left(c(t_0 - t)\right)\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^T \omega_1\left(c(t - t_0)\right)\,\mathrm{d}t \ .$$

Bez ztráty na obecnosti předpokládejme, že $c < 1$, a tedy dle (3.15) substitucí $z = c(t_0 - t)$ v prvním integrálu a $z = c(t - t_0)$ v druhém integrálu dostáváme

$$\int_0^T \omega_1(|u'(t)|)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{t_0} \omega_1\left(c(t_0 - t)\right)\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^T \omega_1\left(c(t - t_0)\right)\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{1}{c} \int_{ct_0}^0 \omega_1(z)\,\mathrm{d}z + \frac{1}{c} \int_0^{c(T-t_0)} \omega_1(z)\,\mathrm{d}z = B < \infty \ ,$$

kde konstanta B je nezávislá na u. Položme

$$\max\{|u'(t)| : \ t \in \langle 0; T\rangle\} = \max\{|u'(0)|, |u'(T)|\} = |u'(\tau_0)| = \rho \ .$$

Potom
$$-\rho T \le u(t) \le \rho T \text{ pro } t \in \langle 0;T\rangle \ .$$
Označme
$$C = \omega_0(1)\int_0^T t^\gamma (T-t)^\delta \,\mathrm{d}t + \omega_1(1)T \ .$$
Integrací nerovnosti (3.17) od τ_0 do t_0 dostáváme
$$|u'(\tau_0)| = \rho \le C + \left|\int_{\tau_0}^{t_0} s^\gamma (T-s)^\delta \omega_0(u(s))\,\mathrm{d}s\right| + \left|\int_{\tau_0}^{t_0} \omega_1(|u'(s)|)\,\mathrm{d}s\right| +$$
$$+ \left|\int_{\tau_0}^{t_0} \left(h_0(s) + h_1(s)\left[|u(s)|^\alpha + 1\right] + h_2(s)\left[|u'(s)|^\beta + 1\right]\right)\,\mathrm{d}s\right|$$
a
$$\rho \le A + B + C + \left|\int_{\tau_0}^{t_0} \left(h_0(s) + h_1(s)\left[|u(s)|^\alpha + 1\right] + h_2(s)\left[|u'(s)|^\beta + 1\right]\right)\,\mathrm{d}s\right| \ .$$
Protože $|u(s)|^\alpha \le |\rho T|^\alpha$, $|u'(s)|^\beta \le \rho^\beta$ máme
$$\rho \le A + B + C + \left|\int_{\tau_0}^{t_0} \left(h_0(s) + h_1(s)\left[(\rho T)^\alpha + 1\right] + h_2(s)\left[\rho^\beta + 1\right]\right)\,\mathrm{d}s\right| \ ,$$
a tedy
$$\rho \le A + B + C + \|h_0\|_{L\langle 0;T\rangle} + \left((\rho T)^\alpha + 1\right)\|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle} + \left(\rho^\beta + 1\right)\|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle} \ ,$$
$$1 \le \frac{A + B + C + \|h_0\|_{L\langle 0;T\rangle} + \|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle} + \|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle}}{\rho} + \frac{T^\alpha \|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle}}{\rho^{(1-\alpha)}} + \frac{\|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle}}{\rho^{(1-\beta)}} \ . \quad (3.22)$$
Sporem ukážeme, že existuje konstanta $r^* > 0$ taková, že $\rho < r^*$ pro libovolné u splňující (3.13) a (3.17). Předpokládejme, že existuje posloupnost $\{u_n\}$ splňující (3.13) a (3.17) a že odpovídající posloupnost $\{\rho_n\}$ je neomezená.

- Nechť $\alpha, \beta < 1$, potom z (3.22) dostáváme
$$1 \le \frac{A + B + C + \|h_0\|_{L\langle 0;T\rangle} + \|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle} + \|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle}}{\rho_n} + \frac{T^\alpha \|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle}}{\rho_n^{(1-\alpha)}} + \frac{\|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle}}{\rho_n^{(1-\beta)}}$$
a pro $n \to \infty$ máme
$$1 \le 0 \ ,$$
což je spor.

- Nechť $\alpha = 1$, $\beta < 1$, potom z (3.22) máme
$$1 \le \frac{A + B + C + \|h_0\|_{L\langle 0;T\rangle} + \|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle} + \|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle}}{\rho_n} + T\|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle} + \frac{\|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle}}{\rho_n^{(1-\beta)}} \ .$$
Pro $n \to \infty$ dostáváme
$$1 \le T\|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle} \ .$$
Podle (3.16) je $T\|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle} < 1$, což je spor.

- Nechť $\alpha < 1$, $\beta = 1$, potom pro $n \to \infty$ z nerovnosti (3.22) máme

$$1 \leq \frac{A + B + C + \|h_0\|_{L\langle 0;T\rangle} + \|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle} + \|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle}}{\rho_n} + \frac{T^\alpha \|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle}}{\rho_n^{(1-\alpha)}} + \|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle} \ ,$$

  což pro $n \to \infty$ dává

$$1 \leq \|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle} \ .$$

  Dle (3.16) dostáváme $\|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle} < 1$ a také dostáváme spor.

- Nechť $\alpha = \beta = 1$, potom

$$1 \leq \frac{A + B + C + \|h_0\|_{L\langle 0;T\rangle} + \|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle} + \|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle}}{\rho_n} + T\|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle} + \|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle} \ .$$

  Podle (3.16) máme $T\|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle} + \|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle} < 1$, a tedy pro $n \to \infty$ platí

$$1 \leq T\|h_1\|_{L\langle 0;T\rangle} + \|h_2\|_{L\langle 0;T\rangle} < 1 \ .$$

  Znovu dostáváme spor.

Vidíme, že existuje $r^* > 0$ tak, že $\rho < r^*$ pro všechna u splňující (3.13) a (3.17). Protože $\|u\|_{C^1\langle 0;T\rangle} \leq \rho T + \rho$, položíme $r = r^* T + r^* + 1$. □

Věta 3.6 *Nechť* $f(t,x,y) \in Car(\langle 0;T\rangle \times (0;\infty) \times \mathbb{R}_0)$, *nechť* $c, \gamma, \delta \in (0;\infty)$, $\alpha, \beta \in \langle 0;1\rangle$. *Předpokládejme, že existují kladné nerostoucí funkce* $\omega_0, \omega_1 \in C\,(0;\infty)$ *a nezáporné funkce* $h_0, h_1, h_2 \in L\,\langle 0;T\rangle$ *splňující* (3.15), (3.16), *a nechť dále platí odhad*

$$\left.\begin{array}{c} c \leq f(t,x,y) \leq t^\gamma (T-t)^\delta \omega_0(x) + \omega_1(|y|) + h_0(t) + h_1(t)x^\alpha + h_2(t)|y|^\beta \\[2ex] \textit{pro s. v. } t \in \langle 0;T\rangle \ \textit{ a všechna } x \in (0;\infty)\,,\ y \in \mathbb{R}_0 \ . \end{array}\right\} \tag{3.23}$$

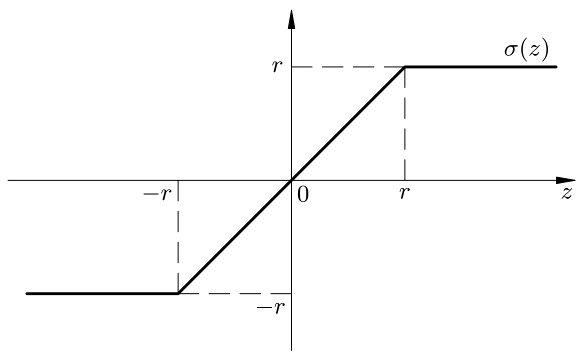
Potom má úloha (3.12) *řešení kladné na intervalu* $(0;T)$.

Důkaz:
1. krok - konstrukce pomocné singulární úlohy.
Dle lemmatu 3.5 pro všechny funkce $u \in AC^1\,\langle 0;T\rangle$ splňující předpoklady (3.13), (3.17) existuje konstanta $r \in (1;\infty)$ taková, že $\|u\|_{C^1\langle 0;T\rangle} \leq r$. Pro s. v. $t \in \langle 0;T\rangle$ a všechna $x, y, z \in \mathbb{R}$ definujme pomocné funkce

$$\sigma(z) = \begin{cases} z & \text{pro } |z| \leq r \\[2ex] r \operatorname{sgn} z & \text{pro } |z| > r \end{cases}$$

(viz obrázek 9) a

$$g(t,x,y) = f(t, |\sigma(x)|, \sigma(y)) \ .$$



Obrázek 9: Funkce σ.

Budeme aplikovat větu 3.2 na pomocnou singulární úlohu

$$u''(t) + g(t, u(t), u'(t)) = 0 \ , \quad u(0) = u(T) = 0 \tag{3.24}$$

a ukážeme, že úloha (3.24) má řešení u takové, že

$$0 < u(t) \leq r \text{ pro } t \in (0;T) \text{ a } \|u'\|_{C\langle 0;T\rangle} \leq r \ . \tag{3.25}$$

Vzhledem k definici funkce g díky těmto odhadům platí

$$f(t, u(t), u'(t)) = g(t, u(t), u'(t)) \text{ pro } t \in \langle 0;T\rangle$$

a funkce u bude také řešením úlohy (3.12).

2. krok - konstrukce aproximujících regulárních úloh.

Zvolme libovolné $n \in \mathbb{N}$, pro s. v. $t \in \langle 0;T\rangle$ a všechna $x, y \in \mathbb{R}$ položme

$$g_n(t,x,y) = \begin{cases} g(t,|x|,y) & \text{pro } |x| \geq \dfrac{1}{n} \\[2ex] g\left(t, \dfrac{1}{n}, y\right) & \text{pro } |x| < \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

a

$$f_n(t,x,y) = \begin{cases} g_n(t,x,y) & \text{pro } |y| \geq \dfrac{1}{n} \\[2ex] \dfrac{n}{2}\left[g_n\left(t,x,\dfrac{1}{n}\right)\left(y+\dfrac{1}{n}\right) - g_n\left(t,x,-\dfrac{1}{n}\right)\left(y-\dfrac{1}{n}\right)\right] & \text{pro } |y| < \dfrac{1}{n} \ . \end{cases}$$

Nyní uvažujme pomocné úlohy

$$u''(t) + f_n(t, u(t), u'(t)) = 0 \ , \quad u(0) = u(T) = 0 \ . \tag{3.26}$$

Ověříme, že jsou splněny všechny předpoklady věty 3.2. pro úlohu (3.24).

3. krok - konvergence posloupnosti aproximujících řešení.

Protože funkce $f(t,x,y)$ nemá časové singularity platí, že $g \in Car(\langle 0;T\rangle \times \mathcal{D})$, $\mathfrak{A}_1 = \langle 0;\infty)$ a $\mathfrak{A}_2 = \mathbb{R}$. Vidíme, že $f_n \in Car(\langle 0;T\rangle \times \mathbb{R}^2)$. Dále zvolme $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ a $\eta_n = \frac{1}{n}$. Z konstrukce funkcí f_n plyne, že

$$\left.\begin{array}{l} f_n(t,x,y) = g(t,x,y) \text{ pro s. v. } t \in \langle 0;T\rangle \\[2ex] \text{a všechna } x \in \langle \varepsilon_n;\infty) \ , \quad |y| \in \langle \eta_n;\infty) \end{array}\right\} \tag{3.27}$$

a předpoklad (1) věty 3.2 je splněn.

Dále dostáváme

$$c \le f_n(t,x,y) \le t^\gamma (T-t)^\delta \omega_0\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_1\left(\frac{1}{n}\right) + h_0(t) + h_1(t)r^\alpha + h_2(t)r^\beta = m_n(t)$$

pro s. v. $t \in \langle 0;T\rangle$. Protože $m_n \in L\,\langle 0;T\rangle$, věta 2.3 zajišťuje existenci řešení $u_n \in AC^1\,\langle 0;T\rangle$ úloh (3.26) pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Podle (3.23) a (3.27) máme

$$c \le -u_n''(t) \le t^\gamma (T-t)^\delta \left[\omega_0(u_n(t)) + \omega_0(1)\right] + \omega_1(1) + \omega_1\left(|u_n'(t)|\right) +$$
$$+ h_0(t) + h_1(t)\left[u_n(t)^\alpha + 1\right] + h_2(t)\left[|u_n'(t)|^\beta + 1\right]$$

pro s. v. $t \in \langle 0;T\rangle$ a všechna $n \in \mathbb{N}$. Funkce u_n tedy splňují (3.13), (3.17) a dle lemmatu 3.5 platí

$$\|u_n\|_{C^1\langle 0;T\rangle} \le r \text{ pro všechna } n \in \mathbb{N}\ . \tag{3.28}$$

Definujme množinu

$$\Omega = \left\{v \in C^1\,\langle 0;T\rangle : \ \|v\|_{C^1\langle 0;T\rangle} \le r\right\}\ .$$

Dále máme $u_n(0) = u_n(T) = 0$ a $u_n''(t) < 0$ pro s. v. $t \in \langle 0;T\rangle$, a tedy $u_n > 0$ na intervalu $(0;T)$. Vidíme, že $[u_n(t), u_n'(t)] \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ pro $t \in \langle 0;T\rangle$ a že předpoklad (2) věty 3.2 je splněn.

Podle věty 3.2 existuje $u \in C\,\langle 0;T\rangle$ a podposloupnost $\{u_\ell\} \subseteq \{u_n\}$ tak, že platí (3.1).

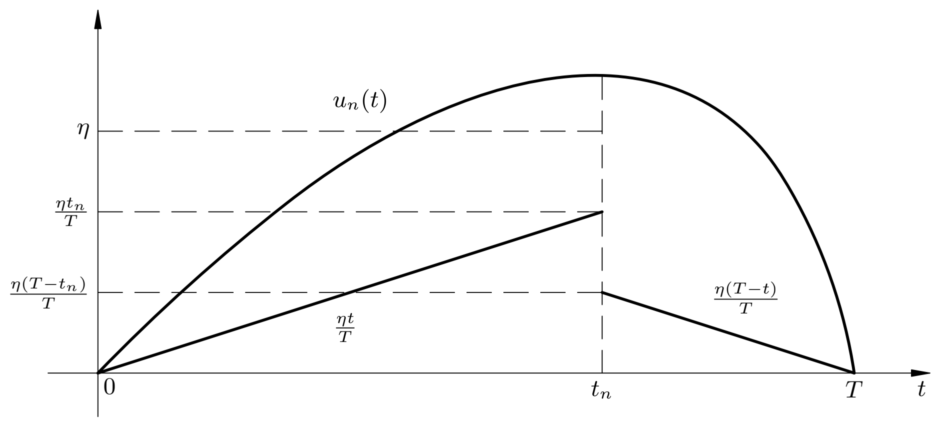
4. krok - lokální stejnoměrná konvergence derivací aproximujících řešení.

Platí, že $u_n(t) > 0$ na intervalu $(0;T)$, funkce u_n mají maxima $t_n \in (0;T)$ a $u_n'(t_n) = 0$. Podle lemmatu 3.4 existuje dostatečně malé $\eta \in \left(0, \frac{rT}{2}\right)$ tak, že

$$u_n(t_n) > \eta\ , \quad u_n(t) \ge \begin{cases} \dfrac{\eta t}{T} & \text{pro } t \in \langle 0;t_n\rangle \\[2ex] \dfrac{\eta(T-t)}{T} & \text{pro } t \in \langle t_n;T\rangle \end{cases} \tag{3.29}$$

(viz obrázek 10). Integrací nerovnosti $c \le -u_n''$ máme pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{ll} c\,(t_n - t) \le u_n'(t) & \text{pro } t \in \langle 0;t_n\rangle\ , \\[2ex] c\,(t - t_n) \le -u_n'(t) & \text{pro } t \in \langle t_n;T\rangle\ . \end{array}\right\} \tag{3.30}$$



Obrázek 10: Nerovnosti (3.29).

Zvolme libovolné $n_0 \in \mathbb{N}$. Podle věty 1.6 (Lagrangeova věta o střední hodnotě) pro funkci u_{n_0} na intervalech $\langle 0; t_{n_0}\rangle$ a $\langle t_{n_0}; T\rangle$ existují $\xi_1 \in (0; t_{n_0})$ a $\xi_2 \in (t_{n_0}; T)$ tak, že platí

$$\frac{u_{n_0}(t_{n_0}) - u_{n_0}(0)}{t_{n_0} - 0} = u'_{n_0}(\xi_1) \ , \quad \frac{u_n(T) - u_{n_0}(t_{n_0})}{T - t_{n_0}} = u'_{n_0}(\xi_2) \ .$$

Užitím (3.28) máme

$$\frac{\eta}{t_{n_0}} < \frac{u_{n_0}(t_{n_0})}{t_{n_0}} = u'_{n_0}(\xi_1) < r \ ,$$

a tedy $\frac{\eta}{r} < t_{n_0}$. Dále

$$-\frac{\eta}{T - t_{n_0}} > -\frac{u_{n_0}(t_{n_0})}{T - t_{n_0}} = u'_{n_0}(\xi_2) > -r$$

a dostáváme $-\frac{\eta}{r} < T - t_{n_0}$ a $t_{n_0} < T - \frac{\eta}{r}$. Dohromady máme

$$0 < \frac{\eta}{r} \le t_n \le T - \frac{\eta}{r} < T \ , \quad n \in \mathbb{N} \ . \tag{3.31}$$

Podle věty 1.3 (Bolzanova - Weierstrassova věta) existuje konvergentní podposloupnost posloupnosti $\{t_n\}$. Díky odhadům (3.31) leží limita této podposloupnosti v otevřeném intervalu $(0; T)$ a podposloupnost $\{u_\ell\} \subseteq \{u_n\}$ můžeme vybrat takovým způsobem, aby splňovala (3.1) a aby platilo $\lim\limits_{\ell\to\infty} t_\ell = t_0 \in (0; T)$. Potom

$$u(t) \ge \begin{cases} \dfrac{\eta t}{T} & \text{pro } t \in \langle 0; t_0\rangle \\[2ex] \dfrac{\eta(T-t)}{T} & \text{pro } t \in \langle t_0; T\rangle \ . \end{cases} \tag{3.32}$$

Položme $S = \{t_0\}$ a vyberme libovolný interval $\langle a; b\rangle \subset (0; T) \setminus S$.

1. Nechť nejprve $\langle a;b\rangle \subset (0;t_0)$. Potom existuje $\ell_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\ell \geq \ell_1$ dostáváme
$$|t_\ell - t_0| \leq \frac{1}{2}(t_0 - b) \ , \quad \langle a;b\rangle \subset \left(\frac{1}{\ell}; t_\ell\right) \ ,$$
$$u_\ell(t) \geq \frac{\eta a}{T} =: c_1 \ , \quad u_\ell'(t) \geq c(t_\ell - t) \geq c(t_\ell - b) \geq \frac{c}{2}(t_0 - b) =: \widetilde{c}_1$$
pro $t \in \langle a;b\rangle$.

2. Nyní nechť $\langle a;b\rangle \subset (t_0;T)$. Potom existuje $\ell_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\ell \geq \ell_2$ dostáváme
$$|t_\ell - t_0| \leq \frac{1}{2}(a - t_0) \ , \quad \langle a;b\rangle \subset \left(t_\ell; T - \frac{1}{\ell}\right) \ ,$$
$$u_\ell(t) \geq \frac{\eta(T-b)}{T} =: c_2 \ , \quad -u_\ell'(t) \geq c(t - t_\ell) \geq c(a - t_\ell) \geq \frac{c}{2}(a - t_0) =: \widetilde{c}_2$$
pro $t \in \langle a;b\rangle$.

Vidíme, že pro libovolné $\langle a;b\rangle \subset (0;T)\setminus S$ existuje přirozené číslo $\ell^* = \max\{l_1, l_2\}$ a kladné konstanty $c^* = \min\{c_1, c_2\}$, $\widetilde{c}^* = \min\{\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2\}$ tak, že $u_\ell(t) \geq c^*$, $|u_\ell'| \geq \widetilde{c}^*$ pro $t \in \langle a;b\rangle$, $\ell \geq \ell^*$. Tedy pro s. v. $t \in \langle a;b\rangle$ platí
$$|f_\ell(t, u_\ell(t), u_\ell'(t))| \leq \psi(t) \in L\,\langle a;b\rangle \ ,$$
kde
$$\psi(t) = \sup\left\{|f(t,x,y)| : \ c^* \leq x \leq r \ ; \quad \widetilde{c}^* \leq |y| \leq r\right\} \ .$$
Dokázali jsme, že na každém intervalu $\langle a;b\rangle \subset (0;T) \setminus S$ existuje nezáporná funkce $\psi \in L\,\langle a;b\rangle$ taková, že
$$|u_\ell''(t)| \leq \psi(t) \text{ pro s. v. } t \in \langle a;b\rangle \text{ a všechna } \ell \in \mathbb{N} \ , \quad \ell \geq \ell^* \ .$$
Užitím věty 1.1 (Absolutní spojitost Lebesgueova integrálu) dostaneme, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta^* > 0$ tak, že pro všechna $t_1, t_2 \in \langle a;b\rangle$, $|t_1 - t_2| < \delta^*$ platí
$$|u_\ell'(t_1) - u_\ell'(t_2)| = \left|\int_{t_1}^{t_2} u''(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon \text{ pro všechna } \ell \geq \ell^* \ .$$
Protože $u_i \in AC^1\,\langle 0;T\rangle$ pro $i \in \mathbb{N}$, podle věty 1.12 platí $u_i' \in C\,\langle 0;T\rangle$ a podle věty 1.4 (Cantorova věta) jsou funkce u_i na intervalu $\langle 0;T\rangle$, a tedy také na $\langle a;b\rangle \subset (0;T) \setminus S$ stejnoměrně spojité. Existují tedy konstanty δ_i, $i = 1, \cdots, \ell^* - 1$ takové, že pro všechna $t_1, t_2 \in \langle a;b\rangle$, $|t_1 - t_2| < \delta_i$ platí
$$|u_i'(t_1) - u_i'(t_2)| < \varepsilon \ .$$
Zvolme $\widetilde{\delta} = \min\{\delta_1, \cdots, \delta_{\ell^*-1}, \delta^*\}$. Dohromady dostáváme, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\widetilde{\delta} > 0$ tak, že pro všechna $t_1, t_2 \in \langle a;b\rangle$, $|t_1 - t_2| < \widetilde{\delta}$ platí
$$|u_\ell'(t_1) - u_\ell'(t_2)| < \varepsilon \text{ pro všechna } \ell \in \mathbb{N} \ .$$

Vidíme, že posloupnost $\{u'_\ell\}$ je na intervalu $\langle a;b\rangle$ stejně spojitá.

Je tedy splněn předpoklad (3) věty 3.2 a platí, že $u \in C^1\left((0;T)\setminus S\right)$ a existuje podposloupnost $\{u_k\} \subseteq \{u_\ell\}$ tak, že platí (3.2).

5. krok - funkce u je w-řešením úlohy (3.12).

Zvolme libovolné $t_3 \in (0;t_0)$. Protože platí $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = t_0 \in (0;T)$, existuje $k_3 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $k \geq k_3$ je $t_3 \in \langle 0;t_k\rangle$. Podle (3.30) dostáváme

$$c(t_k - t_3) \leq u'_k(t_3)\ .$$

Z podmínky (3.2) a toho, že t_3 byl libovolný prvek intervalu $(0;t_0)$ plyne

$$c\,(t_0 - t) \leq u'(t) \text{ pro } t \in (0;t_0)\ .$$

Podobně postupujeme na intervalu $(t_0;T)$ a dostaneme

$$c\,(t - t_0) \leq -u'(t) \text{ pro } t \in (t_0;T)\ .$$

Dále máme

$$\lim_{t\to 0+} u'(t) \geq ct_0 > 0\ , \quad \lim_{t\to T-} u'(t) \leq -c(T-t_0) < 0\ .$$

Protože u'_k je klesající na $\langle 0;T\rangle$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, platí dle (3.2), že u' je nerostoucí na $(0;t_0)$ a na $(t_0;T)$. Tedy existují limity

$$\lim_{t\to t_0-} u'(t)\ , \quad \lim_{t\to t_0+} u'(t)\ .$$

Dohromady $u'(t) > 0$ na $\langle 0;t_0\,)$ a $u'(t) < 0$ na $(\,t_0;T\,\rangle$. Tedy t_0 je jediný bod, kde $u'(t_0) = 0$, nebo $u'(t_0)$ neexistuje. Podle (3.32) platí, že u je kladná na $(0;T)$. Tedy $S = \{t_0\}$ splňuje předpoklad (4) věty 3.2 a funkce $u' \in AC_{loc}((0;T)\setminus S)$. Funkce u je w-řešení úlohy (3.24).

Protože $u(t) > 0$ na intervalu $(0;T)$ a protože platí odhad (3.28), podle (3.1) a (3.2) je splněn odhad (3.25) a funkce u je současně w-řešením úlohy (3.12).

6. krok - funkce u je řešením úlohy (3.12).

Podle (3.23) máme $f_k(t, u_k(t), u'_k(t)) \geq 0$ pro s. v. $t \in \langle 0;T\rangle$ a všechna $k \in \mathbb{N}$. Předpoklad (5) věty 3.2 je splněn, $u' \in C\,\langle a;b\rangle$, funkce u je řešením úlohy (3.24) a díky odhadu (3.25) současně také řešením úlohy (3.12). □

Příklad 3.7 Uvažujme úlohu (1.7) z příkladu 1.33. Funkce f má singularitu v proměnné x. Navíc funkce f splňuje předpoklady věty 3.6, neboť $f \in Car(\langle 0;1\rangle \times \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R})$, $c = 1$, $\gamma = \delta = 2$, $\alpha = \beta = 0$, $\omega_0(x) = \frac{1}{x^2}$, $\omega_1(x) \equiv 0$, $h_0(t) \equiv 1$, $h_1(t) = h_2(t) \equiv 0$ a je tedy zaručena existence řešení naší úlohy.

Příklad 3.8 Pro s. v. $t \in \langle 0;T\rangle$ a všechna $x \in (0;\infty)$, $y \in \mathbb{R}_0$ definujme funkci

$$f(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t^3(T-t)^3}}{x^2} + t^{10}\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{|y|}}(1 + |y|\operatorname{arctg} t)\ .$$

Druhý člen funkce f má prostorovou singularitu v bodě $x = 0$ a poslední člen v bodě $y = 0$.

Můžeme ověřit, že funkce f splňuje předpoklady věty 3.6 pro $c = \frac{1}{\sqrt{T}}$, $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \delta = \frac{3}{2}$, $\omega_0(x) = \frac{1}{x^2}$, $\omega_1(|y|) = \frac{1}{\sqrt{|y|}}$, $h_0(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $h_1(t) = t^{10}$ a $h_2(t) = \operatorname{arctg} t$.

Funkce $\omega_0, \omega_1 \in C\,(0;\infty)$ jsou kladné a nerostoucí. Funkce $h_0, h_1, h_2 \in L\,\langle 0;T\rangle$ jsou nezáporné.

$$\int_0^T \left(t^\gamma + t^\delta\right)\omega_0(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \left(\sqrt{t^3} + \sqrt{t^3}\right)\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = 4\sqrt{T} < \infty\ ,$$

$$\int_0^T \omega_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{|t|}}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{T} < \infty$$

a (3.15) platí. $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ a (3.16) je splněna také. Dále máme

$$c = \frac{1}{\sqrt{T}} \leq f(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{\sqrt{t^3(T-t)^3}}{x^2} + t^{10}\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{|y|}}(1 + |y|\operatorname{arctg} t) =$$

$$= t^\gamma(T-t)^\delta\omega_0(x) + \omega_1(|y|) + h_0(t) + h_1(t)x^\alpha + h_2(t)|y|^\beta$$

pro s. v. $t \in \langle 0;T\rangle$ a všechna $x \in (0;\infty)$, $y \in \mathbb{R}_0$ a je tedy splněna také (3.23).

Příklad 3.9 Nechť $T = 1$. Pro $t \in (0;1\rangle$ a všechna $x, y \in \mathbb{R}_0$ definujme funkci

$$f(t,x,y) = \sqrt{1-t}\left(1 + \frac{t^2}{x}\right) + \frac{3}{\sqrt[3]{|y|}} + \frac{1}{16\sqrt{t}}\,(x + |y|)\ .$$

První člen funkce $f(t,x,y)$ má prostorovou singularitu v bodě $x = 0$ a druhý v bodě $y = 0$. V časové proměnné t funkce $f(t,x,y)$ singularitu nemá.

Vidíme, že f splňuje předpoklady věty 3.6, jestliže položíme $c = \frac{3}{2}$, $\alpha = \beta = 1$, $\gamma = 2$, $\delta = \frac{1}{2}$, $\omega_0(x) = \frac{1}{x}$, $\omega_1(|y|) = \frac{3}{\sqrt[3]{|y|}}$, $h_0(t) = \sqrt{1-t}$, $h_1(t) = \frac{1}{16\sqrt{t}}$, $h_2(t) = \frac{1}{16\sqrt{t}}$.

Funkce $\omega_0, \omega_1 \in C\,(0;\infty)$ jsou kladné a nerostoucí. Funkce $h_0, h_1, h_2 \in L\,\langle 0;1\rangle$ jsou nezáporné.

$$\int_0^1 \left(t^\gamma + t^\delta\right)\omega_0(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^2 + \sqrt{t}\right)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{5}{2} < \infty\ ,$$

$$\int_0^1 \omega_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{3}{\sqrt[3]{|t|}}\,\mathrm{d}t = \frac{9}{2} < \infty$$

a (3.15) platí. $\alpha = \beta = 1$,

$$\|h_1\|_{L\langle 0;1\rangle} = \|h_2\|_{L\langle 0;1\rangle} = \int_0^1 \frac{1}{16\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\ ,$$

$$\|h_1\|_{L\langle 0;1\rangle} + \|h_2\|_{L\langle 0;1\rangle} = \frac{1}{4} < 1$$

a (3.16) je splněna. Protože funkce $g(y) = \frac{3}{\sqrt[3]{y}} + \frac{1}{16}y$ má na intervalu $(0;\infty)$ minimum v bodě 8 a jeho hodnota je 2, máme

$$c = \frac{3}{2} < \frac{3}{\sqrt[3]{|y|}} + \frac{1}{16}|y| \le f(t,x,y) = \sqrt{1-t}\left(1+\frac{t^2}{x}\right) + \frac{3}{\sqrt[3]{|y|}} + \frac{1}{16\sqrt{t}}\,(x+|y|) =$$

$$= t^\gamma (T-t)^\delta \omega_0(x) + \omega_1(|y|) + h_0(t) + h_1(t)x^\alpha + h_2(t)|y|^\beta$$

pro s. v. $t \in \langle 0;1\rangle$ a všechna $x \in (0;\infty)$, $y \in \mathbb{R}_0$. Vidíme, že (3.23) je splněna.

Příklad 3.10 Nechť $T = 2\pi$. Definujme funkci $f(t,x,y)$ pro $t \in \langle 0;2\pi\rangle$ a všechna $x \in (0;\infty)$, $y \in \mathbb{R}_0$.

$$f(t,x,y) = \sqrt[5]{t^8}\left(e + 10\frac{\sqrt[3]{(2\pi-t)^4}}{x^2}\right) + \frac{e}{\sqrt[5]{|y|}} + t^3\sqrt[6]{x} + \frac{5t^4+2t}{10000}|y|\ .$$

Funkce f má prostorové singularity v $x = 0$ a $y = 0$. Můžeme ověřit, že f splňuje předpoklady věty 3.6 pro $c = \frac{1}{5}$, $\alpha = \frac{1}{6}$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{8}{5}$, $\delta = \frac{4}{3}$, $\omega_0(x) = \frac{10}{x^2}$, $\omega_1(|y|) = \frac{e}{\sqrt[5]{|y|}}$, $h_0(t) = et\sqrt[5]{t^3}$, $h_1(t) = t^3$, $h_2(t) = \frac{5t^4+2t}{10000}$.

Funkce $\omega_0, \omega_1 \in C\,(0;\infty)$ jsou kladné a nerostoucí. Funkce $h_0, h_1, h_2 \in L\,\langle 0;2\pi\rangle$ jsou nezáporné.

$$\int_0^{2\pi} \left(t^\gamma + t^\delta\right)\omega_0(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(\sqrt[5]{t^8} + \sqrt[3]{t^4}\right)\frac{10}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{50}{3}\sqrt[5]{8\pi^3} + 30\sqrt[3]{2\pi} < \infty\ ,$$

$$\int_0^{2\pi} \omega_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{e}{\sqrt[5]{|t|}}\,\mathrm{d}t = \frac{5e}{4}\sqrt[5]{16\pi^4} < \infty$$

a (3.15) platí. $\alpha = \frac{1}{6}$, $\beta = 1$,

$$\|h_2\|_{L\langle 0;2\pi\rangle} = \int_0^{2\pi} \frac{5t^4+2t}{10000}\,\mathrm{d}t = \frac{32\pi^5 + 4\pi^2}{10000} < 1\ ,$$

a tedy (3.16) je splněna. Protože funkce $g(y) = \frac{1}{\sqrt[5]{y}} + \frac{1}{320}y$ má na intervalu $(0;\infty)$ minimum v bodě 32 a jeho hodnota je $\frac{3}{5}$, máme

$$c = \frac{1}{5} < \frac{1}{\sqrt[5]{|y|}} + \frac{1}{320}|y| \le \frac{e}{\sqrt[5]{|y|}} + \frac{5(2\pi)^4 + 4\pi}{10000}|y| \le f(t,x,y) =$$

$$= \sqrt[5]{t^8}\left(e + 10\frac{\sqrt[3]{(2\pi-t)^4}}{x^2}\right) + \frac{e}{\sqrt[5]{|y|}} + t^3\sqrt[6]{x} + \frac{5t^4+2t}{10000}|y| =$$

$$= t^\gamma (T-t)^\delta \omega_0(x) + \omega_1(|y|) + h_0(t) + h_1(t)x^\alpha + h_2(t)|y|^\beta$$

pro s. v. $t \in \langle 0;2\pi\rangle$ a všechna $x \in (0;\infty)$, $y \in \mathbb{R}_0$. Vidíme, že (3.23) je splněna.

3.3 Druhá aplikace

Nyní aplikujeme druhý existenční princip (větu 3.3) na singulární úlohu s ϕ-Laplaciánem, kde funkce $f(t,x,y)$ může mít singularity pouze v proměnných t a x. Budeme hledat řešení kladné na intervalu $(0;T)$ a předpokládat, že $f \in Car((0;T)\times\mathcal{D})$, kde $\mathcal{D}=(0;\infty)\times\mathbb{R}$. Důkaz aplikační věty 3.13 je založen na větě 3.3 (Druhý existenční princip). Potřebujeme tedy omezenou množinu $\Omega\subset C^1\langle 0;T\rangle$. Nejprve dokážeme pomocná lemmata.

Lemma 3.11 *Nechť $f_n \in AC\langle a;b\rangle$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$. Nechť existuje nezáporná funkce $m\in L\langle a;b\rangle$ taková, že $|f_n'(t)|\le m(t)$ pro s. v. $t\in\langle a;b\rangle$ a všechna $n\in\mathbb{N}$. Potom je posloupnost $\{f_n\}$ stejně spojitá v intervalu $\langle a;b\rangle$.*

Důkaz: Zvolme libovolné $\varepsilon>0$. Potom podle věty 1.1 (Absolutní spojitost Lebesgueova integrálu) existuje $\delta>0$ tak, že pro všechna $t_1,t_2\in\langle a;b\rangle$, $t_1<t_2$, $t_2-t_1<\delta$ platí

$$\int_{t_1}^{t_2} m(t)\,\mathrm{d}t<\varepsilon\ .$$

Zvolme libovolné $n_0\in\mathbb{N}$. Dostáváme

$$|f_{n_0}(t_1)-f_{n_0}(t_2)|\le\int_{t_1}^{t_2}|f_{n_0}'(t)|\,\mathrm{d}t\le\int_{t_1}^{t_2}m(t)\,\mathrm{d}t<\varepsilon\ .$$

n_0 je libovolné přirozené číslo, nerovnost

$$|f_n(t_1)-f_n(t_2)|\le\varepsilon$$

platí pro všechna $n\in\mathbb{N}$ a posloupnost $\{f_n\}$ je stejně spojitá v intervalu $\langle a;b\rangle$. □

Lemma 3.12 *Nechť $a_1,a_2\in\langle 0;T\rangle$, $a_1<a_2$, $r_0,\kappa\in(0;\infty)$. Nechť $h_0\in L\langle 0;T\rangle$ je nezáporná funkce a nechť ω je funkce kladná na intervalu $\langle 0;\infty)$ splňující*

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}s}{\omega(s)}=\infty\ . \tag{3.33}$$

Potom existuje $r>0$ takové, že pro každou funkci u splňující podmínky

$$\left.\begin{aligned}
&\phi(u')\in AC\langle 0;T\rangle\ ,\quad \|u\|_{C\langle 0;T\rangle}\le r_0\ ,\\
&(\phi(u'(t)))'\operatorname{sgn}u'(t)\ge-\kappa\omega(|\phi(u'(t))|)(h_0(t)+|u'(t)|)\quad \textit{pro s. v. } t\in\langle 0;a_2\rangle\ ,\\
&(\phi(u'(t)))'\operatorname{sgn}u'(t)\le\kappa\omega(|\phi(u'(t))|)(h_0(t)+|u'(t)|)\quad \textit{pro s. v. } t\in\langle a_1;T\rangle
\end{aligned}\right\}\tag{3.34}$$

platí odhad $\|u'\|_{C\langle 0;T\rangle}\le r$.

Důkaz: Zvolme libovolnou funkci u splňující podmínky (3.34). Platí $\phi(u')\in AC\langle 0;T\rangle$ a podle poznámky 1.22 je $u\in C^1\langle 0;T\rangle$. Užitím věty 1.6 (Lagrangeova věta o střední hodnotě) můžeme najít $\xi\in(a_1;a_2)$ tak, že

$$|u'(\xi)|=\frac{|u(a_2)-u(a_1)|}{a_2-a_1}\le\frac{2r_0}{a_2-a_1}=:c_0\ .$$

Položme $v(t) = \phi(u'(t))$ pro $t \in \langle 0; T\rangle$. ϕ je rostoucí lichý homeomorfismus s $\phi(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, a tedy $|v(\xi)| = |\phi(u'(\xi))| \le \phi(c_0)$ a $\operatorname{sgn} u'(t) = \operatorname{sgn} v(t)$ pro $t \in \langle 0; T\rangle$. Podmínka (3.33) zajišťuje, že existuje konstanta $\rho > \phi(c_0)$ tak, že

$$\int_{\phi(c_0)}^{\rho} \frac{\mathrm{d}s}{\omega(s)} > \kappa(\|h_0\|_{L\langle 0;T\rangle} + 2r_0) \ . \tag{3.35}$$

Ukážeme, že $|\phi(u'(t))| \le \rho$ pro $t \in \langle 0; T\rangle$. Důkaz provedeme sporem.

- Předpokládejme, že $\max\{|v(t)| :\ t \in \langle 0; \xi\rangle\} = |v(\alpha_1)| > \rho$. Protože $\rho > \phi(c_0) \ge \omega(\xi)$ máme $\alpha_1 < \xi$ a existuje $\beta_1 \in (\alpha_1; \xi\rangle$ tak, že $|v(\beta_1)| = \phi(c_0)$, $|v(t)| \ge \phi(c_0)$ pro $t \in \langle \alpha_1; \beta_1\rangle$. Z nerovnosti v podmínce (3.34) platící na intervalu $\langle 0; a_2\rangle$ dostaneme

$$-\frac{\phi(u'(t)) \operatorname{sgn} u'(t)}{\omega(|\phi(u'(t))|)} \le \kappa(h_0(t) + |u'(t)|) \ ,$$

  a tedy

$$-\frac{v'(t) \operatorname{sgn} v(t)}{\omega(|v(t)|)} \le \kappa(h_0(t) + |u'(t)|) \text{ pro s. v. } t \in \langle \alpha_1; \beta_1\rangle \ .$$

  Integrací této nerovnosti přes interval $\langle \alpha_1; \beta_1\rangle$ a užitím substituce $s = |v(t)|$ dostáváme

$$-\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{v'(t) \operatorname{sgn} v(t)}{\omega(|v(t)|)} \,\mathrm{d}t = \int_{\phi(c_0)}^{|v(\alpha_1)|} \frac{\mathrm{d}s}{\omega(s)} \le \kappa\left(\int_{\alpha_1}^{\beta_1} h_0(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\alpha_1}^{\beta_1} |u'(t)|\,\mathrm{d}t\right) \ . \tag{3.36}$$

  Protože $|v(t)| = |\phi(u'(t))| \ge \phi(c_0)$ pro $t \in \langle \alpha_1; \beta_1\rangle$, vidíme, že u' nemění znaménko na intervalu $\langle \alpha_1; \beta_1\rangle$, a tedy

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} |u'(t)|\,\mathrm{d}t = \left|\int_{\alpha_1}^{\beta_1} u'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le 2r_0 \ .$$

  Nerovnost (3.36) vede na

$$\int_{\phi(c_0)}^{\rho} \frac{\mathrm{d}s}{\omega(s)} < \int_{\phi(c_0)}^{|v(\alpha_1)|} \frac{\mathrm{d}s}{\omega(s)} \le \kappa(\|h_0\|_{L\langle 0;T\rangle} + 2r_0) \ ,$$

  což je ve sporu s nerovností (3.35). Tedy $|v(\alpha_1)| \le \rho$ a tím jsme ukázali, že

$$|\phi(u'(t))| = |v(t)| \le \rho \text{ pro } t \in \langle 0; \xi\rangle \ .$$

- Nyní předpokládejme, že $\max\{|v(t)| :\ t \in \langle \xi; T\rangle\} = |v(\alpha_2)| > \rho$. Protože $\rho > \phi(c_0) \ge \omega(\xi)$ máme $\alpha_2 > \xi$ a existuje $\beta_2 \in \langle \xi; \alpha_2)$ tak, že $|v(\beta_2)| = \phi(c_0)$, $|v(t)| \ge \phi(c_0)$ pro $t \in \langle \beta_2; \alpha_2\rangle$. Z nerovnosti v podmínce (3.34) platící na intervalu $\langle a_1; T\rangle$ dostaneme

$$\frac{\phi(u'(t)) \operatorname{sgn} u'(t)}{\omega(|\phi(u'(t))|)} \le \kappa(h_0(t) + |u'(t)|) \ ,$$

a tedy

$$\frac{v'(t)\operatorname{sgn} v(t)}{\omega(|v(t)|)} \le \kappa(h_0(t) + |u'(t)|) \text{ pro s. v. } t \in \langle \beta_2; \alpha_2\rangle \ .$$

Integrací této nerovnosti přes interval $\langle \beta_2; \alpha_2\rangle$ a užitím substituce $s = |v(t)|$ dostáváme

$$\int_{\beta_2}^{\alpha_2} \frac{v'(t)\operatorname{sgn} v(t)}{\omega(|v(t)|)}\,\mathrm{d}t = \int_{\phi(c_0)}^{|v(\alpha_2)|} \frac{\mathrm{d}s}{\omega(s)} \le \kappa\left(\int_{\beta_2}^{\alpha_2} h_0(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\beta_2}^{\alpha_2} |u'(t)|\,\mathrm{d}t\right) \ . \qquad (3.37)$$

Protože $|v(t)| = |\phi(u'(t))| \ge \phi(c_0)$ pro $t \in \langle \beta_2; \alpha_2\rangle$, vidíme, že u' nemění znaménko na intervalu $\langle \beta_2; \alpha_2\rangle$, a tedy

$$\int_{\beta_2}^{\alpha_2} |u'(t)|\,\mathrm{d}t = \left|\int_{\beta_2}^{\alpha_2} u'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le 2r_0 \ .$$

Nerovnost (3.37) vede na

$$\int_{\phi(c_0)}^{\rho} \frac{\mathrm{d}s}{\omega(s)} < \int_{\phi(c_0)}^{|v(\alpha_2)|} \frac{\mathrm{d}s}{\omega(s)} \le \kappa(\|h_0\|_{L\langle 0;T\rangle} + 2r_0) \ ,$$

což je opět ve sporu s nerovností (3.35). Tedy $|v(\alpha_2)| \le \rho$ a

$$|\phi(u'(t))| = |v(t)| \le \rho \text{ pro } t \in \langle \xi; T\rangle \ .$$

Dohromady dostáváme, že

$$|\phi(u'(t))| \le \rho \text{ pro } t \in \langle 0; T\rangle$$

a odhad $\|u'\|_{C\langle 0;T\rangle} \le r$ platí, jestliže položíme $r = \phi^{-1}(\rho)$. □

Věta 3.13 *Nechť $f(t,x,y) \in Car((0;T)\times(0;\infty)\times\mathbb{R})$. Nechť σ_1 a σ_2 jsou dolní a horní funkce úlohy* (1.4) *mající konečné derivace v bodech* 0 *a* T *a nechť*

$$0 < \sigma_1(t) \le \sigma_2(t) \ \textit{pro}\ t \in (0;T) \ . \qquad (3.38)$$

Předpokládejme, že existují konstanty $a_1, a_2 \in \langle 0; T\rangle$, $a_1 < a_2$, $b^* \in (0,\infty)$, nezáporná funkce $h \in L\langle 0;T\rangle$ a funkce $\omega^* \in C\langle 0;\infty)$ splňující

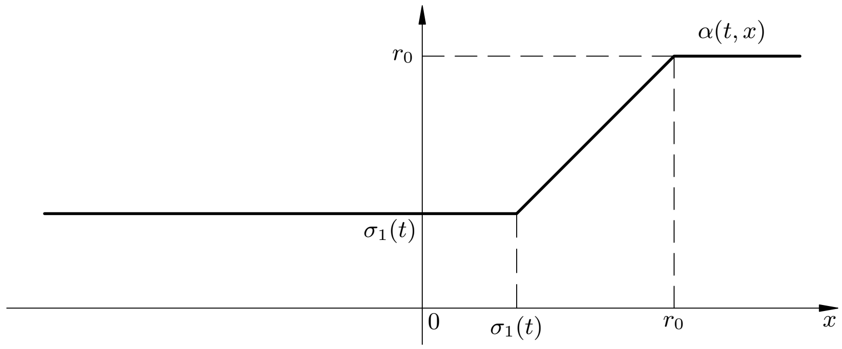
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\omega^*(s)} = \infty \ , \quad \omega^*(s) \ge b^* \ \textit{pro}\ s \in \langle 0;\infty) \ . \qquad (3.39)$$

Dále nechť

$$f(t,x,y)\operatorname{sgn} y \le \omega^*(|\phi(y)|)(h(t) + |y|) \qquad (3.40)$$

pro s. v. $t \in \langle 0; a_2\rangle$ a všechna $x \in \langle \sigma_1(t); \sigma_2(t)\rangle$, $y \in \mathbb{R}$,

$$f(t,x,y)\operatorname{sgn} y \ge -\omega^*(|\phi(y)|)(h(t) + |y|) \qquad (3.41)$$



Obrázek 11: Funkce $\alpha(t,x)$ pro pevně zvolené t.

pro s. v. $t \in \langle a_1; T\rangle$ *a všechna* $x \in \langle \sigma_1(t); \sigma_2(t)\rangle$, $y \in \mathbb{R}$.

Potom má úloha (1.4) *řešení splňující odhad* (2.6).

Důkaz:

1. krok - konstrukce pomocných regulárních úloh.

Zvolme libovolné $n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{2}{T}$ Rozdělíme interval $\langle 0; T\rangle$ na tři množiny. Označme

$$\Delta_n = \left\langle \frac{1}{n}; T - \frac{1}{n} \right\rangle \ ,$$

$$\Delta_{n_1} = \left\{ t \in \left\langle 0; \frac{1}{n} \right) \cup \left(T - \frac{1}{n}; T \right\rangle :\ \sigma_1(t) = \sigma_2(t) \right\} \ ,$$

$$\Delta_{n_2} = \left\{ t \in \left\langle 0; \frac{1}{n} \right) \cup \left(T - \frac{1}{n}; T \right\rangle :\ \sigma_1(t) < \sigma_2(t) \right\} \ .$$

Definujme funkci

$$\alpha(t,x) = \begin{cases} \sigma_1(t) & \text{pro } x < \sigma_1(t) \\ x & \text{pro } \sigma_1(t) \le x \le r_0 \\ r_0 & \text{pro } x > r_0 \end{cases}$$

(viz obrázek 11) pro všechna $t \in \langle 0; T\rangle$, $x \in \mathbb{R}$, kde

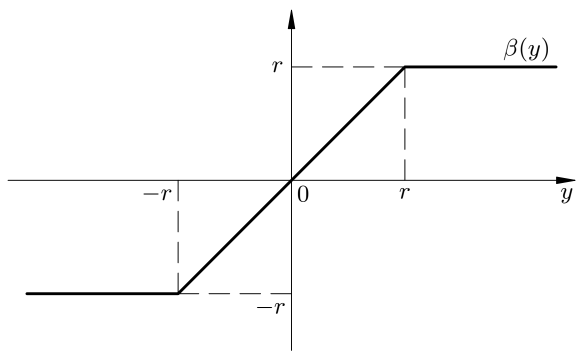
$$r_0 = \max\left\{ \|\sigma_1\|_{C\langle 0;T\rangle}, \|\sigma_2\|_{C\langle 0;T\rangle} \right\} \ .$$

Dále položme $\kappa = 1 + \frac{1}{b^*}$ a

$$h_0(t) = h(t) + |(\phi(\sigma_1'(t)))'| + |(\phi(\sigma_2'(t)))'| \ .$$

Protože funkce ω^* splňuje podmínku (3.39), existuje neklesající funkce $\omega \in C\,\langle 0; \infty\,)$ také splňující podmínku (3.39), taková že

$$\omega^*(t) \le \omega(t) \text{ pro } t \in \langle 0; \infty\,) \ .$$



Obrázek 12: Funkce β.

Platí, že $h_0 \in L\langle 0;T\rangle$ je nezáporná funkce, funkce ω je kladná a splňuje podmínku (3.33), a tedy podle lemmatu 3.12 existuje konstanta $r > 0$ taková, že pro každou funkci u splňující podmínky (3.34) platí odhad $\|u'\|_{C\langle 0;T\rangle} < r$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že

$$r > \sup\{|\sigma_1'(t)| : \ t \in \langle 0;T\rangle\} + \sup\{|\sigma_2'(t)| : \ t \in \langle 0;T\rangle\} \ .$$

Definujme funkce

$$\beta(y) = \begin{cases} y & \text{pro } |y| \le r \\ r \operatorname{sgn} y & \text{pro } |y| > r \end{cases}$$

(viz obrázek 12) pro $y \in \mathbb{R}$,

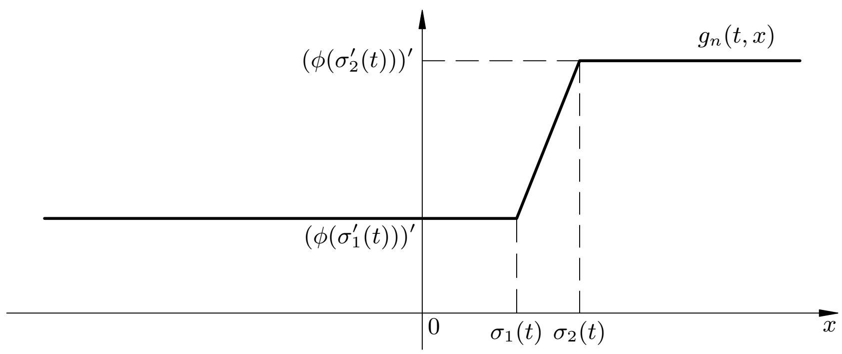
$$g_n(t,x) = \begin{cases} (\phi(\sigma_2'(t)))' & \text{pro } x > \sigma_2(t) \\ \dfrac{(x-\sigma_1(t))(\phi(\sigma_2'(t)))' + (\sigma_2(t)-x)(\phi(\sigma_1'(t)))'}{\sigma_2(t)-\sigma_1(t)} & \text{pro } \sigma_1(t) \le x \le \sigma_2(t) \\ (\phi(\sigma_1'(t)))' & \text{pro } x < \sigma_1(t) \end{cases}$$

(viz obrázek 13) pro s. v. $t \in \Delta_{n_2}$ a všechna $x \in \mathbb{R}$ a

$$f_n(t,x,y) = \begin{cases} f(t,\alpha(t,x),\beta(y)) & \text{pro } t \in \Delta_n \\ -(\phi(\sigma_1'(t)))' & \text{pro } t \in \Delta_{n_1} \\ -g_n(t,x) & \text{pro } t \in \Delta_{n_2} \end{cases}$$

pro s. v. $t \in \langle 0;T\rangle$ a všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Nyní uvažujme regulární úlohy (1.5). Abychom mohli aplikovat větu 3.3 (Druhý existenční princip), potřebujeme ukázat, že regulární úlohy mají řešení, a dále tyto řešení omezit, abychom mohli zkonstruovat množinu Ω.



Obrázek 13: Graf funkce $g_n(t,x)$ pro pevně zvolené t.

2. krok - existence řešení regulárních úloh a jejich odhady.

Funkce $f_n \in Car(\langle 0;T\rangle \times \mathbb{R}^2)$ a dále f_n splňují nerovnosti

$$\left.\begin{array}{c} f_n(t,x,y)\operatorname{sgn} y \le \kappa\omega(|\phi(y)|)(h_0(t)+|y|) \\ \\ \text{pro s. v. } t\in\langle 0;a_2\rangle \ \text{ a všechna } x\in\langle\sigma_1(t);\sigma_2(t)\rangle\,,\ y\in\mathbb{R}\,, \end{array}\right\} \tag{3.42}$$

$$\left.\begin{array}{c} f_n(t,x,y)\operatorname{sgn} y \ge -\kappa\omega(|\phi(y)|)(h_0(t)+|y|) \\ \\ \text{pro s. v. } t\in\langle a_1;T\rangle \ \text{ a všechna } x\in\langle\sigma_1(t);\sigma_2(t)\rangle\,,\ y\in\mathbb{R}\,. \end{array}\right\} \tag{3.43}$$

Vidíme, že σ_1 a σ_2 jsou dolní a horní funkce úloh (1.5). Navíc existují funkce $m_n \in L\langle 0;T\rangle$ takové, že

$$|f_n(t,x,y)| \le m_n(t) \text{ pro s. v. } t\in\langle 0;T\rangle\ .$$

Tedy pro všechna $n\in\mathbb{N}$, $n>\frac{2}{T}$ nám věta 2.5 (Metoda horních a dolních funkcí) zaručuje existenci řešení u_n úloh (1.5) splňující odhady

$$\sigma_1(t) \le u_n(t) \le \sigma_2(t) \text{ pro } t\in\langle 0;T\rangle\ . \tag{3.44}$$

Navíc u_n splňují podmínky (3.34) pro $\kappa = 1+\frac{1}{b^*}$ a podle lemmatu 3.12 platí odhady $\|u_n'\|_{C\langle 0;T\rangle} \le r$.

3. krok - existence řešení singulární úlohy.

Nyní ověříme, že jsou splněny předpoklady věty 3.3. Položme $\mathfrak{A}_1 = \langle 0;r_0\rangle$, $\mathfrak{A}_2 = \langle -r;r\rangle$, $\varepsilon_n = \max\left\{\sigma_1\left(\frac{1}{n}\right), \sigma_1\left(T-\frac{1}{n}\right)\right\}$, $\eta_n = \frac{1}{n}$ pro $n\in\mathbb{N}$.

Definujme množinu

$$\Omega = \left\{ v\in C^1\langle 0;T\rangle:\ \sigma_1(t)\le v(t)\le\sigma_2(t) \text{ pro } t\in\langle 0;T\rangle\ ,\quad \|v'\|_{C\langle 0;T\rangle}\le r\right\}\ .$$

Potom jsou splněny podmínky (1) a (2) věty 3.3 a můžeme vybrat podposloupnost $\{u_\ell\}\subseteq\{u_n\}$ stejnoměrně konvergentní na $\langle 0;T\rangle$ k funkci $u\in C\langle 0;T\rangle$. Protože funkce u_n splňují odhady (3.44) splňuje funkce u odhad (2.6).

Zvolme $\langle a;b\rangle \subset (0;T)$ a položme

$$r_* = \min\{\sigma_1(t):\ t \in \langle a;b\rangle\}\ .$$

Dle (3.38) je $r_* > 0$. Potom existuje $\ell_0 \in \mathbb{N}$, $\ell_0 > \frac{2}{T}$ tak, že pro $\ell \geq \ell_0$ dostáváme $\langle a;b\rangle \subseteq \Delta_\ell$ a

$$|f_\ell(t,u_\ell(t),u'_\ell(t))| \leq m(t) \text{ pro s. v. } t \in \langle a;b\rangle\ ,$$

kde

$$m(t) = \sup\{|f(t,x,y)|:\ r_* \leq x \leq \sigma_2(t)\ ;\quad |y| \leq r\}\ .$$

Protože $u_\ell(t) > 0$ na intervalu $(0;T)$ a protože funkce $f(t,x,y)$ nemá singularitu v proměnné y platí, že $m \in L\,\langle a;b\rangle$. Podle lemmatu 3.11 dostáváme, že posloupnost $\{\phi(u'_l)\}$ je stejně spojitá na intervalu $\langle a;b\rangle$. Množina S je prázdná a předpoklady (3) a (4) věty 3.3 jsou splněny. Tedy $\phi(u') \in AC_{loc}\,(0;T)$ a funkce u je w-řešení úlohy (1.4).

Označme

$$\omega_0 = \max\{\omega(s):\ s \in \langle 0;\phi(r)\rangle\}\ ,$$

$$\psi(t) = -\kappa\omega_0(h_0(t)+r)\ .$$

Z nerovnosti (3.42) dostáváme, že

$$-f_\ell(t,u_\ell(t),u'_\ell(t))\operatorname{sgn} u'_\ell(t) \geq \psi(t)$$

pro s. v. $t \in \langle 0;a_2\rangle$ a všechna $\ell \geq \ell_0$ a podobně nerovnost(3.43) nám dává

$$f_\ell(t,u_\ell(t),u'_\ell(t))\operatorname{sgn} u'_\ell(t) \geq \psi(t)$$

pro s. v. $t \in \langle a_1;T\rangle$ a všechna $\ell \geq \ell_0$.

Pokud položíme $p=0$, $\mu_0=-1$, $s_0=0$, $s_1=T$, $\lambda_1=1$, $\eta=\min\{a_2, T-a_1\}$ dostáváme (3.11). Tedy dle věty 3.3 máme $\phi(u') \in AC\,\langle 0;T\rangle$ a funkce u je řešení úlohy (1.4). $\square$

Příklad 3.14 Nechť $\alpha,\beta \in \langle 1;\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $c \in (0;\infty)$, $d \in \left(0;\frac{1}{b}-2b\right)$. Uvažujme úlohu (1.4) kde $\phi(y) \equiv y$ a

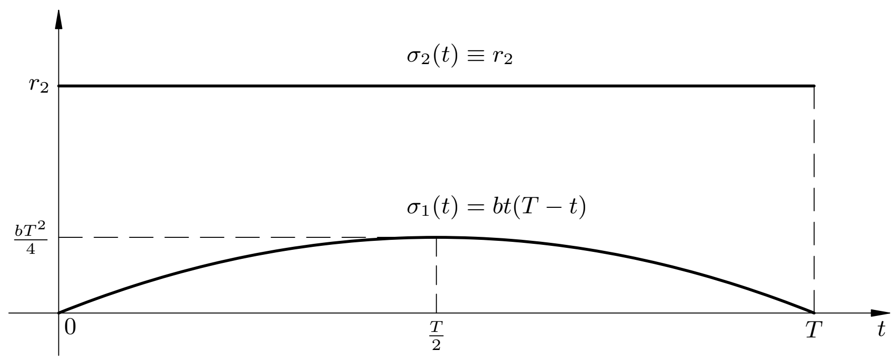
$$f(t,x,y) = \left(\frac{1}{(T-t)^\beta} - \frac{1}{t^\alpha} + a\right)(x - bt(T-t))y + cy^2 - d + \frac{t(T-t)}{x}$$

pro s. v. $t \in \langle 0;T\rangle$ a všechna $x \in \mathbb{R}_0$, $y \in \mathbb{R}$. První člen funkce f má časové singularity v $t=0$, $t=T$ a poslední člen funkce f má prostorovou singularitu pro $x=0$.

Položme $a_1 = \frac{T}{3}$, $a_2 = \frac{T}{2}$, $b^* = c+1$,

$$\sigma_1(t) = bt(T-t)\ ,\quad \sigma_2(t) \equiv r_2 \geq \frac{T^2}{4}\left(\frac{1}{d}+b\right)\ ,$$

$$K = \max\left\{\left(\left(\frac{2}{T}\right)^\beta + a\right)r_2, \frac{1}{b}, d, \left(\frac{3}{T}\right)^\alpha r_2\right\}\ ,$$



Obrázek 14: Funkce σ_1, σ_2.

$$h(t) \equiv K \ , \quad \omega^*(s) = (s+1)(c+1)$$

(funkce σ_1, σ_2 jsou zobrazeny na obrázku 14).

Ověříme předpoklady věty 3.13.

Platí, že $f(t,x,y) \in Car((0;T) \times (0;\infty) \times \mathbb{R})$.

Dále $\sigma_1(0) = \sigma_1(T) = 0$, $\sigma_1'(t) = bT - 2bt$, $\sigma_1''(t) = -2b$, a protože $d \in \left(0; \frac{1}{b} - 2b\right)$, $b < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (tj. $\frac{1}{b} - 2b > 0$), máme

$$\sigma_1''(t) + f(t, \sigma_1(t), \sigma_1'(t)) =$$

$$= -2b + \left(\frac{1}{(T-t)^\beta} - \frac{1}{t^\alpha} + a\right)(bt(T-t) - bt(T-t))(-2b) + c(bT-2bt)^2 - d + \frac{t(T-t)}{bt(T-t)} \geq$$

$$\geq -2b + c(bt-2bt)^2 - d + \frac{1}{b} \geq 0$$

a σ_1 je dolní funkce naší úlohy. Navíc platí $\sigma_1'(0) = bT \in \mathbb{R}$, $\sigma_1'(T) = -bT \in \mathbb{R}$.

Platí $\sigma_2(0) = \sigma_2(T) = r_2 \geq \frac{T^2}{4}\left(\frac{1}{d} + b\right) > 0$, $\sigma_2'(t) = \sigma_2''(t) \equiv 0$. Protože má funkce $g(t) = t(T-t)$ maximum na intervalu $\langle 0; T\rangle$ v bodě $\frac{T}{2}$ a jeho hodnota je $\frac{T^2}{4}$ a protože na intervalu $\langle 0; T\rangle$ platí

$$\sigma_2(t) \equiv r_2 \geq \frac{T^2}{4}\left(\frac{1}{d} + b\right) \geq \frac{T^2}{4d} \geq \frac{t(T-t)}{d} \ ,$$

dostáváme

$$\sigma_2''(t) + f(t, \sigma_2(t), \sigma_2'(t)) =$$

$$= 0 + \left(\frac{1}{(T-t)^\beta} - \frac{1}{t^\alpha} + a\right)(r_2 - bt(T-t)) \cdot 0 + c \cdot 0 - d + \frac{t(T-t)}{r_2} =$$

$$= -d + \frac{t(T-t)}{r_2} \leq 0$$

a funkce σ_2 je horní funkce naší úlohy, přičemž $\sigma_2'(0) = \sigma_2'(T) = 0 \in \mathbb{R}$.

Protože na intervalu $\langle 0; T\rangle$ je

$$bt(T-t) \leq b\frac{T^2}{4} < r_2 \ ,$$

platí odhad (3.38).

Dále

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\omega^*(s)} = \int_0^\infty \frac{1}{(c+1)(s+1)}\,\mathrm{d}s = \infty$$

a $\omega^*(s) \geq c+1 = b^*$ pro $s \in \langle 0; \infty)$ a předpoklad (3.39) je také splněn.

Zbývá ověřit, že (3.40) platí pro s. v. $t \in \left\langle 0; \frac{T}{2}\right\rangle$ a všechna $x \in \langle \sigma_1(t); r_2\rangle$, $y \in \mathbb{R}$ a že nerovnost (3.41) platí pro s. v. $t \in \left\langle \frac{T}{3}; T\right\rangle$ a všechna $x \in \langle \sigma_1(t); r_2\rangle$, $y \in \mathbb{R}$.

Předpokládejme, že $x \in \langle \sigma_1(t); r_2\rangle$, a tedy platí $x \geq -bt(T-t)$.

- Nechť $y = 0$. Potom $\operatorname{sgn} y = 0$ a obě podmínky jsou splněny.
- Nechť $y > 0$. Pro s. v. $t \in \left\langle 0; \frac{T}{2}\right\rangle$ dostáváme,

$$f(t,x,y)\operatorname{sgn} y = \left(\frac{1}{(T-t)^\beta} - \frac{1}{t^\alpha} + a\right)(x - bt(T-t))\,y + cy^2 - d + \frac{t(T-t)}{x} \leq$$
$$\leq \left(\left(\frac{2}{T}\right)^\beta + a\right) r_2 y + cy^2 + \frac{1}{b} \leq Ky + cy^2 + K \leq$$
$$\leq (y+1)(c+1)(K+y) = \omega^*(|\phi(y)|)(h(t) + |y|)$$

  a pro s. v. $t \in \left\langle \frac{T}{3}; T\right\rangle$ platí,

$$-f(t,x,y)\operatorname{sgn} y = -\left(\frac{1}{(T-t)^\beta} - \frac{1}{t^\alpha} + a\right)(x - bt(T-t))\,y - cy^2 + d - \frac{t(T-t)}{x} \leq$$
$$\leq \frac{1}{t^\alpha} r_2 y + d \leq \left(\frac{3}{T}\right)^\alpha r_2 y + d \leq Ky + K \leq \omega^*(|\phi(y)|)(h(t) + |y|) \ .$$

- Nechť $y < 0$, potom pro s. v. $t \in \left\langle 0; \frac{T}{2}\right\rangle$ platí,

$$f(t,x,y)\operatorname{sgn} y = -\left(\frac{1}{(T-t)^\beta} - \frac{1}{t^\alpha} + a\right)(x - bt(T-t))\,y - cy^2 + d - \frac{t(T-t)}{x} \leq$$
$$\leq \left(\left(\frac{2}{T}\right)^\beta + a\right) r_2(-y) + d \leq K(-y) + d \leq \omega^*(|\phi(y)|)(h(t) + |y|)$$

  a pro s. v. $t \in \left\langle \frac{T}{3}; T\right\rangle$ dostáváme,

$$-f(t,x,y)\operatorname{sgn} y = \left(\frac{1}{(T-t)^\beta} - \frac{1}{t^\alpha} + a\right)(x - bt(T-t))\,y + cy^2 - d + \frac{t(T-t)}{x} \leq$$
$$\leq \frac{1}{t^\alpha} r_2(-y) + cy^2 + \frac{1}{b} \leq \left(\frac{3}{T}\right)^\alpha r_2(-y) + cy^2 + \frac{1}{b} \leq$$
$$\leq K(-y) + cy^2 + K \leq (1-y)(c+1)(K-y) = \omega^*(|\phi(y)|)(h(t) + |y|) \ .$$

Vidíme, že všechny předpoklady věty 3.13 jsou splněny a naše úloha má řešení u splňující odhad (2.6).

Příklad 3.15 Uvažujme singulární úlohu

$$(u'^3(t))' + \left(\frac{1}{(T-t)^2} - \frac{1}{t^3}\right)\left(u(t) - \frac{t(T-t)}{2}\right)u'(t) + \frac{t(T-t)}{u(t)} + 3u'^2(t) - \frac{1}{3} = 0 \ ,$$

$$u(0) = u(T) = 0 \ .$$

Jedná se o úlohu s ϕ-Laplaciánem, kde $\phi(y) = y^3$. Funkce

$$f(t,x,y) = \left(\frac{1}{(T-t)^2} - \frac{1}{t^3}\right)\left(x - \frac{t(T-t)}{2}\right)y + \frac{t(T-t)}{x} + 3y^2 - \frac{1}{3}$$

má časové singularity v $t = 0$, $t = T$ a prostorovou singularitu pro $x = 0$.

Položme $a_1 = \frac{T}{3}$, $a_2 = \frac{T}{2}$, $b^* = 4$,

$$\sigma_1(t) = \frac{t(T-t)}{2} \ , \quad \sigma_2(t) \equiv T^2 \ , \quad h(t) \equiv 1 + \frac{27}{T} \ , \quad \omega^*(s) = 4(\sqrt[3]{s} + 1) \ .$$

Ověříme předpoklady věty 3.13.

Platí, že $f(t,x,y) \in Car((0;T) \times (0;\infty) \times \mathbb{R})$.

Nejprve ověříme, že σ_1, σ_2 jsou dolní a horní funkce naší úlohy a že platí (3.38).

$$\sigma_1'(t) = \frac{T}{2} - t \ , \quad \phi(\sigma_1'(t)) = \sigma_1'^3(t) = \left(\frac{T}{2} - t\right)^3 \ , \quad (\phi(\sigma_1'(t)))' = -3\left(\frac{T}{2} - t\right)^2 \ .$$

Platí, že $\sigma_1(0) = \sigma_1(T) = 0$, $\sigma_1 \in C\,\langle 0;T\rangle$, $\phi(\sigma_1') \in AC\,\langle 0;T\rangle$,

$$(\phi(\sigma_1'(t)))' + f(t,\sigma_1(t),\sigma_1'(t)) =$$

$$= -3\left(\frac{T}{2} - t\right)^2 + \left(\frac{1}{(T-t)^2} - \frac{1}{t^3}\right)\left(\frac{t(T-t)}{2} - \frac{t(T-t)}{2}\right)\left(\frac{T}{2} - t\right) +$$

$$+ \frac{t(T-t)}{\frac{t(T-t)}{2}} + 3\left(\frac{T}{2} - t\right)^2 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{1}{3} \geq 0$$

a σ_1 je dolní funkce naší úlohy. Navíc platí $\sigma_1'(0) = \frac{T}{2} \in \mathbb{R}$, $\sigma_1'(T) = -\frac{T}{2} \in \mathbb{R}$.

Platí $\sigma_2(0) = \sigma_2(T) = T^2 > 0$, $\sigma_2'(t) = \sigma_2''(t) \equiv 0$, $\sigma_2 \in C\,\langle 0;T\rangle$, $\phi(\sigma_2') \in AC\,\langle 0;T\rangle$. Protože má funkce $g(t) = t(T-t)$ maximum na intervalu $\langle 0;T\rangle$ v bodě $\frac{T}{2}$ a jeho hodnota je $\frac{T^2}{4}$ dostáváme

$$(\phi(\sigma_2'(t)))' + f(t,\sigma_2(t),\sigma_2'(t)) =$$

$$= 0 + \left(\frac{1}{(T-t)^2} - \frac{1}{t^3}\right)\left(T^2 - \frac{t(T-t)}{2}\right)\cdot 0 + \frac{t(T-t)}{T^2} + 3\cdot 0 - \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{t(T-t)}{T^2} - \frac{1}{3} \le \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \le 0 \ ,$$

funkce σ_2 je horní funkce naší úlohy a $\sigma_2'(0) = \sigma_2'(T) = 0 \in \mathbb{R}$.

Na intervalu $\langle 0; T\rangle$ je

$$\frac{t(T-t)}{2} \le \frac{T^2}{8} < T^2$$

a odhad (3.38) platí.

Dále

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\omega^*(s)} = \int_0^\infty \frac{1}{4(\sqrt[3]{s}+1)}\,\mathrm{d}s = \infty$$

a $\omega^*(s) \ge 4 = b^*$ pro $s \in \langle 0; \infty)$ a předpoklad (3.39) je také splněn.

Ještě zbývá ověřit, že (3.40) platí pro s. v. $t \in \left\langle 0; \frac{T}{2}\right\rangle$ a všechna $x \in \langle \sigma_1(t); T^2\rangle$, $y \in \mathbb{R}$ a že nerovnost (3.41) platí pro s. v. $t \in \left\langle \frac{T}{3}; T\right\rangle$ a všechna $x \in \langle \sigma_1(t); T^2\rangle$, $y \in \mathbb{R}$.

Předpokládejme, že $x \in \langle \sigma_1(t); T^2\rangle$, a tedy $x - \frac{t(T-t)}{2} \ge 0$.

- Nechť $y = 0$. Potom $\operatorname{sgn} y = 0$ a obě podmínky jsou splněny.

- Nechť $y > 0$, potom pro s. v. $t \in \left\langle 0; \frac{T}{2}\right\rangle$ platí,

$$f(t,x,y)\operatorname{sgn} y = \left(\frac{1}{(T-t)^2} - \frac{1}{t^3}\right)\left(x - \frac{t(T-t)}{2}\right)y + \frac{t(T-t)}{x} + 3y^2 - \frac{1}{3} \le$$

$$\le \frac{1}{(T-t)^2}xy + \frac{t(T-t)}{x} + 3y^2 \le \frac{4}{T^2}T^2 y + 2 + 3y^2 = 3y^2 + 4y + 2 \le$$

$$\le 4y^2 + 8y + 4 = 4(y+1)^2 \le 4(y+1)\left(1 + \frac{27}{T} + y\right) = \omega^*(|\phi(y)|)(h(t) + |y|)$$

  a (3.40) je splněna.

  Pro s. v. $t \in \left\langle \frac{T}{3}; T\right\rangle$ platí,

$$-f(t,x,y)\operatorname{sgn} y = -\left(\frac{1}{(T-t)^2} - \frac{1}{t^3}\right)\left(x - \frac{t(T-t)}{2}\right)y - \frac{t(T-t)}{x} - 3y^2 + \frac{1}{3} \le$$

$$\le \frac{1}{t^3}xy + \frac{1}{3} \le \frac{27}{T^3}T^2 y + \frac{1}{3} = \frac{27}{T}y + \frac{1}{3} \le 4(y+1)\left(1 + \frac{27}{T} + y\right) = \omega^*(|\phi(y)|)(h(t) + |y|)$$

  a (3.41) je splněna.

- Nechť $y < 0$, potom pro s. v. $t \in \left\langle 0; \frac{T}{2}\right\rangle$ platí,

$$f(t,x,y)\operatorname{sgn} y = -\left(\frac{1}{(T-t)^2} - \frac{1}{t^3}\right)\left(x - \frac{t(T-t)}{2}\right)y - \frac{t(T-t)}{x} - 3y^2 + \frac{1}{3} \le$$

$$\le -\frac{1}{(T-t)^2}xy + \frac{1}{3} \le -\frac{4}{T^2}T^2 y + \frac{1}{3} = -4y + \frac{1}{3} \le -4y + 4 \le$$

$$4(-y+1)\left(1+\frac{27}{T}-y\right)=\omega^*(|\phi(y)|)(h(t)+|y|)$$

a opět je splněna (3.40).

Pro s. v. $t\in\left\langle\frac{T}{3};T\right\rangle$ platí,

$$-f(t,x,y)\operatorname{sgn}y=\left(\frac{1}{(T-t)^2}-\frac{1}{t^3}\right)\left(x-\frac{t(T-t)}{2}\right)y+\frac{t(T-t)}{x}+3y^2-\frac{1}{3}\le$$

$$\le-\frac{1}{t^3}xy+3y^2+2\le-\frac{27}{T^3}T^2y+3y^2+2=$$

$$=3y^2+\frac{27}{T}y+2\le4y^2-4\left(2+\frac{27}{T}\right)y+4\left(1+\frac{27}{T}\right)=$$

$$=4(-y+1)\left(1+\frac{27}{T}-y\right)=\omega^*(|\phi(y)|)(h(t)+|y|)\ .$$

(3.41) je splněna i v tomto případě.

Všechny předpoklady věty 3.13 jsou splněny a naše úloha má řešení u splňující odhad (2.6).

3.4 Třetí aplikace

V této třetí aplikaci máme opět úlohu s ϕ-Laplaciánem. Funkce $f(t,x,y)$ může mít časové singularity pro $t=0$ a $t=T$ a dále může mít silné i slabé singularity v nule v prostorových proměnných x i y. Navíc může mít funkce $f(t,x,y)$ v proměnných x a y libovolný růst. Předpokládejme, že $f\in Car((0;T)\times\mathcal{D})$, kde $\mathcal{D}=(0;\infty)\times(\langle-c_1;c_2\rangle\setminus\{0\})$. Důkaz aplikační věty 3.16 je založen na větě 3.2 (První existenční princip).

Věta 3.16 *Nechť* $\nu\in\left(0;\frac{T}{2}\right)$, $\varepsilon\in\left(0;\frac{\phi(\nu)}{\nu}\right)$, $c_1,c_2\in(\nu;\infty)$, $f(t,x,y)\in Car((0;T)\times\mathcal{D})$, *kde* $\mathcal{D}=(0;\infty)\times(\langle-c_1;c_2\rangle\setminus\{0\})$. *Označme* $\sigma_2(t)=\min\{c_2t,c_1(T-t)\}$ *pro* $t\in\langle0;T\rangle$ *a předpokládejme, že*

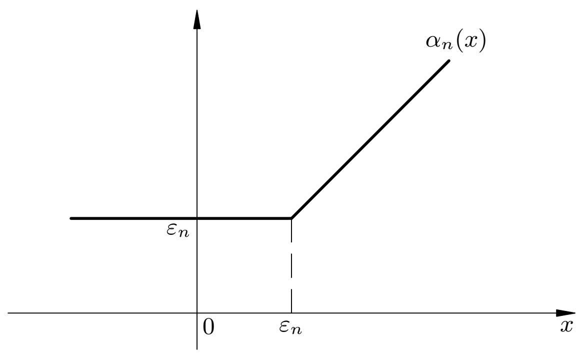
$$f(t,\sigma_2(t),\sigma_2'(t))=0 \text{ pro s. v. } t\in\langle0;T\rangle\ , \tag{3.45}$$

$$0\le f(t,x,y) \text{ pro s. v. } t\in\langle0;T\rangle\ ,\quad \forall x\in(0;\sigma_2(t)\rangle\ ,\quad y\in\langle-c_1;c_2\rangle\setminus\{0\}\ , \tag{3.46}$$

$$\varepsilon\le f(t,x,y) \text{ pro s. v. } t\in\langle0;T\rangle\ ,\quad \forall x\in(0;\sigma_2(t)\rangle\ ,\quad y\in\langle-\nu;\nu\rangle\setminus\{0\}\ . \tag{3.47}$$

Potom má úloha (1.4) *řešení* u, *které splňuje odhady*

$$0<u(t)\le\sigma_2(t)\ ,\quad -c_1\le u'(t)\le c_2 \text{ pro } t\in(0;T)\ . \tag{3.48}$$



Obrázek 15: Funkce α_n.

Důkaz:

1. krok - konstrukce pomocných úloh.

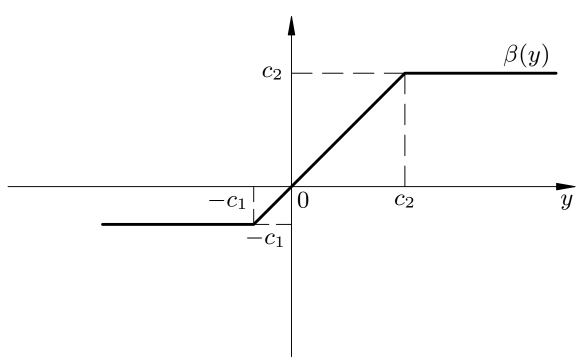
Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} < \nu$, $n > \frac{2}{T}$. Položme $\varepsilon_n = \min\left\{\sigma_2\left(\frac{1}{n}\right), \sigma_2\left(T - \frac{1}{n}\right)\right\}$, $\eta_n = \frac{1}{n}$. Zvolme $\sigma_1(t) \equiv 0$ na intervalu $\langle 0; T\rangle$. Pro $x, y \in \mathbb{R}$ definujme funkce

$$\alpha_n(x) = \begin{cases} x & \text{pro } \varepsilon_n \leq x \\ \varepsilon_n & \text{pro } x < \varepsilon_n \end{cases}$$

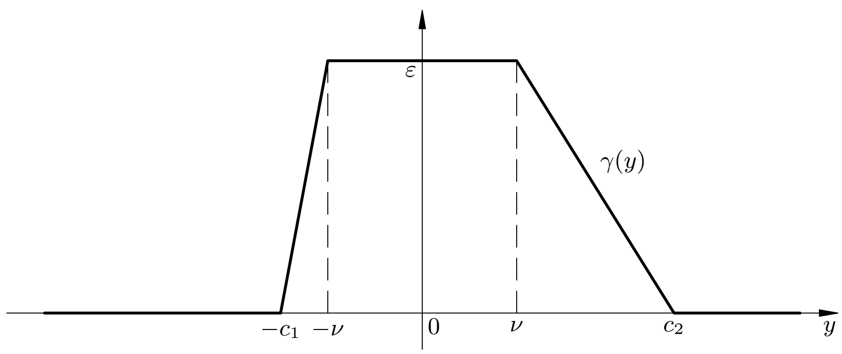
(viz obrázek 15),

$$\beta(y) = \begin{cases} c_2 & \text{pro } y > c_2 \\ y & \text{pro } -c_1 \leq y \leq c_2 \\ -c_1 & \text{pro } y < -c_1 \end{cases}$$

(viz obrázek 16),



Obrázek 16: Funkce β.



Obrázek 17: Funkce γ.

$$\gamma(y)=\begin{cases}\varepsilon & \text{pro } |y|\le\nu\\[2ex] 0 & \text{pro } y\le -c_1 \text{ nebo pro } y\ge c_2\\[2ex] \varepsilon\dfrac{c_2-y}{c_2-\nu} & \text{pro } \nu<y<c_2\\[2ex] \varepsilon\dfrac{c_1+y}{c_1-\nu} & \text{pro } -c_1<y<-\nu\end{cases}$$

(viz obrázek 17).

Označme $\Delta_n=\left\langle \frac{1}{n};T-\frac{1}{n}\right\rangle$, pro s. v. $t\in\langle 0;T\rangle$ a všechna $x,y\in\mathbb{R}$ definujme pomocné funkce

$$\widetilde{f}_n(t,x,y)=\begin{cases}\gamma(y) & \text{pro } t\in\langle 0;T\rangle\setminus\Delta_n\\[2ex] f(t,\alpha_n(x),\beta(y)) & \text{pro } t\in\Delta_n\ ,\end{cases}$$

$$f_n(t,x,y)=\begin{cases}\widetilde{f}_n(t,x,y) & \text{pro } |y|\ge\dfrac{1}{n}\\[2ex] \dfrac{n}{2}\left[\widetilde{f}_n\left(t,x,\dfrac{1}{n}\right)\left(y+\dfrac{1}{n}\right)-\widetilde{f}_n\left(t,x,-\dfrac{1}{n}\right)\left(y-\dfrac{1}{n}\right)\right] & \text{pro } |y|<\dfrac{1}{n}\ .\end{cases}$$

Funkce $f_n(t,x,y)$ pro pevné t,x lineárně spojuje hodnoty funkce $\widetilde{f}_n(t,x,y)$ v bodech $y=-\frac{1}{n}$ a $y=\frac{1}{n}$ (viz obrázek 18).

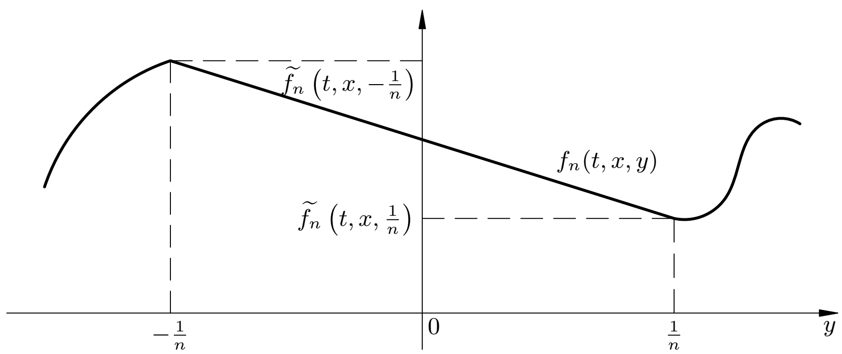
Funkce $f\in Car((0;T)\times\mathcal{D})$, kde $\mathcal{D}=(0;\infty)\times(\langle -c_1;c_2\rangle\setminus\{0\})$, a tedy $f_n\in Car(\langle 0;T\rangle\times\mathbb{R}^2)$ a pro $n\in\mathbb{N}$, $n>\frac{2}{T}$ dostáváme posloupnost pomocných úloh (1.5).

2. krok - existence řešení úloh (1.5).

Pro s. v. $t\in\langle 0;T\rangle$ definujme funkci

$$m_n(t)=\sup\{f_n(t,x,y):\ x\in\langle 0;\sigma_2(t)\rangle\ ;\quad y\in\mathbb{R}\}\ .$$

Potom $m_n\in L\langle 0;T\rangle$ a $|f_n(t,x,y)|\le m_n(t)$ pro s. v. $t\in\langle 0;T\rangle$, všechna $x\in\langle 0;\sigma_2(t)\rangle$ a všechna $y\in\mathbb{R}$.



Obrázek 18: Funkce $f_n(t,x,y)$ pro pevné t,x.

Abychom mohli použít větu 2.5 (Metoda horních a dolních funkcí), musíme ukázat, že funkce σ_1 a σ_2 jsou dolní a horní funkce úlohy (1.5). Platí,

$$(\phi(\sigma_1'(t)))' + f_n(t,\sigma_1(t),\sigma_1'(t)) = f_n(t,0,0) =$$

$$= \frac{n}{2}\left[\widetilde{f}_n\left(t,0,\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} - \widetilde{f}_n\left(t,0,-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\widetilde{f}_n\left(t,0,\frac{1}{n}\right) + \widetilde{f}_n\left(t,0,-\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \begin{cases} \varepsilon > 0 & \text{pro } t \in \langle 0;T\rangle \setminus \Delta_n \\ \frac{1}{2}\left[f\left(t,\varepsilon_n,\frac{1}{n}\right) + f\left(t,\varepsilon_n,-\frac{1}{n}\right)\right] \geq 0 & \text{pro s. v. } t \in \Delta_n \ , \end{cases}$$

a tedy $\sigma_1 \equiv 0$ je dolní funkce úlohy (1.5), která má v bodech 0 a T konečné derivace.

Dále $\alpha_n(\sigma_2(t)) = \sigma_2(t)$ pro $t \in \Delta_n$. Protože na intervalu $\langle 0;T\rangle$ buď $\sigma_2'(t) = -c_1$ nebo $\sigma_2'(t) = c_2$, dostáváme $(\phi(\sigma_2'(t)))' \equiv 0$ na intervalu $\langle 0;T\rangle$ a podle (3.45) máme

$$(\phi(\sigma_2'(t)))' + f_n(t,\sigma_2(t),\sigma_2'(t)) = f_n(t,\sigma_2(t),\sigma_2'(t)) =$$

$$= \begin{cases} \gamma(\sigma_2'(t)) = 0 & \text{pro } t \in \langle 0;T\rangle \setminus \Delta_n \\ f(t,\sigma_2(t),\sigma_2'(t)) = 0 & \text{pro s. v. } t \in \Delta_n \ . \end{cases}$$

Vidíme, že $\sigma_2(t)$ je horní funkce úlohy (1.5), která má v bodech 0 a T konečné derivace.

Funkce $f_n, \sigma_1, \sigma_2, m_n$ splňují předpoklady věty 2.5 (Metoda horních a dolních funkcí) a tedy existuje řešení u_n úlohy (1.5) splňující odhad $0 \leq u_n(t) \leq \sigma_2(t)$ pro $t \in \langle 0;T\rangle$.

3. krok - odhady řešení úloh (1.5).

Podle (3.46) a z konstrukce funkcí f_n dostáváme $(\phi(u_n'))' \leq 0$ pro s. v. $t \in \langle 0;T\rangle$ a složené funkce $\phi(u_n')$ jsou nerostoucí. Jelikož ϕ je rostoucí homeomorfismus, jsou také funkce u_n' nerostoucí. Protože $u_n(0) = \sigma_2(0) = 0$, $0 \leq u_n(t) \leq \sigma_2(t)$ a $\sigma_2'(t) \leq c_2$ na intervalu $\langle 0;T\rangle$, platí nerovnost $u_n'(0) \le c_2$. Funkce u_n jsou nerostoucí a pro $t \in \langle 0;T\rangle$ dostáváme $u_n'(t) \le c_2$. Dále $u_n'(T) \ge -c_1$, a tedy $u_n'(t) \ge -c_1$ na $\langle 0;T\rangle$. Dohromady máme odhad

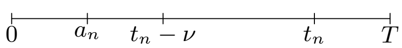
$$-c_1 \le u_n'(t) \le c_2 \text{ pro } t \in \langle 0;T\rangle\ . \tag{3.49}$$

Nechť má funkce u_n maximum v bodě $t_n \in (0;T)$. Potom $u_n'(t_n) = 0$, $u_n'(t) \ge 0$ pro $t \in \langle 0;t_n\rangle$ a $u_n'(t) \le 0$ pro $t \in \langle t_n;T\rangle$.

1. Nechť $t_n - \nu \ge 0$. Potom existuje $a_n \in \langle 0;t_n\,)$ tak, že $u_n'(t) \le \nu$ pro $t \in \langle a_n;t_n\rangle$.

   (a) Nejprve nechť $a_n \le t_n - \nu$ (viz obrázek 19). Integrací nerovnosti (3.47) dostaneme

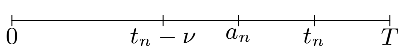
   $$\varepsilon(t_n - t) \le \phi(u_n'(t)) \text{ pro } t \in \langle t_n - \nu;t_n\rangle\ . \tag{3.50}$$

   Obrázek 19: $a_n \le t_n - \nu$.

   (b) Nyní předpokládejme $a_n > t_n - \nu$ (viz obrázek 20). Pro $t \in \langle a_n;t_n\rangle$ opět máme

   $$\varepsilon(t_n - t) \le \phi(u_n'(t))\ .$$

   Obrázek 20: $a_n > t_n - \nu$.

   Nechť $u_n'(t) > \nu$ pro $t \in \langle 0;a_n\,)$. Pro $t \in \langle t_n - \nu;a_n\rangle$ platí $t_n - t \le \nu$ a protože $\varepsilon \in \left(0;\frac{\phi(\nu)}{\nu}\right)$ máme

   $$\varepsilon(t_n - t) \le \varepsilon\nu < \phi(\nu) < \phi(u_n'(t))\ .$$

   Odhad (3.50) dostáváme i v tomto případě.

   Z nerovnosti (3.50) máme

   $$\phi^{-1}(\varepsilon(t_n - t)) \le u_n'(t) \text{ pro } t \in \langle t_n - \nu;t_n\rangle\ .$$

   Integrací této nerovnosti přes interval $\langle t_n - \nu;t_n\rangle$ a užitím substituce $s = t_n - t$ dostaneme

   $$u_n(t_n) \ge u_n(t_n) - u_n(t_n - \nu) = \int_{t_n-\nu}^{t_n} u'(t)\,\mathrm{d}t \ge$$

$$\geq \int_{t_n-\nu}^{t_n} \phi^{-1}(\varepsilon(t_n - t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\nu} \phi^{-1}(\varepsilon s)\,\mathrm{d}s =: \nu_0 > 0\ ,$$

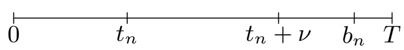
tj. platí

$$u_n(t_n) \geq \nu_0 > 0\ . \tag{3.51}$$

2. Nechť $t_n - \nu \leq 0$. Potom $t_n + \nu \leq T$ a existuje $b_n \in (t_n; T\rangle$ tak, že $-u_n'(t) \leq \nu$ pro $t \in \langle t_n; b_n\rangle$.

   (a) Předpokládejme, že $b_n \geq t_n + \nu$ (viz obrázek 21). Integrací (3.47) dostaneme

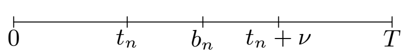
$$\varepsilon(t - t_n) \leq -\phi(u_n'(t)) \text{ pro } t \in \langle t_n; t_n + \nu\rangle\ . \tag{3.52}$$



Obrázek 21: $b_n \geq t_n + \nu$.

   (b) Nechť $b_n < t_n + \nu$ (viz obrázek 22). Pro $t \in \langle t_n; b_n\rangle$ platí

$$\varepsilon(t - t_n) \leq -\phi(u_n'(t))\ .$$



Obrázek 22: $b_n < t_n + \nu$.

   Nechť $-u_n'(t) > \nu$ pro $t \in (b_n; T\rangle$, potom pro $t \in \langle b_n; t_n + \nu\rangle$ platí

$$\varepsilon(t - t_n) \leq \varepsilon\nu < \phi(\nu) \leq -\phi(u_n'(t))\ .$$

   Znovu dostáváme odhad (3.52).

Protože homeomorfismus ϕ je lichý, z (3.52) máme

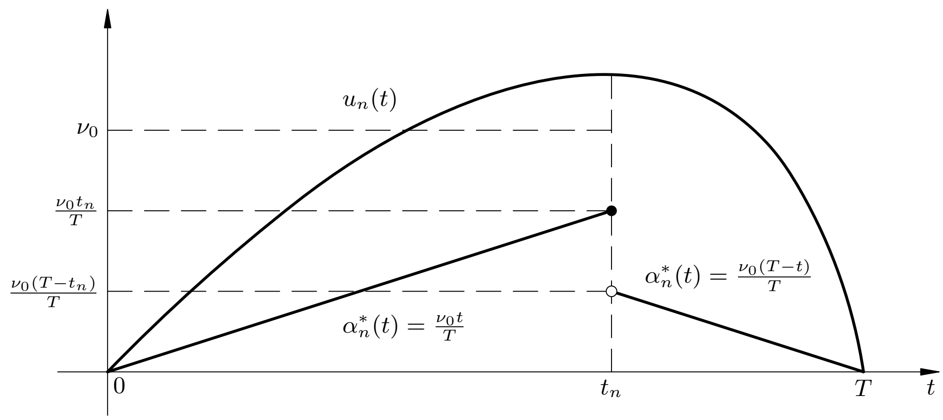
$$\phi^{-1}(\varepsilon(t_n - t)) \leq -u_n'(t) \text{ pro } t \in \langle t_n; t_n + \nu\rangle\ .$$

Integrací této nerovnosti přes interval $\langle t_n; t_n + \nu\rangle$ a užitím substituce $s = t - t_n$ dostaneme

$$u_n(t_n) \geq u_n(t_n) - u_n(t_n + \nu) = -\int_{t_n}^{t_n+\nu} u'(t)\,\mathrm{d}t \geq$$

$$\geq \int_{t_n}^{t_n+\nu} \phi^{-1}(\varepsilon(t - t_n))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\nu} \phi^{-1}(\varepsilon s)\,\mathrm{d}s = \nu_0 > 0\ .$$

Vidíme, že odhad (3.51) platí i v tomto druhém případě.



Obrázek 23: Funkce α_n^*.

Protože funkce u_n' je nerostoucí na intervalu $\langle 0; T\rangle$, podle (3.51) platí

$$\alpha_n^*(t) \le u_n(t) \le \sigma_2(t) \text{ pro } t \in \langle 0; T\rangle \ ,$$

kde

$$\alpha_n^*(t) = \begin{cases} \dfrac{\nu_0}{T} t & \text{pro } t \in \langle 0; t_n\rangle \\[2ex] \dfrac{\nu_0}{T}(T-t) & \text{pro } t \in (t_n; T\rangle \end{cases}$$

(viz obrázek 23).

4. krok - existence řešení singulární úlohy (1.4).

K důkazu existence řešení úlohy (1.4) užijeme větu 3.2 (První existenční princip). Nyní ověříme, že jsou splněny všechny předpoklady této věty.

Platí, že $f \in Car((0;T) \times \mathcal{D})$, kde $\mathcal{D} = (\mathfrak{A}_1 \setminus \{0\}) \times (\mathfrak{A}_2 \setminus \{0\})$ a $\mathfrak{A}_1 = \langle 0; \infty)$, $\mathfrak{A}_2 = \langle -c_1; c_2\rangle$, $f_n \in Car(\langle 0; T\rangle \times \mathbb{R}^2)$. Vidíme, že ε_n, η_n a f_n splňují podmínku (1) věty 3.2.

Uvažujme posloupnost řešení $\{u_n\}$, $n > \frac{2}{T}$ a definujme množinu

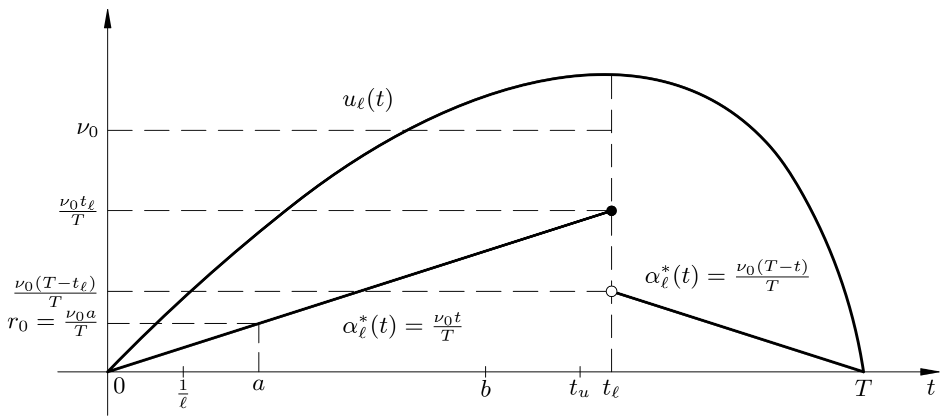
$$\Omega = \left\{ v \in C^1 \langle 0; T\rangle : \ 0 \le v(t) \le \sigma_2(t) \ ; \quad -c_1 \le v'(t) \le c_2 \text{ na } \langle 0; T\rangle \right\} \ .$$

Potom také podmínka (2) věty 3.2 platí a můžeme vybrat podposloupnost $\{u_\ell\} \subseteq \{u_n\}$, která stejnoměrně konverguje na intervalu $\langle 0; T\rangle$ k funkci $u \in C\langle 0; T\rangle$.

Podle odhadů (3.49) a (3.51) máme pro $\ell \in \mathbb{N}$

$$0 < \frac{\nu_0}{c_2} \le \frac{u_\ell(t_\ell)}{c_2} = \frac{1}{c_2} \int_0^{t_\ell} u_\ell'(t)\, \mathrm{d}t \le \int_0^{t_\ell} \mathrm{d}t = t_\ell \ ,$$

$$0 < \frac{\nu_0}{c_1} \le \frac{u_\ell(t_\ell)}{c_1} = -\frac{1}{c_1} \int_{t_\ell}^{T} u_\ell'(t)\, \mathrm{d}t \le \int_{t_\ell}^{T} \mathrm{d}t = T - t_\ell \ .$$



Obrázek 24: $t_\ell \geq t_u$.

Dohromady dostáváme

$$0 < \frac{\nu_0}{c_2} \leq t_\ell \leq T - \frac{\nu_0}{c_1} < T \ .$$

Posloupnost $\{t_\ell\}$ je omezená a podle věty 1.3 (Bolzanova - Weierstrassova věta) existuje konvergentní podposloupnost. Vyberme tedy posloupnost $\{u_\ell\}$ takovým způsobem, aby platilo $\lim\limits_{\ell\to\infty} t_\ell = t_u \in (0;T)$ a

$$\alpha_u^*(t) \leq u(t) \leq \sigma_2(t) \text{ pro } t \in \langle 0;T\rangle \ , \tag{3.53}$$

kde

$$\alpha_u^*(t) = \begin{cases} \dfrac{\nu_0}{T}t & \text{pro } t \in \langle 0; t_u\rangle \\ \dfrac{\nu_0}{T}(T-t) & \text{pro } t \in (t_u; T\rangle \ . \end{cases}$$

Položme $S = \{t_u\}$.

Nyní zvolme libovolný interval $\langle a;b\rangle \subset (0;t_u)$. Potom existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $\ell \geq k_0$ dostaneme

$$\langle a;b\rangle \subset \left(\frac{1}{\ell}; t_\ell\right) \ , \quad |t_\ell - t_u| < \frac{t_u - b}{2} \ .$$

Pro $t \in \langle a;b\rangle$ máme

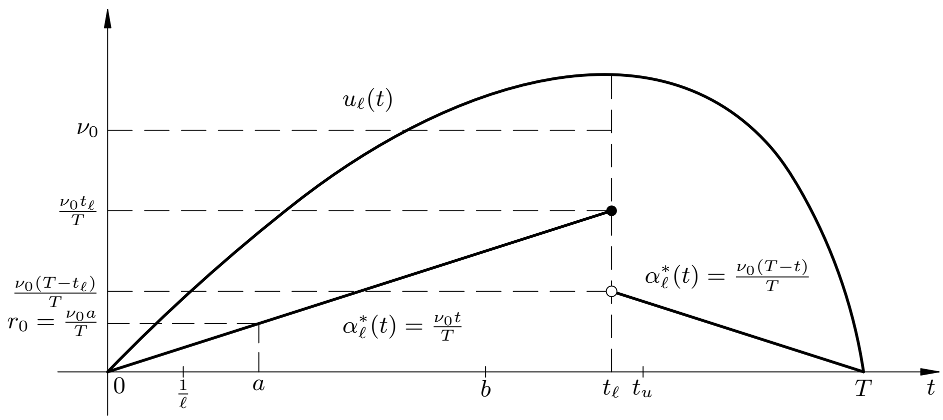
$$r_0 := \frac{\nu_0 a}{T} \leq u_\ell(t) \ .$$

Nechť $t_\ell \geq t_u$ (viz obrázek 24), potom platí

$$\frac{t_u - b}{2} < t_u - b \leq t_\ell - t \text{ pro } t \in \langle a;b\rangle \ . \tag{3.54}$$

Nechť $t_\ell < t_u$ (viz obrázek 25), potom

$$t_u - t_\ell < \frac{t_u - b}{2} \Rightarrow t_\ell > \frac{t_u}{2} + \frac{b}{2} \geq \frac{t_u}{2} + t - \frac{b}{2}$$



Obrázek 25: $t_\ell < t_u$.

a opět dostáváme (3.54).

Užitím nerovností (3.54) a (3.47) máme

$$r_1 := \varepsilon \frac{t_u - b}{2} \leq \varepsilon(t_\ell - t) = \int_t^{t_\ell} \varepsilon \,\mathrm{d}s \leq$$

$$-\int_t^{t_\ell} (\phi(u_\ell'(s)))' \,\mathrm{d}s = -\left(\phi(u_\ell'(t_\ell)) - \phi(u_\ell'(t))\right) = \phi(u_\ell'(t)) \ .$$

Tedy pro s. v. $t \in \langle a; b\rangle$ platí

$$|f_\ell(t, u_\ell(t), u_\ell'(t))| \leq m(t) \in L\,\langle a; b\rangle \ ,$$

kde

$$m(t) = \sup\{|f(t,x,y)| : \ r_0 \leq x \leq \sigma_2(t) \ ; \quad \phi^{-1}(r_1) \leq y \leq c_2\} \ .$$

Jestliže vybereme $\langle a; b\rangle \subset (t_u; T)$, postupujeme podobně a dostaneme také lebesgueovsky integrabilní majorantu pro funkce f_ℓ, $\ell \geq k_0$ na intervalu $\langle a; b\rangle$.

Posloupnost $\{(\phi(u_\ell'))'\}$ má lebesgueovsky integrabilní majorantu na libovolném intervalu $\langle a; b\rangle \subset (0; T) \setminus S$ a podle lemmatu 3.11 je na tomto intervalu posloupnost $\{\phi(u_\ell')\}$ stejně spojitá. Ukázali jsme, že podmínka (3) věty 3.2 platí. Tedy máme $u \in C^1((0;T)\setminus S)$ a existuje podposloupnost $\{u_k\} \subseteq \{u_\ell\}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} u_k'(t) = u'(t)$ lokálně stejnoměrně na $(0; T) \setminus S$.

Protože funkce u_k' jsou nerostoucí na intervalu $\langle 0; T\rangle$ pro $k \geq k_0$, je funkce u' nerostoucí na intervalech $(0; t_u)$ a $(t_u; T)$.

Nechť existuje $t_* \in \langle 0; t_u)$ tak, že $u'(t_*) < 0$. Potom $\lim\limits_{k\to\infty} u_k'(t_*) = u'(t_*) < 0$. Na druhou stranu existuje $k_* \in \mathbb{N}$ tak, že $t_* < t_k$ pro $k \geq k_*$ a dostáváme spor s tím, že $u_k'(t) \geq 0$ pro $t \in \langle 0; t_k\rangle$. Máme $u'(t) \geq 0$ pro $\langle 0; t_u)$. Podobně ukážeme, že $u'(t) \leq 0$ na intervalu $(t_u; T\rangle$.

Vzhledem k (3.49) platí odhady

$$\left.\begin{array}{ll} 0 \le u'(t) \le c_2 & \text{pro } t \in \langle 0; t_u) \ , \\ & \\ -c_1 \le u'(t) \le 0 & \text{pro } t \in (t_u; T\rangle \end{array}\right\} \tag{3.55}$$

a existují limity $\lim\limits_{t \to t_u -} u'(t) \ge 0$ a $\lim\limits_{t \to t_u +} u'(t) \le 0$.

Nyní ukážeme, že

$$u'(t) > 0 \text{ pro } t \in (0; t_u) \ . \tag{3.56}$$

1. Nechť $\lim\limits_{t \to t_u -} u'(t) > 0$. Protože u' je nerostoucí, dostáváme $u'(t) > 0$ pro $t \in \langle 0; t_u)$.

2. Nechť $\lim\limits_{t \to t_u -} u'(t) = 0$. Sporem ukážeme, že (3.56) opět platí. Předpokládejme, že existuje $t^* \in (0; t_u)$ tak, že $u'(t^*) = 0$. Potom $u'(t) = 0$ pro $t \in \langle t^*; t_u \rangle$. Na druhou stranu podle (3.47) dostáváme pro $t \in \langle t^*; t_u)$

$$\varepsilon(t_u - t) \le - \int_t^{t_u} (\phi(u'(s)))' \, \mathrm{d}s \le \phi(u'(t))$$

a

$$0 < \phi^{-1}(\varepsilon(t_u - t)) \le u'(t) \ .$$

Dostáváme spor.

Platí tedy, že $u'(t) > 0$ na intervalu $(0; t_u)$.

Podobně z toho, že $\lim\limits_{t \to t_u +} u'(t) \le 0$ dostaneme $u'(t) < 0$ pro $t \in (t_u; T)$.

Tedy t_u je jediný bod intervalu $(0; T)$ ve kterém buď $u'(t_u) = 0$ nebo $u'(t_u)$ neexistuje. Podle odhadu (3.53) je u kladné na intervalu $(0; T)$. Předpoklad (4) věty 3.2 platí. Konečně podle (3.46) a podle definice f_k máme $f_k(t, u_k(t), u_k'(t)) \ge 0$ pro s. v. $t \in \langle 0; T \rangle$, $k \in \mathbb{N}$, $k \ge k_0$ a i podmínka (5) věty 3.2 je splněna. Funkce u je řešením úlohy (1.4).

Odhady (3.48) plynou z (3.53) a (3.55). □

Příklad 3.17 Uvažujme úlohu (1.8) z příkladu 1.34. Funkce f má singularity v $x = 0$ a $y = 0$. Dále jsou splněny předpoklady věty 3.16, neboť $f(t, x, y) \in Car\,(\langle 0; T \rangle \times \mathbb{R}_0^2)$ a pro $\nu = \frac{1}{4}$, $\varepsilon < \frac{1}{256}$, $c_1 = c_2 = 1$,

$$\sigma_2(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in \left\langle 0; \dfrac{1}{2} \right\rangle \\ & \\ 1 - t & \text{pro } t \in \left(\dfrac{1}{2}; 1 \right\rangle \end{cases}$$

platí, že $|\sigma_2'(t)| = 1$ pro s. v. $t \in \langle 0; T \rangle$ a jsou splněny předpoklady (3.45), (3.46). Dále $\sigma_2(t) \le \frac{1}{2}$ pro $t \in \langle 0; 1 \rangle$ a pro $x \in (0; \sigma_2(t) \rangle$, $|y| \in (0; \nu \rangle$ platí odhad

$$\varepsilon < \frac{75}{4} = \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \right) \le \left(1 - y^2 \right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) = f(t, x, y) \ .$$

Vidíme, že také předpoklad (3.47) je splněn. Existuje tedy řešení u naší úlohy splňující odhady

$$0 < u(t) \le \sigma_2(t)\ , \quad -1 \le u'(t) \le 1 \text{ pro } t \in (0;1)\ .$$

Příklad 3.18 Předpokládejme, že $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in (0;\infty)$, a že funkce $h_i \in L_{loc}(0;\infty)$ jsou pro $i = 1,2,3,4$ nezáporné. Položme

$$\left.\begin{aligned} f(t,x,y) = (1-y^2)\Bigg(\frac{1}{2t(T-t)} + h_1(t)x^{\alpha_1} + \\ +h_2(t)|y|^{\alpha_2} + h_3(t)\frac{1}{x^{\beta_1}} + h_4(t)\frac{1}{|y|^{\beta_2}}\Bigg)\end{aligned}\right\} \tag{3.57}$$

pro s. v. $t \in \langle 0;T\rangle$ a všechna $x \in (0;\infty)$, $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Potom funkce f splňuje předpoklady věty 3.16 pro $c_1 = c_2 = 1$, $\nu = \min\left\{\frac{T}{4}, \frac{1}{2}\right\}$.

Skutečně vidíme, že $f \in Car((0;T)\times\mathcal{D})$, kde $\mathcal{D} = (0;\infty)\times(\langle -1;1\rangle\setminus\{0\})$, a že $f(t,x,y)$ má singularity v $t=0$, $t=T$, $x=0$, $y=0$.

Položme $\sigma_2(t) = \min\{t,(T-t)\}$ pro $t \in \langle 0;T\rangle$. Jelikož $|\sigma_2'(t)| = 1$ pro s. v. $t \in \langle 0;T\rangle$, platí (3.45) a (3.46). Protože funkce $g(t) = \frac{1}{2t(T-t)}$ má na intervalu $(0;T)$ minimum v bodě $\frac{T}{2}$ a jeho hodnota je $\frac{2}{T^2}$, pro s. v. $t \in \langle 0;T\rangle$, všechna $x \in (0;\sigma_2(t)\rangle$ a všechna $|y| \in (0;\nu\rangle$ platí odhad

$$f(t,x,y) \ge \frac{1-\nu^2}{2t(T-t)} \ge \frac{2(1-\nu^2)}{T^2}\ .$$

Zvolme kladné $\varepsilon < \min\left\{\frac{2\left(1-\nu^2\right)}{T^2}, \frac{\phi(\nu)}{\nu}\right\}$. Vidíme, že nerovnost (3.47) platí a věta 3.16 nám zaručuje existenci řešení u úlohy (1.4) pro funkci f danou (3.57). Navíc řešení u splňuje odhady

$$0 < u(t) \le \sigma_2(t)\ , \quad -1 \le u'(t) \le 1 \text{ pro } t \in (0;T)\ .$$

4 Závěr

Tato disertační práce je věnována singulárním problémům na kompaktním intervalu $\langle 0;T\rangle$. Takovéto problémy již byly zkoumány v mnoha pracích a výsledky jsou shrnuty například v práci [39] nebo také v monografii [40].

Další výzkum plánujeme zaměřit na singulární problémy na nekonečných intervalech, zejména na reálné polopřímce $\langle 0;\infty)$. K takovýmto problémům se dostáváme například v teorii tenkých membrán , v hydrodynamice nebo v terorii nelineárních polí. Problém tohoto typu je zkoumán v článku [49]. Tento článek navazuje na předchozí výzkum prvních dvou autorů a zabývá se nejenom existencí řešení, ale také chováním řešení pro $t \to \infty$.

Je zde zkoumána diferenciální rovnice

$$(p(t)u'(t))' = p(t)f(u(t)), \quad t \in \langle 0;\infty) \tag{4.1}$$

za počátečních podmínek

$$u(0) = B \ , \quad u'(0) = 0 \ , \quad B < 0 \ . \tag{4.2}$$

O funkcích p, f předpokládáme,

$$f \in Lip_{loc}(\mathbb{R}) \ , \quad p \in C^1(0;\infty) \cap C\langle 0;\infty) \ , \tag{4.3}$$

$$p(0) = 0 \ , \quad p'(t) > 0 \text{ pro } t > 0 \ , \quad \lim_{t\to\infty} \frac{p'(t)}{p(t)} = 0 \ . \tag{4.4}$$

Z (4.1) dostáváme

$$p(t)u''(t) + p'(t)u'(t) = p(t)f(u(t)) \ ,$$

$$u''(t) + \frac{p'(t)}{p(t)}u'(t) - f(u(t)) = 0 \ .$$

Platí,

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{p'(t)}{p(t)} \,\mathrm{d}t = \ln(p(\varepsilon)) - \lim_{t\to 0+} \ln(p(t)) = \infty$$

a pokud zvolíme

$$g(t,x,y) = \frac{p'(t)}{p(t)}y - f(x)$$

má funkce $g(t,x,y)$ časovou singularitu v bodě $t = 0$.

Řešením nazveme funkci $u \in C^1\langle 0;\infty) \cap C^2(0;\infty)$ splňující rovnici (4.1) pro $t \in (0;\infty)$ a splňující počáteční podmínky (4.2).

V článku [49] jsou uvedeny podmínky pro funkce p, f, za nichž má úloha (4.1), (4.2) jediné řešení.

Věta 4.1 (Existence a jednoznačnost, [49] str. 3) *Nechť platí* (4.3), (4.4)*, nechť existují konstanty $L_0 < 0$ (L_0 se může rovnat $-\infty$), $L > 0$, $C_L > 0$ tak, že*

$$xf(x) < 0 \text{ pro } x \in (L_0;0) \cup (0;L) \ , \tag{4.5}$$

$$0 \le f(x) \le C_L \text{ pro } x \ge L \ , \tag{4.6}$$

a nechť $B \in (L_0;0)$.

Potom má úloha (4.1), (4.2) *jediné řešení u. Navíc toto řešení splňuje odhad*

$$u(t) \ge B \text{ pro } t \in \langle 0;\infty) \ .$$

Dále jsou v článku zkoumány asymptotické vlastnosti řešení. Rozdělme nyní řešení podle jejich asymptotických vlastností. Označme

$$u_{\sup} = \sup\{u(t) : \ t \in \langle 0;\infty)\} \ .$$

Řešení nazveme tlumené, jestliže $u_{\mathrm{sup}} < L$, homoklinické, jestliže $u_{\mathrm{sup}} = L$, a únikové, jestliže $u_{\mathrm{sup}} > L$. Tlumené řešení nazveme oscilatorické, jestliže má neomezenou množinu izolovaných nulových bodů.

Dále označme

$$F(x) = -\int_0^x f(z)\,\mathrm{d}z \text{ pro } x \in \mathbb{R} \ .$$

Funkce F je spojitá na $\mathbb{R}$, klesající a kladná na intervalu $(L_0; 0)$ a rostoucí a kladná na intervalu $(0; L)$. Definujme

$$\overline{B} = \inf\{B_0 \in (L_0; 0) : \ F(B) < F(L) \ \forall B \in (B_0; 0)\} \tag{4.7}$$

($\overline{B}$ se může rovnat $-\infty$).

Věta 4.2 (Existence tlumeného řešení, [49] str. 5) *Nechť platí* (4.3), (4.4), (4.5) a (4.6). *Nechť* $\overline{B}$ *je dáno vztahem* (4.7). *Předpokládejme, že* u *je řešení úlohy* (4.1), (4.2) *pro* $B \in \big(\overline{B}; 0\big)$. *Potom je* u *tlumené řešení.*

Přidáním dalších podmínek na funkce p, f lze zajistit existenci oscilatorického řešení.

Věta 4.3 (Existence oscilatorického řešení, [49] str. 12) *Nechť platí* (4.3), (4.4), (4.5) a (4.6). *Nechť*

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)}{x} < 0 \ , \quad \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)}{x} < 0 \ ,$$
$$p \in C^2\,(0; \infty) \ , \quad \limsup_{t\to\infty} \left|\frac{p''(t)}{p'(t)}\right| < \infty \ .$$

Dále nechť $\overline{B}$ *je dáno vztahem* (4.7). *Předpokládejme, že* u *je řešení úlohy* (4.1), (4.2) *pro* $B \in \big(\overline{B}; 0\big)$. *Potom je* u *oscilatorické řešení se zmenšující se amplitudou.*

Podmínky kladené na funkce p, f pokrývají pouze určitou třídu rovnic (4.1) a naším cílem bude výzkum a charakteristika asymptotického chování všech řešení rovnice (4.1) pro různé typy funkcí p a f, případně pro obecnější rovnice tvaru

$$(p(t)u'(t))' = q(t)f(t) \ , \quad (p(t)u'(t))' = f(t, u(t)) \ .$$

Literatura

[1] R.P. Agarwal, H. Lü, D. O'Regan: *An upper and lower solution method for one-dimensional singular p-Laplacian*, Memoirs on Differential Equations and Math. Phys. **28**(2003), 13-31.

[2] R.P. Agarwal, D. O'Regan: *Singular boundary value problems for superlinear second order ordinary and delay differential equations*, J. Differential Equations **130**(1996), 333-355.

[3] R.P. Agarwal, D. O'Regan: *Nonlinear superlinear singular and nonsingular second order boundary value problems*, J. Differential Equations **143**(1998), 60-95.

[4] R.P. Agarwal, D. O'Regan: *Twin solutions to singular Dirichlet problems*, J. Math. Anal. Appl. **240**(1999), 433-445.

[5] R.P. Agarwal, D. O'Regan: *Singular Differential and Integral Equations with Applications*, Kluwer, Dordrecht 2003.

[6] R.P. Agarwal, D. O'Regan: *A Survey of Recent Results for Initial and Boundary Value Problems Singular in the Depend Variable*, In: Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations, Vol. 1, A. Cañada, P. Drábek, A. Fonda, eds., Elsevier, North Holland, Amsterodam (2004), 1-68.

[7] R.P. Agarwal, D. O'Regan, V. Lakshmikantham: *Existence of positive solutions for singular initial and boundary value problems via the classical upper and lower solution approach*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. **50**(2002), 215-222.

[8] R.P. Agarwal, D. O'Regan, S. Staněk: *General existence principles for nonlocal boundary value problems with ϕ-Laplacian and their applications*, Abstr. Anal. Appl. **2006**(2006), Article ID 96826, 1-30.

[9] R.P. Agarwal, S. Staněk: *Nonnegative solutions of singular boundary value problems with sign changing nonlinearities*, Comput. Math. Appl. **46**(2003), 1827-1837.

[10] R.G. Bartle: *A Modern Theory of Integration*, AMS Providence, Rhode Island 2001.

[11] J.V. Baxley: *Some singular nonlinear boundary value problems*, SIAM J. Math. Anal. **22**(1991), 463-479.

[12] J.V. Baxley: *Numerical solution of singular nonlinear boundary value problems*, Proceedings of the Third International Colloquium on Numerical Analysis, D. Bainov and V. Covachev, eds., VSP, Utrecht (1995), 15-24.

[13] J.V. Baxley, H.B. Thompson: *Boundary behavior and computation of solutions of singular nonlinear boundary value problems*, Comm. Appl. Anal. **4**(2000), 207-226.

[14] L.E. Bobisud, D. O'Regan, W.D. Royalty: *Solvability of some nonlinear boundary value problems*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. **12**(1988), 855-869.

[15] J. Brabec, F. Martan, Z. Rozenský: *Matematická analýza I*, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha 1989.

[16] A. Callegari, M. Friedman: *An analytical solution of a nonlinear singular boundary value problem in the theory of viscous fluid*, J. Math. Anal. Appl. **21**(1968), 510-529.

[17] A. Callegari, A. Nachman: *Some singular, nonlinear differential equations arising in boundary layer theory*, J. Math. Anal. Appl. **64**(1978), 96-105.

[18] A. Callegari, A. Nachman: *A nonlinear singular boundary value problem in the theory of pseudoplastic fluid*, SIAM J. Appl. Math. **38**(1980), 275-281.

[19] C. De Coster, P. Habets: *The Lower and Upper Solutions Method for Boundary Value Problems*, In: Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations, Vol. 1, A. Caňada, P. Drábek, A. Fonda, eds., Elsevier, North Holland, Amsterodam (2004), 69-161.

[20] J.A. Gatica, V. Oliker, P. Waltman: *Singular nonlinear boundary value problems for second-order ordinary differential equations*, J. Differential Equations **79**(1989), 62-78.

[21] P. Habets, F. Zanolin: *Upper and lower solutions for a generalized Emded-Fowler equation*, J. Math. Anal. Appl. **181**(1994), 684-700.

[22] J.K. Hunter, B. Nachtergaele: *Applied Analysis*, World Scientific, London 2001.

[23] D.Q. Jiang: *Upper a lower solutions method and a singular superlinear boundary value problem for the one-dimensional p-Laplacian*, Comp. Math. Appl. **42**(2001), 927-940.

[24] D.Q. Jiang: *Upper a lower solutions method and a superlinear singular boundary value problems*, Comp. Math. Appl. **44**(2002), 323-337.

[25] I.T. Kiguradze: *Some Singular Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, (rusky), Tbilisi Univ. Press, Tbilisi 1975.

[26] I.T. Kiguradze, B.L. Shekhter: *Singular boundary value problems for second order ordinary differential equations*, (rusky), Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat., Noveishie Dostizh. **30**(1987), 105-201, translated in J. Sov. Math. **43**(1988), 2340-2417.

[27] J. Kurzweil: *Obyčejné diferenciální rovnice*, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha 1978.

[28] A. Lomtatitdze: *Positive solutions of boundary value problems for second order differential equations with singular points*, (rusky), Differentsial'nye Uravneniya **23**(1987), 1685-1692, translated in Differential Equations **23**(1987), 1146-1152.

[29] A. Lomtatidze, P. Torres: *On a two-point boundary value problem for second order singular equations*, Czechoslovak Math. J. **53**(2003), 19-43.

[30] J. Lukeš: *Zápisky z funkcionální analýzy*, Karolinum, Praha 2002.

[31] J. Lukeš, J. Malý: *Míra a integrál*, Karolinum, Praha 2002.

[32] D. O'Regan: *Some general existence principles and results for* $(\phi(y'))' = qf(t, y, y')$, $0 < t < 1$, SIAM J. Math. Anal. **24**(1993), 648-668.

[33] D. O'Regan: *Theory of singular boundary value problems*, World Scientific, Singapore 1994.

[34] D. O'Regan: *Existence Principles and Theory for Singular Dirichlet Boundary Value Problems*, Differential Equations and Dynamical Systems **3**(1995), 289-304.

[35] I. Rachůnková, S. Staněk: *Sign-changing solutions of singular Dirichlet boundary value problems*, Archives of Inequal. Appl. **1**(2003), 11-30.

[36] I. Rachůnková, S. Staněk: *Connections between types of singularities in differential equations and smoothness of solutions of Dirichlet BVPs*, Dyn. Contin. Discrete Impulsive Syst. **10**(2003), 209-222.

[37] I. Rachůnková, S. Staněk: *General existence principle for singular BVPs and its aplication*, Georgian Math. J. **11**(2004), 549-565.

[38] I. Rachůnková, S. Staněk: *A singular boundary value problem for odd order differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **291**(2004), 741-756.

[39] I. Rachůnková, S. Staněk, M. Tvrdý: *Singularities and Laplacians in Boundary Value Problems for Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Handbook of Differential Equations. Ordinary Differential Equations, Ed by A. Cañada, P. Drábek, A. Fonda, Vol. 3. Elsevier (2006), 607-723.

[40] I. Rachůnková, S. Staněk, M. Tvrdý: *Solvability of Nonlinear Singular Problems for Ordinary Differential Equations*, Hindawi Publ. Corp., New York 2008.

[41] I. Rachůnková, J. Stryja: *Singular Dirichlet BVP for second order ODE*, Georgian Math. J. **14**(2007), 325-340.

[42] I. Rachůnková, J. Stryja: *Dirichlet problem with* ϕ*-Laplacian and mixed singularities*, Nonlinear Oscillations **11**(2008), 81-95.

[43] I. Rachůnková, J. Stryja: *Lower and upper functions in singular Dirichlet problem with* ϕ*-Laplacian*, zaslán do časopisu Mathematical Notes.

[44] I. Rachůnková, J. Tomeček: *Impulsive BVPs with nonlinear boundary conditions for the second order differential equations without growth restrictions*, J. Math. Anal. Appl. **292**(2004), 525-539.

[45] I. Rachůnková, J. Tomeček: *Homoclinic Solutions of Singular Nonautonomous Second-Order Differential Equations*, Boundary Value Problems, **2009**(2009), Article ID 959636, 1-21.

[46] I. Rachůnková, J. Tomeček: *Buble-type solutions of nonlinear singular problems*, Mathematical and Computer Modelling, **51**(2010), 658-669.

[47] I. Rachůnková, J. Tomeček: *Strictly increasing solutions of a nonlinear singular differential equation arising in hydrodynamics*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, **72**(2010), 2114-2118.

[48] I. Rachůnková, J. Tomeček: *Superlinear Singular Problems on the Half Line*, Boundary Value Problems, **2010**(2010), Article ID 429813, 1-18.

[49] I. Rachůnková, J. Tomeček, J. Stryja: *Oscilatory solutions of singular equations arising in hydrodynamics*, Advances in Diference Equations, **2010**(2010), Article ID 872160, 1-13.

[50] K. Rektorys: *Přehled užité matematiky I*, Prometheus, Praha 1996.

[51] K. Rektorys: *Přehled užité matematiky II*, Prometheus, Praha 1996.

[52] S. Staněk: *Positive solutions of singular positone Dirichlet boundary value problems*, Math. Comp. Modelling **33**(2001), 341-351.

[53] S. Staněk: *Positive solutions of the Dirichlet problem with state-dependend functional differential equations*, Funct. Diff. Equations **11**(2004), 563-586.

[54] G.E. Šilov, B.L. Gurevič: *Integrál, míra a derivace - I*, SNTL - Nakladatelství technické literatury, Praha 1968.

[55] S.D. Taliaferro: *A nonlinear singular boundary value problem*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. **3**(1979), 897-904.

[56] A. Tineo: *Existence theorems for a singular two-point Dirichlet problem*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. **19**(1992), 323-333.

[57] J. Tomeček: *Impulzní okrajové úlohy*, disertační práce, Olomouc 2007.

[58] N.I. Vasiljev, J.A. Klokov: *Foundation of the Theory of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, (rusky), Zinatne, Riga 1978.

[59] J.Y. Wang, W. Gao: *A singular boundary value problem for the one-dimensional p-Laplacian*, J. Math. Anal. Appl. **201**(1996), 851-866.

Příloha

Curriculum Vitae

Adresa

Jakub Stryja
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie
VŠB - Technická univerzita Ostrava
17. listopadu 15/2172
708 33 Ostrava-Poruba
Česká republika
e-mail: jakub.stryja@vsb.cz

Datum narození: 8. srpna 1978
Místo narození: Třinec

Vzdělání a zaměstnání

- **1992 - 1996:** Gymnázium Komenského v Třinci
- **1996 - 2001:** Univerzita Palackého v Olomouci, magisterský studijní program
  - Studijní obor: Matematika a její aplikace
  - Zaměření: Matematická analýza
  - Diplomová práce: Analýza skoro-periodických funkcí
  - Vedoucí diplomové práce: prof. RNDr. Jan Andres, CSc.
- **2001 - 2002:** Základní vojenská služba
- **od 2002:** Katedra matematiky a deskriptivní geometrie VŠB-TU Ostrava, odborný asistent
- **od 2002:** Univerzita Palackého v Olomouci, doktorský studijní program (distanční studium)
  - Studijní obor: Matematická analýza
  - Zaměření: Diferenciální rovnice
  - Disertační práce: Singulární Dirichletovy úlohy pro rovnici druhého řádu
  - Školitel: prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.

Seznam publikací

1. J. Stryja: *Singulární Dirichletova úloha pro rovnice druhého řádu*, 3μ Dolní Lomná 2006.

2. I. Rachůnková, J. Stryja: *Singular Dirichlet BVP for second order ODE*, Georgian Math. J. **14**(2007), 325-340.

3. I. Rachůnková, J. Stryja: *Dirichlet problem with ϕ-Laplacian and mixed singularities*, Nonlinear Oscillations **11**(2008), 81-95.

4. I. Rachůnková, J. Stryja: *Lower and upper functions in singular Dirichlet problem with ϕ-Laplacian*, zaslán do časopisu Mathematical Notes.

5. J. Stryja: *Singulární Dirichletova úloha pro rovnici druhého řádu s ϕ-Laplaciánem*, 3μ Dolní Lomná 2009.

6. I. Rachůnková, J. Tomeček, J. Stryja: *Oscilatory solutions of singular equations arising in hydrodynamics*, Advances in Diference Equations, **2010**(2010), Article ID 872160, 1-13.