



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

**Inverzně formulované slovní úlohy
a návrhy reedukace žákovských chyb
(sčítání a odčítání)**

Vypracovala: Veronika Brodská
Vedoucí práce: doc. PhDr. Alena Hošpesová, Ph.D.

České Budějovice 2023



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

University of South Bohemia in České Budějovice
Faculty of Education
Department of Mathematics

Diploma thesis

**Inverse formulated word problems
and re-education of pupils' mistakes
(addition and subtraction)**

Author: Veronika Brodská
Supervisor: doc. PhDr. Alena Hošpesová, Ph.D.

České Budějovice 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma „Inverzně formulované slovní úlohy a návrhy reedukace žákovských chyb (sčítání a odčítání)“ jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejich internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích

.....

Poděkování

Touto cestou děkuji doc. PhDr. Aleně Hošpesové, Ph.D. za odborné vedení mé diplomové práce a její cenné rady.

Poděkování patří také dvěma vedením základních škol v Českých Budějovicích, která mi umožnila pracovat s žáky těchto škol.

Anotace

Diplomová práce je zaměřena na problematiku slovních úloh, konkrétně na problematiku inverzně formulovaných slovních úloh (prof. M. Hejným nazývaných „úlohy s antisignálem“) určené pro žáky na 1. stupni základních škol. Práce se zaměřuje na zjištění, jaké chyby dělají žáci při řešení úloh s antisignálem, co je jejich možnou příčinou a jak je možné jim předcházet.

Diplomová práce se skládá ze dvou částí. První část je věnována pojmu slovní úloha, jejím fázím a metodám řešení, typologiím a cílům slovních úloh. Druhou částí diplomové práce je výzkumné šetření, které hledá odpověď na otázku, jak žáci řeší slovní úlohy různých typů, které vedou na operaci sčítání a odčítání (některé z těchto úloh jsou inverzně formulované). Výzkum je z hlavní části založen na kvalitativní metodologii. Následuje analýza didaktických testů a rozhovor s vybranými žáky. Bylo také provedeno porovnání učebnic od nakladatelství FRAUS (dle prof. Hejného) a ALTER z hlediska četnosti výskytu inverzně formulovaných úloh a použitých ilustrací. Po shrnutí výsledků a zjištění nejčastěji objevujících se chyb je v závěru výzkumné části diplomové práce navrhnutý postup, který by mohl napomoci k reedukaci žákovských chyb.

Annotation

The diploma thesis is focused on the problem of word problems, concretely on the problem of inversely formulated word problems (called "problems with an antisignal" by prof. M. Hejný) intended for pupils in the primary schools. The work focuses on finding out what mistakes pupils make when solving the problems with an antisignal, what is their possible cause and how they can be prevented.

The diploma thesis consists of two parts. The first part is devoted to the term of word problem, its phases and methods of solution, typologies and objectives of word problems. The second part of the diploma thesis is a research survey, which is focused on finding an answer to a question how pupils solve word problems of different kinds that leads to the operation of addition and subtraction (some of these tasks are inversely formulated). The research is mainly based on qualitative methodology. Following part is an analysis of didactic tests and an interview with selected pupils. A comparison of textbooks from the publishing house FRAUS (according to prof. Hejný) and ALTER was made in terms of the frequency of occurrence of inversely formulated tasks and used illustrations. After summary of the results and finding out the most common mistakes at the end of the survey, there is suggested process which could help with reeducation of mistakes made by pupils.

Obsah

1	Úvod	9
2	Vymezení pojmu slovní úloha.....	11
2.1	Didaktické funkce slovních úloh.....	12
3	Fáze řešení slovní úlohy.....	15
4	Reprezentace slovních úloh.....	19
4.1	Ilustrace slovních úloh	19
5	Typologie slovních úloh.....	21
5.1	Jednoduché slovní úlohy	22
5.1.1	Aditivní slovní úlohy – hledání součtu a rozdílu (A1).....	22
5.1.2	Aditivní slovní úlohy 2 – porovnávání (A2)	26
5.1.3	Multiplikativní slovní úlohy – hledání součinu a podílu (M1).....	28
5.1.4	Multiplikativní slovní úlohy – porovnávání (M2).....	28
5.2	Složené slovní úlohy	30
5.3	Nestandardní slovní úlohy.....	30
5.3.1	Slovní úlohy s antisignálem	31
6	Metodické přístupy k řešení slovních úloh.....	33
6.1	Řešení jednoduchých slovních úloh.....	33
7	Výzkumné šetření	35
7.1	Cíle výzkumu a výzkumné otázky	35
7.2	Pojetí a etapy výzkumu	36
7.2.1	Výzkumný vzorek	37
7.3	Vstupní test	37
7.3.1	Příprava vstupního testu.....	37
7.3.2	Realizace vstupního testu.....	39
7.3.3	Vyhodnocení vstupního testu.....	39

7.4	Analýza učebnic	40
7.4.1	Příprava analýzy učebnic	40
7.4.2	Realizace analýzy učebnic	41
7.4.3	Vyhodnocení analýzy učebnic	55
7.5	Hlavní část výzkumu.....	56
7.5.1	Příprava didaktického testu	56
7.5.2	Realizace didaktického testu	57
7.5.3	Vyhodnocení výsledků didaktického testu.....	57
7.5.4	Diskuse s vybranými žáky.....	62
7.6	Výsledky výzkumného šetření	65
8	Doporučení pro praxi	67
9	Závěr	71
	Seznam literatury	73
	Seznam obrázků	77
	Seznam tabulek	78
	Seznam grafů	79

1 Úvod

Slovní úlohy nás obklopují celý život. Setkáváme se s nimi nejen na základních či středních školách během hodin matematiky, kde tvoří významnou část učiva, ale dozajista také pomocí nich řešíme každodenní problémy a překážky, které nám život klade do cesty. Slovní úlohy umožňují dokonale propojit naučené matematické poznatky s reálnými situacemi.

Na základní škole jsem měla paní učitelku, jejíž přístup z pozice svých současných znalostí hodnotím jako konstruktivický. O úlohách jsme diskutovali, navrhovali možná řešení a postupy. Měli jsme možnost pracovat ve skupině i individuálně. Myslím, že především ona ve mně vybuchovala kladný vztah k matematice. I přes její přístup byla v mé třídě většina spolužáků, která matematiku, především pak slovní úlohy, odsuzovala.

Tento negativní přístup k slovním úlohám jsem u žáků později vnímala také jako praktikantka na základní škole. Pozorovala jsem, že žáci mnohdy ztráceli motivaci k řešení ještě před přečtením zadání slovní úlohy, protože ze zkušenosti věděli, že při řešení slovních úloh bývají častokrát z různých důvodů neúspěšní. Někdy si úlohu chybně přečetli, jindy si neuměli matematický problém představit a model situace popsany úlohou tvořili na základě různých povrchových aspektů zadání.

Jelikož jsou v Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (2021) zahrnuty výstupy, kde žáci řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikují a modelují osvojené početní operace, již v prvním období, a s ohledem na negativní přístup žáků k slovním úlohám, jsem se rozhodla vybrat si právě téma slovních úloh pro mou diplomovou práci. Zaměřila jsem se především na specificky formulované úlohy, které jsou nazývané inverzně formulované úlohy, jindy také úlohy s antisignálem. Měla jsem štěstí a jako studentka 5. ročníku jsem nastoupila na plný úvazek na pozici učitelky prvního stupně. A právě z mých zkušeností z praxe vím, že tyto úlohy dělají žákům problémy.

Diplomová práce se skládá ze dvou částí. První část se zabývá pojmem slovní úloha, jejími fázemi a metodami řešení, typologií a cíli slovních úloh. Druhou částí diplomové práce je výzkumné šetření, které hledá odpověď na otázku, jak žáci řeší slovní úlohy různých typů, které vedou na operaci sčítání a odčítání (některé z těchto úloh jsou

inverzně formulované). Výzkum je z hlavní části založen na kvalitativní metodologii. Následuje analýza didaktických testů a rozhovor s vybranými žáky. Bylo také provedeno porovnání učebnic od nakladatelství FRAUS (dle prof. Hejného) a ALTER z hlediska četností výskytu inverzně formulovaných úloh a použitých ilustrací. Po shrnutí výsledků a zjištění nejčastěji objevujících se chyb je v závěru výzkumné části diplomové práce navrhnutý postup, který by mohl napomoci k reedukaci žakovských chyb.

2 Vymezení pojmu slovní úloha

Během života se člověk setkává s mnoha informacemi, které mu jsou sděleny slovně. Během školních let je velmi důležité, aby si učivo důsledně osvojil, zvláště pak v hodinách matematiky, kdy získané poznatky a dovednosti využívá kromě jiného k matematizaci reálných stavů a dějů. V matematice jsou tyto každodenní situace, mnohdy zjednodušeně, popisovány především ve slovních úlohách.

V literatuře je možné nalézt různé definice pojmu slovní úloha. Vysvětlení tohoto pojmu není sjednocené. Přesto je ale možné říci, že autoři se ve vymezení tohoto slovního spojení mnoho neliší, jedná se spíše o drobné rozdíly, podle toho, které matematické problémy pod pojem zařazují.

Blažková et al. (2002, str. 4) uvádí: „Slovními úlohami rozumíme takové úlohy, ve kterých je souvislost mezi danými a hledanými údaji vyjádřena slovní formulací.“ Podobně jako Blažková et al. vysvětluje pojem i Vyšín (1962, str. 104): „Slovními úlohami bývají zpravidla nazývány úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoli matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešení aritmetické nebo algebraické úlohy.“

Na rozdíl od těchto autorů se jiní autoři domnívají, že slovní úlohou se rozumí takový úkol, který má vztah k určité reálné situaci. „Slovní úlohy jsou úlohy, v nichž je obvykle popsána určitá reálná situace (např. s ekonomickou, přírodní, fyzikální, společenskou či jinou tematikou) a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky“ (Kuřina, 1990, str. 61). Podobně Divíšek uvádí: „Slovní úlohou rozumíme obvykle úlohu z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace, která vyúsťuje v problém. Předložený problém je možné řešit buď v realitě, nebo matematicky“ (Divíšek, 1989, str. 123), nebo Hejný: „Termínem slovní úloha rozumíme matematickou úlohu, která vyžaduje jazykové porozumění a přesah do životní zkušenosti“ (Hejný, 2003, str. 3 – přeloženo autorkou diplomové práce).

Podle těchto autorů tedy do slovních úloh nezapadá například zadání matematického úkolu: „Najdi rozdíl mezi největším a nejmenším násobkem pěti.“¹

Já ve své diplomové práci vycházím z vymezení Hejného. Slovní úlohy vnímám primárně jako úlohy matematické, které jsou zasazeny do reálné situace.

2.1 Didaktické funkce slovních úloh

Slovní úlohy jsou zařazovány podle RVP ZV do očekávaných výstupů již v prvním období:

„žák

M-3-1-01 používá přirozená čísla k modelování reálných situací, počítá předměty v daném souboru, vytváří soubory s daným počtem prvků

...

M-3-1-05 řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace“ (Ministerstvo školství, 2021, str. 31).

Jeden z důvodů, proč by měly slovní úlohy tvořit významnou část učiva, je možné číst například od Blažkové et al. (2002):

Řešení slovních úloh má velký vliv na rozvoj myšlení žáků, jejich pozornosti a představivosti. Řešení slovních úloh má při vhodném využití značný výchovný dosah. Na úlohách se hlouběji objasňují a konkretizují základní matematické pojmy. Při řešení slovních úloh se upevňují početní návyky a uvědomělé používání základních početních operací. Řešení slovních úloh připravuje žáky k využívání matematiky v praktickém životě (str. 4).

¹ Tato úloha i veškeré další úlohy jsou mnou vytvořené. Pokud je tomu jinak, uvádím autora.

Novotná (2004) citovala argument zahraničních autorů Bluma a Nisse (1991):

Slovní úlohy jsou vhodným prostředkem pro rozvíjení obecných kompetencí žáků a jejich postojů k matematice, umožňují žákům „vidět a posuzovat“ nezávisle, analyzovat a porozumět použití matematiky, rozvíjejí schopnost žáků aktivovat matematické znalosti a dovednosti v mimomatematických situacích, pomáhají žákům při poznávání, porozumění a uchopování pojmů, metod a výsledků matematiky (str. 368).

Je tedy zřejmé, že za cíl slovních úloh se velmi často považuje použití naučeného učiva v běžném životě. Zajisté hrají slovní úlohy důležitou roli ve školním vzdělávání, protože svou spjatostí s běžným životem připravují žáka na každodenní situace. Je ale důležité si uvědomit, nakolik reálné jsou situace popsány slovními úlohami.

Ačkoli se ale může zdát například slovní úloha: „*Eliška rovnala knížky do knihovničky. Obrázkových knížek měla 67. Knižek bez obrázků bylo o 50 méně. Kolik bylo knížek bez obrázků?*“ (Eichlerová et al., 2020, str. 7) jako úloha z běžného života, je pravděpodobnější, že při zjišťování počtu knížek bez obrázků by ve skutečnosti bylo použito jednoduše počítání po jedné.

Naproti tomu v dobře postavených matematických projektech je situace odlišná. Žáci většinou sami formulují otázky i úlohy, které jsou nezbytné k vyřešení projektového záměru. Jako příklad je níže uveden námět na projekt z učebnice Svět čísel a tvarů (Hošpesová et al., 1998, str. 90).

Obrázek 1
Projekt – zdravá výživa a cvičení

Matematika, zdravá výživa a cvičení – projekt

Množství kilokalorií v potravinách		
Potravina	množství	kilokalorií
máslo	1 porce	100
houska	1 kus	135
chléb	1 krajíc	200
kobliha	1 kus	386
müsli	1 šálek	100
džus	1 sklenice	135
tučné mléko	1 sklenice	160
jogurt netučný	150 g	110
vajíčko	1 ks	80
čokoláda	100 g	540



Snídám většinou krajíc chleba s máslem, vajíčko a sklenici mléka.



Snídám šálek müsli, jogurt a džus.



Většinou nesnídám. Vezmu si jen kousek čokolády nebo bonbony.



Nejraději mám koblihy a mléko.

• Které děti snídají zdravě? Jakou kalorickou hodnotu mají jejich snídaně?

Zdroj: (Hošpesová et al., 1998, str. 90)

Jelikož si žáci mohou všimnout spojitostí mezi realitou a matematickou úlohou, mohou být motivováni k řešení problému, jelikož vědí, že tuto dovednost budou v životě potřebovat.

3 Fáze řešení slovní úlohy

Při postupu řešení slovní úlohy byly různými odborníky popsány a pojmenovány různé fáze řešení. Některé z těchto kroků, které vedou k vyřešení slovní úlohy, může žák jako řešitel vyřešit velmi rychle, téměř nepozorovatelně, či je dokonce úplně přeskočit, další z nich mohou probíhat opakovaně, žák se k nim může vracet.

Níže je jako první uvedené rozdělení z dnes již klasické knihy *How to solve it* G. Pólya (2004)². Pólya postup řešení sepsal do sledu návodných pokynů a otázek, které si má řešitel v průběhu řešení úlohy klást, a které mu mohou v procesu napomoci.

Rozděluje řešení do 4 hlavních částí:

1. Porozumění úloze (*understanding the problem*);

Během této fáze se řešitel snaží co nejvíce porozumět zadání slovní úlohy. Klade si otázky typu: Co nevím? Co hledám? Co vím? Jaké jsou podmínky řešení? Základní pokyny jsou typu: Vše si označ. Nakresli si náčrt.

2. Návrh plánu (*devising a plan*);

V této části řešitel navrhne postup, kterým bude danou úlohu řešit. Pokládá si otázky typu: Setkal ses podobnou úlohou již dříve? Viděl jsi někdy příbuznou úlohu? Uměl bys nějakým způsobem přeformulovat tuto úlohu?

3. Provedení plánu (*carrying out the plan*);

Cílem této fáze je dospět k výsledku. Řešitel postupuje podle plánu, který si již dříve připravil a současně si ho ověřuje.

4. Kontrola (*looking back*);

Součástí poslední fáze je ověření ze strany řešitele, jestli obdržel požadovaný výsledek, zda byly splněny podmínky zadání a jestli dokáže výsledek, který získal, nebo postup, využít ku prospěchu při řešení jiné úlohy (Pólya, 2004).

² V českém překladu vyšlo v roce 2004, první vydání je již z roku 1945.

Fáze řešení naznačuje ve své práci také Kuřina (1990):

Z jistého hlediska je matematika řešením úloh. Jsou-li to úlohy z nematematického světa, je přitom významné učit žáky modelovat příslušné jevy matematickými prostředky (např. rovnicemi, vzorci, funkcemi, grafy, schémata, ...) a pomocí nich odpovídající úlohy řešit. Vlastní matematická část celkového řešení úlohy je nezávislá na původním obsahu. Těžištěm této fáze je použití formálních matematických postupů. Neodmyslitelnou složkou celkového řešení je proto posouzení adekvátnosti, smysluplnosti či přijatelnosti matematického řešení z hlediska původního zadání, z hlediska skutečného obsahu (str. 74).

Novotná (2000) rozdělila fáze řešení slovní úlohy do tří hlavních etap:

1. „**Etapa uchopování**, která obsahuje:

- a. uchopování všech objektů a vztahů a identifikaci těch, které se týkají řešené situace, a eliminace těch, které jsou „navíc“;
- b. hledání a nalezení všech vztahů, které se týkají řešitelského procesu;
- c. hledání a nalezení sjednocujícího pohledu;
- d. získání celkového vhledu do struktury problému“ (str. 21).

V této části řešení je především důležité porozumění textu úlohy. To je spjato s tím, jak dobře je žák schopen číst zadání úlohy s porozuměním a poté rozpoznat předmět otázky úlohy a zadané údaje. Zadané údaje pak rozliší na ty, které jsou nepostradatelné k výpočtu, a na ty, které jsou zadané navíc. Žák by také měl věnovat velkou pozornost rozboru zadání slovní úlohy a během něj přijít na to, které údaje má přímo zadané a které musí vypočítat (Novotná, 2000).

2. „**Etapa transformace** odhalených vztahů do jazyka matematiky a vyřešení odpovídajícího matematického problému“ (Novotná, 2000, str. 21).

Novotná (2000) uvádí, že v této etapě jde především o matematizaci reálné situace, odhadnutí výsledku, což je často podstatné pro správné vyřešení úlohy, a následné řešení matematické úlohy.

3. „**Etapa návratu** do kontextu zadání úlohy“ (Novotná, 2000, str. 21).

V poslední části postupu řešitel ověří, jestli řešení, na které přišel, je správné a porovná ho s kontextem úlohy. Následně provede zkoušku správnosti. Zde Novotná (2000) rozlišuje dva typy zkoušek správnosti. V první zkoušce žák nejdříve ověří správnost vyřešení matematického modelu (matematické úlohy) – matematická zkouška. Poté vykoná tzv. kontextovou zkoušku. V této zkoušce správnosti zkontroluje matematizaci slovní úlohy, tzn. zkontroluje správné vytvoření matematického modelu, a splnění podmínek, které byly dány kontextem slovní úlohy.

Odvárko et al. (1990) rozdělují fáze řešení také na tři části, ovšem trochu rozdílné od Novotné.

1. **Matematizace slovní úlohy**

V této části se jedná o „přechod od slovní úlohy s nematematickým obsahem k matematické úloze, která má pomoci k vyřešení původní úlohy“ (Odvárko et al., 1990, str. 217).

Odvárko et al. (1990) říkají, že pokud budeme řešit slovní úlohu, ve které je nematematicky popsána nějaká reálná situace, v této fázi postupu ji matematizací převedeme na matematickou slovní úlohu, tím pádem vytvoříme tzv. matematický model reálné situace.

2. **Řešení matematické úlohy**

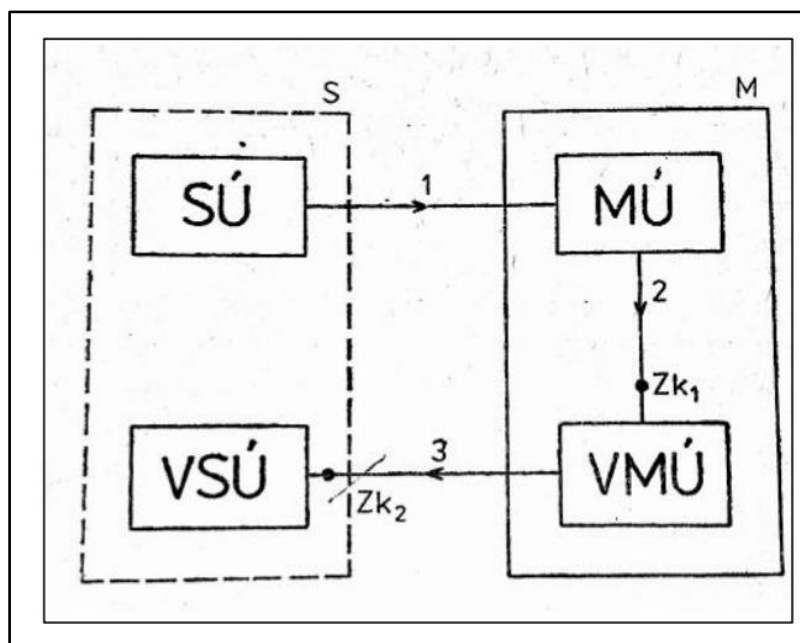
V druhé části postupu řešitel provede příslušný výpočet, pomocí kterého získá výsledek zadané matematické úlohy. Odvárko et al. (1990) podobně jako Novotná zdůrazňují: „Před konečným stanovením výsledku matematické úlohy (VMÚ) je buď logicky nutné, nebo alespoň takticky vhodné provést zkoušku správnosti řešení matematické úlohy“ (str. 228).

3. **Interpretace výsledku matematické úlohy v původní situaci**

Na rozdíl od kroku „matematizace“ se v této části naopak snažíme převést výsledek, který jsme získali pomocí výpočtu, do odpovědi na slovní úlohu, tzn. do kontextu s nematematickým obsahem. „Před konečným stanovením výsledku slovní úlohy (VSÚ)

je nutné posoudit, zda výsledek matematické úlohy po své interpretaci ve výchozí situaci splňuje všechny podmínky v ní obvyklé (tj. i ty samozřejmé, jež nebyly v textu úlohy uvedeny)“ (Odvárko et al., 1990, str. 229).

Obrázek 2
Schéma – fáze postupu řešení slovní úlohy



Zdroj: (Odvárko et al., 1990, str. 228)

O tvoření matematického modelu reálné situace Hejný udává, že „modelování je nejnižší, ale metodicky nejdůležitější hladina jazyka algebry. Umět modelovat znamená chápat smysl a význam metody. Modelování se používá při většině slovních úloh (hlavně rovnic)“ (Hejný, 1990, str. 144 – přeloženo autorkou diplomové práce).

Pro potřeby této diplomové práce budu dále vycházet z následující struktury postupu řešení:

1. Seznámení s úlohou a rozbor úlohy;
2. Vytvoření matematického modelu (obrázek, příklad, náčrt, rovnice), tzv. matematizace;
3. Řešení matematického modelu – výsledek;
4. Kontrola správnosti (výsledku, postupu, matematizace);
5. Interpretace (odpověď).

4 Reprezentace slovních úloh

„Vizualizace počtu je podstatnou složkou utváření prvních představ o přirozených číslech a v tomto procesu jsou činnosti žáků nezastupitelné“ (Kuřina, 2013, str. 5).

Pro správné řešení slovní úlohy je podstatným krokem modelování slovní úlohy, jinými slovy vytvoření reprezentace. Reprezentace může napomoci ke správnému pochopení slovní úlohy a následně i volbě správného postupu při řešení matematického problému. Kuřina (2013) s odvoláním na Brunera shrnuje, že reprezentací můžeme rozumět zastoupení pojmu pomocí určitých výrazových prostředků.

Bruner (1977) rozlišuje reprezentace:

1. enaktivní (činnostní);

- při tomto typu pracujeme s hmotnými objekty;
- např.: prsty na ruce, počítadlo, krokování, tangramy;

2. ikonické (obrazové);

- např. číselné obrazce, náčrty, ilustrace;

3. symbolické (založené na konvenčním vyjádření);

- názvy v různých jazycích;
- např. jazyk algebry, matematické logiky,...

4.1 Ilustrace slovních úloh

Kuřina (2016) v knize *Matematika jako pedagogický problém* cituje Eduarda Čecha, který kdysi vyjádřil podobný náhled jako Kuřina: „Umět úlohu přeložit z řeči slov do řeči obrazů a obráceně, to není spjata jenom s určitou partií učiva, ale s celou podstatou matematiky – ba dokonce s celou podstatou myšlení“ (str. 7).

Ilustraci lze definovat jako jakoukoli obrazově nebo schematicky znázorněnou informaci, která je uvedena u slovní úlohy, ať už např. kresby, fotografie, grafy nebo schémata (Dewolf et al., 2013).

Je důležité říci, že byly rozlišené různé taxonomie ilustrací. Rozdělením do různých typů se zabývali například Berends a Lieshout (2009) nebo také Dewolf et al. (2015).

Elia a Philippou (2004) rozdělili ilustrace do čtyř typů:

1. dekorativní;

- neposkytují žádné informace o řešení problému;

2. reprezentativní;

- představují celý obsah problému nebo jeho část;

3. informační;

- poskytují informace, které jsou nezbytné pro řešení problému;

4. organizační;

- podporují postup řešení a napomáhají pochopit matematické vztahy úlohy, např. pomocí schematických znázornění.

Během několika studií bylo zjištěno, že používání organizačních ilustrací slovní úlohy žákům účinně pomáhá k jejich řešení (Xin, 2019). Naproti tomu u reprezentativních ilustrací nebyly prokázány žádné důkazy o jejich nápomoci při řešení matematických problémů (Hegarty & Kozhevnikov, 1999), (Vicente et al., 2008).

Pro potřeby diplomové práce budu dále vycházet z následující taxonomie obrazových ilustrací:

1. figurativní;

- Jedná se o obrázkové ilustrace, které zobrazují část nebo celou situaci problému, ale neobsahují žádné informace, žádná číselná data týkající se řešení problému.
- Mají pouze dekorativní funkci.

2. informační;

- Obrázkové ilustrace, tabulky a grafy, které obsahují údaje, které jsou potřebné k řešení problému.
- Tyto ilustrace nahrazují text slovní úlohy jako zdroj informací.

3. organizační;

- Jedná se o schematické ilustrace, které představují část nebo celou matematickou strukturu problému takovým způsobem, který umožňuje studentům pochopit matematické vztahy mezi sadami problémů.
- Tyto ilustrace mohou také obsahovat číselná data.

5 Typologie slovních úloh

V současné době existuje v odborné literatuře několik druhů dělení slovních úloh od různých autorů. Slovní úlohy můžeme dělit například podle jejich typu (slovní úlohy o pohybu, o práci,...), podle vstupních dat (zda máme veškeré vstupní údaje, nebo zda máme dokonce některá data navíc,...), podle kontextu slovní úlohy (reálný kontext, familiární,...) (Vondrová et al., 2017).

Následující dělení uvádí Novotná (2000). Toto dělení je dle oblasti matematiky, a to konkrétně na **slovní matematické úlohy** a **slovní úlohy s nematematickým obsahem**. Ve slovních úlohách matematických se bavíme především o číslech jako takových.

Které číslo musíme přičíst k 16, abychom získali číslo 23?

Ve slovních úlohách s nematematickým obsahem je použitý alespoň jeden pojem, který se neřadí do matematické teorie.

Babičce vyrostlo na zahrádce 9 růží. Z toho si 3 růže utrhla do vázy. Kolik růží zbylo babičce na zahrádce?

5.1 Jednoduché slovní úlohy

Jednou ze dvou základních skupin je dle rozdělení od Divíška (1989) skupina jednoduchých slovních úloh. Jednoduché slovní úlohy se řeší za pomoci dvou údajů, které jsou uvedeny v zadání. Z těchto hodnot se výpočtem získá třetí, výsledný údaj.

Tuto skupinu lze ještě dále kategorizovat, a to podle dvou kritérií. Jedním z kritérií je operace, kterou využíváme pro výpočet úlohy. Druhým kritériem je význam, který nám popisuje úloha. Pro přehled se můžeme na rozdělení podívat v následující tabulce.

Tabulka 1
Jednoduché slovní úlohy – schéma

	Spojování a oddělování	Porovnávání
Sčítání a odčítání	Hledání součtu a rozdílu <i>Aditivní 1 (A1)</i>	Úlohy, v jejichž textu se vyskytují slova „o kolik více/méně“ <i>Aditivní 2 (A2)</i>
Násobení a dělení	Hledání součinu a podílu <i>Multiplikativní 1 (M1)</i>	Úlohy, v jejichž textu se vyskytují slova „kolikrát více/méně“ <i>Multiplikativní 2 (M2)</i>

Zdroj: (Divíšek, 1989)

5.1.1 Aditivní slovní úlohy – hledání součtu a rozdílu (A1)

I skupinu slovních úloh na hledání součtu a rozdílu (resp. slovní úlohy A1) je možné ještě dál rozdělit, a to na *aditivní slovní úlohy statické* a *aditivní slovní úlohy dynamické*. Úlohy dynamické popisují situaci, která se nějakým způsobem v čase změní. Naopak statické úlohy popisují situaci, která obsahuje vztah dvou nepřekrývajících se částí a celku, z nich vytvořeného. Situace je „zastavená v čase“, části se liší vlastností, u které se dá jednoznačně rozhodnout, zda ji prvek má nebo nemá (Divíšek, 1989).

Pro lepší představu je níže uveden příklad:

- Dynamická situace:

Petr měl 6 kuliček. Vyhrál další 4 kuličky. Kolik kuliček má Petr po hře?

- Statická situace:

Petr měl 6 kuliček. Několik modrých a 2 byly žluté. Jiné barvy neměl. Kolik měl modrých kuliček?

1. Dynamické situace

V rámci dynamických situací je známo 6 typů různých úloh (Nesher et al., 1982). Nesher et al. (1982) se ve svém výzkumu zabývali vývojem sémantických kategorií pro sčítání a odčítání, jehož výsledkem bylo seřazení typů úloh podle obtížnosti pro žáky. Takto seřazené typy úloh jsou uvedeny v následující tabulce. Některé z těchto úloh obsahují tzv. antisignál (viz kapitola 5.3.1), který je pro přehled vyznačen červenou barvou.

Tabulka 2
A1: dynamické úlohy – schéma

<i>TYP</i>	<i>CÍL</i>	<i>+/-</i>	<i>PŘÍKLAD</i>	<i>MATEMATIZACE</i>
<i>ZMĚNA</i> <i>1</i>	Konečný stav	+	Petr měl 6 kuliček. Vyhrál další 4. Kolik kuliček má Petr po hře?	$6 + 4 = \square$
<i>ZMĚNA</i> <i>2</i>	Konečný stav	-	Petr měl 6 kuliček. 4 kuličky prohrál. Kolik má nyní kuliček?	$6 - 4 = \square$
<i>ZMĚNA</i> <i>3</i>	Změna	-	Petr měl 6 kuliček. Při hře vyhrál a teď má 10 kuliček. Kolik kuliček vyhrál?	$6 + \square = 10$ $10 - 6 = \square$
<i>ZMĚNA</i> <i>4</i>	Změna	-	Petr měl 10 kuliček. Při hře prohrál a teď má 4 kuličky. Kolik kuliček prohrál?	$10 - \square = 4$ $10 - 4 = \square$
<i>ZMĚNA</i> <i>5</i>	Počáteční stav	-	Petr při hře vyhrál 4 kuličky a teď má 10 kuliček. S kolika kuličkami začínal hrát?	$\square + 4 = 10$ $10 - 4 = \square$
<i>ZMĚNA</i> <i>6</i>	Počáteční stav	+	Petr při hře prohrál 6 kuliček a nyní má jen 4. Kolik kuliček měl na začátku?	$\square - 6 = 4$ $6 + 4 = \square$

Zdroj: (Nesher et al., 1982)

2. Statické situace

Pokud se jedná o statické situace, tam Nesher et al. (1982) rozlišuje dvě možné skupiny, a to spojování částí a oddělení jedné části. Příklady slovních úloh z těchto skupin jsou uvedeny v tabulce níže.

Tabulka 3
A1: statické úlohy – schéma

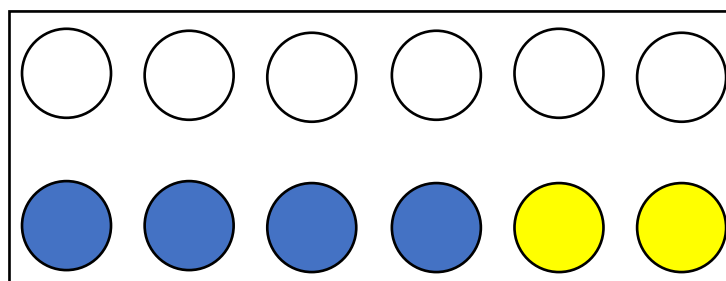
<i>TYP</i>	CÍL	+/-	PŘÍKLAD	MATEMATIZACE
<i>Spojení částí</i>	Celek	+	Petr měl 4 modré a 2 žluté kuličky. Kolik jich měl dohromady?	$4 + 2 = \square$
<i>Oddělení jedné části</i>	Část	-	Petr měl 6 kuliček. Několik modrých a 2 byly žluté. Kolik měl modrých kuliček?	$6 - 2 = \square$
	Část	-	Petr má 6 kuliček, z toho 4 modré a ostatní jsou žluté. Kolik má žlutých kuliček?	$6 - 4 = \square$

Zdroj: (Nesher et al., 1982)

Žáci, obzvláště při prvních setkáních s řešením slovních úloh, nemusí vždy dobře pochopit nadřazenost a podřazenost pojmů. Důsledkem bývá neschopnost rozhodnout, zda zadání úlohy sděluje hodnotu dvou částí nebo částí a celku. Pro lepší pochopení se ze začátku řeší tyto úlohy s žáky grafickým způsobem.

Petr má 6 kuliček, z toho 4 modré a ostatní jsou žluté. Kolik má žlutých kuliček?

Obrázek 3
Znázornění slovní úlohy



Zdroj: (vlastní zdroj, 2022)

K znázornění úlohy lze žáky vést v případě, pokud si neví rady se zvolením početní operace. Pokud ale žák ví výsledek, nemá smysl úlohu znázorňovat, v takovém případě tudíž nevolíme grafický způsob řešení.

5.1.2 Aditivní slovní úlohy 2 – porovnávání (A2)

Mezi aditivní slovní úlohy 2 patří taková zadání, ve kterých se objevují slova „*o několik více, o několik méně*“. Na rozdíl tedy od slovních úloh A1, která vedou k hledání součtu a rozdílu, zadání úloh A2 směřuje k porovnávání (Divíšek, 1989).

Tabulka 4
A2 – schéma

<i>TYP</i>	<i>CÍL</i>	<i>+/-</i>	<i>PŘÍKLAD</i>	<i>MATEMATIZACE</i>
<i>Porovnání rozdílem</i>	Rozdíl	-	Petr má 7 modrých a 3 žluté kuličky. O kolik více má modrých kuliček?	$7 - 3 = \square$
			Petr má 7 modrých a 3 žluté kuličky. O kolik méně má žlutých kuliček?	
<i>Zvětšení o několik</i>	Větší číslo	+	Petr má 4 modré kuličky. Žlutých má o 3 více. Kolik má žlutých kuliček?	$4 + 3 = \square$
<i>Zmenšení o několik</i>	Menší číslo	-	Petr má 7 žlutých kuliček. Modrých má o 3 méně. Kolik má modrých kuliček?	$7 - 3 = \square$
<i>Zmenšení o několik</i>	Menší číslo	-	Petr má modré a žluté kuličky. Modrých má 7, to je o 3 více než žlutých. Kolik má žlutých kuliček?	$7 - 3 = \square$
<i>Zvětšení o několik</i>	Větší číslo	+	Petr má modré a žluté kuličky. Žluté má 4, to je o 3 méně než modrých. Kolik má modrých kuliček?	$4 + 3 = \square$

Zdroj: (Nesher et al., 1982)

5.1.3 Multiplikativní slovní úlohy – hledání součinu a podílu (M1)

Tabulka 5
M1 – schéma

<i>TYP</i>	CÍL	* / :	PŘÍKLAD	MATEMATIZACE
<i>Spojení několika stejně početných částí</i>	Celek	*	Mám 5 kamarádů a každému chci dát 4 bonbony. Kolik bonbonů budu potřebovat?	$5 * 4 = \square$
<i>Dělení podle obsahu</i>	Počet částí	:	Petr rozdál 20 bonbonu. Každému kamarádovi dal 4. Kolik podělil kamarádů?	$20 : 4 = \square$
<i>Rozdělování</i>	Velikost jedné části	:	Petr rozdál 20 bonbonu 5 dětem. Kolik dostal každý?	$20 : 5 = \square$

Zdroj: (Divíšek, 1989)

Ke skupině úloh M1 se řadí i slovní úlohy, ve kterých se hledá počet možností.

Kolik dvojciferných čísel mohu utvořit s číslicemi 1, 5, 8? Číslice mohu/nemohu opakovat.

Kolik existuje cest, kterými se mohu dostat z místa A do místa B přes C, jestliže jsou 4 cesty z C do B a 3 cesty z A do C.

Žáci tyto typy úloh většinou řeší graficky, nebo si pomůžou výčtem všech možností.

5.1.4 Multiplikativní slovní úlohy – porovnávání (M2)

Úlohy typu M2 jsou v podstatě analogické s úlohami A2, s tím rozdílem, že namísto slovních spojení „o několik méně/více“ se objevují pojmy „několikrát méně/více“ (Divíšek, 1989).

Tabulka 6
M2 – schéma

<i>TYP</i>	<i>CÍL</i>	<i>+/-</i>	<i>PŘÍKLAD</i>	<i>MATEMATIZACE</i>
<i>Porovnání podílem</i>	Podíl	:	Petr má 6 žlutých kuliček. Modrých kuliček má 18. Kolikrát méně má žlutých kuliček než modrých?	$18 : 6 = \square$
			Kolikrát více má modrých kuliček než žlutých?	
<i>Zvětšení několikrát</i>	Větší číslo	*	Petr má 4 modré kuličky. Žlutých má třikrát více. Kolik má žlutých kuliček?	$3 * 4 = \square$
<i>Zmenšení několikrát</i>	Menší číslo	:	Petr má 12 modrých kuliček. Žlutých má třikrát méně. Kolik má žlutých kuliček?	$12 : 3 = \square$
<i>Zmenšení několikrát</i>	Menší číslo	:	Petr má modré a žluté kuličky. Modrých má 12, to je třikrát více než žlutých. Kolik má žlutých kuliček?	$12 : 3 = \square$
<i>Zvětšení několikrát</i>	Větší číslo	*	Petr má modré a žluté kuličky. Žluté má 3, to je čtyřikrát méně než modrých. Kolik má modrých kuliček?	$4 * 3 = \square$

Zdroj: (Divíšek, 1989)

5.2 Složené slovní úlohy

Jak již výše bylo zmiňováno – jednoduché slovní úlohy se řeší za pomoci dvou údajů, které jsou uvedeny v zadání. Z těchto hodnot se výpočtem získá třetí, výsledný údaj.

U skupiny složených úloh je postup řešení poněkud složitější. Složená úloha se skládá minimálně ze dvou úloh jednoduchých. Tyto dílčí jednoduché úlohy se řeší jednou početní operací, tzn. provedou se minimálně dva početní výkony. Postupně se tak lze dobrat k výslednému údaji.

5.3 Nestandardní slovní úlohy

Matematické slovní úlohy lze rozdělit na standardní a nestandardní slovní úlohy. U typů úloh, které byly popsány výše, je většinou řešení založeno na známém postupu. Zatímco výše zmíněné úlohy mají pro žáky jasný algoritmus, jelikož se často vyskytují v učebnicích, k vyřešení nestandardní úlohy žák potřebuje nápaditost, tvořivost.

Trch a Zapotilová (1997) ve své práci charakterizují nestandardní úlohy jako úlohy, kde žák nezná způsob řešení, ale může ho objevit v daném čase, nebo zná metodu řešení, ale nespatřuje jí vhodnou pro daný úkol.

Ve většině případů se nestandardní matematické úlohy v hodinách na prvním stupni příliš často nevyskytují. Žáci, jak již bylo výše zmíněno, potřebují najít způsob, kterým úlohu vyřeší, odlišný od známých typových úloh. Nestandardní slovní úlohy se vyskytují v různých matematických soutěžích.

Hejný s Kuřinou (2015) ve své knize popisují proces řešení nestandardních matematických úloh v pěti fázích, které nazývají úrovně:

1. úroveň uchopení situace;
2. úroveň nabývání vhledu do situace úlohy;
3. úroveň hledání a stanovení strategie řešení;
4. úroveň realizace řešení;
5. úroveň interpretace výsledku.

5.3.1 Slovní úlohy s antisignálem

V průběhu života jsou signály v komunikaci využívány velmi často. Stačí, aby se člověk rozhlédl kolem sebe a uvidí mnoho symbolů, které mu dávají nějaký signál. Například písmeno P říká „zde je parkoviště“. Červená na semaforu říká „stůj“. Pokud dirigent zvedne ruku, všichni hráči orchestru zpozorní a čekají na další pokyn. V momentu, kdy žák ve škole zvedne ruku, dává tím vyučujícímu znamení, že chce dostat slovo. Ačkoli to dost možná není na první pohled zřejmé, signály značně urychlují komunikaci.

I v matematice se člověk setká se signály. Místo souvětí: „Najděte všechna čísla z daného oboru, která po dosazení do rovnice za neznámou dají pravdivý výrok.“, jednoduše řekne „řešte rovnici“ a ostatní vědí, co mají dělat. Také se ale může stát, že je signál nositelem omylu nebo nedorozumění (Hejný & Kuřina, 2001).

Slovu (většinou slovesu), které ve slovní úloze poukazuje na některou z početních operací, kterou je třeba použít ke správnému vyřešení úlohy, říkáme **signál**.

Petr má 7 kuliček. Pavel jich má **o 3 více**. Kolik kuliček má Pavel?

Tato slovní úloha říká, že „*Pavel má o 3 více*“. Tento pojem (o 3 více) vede k použití operace sčítání. Matematizací úlohy je výpočet $7 + 3 = 10$. V tomto případě se shoduje pojem, resp. signál, s použitou matematickou operací. Jde tedy o slovní úlohu se signálem.

Jestliže pojem navádí k jiné operaci, než která je nutná pro správné řešení úlohy, nazýváme tento pojem jako **antisignál** (Hejný, 2014).

Petr má 7 kuliček. To je **o 3 méně**, než má Pavel. Kolik kuliček má Pavel?

Podle červeně vyznačené části zadání by se mohlo zdát, že k vyřešení úlohy bude potřeba operace odčítání. Správný výpočet k této úloze ale je $7 + 3 = 10$. K vyřešení bylo tedy nutné provést operaci sčítání, a proto se v tomto případě jedná o slovní úlohu s antisignálem. V některých publikacích se také můžeme setkat s názvem *inverzně formulovaná slovní úloha, úloha s antisignálem* či *nepřímá slovní úloha*.

Ve výše uvedených schématech slovních úloh typu A1, A2, M1 a M2 jsou všechna slova, která jsou antisignální, vyznačena červeně. Mezi inverzně formulované úlohy patří:

1. úlohy obsahující pojem ‚o n-méně‘ řešené sčítáním;

Petr má modré a žluté kuličky. Žluté má 4, to je o 3 méně než modrých. Kolik má modrých kuliček?

2. úlohy obsahující pojem ‚o n-více‘ řešené odčítáním;

Petr má modré a žluté kuličky. Modrých má 7, to je o 3 více než žlutých. Kolik má žlutých kuliček?

3. úlohy obsahující pojem ‚n-krát méně‘ řešené násobením;

Petr má modré a žluté kuličky. Žluté má 3, to je čtyřikrát méně než modrých. Kolik má modrých kuliček?

4. úlohy obsahující pojem ‚n-krát více‘ řešené dělením.

Petr má modré a žluté kuličky. Modrých má 12, to je třikrát více než žlutých. Kolik má žlutých kuliček?

Vondrová et al. (2019, str. 261) uvádí, že: „slovní úlohy s antisignálem bývají považovány za velmi náročné, neboť odhalení antisignálu vyžaduje dobré porozumění jazykové vrstvě slovní úlohy a dobrou představu popisované situace.“

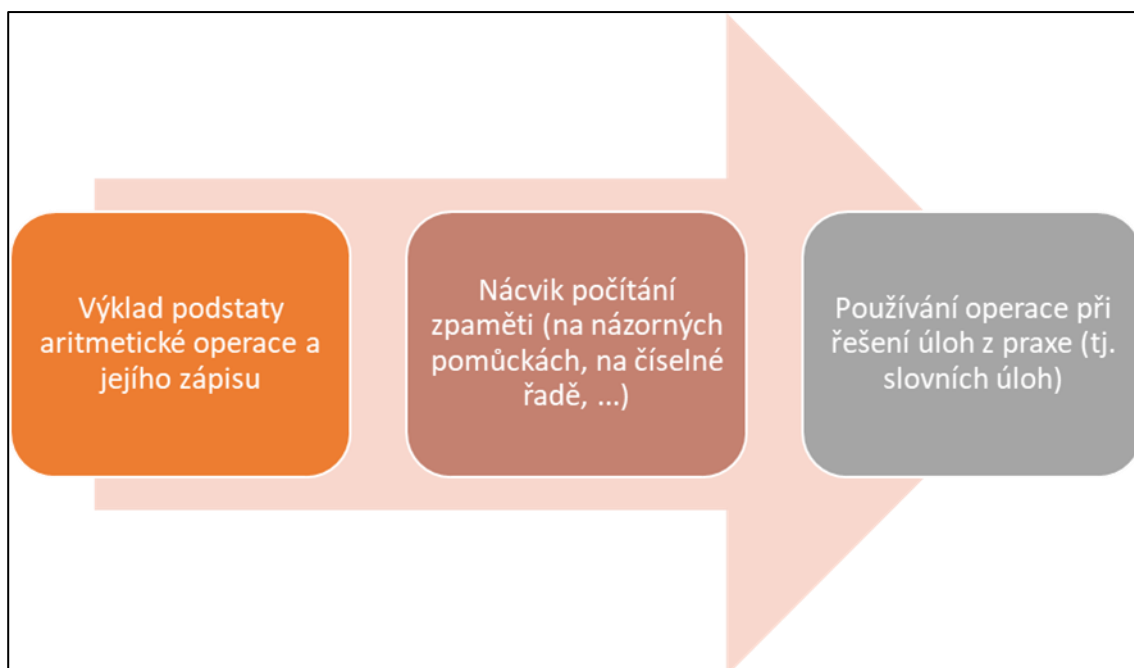
6 Metodické přístupy k řešení slovních úloh

6.1 Řešení jednoduchých slovních úloh

Jednoduché slovní úlohy se řeší pomocí jednoho výpočtu. Problémem je zjistit, kterou aritmetickou operaci je nutné použít. Ve starších učebnicích se při probírání operace postupovalo zhruba ve třech krocích (viz obr. 4). V určitém období se ve škole pracovalo s jednou operací, tj. žáci věděli, že právě tato operace bude většinou úlohu řešit. Obtíže nastaly až ve chvíli, kdy bylo probraných více aritmetických operací.

Obrázek 4

Schématické znázornění probírání aritmetické operace zaměřené na automatizaci spojů

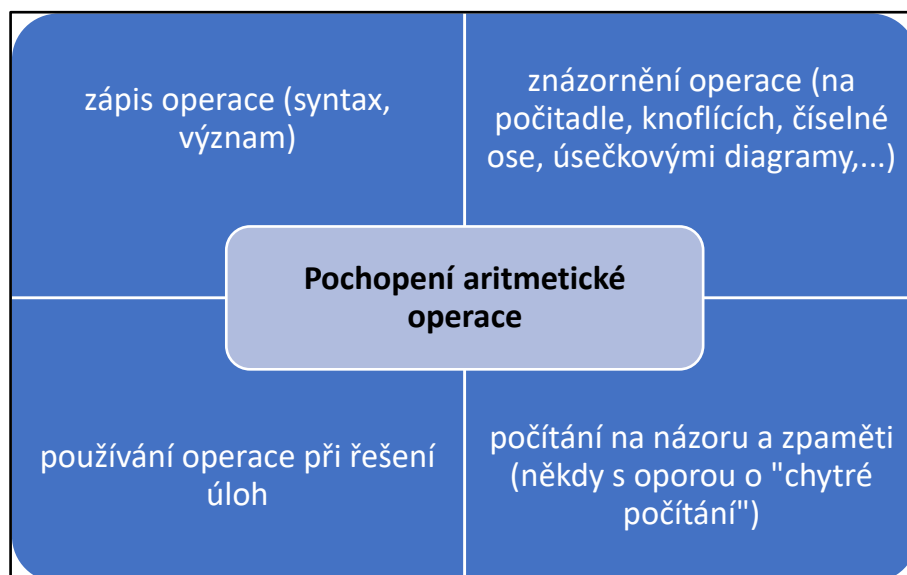


Zdroj: (vlastní zdroj, 2022)

V současnosti se domníváme, že součástí pochopení aritmetické operace je počítání z paměti a různé reprezentace operace. Ty mohou mít povahu rozmanitých znázornění (skupinek předmětů, obrázků, úseček, obdélníků, grafů, schémat), ale i popisu a obrázků reálných situací. Pochopení aritmetické operace není lineární proces, ale spíše matice různých úloh, které s operací provádíme (schematicky na obr. 5). Propojování různých

typů úloh a reprezentací operace vytváří porozumění. A bez porozumění nelze operaci používat, tj. ani řešit slovní úlohy.

Obrázek 5
Schéma pochopení aritmetické operace



Zdroj: (vlastní zdroj, 2022)

7 Výzkumné šetření

7.1 Cíle výzkumu a výzkumné otázky

Jak bylo naznačeno v předchozím textu, řešení slovních úloh je obtížnou částí matematiky na 1. stupni ZŠ i v dalším vzdělávání. Záměrem práce je přispět k metodice řešení slovních úloh (vedoucí k početní operaci sčítání a odčítání) zjištěním, co žákům brání v úspěšné matematizaci. Zvláštní skupinu tvoří tzv. inverzně formulované úlohy, resp. úlohy s antisignálem (Hejný & Kuřina, 2001). Zaměřila jsem se na zjištění, zda se žáci při řešení těchto slovních úloh orientují podle tzv. signálních slov.

Vzhledem ke skutečnosti, že v této oblasti neexistuje mnoho literatury, hlavní design výzkumného šetření jsem koncipovala jako kvalitativní, ale jako triangulaci³ uvádím i data kvantitativní.

Zaměřila jsem se na zjištění, jak žáci řeší tento typ úloh, poznáním příčin žakovských chyb. Zaměření diplomové práce jsem rozpracovala do následujících cílů:

1. Mým hlavním cílem bylo zjistit, jakým způsobem žáci postupují v řešení úloh s antisignálem.
2. Pokud je jejich řešení chybné, co je příčinou chyby?

Pro podrobnější zmapování nácviku řešení tohoto typu úloh, jsem se zaměřila ještě na další zjištění, která považuji za vedlejší cíle výzkumu:

1. Je pozornost věnovaná těmto úlohám při výuce matematiky dostatečná?
2. Existuje prověřená metodika (zejména znázornění), která pomáhá žákovi úlohu správně vyřešit?

³ Švaříček et al. (2007, str. 203) uvádí, že „triangulace je postup pro doplnění či obohacení výsledků, kdy jednotlivé metody jsou stavěny proti sobě s cílem maximalizovat validitu sebraných dat.“

Dle výše uvedených cílů mého výzkumného šetření jsem stanovila následující výzkumné otázky:

Výzkumná otázka č. 1: „*Jak žáci postupují při řešení inverzně formulovaných slovních úloh?*“

Výzkumná otázka č. 2: „*Jaké kroky by mohly napomoci k řešení inverzně formulovaných slovních úloh?*“

7.2 Pojetí a etapy výzkumu

Šetření, které jsem provedla, je kvalitativně-kvantitativního rázu. Hlavním předmětem jsou žákovská řešení inverzně formulovaných slovních úloh.

1. Vstupní test

- Před hlavní částí výzkumu jsem provedla vstupní test. Tento test jsem zadala ve stejných třídách jako hlavní část výzkumu a měl ověřit, zda žáci z vybraných tříd nemají výrazné rozdíly v matematických znalostech a dovednostech, které by mohly zkomplikovat další průběh výzkumu.

2. Analýza učebnic

- Jednu z částí jsem věnovala analýze učebnic od nakladatelství Alter a Fraus. Učebnice jsem porovnála z hlediska četnosti slovních úloh, četnosti inverzně formulovaných slovních úloh a použitých ilustrací.

3. Didaktický test a rozhovor s vybranými žáky

- Hlavní část šetření je tvořena analýzou žákovských řešení inverzně formulovaných slovních úloh. Po vyhodnocení výsledku testů jsem provedla rozhovor s vybranými žáky pro objasnění jejich postupu řešení úlohy.

4. Návrh reedukace

- V poslední části jsem díky shrnutí výsledků testu a zjištění nejčastěji objevovaných chyb navrhla postup, který by mohl napomoci k porozumění řešení inverzně formulovaných slovních úloh a k reedukaci žákovských chyb.

7.2.1 Výzkumný vzorek

Vstupní test i hlavní část výzkumu jsem provedla na dvou městských základních školách. Vstupního testu se účastnilo celkem 109 žáků ve věku 6–7 let z šesti druhých tříd – tři třídy ze základní školy A (celkem 52 žáků, z toho 25 chlapců a 27 dívek) a tři třídy ze základní školy B (celkem 57 žáků, z toho 22 chlapců a 35 dívek).

Hlavní část šetření probíhala na vzorku stejných šesti tříd. Při zadání hlavního testu nebyla na školách taková nemocnost, proto se testu účastnilo více žáků. Celkem jsem test hlavní části výzkumu zadala 118 žákům, 55 žákům ze základní školy A (z toho 34 chlapců a 21 dívek) a 63 žákům ze základní školy B (z toho 30 chlapců a 33 dívek).

Jsem si vědoma toho, že můj vzorek by nebyl pro kvantitativní výzkum reprezentativní. Ale vzhledem k faktu, že jsem se ve svém výzkumu zaměřila především na postup, jak žáci inverzně formulované úlohy řeší, tudíž je výzkum z hlavní části kvalitativní, nebyl tento fakt pro mou práci překážkou. Kvantitativní data budou použita jen pro dokreslení obrazu.

7.3 Vstupní test

Cílem vstupního testu bylo ověření, zda jsou žáci z vybraných tříd v matematických znalostech a dovednostech zhruba vyrovnání.

7.3.1 Příprava vstupního testu

K vytvoření úloh pro pilotní test jsem se inspirovala úlohami v učebnici Svět čísel a tvarů (Divíšek et al., 2002). První slovní úlohu jsem vytvořila. Dvě úlohy z testu nebyly inverzně formulované. Třetí úlohu považuji za inverzně formulovanou.

7.3.1.1 Úloha 1

V autobuse cestuje 16 osob. 7 lidí vystoupí. Kolik osob pokračuje v jízdě?

Úloha 1 je úloha na změnu ubíráním (*změna 2* – charakteristika je podrobněji uvedena v tomto textu na str. 24). Volba operace není pro žáky ničím komplikovaná. Sloveso *vystoupí* v popisu změny a slovo *pokračuje v jízdě* v otázce evokují odčítání. Schematicky lze znázornit:

Obrázek 6
Schéma – vstupní test, úloha 1

výchozí stav	změna	konečný stav
16 osob v autobuse	7 lidí vystoupí	počet osob pokračující v jízdě

Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

7.3.1.2 Úloha 2

V dílně pracují 4 muži a 5 žen. Kolik lidí pracuje v dílně?
(Divíšek et al., 2002, str.10)

Úloha 2 popisuje spojení dvou částí v celek.

Obrázek 7
Schéma – vstupní test, úloha 2

4 muži	5 žen
<i>Lidé v dílně</i>	

Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

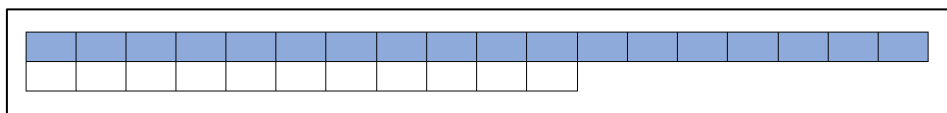
7.3.1.3 Úloha 3

V sušičce na ovoce se jablka suší 11 hodin a švestky 18 hodin. O kolik hodin déle se suší švestky než jablka? (Divíšek et al., 2002, str. 15)

Úloha 3 je založena na porovnání dvou kvantit. Může být znázorněna např. dvěma řadami čtverečků, které napovídají operaci odčítání. Znázornění lze považovat za grafické řešení úlohy, protože výsledek je možné zjistit počítáním po jedné. Úlohu považuji za

inverzně formulovanou, protože se nepočítá s čísly v pořadí, jak se v textu objevují. Matematizací úlohy by mohla být následující rovnice: $11 = 18 - r$ (rozdíl). Antisignál text úlohy neobsahuje.

Obrázek 8
Schéma – vstupní test, úloha 3



Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

Test jsem před zadáním testovala na několika žácích, abych ověřila, jestli jsou úlohy pro žáky srozumitelné. Žádné změny jsem neprováděla.

7.3.2 Realizace vstupního testu

Test jsem provedla 8. prosince 2022. Vstupního testu se účastnilo celkem 109 žáků ve věku 6–7 let z šesti druhých tříd – tři třídy ze základní školy A (celkem 52 žáků, z toho 25 chlapců a 27 dívek) a tři třídy ze základní školy B (celkem 57 žáků, z toho 22 chlapců a 35 dívek).

Na obou základních školách jsem test zadala v hodině matematiky přímo žákům bez zvláštních instrukcí. Žáky jsem upozornila na podpis křestního jména a dále pracoval každý individuálně dle zvyklosti.

Po odevzdání vyplněných testů jsem provedla analýzu výsledků jednotlivých slovních úloh, vyhodnocení úspěšnosti žáků v každé úloze.

7.3.3 Vyhodnocení vstupního testu

První úlohu zvládlo ze základní školy A úspěšně 51 žáků z celkového počtu 52 žáků, tj. 98% úspěšnost. Ze základní školy B zvládlo úspěšně první úlohu 56 žáků z celkového počtu 57 žáků, tj. také 98% úspěšnost.

S druhou úlohou ve vstupním testu neměl žádný žák problém a úspěšnost na obou školách byla 100%.

Na třetí úlohu uvedlo správnou odpověď ze základní školy A 36 žáků z celkového počtu 52 žáků, tj. 69% úspěšnost. Na základní škole B odpovědělo správně 48 žáků z celkového počtu 57 žáků, tj. 84% úspěšnost.

Třídy byly vyrovnané v úspěšnosti při řešení úloh, které měly standardní zadání. Lišily se ale v úlohách na porovnávání. Je možné konstatovat, že B má více zkušeností, žáci jsou flexibilnější. Jak uvádím níže v textu, učebnice Fraus obsahují znatelně více úloh na porovnávání než učebnice Alter.

7.4 Analýza učebnic

Učebnice jsou nedílnou součástí výuky. Každá škola má možnost zvolit si učebnici, podle které bude učitel své žáky vyučovat. Při tomto výběru by rozhodně neměly být opomíjeny vlastnosti učebnice, jako jsou didaktická vybavenost, vhodnost a úroveň, struktura obsahu, ilustrace apod. Dle Mullise et al. (2020) mají totiž učebnice matematiky do určité míry vliv na výkony studentů v mezinárodních srovnávacích testech a podle Verschafela et al. (2022) má na výkony studentů určitý vliv také ilustrace, která doprovází daný matematický problém.

7.4.1 Příprava analýzy učebnic

Jak již byla řečeno: vliv učebnice na výsledky žáků je empiricky prokázán. Z toho důvodu jsem se rozhodla doplnit své šetření o analýzu učebnic z hlediska počtu slovních úloh a slovních úloh inverzně formulovaných. Slovní úlohy jsem roztřídila podle typologie, která je uvedena na straně 24–27, abych zjistila, se kterými typy úloh se žáci setkávají v hodinách matematiky často a s kterými zřídka.

Na porovnání učebnic jsem vybrala učebnice dvou nakladatelství. První sadou jsou učebnice nakladatelství Alter, protože podle těchto učebnic probíhá výuka na základní škole A, kde v současnosti pracuji a zároveň zde probíhala také hlavní část výzkumu. Druhou sadou učebnic jsou učebnice z nakladatelství Fraus označené jako nová generace (Bomerová & Michnová, 2019). Ty jsem zařadila do analýzy, protože jsou inspirovány pojetím matematiky prof. Milana Hejného. Slovní úlohy s antisignálem jím

byly identifikovány (Hejný, 2014) a studovány. Řadu učebnic od nakladatelství Fraus zároveň také používají na základní škole B, kde jsem sbírala druhou polovinu dat k hlavní části výzkumu.

Analýzu jsem orientovala konkrétně na učebnice matematiky pro druhé třídy vzhledem k tomu, že se práce orientuje na slovní úlohy řešené sčítáním a odčítáním.

Od nakladatelství Alter se jedná o čtyřdílnou sadu učebnic, konkrétně:

- MATEMATIKA – Sčítání a odčítání do 20 s přechodem desítky; 4/B (Landová et al., 2019);
- MATEMATIKA – Numerace do 100, sčítání a odčítání bez přechodu desítky; 5 (Landová et al., 2020);
- MATEMATIKA – Sčítání a odčítání s přechodem desítky do 100, násobení a dělení 2, 3, 4; 6 (Eichlerová et al., 2020);
- MATEMATIKA – Příprava na násobení a dělení 5, 6, 7, 8, 9, 10; 7 (Eichlerová et al., 2015).

Od nakladatelství Fraus se jedná o dvoudílnou sadu učebnic, konkrétně:

- Matematika 2/1 – dle prof. Hejného – nová generace (Bomerová & Michnová, 2019);
- Matematika 2/2 – dle prof. Hejného – nová generace (Bomerová & Michnová, 2019).

7.4.2 Realizace analýzy učebnic

Učebnice jsem porovnala z hlediska četnosti slovních úloh, z hlediska četnosti slovních úloh inverzně formulovaných. Slovní úlohy z uvedených učebnic jsem poté ještě roztřídila podle typologie, která je uvedena na straně 24–27, abych došla ke zjištění, se kterými typy úloh se žáci setkávají v hodinách matematiky nejčastěji, se kterými zřídka a se kterými vůbec.

Dále jsem také porovnávala použité ilustrace u slovních úloh, vzhledem k tomu, že jak zmiňuji již výše na straně 20, určitý typ může napomoci pochopit vztahy popsané slovní úlohou.

7.4.2.1 Alter

Nakladatelství

Nakladatelství Alter působí na trhu učebnic a učebních pomůcek od roku 1990. Pro 1. stupeň základní školy nabízí Alter úplnou řadu učebnic. Dále je možné v jejich sortimentu najít elektronické učebnice a pracovní sešity, u vybraných titulů interaktivní verze učebnic, interaktivní publikace pro tablety, výukové programy a demonstrační pomůcky pro žáky. Nakladatelství Alter (2020) se na svých webových stránkách prezentuje takto: „*Při tvorbě materiálů se řídíme hesly: zkušenost, kvalita, srozumitelnost a vstřícnost*“.

Všechny učebnice od nakladatelství Alter mají v současné době platné schvalovací doložky MŠMT.

Učebnice

Nakladatelství Alter vydalo pro 1. a 2. ročník vždy 4 díly pracovní učebnice. Pro 1. ročník díly 1/A – 4/A, pro 2. ročník 4/B – 7/B. Řada učebnic matematiky pro první dva ročníky 1. stupně ZŠ tohoto nakladatelství má osm dílů označené číslicemi a písmeny: 1, 2, 3, 4/A, 4/B, 5, 6, 7, z toho díly 1 – 4/A jsou určeny pro první třídu ZŠ a díly 4/B – 7 jsou určeny pro druhý ročník ZŠ.

Úlohy

Celkový počet úloh v řadě pro druhý ročník je 793 úloh, z toho tvoří 169 slovních úloh na operaci sčítání nebo odčítání (díly 6 a 7 obsahují další slovní úlohy řešené početní operací násobení nebo dělení, na které se má práce nezaměřuje, proto jsem je pro své srovnání zanedbala). Ze 169 slovních úloh můžeme 4 úlohy považovat za inverzně formulované z pohledu cíle této diplomové práce, tj. 2 % ze všech slovních úloh.

Tento druh slovní úlohy se objevuje v díle 4/B (Landová et al., 2019, str. 2, úloha 4a):

V přístavišti bylo 9 lodí modrých a 4 žluté. O kolik bylo modrých více než žlutých?

- Při zařazení do typologie, která je uvedena na straně 27, jde o úlohu typu *porovnání rozdílem s antisignálem*. Matematizací úlohy je rovnice: $\square = 9 - 4$. Jako antisignál by mohla působit věta: *O kolik více...?* Slovo *více* by mohlo zdánlivě nabádat k početní operaci sčítání.

Druhou inverzně formulovanou slovní úlohu nalezneme také v díle 4/B (Landová et al., 2019, str. 10, úloha 7c):

Lucce je 12 roků, její bratr je o 8 let mladší. Lucka je o ___ let starší než její bratr.

- Tato slovní úloha dle typologie uvedené na straně 27, spadá také do typu *porovnání rozdílem s antisignálem*. Jedná se o složenou slovní úlohu, kde druhá část úlohy je inverzně formulovaná. Nejdříve musíme zjistit kolik let je bratrovi. Matematizací této části úlohy je rovnice: $\square = 12 - 8$. Poté následuje otázka: „*O kolik je Lucka starší než její bratr?*“ Matematizací úlohy je rovnice: $\square = 12 - 4$. Jako antisignál by mohla působit slova: *O kolik je starší...?* Slovo *starší* by mohlo zdánlivě nabádat k početní operaci sčítání.

Třetí inverzně formulovanou slovní úlohu najdeme v 5. díle (Landová et al., 2020, str. 22, úloha 9):

Děti nasbíraly kaštiny. Z 50 kaštanů vyrobily zvířátka. 7 kaštanů jim zbylo. Kolik kaštanů nasbíraly?

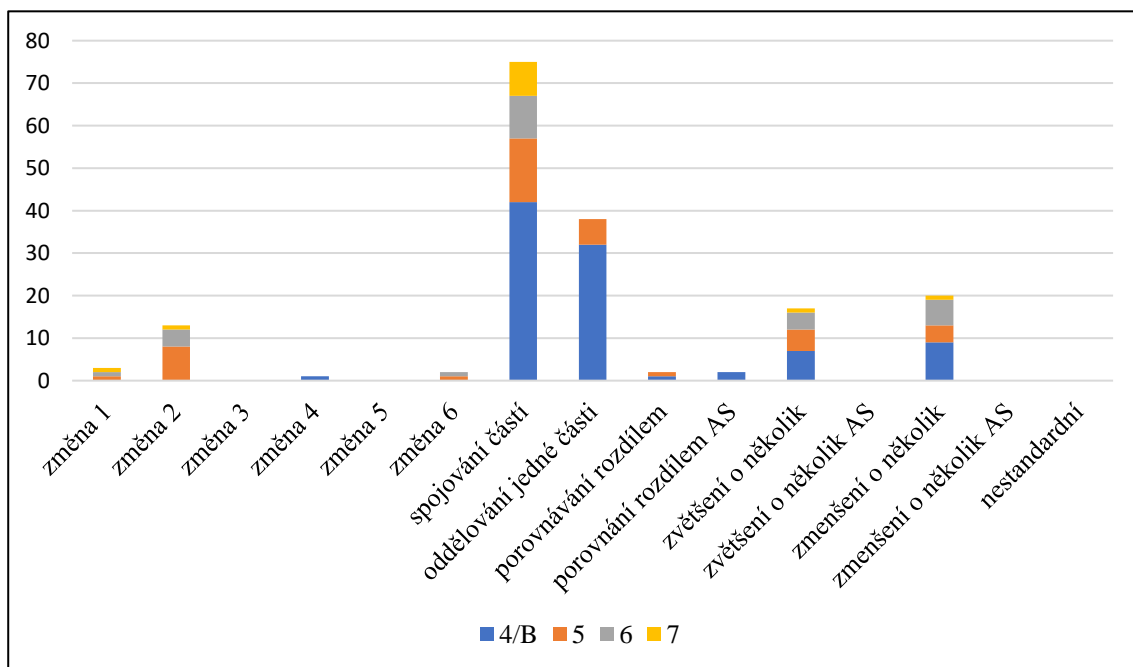
- Při zařazení do typologie, která je uvedena na straně 24, jde o úlohu typu *změna 6*, ptáme se na počáteční stav a řešíme početní operací sčítání. Matematizací úlohy je rovnice: $\square - 50 = 7$. Jako antisignál by mohla působit věta: *7 kaštanů jim zbylo*. Tak bývá často vyjádřen výsledek odčítání.

Čtvrtou a zároveň poslední inverzně formulovanou slovní úlohu nalezneme v 6. díle (Eichlerová et al., 2020, str. 13, úloha 7):

7 jezdců si osedlalo koně a odjelo. Ve stáji zůstalo ještě 18 koní. Kolik koní bylo ve stáji před tím, než odjeli jezdci na vyjížďku? (Vypočítejte společně.)

- I tato úloha je typu *změna 6*, kdy na řešení počátečního stavu použijeme početní operaci sčítání. Matematizací úlohy je rovnice: $x - 7 = 18$. Jako antisignál by mohla působit 1. věta. Slovo *odjelo* by mohlo nabádat k početní operaci sčítání.

Učebnice Alteru jsou bohaté na slovní úlohy. Většina z nich je podle typologie na straně 25 typu *spojování částí*, a to konkrétně 75 slovních úloh. Ve 38 případech se setkáme s typem *oddělování jedné části*, z toho je 32 z nich v díle 4/B (Landová et al., 2019). Jako početnější bych zmínila ještě typy *zmenšení o několik* (20 případů) a *zvětšení o několik* (17 případů). Je tedy zřejmé, že rozmanitostí typů slovních úloh se tato řada učebnic zcela pyšnit nemůže.



Graf 1

Četnost jednotlivých typů úloh – Alter, učebnice matematiky pro 2. ročník ZŠ

Zdroj: (vlastní zdroj, 2022)

Tabulka 7

Analýza typů úloh v učebnicích Alter, učebnice matematiky pro 2. ročník ZŠ

TYP ÚLOHY			DÍL				Celkem:
			4/B ⁴	5	6	7 ⁵	
ADITIVNÍ 1 DYNAMICKÉ	Konečný stav	Změna 1	0	1	1	1	3
		Změna 2	0	8	4	1	13
	Změna	Změna 3	0	0	0	0	0
		Změna 4	1	0	0	0	1
	Počáteční stav	Změna 5	0	0	0	0	0
		Změna 6	0	1	1	0	2
ADITIVNÍ 1 STATICKE	Spojování částí		42	15	10	8	75
	Oddělování jedné části		32	6	0	0	38
ADITIVNÍ 2	Porovnávání rozdílem		1	1	0	0	2
	Porovnávání rozdílem		2	0	0	0	2
	Zvětšení o několik		7	5	4	1	17
	Zvětšení o několik		0	0	0	0	0
	Zmenšení o několik		9	4	6	1	20
	Zmenšení o několik		0	0	0	0	0
NESTANDARDNÍ			0	0	0	0	0

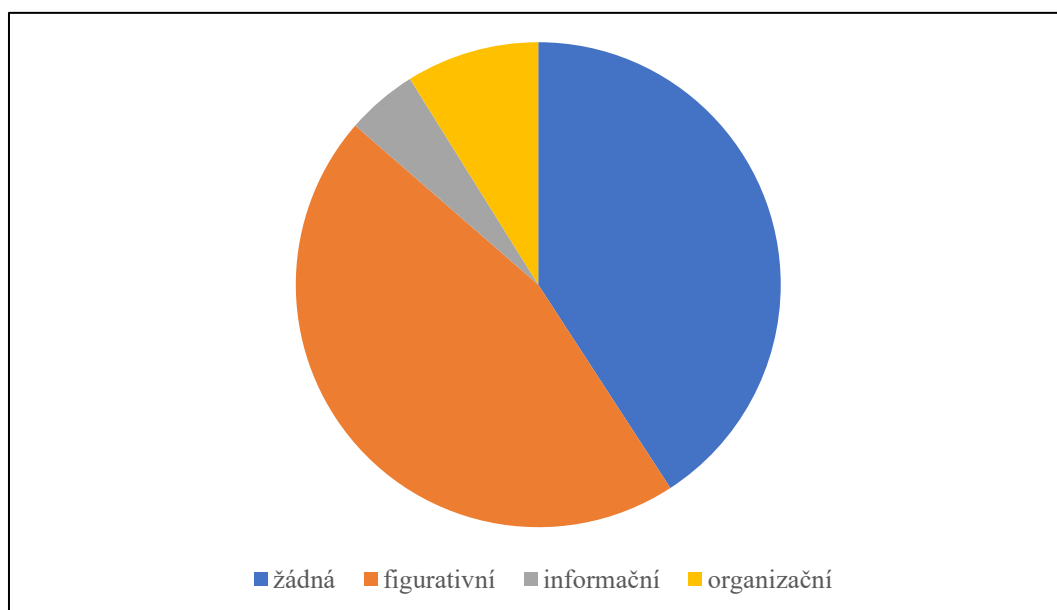
Zdroj: (vlastní zdroj, 2022)

⁴ V díle 4/B je 87 jednoduchých slovních úloh a 6 úloh složených. Složené slovní úlohy jsem rozložila na úlohy jednoduché a ty použila do tabulky.

⁵ V 7. díle jsou 3 jednoduché slovní úlohy a 6 úloh složených. Složené slovní úlohy jsem rozložila na úlohy jednoduché a ty použila do tabulky.

Ilustrace

Při porovnání typů ilustrací jsem zjistila, že ze 169 slovních úloh obsahuje určitý typ ilustrace 100 z nich. O figurativní ilustrace (viz strana 20) se jedná v 77 případech. S informačním typem ilustrace je možné se setkat v 8 případech a organizační typ ilustrace má 15 slovních úloh, z toho 11 v díle 4/B. U inverzně formulovaných slovních úloh jsou použity ve dvou případech figurativní ilustrace a ve zbývajících dvou případech není použita žádná ilustrace.



Graf 2

Typy ilustrací v učebnicích Alter – matematika, 2. ročník

Zdroj: (vlastní zdroj, 2022)

Tabulka 8

Analýza typů ilustrací v učebnicích matematiky Alter – řada pro 2. ročník ZŠ

TYP ILUSTRACE	DÍL				CELKEM
	4/B	5	6	7	
<i>žádná</i>	62	2	3	2	69
<i>figurativní</i>	15	33	22	7	77
<i>informační</i>	5	2	1	0	8
<i>organizační</i>	11	4	0	0	15

Zdroj: (vlastní zdroj, 2022)

Shrnutí

U učebnic nakladatelství Alter oceňuji vysokou úroveň grafického zpracování i uspořádání učiva. Oceňuji také situace, do kterých jsou slovní úlohy zasazeny. Pozitiva vidím i v cyklickém opakování učiva a vracení se k již probrané látce. Obsahují velké množství úloh a jelikož se jejich povaha opakuje, žáci mohou pracovat i individuálně, jelikož snadno pochopí princip úlohy. Jsou vhodné na práci se sešitem, protože u některých úloh je málo místa na zápisy a výpočty.

Cílem slovních úloh se ale bohužel zdá být nácvik postupu počítání, resp. procvičení matematické operace na úkor porozumění matematizaci situace popsané slovní úlohou. O této skutečnosti mě přesvědčuje i často se vyskytující nabádání k povrchovému řešení slovních úloh. Vedle místa, které je v učebnici vyhrazeno pro výpočet, se nachází růžovým písmem rady typu: *o 12 více, musíme...*, *o 7 méně, musíme...*, apod. Řešení slovních úloh pomocí signálních slov může být ale při řešení inverzně formulovaných slovních úloh velmi nešťastné.

Jak jsem již zmiňovala výše, učebnice Alteru jsou bohaté na slovní úlohy. Většina z nich je ale dle typologie na straně 25 typu *spojování částí*, konkrétně 75 slovních úloh. Dalším početným typem jsou úlohy na *oddělování jedné části*, konkrétně 38 slovních úloh, z toho je 32 z nich v díle 4/B (Landová et al., 2019). Početnější skupinou jsou ještě slovní úlohy typu *zmenšení o několik* (20 případů) a *zvětšení o několik* (17 případů). Je tedy zřejmé, že rozmanitostí typů slovních úloh se tato řada učebnic zcela pyšnit nemůže.

Ilustrace jsou v této řadě učebnic využívány hojně. Ze 169 slovních úloh byla ilustrace použita u 100 z nich. 77 ilustrací bylo ale figurativního typu. Sloužily tedy jen jako dekorativní prvek (viz strana 20).

7.4.2.2 Fraus

Nakladatelství

Nakladatelství Fraus má také dlouhou tradici, jelikož na trhu působí již přes 30 let, bylo založeno v roce 1991. Pro 1. stupeň nabízí Fraus dvě různé řady učebnic matematiky. Jedna řada se jmenuje Matematika se čtyřlístkem, druhou řadou je Matematika dle prof. Hejného, kterou jsem si vybrala pro svou analýzu.

Stejně jako Alter i nakladatelství Fraus nabízí elektronické učebnice, pracovní sešity, hybridní výukové materiály a interaktivní online procvičování. Portál Škola s nadhledem, kde je možné najít velké množství online procvičování, patří také nakladatelství Fraus. Toto nakladatelství o sobě na svých stránkách říká: „Vydáváme moderní učebnice a propojujeme je s digitálním světem. Jsme tvůrčí, inovativní a jdeme do toho srdcem. Spolupracujeme s profesionály i učiteli z praxe, sledujeme nové trendy“ (Fraus, 2023).

Všechny učebnice od nakladatelství Fraus mají v současné době platné schvalovací doložky MŠMT.

Učebnice

Frausovské učebnice matematiky pro druhý ročník ZŠ (řada dle prof. Hejného) mají dva díly označené číslicemi 2/1 (1. díl) a 2/2 (2. díl).

Úlohy

Celkový počet úloh v řadě pro druhý ročník je 628 úloh, z toho tvoří 89 slovních úloh na operaci sčítání nebo odčítání (učebnice obsahují další slovní úlohy řešené početní operací násobení nebo dělení, na které se má práce nezaměřuje, proto jsem je pro své srovnání zanedbala). Slovní úlohy jsou v této řadě učebnic formulované v mnoha případech pomocí tabulek (viz obrázek 9). Tyto úlohy jsem rozebrala na jednotlivé kroky, resp. úlohy a ty zařadila do typologie.

Obrázek 9

Autobus

1 Vyřeším autobus.

	A	B	C	D	E
V	0	1	2	3	3
N					0
J		2	4	5	

a) V autobusu se celkem vezlo ____ cestujících.
b) Na zastávce B přibyli v autobusu ____ cestující.
c) Na zastávce D ubyli v autobusu ____ cestující.

Zdroj: (Bomerová & Michnová, 2019, str. 50, úloha 1)

Z 89 slovních úloh se žáci setkávají s inverzně formulovanou slovní úlohou v 7 případech, tj. 8 % ze všech slovních úloh.

Tento druh slovní úlohy se objevuje v 1. díle (Bomerová & Michnová, 2019, str. 34, úloha 1b):

Ze zastávky C do zastávky D jelo o ___ cestujících více než ze zastávky A na zastávku B.⁶

- Dle typologie, která je uvedena na straně 27, jde taktéž o úlohu typu *porovnání rozdílů s antisignálem*, ptáme se *o kolik cestujících jelo více ...?*: $\square = 5 - 2$. Antisignálem může být v této slovní úloze slovo *více*, zdánlivě nabádá ke sčítání, ale matematizací této slovní úlohy je početní operace odčítání.

V 1. díle (Bomerová & Michnová, 2019, str. 50, úloha 1b) se objevuje také druhá inverzně formulovaná slovní úloha:

Na zastávce B přibyli v autobusu ___ cestující.⁷

- Díky typologii na straně 27 lze zjistit, že tato slovní úloha je typu *zvětšení o několik řešené odčítáním*, $\square = 4 - 2$. Antisignálem je v této slovní úloze slovo *přibyli*, zdánlivě žáka může nabádat ke sčítání, ale matematizací této slovní úlohy je početní operace odčítání.

Třetí slovní úlohu s antisignálem lze najít v 1. díle (Bomerová & Michnová, 2019, str. 54, úloha 2b). Zadáním se od druhé inverzně formulované úlohy liší pouze čísla, takže i typem zůstává tato úloha stejná jako třetí zmíněná – *zvětšení o několik řešené odčítáním*.

Na zastávce B přibyli v autobusu ___ cestující.⁸

⁶ K této slovní úloze mají žáci k dispozici tabulku, ve které jsou zaznamenány potřebné údaje o cestujících (kolik cestujících na jednotlivých zastávkách nastoupilo, vystoupilo a kolik cestujících jelo z jedné zastávky na další).

⁷ I tato slovní úloha obsahuje tabulku, kde jsou zaznamenána všechna potřebná data o cestujících (kolik cestujících na jednotlivých zastávkách nastoupilo, vystoupilo a kolik cestujících jelo z jedné zastávky na další).

⁸ I tato slovní úloha obsahuje tabulku, kde jsou zaznamenána všechna potřebná data o cestujících (kolik cestujících na jednotlivých zastávkách nastoupilo, vystoupilo a kolik cestujících jelo z jedné zastávky na další).

V 1. díle (Bomerová & Michnová, 2019, str. 53, úloha 9) je čtvrtá inverzně formulovaná slovní úloha:

Na zastávce ŠKOLA vystoupilo z autobusu 2 cestující a nastoupili 3 cestující. Autobusem pak jelo 6 cestujících. Když autobus přijížděl k zastávce ŠKOLA, bylo v něm ___ cestujících.

- Tato slovní úloha je složená. Rozložením na jednotlivé dílčí kroky vzniknou dvě jednoduché slovní úlohy, přičemž druhá z nich bude inverzně formulovaná. „*Kolik cestujících bylo v autobusu na zastávce ŠKOLA, když na zastávce přibyl 1 cestující a poté jelo autobusem 6 osob?*“
- Při zařazení do typologie, která je uvedena na straně 24, jde o úlohu typu *změna 5*, ptáme se na počáteční stav: $\square = 6 - 1$. Jako antisignál by mohlo působit slovo *přibyl*. Tak bývá často vyjádřen výsledek sčítání.

V 1. díle (Bomerová & Michnová, 2019, str. 61, úloha 5) se nachází pátá inverzně formulovaná slovní úloha:

Na zastávce ŠKOLA vystoupili z autobusu 7 cestující a nastoupili 4 cestující. V jízdě pokračovalo 5 cestujících. Když autobus přijížděl k zastávce ŠKOLA, bylo v něm ___ cestujících.

- Zadáním se od páté slovní úlohy s antisignálem liší pouze čísla, takže i typem zůstává tato úloha stejná jako pátá zmíněná – složená slovní úloha, jejíž dílčí úloha je typu *změna 5*.

Poslední slovní úlohu s antisignálem lze najít v této řadě ve 2. díle (Bomerová & Michnová, 2019, str. 48, úloha 2):

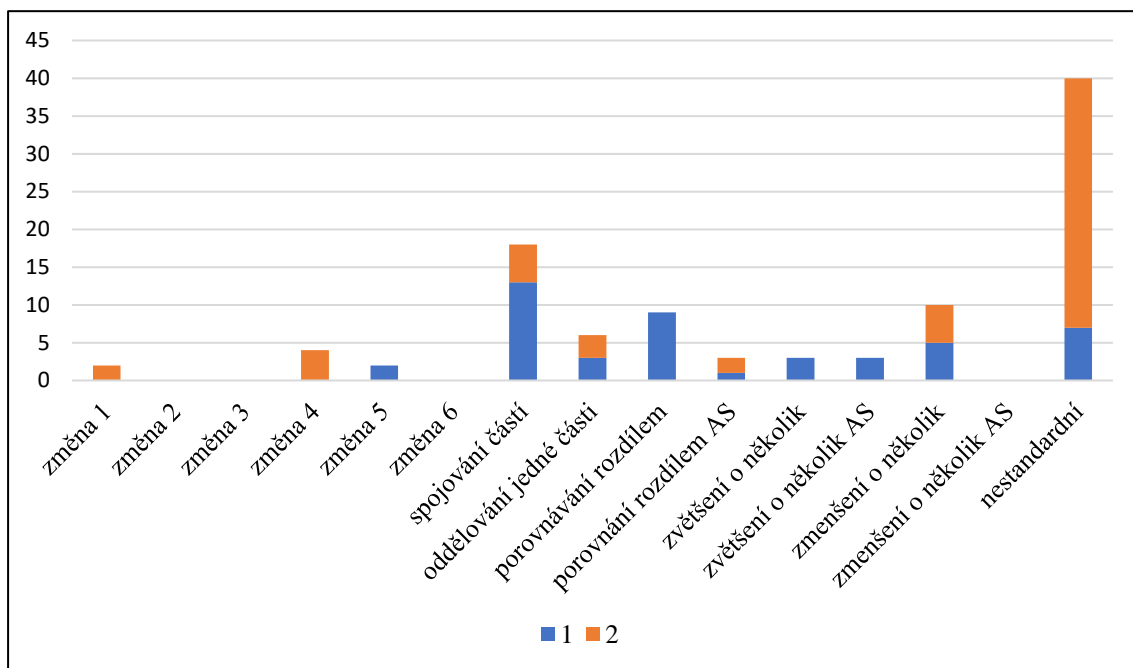
Nejtepleji bylo v ___ hodin. Ve 12 hodin bylo o ___ °C **tepleji/chladněji** než ve 21 hodin.⁹

- Při zařazení do typologie, která je uvedena na straně 27, jde o úlohu typu *porovnání rozdílem s antisignálem*, ptáme se: *o kolik stupňů °C bylo*

⁹ U této slovní úlohy je zobrazen graf, který ukazuje, kolik stupňů Celsia dosahovala teplota ovzduší v různé hodiny během jednoho dne.

tepleji ...?: $\square = 12 - 8$.¹⁰ Zde by jako antisignálem mohlo působit slovo *tepleji*. Když je *tepleji*, stupně Celsia rostou, přibývají. Správnou matematizací je ale početní operace odčítání.

Učebnice od nakladatelství Fraus obsahují také poměrně velké množství slovní úloh. Zřetelně převažují slovní úlohy typu *nestandardních slovních úloh* (viz str. 30), konkrétně 40 slovních úloh z celkového počtu 89. Častěji se ještě objevují úlohy na *spojování částí*. Ze zbylých 13 typů slovních úloh nejsou 4 zastoupeny.



Graf 3

Četnost jednotlivých typů úloh – Fraus (dle prof. Hejného), učebnice matematiky pro 2. ročník ZŠ

Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

¹⁰ Tyto údaje jsou patrné z grafu přiloženého u úlohy.

Tabulka 9
Analýza typů úloh v učebnicích Fraus (dle prof. Hejného), učebnice matematiky pro 2. ročník ZŠ

TYP ÚLOHY			DÍL		Celkem:
			1 ¹¹	2 ¹²	
ADITIVNÍ 1 DYNAMICKÉ	Konečný stav	Změna 1	0	2	2
		Změna 2	0	0	0
	Změna	Změna 3	0	0	0
		Změna 4	0	4	4
	Počáteční stav	Změna 5	2	0	2
		Změna 6	0	0	0
ADITIVNÍ 1 STATICKE	Spojování částí		13	5	18
	Oddělování jedné části		3	3	6
ADITIVNÍ 2	Porovnávání rozdílem		9	0	9
	Porovnávání rozdílem		1	2	3
	Zvětšení o několik		3	0	3
	Zvětšení o několik		3	0	3
	Zmenšení o několik		5	5	10
	Zmenšení o několik		0	0	0
NESTANDARDNÍ			7	33	40

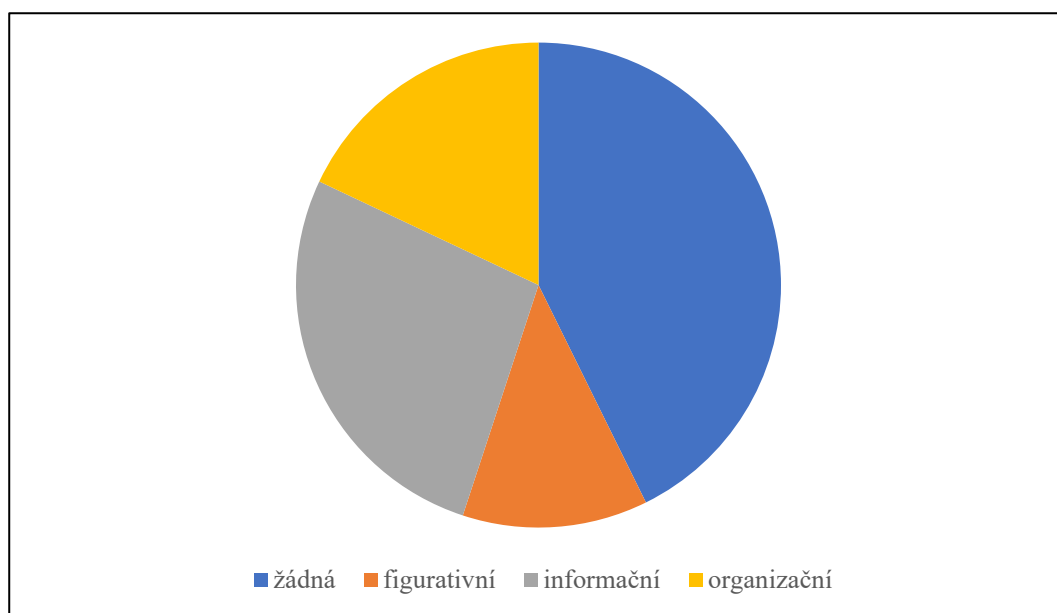
Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

¹¹ V 1. díle je 32 jednoduchých slovních úloh a 7 úloh složených. Složené úlohy jsem rozložila na úlohy jednoduché a ty použila do tabulky.

¹² Ve 2. díle je 47 jednoduchých slovních úloh a 3 úlohy složené. Složené slovní úlohy jsem rozložila na úlohy jednoduché a ty použila do tabulky.

Ilustrace

Při porovnání typů ilustrací jsem zjistila, že z 89 slovních úloh obsahuje určitý typ ilustrace 51 z nich. O figurativní ilustrace se jedná v 11 případech. S informačním typem ilustrace je možné se setkat ve 24 případech a organizační typ ilustrace má 16 slovních úloh. U inverzně formulovaných slovních úloh jsou použity v pěti případech informační ilustrace, v jednom případě organizační a ve zbývajících dvou případech není použita žádná ilustrace.



Graf 4

Typy ilustrací v učebnicích Fraus (dle prof. Hejného) – matematika, 2. ročník

Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

Tabulka 10

Analýza typů ilustrací v učebnicích matematiky Fraus (dle prof. Hejného) – řada pro 2. ročník ZŠ

TYP ILUSTRACE	DÍL		CELKEM
	1	2	
<i>žádná</i>	13	25	38
<i>figurativní</i>	1	10	11
<i>informační</i>	16	8	24
<i>organizační</i>	9	7	16

Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

Shrnutí

Učebnice od nakladatelství Fraus se mi z hlediska grafického líbí o něco více než učebnice od nakladatelství Alter. Jsou bohaté na ilustrace, ale ve většině případů nejde o ilustrace figurativní, jak je tomu právě v učebnicích Alter. Jedná se především o tabulky, grafy apod., které pomáhají žákům s řešením slovní úlohy.

Učebnice obsahuje úkoly ve výukových prostředích (výstaviště, stavby z krychlí, součtové čtverce, schody aj.), které jsou zařazeny opakovaně a postupně u nich roste obtížnost. Zaujalo mě propojení s tématy z jiných předmětů, např. hodiny, teplota ovzduší, jízdní řády. Také mě překvapilo, že již v této řadě pro druhý ročník žáci pracují se zlomky.

Učebnice obsahují velké množství úloh, jejich struktura se opakuje. Zároveň se ale objevují úkoly založené na objevování, které dozajista podporují vztah žáků k matematice. Učebnice od nakladatelství Fraus v této řadě klade důraz také na sebehodnocení. Na každé dvojstraně nahoře je prostor, kde se žák může pomocí bodů (1 – 3) vyjádřit, jak moc ho dané dva listy bavily a jak moc se mu povedly úlohy. Naopak v dolní části stránky je šestimístný číselný kód, který lze zadat do portálu *Škola s nadhledem* a zobrazí se online cvičení s podobnou tematikou jako na příslušné straně v učebnici.

Na pomocné výpočty není v učebnici místo, takže je také vhodná na práci se sešitem, popřípadě s vhodnými pomůckami, díky kterým žáci nebudou muset matematizaci úlohy psát, ale vyřeší úlohu pomocí názorné pomůcky (což je pravděpodobně i záměr autorů učebnice).

Cílem slovních úloh je především rozvoj logického myšlení a představivosti. O tom svědčí skutečnost, že téměř jedna třetina z celkového počtu 89 slovních úloh, konkrétně 29 slovních úloh, jsou úlohy nestandardního typu, většina z nich řešená experimentálně.

Ilustrace jsou v této řadě učebnic využívány hojně. Z 89 slovních úloh byla ilustrace použita u 51 z nich. Jak jsem již zmiňovala výše, jednalo se především o ilustrace informačního a organizačního typu, tedy o takové ilustrace, které jsou potřebné ke zjištění

důležitých dat k výpočtu úlohy (např. tabulky, grafy), anebo ilustrace, které napomáhají k řešení, tím i k pochopení matematizace úlohy.

7.4.3 Vyhodnocení analýzy učebnic

Učebnice od nakladatelství Fraus nejsou v poměru ke všem úlohám tak bohaté na slovní úlohy jako učebnice od nakladatelství Alter. Jsem ale toho názoru, že co se týče zastoupení jednotlivých typů úloh, jsou vyváženější. Je faktem, že nestandardní úlohy převažují nad ostatními, ale vzhledem k celkovému počtu slovních úloh se objevují i zbylé typy. Ačkoli také slovní úlohy s antisignálem jsou v této řadě zastoupeny více, přesto jsem byla nemile překvapena, jak málo se jich v učebnicích objevuje.

Zastoupení jednotlivých typů ilustrací byly v obou řadách rozdílné. Zatímco v učebnicích Alter převažují ilustrace figurativní nad informačním a organizačním typem, v řadě učebnic od Frause je tomu přesně naopak.

Velký rozdíl vnímám v cíli slovních úloh v jednotlivých řadách učebnic. Učebnice nakladatelství Fraus si kladou za cíl především rozvoj logického myšlení a představivosti. Konkrétně na svých stránkách (2022) uvádí, že přístup prvního autora, prof. M. Hejného, je založen na budování schémat v myšlení dětí, rozvoji logického úsudku a představivosti. Učebnice od nakladatelství Alter mají za cíl slovních úloh nejpravděpodobněji nácvik postupu počítání, resp. procvičení matematické operace na úkor porozumění matematizaci situace popsané slovní úlohou.

7.5 Hlavní část výzkumu

V hlavní části výzkumu jsem zadala žákům druhých tříd dvou městských základních škol didaktický test, který se skládal ze čtyř slovních úloh. Tímto testem jsem chtěla zjistit, jakým způsobem žáci postupují při řešení slovních úloh, zvláště pak při řešení slovních úloh inverzně formulovaných, což je i hlavním cílem mé práce.

7.5.1 Příprava didaktického testu

Mnou vytvořený test obsahoval čtyři slovní úlohy. První dvě úlohy obsahovaly signál, druhé dvě slovní úlohy jsou s antisignálem. Dvě úlohy byly vlastní, dvě úlohy byly převzaté ze sbírky úloh z řady Svět čísel a tvarů (Divíšek et al., 2002). Při sestavování testů jsem využívala poznatky z teoretické části diplomové práce.

1. Jitka udělala při tělocviku 20 dřepů. Adélka o 12 více než Jitka. Kolik dřepů udělala Adélka?
 - Podle typologie uvedené na straně 27 lze tuto úlohu zařadit mezi úlohy *zvětšení o několik* řešené sčítáním (úloha obsahuje signál – slovo *více*).
2. V parku rostlo 37 stromů. Vichřice 3 stromy vyvrátila a zahradníci je odklidili. Kolik stromů je v parku nyní? (Divíšek et al., 2002, str. 37)
 - Tato úloha je dle typologie na straně 24 typu *změna 2* (úloha obsahuje signál – slovo *odklidili*).
3. Mamince je 32 let. Je o 4 roky mladší než tatínek. Kolik let je tatínkovi? (Divíšek et al., 2002, str. 37)
 - Třetí testová úloha je typu *zmenšení o několik* řešená sčítáním viz strana 27 (úloha obsahuje antisignál – slovo *mladší*).

4. Babička koupila vajíčka. 7 jich hned spotřebovala při vaření. 13 uklidila do ledničky. Kolik vajec koupila?

- Poslední slovní úloha v testu je dle typologie na straně 24 *změna 6* (tato úloha obsahuje antisignál – slovo *spotřebovala*).

Tento didaktický test jsem testovala na třech žácích z jiné druhé třídy, než byl test pro mé hlavní šetření zadán. Neprováděla jsem žádné změny.

7.5.2 Realizace didaktického testu

Test jsem doručila v papírové podobě jednotlivým učitelkám šesti druhých tříd ze dvou městských základních škol a ty je dále zadaly svým žákům bez jakýkoliv zvláštních instrukcí. Učitelky upozornily žáky na podpis křestního jména (kvůli rozlišení dívka X chlapec) a dále pracoval každý žák samostatně. Zadání testů proběhlo 15. března 2023 a celkem jich bylo vyplněno 118. Žákům nebylo dáno žádné časové omezení, všichni test odevzdali do 30 minut. Učitelky nepomáhaly žádným způsobem žákům s vyplněním testu. Každý žák pracoval samostatně podle toho, jak je zvyklý.

Po odevzdání vyplněných testů jsem provedla analýzu výsledků jednotlivých slovních úloh, vyhodnocení úspěšnosti žáků v každé úloze. Na základě této analýzy výsledků testů jsem navrhla možný postup, který by napomohl žákům v řešení inverzně formulovaných slovních úloh.

7.5.3 Vyhodnocení výsledků didaktického testu

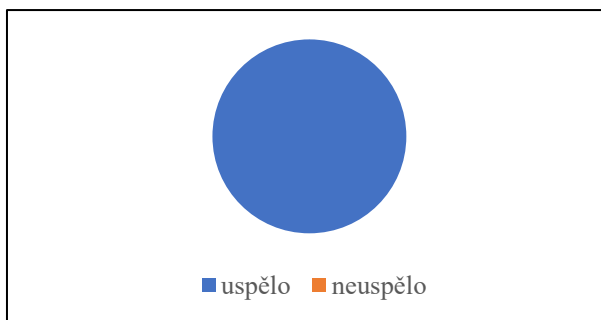
Vzhledem k cíli mé práce jsem se při vyhodnocování testů zaměřila na postup řešení, na matematizaci slovní úlohy. Chyby vzniklé při počítání žáky navržených příkladů jsem pro mou práci zanedbala.

7.5.3.1 První úloha

První úlohu zvládli o něco lépe žáci ze Základní školy A. Úspěšných jich ve vytvoření matematického modelu bylo 100 %, tj. 55 dětí. Ze Základní školy B zvládlo první úlohu úspěšně 59 dětí z 63, tj. 94 %.

Jeden žák napsal jako řešení: $20 + 32 = 52$. Mohlo by to být způsobené tím, že žáci ze Základní školy B nepíšou výpočet ke každé úloze. Pokud znají odpověď napíšou jen výsledné číslo. Tento žák dle mého názoru už po přečtení úlohy věděl, že výsledek bude 32, a při zápisu výpočtu si tedy místo příkladu $20 + 12$ zapsal příklad $20 + 32$.

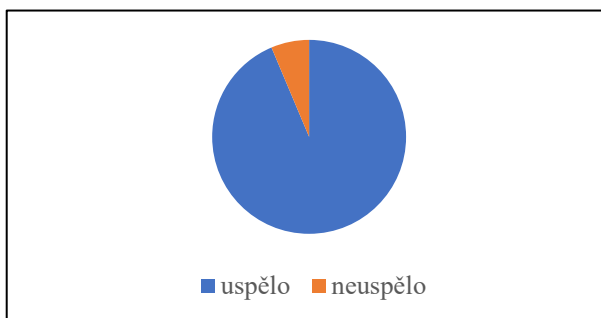
Tři žáci ze Základní školy B tuto úlohu vůbec nevyplnili.



Graf 5

První úloha – ZŠA

Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)



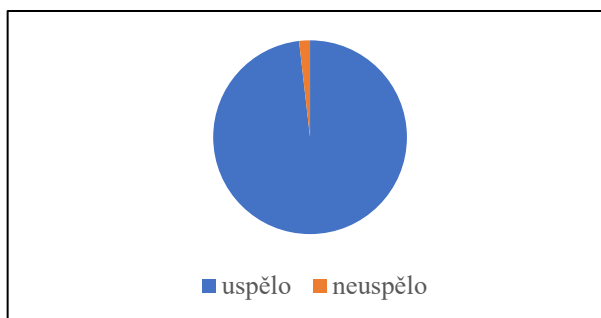
Graf 6

První úloha – ZŠB

Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

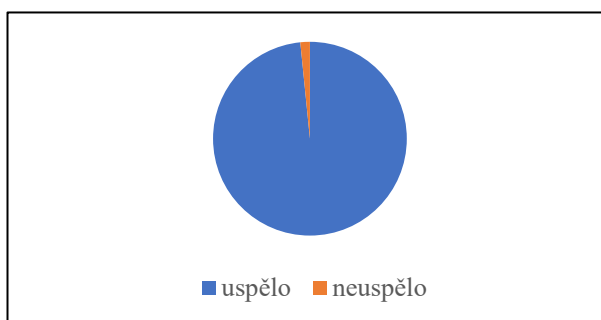
7.5.3.2 Druhá úloha

S druhou úlohou neměli problém žáci ani na jedné ze základních škol. Na Základní škole A chyboval v postupu řešení druhé úlohy jeden žák, který uvedl výpočet: $37 + 3 = 40$. Na Základní škole B to byl také jeden žák, který uvedl výpočet $36 - 4 = 32$.



Graf 7
Druhá úloha – ZŠA

Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)



Graf 8
Druhá úloha – ZŠB

Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

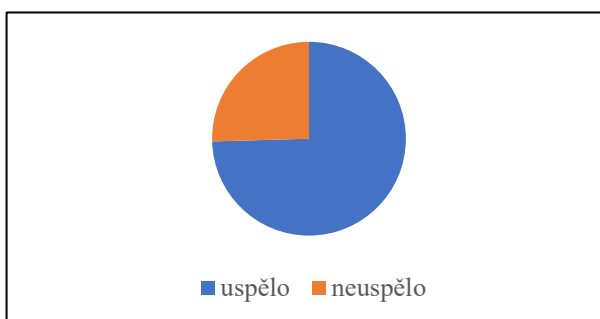
7.5.3.3 Třetí úloha

Třetí úloha dopadla lépe na Základní škole B, kde odpovědělo správně 54 žáků ze 63, tj. 86 %. Na Základní škole A odpovědělo správně 41 žáků z celkového počtu 55, tj. 75 %.

Nejčastěji se na obou školách objevovalo řešení $32 - 4 = 8$. Tento postup se objevil celkem v 17 případech, z toho 11 na Základní škole A.

V 5 případech byla tato úloha nevyplněná, dvakrát na Základní škole A a třikrát na Základní škole B.

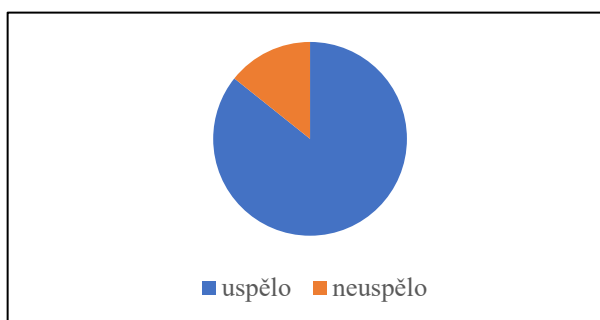
Na Základní škole A se objevilo také řešení $37 - 3 = 36$.



Graf 9

Třetí úloha – ZŠA

Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)



Graf 10

Třetí úloha – ZŠB

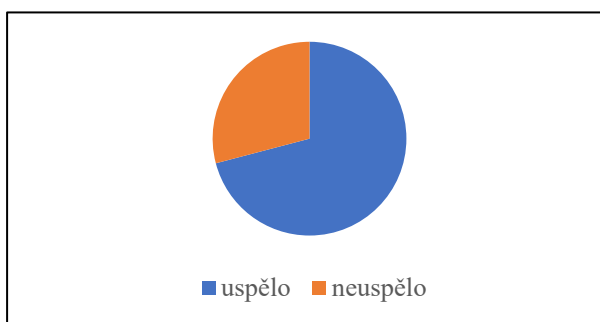
Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

7.5.3.4 Čtvrtá úloha

Čtvrtá úloha se stejně jako třetí úloha povedla více žákům ze Základní školy B, bylo zde úspěšných 58 žáků (92 %). Na Základní škole A bylo úspěšných 39 žáků (71 %). U této slovní úlohy se objevil velký rozdíl úspěšnosti mezi oběma školami.

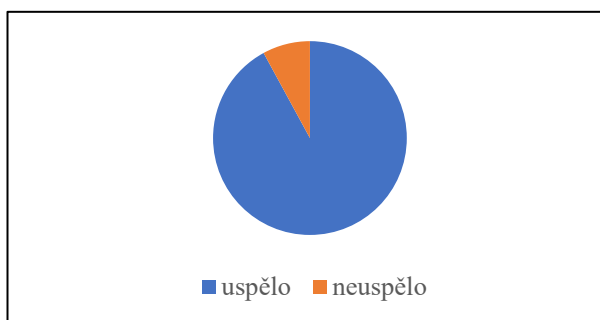
Z chybných řešení se zde nejčastěji objevoval postup $13 - 6 = 7$. Tento výpočet se objevil v 9 testech, z toho v 8 případech na Základní škole A. Jednou se také objevil výpočet $7 - 13 = 6$.

Dále se dvakrát vyskytl příklad $7 - 3 + 13 = 17$. V několika případech byla úloha nevyplněná.



Graf 11
Čtvrtá úloha – ZŠA

Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)



Graf 12
Čtvrtá úloha – ZŠB

Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

7.5.4 Diskuse s vybranými žáky

Diskusí nad vyplněnými didaktickými testy s vybranými žáky jsem si chtěla ověřit mou teorii, že žáci při řešení inverzně formulovaných úloh postupují dle antisignálních slov. Má teorie se potvrdila. Žáci ze Základní školy A opravdu popisují postup řešení, ve kterém se chytají slov v zadání slovní úlohy a následně dle nich vybírají matematickou operaci, kterou použijí pro svůj výpočet. Někteří žáci ze Základní školy B popsali stejný přístup, bylo jich však o poznání méně.

7.5.4.1 Řešení žákyně K.

T: Zajímalo by mě, jak si třetí slovní úlohu vypočítala?

K. si čte třetí slovní úlohu.

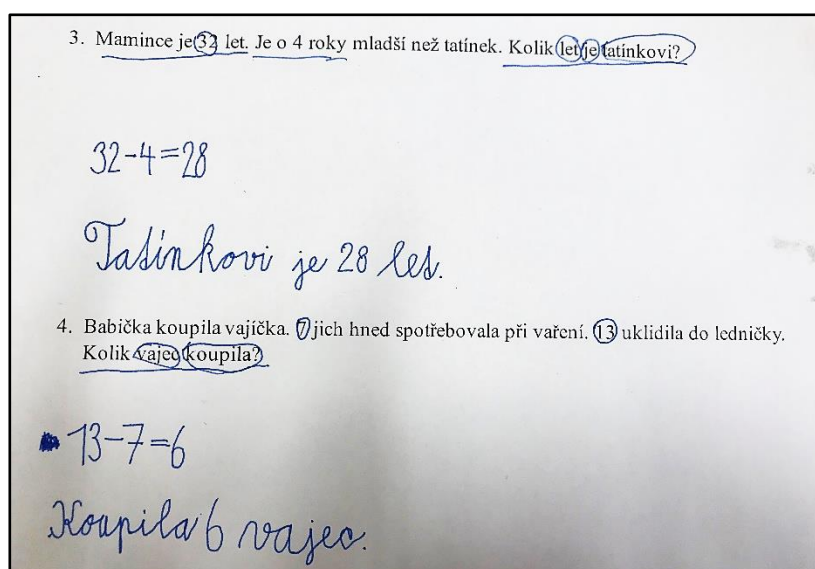
K: Mamince je 32, já jsem si myslela, že je mladší, takže jsem napsala -4, protože to mladší.

T: Dobře, a co ta čtvrtá slovní úloha? Jak jsi přišla na ten příklad?

K. si čte čtvrtou slovní úlohu.

K: Já jsem na to přišla tak, že ona jich hned spotřebovala, takže je tam hned dala. Takže jsem dala $13 - 7 = 6$.

Obrázek 10
Řešení žákyně K.



Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

7.5.4.2 Řešení žáka M.

T: Ve třetí úloze jsi spočítal příklad $32 - 4 = 28$. Jak jsi na něj přišel?

M. čte *třetí slovní úlohu*.

M: 32, protože je...mamince je o 4 roky mladší. Proto jsem napsal mínus.

T: Podívej se na čtvrtou úlohu. Kdybych potřebovala poradit, jak mám počítat, co bys mi poradil?

M. čte *čtvrtou slovní úlohu*.

M: Že má jako...že uklidila 13 a 7 jich hned spotřebovala, takže je odendám.

T: Mohl bys mi tuto slovní úlohu znázornit?

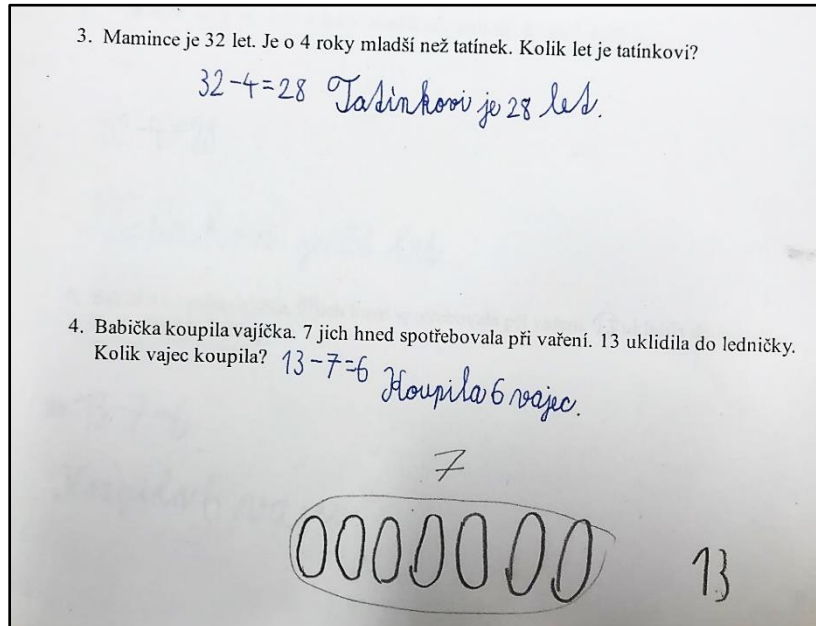
M. *Kreslí 7 vajíček a vedle napíše 13, se slovy, že je to hodně, tak si napíše jen číslo.*

M: No ale teď jich je dohromady 20, takže jich na začátku měla 20.

T: Takže výsledek je 20?

M: Taky mě to napadlo, ale je tam *spotřebovala*, a tak jsem chtěl napsat příklad s mínus.

Obrázek 11
Řešení žáka M.



Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

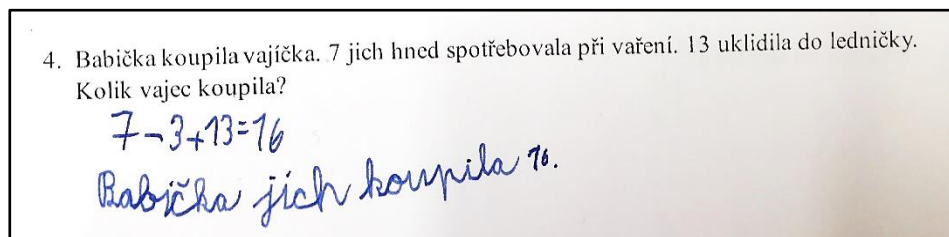
7.5.4.3 Řešení žaka Š.

Š. čte čtvrtou slovní úlohu.

T: Zajímalo by mě, jak si čtvrtou slovní úlohu vypočítal?

Š: No, protože jich 7 měla na vaření a pak ještě 13 uklidila, tak jsem chtěl udělat $7 - 13$, ale to nejde, tak jsem udělal jen $7 - 3$ a pak těch 13, protože ty uklidila.

Obrázek 12
Řešení žaka Š.



Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

7.6 Výsledky výzkumného šetření

Na začátku výzkumného šetření jsem si stanovila následující výzkumné otázky:

Výzkumná otázka č. 1: „*Jak žáci postupují při řešení inverzně formulovaných slovních úloh?*“

Výzkumná otázka č. 2: „*Jaké kroky by mohly napomoci k řešení inverzně formulovaných slovních úloh?*“

Na základních školách, které jsem si zvolila pro své výzkumné šetření, používali v hodinách matematiky dvě zcela odlišné učebnice. Základní škola A používala učebnice od nakladatelství Alter, která, jak jsem zmiňovala již na str. 55, má nejspíše za cíl slovních úloh nácvik postupu počítání, resp. procvičení matematické operace na úkor porozumění matematizaci situace popsané slovní úlohou. Nevhodně zvolené poznámky, které nabádají k povrchnímu řešení slovní úlohy, se žákům vštěpují do paměti a řešení pak probíhá povrchním způsobem, což jsem si ověřila při rozhovoru s vybranými žáky. Ti pak mají problém s řešením úloh, které nespadají do typů slovních úloh, které se nejčastěji v učebnicích Alteru vyskytují. Jsou zvyklé, že prostřednictvím slovní úlohy zopakují již probranou látku – sčítání, odčítání. Žák se pokouší použít při řešení slovní úlohy jeden z typů, který je mu blízký, protože při počítání úloh z učebnice je tento přístup úspěšný.

Na Základní škole B používají ve výuce učebnice nakladatelství Fraus – dle prof. Hejného. Žáci jsou zvyklí zkoušet různé postupy, různé možnosti řešení. Slovní úlohu nevidí pouze jako prostředek k procvičení početních operací, vidí ji jako problém, jako výzvu, kterou se snaží vyřešit různými způsoby. Pokud znají výsledek po přečtení zadání úlohy, napíší ho a tím je úloha vyřešena. Místo odpovědi na otázku slovní úlohy také můžeme vidět popis matematizace. Na Základní škole A žáci píší výpočet a odpověď ke každé slovní úloze. V mnoha případech pomáhá dítěti vracet se k textu úlohy, správně formulovat, co se snažil vypočítat. Jsou situace, kdy dítě zná správný výsledek, ale v momentě zápisu výpočtu sklouzne k chybnému, povrchnímu řešení.

Ve svém výzkumu jsem zjistila, že s inverzně formulovanou úlohou měli více problém žáci na Základní škole A. Je pravda, že v učebnicích Alteru se inverzně formulované slovní úlohy vyskytovaly o něco méně, ale ani v učebnicích od nakladatelství Fraus jich

nebylo mnoho. Dle mého názoru jde spíše o fakt, že učebnice Alter obsahují velké množství slovních úloh pouze několika typů. Žáci, kteří se učí podle učebnice Fraus, se nejvíce setkávají s úlohami řešenými nestandardně, a i zbylé typy jsou oproti Alteru rovnoměrněji zastoupeny.

Kroky, které by napomohly k řešení inverzně formulovaných úloh, zmiňuji v následující kapitole.

8 Doporučení pro praxi

1. Setkávat se v hodinách matematiky s rozmanitými typy slovních úloh.

- Učitel matematiky by měl dbát na to, aby se v hodinách žáci setkávali s pestrými slovními úlohami. Pokud učebnice, které používá v hodinách, neobsahují různé typy úloh, měl by učitel vhodné úlohy doplnit. Úlohy by měly být pestré nejen z hlediska kontextu, ale také z hlediska sémantického.

2. Naučit žáky neřešit slovní úlohy povrchně.

- Učitel by se měl ujistit, že žák rozumí textu úlohy, popřípadě v kterých místech se nachází obtíže s chápáním zadání. Matematizace je nejtěžší fáze řešení a při frontální výuce se může stát, že učitel zjednoduší úlohy návodnými otázkami, vytvořením zápisu, nebo nakreslením obrázku. Žáci poté opisují z tabule, aniž by řešení rozuměli. Je důležité, aby žáci fázi matematizace prošli bez pomoci učitele. V opačném případě může dojít k tomu, že žák přestane vnímat text jako celek, zaměří se jen na čísla a bude volit početní výkon pouze pomocí signálních slov (Tichá & Hošpesová, 2013).
- Aktivitou, která pomáhá žákům provádět matematizaci, je tvoření úloh k zadanému výpočtu. Např. učitel napíše na tabuli příklad (např. $28 - 9 + 3$) a žáci mají za úkol vytvořit slovní úlohu pro své spolužáky, ve které bude matematizací právě zadaný příklad. Podrobněji se tvořením úloh zabývaly Tichá a Hošpesová (2013). Kromě pozitivního vlivu na řešení úloh zjistily, že úlohy vytvořené žáky jsou prostředkem diagnostikování chybných představ o početních operacích.

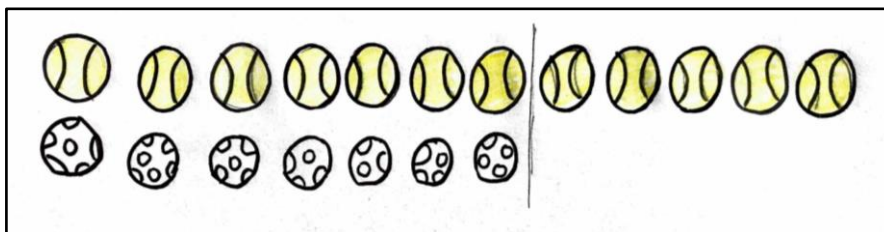
3. Naučit žáky používat různé reprezentace úlohy.

- Žáci se v hodinách matematiky učí, jak napsat zápis, výpočet, jak zapsat odpověď. Neméně důležité je, aby se naučili, jak danou úlohu reprezentovat graficky. V některých případech je totiž správné znázornění efektivnější než zápis. Učitel by měl žákům ukazovat různé možnosti grafického znázornění a diskutovat nad nimi s žáky. Jako příklad níže uvádím tři možná grafická znázornění k úloze:

Ve škole mají 12 tenisových míčků. To je o 5 více než florbalových.
Kolik mají ve škole florbalových míčků?

Obrázek 13

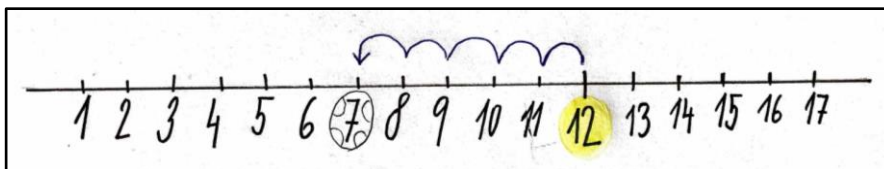
První možné grafické řešení



Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

Obrázek 14

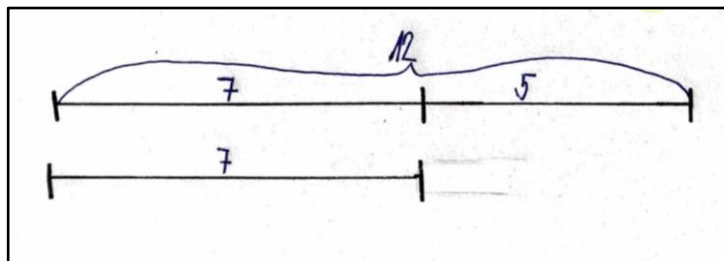
Druhé možné grafické řešení



Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

Obrázek 15

Třetí možné grafické řešení



Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

- Aktivita, kterou navrhuji na procvičení tvorby grafického znázornění, jsou žáky kreslené obrázky, které mají znázorňovat slovní úlohu. Ostatní žáci poté diskutují nad tím, jaká formulace zadání slovní úlohy se za obrázkem může skrývat.

Obrázek 16

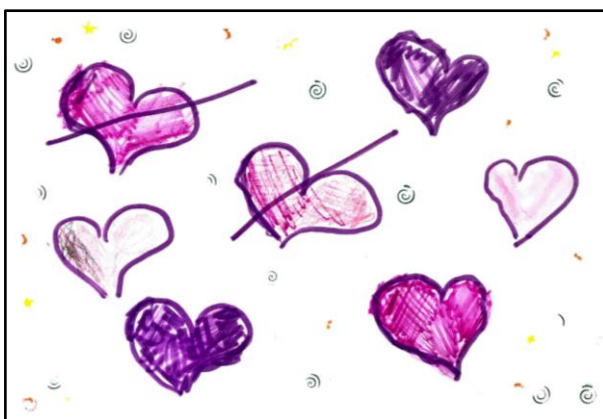
Slovní úloha žákyně N.



Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

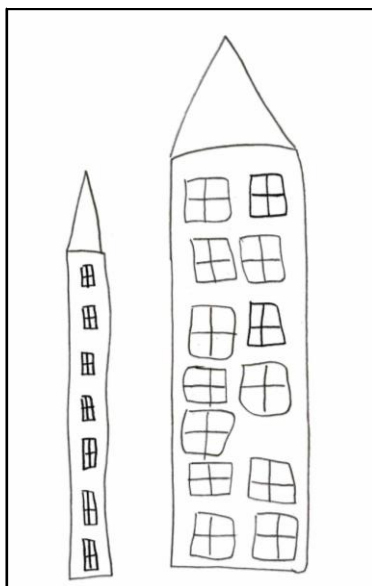
Obrázek 17

Slovní úloha žákyně S.



Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

Obrázek 18
Slovní úloha žáka V.



Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

4. Kontrola nejen výpočtu, ale i matematizace

- Učitel by měl dbát na to, aby žáci zkontrolovali svou odpověď nejen pomocí kontrolního výpočtu, ale aby srovnali svůj výsledek s kontextem slovní úlohy. Čtvrtá úloha didaktického testu ve výzkumném šetření ukázala, že žáci nekontrolují, zda je nalezený výsledek v souladu s textem úlohy.
- Aktivita, kterou je možné podpořit, aby žáci byli schopni posoudit správnost svého řešení, spočívá v posouzení různých řešení úlohy. Zadáme žákům úlohu a několik výsledků, které prý vypočítali žáci v jiné třídě. Žáci mají za úkol posoudit, co jejich vrstevníci vypočítali.

Honzík má 17 kuliček modrých a nějaké červené. Modrých má o 5 více než červených. Kolik má Honzík červených kuliček?

Obrázek 19
Výsledky k posouzení

$17 + 5 = 22$	$17 - 5 = 12$
$17 - 5 = 11$	$17 + 5 = 23$

Zdroj: (vlastní zdroj, 2023)

9 Závěr

V mé diplomové práci na téma „*Inverzně formulované slovní úlohy a návrhy reedukace žakovských chyb (sčítání a odčítání)*“ jsem se zabývala problematikou žakovských řešení slovních úloh. Konkrétně jsem se zaměřila na úlohy inverzně formulované, prof. M. Hejným nazývané slovní úlohy s antisignálem, vedoucí k operaci sčítání a odčítání. Využila jsem řešení obtížnějších typů úloh, jelikož na řešení standardních úloh bych nepoznala, jak žáci uvažují.

V první části jsem se věnovala pojmu slovní úloha, jejím fázím a metodám řešení, typologiím a cílům slovních úloh. Ve druhé části diplomové práce jsem provedla výzkumné šetření. Mým hlavním cílem bylo zjistit, jakým způsobem žáci postupují při řešení úloh s antisignálem, popřípadě pokud je postup chybný, co je příčinou. Žákům druhých tříd ze dvou městských škol jsem zadala didaktický test. Ten prokázal, že žáci chybují při řešení inverzně formulovaných slovních úloh. Také se potvrdilo mé přesvědčení, že žáci přistupují k povrchnímu řešení slovní úlohy a orientují se podle signálních slov. Své zjištění jsem si ještě ověřila při rozhovoru s vybranými žáky, který ho potvrdil.

Dalšími cíli bylo zjistit, jestli je pozornost věnovaná těmto úlohám při výuce matematiky dostatečná a co by mohlo napomoci žákovi úlohu správně vyřešit. Vzhledem k faktu, že učebnice mají podle výše zmiňované literatury velký vliv na průběh výuky, provedla jsem analýzu učebnic používaných v testovaných třídách (nakladatelství FRAUS (dle prof. Hejného) a ALTER), z hlediska počtu slovních úloh a slovních úloh inverzně formulovaných. Analýza prokázala značný rozdíl mezi sadami učebnic, a to zejména v cíli slovních úloh. Konkrétně inverzně formulované slovní úlohy se v obou sadách učebnic vyskytovaly zřídka. V případě, že učitel nedoplní úlohy z učebnice dodatečnými inverzně formulovanými slovními úlohami, žák se s tímto typem úlohy prakticky nesetká. Na základě provedené analýzy učebnic jsem navrhla doporučení, které by mohlo napomoci k reedukaci žakovských chyb: *setkávat se v hodinách matematiky s rozmanitými typy slovních úloh. Dalšími body navrženého postupu jsou: naučit žáky neřešit slovní úlohy povrchně, naučit žáky používat různé reprezentace úlohy, kontrola nejen výpočtu, ale i matematizace.*

Ideálním navázáním na mou studii by bylo ověření mnou navrženého postupu, který by měl sloužit k reedukaci žákovských chyb, v praxi. Mým přáním do budoucna je větší výskyt inverzně formulovaných slovních úloh v hodinách matematiky. Práci učitelů by velmi usnadnila sbírka úloh, ve které by úlohy s antisignálem byly hojně zastoupeny. Dalším vhodným pokračováním mé práce by mohlo být experimentální vyučování. V principu by se jednalo o střídání úloh s antisignálem a bez antisignálu za současného sledování vlivu jednotlivých zadání na žáky.

Tato diplomová práce je určena vzdělavatelům učitelů matematiky, učitelům 1. stupně základní školy a studentům učitelství matematiky.

Seznam literatury

Alter. (2020). *O nás*. Načteno z Nakladatelství ALTER: <https://www.alter.cz/oceneni/o-nas>

Berends, I., & Lieshout, E. (Srpen 2009). The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction*, stránky 345–353.

Blažková, R., Matoušková, K., & Vaňurová, M. (2002). *Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty)*. Brno: Masarykova univerzita.

Blum, W., & Niss, M. (únor 1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects — State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, stránky 37–68. Načteno z <https://doi.org/10.1007/BF00302716>

Bruner, J. (1977). *The Growth of Representational Processes in Childhood, ruský překlad in Psychologija poznaniya*. Moskva: Progress.

Dewolf, T., Dooren, W. V., Cimen, E. E., & Verschaffel, L. (17. Červenec 2013). The Impact of Illustrations and Warnings on Solving Mathematical Word Problems Realistically. *The Journal of Experimental Education*, stránky 103–120.

Dewolf, T., Dooren, W. V., Hermens, F., & Verschaffel, L. (1. leden 2015). Do students attend to representational illustrations of non-standard mathematical word problems, and, if so, how helpful are they? *Instructional Science*, stránky 147–171.

Divíšek, J. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ: celostátní vysokoškolská učebnice pro studenty pedagogických fakult studijního oboru 76-11-8 : učitelství pro 1. stupeň základní školy* (Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). vyd.). Praha: SPN.

Elia, I., & Philippou, G. (2004). *The functions of pictures in problem solving*. Department of Education, University of Cyprus.

Fraus. (2022). *Objevují matematiku*. Načteno z Fraus: <https://www.objevujimatematiku.cz/cs/ucebnice/10-let-zkusenosti>

Fraus. (2023). *O nás*. Načteno z Fraus: <https://www.fraus.cz/cs/o-nas/30-let-inovace>

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual–spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, stránky 684–689.

Hejný, M. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Hejný, M. (2003). *Anatómia slovnej úlohy o veku*. Ružomberok.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika I. stupně*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika*. Praha: Portál.

Hejný, M., & Kuřina, F. (2015). *Dítě, škola a matematika - Konstruktivistické přístupy k vyučování* (třetí vydání. vyd.). Praha: Portál.

Hejný, M., Novotná, J., & Vondrová, N. (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

Kuřina, F. (1990). *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN.

Kuřina, F. (1990). *Umění vidět v matematice* (Odborná literatura pro učitele. vyd.). Praha: SPN.

Kuřina, F. (17. Leden 2013). Jazyky a reprezentace. *Matematika – fyzika – informatika*, stránky 2–16.

Kuřina, F. (2016). *Matematika jako pedagogický problém: mé didaktické krédo*. Hradec Králové: Gaudeamus.

Ministerstvo školství, m. a. (září 2021). *edu.cz*. Získáno 10. prosinec 2022, z RVP ZV - Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání: <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/>

Mullis, Martin, Foy, Kelly, & Fishbein. (2020). *TIMSS 2019 International*. Boston: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Nesher, P., Greeno, J., & Riley, M. (Listopad 1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, stránky 373–394.

Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh: Kapitoly z didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta.

Odvárko, O., Calda, E., Šedivý, J., & Židek, S. (1990). *Metody řešení matematických úloh*. Praha: SPN.

Pólya, G. (2004). *How to solve it: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton: Princeton and Oxford: Princeton University Press.

Švaříček, R., Šedřová, K., Janík, T., Kaščák, O., Miková, M., Nedbálková, K., . . . Zounek, J. (2007). *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Praha: Portál.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educ Stud Math* 83, 133-143.

Trch, M., & Zapotilová, E. (1997). Non-traditional mathematical tasks as a means of developing mathematical thinking of younger children a problems problems with their evaluation. *Elementary Maths*, stránky 74-78.

Vershaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Dooren, W. V. (duben 2022). Word problems in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 908–911. Springer.

Vicente, S., Orrantia, J., & Verschaffel, L. (2008). Influence of mathematical and situational knowledge on arithmetic word problem solving: Textual and graphical aids. *Journal for the Study of Education and Development*, stránky 463–483.

Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschova, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., . . . Tůmová, V. (2019). *Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologii*. Praha: Karolinum.

Vondrová, N., Rendl, M., Havlíčková, R., Hříbková, L., Páchová, A., & Žalská, J. (2017). *Kritická místa matematiky základní školy v řešení žáků*. Praha: Univerzita Karlova, Karolinum.

Vyšín, J. (1962). *Metodika řešení matematických úloh*. Praha: SPN.

Xin, Y. P. (1. Duben 2019). The effect of a conceptual model-based approach on 'additive' word problem solving of. *ZDM-Mathematics Education*, stránky 139–150.

Seznam citovaných učebnic

Bomerová, E., & Michnová, E. (2019). *Matematika 2/2 – dle prof. Hejného*. Plzeň: Fraus.

Bomerová, E., & Michnová, J. (2019). *Matematika 2/1 – dle prof. Hejného*. Plzeň: Fraus.

Divíšek, J., Holešová, M., Hošpesová, A., Kuřina, F., & Nechvátalová, J. (2002). *Svět čísel a tvarů: Sbírká úloh z matematiky pro 2. ročník základní školy*. Praha: Prometheus.

Eichlerová, M., Staudková, H., & Vlček, O. (2015). *Matematika pro 2. ročník ZŠ – 7*. Praha: ALTER.

Eichlerová, M., Staudková, H., & Vlček, O. (2020). *Matematika pro 2. ročník ZŠ*. Praha: ALTER.

Eichlerová, M., Staudková, H., & Vlček, O. (2020). *Matematika pro 2. ročník ZŠ – 6*. Praha: ALTER.

Hošpesová, A., Divíšek, J., & Kuřina, F. (1998). *Svět čísel a tvarů. Matematika pro 3. ročník*. Praha: Prometheus.

Landová, V., Staudková, H., & Tůmová, V. (2019). *Matematika pro 2. ročník ZŠ – 4B*. Praha: ALTER.

Landová, V., Staudková, H., & Tůmová, V. (2020). *Matematika pro 2. ročník ZŠ – 5*. Praha: ALTER.

Seznam obrázků

Obrázek 1 Projekt – zdravá výživa a cvičení.....	14
Obrázek 2 Schéma – fáze postupu řešení slovní úlohy.....	18
Obrázek 3 Znázornění slovní úlohy	25
Obrázek 4 Schématické znázornění probírání aritmetické operace zaměřené na automatizaci spojů.....	33
Obrázek 5 Schéma pochopení aritmetické operace	34
Obrázek 6 Schéma – vstupní test, úloha 1	38
Obrázek 7 Schéma – vstupní test, úloha 2	38
Obrázek 8 Schéma – vstupní test, úloha 3	39
Obrázek 9 Autobus.....	48
Obrázek 10 Řešení žákyně K.	62
Obrázek 11 Řešení žáka M.	63
Obrázek 12 Řešení žáka Š.....	64
Obrázek 13 První možné grafické řešení	68
Obrázek 14 Druhé možné grafické řešení.....	68
Obrázek 15 Třetí možné grafické řešení	68
Obrázek 16 Slovní úloha žákyně N.....	69
Obrázek 17 Slovní úloha žákyně S.	69
Obrázek 18 Slovní úloha žáka V.....	70
Obrázek 19 Výsledky k posouzení.....	70

Seznam tabulek

Tabulka 1 Jednoduché slovní úlohy – schéma.....	22
Tabulka 2 A1: dynamické úlohy – schéma.....	24
Tabulka 3 A1: statické úlohy – schéma	25
Tabulka 4 A2 – schéma.....	27
Tabulka 5 M1 – schéma.....	28
Tabulka 6 M2 – schéma.....	29
Tabulka 7 Analýza typů úloh v učebnicích Alter, učebnice matematiky pro 2. ročník ZŠ.....	45
Tabulka 8 Analýza typů ilustrací v učebnicích matematiky Alter – řada pro 2. ročník ZŠ.....	46
Tabulka 9 Analýza typů úloh v učebnicích Fraus (dle prof. Hejného), učebnice matematiky pro 2. ročník ZŠ.....	52
Tabulka 10 Analýza typů ilustrací v učebnicích matematiky Fraus (dle prof. Hejného) – řada pro 2. ročník ZŠ.....	53

Seznam grafů

Graf 1 Četnost jednotlivých typů úloh – Alter, učebnice matematiky pro 2. ročník ZŠ	44
Graf 2 Typy ilustrací v učebnicích Alter – matematika, 2. ročník	46
Graf 3 Četnost jednotlivých typů úloh – Fraus (dle prof. Hejného), učebnice matematiky pro 2. ročník ZŠ.....	51
Graf 4 Typy ilustrací v učebnicích Fraus (dle prof. Hejného) – matematika, 2. ročník	53
Graf 5 První úloha – ZŠA.....	58
Graf 6 První úloha – ZŠB	58
Graf 7 Druhá úloha – ZŠA	59
Graf 8 Druhá úloha – ZŠB.....	59
Graf 9 Třetí úloha – ZŠA.....	60
Graf 10 Třetí úloha – ZŠB.....	60
Graf 11 Čtvrtá úloha – ZŠA	61
Graf 12 Čtvrtá úloha – ZŠB.....	61