



TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI  
Fakulta mechatroniky, informatiky  
a mezioborových studií ■

# Numerická simulace proudění kolem kmitajícího leteckého profilu

## Bakalářská práce

*Studijní program:* B2612 – Elektrotechnika a informatika  
*Studijní obor:* 2612R011 – Elektronické informační a řídicí systémy  
*Autor práce:* **Petra Tisovská**  
*Vedoucí práce:* doc. Ing. Petr Šidlof, Ph.D.





TECHNICAL UNIVERSITY OF LIBEREC  
Faculty of Mechatronics, Informatics  
and Interdisciplinary Studies ■

# Numerical simulation of flow around an oscillating airfoil

## Bachelor thesis

*Study programme:* B2612 – Electrotechnology and informatics  
*Study branch:* 2612R011 – Electronic information and control systems

*Author:* **Petra Tisovská**  
*Supervisor:* doc. Ing. Petr Šidlof, Ph.D.



## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Petra Tisovská**  
Osobní číslo: **M13000079**  
Studijní program: **B2612 Elektrotechnika a informatika**  
Studijní obor: **Elektronické informační a řídicí systémy**  
Název tématu: **Numerická simulace proudění kolem kmitajícího leteckého profilu**  
Zadávací katedra: **Ústav nových technologií a aplikované informatiky**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :


1. Seznamte se s problematikou aeroelastické nestability, zejména v případě leteckých profilů.
2. Nastudujte a vyzkoušejte si základy práce s výpočetním balíkem OpenFOAM, na základě poskytnutých vzorů realizujte numerickou simulaci na pevné a na pohyblivé geometrii.
3. Proveďte numerickou simulaci kmitání profilu s nulovou rychlostí proudění pro několik hodnot koeficientu útlumu obou módů kmitání, porovnejte s experimentálními daty.
4. Pro rychlosti proudění odpovídající měření v aerodynamickém tunelu proveďte simulaci interakce proudění s kmitajícím profilem a zjistěte kritickou rychlost proudění, při které systém ztrácí stabilitu.

Rozsah grafických prací: **dle potřeby**  
Rozsah pracovní zprávy: **cca 50 stran**  
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**  
Seznam odborné literatury:

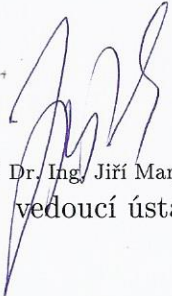
- [1] Šidlof P., Vlček V., Štěpán M., Horáček J., Luxa M. et al. (2014), Wind tunnel measurements of flow-induced vibration of a NACA0015 airfoil model, in: Proceedings of the ASME 2014 PVP Conference - symposium Fluid-structure interaction, Anaheim, CA, USA
- [2] Štěpán M., Šidlof P., Vlček V. (2013), Měřicí řetězec aerodynamického profilu se dvěma stupni volnosti, in: Interactions and feedbacks 2013, Prague, Czech Republic
- [3] Šidlof P., Řidký V. (2014), Flow past a self-oscillating airfoil with two degrees of freedom: measurements and simulations, EPJ Web of Conferences 67, pp. 02108, DOI 10.1051/epjconf/20146702108.
- [4] Šidlof P., Řidký V. (2015), Scalability of the parallel CFD simulations of flow past a fluttering airfoil in OpenFOAM, EPJ Web of Conferences 92, pp. 02080, DOI 10.1051/epjconf/20159202080.
- [5] Dowel E.H. (1978), A modern course in aeroelasticity, Kluwer Academic Publishers, London

Vedoucí bakalářské práce: **doc. Ing. Petr Šidlof, Ph.D.**  
Ústav nových technologií a aplikované informatiky

Datum zadání bakalářské práce: **20. října 2015**  
Termín odevzdání bakalářské práce: **16. května 2016**

  
prof. Ing. Václav Kopecký, CSc.  
děkan



  
prof. Dr. Ing. Jiří Maryška, CSc.  
vedoucí ústavu

## Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum: 14. 5. 2016

Podpis: Tisovská

## Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá interakcí pružně uloženého leteckého profilu s proudícím tekutinou a CFD (Computational Fluid Dynamics, výpočet dynamiky tekutin) simulací tohoto děje.

K řešení byl nejprve vytvořen matematický model, který zahrnuje dynamiku pružně uloženého profilu se dvěma stupni volnosti, bilanční rovnice mechaniky tekutin a okrajové podmínky pro rozhraní tekutiny a pevného tělesa. Byl popsán jev aeroelastické nestability, konkrétně statická a dynamická nestabilita. Dále byly provedeny simulace v programu OpenFOAM pro stacionární i pohyblivou výpočetní síť pro různé rychlosti proudícího vzduchu.

V práci jsou porovnány výsledky simulace laminárního a turbulentního řešiče na stacionární geometrii. Dále jsou uvedeny výsledky simulace na pohyblivé geometrii pro různé rychlosti proudění. Objevila se zde nedokonalá shoda s experimentálně získanými daty, která je pravděpodobně způsobená chybou chybou v implementaci numerického řešiče pro pohybové rovnice pružně uloženého tělesa.

### Klíčová slova:

aeroelastická nestabilita, CFD, OpenFOAM, NACA0015

## Abstract

The bachelor thesis deals with CFD (Computation Fluid Dynamics) simulation of interaction of an elastically supported airfoil with airflow.

First there was developed a mathematical model for solution that includes dynamics of a flexibly supported profile with two degrees of freedom, governing equations of fluid mechanics and boundary conditions for a fluid interface and a solid body. There was described the phenomenon of aeroelastic instabilities, namely static and dynamic instability. Further simulations were performed in the OpenFOAM CFD package for stationary and dynamic grid for different incident flow velocities.

The paper compares the results of simulations of laminar and turbulent solver for stationary geometry. Next the results of simulation on a moving geometry are listed for different flow velocities. There are not a perfect match with experimental data, which is probably caused by incorrect implementation of the equations of motion of the elastically supported airfoil.

## Keywords:

aeroelastic instability, CFD, OpenFOAM, NACA0015

## Poděkování

Ráda bych zde poděkovala vedoucímu práce doc. Ing. Petru Šidlovi, Ph.D. za cenné rady, věcné připomínky a vstřícnost při konzultacích. Děkuji rodičům za jejich podporu a trpělivost a v neposlední řadě děkuji Ing. Tomáši Tisovskému za cenné podněty k této práci.

Práce vznikla za podpory projektu GAČR 13-10527S Analýza subsonického flutteru elasticky uložených profilů s využitím interferometrie a CFD.



# Obsah

Úvod	10
<b>1 Matematický model</b>	<b>12</b>
1.1 Pohybové rovnice pružně uloženého profilu . . . . .	12
1.1.1 Bezrozměrný tvar pohybových rovnic . . . . .	13
1.2 Bilanční rovnice mechaniky tekutin . . . . .	15
1.2.1 Rovnice kontinuity . . . . .	15
1.2.2 Rovnice bilance hybnosti . . . . .	15
1.2.3 Bezrozměrný tvar bilančních rovnic . . . . .	16
1.3 Turbulentní model . . . . .	17
1.3.1 Výpočetní přístupy . . . . .	18
1.4 Okrajové podmínky pro rozhraní tekutiny a pevného tělesa . . . . .	18
1.4.1 Kinematická podmínka . . . . .	19
1.4.2 Dynamická podmínka . . . . .	19
<b>2 Aeroelasticita</b>	<b>20</b>
2.1 Aerodynamika . . . . .	20
2.2 Kvasi-statická aeroelastická aproximace . . . . .	21
2.2.1 Statická nestabilita . . . . .	22
2.2.2 Dynamická nestabilita . . . . .	23
<b>3 Příprava numerické simulace</b>	<b>26</b>
3.1 Princip metody konečných objemů . . . . .	26
3.2 Tvorba sítě . . . . .	26
3.2.1 Strukturovaná síť . . . . .	26
3.2.2 Nestrukturovaná síť . . . . .	27
3.2.3 Kvalita sítě . . . . .	27

3.2.4	Realizace sítě . . . . .	27
3.3	Nastavení řešiče . . . . .	29
3.3.1	Okrajové podmínky . . . . .	29
3.3.2	Nastavení rychlosti $\vec{u}$ a tlaku $p$ . . . . .	29
3.3.3	Výběr řešiče . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Výsledky simulace</b>	<b>31</b>
4.1	Stacionární geometrie . . . . .	31
4.1.1	Laminární řešič . . . . .	31
4.1.2	Turbulentní řešič . . . . .	34
4.2	Pohyblivá geometrie . . . . .	36
4.2.1	Nulová rychlost proudění . . . . .	37
4.2.2	Nalezení kritické rychlosti proudění . . . . .	40
	<b>Závěr</b>	<b>47</b>
	<b>Literatura</b>	<b>48</b>
	<b>Přílohy</b>	<b>49</b>
	Obsah přiloženého CD . . . . .	49

## Úvod

Počítačové simulace jsou v dnešní době velice rychle se rozvíjejícím oborem. I pro složité modely a rovnice, jak je tomu v případě proudění tekutiny, existují počítače, které disponují dostatečnou výpočetní kapacitou pro rychlý výpočet simulace. I přes cenu a složitost paralelních počítačů je výhodnější jev nejprve simulovat a až poté testovat na prototypu. Díky výpočetní kapacitě, kterou paralelní i běžné počítače nabízejí, lze simulovat složité děje s přijatelnou přesností řešení vzhledem k experimentálním datům.

Tato bakalářská práce se zabývá simulací proudění vzduchu kolem modelu křídla s označením NACA0015. Měření samobuzených kmitů modelu křídla v aerodynamickém tunelu bylo realizováno v letech 2014-2016 v rámci projektu GAČR 13-10527S Analýza subsonického flutteru elasticky uložených profilů s využitím interferometrie a CFD. Jak je popsáno v [7], jedná se o model symetrického křídla s délkou tělivity 59,5 mm, hmotností 148 g, vzdáleností těžiště od náběžné hrany 26.4 mm a osou rotace umístěnou 19,83 mm od těže hrany. Tento model byl pro měření dat umístěn do aerodynamického tunelu, který byl vybudován ve starém zlatém dole v Novém Kníně. Výška měřicí sekce je 210 mm, šířka 80 mm. Pro simulaci je třetí rozměr zanedbán a model je zjednodušen pouze na 2D případ. Tunel funguje na principu podtlaku. Ze štoly je vyčerpán vzduch, čímž vznikne podtlak. Při otevření ventilu dochází k vyrovnávání atmosférického tlaku a vzduch proudí zpět do tunelu. V měřené oblasti lze dosáhnout rychlosti vzduchu až  $M = 1,1$  při maximálním otevření regulačního ventilu. Na obrázku 1 je zobrazeno uchycení křídla v tunelu. Na obrázku 2 je zobrazena část tunelu s interferometrem, který je umístěn nad měřicí sekci.

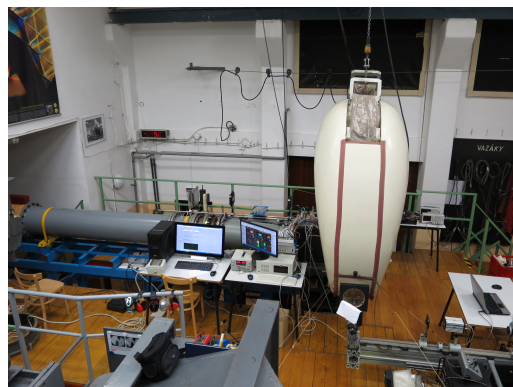
V první části bakalářské práce je matematicky popsáno pružně uložené těleso a jsou zde uvedeny bilanční rovnice mechaniky tekutin. V další podkapitole jsou napsány okrajové podmínky pro rozhraní tekutiny a pevného tělesa. Všechny rovnice jsou převedeny do bezrozměrného tvaru pomocí bezrozměrných čísel, která se využívají zejména pro popis chování tekutiny. Dále je zde vysvětlen pojem aeroelastické nestability, která se objevila při měření.

Dále se práce věnuje přípravě numerické simulace. Jsou zde vysvětleny principy, podle nichž se hodnotí kvalita sítě, uvedeny použité podmínky v simulaci a využívané algoritmy řešiče.

V poslední kapitole jsou uvedeny výsledky simulací a jejich porovnání s naměřenými daty. Jsou zobrazeny výsledky numerické simulace bez modelu turbulence a s mo-



Obrázek 1: Uchycení modelu křídla v měřicí sekci aerodynamického tunelu



Obrázek 2: Laboratoř s částí tunelu

delem turbulence na nepohyblivé síti s pevným úhlem náběhu  $30^\circ$ . Výpočty jsou provedeny pro nulové proudění s různou tuhostí pružiny, na které je model uložen. Pro pohyblivou geometrii jsou simulovány různé rychlosti obtékajícího vzduchu v tunelu. Je nalezena kritická rychlost proudění, při které dochází k aeroelastické dynamické nestabilitě, flutteru.

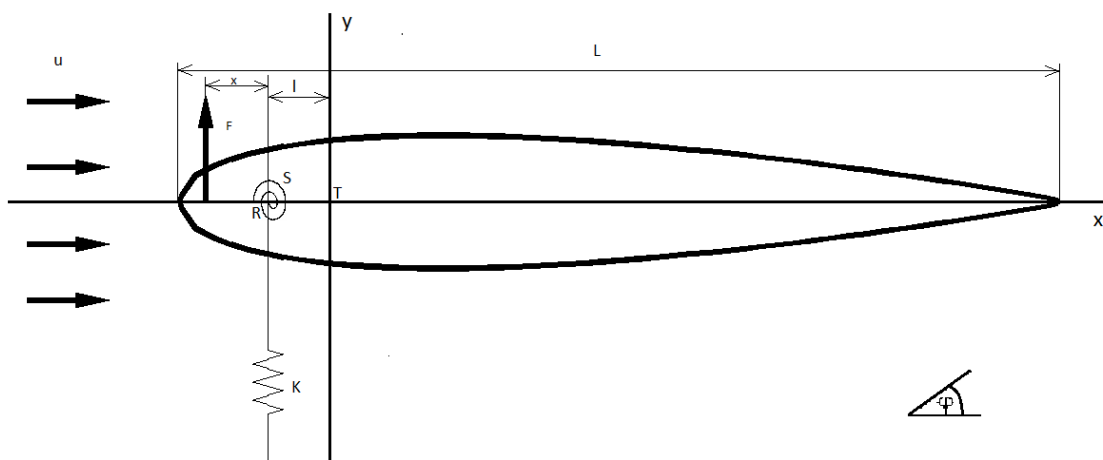
# 1 Matematický model

Pro popis pohybu leteckého profilu v aerodynamickém tunelu je nutné prozkoumat proudění vzduchu, pohyb samotného profilu a jejich vzájemné působení.

## 1.1 Pohybové rovnice pružně uloženého profilu

Pro sestavení pohybových rovnic křídla je nejvhodnější použít Lagrangerův formalismus, jedná se o metodu pro získání popisu pohybovými rovnicemi daného problému.

Křídlo je schématicky znázorněno na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1: Schématický nákres uchycení křídla

Jedná se o mechanický systém s dvěma stupni volnosti. Křídlo je uchyceno v elasticke ose  $R$ , která je od těžiště  $T$  vzdálena o  $l$ .  $L$  je tětíva, tedy vzdálenost od náběžné k odtokové hraně.  $S$  a  $K$  jsou tuhosti pružin. Hmotnost křídla je  $m$ . Proudění o rychlosti  $u$  vyvolává sílu  $F$ , které se říká vztlaková.

Vzhledem k počtu stupňů volnosti jsou zobecněné souřadnice dvě: výchylka  $y$  a úhel natočení  $\varphi$ . Jinými slovy se křídlo pohybuje v ose  $y$  a otáčí kolem bodu  $R$ .

Polohu těžiště lze vyjádřit

$$y - l \cdot \sin(\varphi), \quad (1.1)$$

kde  $y$  a  $\varphi$  jsou funkce času.

Kinetická energie soustavy

$$E_K = \frac{1}{2}m(\dot{y} - l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi))^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2, \quad (1.2)$$

kde  $J$  je moment setrvačnosti.

Potenciální energie je dána vztahem

$$E_P = \frac{1}{2}Ky^2 + \frac{1}{2}S\varphi^2. \quad (1.3)$$

Obecná rovnice pro Lagrangeův formalizmus 2. druhu je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} = F_j - \frac{\partial E_P}{\partial q_j} - \frac{\partial R_d}{\partial \dot{q}_j}, \quad (1.4)$$

kde  $q_j$  značí zobecněné souřadnice,  $j$  je index a jde od 1 do počtu stupňů volnosti.  $R_d$  vyjadřuje disipativní síly.  $F_j$  jsou vnější síly působící na soustavu.

Po dosazení všech elementů jsou pohybové rovnice následující

$$m\ddot{y} + m \cdot l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) - m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) + Ky = \frac{1}{2}\rho u^2 LC_L(\varphi) \quad (1.5)$$

$$J\ddot{\varphi} + S\varphi + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos^2(\varphi) - m \cdot l \cdot \ddot{y} \cdot \cos(\varphi) = \frac{1}{2}\rho u^2 L(x+l)C_L(\varphi), \quad (1.6)$$

kde síla na pravé straně rovnice je blíže popsána v kapitole 2.1 Aerodynamika,  $J$  je moment setrvačnosti,  $C_L$  je vztlakový koeficient

$$C_L = 2 \cdot \pi \cdot \sin(\varphi). \quad (1.7)$$

Vztlakový koeficient je blíže vysvětlen v kapitole 2.1 Aerodynamika.

### 1.1.1 Bezrozměrný tvar pohybových rovnic

Vzhledem k častému používání bezrozměrného tvaru rovnic v mechanice tekutin je vhodné i pohybové rovnice převést do stejného tvaru použitím následujících bezrozměrných čísel. Kapitoly zabývající se bezrozměrným tvarem rovnic vychází z kurzu vedeného francouzským profesorem Emmanuelem de Langre [1].

Číslo posunutí, anglicky Displacement number, je definováno

$$D = \frac{y_0}{L}, \quad (1.8)$$

kde  $y_0$  je posunutí a  $L$  je charakteristický rozměr. Toto číslo tedy vyjadřuje poměr mezi posunutím a velikostí pevného tělesa.

Dalším číslem je Cauchyho číslo

$$C_Y = \frac{\rho \cdot u_0^2}{E}, \quad (1.9)$$

kde  $\rho$  je hustota tekutiny,  $u_0$  je rychlost proudění,  $E$  je modul pružnosti, tedy vlastnost materiálu. Toto číslo spojuje interakce tekutiny a pevné látky. Jedná se o poměr dynamického tlaku a tuhosti pevné látky, na kterou tlak působí. Čím větší je Cauchyho číslo, tím více je pevná látka deformována proudící tekutinou.

Pro bezdimenzionální popis a následně pro aeroelastickou nestabilitu (viz. kapitola 2) je zavedena aproximace, která platí pro malé úhly  $\varphi$ :  $\sin(\varphi) = \varphi$ ,  $\cos(\varphi) \approx 1$  a  $\varphi \cdot \dot{\varphi} \approx 0$ . Lagrangovy rovnice 1.5 a 1.6 s rychlostí proudění  $u_0 = 0$  mají tvar

$$m \cdot \ddot{y} - m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} + K \cdot y = 0 \quad (1.10)$$

$$J \cdot \ddot{\varphi} + S \cdot \varphi - m \cdot l \cdot \ddot{y} + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} = 0 \quad (1.11)$$

Z první rovnice (1.10)

$$l \cdot K \cdot y = l \cdot m(l \cdot \ddot{\varphi} - \ddot{y}), \quad (1.12)$$

druhou rovnici lze tedy zjednodušit

$$J \cdot \ddot{\varphi} + S \cdot \varphi + l \cdot K \cdot y = 0 \quad (1.13)$$

Výsledné pohybové rovnice i s nenulovým prouděním mají tvar

$$J \cdot \ddot{\varphi} + S \cdot \varphi - m \cdot l \cdot \ddot{y} + m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} = \frac{1}{2} \rho u^2 L C_L(\varphi) \quad (1.14)$$

$$J \cdot \ddot{\varphi} + S \cdot \varphi + l \cdot K \cdot y = \frac{1}{2} \rho u^2 L(x+l) C_L(\varphi). \quad (1.15)$$

Sílu  $F$  lze aproximovat pomocí Taylorova rozvoje, kde je uvažován malý úhel

$$F = \frac{1}{2} \rho u^2 L C_L(\varphi) = \frac{1}{2} \rho u^2 L \cdot 2\pi \cdot \varphi \quad (1.16)$$

Dále jsou zavedeny bezdimenzionální proměnné:  $q_1 = \frac{y}{DL}$ ,  $q_2 = \frac{\varphi}{D}$ ,  $\Omega = \sqrt{\frac{KJ}{SM}}$ ,  $\kappa = \frac{KL^2}{S}$ ,  $\epsilon = \frac{l}{L}$ ,  $\chi = \frac{x}{L}$ .

Po dosazení výše uvedených parametrů do pohybových rovnic s nenulovým prouděním dostáme

$$\ddot{q}_1 - \epsilon \ddot{q}_2 + \Omega^2 q_1 = C_Y 2\pi \frac{\Omega^2}{\kappa} q_2 \quad (1.17)$$

$$\ddot{q}_2 + (1 - C_Y 2\pi(\epsilon + \kappa)) q_2 = -\kappa \epsilon q_1. \quad (1.18)$$

## 1.2 Bilanční rovnice mechaniky tekutin

Pro zjednodušení matematického modelu je proudění bráno jako nestlačitelné. Tato aproximace závisí na rychlosti. Běžně je proudění považováno za nestlačitelné do velikosti Machova čísla 0,3. Je prokázáno, že nevznikne chyba větší než 5 %.

### 1.2.1 Rovnice kontinuity

Rovnice kontinuity v základním tvaru je

$$\nabla \cdot (\rho \cdot \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.19)$$

kde  $\vec{u}$  značí vektor rychlosti a  $\rho$  hustotu tekutiny.

V našem případě je uvažováno nestlačitelné proudění, tedy rovnice se zjednoduší

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (1.20)$$

### 1.2.2 Rovnice bilance hybnosti

Bilancí hybnosti pro element tekutiny je Cauchyho rovnice

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\sigma} + \vec{g}, \quad (1.21)$$

kde  $\vec{g}$  je vektor gravitačního zrychlení.  $\vec{\sigma}$  je tenzor napětí. Jedná se o tenzor druhého řádu. Obsahuje 9 komponent  $\sigma_{ij}$ , které popisují kompletně napětí elementu tekutiny.  $D$  je symbol pro materiálovou derivaci. Jedná se o derivaci, které zohledňuje pohyb elementu v prostoru a čase v rychlostním poli.

Za předpokladu nestlačitelnosti tekutiny lze z Cauchyho rovnice odvodit Navier-Stokesovu rovnici

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}, \quad (1.22)$$

kde  $p$  je tlak a  $\mu$  je dynamická viskozita.

V Navier-Stokesově rovnici jde lépe popsat jednotlivé členy a jejich význam. První člen vyjadřuje změnu rychlosti v závislosti na čase a popisuje proudění. Člen  $\mu \nabla^2 \vec{u}$  je rozptylový. Může být popsán jako rozdíl mezi rychlostí v bodě a rychlostí v malém objemu kolem tohoto bodu. Pro newtonovskou kapalinu to znamená, že viskozita působí jako difúzní koeficient pro hybnost. Dále jsou na pravé straně rovnice zdroje. Člen  $-\nabla p$  je termodynamická práce tekutiny.  $\rho \vec{g}$  zastupuje vnější zdroje, v tomto případě se konkrétně jedná o gravitační zrychlení.



Vektorový tvar rovnice lze pro kartézské souřadnice přepsat pro jednotlivé složky. Pro směr x má rovnice tvar

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right). \quad (1.23)$$

Pro směr y má rovnice tvar

$$\rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\right). \quad (1.24)$$

Pro směr z má rovnice tvar

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right). \quad (1.25)$$

### 1.2.3 Bezrozměrný tvar bilančních rovnic

Bezrozměrová analýza je často používaným nástrojem v mechanice tekutin. Je používána ke klasifikaci jevů. Vzhledem k popisu bezrozměrnými čísly nemůže dojít k záměně a chybě v jednotkách. Nejznámějším bezrozměrným číslem je Reynoldsovo číslo. Tato kapitola vychází z kurzu vedeným francouzským profesorem Emmanuelem de Langre [1].

Reynoldsovo číslo je definováno

$$R_E = \frac{uL}{\nu}, \quad (1.26)$$

kde  $L$  je charakteristický rozměr,  $u$  je střední hodnota rychlosti proudění a  $\nu$  je kinematická viskozita.

Velikost tohoto čísla určuje chování proudění za překážkou. Pro malé hodnoty tekutina dokonale obtéká, pro vysoké dojde k odtržení proudění a k turbulencím. Kritická hodnota tohoto čísla je experimentálně měřená.

Dalším bezdimenzionálním číslem je Froudeho

$$F_R = \frac{u}{\sqrt{g \cdot L}}, \quad (1.27)$$

kde  $L$  je charakteristický rozměr. Toto číslo se používá k popisu vlivu gravitace na proudění. Jeho vliv je patrný v otevřených kanálech.

Třetím bezrozměrovým číslem používaných pro popis chování tekutiny je tzv. redukováná rychlost

$$U_R = \frac{u_0}{c}, \quad (1.28)$$

kde  $u_0$  je rychlost proudění tekutiny,  $E$  je elasticita,  $\rho_S$  je hustota pevné látky a  $c$  je rychlost elastických vln v pevné látce popsána vztahem

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_S}}. \quad (1.29)$$

Redukovaná rychlost dává tedy v souvislost vzájemné působení pevné látky a tekutiny. V bezrozměrné analýze se pro popis vzájemné interakce používá pouze jedno číslo, které nemusí být nutně redukovaná rychlost. Dalším příkladem může být Cauchyho číslo. Na základě velikosti redukované rychlosti lze v mnohých případech jisté veličiny zanedbat a díky tomuto jevu vznikají jednodušší modely, které jsou snáze řešitelné.

Pro bezrozměrný tvar rovnic je nutné zavést bezrozměrné parametry

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad (1.30)$$

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_0}, \quad (1.31)$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho \cdot u_0^2}, \quad (1.32)$$

$$\tilde{t} = \frac{t}{T_{fluid}} = \frac{t \cdot u_0}{L}. \quad (1.33)$$

Pro čas byl zaveden bezrozměrný parametr, který vyjadřuje čas, který potřebuje částice tekutiny k obtečení leteckého profilu.

Po substituci parametrů je rovnice kontinuity

$$\nabla \cdot \tilde{u} = 0. \quad (1.34)$$

Po substituci je rovnice hybnosti

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} = -\frac{gL}{u_0^2} \cdot \vec{e}_z - \nabla \tilde{p} + \frac{\mu}{\rho u_0 L} \nabla^2 \tilde{u} \quad (1.35)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} = -\frac{1}{F_R^2} \cdot \vec{e}_z - \nabla \tilde{p} + \frac{1}{R_E} \nabla^2 \tilde{u}, \quad (1.36)$$

kde  $e_z$  je jednotkový vektor určující působení gravitace  $g$ .

Z této rovnice je patrný vliv bezdimenzionálních čísel a případné zanedbání jednotlivých členů, v závislosti na hodnotách těchto čísel.

## 1.3 Turbulentní model

Proudění tekutiny se rozděluje na laminární a turbulentní. Toto rozdělení závisí na Reynoldsově čísle. Mezní hodnota se uvádí jako kritická. Obecně se pohybuje okolo 2000. Více o Reynoldsově čísle v sekci 1.2.3.

Turbulentní proudění tedy podmiňuje Reynoldsovo číslo větší než 2000. Turbulence se popisuje jako nestálý, nepravidelný pohyb, při kterém pohyb jednotlivých částic tekutiny má chaotický charakter. Turbulence se mohou projevovat víry, které mohou být soběstačné a mohou se různě uvolňovat. Dále je zde patrná tzv. energetická kaskáda. Energie je předávána do větších vírů a disipuje v malých vírech v teplo.

### 1.3.1 Výpočetní přístupy

Pro CFD (computational fluid dynamics, v překladu: výpočetní dynamika tekutin) se využívají různé přístupy:

**DNS (Direct Numerical Simulation):** Řeší Navier-Stokesovy rovnice bez modelování turbulence. Vyžaduje tedy nízké Reynoldsovo číslo a jednoduché geometrie obtékaného tělesa. Používá se zejména pro sítě s malými elementy. Zachytí veškeré detaily, ale výpočet je náročný na čas. V praxi se využívá jako akademický nástroj, který například ověřuje modely turbulence.

**LES (Large Eddy Simulation):** Řeší filtrované N-S rovnice. Částečně modeluje víry.

**RANS (Reynolds-Averaged N-S):** Založený na průměrování N-S rovnic. Veškeré turbulence jsou modelovány. Tento model je nejvyužívanější.

V praxi se nejčastěji používá RANS model. V tomto modelu se počítá pouze průměrná rychlost proudění, proto je rychlejší, ale méně přesný.

V této práci je použit RANS model, konkrétně dvou-rovnicový tzv.  $k-\omega$ . Další často používaný model je  $k-\varepsilon$ , jehož se využívá při plně turbulentním proudění.

Model  $k-\omega$  je charakteristický svou stabilitou. Je založen na rovnici pro kinetickou energii  $k$  a specifické ztráty  $\omega$ , tyto rovnice jsou převzaty z [4]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j}) + G_k - Y_k + S_k \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j}) + G_\omega - Y_\omega + S_\omega, \quad (1.38)$$

kde  $\Gamma_k$  a  $\Gamma_\omega$  je vyjádření vzájemného vztahu  $k$  a  $\omega$ ,  $G_k$  je generovaná kinetické energie turbulence,  $G_\omega$  značí generování specifických ztrát. Dále  $Y$  představují disipaci jednotlivých veličin,  $S$  jsou zdrojové členy.

## 1.4 Okrajové podmínky pro rozhraní tekutiny a pevného tělesa

Rozhranním je myšlena tenká vrstva, kde se vzájemně ovlivňují proudící tekutina s pohyblivým pevným tělesem. Tato vzájemná interakce v obecném případě ovlivňuje kinematiku i dynamiku celé soustavy.

### 1.4.1 Kinematická podmínka

Kinematická podmínka určuje vzájemné ovlivňování rychlostí. Říká, že rychlost tekutiny a rychlost posuvu pevné látky se rovnají. Tato i následující kapitola vychází z kurzu [1].

$$\vec{u} = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (1.39)$$

kde  $\vec{u}$  je rychlost tekutiny a  $\xi$  určuje posuv pevné látky. Pro zobecněné souřadnice platí

$$u(x, t) = \frac{dq}{dt}(t)\varphi(x), \quad (1.40)$$

kde  $q$  i  $\varphi$  určují funkci posunutí  $\xi$ . Jedná se o složky posunutí v prostoru a čase.

Bezrozměrný tvar je

$$U_R \cdot \tilde{\vec{u}} = D \frac{d\tilde{q}}{dt} \varphi(x). \quad (1.41)$$

### 1.4.2 Dynamická podmínka

Dynamická podmínka udává sílu, jakou tekutina působí na rozranní. Výsledná síla je složena ze sil způsobených tlakem a viskozitou.  $\vec{F}$  je modelová síla, která značí působení kapaliny na těleso.

$$\int_{interface} \{[-p\vec{I} + \mu(\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u})] \cdot \vec{n}\} \varphi \cdot dS - \vec{F} = 0, \quad (1.42)$$

kde  $\vec{I}$  je jednotkový vektor,  $\nabla\vec{u}$  je tenzor se složkami  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ,  $\nabla^T\vec{u}$  je tenzor se složkami  $\frac{du_j}{dx_i}$ .

Bezrozměrný tvar je

$$\int_{inteface} \{C_Y[-p\vec{I} + \frac{1}{R_E}(\nabla\vec{u} + \nabla^T\vec{u})] \cdot \vec{n}\} \varphi \cdot dS - D \cdot \vec{F} = 0. \quad (1.43)$$

## 2 Aeroelasticita

Aeroelasticita je jev, který nastává při interakci proudění a pružného tělesa. Zejména je zkoumána aeroelastická nestabilita, ke které může dojít při obtékání tekutiny kolem tělesa. Tento jev je blíže zkoumán z důvodů bezpečnosti, dále je zkoumáno jeho využití v energetice. Po překročení kritického bodu dojde k samovolně buzeným kmitům se vzrůstající amplitudou, které může mít i katastrofické důsledky.

K modelování tohoto jevu je použit matematický model pro tekutinu a pro obtékané těleso. Vzhledem k faktu, že proud tekutiny působí na pevné těleso a tím mění jeho polohu v čase a prostoru, jsou rovnice tekutiny a tělesa vzájemně provázány a ve většině případů jsou nelineární, což velice komplikuje řešení. Často jsou modelovány ukázkové příklady, kde lze nějakou část rovnic zanedbat i přes zkreslení výsledku.

### 2.1 Aerodynamika

Ze základů aerodynamiky je známo, že tekutina je stlačitelná a viskózní. Stlačitelnost lze zanedbat do velikosti Machova čísla 0,3. Viskozitu lze zanedbat pro vysoká Reynoldsova čísla, pokud je těleso dobře obtékáno a nedochází k odtržení vírů. Pro výpočet v OpenFOAMu se uvažuje proudění nestlačitelné a viskózní. Vliv viskozity a stlačitelnosti je patrný v tenké vrstvě kolem obtékaného profilu. Této vrstvě se říká mezní.

Síla vznikající při obtékání nezávisí na absolutní rychlosti, ale pouze na rychlosti relativní, což je rychlost proudění v hraniční vrstvě. Tato síla má dvě složky, vztlakovou (ve směru kolmém na proudění) a odporovou (ve směru proudění). Tyto složky mají dvě komponenty, tlakovou a viskozí. Viskozí lze obvykle v aeroelastických problémech zanedbat.

Tuto sílu můžeme pomocí bezdimenzionální charakteristiky popsat jako

$$F = f(\alpha, R_E, S_T, M)q, \quad (2.1)$$

kde  $\alpha$  je úhel náklonu,  $R_E$  je Reynoldsovo číslo, blíže specifikováno v kapitole 1.2.3,  $S_T$  je Strouhalovo číslo,  $M$  je Machovo číslo a  $q = \frac{1}{2}\rho u^2$  je dynamický tlak.

Tato síla je rozložena na dvě složky a moment, tzv. vztlakovou, odporovou a aerodynamický moment. Vztlaková síla se značí  $L$  a jedná se o složku síly, která působí

kolmo ke směru proudění, v tomto konkrétním případě je to síla označená na obrázku 1.1, schéma uchycení křídla a sil působících, jako  $F$ . Další složkou je odporová síla  $D$ , síla působící ve směru pohybu. Poslední je aerodynamický moment  $M$ , který udává křídlu rotaci. Moment je kolmý na obě složky síly  $L$  a  $D$ .

Koeficienty používané pro popis těchto sil u křídla jsou

$$C_L = \frac{L}{q \cdot S} \quad (2.2)$$

$$C_D = \frac{D}{q \cdot S} \quad (2.3)$$

$$C_M = \frac{M}{q \cdot S \cdot L}, \quad (2.4)$$

kde  $S$  je charakteristická plocha křídla,  $q$  je dynamický tlak kapaliny a  $L$  je délka křídla.

Každý z koeficientů je funkcí Reynoldsova, Machova a Strouhalova čísla. Pokud je ovšem proudící tekutina považována za ideální, vliv Machova a Strouhalova čísla je zanedbatelný. Koeficienty samozřejmě závisí na úhlu natočení  $\alpha$ .

Pro malé úhly natočení  $\alpha$  roste koeficient  $C_L$  lineárně. S narůstajícím úhlem se nárůst  $C_L$  zmenšuje až při kritickém úhlu rapidně klesne.

Cirkulace  $\Gamma$  je dána

$$\Gamma = \oint u \cdot \cos(\theta) dl, \quad (2.5)$$

kde  $\theta$  je úhel, který svírá proudění s elementem délky  $dl$ ,  $u$  zde značí rychlost proudění podél elementu  $dl$ . V ideální tekutině je cirkulace kolem každého uzavřeného elementu stejná.

Jak uvádí Fung [2], pro stacionární proudění ideální kapaliny s nulovou cirkulací je odporová i vztlaková síla nulová. Pokud je přítomna cirkulace  $\Gamma$  okolo tělesa spolu s nenulovou rychlostí proudění  $u$ , poté je zde přítomna vztlaková síla  $L$  a je dána Joukowského teorémem

$$L = \rho \cdot u \cdot \Gamma, \quad (2.6)$$

kde  $\rho$  je hustota kapaliny.

Pro křídlo se cirkulace  $\Gamma$  mění s úhlem náklonu. Vztlakový koeficient může být tedy vyjádřen jako

$$C_L = a_0 \cdot \alpha. \quad (2.7)$$

Z teorie hydrodynamiky vyplývá  $a_0 = 2\pi$ .

## 2.2 Kvasi-statická aeroelastická aproximace

Kvasi-statická aproximace je založena na myšlence oddělení dynamik tekutiny a pevné látky, které jsou vzájemně provázány kinematickou a dynamickou podmínkou.

Tedy dynamiky se vzájemně ovlivňují, ale lze je pro řešení separovat a řešit vzlášt pro daný čas. Zanedbáváme tedy vliv rychlosti proudění v mezní vrstvě na dynamiku tekutiny.

Tuto aproximaci lze použít, pokud je redukovaná rychlost  $U_R$  větší než Displacement number  $D$ , tedy  $U_R \gg D$ . Více o těchto číslech v kapitolách 1.1.1 Bezrozměrný tvar pohybových rovnic a 1.2.3 Bezrozměrný tvar bilančních rovnic.

## 2.2.1 Statická nestabilita

Pokud uvažujeme mechanický systém s jedním stupněm volnosti, tedy jednou zobecněnou souřadnicí  $q$ , v závislosti na rychlosti proudění se může objevit statická nestabilita. I zde musí být splněna podmínka, že  $U_R \gg D$ .

Pozice tuhého tělesa tedy závisí na  $q$ . Proto i podmínky pro hranici mezi tělesem a tekutinou závisí na stejném parametru. Tedy tlak bude záviset na  $q$ . Proto se v dynamické podmínce pro mezní vrstvu, viz 1.4.2 Dynamická podmínka, síla  $F$  nahradí za sílu  $F_{FS}$ . Tato síla reprezentuje účinky pevné látky na obtékající kapalinu.

Jak je patrné z dynamické podmínky,  $F_{FS}$  tedy závisí na Cauchyho čísle, Reynoldsově čísle a parametru  $Dq$ , kde  $D$  je číslo posuvu pro pevnou látku. Pro malé výchylky tělesa  $D \ll 1$  lze tuto sílu aproximovat

$$F_{FS} = C_Y F^0 + DC_Y \left( \frac{\partial F}{\partial Dq} \right)^0 q + \dots \quad (2.8)$$

První část síly je síla působící pokud je výchylka nulová. Další částí je vyjádřena síla, která je způsobena pohybem mezní vrstvy. Tato rovnice je stejná jako rovnice mechanicky popsané pružiny. Mezní vrstva se v tomto případě tedy chová stejně, jako pružina. Amplituda kmitů závisí na rychlosti proudění.

Typickým příkladem statické nestability je křídlo s jedním stupněm volnosti. Křídlu je povolen pohyb pouze kolem osy  $z$ , kde je umístěna axiální pružina. Pokud je úhel náklonu označen  $\varphi$ , poté je pohybová rovnice křídla bez okolního proudění

$$J \cdot \ddot{\varphi} + C \cdot \varphi = 0, \quad (2.9)$$

kde  $J$  je moment setrvačnosti a  $C$  je tuhost pružiny. Pokud je čas brán jako

$$\tilde{t} = \frac{t}{\sqrt{J/C}}, \quad (2.10)$$

poté je výsledná rovnice pohybu tuhého tělesa

$$\ddot{\varphi} + \varphi = 0. \quad (2.11)$$

Pokud uvažujeme proudění, změní se rovnice

$$\ddot{\varphi} + \varphi = C_Y C_L(\varphi) \frac{x}{L}. \quad (2.12)$$

Sílu vyvolanou prouděním můžeme aproximovat

$$\ddot{\varphi} + \varphi = C_Y \frac{x}{L} \left( \frac{\partial C_L}{\partial \varphi} \right)^0 \varphi. \quad (2.13)$$

Jak je uvedeno v kapitole 1.1, vztlakový koeficient  $C_L$  lze v případě křídla zapsat jako  $2\pi\varphi$ .

$$\ddot{\varphi} + (1 - C_Y \frac{x}{L} 2\pi) \varphi = 0. \quad (2.14)$$

Z této rovnice je patrné, že pokud je  $x$  pozitivní, tzv. tuhost destabilizuje soustavu. Kritické Cauchyho číslo lze vyjádřit jako

$$C_Y^{critical} = \frac{L}{2\pi x}, \quad (2.15)$$

kritická rychlost proudění je

$$U^{critical} = \sqrt{\frac{C}{\rho\pi Lx}}, \quad (2.16)$$

kritická rychlost závisí pouze na tuhosti pružiny  $C$ , délce křídla  $L$  a pozici osy otáčení  $x$ .

Z rovnice 2.16 je zřejmé, jak se bude křídlo chovat při různé rychlosti proudění. Pokud bude rychlost menší než kritická, křídlo se bude pohybovat s exponenciálně tlumenými kmity. Nad kritickou rychlostí bude výchylka růst exponenciálně.

## 2.2.2 Dynamická nestabilita

Pro vznik dynamické nestability musí mít mechanický systém dva stupně volnosti, tedy dvě zobecněné souřadnice  $q_1$  a  $q_2$ . Typicky se jedná o kombinaci translačního a rotačního pohybu. V tomto případě závisí pohyb tělesa na zobecněných souřadnicích  $q_1$  a  $q_2$ . Proto i podmínky pro mezní vrstvu závisí na stejných parametrech, stejně jako tlak a viskozita. Výsledná síla působící na proudění je tedy také úměrná Cauchyho číslu, jako v případě statické nestability.

$$F_{FS}^i = C_Y F_i^0 + DC_Y \left( \frac{\partial F_i}{\partial Dq_1} \right)^0 q_1 + DC_Y \left( \frac{\partial F_i}{\partial Dq_2} \right)^0 q_2 + \dots, \quad (2.17)$$

kde  $i = \{1, 2\}$ .

Je-li koeficient  $K_{ij} = \left( \frac{\partial F_i}{\partial q_j} \right)^0$ , poté lze pohybové rovnice obecně napsat jako

$$m_1 \ddot{q}_1 + k_1 \dot{q}_1 = C_Y K_{11} q_1 + C_Y K_{12} q_2 \quad (2.18)$$



$$m_2\ddot{q}_2 + k_2\ddot{q}_2 = C_Y K_{21}q_1 + C_Y K_{22}q_2, \quad (2.19)$$

kde  $k_1$  a  $k_2$  jsou tuhosti pružin, na kterých je těleso upevněno.

Konkrétním příkladem tohoto jevu je zde probíraný model křídla, viz. obrázek 1.1. Pohybové rovnice (viz. též kapitola 1.1) potom mají tvar

$$\ddot{q}_1 - \epsilon\ddot{q}_2 + \Omega^2 q_1 = C_Y 2\pi \frac{\Omega^2}{\kappa} q_2 \quad (2.20)$$

$$\ddot{q}_2 + (1 - C_Y 2\pi(\epsilon + \kappa))q_2 = -\kappa\epsilon q_1. \quad (2.21)$$

Jak je z rovnic patrné, výsledné chování ovlivňuje Cauchyho číslo. V druhé rovnici toto číslo ovlivňuje frekvenci rotace kolem axiální osy. Tedy s rostoucí rychlostí proudění bude klesat frekvence otáčení. Pokud je vzat v úvahu i člen v první rovnici, je možné, že dojde k nestabilitě. Pro jakoukoliv hodnotu parametrů  $q_1$  a  $q_2$  mohou vzniknout dva módy charakterizované vlastní frekvencí a vlastním vektorem. Řešení soustavy diferenciálních rovnic má tvar

$$V(t) = V_0 e^{\omega t}, \quad (2.22)$$

kde

$$V(t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

a

$$V_0 = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}_0. \quad (2.24)$$

Symbol  $\omega$  značí komplexní kruhovou frekvenci. Po dosazení z rovnic (2.20 a 2.21) je řešení

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \Omega^2 & -\epsilon\omega^2 - C_Y \cdot 2\pi \frac{\Omega^2}{\kappa} \\ \kappa\epsilon & \omega^2 + 1 - C_Y \cdot 2\pi(\epsilon + \kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}_0 e^{\omega t} = 0. \quad (2.25)$$

Aby existovalo netriviální řešení rovnice, musí být determinant matice roven 0. Rovnici pro výpočet determinantu lze přepsat pomocí koeficientů  $A, B, C$

$$A\omega^4 + B\omega^2 + C = 0, \quad (2.26)$$

kde

$$A = 1, \quad (2.27)$$

$$B = 1 - \Omega^2 - C_Y \cdot 2\pi(\epsilon + \kappa) + \kappa\epsilon^2, \quad (2.28)$$

$$C = 1 - C_Y \cdot 2\pi(\epsilon + \kappa) + \kappa\epsilon C_Y \cdot 2\pi \frac{\Omega^2}{\kappa}. \quad (2.29)$$

Řešením rovnice 2.26 je

$$\omega^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}. \quad (2.30)$$

Rozlišují se čtyři druhy řešení. První dva druhy jsou pro reálnou kruhovou frekvenci  $\omega$ . V těchto případech se jedná o statickou nestabilitu. Pokud je kruhová frekvence  $\omega$  větší než nula, jedná se o statickou nestabilitu typu divergence. V opačném případě se křídlo navrátí do nulové polohy bez kmitání. S rostoucí rychlostí proudění se hodnoty kruhové frekvence  $\omega$  přibližují. Bod, kde se rovnají, se nazývá kritická rychlost  $U^{critical}$ . V tomto bodě má Cauchyho číslo hodnotu 0,08 a objevuje se zde tzv. flutter, neboli dynamická nestabilita. Pokud se dále zvyšuje rychlost proudění, nastává jeden ze zbývajících dvou druhů řešení. Pokud je  $\omega$  komplexní se zápornou reálnou částí, poté dochází k tlumeným kmitům. Pokud je  $\omega$  komplexní s kladnou reálnou částí, dochází ke kmitům se vzrůstající amplitudou. Toto chování může mít destruktivní účinky a v případě křídel je nežádoucím jevem.

## 3 Příprava numerické simulace

### 3.1 Princip metody konečných objemů

V první kapitole jsou uvedeny rovnice, kterými lze modelovat proudění tekutiny kolem pohyblivého pevného tělesa. Tyto rovnice jsou ovšem kromě akademických zjednodušených případů na triviálních geometriích analyticky neřešitelné. Proto se řeší za pomoci numerických metod, v tomto případě je použita metoda konečných objemů.

Metoda konečných objemů počítá s rovnicemi proudění v jejich integrálním tvaru. Princip spočívá v rozdělení celé oblasti na menší podoblasti, tzv. kontrolní (konečné) objemy. Přes tyto oblasti poté probíhá integrace, na níž je aplikována Gaussova-Ostrogradského věta o divergenci. Výsledkem je potom soustava lineárních algebraických rovnic, například pro hodnoty rychlosti a tlaku ve středech konečných objemů.

### 3.2 Tvorba sítě

Sít je jedním z nejdůležitějších elementů přípravy simulace. Závisí na ní přesnost, rychlost a míra konvergence. Sít se skládá z jednotlivých elementů, pro které se vypočítává simulace. Jsou rozlišovány dva druhy sítí, strukturovaná a nestrukturovaná.

#### 3.2.1 Strukturovaná sít'

Strukturovanou sít' tvoří soubor paralelně jdoucích křivek. Počet souborů odpovídá počtu dimezí a bod sítě je průsečíkem dimezí. Na složitějších geometriích lze strukturované sítě generovat obtížně v programech určených pro generování sítí. Strukturované sítě jsou vhodnější z hlediska paměťových nároků a rychlosti výpočtu simulace.

Z hlediska struktury jsou rozlišovány následující typy sítí::

**kartézská** Pro kartézskou sít' jsou typické úsečky, které leží v osách  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Výpočet pro tento typ sítě je nejpřesnější.

**křivočará** Pro křivočarou síť jsou typické křivky. Její výhodou je přizpůsobení se tvaru obtékaného tělesa.

**stejněměrná, nesterjnoměrná** Jedná se o síť, která je rozdělena na oblasti, ve kterých má síť stejné, nebo nesterjné množství elementů. Kvůli přesnosti je možné, že v nějaké oblasti je nutná jemnější část sítě.

**multi-bloková** Pomocí spojení více bloků je dosaženo lepších výsledků pro komplexnější geometrie. Síť použitá v této práci je příkladem právě takovéto sítě.

### 3.2.2 Nestruturovaná síť

Výhodou nestruturované sítě je možnost jejího automatického generování. Nevýhodou je větší náročnost výpočtu než u sítě strukuturované.

U této sítě lze snadno zhušťovat, nebo zjemňovat elementy bez ovlivnění zbytku sítě. Elementy mají pro 2D tvar trojúhelníku, čtyřúhelníku, nebo jsou hybridní.

### 3.2.3 Kvalita sítě

Kritéria kvality sítě jsou zásadní pro správně provedený výpočet. Nejdůležitější kritéria jsou: šikmost, kolmost (ortogonalita) a poměr stran. Známější jsou pod anglickými názvy: skewness, orthogonality, and aspect ratio.

Šikmost značí míru zdeformování elementů. Jedná se o míru odchýlení od optimálního stavu:

$$S = \max\left[\frac{\varphi_{max} - \varphi_o}{180 - \varphi_o}, \frac{\varphi_o - \varphi_{min}}{\varphi_o}\right], \quad (3.1)$$

kde  $\varphi_{max}$  je maximální úhel v elementu,  $\varphi_{min}$  je minimální a  $\varphi_o$  je optimální, který je pro čtyřstěn roven 90.

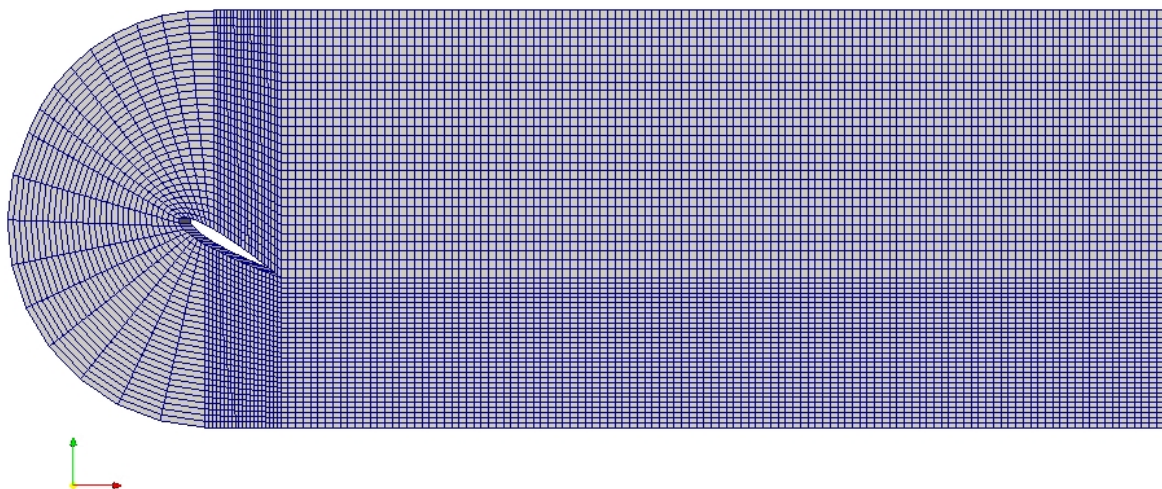
Pro určení kolmosti definujeme vektor ze středu do středu dvou sousedících buněk. Orientace vektoru směřuje z menší buňky k té větší. Kolmost určuje velikost úhlu mezi vektorem a společnou stěnou. V ideálním případě má být hodnota tohoto parametru rovna nule.

Posledním kritériem je poměr nejmenší a nejdelší strany buňky. V ideálním případě by tento poměr měl být roven jedné. I zde je důležité, aby sousední elementy sítě měly toto číslo podobné. Touto problematikou se zabývá Bakker [6].

### 3.2.4 Realizace sítě

Pro různé simulace byla vytvořena různá síť. Pro laminární i turbulentní proudění byla vygenerována síť stacionární s pevným úhlem náběhu 30°, viz obrázek 3.1. Pro vytvoření všech sítí byl použit generátor blockMesh a Octave skript [3].

Tuto síť tvoří 8940 elementů. Všechna výše zmíněná kritéria kvality sítě jsou v normě dané OpenFoamem. Konkrétní hodnoty jsou uvedeny v tabulce 3.1.



Obrázek 3.1: Výpočetní síť pro simulaci laminárního proudění

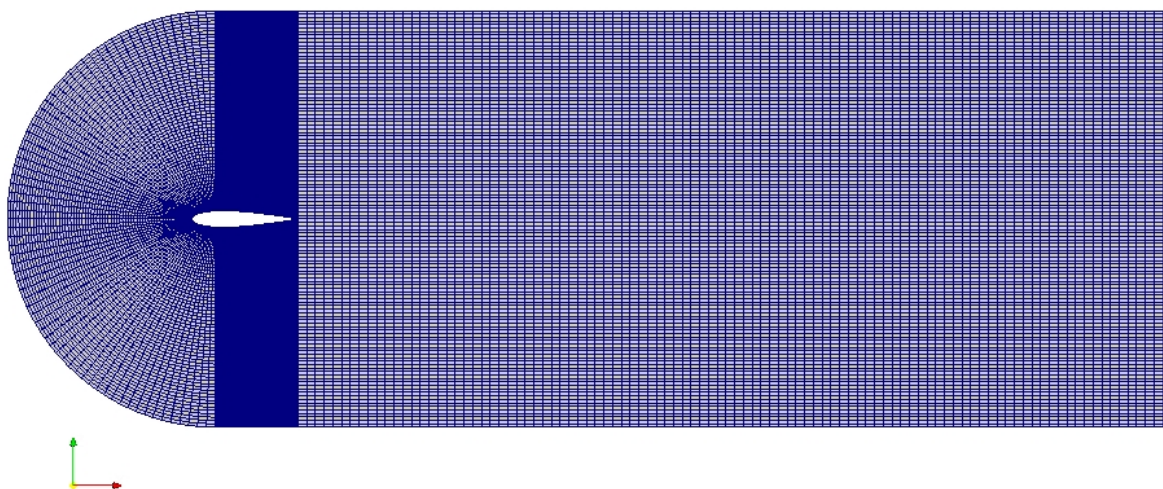
Síť	stacionární	pohyblivá
Maximální poměr stran buněk	4,4	3,7
Maximální šikmost	1,37	2,13
Maximální neortogonalita	49	45
Průměrná neortogonalita	7,16	4,2

Tabulka 3.1: Tuhost axiálních pružin

Pro simulaci na pohyblivé síti byla vytvořena síť jemnější s úhlem náběhu  $0^\circ$ , viz obrázek 3.2.

Síť zobrazenou na obrázku 3.2 tvoří 53356 buněk. Všechna výše zmíněná kritéria kvality sítě jsou v normě OpenFoamu a jejich konkrétní hodnoty jsou uvedeny v tabulce 3.1.

Pro pohyblivou síť je dále nutné nastavit kritéria pohybu tuhého tělesa. Toto nastavení se nachází v souboru `dynamicMeshDict`. Během simulace dochází k deformaci sítě vlivem pohybu tělesa, v tomto případě hraniční oblasti s názvem "wing". K deformaci nedochází na celé ploše sítě. Uživatel definuje oblasti vnitřní a vnější vzdálenosti, mezi kterými se síť deformuje. V tomto případě jsou vzdálenosti 0,03 m pro vnitřní a 0,08 m pro vnější oblast. Tento přístup se nazývá 6DoF (6DoFRigid-BodyMotion), tedy pohyb tuhého tělesa se šesti stupni volnosti.



Obrázek 3.2: Výpočetní síť simulaci s pohyblivým křídlem

### 3.3 Nastavení řešiče

Nastavení řešiče se realizuje v několika souborech. V souboru ControlDict se volí mimo jiné čas simulace a její krok. Pro výpočet tlaku a rychlosti je nutné nastavit okrajové podmínky pro hraniční oblasti definované při tvorbě sítě.

#### 3.3.1 Okrajové podmínky

Nastavení okrajových podmínek říká řešiči, jak se proudění chová na hranicích jednotlivých oblastí. Na vstupu je dána konstantní rychlost proudění vzduchu. Pro pevné stěny je předepsaná podmínka inletOutlet pro rychlost a nulová derivace tlaku ve směru normály. Pro povrch křídla je rychlost proudění rovna rychlosti pohybu profilu. Pro výstup platí, že je zde nulový tlak a stabilizovaná podmínka pro rychlost.

#### 3.3.2 Nastavení rychlosti $\vec{u}$ a tlaku $p$

Pro nastavení výpočtu rychlosti  $\vec{u}$  a tlaku  $p$  se využívají také okrajové podmínky. Byly zde použity podmínky: fixedValue, zeroGradient, inletOutlet, fixedFluxPressure a movingWallVelocity. Jak název napovídá, fixedValue značí zadanou konstantní hodnotu a je použita například k definici rychlosti proudění v části s názvem inlet.

Druhá podmínka zeroGradient nevyžaduje žádnou hodnotu, nastavuje složku gradientu ve směru normály k povrchu na nulu. Příkaz inletOutlet mění  $\vec{u}$  a  $p$  mezi fixedValue a zeroGradient v závislosti na směru proudění. Poslední podmínka je použita pro křídlo na pohyblivé síti a nastavuje rychlost proudění  $\vec{u}$  u této okrajové oblasti na rychlost pohybujícího se profilu.

### 3.3.3 Výběr řešiče

OpenFOAM nabízí mnoho řešičů. V případě simulace laminárního a turbulentního proudění na nepohyblivé síti byl použit řešič pimpleFoam. V případě pohyblivé sítě byl použit pimpeDyMFoam. Oba řešiče jsou určeny pro řešení proudění nestlačitelné tekutiny a jsou postaveny na algoritmu PIMPLE, což je spojení algoritmů SIMPLE a PISO. Více o těchto algoritmech v [5].

## 4 Výsledky simulace

Simulace byla provedena pro laminární a turbulentní proudění na stacionární síti. Dále proběhla simulace pro pružně uložené těleso. Porovnáno se chování tělesa při nulové rychlosti proudění pro různé tuhosti pružin. Byla nalezena kritická hodnota rychlosti proudění a došlo k porovnání s experimentálně naměřenými daty.

### 4.1 Stacionární geometrie

Pro nepohyblivou síť má symetrický model křídla NACA0015 pevně nastavený úhel náběhu na 30 °. Rychlost proudění tekutiny byla nastavena na 30 m/s.

Rozdíl mezi řešičem pro laminární a turbulentní proudění je v jejich algoritmu. Laminární řešič provádí na dané síti přímé numerické řešení Navier-Stokesových rovnic, které není schopno zachytit vliv turbulentních struktur menších než je charakteristický rozměr sítě. Zde použitý turbulentní model je tzv. RANS, více v kapitole 1.3. Tento řešič zjednodušeným způsobem modeluje vliv malých turbulentních struktur a jeho výsledkem je časově zprůměrované, střední proudové pole, kde je oproti laminární simulaci výrazně méně detailů. Proto vychází laminární řešení detailněji.

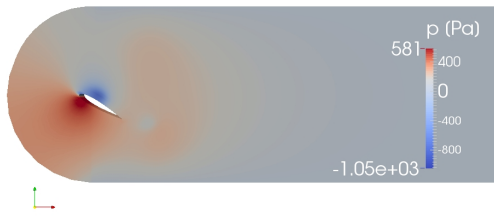
#### 4.1.1 Laminární řešič

Vývoj tlaku  $p$  v čase pro proudění tekutiny je uveden na obrázcích 4.1 až 4.8 níže.

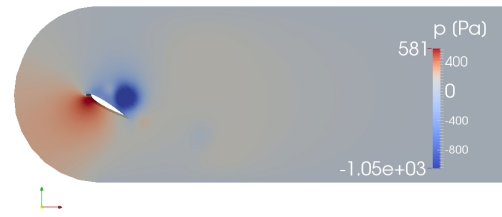
Na barevné škále jsou zobrazeny hodnoty. Červené jsou oblasti velkého tlaku, které se vyskytují u náběžné hrany křídla. Modré jsou oblasti podtlaku, které se vyskytují na horní části křídla a dále ve středech velkých vířů, které se odtrhávají z horního povrchu křídla.. Tyto hodnoty jsou záporné, protože atmosférický tlak je brán jako výchozí, tedy jeho hodnota je nula.

Vývoj rychlosti proudění tekutiny  $\vec{u}$  v čase pro laminární proudění je uveden na obrázcích 4.9 až 4.16 níže.

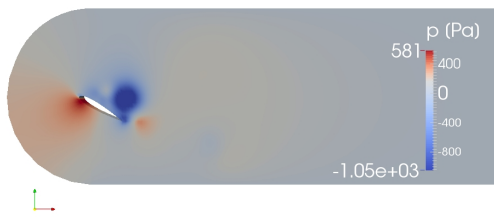




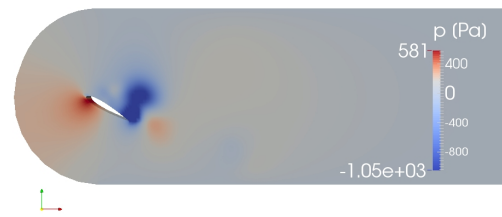
Obrázek 4.1: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,002$  s



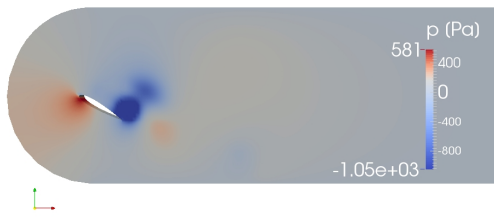
Obrázek 4.2: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,005$  s



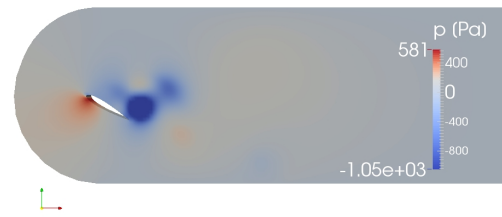
Obrázek 4.3: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,006$  s



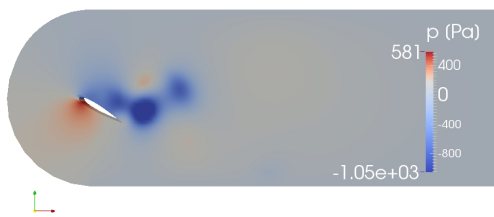
Obrázek 4.4: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,007$  s



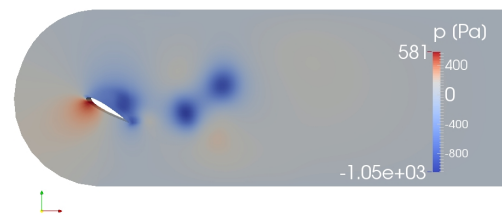
Obrázek 4.5: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,008$  s



Obrázek 4.6: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,009$  s



Obrázek 4.7: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,01$  s



Obrázek 4.8: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,012$  s

Je patrné, že dochází k odtrhávání vírů. Vzhledem k velkému úhlu náběhu byl tento jev očekáván.



Obrázek 4.9: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,002$  s



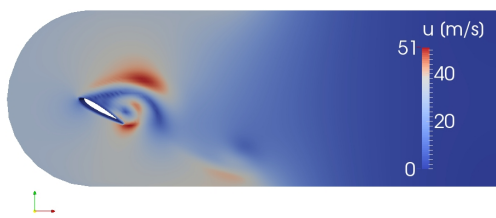
Obrázek 4.10: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,005$  s



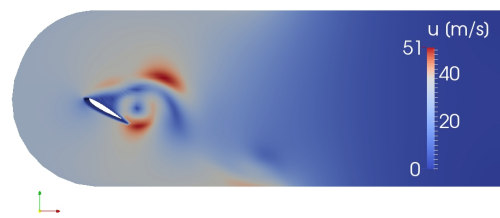
Obrázek 4.11: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,006$  s



Obrázek 4.12: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,007$  s



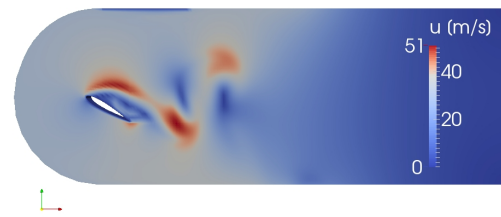
Obrázek 4.13: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,008$  s



Obrázek 4.14: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,009$  s



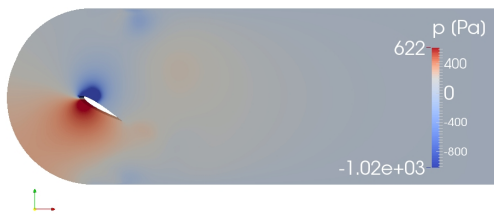
Obrázek 4.15: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,01$  s



Obrázek 4.16: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,012$  s

### 4.1.2 Turbulentní řešič

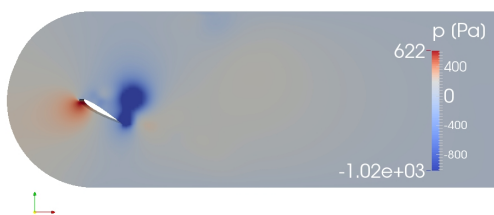
Výsledky výpočtu, kde je proudění bráno jako turbulentní, jsou uvedeny na obrázcích 4.17 až 4.24 pro tlak  $p$  a 4.25 až 4.32 pro rychlost proudění  $\vec{u}$ .



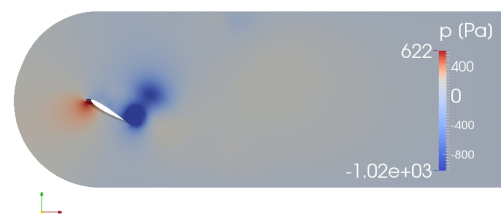
Obrázek 4.17: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,002$  s



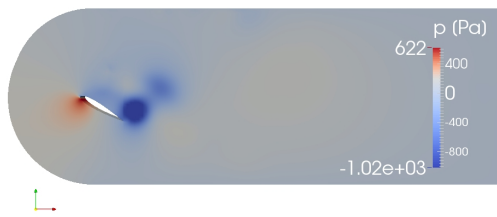
Obrázek 4.18: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,005$  s



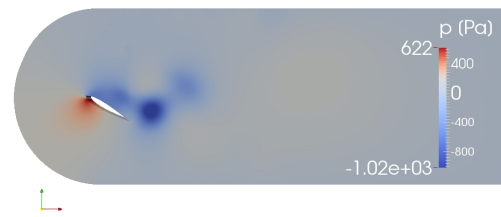
Obrázek 4.19: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,006$  s



Obrázek 4.20: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,007$  s



Obrázek 4.21: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,008$  s



Obrázek 4.22: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,009$  s



Obrázek 4.23: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,01$  s



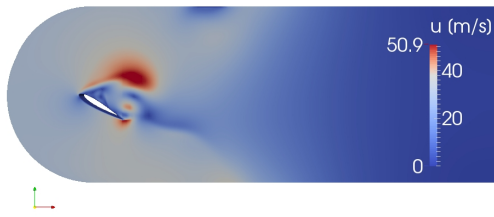
Obrázek 4.24: Tlak  $p$  v čase  $t = 0,012$  s



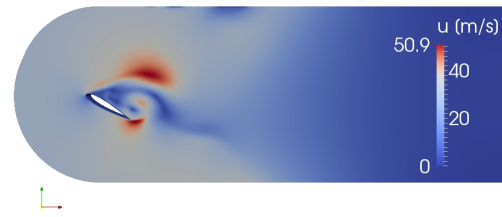
Obrázek 4.25: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,002$  s



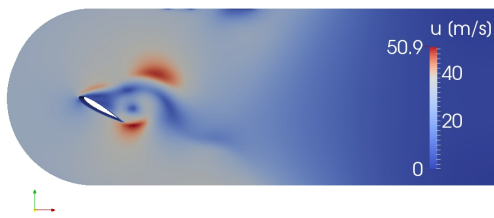
Obrázek 4.26: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,005$  s



Obrázek 4.27: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,006$  s



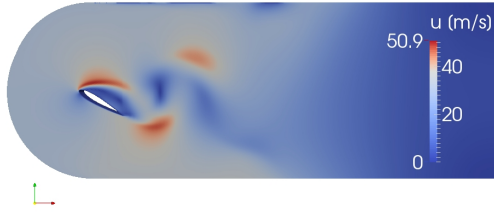
Obrázek 4.28: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,007$  s



Obrázek 4.29: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,008$  s



Obrázek 4.30: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,009$  s



Obrázek 4.31: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,01$  s



Obrázek 4.32: Rychlost tekutiny  $\vec{u}$  v čase  $t = 0,012$  s

## 4.2 Pohyblivá geometrie

Zde není určen pevný úhel náběhu křídla, ale křídlo je bráno jako pružně uložené těleso, jehož pohyb je matematicky popsán v kapitole 1.1. Simulace byla počítána pro nulovou rychlost proudění a dále pro více rychlostí za účelem nalezení kritické hodnoty rychlosti.

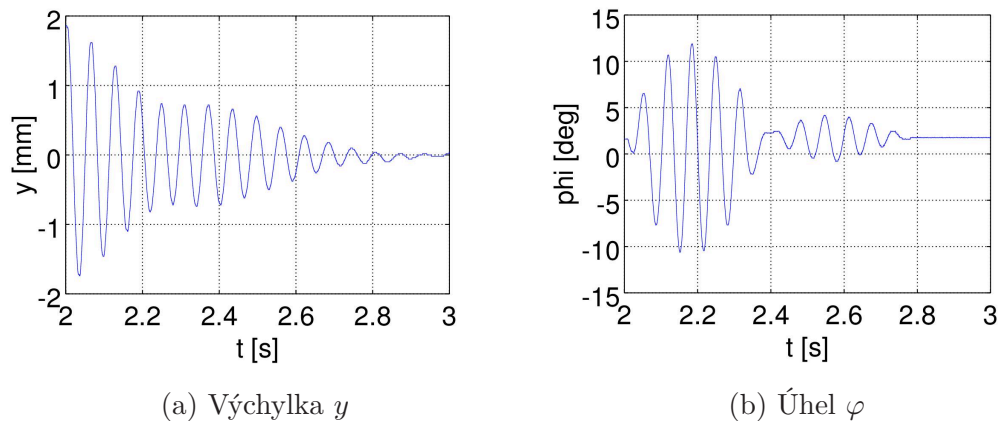
### 4.2.1 Nulová rychlost proudění

Model křídla má dva stupně volnosti, může se otáčet kolem osy a pohybovat vertikálně. Oba tyto pohyby jsou pružné. Vertikální pružina má tuhost 1629,5 N/m. Tuhosti a tlumení axiálních pružin použitých při měření jsou uvedeny v tabulce 4.1. Koeficient útlumu byl v simulaci nastaven dle tabulky 4.1 pro jednotlivé pružiny. Tato data byla poskytnuta vedoucím práce.

Pružina	m2p2	m2p3	m2p4
Tuhost [ $N \cdot m/rad$ ]	0,3048	0,4314	0,6217
Tlumení [ $kg \cdot m^2/s$ ]	0,0009549641	0,0007850256	0,0017395084

Tabulka 4.1: Tuhost a tlumení axiálních pružin

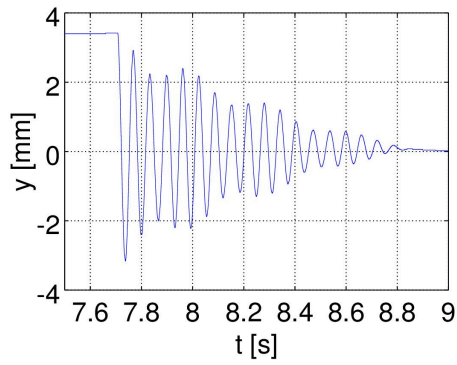
Pro pružiny m2p3 a m2p4 byla naměřena experimentální data pro nulovou rychlost proudění. Data jsou převzata z [7]. Počáteční výchylka pružiny m2p3 byla nastavena na 1,7 mm a pro pružinu m2p4 bylo nastaveno 3,3 mm. Grafy naměřených hodnot výchylky  $y$  a úhlu náběhu  $\varphi$  jsou pro pružinu m2p3 zobrazeny na obrázku 4.33.



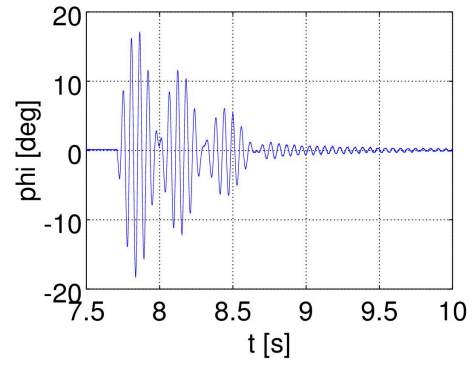
Obrázek 4.33: Změřený časový vývoj výchylky a úhlu pro pružinu m2p3, rychlost proudění  $u_0 = 0$

Pro pružinu m2p4 jsou ta data zobrazena na obrázku 4.34.

Simulace proběhla pro všechny pružiny s počáteční výchylkou 1,7 mm. Výsledky jsou zobrazeny na obrázcích 4.35 až 4.37.

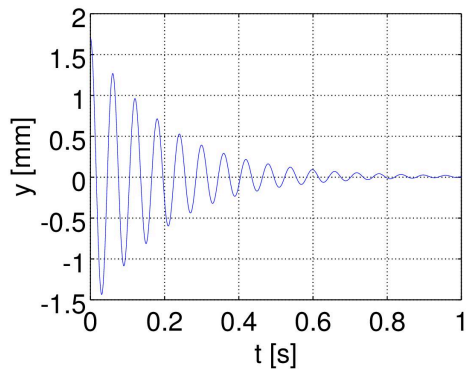


(a) Výchylka  $y$

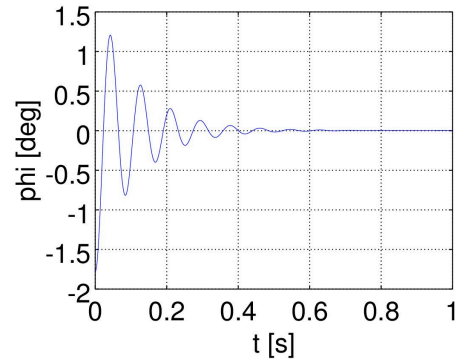


(b) Úhel  $\varphi$

Obrázek 4.34: Změřený časový vývoj výchylky a úhlu pro pružinu m2p4, rychlost proudění  $u_0 = 0$

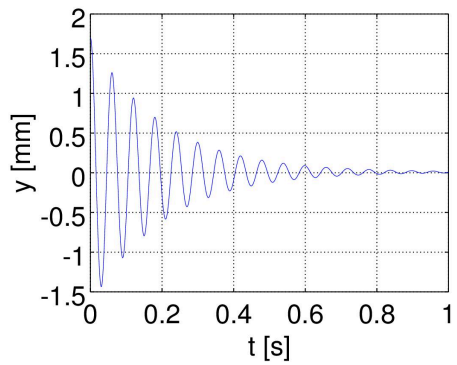


(a) Výchylka  $y$

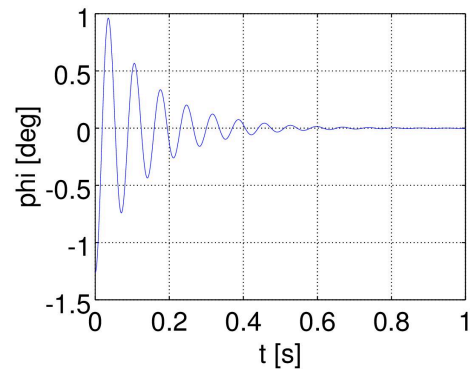


(b) Úhel  $\varphi$

Obrázek 4.35: Numerická simulace časového vývoje výchylky a úhlu pro pružinu m2p2, rychlost proudění  $u_0 = 0$

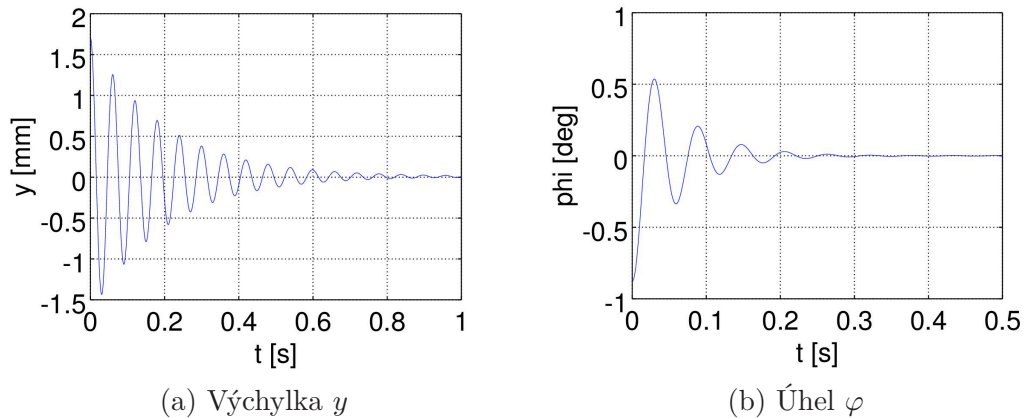


(a) Výchylka  $y$



(b) Úhel  $\varphi$

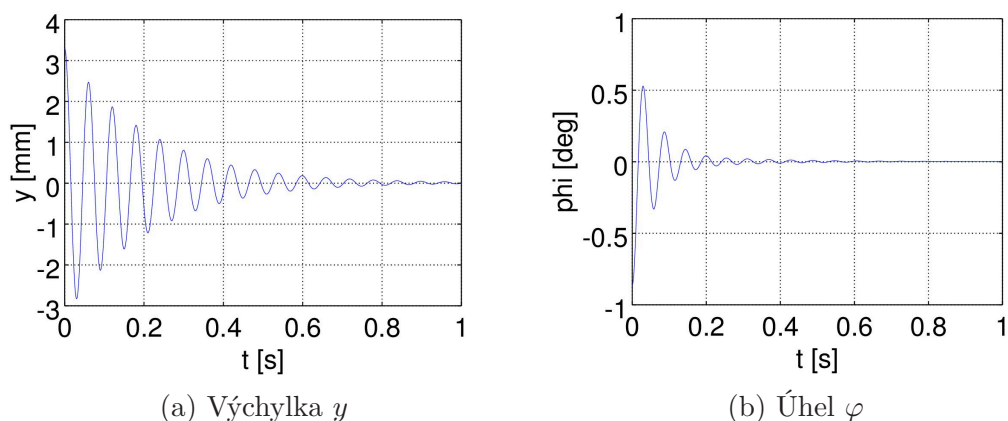
Obrázek 4.36: Numerická simulace časového vývoje výchylky a úhlu pro pružinu m2p3, rychlost proudění  $u_0 = 0$



Obrázek 4.37: Numerická simulace časového vývoje výchylky a úhlu pro pružinu m2p4, rychlost proudění  $u_0 = 0$

Z výsledných grafů je patrné, že pro simulovaný děj je čas ustálení vertikálního kmitání podobný jako čas pro měřená data. Ovšem úhel  $\varphi$  má menší amplitudu tlumených kmitů a kratší dobu ustálení. Pozice geometrie křídla v simulaci v čase ustálení se neshoduje s experimentálním modelem, který je díky působení gravitace v rovnovážné poloze nakloněn o  $1,5^\circ$  a vychýlen v ose  $y$  o  $-0,9$  mm. Senzory jsou pro tutu polohu nastaveny na nulovou hodnotu. Pro účely porovnání byla tedy počáteční výchylka a úhel upraveny odečtením příslušné konstanty.

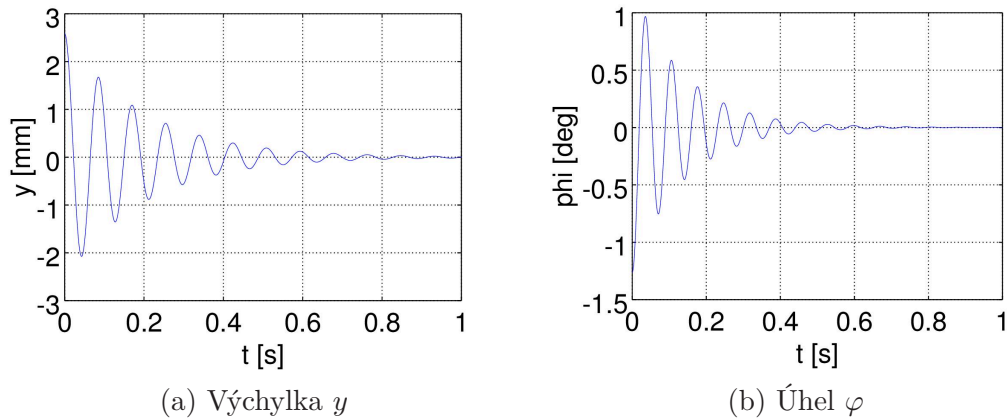
Další simulace kmitání křídla při nulové rychlosti proudění byla provedena s pružinou m2p4 a počáteční výchylkou  $3,3$  mm, jejíž výsledky jsou zobrazeny na obrázku 4.38. Stejně jako v předchozích případech souhlasí průběh i doba ustálení vertikálního posuvu, ovšem úhel je zde zase výrazně menší a průběh se déle ustaluje.



Obrázek 4.38: Numerická simulace časového vývoje výchylky a úhlu pro pružinu m2p4 s počáteční výchylkou  $y = 3,3$  mm, rychlost proudění  $u_0 = 0$



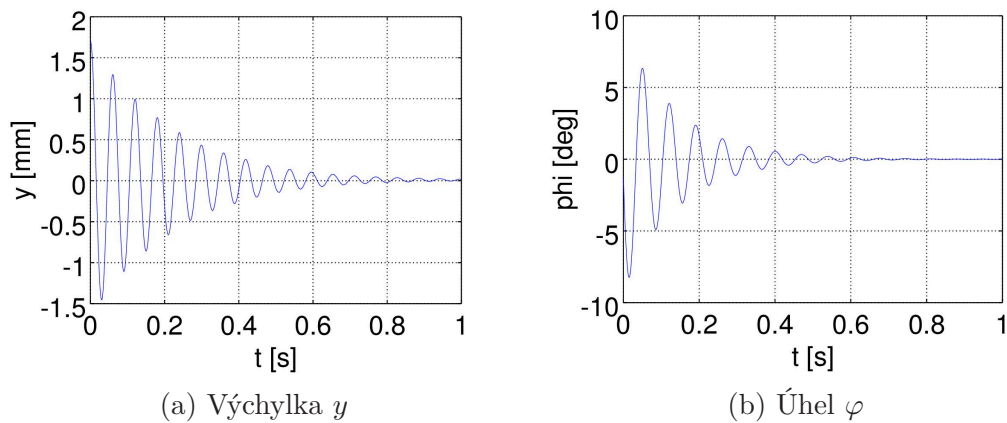
Poslední výpočet proběhl pro jinou tuhost vertikální pružiny. Zde nejsou k dispozici experimentální data, uvádím tedy pouze vypočtené na obrázku 4.39.



Obrázek 4.39: Numerická simulace časového vývoje výchylky a úhlu pro pružinu o vertikální tuhosti 815 N/m, rychlost proudění  $u_0 = 0$

Byla použita axiální pružina m2p3 s počáteční výchylkou 1,7 mm a tuhost vertikální pružiny byla nastavena na 815 N/m. Poloviční tuhost pružiny způsobila méně kmitů než dojde k ustálení.

Nevyhovující průběh výchylky  $\varphi$  se dá kompenzovat přidáním počátečního momentu hybnosti  $-0.0007546 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , které křídlo vybudí do požadovaného kmitání v rotační ose. Průběh výchylky  $y$  a  $\varphi$  jsou zobrazeny na obrázku 4.40.



Obrázek 4.40: Numerická simulace časového vývoje výchylky a úhlu s přidáním počátečním momentem, rychlost proudění  $u_0 = 0$

## 4.2.2 Nalezení kritické rychlosti proudění

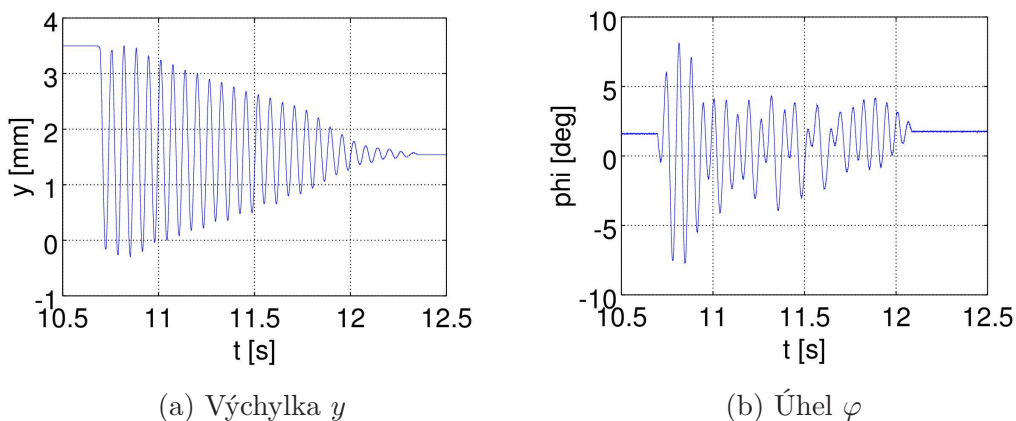
Pro nalezení kritické rychlosti byla použita experimentální data, která pak byla srovnána s daty ze simulací pro různé rychlosti proudění. V tabulce 4.2 jsou uve-

deny rychlosti proudění vybraných experimentálních dat, pro které byla provedena simulace. Byla použita pružina m2p3 pro všechna experimentální měření.

Data	2915_14	2915_17	2915_23	2915_27
Rychlost proudění [m/s]	43,9	47,7	85,6	113,2
Machovo číslo	0,128	0,139	0,25	0,33
Počáteční výchylka horizontální pružiny	3,3	3,3	3,3	0

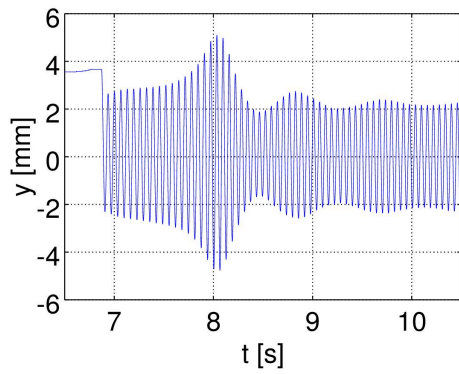
Tabulka 4.2: Parametry měření a simulací

Na následujících obrázcích 4.41 až 4.44 jsou uvedeny výsledky experimentálního měření pro úhel  $\varphi$  a výchylku  $y$ . Pro rychlost proudění 43,9 m/s dochází k tlumeným kmitům s ustavením na nenulové hodnotě, jak je zobrazeno na obrázku 4.41.

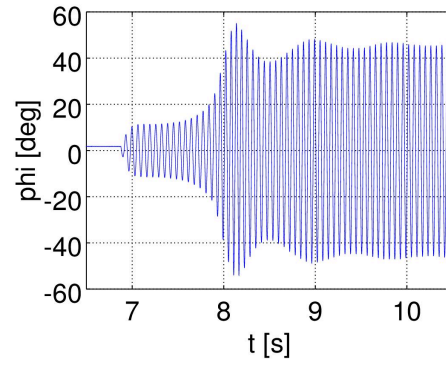


Obrázek 4.41: Změřený časový vývoj výchylky a úhlu pro rychlost proudění  $u_0 = 43,9$  m/s

Pro rychlost proudění  $u = 47,7$  m/s dochází k dynamické nestabilitě pro systém buzený z nenulové polohy (počáteční výchylka  $y$  je 3,3 mm). Výchylka  $y$  a úhel  $\varphi$  jsou zobrazeny na obrázcích 4.42a a 4.42b. K této nestabilitě dochází i pro vyšší rychlosti 85,6 m/s (obrázky 4.43a a 4.43b) a 114,2 m/s (obrázky 4.44a a 4.44b). U posledního případu je počáteční výchylka  $y$  nulová.

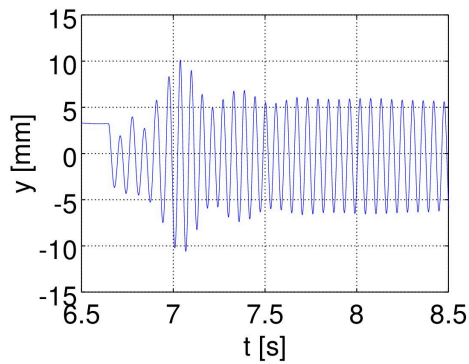


(a) Výchylka  $y$

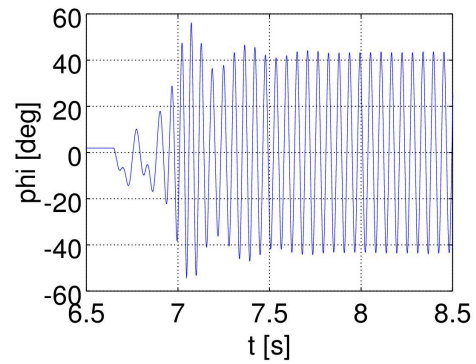


(b) Úhel  $\varphi$

Obrázek 4.42: Změřený časový vývoj výchylky a úhlu pro rychlost proudění  $u_0 = 47,7$  m/s

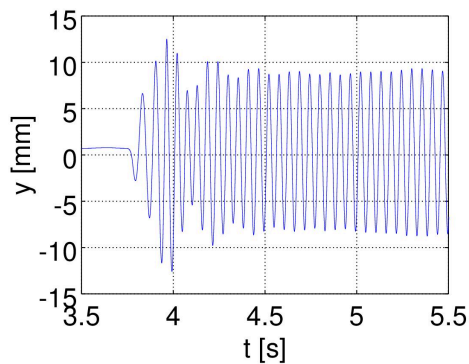


(a) Výchylka  $y$

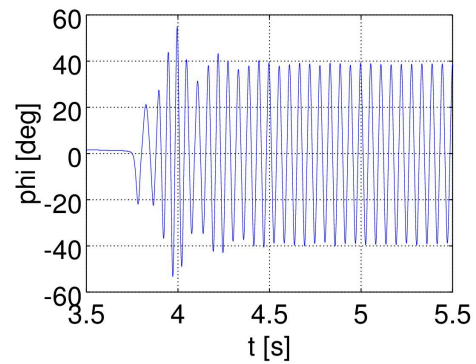


(b) Úhel  $\varphi$

Obrázek 4.43: Změřený časový vývoj výchylky a úhlu pro rychlost proudění  $u_0 = 85,6$  m/s



(a) Výchylka  $y$



(b) Úhel  $\varphi$

Obrázek 4.44: Změřený časový vývoj výchylky a úhlu pro rychlost proudění  $u_0 = 113,2$  m/s

Vlastní frekvence pro daný systém je

$$f = \frac{\sqrt{\frac{K}{m}}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{1650}{0,148}}}{2\pi} = 16,8 \text{ Hz}. \quad (4.1)$$

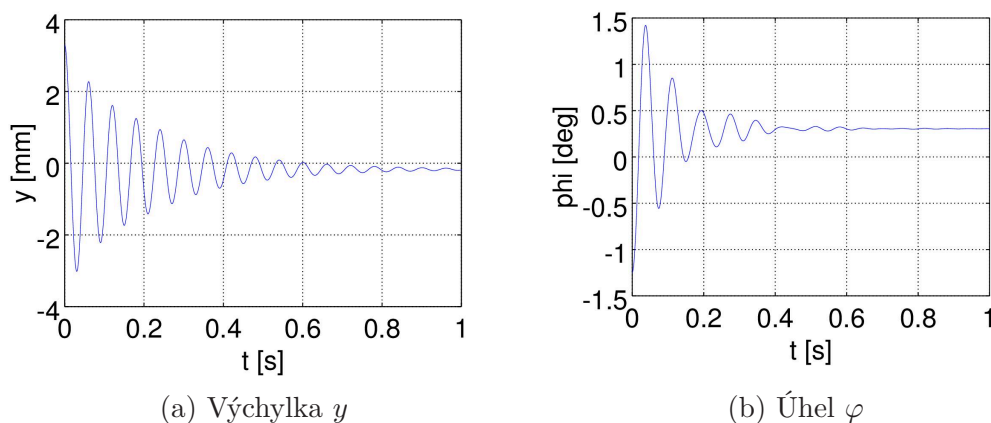
V tabulce 4.3 uvádím frekvence měřených dat.

Rychlost proudění [m/s]	43,9	47,7	85,6	113,2
Frekvence [Hz]	14,7	16,7	17,1	18,5

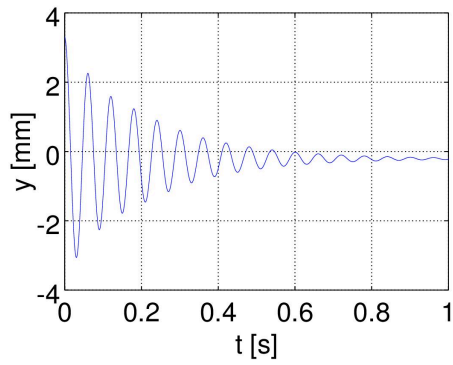
Tabulka 4.3: Frekvence kmitání profilu vyhodnocené z naměřených dat

Vlastní frekvenci je nejbližší frekvence při rychlosti proudění 47,7 m/s. V tomto případě dochází poprvé k dynamické nestabilitě. Při rychlosti 43,9 m/s je frekvence nižší a k jevu nestability nedochází.

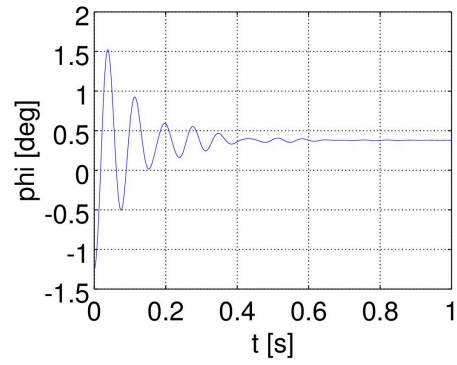
Simulace proběhla pro rychlosti shodné s experimentálními daty. Výsledky simulace jsou uvedeny na obrázcích 4.45 až 4.48. Všechny simulace byly provedeny s počáteční výchylkou 3,3 mm.



Obrázek 4.45: Numerická simulace časového vývoje výchylky a úhlu pro rychlost proudění  $u_0 = 43,9$  m/s

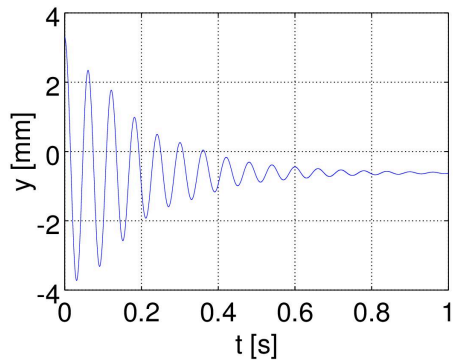


(a) Výchylka  $y$

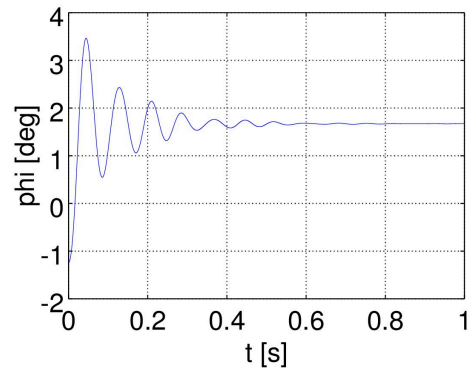


(b) Úhel  $\varphi$

Obrázek 4.46: Numerická simulace časového vývoje výchylky a úhlu pro rychlost proudění  $u_0 = 47,7$  m/s

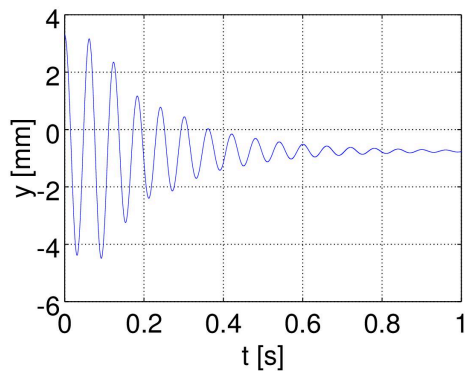


(a) Výchylka  $y$

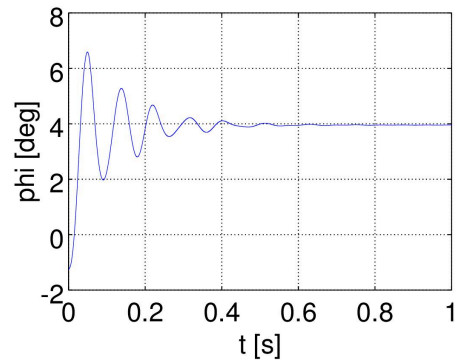


(b) Úhel  $\varphi$

Obrázek 4.47: Numerická simulace časového vývoje výchylky a úhlu pro rychlost proudění  $u_0 = 85,6$  m/s



(a) Výchylka  $y$



(b) Úhel  $\varphi$

Obrázek 4.48: Numerická simulace časového vývoje výchylky a úhlu pro rychlost proudění  $u_0 = 113,2$  m/s

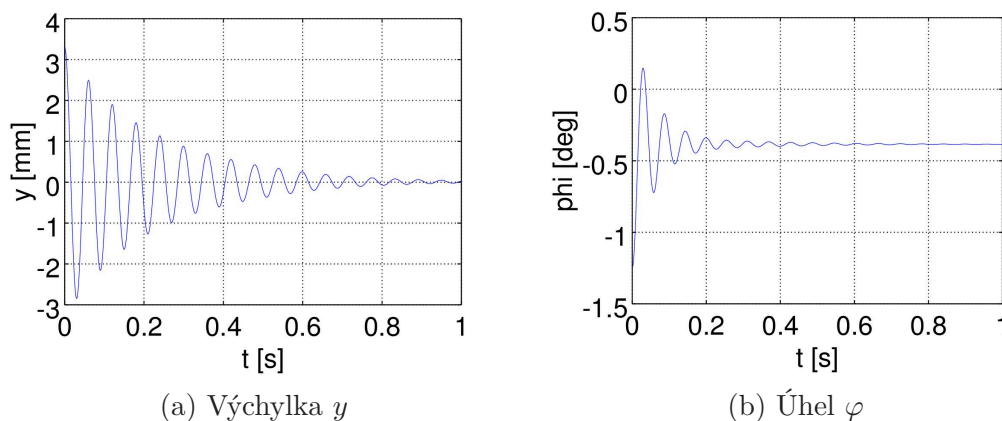
V tabulce 4.4 uvádím frekvence kmitání profilu, vyhodnocené z numerických simulací. Pro vzrůstající rychlost zpočátku dochází k většímu útlumu. Až pro rychlost 113,2 m/s frekvence kmitů roste, ovšem stále nedosahuje vlastní frekvence soustavy, aby docházelo k netlumeným kmitům.

Rychlost proudění [m/s]	43,9	47,7	85,6	113,2
Frekvence [Hz]	13,39	13,33	12,95	13,08

Tabulka 4.4: Frekvence kmitání profilu vyhodnocené z numerických simulací

Porovnáním s experimentálními daty je zjištěn výraznější útlum v simulaci, který má výrazný vliv i na kritickou rychlost. V případě experimentálních dat nedochází k flutteru, který je popsán v kapitole 2, ale k tzv. stall flutteru. Pro tento jev neplatí aproximace provedená v této práci a dochází k němu pouze pokud úhel  $\varphi$  dosáhne kritické hodnoty natočení. Vzhledem k nesrovnalostem simulace vůči experimentálním datům právě v tomto úhlu, tedy při simulacích k stall flutteru nedochází.

Při hledání příčiny této chyby byl vyloučen vliv okolního vzduchu. Při simulaci pro nulovou rychlost proudění a pro velmi malou hustotu ( $\rho = 10^{-20} \text{ kg/m}^3$ ) vzduchu dochází k velkému útlumu úhlu  $\varphi$ , jak je patrné z obrázku 4.49, kde je zobrazen průběh výchylky  $y$  a úhlu natočení  $\varphi$  v čase při nulové rychlosti proudění a hustotě okolní tekutiny  $\rho \doteq 0$  pro pružinu m2p4.



Obrázek 4.49: Numerická simulace časového vývoje výchylky a úhlu pro pružinu m2p4 s počáteční výchylkou  $y = 3,3$  mm, rychlost proudění  $u_0 = 0$  a hustotou tekutiny  $\rho \doteq 0$

Po porovnání se simulací bez zmenšené hustoty (obrázek 4.38) je tedy zřejmé, že vliv okolní tekutiny na dynamiku profilu při nulové rychlosti proudění je velice malý.

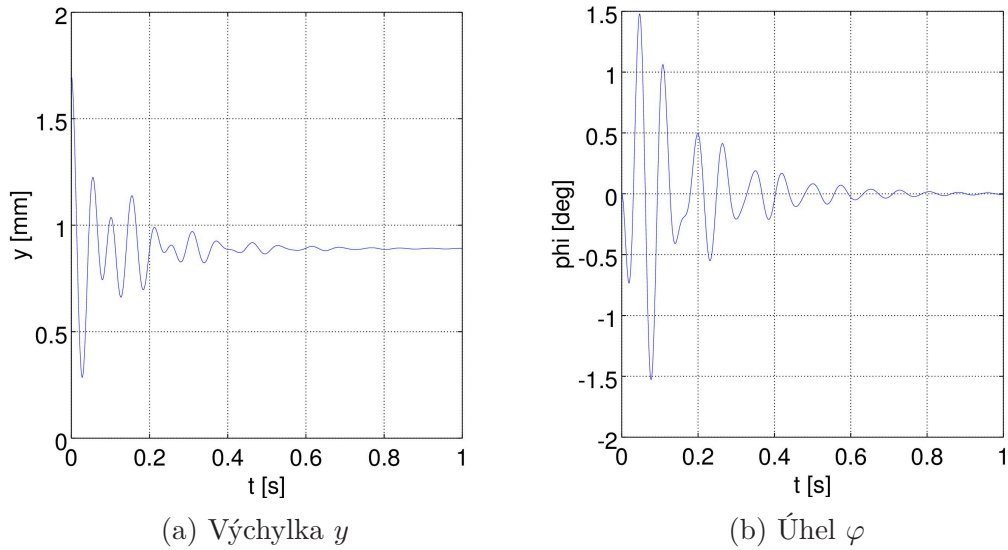
Dále byla provedena simulace pouze pro jeden mód kmitání, který dle analytických rovnic vyšel správně. Pravděpodobně bude tedy chyba při implementaci spojeného módu kmitání s bodem uchycení pružin mimo těžiště. Tento závěr potvrzují grafy, které uvádím na obrázku 4.50. Jsou zde zobrazeny výchylka  $y$  a úhel náběhu  $\varphi$  získané ze simulace v prostředí Matlab Simulink pro diferenciální rovnice, které popisují

dynamiku křídla bez proudění vzduchu. Rovnice vycházejí z rovnic (1.10) a (1.11). Pro možnost porovnání je do rovnic doplněno tlumení pružin:  $c_1$  pro vertikální pružinu,  $c_2$  pro pružinu axiální a jsou zde zahrnuty účinky gravitační síly. Analytické vyjádření rovnic je

$$\ddot{y} = l \cdot \ddot{\varphi} - \frac{K}{m} \cdot y - \frac{c_1}{m} \cdot \dot{y} - g \quad (4.2)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{-S}{J + ml^2} \cdot \varphi + \frac{m \cdot l}{J + ml^2} \cdot \ddot{y} - \frac{c_2}{J + ml^2} \cdot \dot{\varphi}, \quad (4.3)$$

kde  $g$  je gravitační konstanta.



Obrázek 4.50: Iteračně vypočtený časový vývoj výchylky a úhlu pro pružinu m2p3 z diferenciální rovnice pro pohyb křídla, rychlost proudění  $u_0 = 0$

Z průběhu řešení diferenciální rovnice pomocí iterační metody je patrné, že se módy kmitání vzájemně ovlivňují. Avšak pro všechny simulace provedené v OpenFOAMu tento jev nenastává. Oproti experimentálně získaným datům nesouhlasí amplituda kmitů pro úhel  $\varphi$ . Tato chyba mohla vzniknout při aproximaci pohybových rovnic pro malé úhly  $\varphi$  (více v kapitole 1.1.1).

## Závěr

Hlavním cílem bakalářské práce je popsat aeroelastickou nestabilitu a simulovat obtékání vzduchu kolem pružně uloženého leteckého profilu v programu OpenFOAM. Simulace je zjednodušeným případem experimentálního modelu, z něhož jsou k dispozici data pro porovnání.

Jedním z cílů práce je popsat jev aeroelastické nestability. K řešení je nutné nejprve matematicky analyzovat dynamiku pružně uloženého systému a působení obtékající tekutiny na soustavu, čímž se zabývá aerodynamika. Výsledné pohybové rovnice byly převedeny do bezdimenzionálního tvaru, kde je patrný vliv bezdimenzionálních čísel. Dále byly diskutovány různé případy aeroelastické nestability, statická a dynamická. Byl zjištěn vztah pro kritickou rychlost proudění. Z řešení dynamické nestability byl odvozen vzorec pro kruhovou frekvenci a byla diskutována její možná řešení.

V druhé části je přiblížena příprava numerické simulace. Je zde popsána tvorba sítě a specifikovány parametry, které je nutné při tvoření výpočetní sítě dodržet. Jsou uvedeny použité okrajové podmínky, podmínky pro tlak  $p$  a pro rychlost proudění  $\vec{u}$ .

Poslední část práce se věnuje výsledkům simulace a některé z nich jsou porovnávány s experimentálně naměřenými daty. V simulaci na stacionární síti je porovnáván řešič pro laminární proudění s řešičem pro turbuletní proudění. Úhel náběhu křídla je nastaven na  $30^\circ$ , počáteční rychlost proudění  $u = 30$  m/s. V obou případech dochází k odtrhávání vírů od hrany křídla.

Simulace na nestacionární geometrii je porovnávána s naměřenými daty. Pro nulovou rychlost proudění proběhly simulace pro tři axiální pružiny o různé torzní tuhosti a tlumení se stejnou počáteční výchylkou. Pro účely porovnání s experimentálními daty proběhla simulace pro poslední pružinu s větší výchylkou. Dále proběhla simulace pro jinou tuhost vertikální pružiny. Z porovnání výsledků s experimentálními daty byl zjištěn rychlejší útlum kmitání a menší amplituda kmitů. Jak je vysvětleno na konci kapitoly 4.2.2, tato chyba je pravděpodobně způsobená nesprávnou implementací pohybových rovnic pro kmitání se dvěma stupni volnosti.

Pomocí experimentálních dat byla nalezena kritická rychlost proudění  $U_{critical}$ . Data získaná ze simulací se s experimentálně získanými daty neshodují. Nedochozí zde k flutteru ani při vysokých rychlostech proudění (113,2 m/s). Důvod této odchylky od experimentálně získaných dat vychází z chyby dynamiky systému při simulaci pro nulové proudění. Vzhledem k velkému útlumu výchylky  $\varphi$  nedochází k dosažení kritického úhlu, který je nutný pro vybuzení neustalujících se kmitů, tzv. stall flutter.



## Literatura

- [1] EMMANUEL DE LANGRE, *Fundamentals of Fluid-Solid Interactions* [online], 2016 [cit. 14. 2. 2016], Dostupný na:  
<https://www.coursera.org/course/fsi>
- [2] FUNG, Y. *An introduction to the theory of aeroelasticity*. New Yourk: Wiley, 1955
- [3] NTNU HPC GROUP, [online], [cit. 30. 3. 2016] Dostupný na:  
<https://www.hpc.ntnu.no/display/hpc/OpenFOAM+-+Airfoil+Calculations>
- [4] KASSAB, A. *Fluid structure interaction VI. Southampton*, UK: WIT Press, c2011. WIT transactions on the built environment, str. 233, v. 115. ISBN 184564512X
- [5] FERZIGER J. H., PERIC M. (2002), *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [6] ANDRÉ BAKKER *Applied Computational Fluid Dynamics*, [online], [cit. 5. 4. 2016] Dostupný na:  
<http://www.bakker.org/dartmouth06/engs150/07-mesh.pdf>
- [7] Šidlof P., Vlček V., Štěpán M., Horáček J., Luxa M. et al. (2014), *Wind tunnel measurements of flow-induced vibration of a NACA 0015 airfoil model*, in: ASME 2014 Pressure Vessels and Piping Conference, Anaheim, CA, USA, pp. V004T04A029, DOI 10.1115/PVP2014-28294

# Přílohy

## Obsah přiloženého CD

Na přiloženém CD jsou soubory:

- bakalarska\_prace\_tisovska\_2016.pdf
  - text bakalářské práce ve formátu pdf
- zdrojovy\_soubor\_latex
  - zdrojový kód pro  $\text{\LaTeX}$
  - obrázky použité v bakalářské práci
  - soubory z balíčku tulthesis