UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lagrangeovská dualita

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.**
Vypracoval: **Jana Radová**
Studijní program: B1101 Matematika
Studijní obor Matematika a její aplikace
Forma studia: prezenční
Rok odevzdní: 2015

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Jana Radová

Název práce: Lagrangeovská dualita

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2015

Abstrakt: V předložené práci se budeme věnovat studiu Lagrangeovy funkce a Lagrangeovské duality v optimalizačních úlohách. Obsahem této práce je nastudování teorie duality a předvedení její výhodnosti při výpočtu úloh nelineárního programování. Práce je doplněna příklady a ilustrativními obrázky.

Klíčová slova: Lagrangeova funkce, Lagrangeovská dualita, sedlový bod, silná a slabá dualita, duální funkce

Počet stran: 67

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Jana Radová

Title: Lagrange duality

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Jitka Machalová, Ph.D.

The year of presentation: 2015

Abstract: In the present work we study Lagrangian function and Lagrange duality in optimal problems. The subject of the thesis is to study the theory of duality and demonstrate its advantages in the calculation of nonlinear programming.This work is completed with examples and pictures illustrations.

Key words: Lagrangian function, Lagrange duality, saddle point, strong and weak duality, dual function

Number of pages: 67

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Jitky Machalové, Ph.D., za použití uvedené literatury.

V Olomouci dne 12. května 2015

Obsah

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí mé bakalářské práce RNDr. Jitce Machalové, Ph.D. za cenné rady, trpělivost a čas strávený při konzultacích. Chtěla bych také poděkovat mé rodině za podporu při studiu.

Použité symboly

$\mathbb{R}$ . . . . množina reálných čísel

$\mathbb{R}^r$ . . . . r - rozměrný vektorový prostor

$\mathbb{R}^r_+$ . . . . r - rozměrný, nezáporný vektorový prostor

S . . . . .přípustná množina

$\nabla f(\boldsymbol{x})$. . . . . . .gradient funkce $f(\boldsymbol{x})$

$H(f(\boldsymbol{x}))$. . . . . Hessova matice funkce $f(\boldsymbol{x})$

$LFD(\boldsymbol{x})$. . . . . množina linearizovaných přípustných směrů

$C(\boldsymbol{x})$. . . . . . . .kritický kužel

Úvod

Cílem této bakalářské práce je nastudování teorie o Lagrangeově funkci a Lagrangeovské dualitě v optimalizačních úlohách. Dále pak na příkladech prezentovat její použití. Dualita obecně představuje matematickou koncepci řešení spočívající v tom, že dané úloze přiřadíme jinou úlohu, která může být výhodnější z hlediska výpočtu. Uvedeme předpoklady, za jakých je možné pomocí duální úlohy řešit danou úlohu. Tato práce je rozdělena do tří kapitol.

V první kapitole jsou uvedeny základní pojmy a tvrzení, se kterými budeme pracovat v následujících kapitolách, a které jsou nezbytné pro uvedení stěžejních tvrzení této bakalářské práce. Nejprve se budeme zabývat úlohou nelineárního programování a jejími vlastnostmi. Také se zde setkáme s definicí konvexní funkce, pseudokonvexní a kvazikonvexní funkce. Zavedeme nutné a postačující podmínky pro existenci lokálního a globálního minima úlohy nelineárního programování.

Ve druhé kapitole se zaměříme na podmínky optimality 2. řádu, které jsou přímým zobecněním podmínek optimality uvedených v první kapitole. Dále definujeme Lagrangeovu funkci a uvedeme její důležité vlastnosti, se kterými budeme pracovat v poslední kapitole této práce. Vlastnosti Lagrangeovy funkce demonstrujeme nejprve na jednodušší úloze nelineárního programování.

Poslední kapitola pojednává o teorii duality a duálních funkcích. Vymezíme si pojmy primární a duální úlohy a vztahy mezi nimi. Uvedeme také, za jakých podmínek je možné k dané úloze sestavit úlohu duální. V poslední části této práce se budeme zabývat již obecnou úlohou nelineárního programování.

Práce je doplněna vlastními příklady nebo příklady, které byly převzaty z neřešených cvičení v uvedené literatuře. K některým výpočtům byl využit matematický software Matlab. Pokud to bylo nutné, výsledky byly zaokrouhleny na čtyři desetinná místa.

1. Úvodní kapitola

1.1. Základní pojmy

Věty a definice uvedené v této kapitole poskytují vysvětlení základních pojmů, které jsou nutné k zadefinování a uvedení stěžejních definic a tvrzení týkajících se tématu této práce.

Definice a věty jsou převzaty z [6] a [2].

Definice 1.1 (Úloha *(NLP)*)
Nechť $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n), g_i(\boldsymbol{x}) = g_i(x_1, \ldots, x_n), i = 1, \ldots,\ m,$
a $h_j(\boldsymbol{x}) =\ h_j(x_1, \ldots, x_n), j = 1, \ldots, r$, jsou dané funkce n proměnných. Nechť X je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^n$. Úloha

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & f(\boldsymbol{x}) & \text{pro } \boldsymbol{x} \in X \\ \text{za podmínek} & g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, & i \in I = \{1, \ldots, m\}, \\ & h_j(\boldsymbol{x}) = 0, & j \in J = \{1, \ldots, r\}, \end{cases}$$

se nazývá **obecnou úlohou nelineárního programování *(NLP)***.
Zápisy $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i \in I$ a $h_j(\boldsymbol{x}) = 0, j \in J$, představují omezení dané úlohy tvaru nerovností resp. rovností. Používají se rovněž názvy omezující podmínky, vazbové podmínky nebo krátce vazby.
V případě, že $m = 0$, hovoříme o úloze s omezením tvaru rovností. Je-li $r = 0$, mluvíme o úloze s omezením tvaru nerovností.

Definice 1.2 (Přípustná množina)
Přípustnou množinou úlohy *(NLP)* budeme rozumět množinu

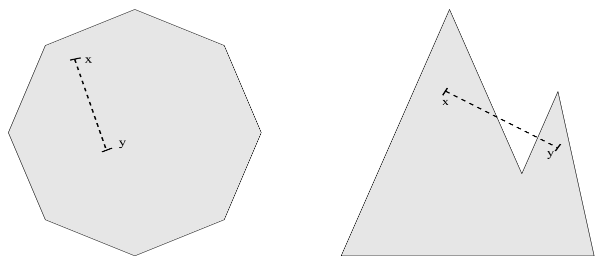
$$S = \{\boldsymbol{x} \in X : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}.$$

Poznámka 1.1 Funkcemi $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ a $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$, jimiž jsme definovali přípustnou množinu, budeme rozumět vektorové funkce

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_m(\boldsymbol{x}))^T \text{a } \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = (h_1(\boldsymbol{x}), \ldots, h_r(\boldsymbol{x}))^T.$$

Definice 1.3 (Konvexní množina)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Množina X se nazývá **konvexní množinou**, jestliže $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ a $\forall t \in [0,1]$, je $t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \in X$, tj. s libovolnými dvěma body $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ leží v X celá úsečka spojující tyto dva body.



Obrázek 1: Příklad konvexní a nekonvexní množiny

Definice 1.4 (Konvexní funkce)

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, funkce $f(\boldsymbol{x}) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se nazývá konvexní na X, je - li $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ a $\forall t \in [0,1]$

$$f(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}) \leq tf(\boldsymbol{x}) + (1-t)f(\boldsymbol{y}).$$

Poznámka 1.2 Pro praktičtější ověření konvexnosti funkce můžeme ale využít poznatků z matematické analýzy. Pokud se jedná o diferencovatelnou funkci $f(x)$ jedné proměnné, pak je tato funkce konvexní na X, jestliže $f''(x) \geq 0 \;\; \forall x \in X$. Jedná-li se o diferencovatelnou funkci n proměnných, tj. $f(x_1, \ldots, x_n)$, lze k ověření konvexnosti funkce použít tzv. Hessovu matici, neboli matici tvaru

$$H(f(\boldsymbol{x})) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Je-li tato matice pozitivně semidefinitní, tj. všechny hlavní minory jsou nezáporné, je funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ konvexní.

Poznámka 1.3 Symbolem $\nabla f(\boldsymbol{x})$ budeme značit gradient fuknce $\nabla f(\boldsymbol{x})$, tj. $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)^T$.

Definice 1.5 (Pseudokonvexní funkce)
Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina. Diferencovatelnou funkci $f(\boldsymbol{x}) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ nazveme **pseudokonvexní funkcí**, jestliže platí

$$\nabla f(\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \geq 0 \Longrightarrow f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X.$$

Definice 1.6 (Kvazikonvexní funkce)
Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina. Funkci $f(\boldsymbol{x}) : X \longrightarrow \mathbb{R}$ nazveme **kvazikonvexní funkcí**, jestliže platí

$$f(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y}) \leq \max\{f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})\} \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X, \forall t \in [0,1].$$

Lemma 1.1 *Platí*

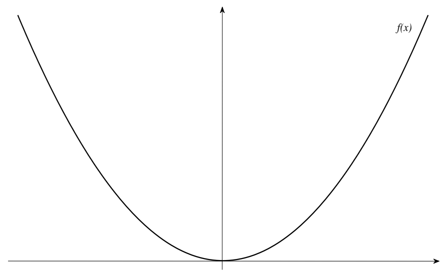
1. *Je - li funkce konvexní, pak je také kvazikonvexní.*
2. *Každá diferencovatelná konvexní funkce je také pseudokonvexní.*
3. *Každá pseudokonvexní funkce je také kvazikonvexní.*

Důkaz: viz [6], strana 29.

Odlišnosti a vzájemné vztahy předchozích tří definic si přiblížíme na následujícím příkladu.

Příklad 1.1 Uvažujme konvexní množinu $X = \mathbb{R}$.

1. Funkce $f(x) = x^2$ je konvexní funkcí, neboť $f''(x) = 2 \geq 0 \; \forall x \in X$. Je tedy zřejmé, že funkce $f(x) = x^2$ je diferencovatelná a konvexní funkce na X. Podle lemmatu 1.1 je $f(x)$ také pseudokonvexní a kvazikonvexní funkce.



Obrázek 2: Příklad konvexní funkce

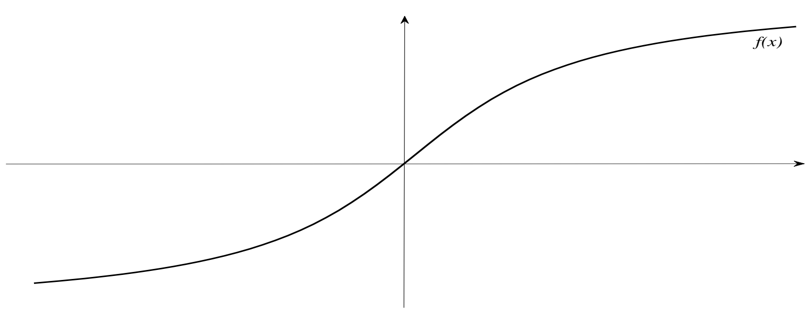
2. Funkce $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$ není konvexní funkcí, neboť např. pro volbu $x = 0$, $y = 2, t = \frac{1}{2}$ dostaneme $f(tx + (1-t)y) = f(1) = \mathrm{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} \doteq 0.7854$. Ale $tf(x) + (1-t)f(y) = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(2) = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(0) + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2) \doteq 0.5535$. Pro výše uvedenou volbu x, y, t podmínka z definice 1.4 neplatí, neboť

$$f(tx + (1-t)y) \nleq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Funkce $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$ je diferencovatelná funkce na X, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Je zřejmé, že $f'(x) > 0 \ \forall x \in X$. Platnost vztahu

$$\nabla f(x)(y-x) \geq 0 \Longrightarrow f(y) \geq f(x)$$

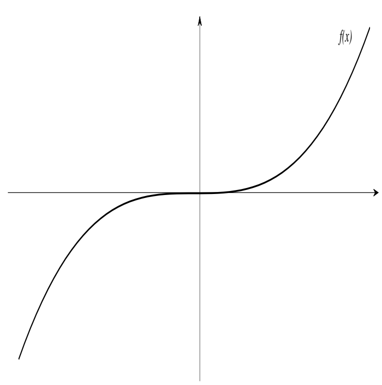
je patrná, neboť funkce $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$ je rostoucí. Funkce $f(x)$ je tudíž pseudokonvexní funkce a podle lemmatu 1.1 je $f(x)$ také kvazikonvexní.



Obrázek 3: Příklad pseudokonvexní funkce

3. Funkce $f(x) = x^3$ není konvexní funkce, neboť např. pro volbu $x = 0$, $y = -1, t = \frac{1}{2}$ máme $f(tx + (1-t)y) = f(\frac{1}{2}(-1)) = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$.
   Ale $tf(x) + (1-t)f(y) = \frac{1}{2}f(0) + \frac{1}{2}f(-1) = -\frac{1}{2}$. Podmínka z definice 1.4, pro naši volbu x, y a t, neplatí, neboť $f(tx+(1-t)y) \nleq tf(x)+(1-t)f(y)$. Daná funkce je diferencovatelná, avšak není pseudokonvexní, neboť např. pro volbu $x = 0, y = -1, t = \frac{1}{2}$, máme $\nabla f(x)(y-x) = 3(0)^2(-1+0) = 0$, $f(y) = f(-1) = -1$. Ale $f(x) = f(0) = 0$, tj. $f(y) \ngeq f(x)$. Funkce $f(x) = x^3$ není konvexní ani pseudokonvexní funkce.

Uvažujme nyní libovolnou úsečku s krajními body $x, y \in \mathbb{R}$ a $t \in [0,1]$, pak všechny body ležící mezi x a y, jsou dány vztahem $tx + (1-t)y$. Uvažujme libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ tak, že za x zvolíme menší z obou čísel, tedy $x < y$. Je tedy zřejmé, že platí $x \leq tx + (1-t)y \leq y$. Navíc je $f(x) = x^3$ rostoucí, tudíž také platí $f(x) \leq f(tx + (1-t)y) \leq f(y)$. Odtud již plyne, že pro libovolnou volbu $x, y \in X, x < y$ a $t \in [0,1]$, platí podmínka kvazikonvexity, tj. $f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$.



Obrázek 4: Příklad kvazikonvexní funkce

Definice 1.7 (Úloha konvexního programování)
Úloha *(NLP)*, v níž $f(\boldsymbol{x})$ je konvexní funkce na S a přípustná množina S je konvexní podmnožina $\mathbb{R}^n$, se nazývá **úloha konvexního programování.**

Definice 1.8 Bod $\overline{\boldsymbol{x}} \in S$ nazveme **Slaterovým bodem** úlohy *(NLP)*, jestliže splňuje

$$g_i(\overline{\boldsymbol{x}}) < 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Následující definice uvádějí podmínky, při jejichž splnění můžeme bod $\boldsymbol{x}^*$ považovat za bod lokálního nebo globálního minima úlohy *(NLP)*.

Definice 1.9 (Lokální minimum)
Bod $\boldsymbol{x}^* \in S$ nazveme **bodem lokálního minima** úlohy *(NLP)*, jestliže $\exists\, \delta > 0$, takové, že

$$f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in S \cap B(\boldsymbol{x}^*, \delta),$$

kde $B(\boldsymbol{x}^*, \delta)$ je δ-okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$.
Platí-li pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$ ostrá nerovnost, hovoříme o ostrém lokálním minimu.

Definice 1.10 (Globální minimum)
Bod $\boldsymbol{x}^* \in S$ nazveme **bodem globálního minima** úlohy *(NLP)*, jestliže

$$f(\boldsymbol{x}^*) \leq f(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in S.$$

Platí-li $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$ ostrá nerovnost, hovoříme o ostrém globálním minimu.

Věta 1.1 (Karush - Kuhn - Tuckerovy nutné podmínky (KKT))
Nechť $\boldsymbol{x}^* \in S$ je bod lokálního minima úlohy (NLP). Nechť

$$I(\boldsymbol{x}^*) = \{i \in I : g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0\}$$

a nechť gradienty $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^*), i \in I(\boldsymbol{x}^*)$, a $\nabla h_j(\boldsymbol{x}^*), j = 1, \ldots, r$, jsou lineárně nezávislé. Potom existuje dvojice vektorů $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$ taková, že platí

- $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0},$
- $\lambda_i^* \geq 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, m,$
- $\lambda_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m.$

Důkaz: viz [6], strana 24.

Poznámka 1.4 KKT nutnými podmínkami optimality budeme rozumět tři podmínky na vektory $\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*$ a bod $\boldsymbol{x}^*$ z předchozí definice. K těmto podmínkám často připojujeme tzv. podmínky přípustnosti tj.

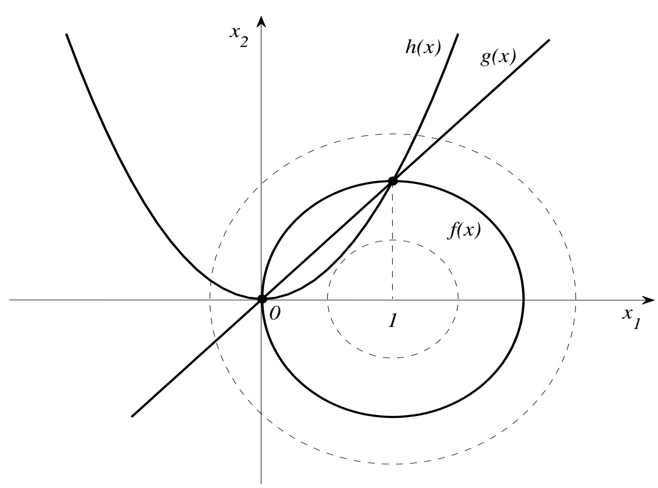
$$g_i(\boldsymbol{x}^*) \leq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m \text{ a } h_j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, r.$$

Podmínky přípustnosti často zjednoduší hledání řešení dané optimalizační úlohy.

Příklad 1.2 Pomocí podmínek optimality analyzujte úlohu

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \\ \text{za podmínek} & g(\boldsymbol{x}) = x_1 - x_2 \leq 0 \\ & h(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - x_2 = 0 \\ \text{pro} & \boldsymbol{x} \in X = \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Danou úlohu budeme analyzovat pomocí KKT podmínek uvedených ve větě 1.1, tím si také ukážeme praktické užití těchto podmínek.



Obrázek 5: Příklad 1.2

Z obrázku je zřejmé, že řešením dané úlohy jsou body $\boldsymbol{x}_1^* = (0,0)$ a $\boldsymbol{x}_2^* = (1,1)$, přičemž $f(\boldsymbol{x}_1^*) = f(\boldsymbol{x}_2^*) = 1$. Přípustná množina S je pro tuto úlohu tvaru $S = \{\boldsymbol{x} \in X : x_1 - x_2 \leq 0, x_1^2 - x_2 = 0\}$. Je zřejmé, že oba body $\boldsymbol{x}_1^*, \boldsymbol{x}_2^* \in S$.

Nyní se budeme blíže zabývat KKT podmínkami. Nejprve vypočítáme $\nabla f(\boldsymbol{x})$, $\nabla g(\boldsymbol{x})$ a $\nabla h(\boldsymbol{x})$ tj.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \qquad \nabla g(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \nabla h(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

KKT podmínky pro tuto úlohu jsou tvaru

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2 + \lambda + 2\mu x_1 &= 0 \\ 2x_2 - \lambda - \mu &= 0 \\ \lambda(x_1 - x_2) &= 0 \\ \lambda \geq 0, \mu &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Naším úkolem je najít x_1, x_2, λ a μ, vyhovující KKT podmínkám. Uvažujme rovnici $\lambda(x_1 - x_2) = 0$. Je zřejmé, že $\lambda(x_1 - x_2) = 0 \iff \lambda = 0$ nebo $x_1 - x_2 = 0$. Pro tyto dvě možnosti vyřešíme soustavu rovnic KKT podmínek, ke kterým připojíme rovnostní podmínku přípustnosti $x_1^2 - x_2 = 0$, neboť hledáme body ležící v přípustné množině. Obdržíme tedy soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých, jejíž řešení lze snadno najít.

I. Nechť $\lambda = 0$, pak z KKT podmínek dostaneme

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2 + 2\mu x_1 &= 0 \\ 2x_2 - \mu &= 0 \\ x_1^2 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Upravíme rovnice pro další výpočet

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2 + 2\mu x_1 &= 0 \\ 2x_2 &= \mu \\ x_1^2 &= x_2. \end{aligned}$$

Za x_2 dosadíme do předchozí rovnice

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2 + 2\mu x_1 &= 0 \\ 2x_1^2 &= \mu. \end{aligned}$$

Nyní stačí dosadit μ do první rovnice

$$2x_1 - 2 + 4x_1^3 = 0.$$

Na levé straně rovnice získáme polynom třetího stupně. K nalezení kořenu tohoto polynomu využijeme matematického softwaru Matlab, který nám výpočet usnadní. Dostaneme jeden reálný kořen $x_1 = \frac{1393}{2362}$. Zbylé dva kořeny jsou komplexně sdružené. Hodnotu x_2 dopočítáme ze vztahu $x_1^2 = x_2$, odtud máme $x_2 = \frac{961}{2763}$. Bod $\boldsymbol{x}_1 = (\frac{1393}{2362}, \frac{961}{2763})$ nenáleží do přípustné množiny S, nemůže být tedy řešením dané úlohy *(NLP)*.

II. Nechť nyní $x_1 - x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2$. Dosadíme do KKT podmínek a dostaneme

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2 + \lambda + 2\mu x_1 &= 0 \\ 2x_1 - \lambda - \mu &= 0 \\ x_1^2 - x_1 &= 0. \end{aligned}$$

Nyní využijeme poslední rovnici $x_1(x_1 - 1) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0$ nebo $x_1 = 1$.

II.1. Nechť $x_1 = 0$, navíc $x_1 = x_2$, je tedy zřejmé, že $x_2 = 0$. Pak

$$\begin{aligned} -2 + \lambda &= 0 \\ -\lambda - \mu &= 0. \end{aligned}$$

Odtud již plyne $\mu = -2$ a $\lambda = 2$.

Máme tedy $\boldsymbol{x}_2 = (0, 0), \lambda = 2$ a $\mu = -2$.

II.2. Nyní nechť $x_1 = 1$, navíc $x_1 = x_2$, odtud máme $x_2 = 1$. Poté má soustava tvar

$$\begin{aligned} 2 - 2 + \lambda + 2\mu &= 0 \\ 2 - \lambda - \mu &= 0. \end{aligned}$$

Rovnice upravíme pro další výpočet

$$\begin{aligned} \lambda + 2\mu &= 0 \\ 2 - \lambda - \mu &= 0. \end{aligned}$$

Sečtením těchto dvou rovnic dostaneme

$$2 + \mu = 0.$$

Odtud již plyne, že $\mu = -2$ a $\lambda = 4$.

Máme tedy $\boldsymbol{x}_3 = (1,1), \lambda = 4$ a $\mu = -2$.

KKT podmínky jsou splněny v bodech $\boldsymbol{x}_2^* = (0,0)$ a $\boldsymbol{x}_3^* = (1,1)$. Tyto body jsou také řešením dané úlohy *(NLP)*.

Je zřejmé, že body splňující nutné KKT podmínky, jsou pouze kandidáty na řešení dané úlohy *(NLP)*. Pro bližší identifikaci těchto bodů potřebujeme silnější podmínky. Uvedeme si nyní nejprve postačující KKT podmínky pro speciální úlohu konvexního programování, které později zobecníme.

Věta 1.2 (Karush - Kuhn - Tuckerovy postačující podmínky - speciální případ) *Nechť $\boldsymbol{x}^* \in S$ je přípustným bodem úlohy (NLP) a nechť existují vektory $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$ takové, že platí*

- $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) + \sum\limits_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0},$
- $\lambda_i^* \geq 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, m,$
- $\lambda_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m.$

Je - li $f(\boldsymbol{x})$ pseudokonvexní funkce, $g_i(\boldsymbol{x})$, $\forall i = 1, \ldots, m$, jsou kvazikonvexní funkce, $h_j(\boldsymbol{x}), \forall j = 1, \ldots, r$, lineární funkce a množina X je konvexní podmnožinou v $\mathbb{R}^n$, potom $\boldsymbol{x}^*$ je bodem globálního minima úlohy (NLP).

Důkaz: viz [6], strana 30.

Poznámka 1.5 KKT podmínky jsou tedy pro úlohu konvexního programování nutnými a postačujícími podmínkami optimality.

Následující úlohu budeme řešit pomocí podmínek optimality uvedených ve větě 1.2.

Příklad 1.3 Analyzujte danou úlohu pomocí podmínek optimality

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & f(\boldsymbol{x}) = (x_1-1)^2 - x_2 \\ \text{za podmínek} & g(\boldsymbol{x}) = (x_1-1)^3 + x_2 \leq 0 \\ & h(\boldsymbol{x}) = x_1 - 1 - x_2 = 0 \\ \text{pro} & \boldsymbol{x} \in X = [0,\infty) \times \mathbb{R}. \end{cases}$$

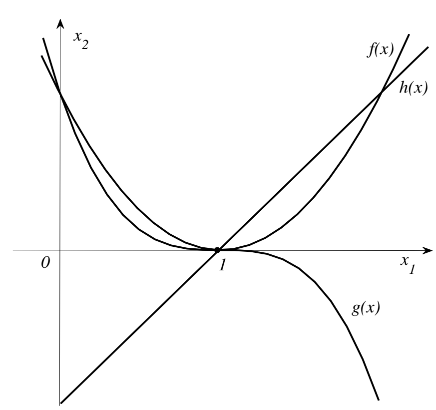
Než začneme danou úlohu řešit, analyzujme blíže funkce $f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})$ a $h(\boldsymbol{x})$. Nejprve vypočteme $\nabla f(\boldsymbol{x}), \nabla g(\boldsymbol{x}), \nabla h(\boldsymbol{x})$ tj.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2(x_1-1) \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \nabla g(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 3(x_1-1)^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \nabla h(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vypočteme také Hessovu matici funkce $f(\boldsymbol{x})$, tj. $H(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Je zřejmé, že hlavní minory jsou nezáporné, tudíž se jedná o konvexní funkci a podle lemmatu 1.1 je $f(\boldsymbol{x})$ také pseudokonvexní funkce. Dále $g(\boldsymbol{x})$ je kvazikonvexní funkce, neboť pro $x \leq y$ platí vztah $x \leq tx + (1-t)y \leq y$ navíc je $g(\boldsymbol{x})$ klesající. Tudíž platí $f(x) \geq f(tx+(1-t)y) \geq f(y)$. Je tedy zřejmé, že pro $x \leq y$ platí vztah pro definici kvazikonvexní funkce, viz definice 1.6. Funkce $h(\boldsymbol{x})$ je lineární a množina X je konvexní. Přípustná množina je pro tuto úlohu tvaru

$$S = \{\boldsymbol{x} \in X : (x_1-1)^3 + x_2 \leq 0, x_1 - 1 - x_2 = 0\}.$$

Z obrázku je zřejmé, že bod $\boldsymbol{x}^* = (1,0) \in S$ je globálním minimem dané úlohy.



Obrázek 6: Příklad 1.3

Nyní analyzujeme danou úlohu pomocí KKT podmínek optimality a dokážeme, že tyto podmínky jsou pro tuto úlohu nutné a postačující. KKT podmínky pro danou úlohu jsou tvaru

$$\begin{aligned} 2(x_1-1)+3\lambda(x_1-1)^2+\mu &= 0 \\ -1+\lambda-\mu &= 0 \\ \lambda((x_1-1)^3+x_2) &= 0 \\ \lambda \geq 0, \mu &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Najdeme tedy taková x_1, x_2, λ a μ, která těmto rovnicím vyhovují. Ke KKT podmínkám připojíme rovnostní podmínku přípustnosti, neboť hledáme řešení na S. Tedy

$$\begin{aligned} 2(x_1-1)+3\lambda(x_1-1)^2+\mu &= 0 \\ -1+\lambda-\mu &= 0 \\ \lambda((x_1-1)^3+x_2) &= 0 \\ x_1-1-x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice máme $x_1 - 1 = x_2$. Pak z KKT podmínek dostáváme

$$\begin{aligned} 2(x_1-1)+3\lambda(x_1-1)^2+\mu &= 0 \\ -1+\lambda-\mu &= 0 \\ \lambda((x_1-1)^3+x_1-1) &= 0. \end{aligned}$$

Dále úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} 2(x_1-1)+3\lambda(x_1-1)^2+\mu &= 0 \\ -1+\lambda-\mu &= 0 \\ \lambda(x_1-1)(x_1^2-2x_1+2) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud již plyne, že $\lambda(x_1-1)(x_1^2-2x_1+2) = 0 \iff \lambda = 0$ nebo $x_1 = 1$. Kořeny polynomu $x_1^2 - 2x_1 + 2$ jsou komplexně sdružené. Řešení dané úlohy hledáme na množině $S \subset \mathbb{R}^2$, komplexní kořeny neuvažujeme.

I. Nechť je tedy $x_1 = 1$, pak

$$2(1-1) + 3\lambda(1-1)^2 + \mu = 0$$
$$-1 + \lambda - \mu = 0.$$

Z první rovnice je zřejmé, že $\mu = 0$ a tedy z rovnice $-1+\lambda-\mu = 0$ dostaneme $\lambda = 1$. Hodnotu x_2 dopočteme ze vztahu $x_2 = x_1 - 1,$ odtud plyne $x_2 =\ 0$. Tedy máme $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0),\ \lambda = 1,\ \mu = 0$.

II. Nechť je nyní $\lambda = 0$, pak

$$2(x_1 - 1) + \mu = 0$$
$$-1 - \mu = 0.$$

Odtud je již zřejmé, že $\mu = -1$. Dále máme

$$2(x_1 - 1) - 1 = 0.$$

Tudíž $x_1 = \frac{3}{2}$.
Hodnotu x_2 dopočteme z rovnice $x_2 = x_1 - 1,$ tedy $x_2 =\ \frac{1}{2}$. Odtud dostaneme $\boldsymbol{x}_2 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}),\ \lambda = 0,\ \mu = -1$. Bod $\boldsymbol{x}_2 = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin S$, neboť $g(\boldsymbol{x}_1) \not\leq 0$.

Bod $\boldsymbol{x}_1 = (1, 0)$ KKT podmínkám vyhovuje a navíc jsou splněné předpoklady věty 1.2, tudíž $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}^* = (1, 0)$ je bodem globálního minima úlohy *(NLP)*. Obdrželi jsme stejný výsledek jako na začátku příkladu, tudíž KKT podmínky jsou pro úlohu konvexního programování nutné a postačující.

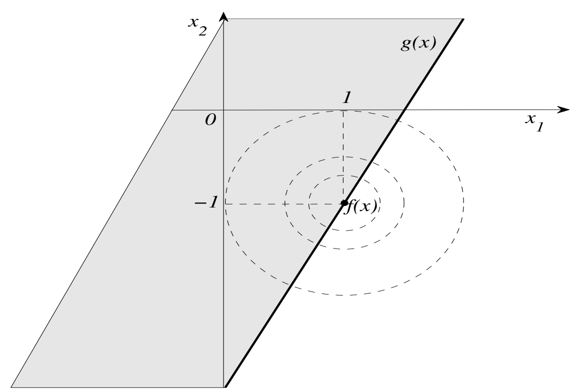
Věta 1.3 (Slaterova kvalifikační podmínka)
Předpokládejme, že $g_i(\boldsymbol{x}), i = 1, \ldots, m$, jsou pseudokonvexní funkce a $h_j(\boldsymbol{x})$, $j = 1, \ldots, r$, lineární funkce. Nechť $\boldsymbol{x}^*$ je bodem lokálního minima úlohy (NLP) a nechť $\nabla h_j(\boldsymbol{x}^*), j = 1, \ldots, r$ jsou lineárně nezávislé a úloha (NLP) má Slaterův bod. Potom KKT podmínky jsou nutnými podmínkami optimality pro tuto úlohu.

Důkaz: viz [6], strana 39.

Příklad 1.4 Analyzujte úlohu pomocí podmínek optimality

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & f(\boldsymbol{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \\ \text{za podmínek} & g(\boldsymbol{x}) = 2x_1 - x_2 - 3 \leq 0 \\ \text{pro} & \boldsymbol{x} \in X = \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Na této úloze si předvedeme použití věty 1.3. Funkce $g(\boldsymbol{x})$ je lineární, tzn. jedná se o speciální případ konvexní funkce. Podle tvrzení lemmatu 1.1 je funkce také pseudokonvexní. Přípustná množina S je pro danou úlohu tvaru
$S = \{\boldsymbol{x} \in X : 2x_1 - x_2 - 3 \leq 0\}$. Je zřejmé, že daná úloha má také Slaterův bod, neboť jistě existuje $\overline{\boldsymbol{x}}$ takové, že $\overline{\boldsymbol{x}} \in S : g(\overline{\boldsymbol{x}}) \leq 0$. Takovým bodem je např. $\overline{\boldsymbol{x}} = (-1, 0)$. Je také zřejmé, že $f(\boldsymbol{x}) \geq 0 \; \forall \boldsymbol{x} \in \; \mathbb{R}^2$, tudíž minimum funkce $f(\boldsymbol{x})$ se nachazí v bodě, pro jehož funkční hodnotu platí $f(\boldsymbol{x}) = 0$. A tímto bodem je $\boldsymbol{x}^* = (1, -1)$.



Obrázek 7: Příklad 1.4

Ukážeme splnění KKT podmínek v bodě $\boldsymbol{x}^* = (1, -1)$. Nejprve vypočteme $\nabla f(\boldsymbol{x}), \nabla g(\boldsymbol{x})$, tj.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 1) \\ 2(x_2 + 1) \end{pmatrix}, \qquad \nabla g(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

KKT podmínky pro danou úlohu jsou tvaru

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 2 + 2\lambda &= 0 \\
2x_2 + 2 - \lambda &= 0 \\
\lambda(2x_1 - x_2 - 3) &= 0 \\
\lambda &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Úkolem je tedy najít neznámé x_1, x_2, λ, které vyhovují těmto KKT podmínkám. Z poslední rovnice plyne, že $\lambda(2x_1 - x_2 - 3) = 0 \iff \lambda = 0$ nebo $2x_1 = x_2 + 3$.

I. Nechť je $\lambda = 0$, pak

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 2 &= 0 \\
2x_2 + 2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Odtud plyne, že $x_2 = -1$ a $x_1 = 1$.
Máme tedy $\boldsymbol{x}_1 = (1, -1)$ a $\lambda = 0$.

II. Nechť je nyní $2x_1 = x_2 + 3$, pak

$$
\begin{aligned}
x_2 + 3 - 2 + 2\lambda &= 0 \\
2x_2 + 2 - \lambda &= 0.
\end{aligned}
$$

Úpravou těchto rovnic dostaneme

$$
\begin{aligned}
x_2 + 2\lambda &= -1 \\
2x_2 - \lambda &= -2.
\end{aligned}
$$

Nyní je již zřejmé, že

$$
\begin{aligned}
5x_2 &= -5 \\
x_2 &= -1.
\end{aligned}
$$

Hodnotu λ dostaneme dosazením do rovnosti $2x_2 + 2 - \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$, dosazením do vztahu $2x_1 = x_2 + 3$ dostaneme hodnotu $x_1 = 1$. Máme tedy $\boldsymbol{x}_2 = (1, -1)$ a $\lambda = 0$.

V obou případech jsme tedy dostali stejné řešení. Bod $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}^* = (1, -1)$ a $\lambda^* = 0$ vyhovují KKT podmínkám. Tedy bod $\boldsymbol{x}^* = (1, -1)$ je bodem lokálního minima dané úlohy. Předpoklady věty 1.3 jsou splněny a KKT podmínky jsou nutnými podmínkami optimality dané úlohy.

2. Lagrangeova funkce a její vlastnosti

Tato kapitola se bude zabývat zavedením podmínek optimality 2. řádu, pojmu Lagrangeova funkce a Lagrangeovská dualita.

Definice a věty jsou převzaty z [6], [7] a [3] .

2.1. Podmínky optimality 2. řádu

Nutné KKT podmínky, viz věta 1.1, jsou nutnými podmínkami optimality 1. řádu. Tyto podmínky v obecné úloze umožňují najít pouze body, které jsou kandidáty na řešení dané úlohy *(NLP)*. Výjimkou je úloha konvexního programovaní, kde KKT podmínky jsou nutnými a postačující podmínkami optimality dané úlohy *(NLP)*. Podmínky optimality 2. řádu blíže specifikují řešení dané úlohy *(NLP)*. Před uvedením podmínek samotných zavedeme pojem Lagrangeovy funkce, která bude příslušet dané úloze *(NLP)* a je nezbytným pojmem pro formulaci podmínek optimality 2. řádu.

Definice 2.1 (Lagrangeova funkce)
Lagrangeovou funkcí nebo lagrangiánem příslušející obecné úloze nelineárního programování *(NLP)* nazveme funkci

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j h_j(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}).$$

Čísla $\lambda_i \geq 0$ jsou Lagrangeovy multiplikátory příslušející omezením $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ a čísla $\mu_j \in \mathbb{R}$ jsou Lagrangeovy multiplikátory příslušející omezením $h_j(\boldsymbol{x}) = 0$.

Poznámka 2.1 Před uvedením podmínek optimality 2. řádu zavedeme pojmy a označení, které jsou nezbytné k formulaci následujícího tvrzení.

- Symbolem $\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ budeme rozumět gradient funkce $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$, tj.
$$\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu}) = \left(\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu})}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu})}{\partial x_n}\right)^T.$$

- Symbolem $\nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu})$ budeme rozumět matici

$$\nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu})}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{\mu})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

- Množina $LFD(\boldsymbol{x})$ označuje množinu linearizovaných přípustných směrů, tj.

$$LFD(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(\boldsymbol{x})^T \boldsymbol{p} \leq 0\ \forall i \in I(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{p}^T \nabla h_j(\boldsymbol{x}) = 0,\ \forall i \in J\},$$

  kde $\boldsymbol{x} \in S$, množina $I(\boldsymbol{x})$ je indexová množina aktivních nerovnostních omezujících podmínek, tedy takových podmínek, které jsou v daném bodě $\boldsymbol{x}$ rovny 0.

- $C(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{p} \in LFD(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{p}^T \nabla g_i(\boldsymbol{x}) = 0\ \forall i \in I(\boldsymbol{x}) : \lambda_i > 0\}$ označuje kritický kužel, kde $\boldsymbol{x}$ je bodem lokálního minima dané úlohy *(NLP)*. Vektory $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}$ jsou vektory z Lagrangeovy funkce vyhovující KKT podmínkám.

Nyní již můžeme přistoupit k samotné formulaci postačujících podmínek optimality 2. řádu.

Věta 2.1 (Postačující podmínky optimality 2. řádu)
Nechť $\boldsymbol{x}^* \in S$ *a nechť existují vektory Lagrangeových multiplikátorů* $\boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m$ a $\boldsymbol{\mu}^* \in \mathbb{R}^r$ *takové, že společně splňují KKT podmínky*

- $\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) = \boldsymbol{0}$,
- $g_i(\boldsymbol{x}^*) \leq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m$,
- $h_j(\boldsymbol{x}^*) = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, r$,
- $\lambda_i^* \geq 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m$,
- $\lambda_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, m$.

Nechť navíc platí

$$\boldsymbol{p}^T \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*) \boldsymbol{p} > 0 \qquad \forall \boldsymbol{p} \in C(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}.$$

Potom $\boldsymbol{x}^*$ *je bodem ostrého lokálního minima úlohy (NLP).*

Důkaz: viz [3], strana 211.

Na následujících příkladech si ukážeme použití podmínek optimality 2. řádu. Příklady jsou převzaty z neřešených cvičení v kapitole 5 z [6].

Příklad 2.1 Analyzujte danou úlohu pomocí podmínek optimality

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & f(\boldsymbol{x}) = -x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3 \\ \text{za podmínky} & h(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ \text{pro} & \boldsymbol{x} \in X = \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Nejprve určíme přípustnou množinu, která je pro tuto úlohu tvaru $S = \{\boldsymbol{x} \in X : -3 + x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Vypočteme gradienty funkcí $f(\boldsymbol{x})$ a $g(\boldsymbol{x})$, tj.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_3 \\ -x_2 - x_1 \end{pmatrix}, \qquad \nabla h(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sestavíme KKT podmínky pro tuto úlohu, viz věta 2.1, ke kterým přípojíme podmínku přípustnosti, neboť hledáme body z množiny S. KKT podmínky jsou pro tuto úlohu tvaru

$$\begin{aligned} -x_2 - x_3 + \mu &= 0 \\ -x_1 - x_3 + \mu &= 0 \\ -x_1 - x_2 + \mu &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Naším úkolem je najít x_1, x_2, x_3, μ, vyhovující KKT podmínkám. Z poslední rovnice plyne, že $x_3 = 3 - x_1 - x_2$. Ze zbylých rovnic tedy máme

$$\begin{aligned} -x_2 - 3 + x_1 + x_2 + \mu &= 0 \\ -x_1 - 3 + x_1 + x_2 + \mu &= 0 \\ -x_1 - x_2 + \mu &= 0. \end{aligned}$$

Dále z poslední rovnice dostaneme $\mu = x_1 + x_2$, tedy

$$-3 + x_2 + x_1 + x_1 = 0$$
$$-3 + x_2 + x_1 + x_2 = 0.$$

Upravením vzniklých rovnic dostaneme již soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, tj.

$$2x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 = 3.$$

Zde je již zřejmé, že

$$3x_2 = 3 \Longrightarrow x_2 = 1.$$

Poslední neznámou dopočteme z rovnice $2x_1 + x_2 = 3$, tedy

$$2x_1 + 1 = 3 \Longrightarrow x_1 = 1.$$

Nyní stačí dopočítat poslední dvě neznámé $\mu = x_1 + x_2 = 2$ a $x_3 = 3 - x_1 - x_2 = 1$. KKT podmínkám tedy vyhovuje bod $\boldsymbol{x}^* = (1, 1, 1)^T$ a $\mu^* = 2$. Odtud plyne, že bod $\boldsymbol{x}^* \in S$.

Ověříme splnění platnosti poslední nerovnosti z věty 2.1. Sestavíme Lagrangeovu funkci, která je pro tuto úlohu tvaru

$$L(\boldsymbol{x}, \mu) = -x_1 x_2 - x_2 x_3 - x_1 x_3 + \mu(x_1 + x_2 + x_3 - 3).$$

Nejprve vypočteme $\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \mu)$, tedy $\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \mu) = \nabla f(\boldsymbol{x}) + \mu \nabla h(\boldsymbol{x})$, tj.

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}, \mu) = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 + \mu \\ -x_1 - x_3 + \mu \\ -x_2 - x_1 + \mu \end{pmatrix}.$$

Přitom víme, že $\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, \mu^*) = \boldsymbol{0}$, $h(\boldsymbol{x}^*) = 0$. Abychom ověřili poslední předpoklad věty 2.1 určíme kritický kužel, tj.
$C(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{p} \in LFD(\boldsymbol{x}^*) : \boldsymbol{p}^T \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad \forall i \in I(\boldsymbol{x}^*) : \lambda_i^* > 0\}$, kde $LFD(\boldsymbol{x}^*)$ je množina linearizovaných přípustných směrů, tj.

$LFD(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{p}^T \nabla h(\boldsymbol{x}) = 0\} \Longrightarrow LFD(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3 : p_1 + p_2 + p_3 = 0\}$.
Daná úloha *(NLP)* je úlohou pouze s rovnostními omezeními a proto platí

$$C(\boldsymbol{x}^*) = LFD(\boldsymbol{x}^*).$$

Nyní ověřme platnost vztahu $\boldsymbol{p}^T \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}^*, \mu^*)\boldsymbol{p} \geq 0 \ \ \forall \boldsymbol{p} \in C(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$. Nejprve vyjádříme $\nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}, \mu)$ a poté vypočteme $\nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}^*, \mu^*)$, tedy

$$\nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}^*, \mu^*) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní vypočteme $\boldsymbol{p}^T \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}^*, \mu^*)\boldsymbol{p}$ pro $\boldsymbol{p} \in C(\boldsymbol{x}^*)$, tj.

$$\boldsymbol{p}^T \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}^*, \mu^*)\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_2 - p_3 \\ -p_1 - p_3 \\ -p_1 - p_2 \end{pmatrix}$$

$$= p_1(-p_2 - p_3) + p_2(-p_1 - p_3) + p_3(-p_1 - p_2).$$

Pro $\forall \boldsymbol{p} \in LFD(\boldsymbol{x}^*)$ platí $p_1 + p_2 + p_3 = 0 \Longrightarrow p_1 + p_2 = -p_3$. Tento tvar dosadíme do vyjádření $\boldsymbol{p}^T \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}^*, \mu^*)\boldsymbol{p}$, aby bylo možné rozhodnout, zda se jedná o bod ostrého lokálního minima dané úlohy *(NLP)*.
Tedy po dosazení dostaneme
$\boldsymbol{p}^T \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}^*, \mu^*)\boldsymbol{p} = p_1(-p_2 + p_1 + p_2) + p_2(-p_1 + p_1 + p_2) + p_3 p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$. Je tedy zřejmé, že $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 > 0 \ \ \forall \boldsymbol{p} \in C(\boldsymbol{x}^*), \boldsymbol{p} \neq 0$. Předpoklady věty jsou 2.1 jsou splněny a tedy bod $\boldsymbol{x}^* = (1, 1, 1)$ je bodem ostrého lokálního minima dané úlohy.

Příklad 2.2 Analyzujte danou úlohu pomocí podmínek optimality

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & f(\boldsymbol{x}) = -x_1^3 - 2x_2^2 + 10x_1 - 6 - 2x_2^3 \\ \text{za podmínek} & g_1(\boldsymbol{x}) = x_1 x_2 \leq 10 \\ & g_2(\boldsymbol{x}) = -x_1 \leq 0 \\ & g_3(\boldsymbol{x}) = x_2 \leq 10 \\ \text{pro} & \boldsymbol{x} \in X = \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Nyní máme úlohu se třemi nerovnostními omezeními a výpočet bude tudíž složitější než v předchozím příkladu 2.1. Přípustná množina je pro tuto úlohu tvaru $S = \{x \in X : x_1x_2 - 10 \leq \ 0, -x_1 \leq 0, x_2 - 10 \leq 0\}$.

Nejprve vypočteme $\nabla f(\boldsymbol{x}), \nabla g_1(\boldsymbol{x}), \nabla g_2(\boldsymbol{x}), \nabla g_3(\boldsymbol{x})$, tj.

$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 \ +10 \\ -4x_2 \ -6x_2^2 \end{pmatrix}, \nabla g_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \nabla g_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \nabla g_3(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Sestavíme KKT podmínky, které jsou pro tuto úlohu tvaru

$$\begin{aligned} -3x_1^2 + 10 + \lambda_1 x_2 - \lambda_2 &= 0 \\ -4x_2 - 6x_2^2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1(x_1x_2 - 10) &= 0 \\ \lambda_2(-x_1) &= 0 \\ \lambda_3(x_2 - 10) &= 0 \\ \lambda_1, \ \lambda_2, \ \lambda_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Naším úkolem je najít $x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vyhovující KKT podmínkám této úlohy. K řešení použijeme rovnici $\lambda_1(x_1x_2 - 10) = 0$. Odtud plyne $\lambda_1(x_1x_2 - 10) = 0$ $\Longleftrightarrow \lambda_1 = 0$ nebo $x_1x_2 - 10 = 0$.

I. Nechť $\lambda_1 = 0$. Pak dostaneme

$$\begin{aligned} -3x_1^2 + 10 - \lambda_2 &= 0 \\ -4x_2 - 6x_2^2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2(-x_1) &= 0 \\ \lambda_3(x_2 - 10) &= 0. \end{aligned}$$

Dále z rovnice $\lambda_2(-x_1) = 0$ máme, že $\lambda_2(-x_1) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_2 = 0$ nebo $x_1 = 0$.

I.1. Nechť tedy $\lambda_2 = 0$. Poté

$$\begin{aligned} -3x_1^2 + 10 &= 0 \\ -4x_2 - 6x_2^2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3(x_2 - 10) &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice je zřejmé, že $x_1 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, možnost $x_1 = -\sqrt{\frac{10}{3}}$ nevyhovuje podmínce $g_2(x_1) \leq 0$. Z poslední rovnice je patrné, že $\lambda_3(x_2 - 10) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_3 = 0$ nebo $x_2 = 10$.

I.1.a. Nechť je nyní $\lambda_3 = 0$, tj.

$$-4x_2 - 6x_2^2 = 0.$$

Úpravou získáme rovnici $\qquad x_2(-4 - 6x_2) = 0.$

Odtud již plyne, že $x_2 = 0$ nebo $x_2 = -\frac{2}{3}$.

I.1.b. Nechť $x_2 = 10$, potom tedy obdržíme pouze jedinou rovnici

$$-40 - 600 + \lambda_3 = 0.$$

Jejíž řešení je zřejmé, tj.$\lambda_3 = 640$.

I.2. Nechť je $x_1 = 0$, pak

$$\begin{aligned} 10 - \lambda_2 &= 0 \\ -4x_2 - 6x_2^2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3(x_2 - 10) &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice je zřejmé, že $\lambda_2 = 10$. Z rovnice $\lambda_3(x_2 - 10) = 0$ plyne, že $\lambda_3(x_2 - 10) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_3 = 0$ nebo $x_2 = 10$.

I.2.a. Nechť je nyní $\lambda_3 = 0$, potom

$$\begin{aligned} -4x_2 - 6x_2^2 &= 0 \\ x_2(-4 - 6x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Odtud je již zřejmé, že $x_2 = 0$ nebo $x_2 = -\frac{2}{3}$.

I.2.b. Nechť je $x_2 = 10$, pak tedy

$$-40 - 600 + \lambda_3 = 0$$

Tudíž je zřejmé, že $\lambda_3 = 640$.

II. Nechť $x_1x_2 - 10 = 0$. Odtud úpravou dostaneme $x_2 = \frac{10}{x_1}$. Obdržíme

$$
\begin{aligned}
-3x_1^2 + 10 + \lambda_1 \frac{10}{x_1} - \lambda_2 &= 0 \\
-4\frac{10}{x_1} - 6\frac{100}{x_1^2} + \lambda_1 x_1 + \lambda_3 &= 0 \\
\lambda_2(-x_1) &= 0 \\
\lambda_3\Big(\frac{10}{x_1} - 10\Big) &= 0.
\end{aligned}
$$

Z rovnice $\lambda_2(-x_1) = 0$ plyne, že $\lambda_2(-x_1) = 0 \iff \lambda_2 = 0$ nebo $x_1 = 0$.

II.1. Nechť $x_1 = 0$. Pak obdržíme soustavu s nedefinovanými výrazy. Tudíž je zřejmé, že musí být $x_1 \neq 0$.

II.2. Nechť je $\lambda_2 = 0$. Pak dostaneme

$$
\begin{aligned}
-3x_1^2 + 10 + \lambda_1 \frac{10}{x_1} &= 0 \\
-\frac{40}{x_1} - \frac{600}{x_1^2} + \lambda_1 x_1 + \lambda_3 &= 0 \\
\lambda_3\Big(\frac{10}{x_1} - 10\Big) &= 0.
\end{aligned}
$$

Dále z rovnice $\lambda_3\Big(\frac{10}{x_1} - 10\Big) = 0$ je zřejmé, že $\lambda_3\Big(\frac{10}{x_1} - 10\Big) = 0$ $\iff \lambda_3 = 0$ nebo $x_1 = 1$.

II.2.a. Nechť $x_1 = 1$, poté obdržíme

$$
\begin{aligned}
-3 + 10 + 10\lambda_1 &= 0 \\
-640 + \lambda_1 + \lambda_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Z první rovnice máme $10\lambda_1 = -7 \implies \lambda_1 = -\frac{7}{10}$, což ale není možné, neboť λ_1 má být nezáporné.

II.2.b. Nechť je $\lambda_3 = 0$, pak

$$
\begin{aligned}
-3x_1^2 + 10 + \lambda_1 \frac{10}{x_1} &= 0 \\
-\frac{40}{x_1} - \frac{600}{x_1^2} + \lambda_1 x_1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Odtud úpravou, za předpokladu $x_1 \neq 0$, dostaneme

$$-3x_1^3 + 10x_1 + 10\lambda_1 = 0$$
$$-40x_1 - 600 + \lambda_1 x_1^3 = 0.$$

Z první rovnice máme $\lambda_1 = \frac{1}{10}(3x_1^3 - 10x_1)$. Dosazením do druhé rovnice obdržíme

$$-40x_1 - 600 + \frac{1}{10}x_1^3(3x_1^3 - 10x_1) = 0.$$

Tedy $$3x_1^6 - 10x_1^4 - 400x_1 - 6000 = 0.$$

K určení kořenů polynomu 6. stupně použijeme matematický software Matlab. Dostaneme dva reálné kořeny, tj. $x_1 = \frac{3605}{937}$ a $\widetilde{x_1} = -\frac{339}{95}$. Zbylé čtyři kořeny jsou komplexně sdružené. Řešení dané úlohy hledáme v množině $\mathbb{R}^2$, tudíž komplexně sdružené kořeny neuvažujeme. Je - li $\widetilde{x_1} = -\frac{339}{95}$, KKT podmínka $g_2(x_1) \leq 0$ není splněna. Z rovnice $\lambda_1 = \frac{1}{10}(3x_1^3 - 10x_1)$ pro $x_1 = \frac{3605}{937}$ dostaneme $\lambda_1 = \frac{5401}{408}$. Poslední neznámou x_2 dopočteme ze vztahu $x_2 = \frac{10}{x_1}$. Tedy $x_2 = \frac{1874}{721}$.

Kandidáty na řešení úlohy jsou body

1. $\boldsymbol{x}_1 = (\sqrt{\frac{10}{3}}, 0)$, $\boldsymbol{\lambda}_1 = (0, 0, 0)$, což plyne z I.1.$a$,
2. $\boldsymbol{x}_2 = (\sqrt{\frac{10}{3}}, -\frac{2}{3})$, $\boldsymbol{\lambda}_2 = (0, 0, 0)$, což plyne z I.1.$a$,
3. $\boldsymbol{x}_3 = (\sqrt{\frac{10}{3}}, 10)$, $\boldsymbol{\lambda}_3 = (0, 0, 640)$, což plyne z I.1.$b$,
4. $\boldsymbol{x}_4 = (0, 0)$, $\boldsymbol{\lambda}_4 = (0, 10, 0)$, což plyne z I.2.$a$,
5. $\boldsymbol{x}_5 = (0, -\frac{2}{3})$, $\boldsymbol{\lambda}_5 = (0, 10, 0)$, což plyne z I.2.$a$,
6. $\boldsymbol{x}_6 = (0, 10)$, $\boldsymbol{\lambda}_6 = (0, 10, 640)$, což plyne z I.2.$b$,
7. $\boldsymbol{x}_7 = (\frac{3605}{937}, \frac{1874}{721})$, $\boldsymbol{\lambda}_7 = (\frac{5401}{408}, 0, 0)$, což plyne z II.2.$b$.

Sestavíme Lagrangeovu funkci, která je pro tuto úlohu tvaru

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = -x_1^3 - 2x_2^2 + 10x_1 - 6 - 2x_2^3 + \lambda_1(x_1x_2 - 10) + \lambda_2(-x_1) + \lambda_3(x_2 - 10).$$

Ověříme splnění předpokladů věty 2.1. Nejprve vypočteme $\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$, tj.

$$\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} -3x_1^2 + 10 + \lambda_1 x_2 - \lambda_2 \\ -4x_2 - 6x_2^2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Předpoklad nezápornosti Lagrangeových multiplikátorů je splněný, tj. $\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \boldsymbol{\lambda}_4, \boldsymbol{\lambda}_5, \boldsymbol{\lambda}_6, \boldsymbol{\lambda}_7 \geq \ \mathbf{0}$. Podmínka $g_i(\boldsymbol{x}_k) \leq 0, \forall k \in \hat{K} = \{1,\dots,7\}, \forall i \in I = \{1,2,3\}$ neplatí pro bod $\boldsymbol{x}_3$, tedy $g_1(\boldsymbol{x}_3) \nleq 0$. Tento bod tedy nebude řešením dané úlohy. Zbývající podmínka $\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}_k) = 0$ platí pro $\forall k \in \overline{K} = \{1,2,4,5,6,7\}$ a $i \in I$. Abychom ověřili poslední předpoklad věty 2.1, tj.

$$\boldsymbol{p}^T \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k)\boldsymbol{p} \geq 0 \ \ \forall \boldsymbol{p} \in C(\boldsymbol{x}_k), \boldsymbol{p} \neq \mathbf{0} \ \ \forall k \in \overline{K},$$

určíme množiny kritických kuželů. Tedy
$C(\boldsymbol{x}_k) = \{\boldsymbol{p} \in LFD(\boldsymbol{x}_k) : \boldsymbol{p}^T \nabla g_i(\boldsymbol{x}_k) = 0 \ \forall i \in I(\boldsymbol{x}_k) : \lambda > 0\}$, kde $LFD(\boldsymbol{x}_k)$ jsou množiny linearizovaných přípustných směrů, tj.
$LFD(\boldsymbol{x}_k) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{p}^T \nabla g_i(\boldsymbol{x}_k) = 0 \ \forall i \in I(\boldsymbol{x}_k)\}$.
Nejprve ale určíme aktivní podmínky, tj. podmínky $g_i(\boldsymbol{x}_k) = 0 \ \ \forall i = \{1,2,3\}$ a $\forall k \in \overline{K} = \{1,2,4,5,6,7\}$, které jsou nezbytné k určení množiny LFD. Pro body $\boldsymbol{x}_1$ a $\boldsymbol{x}_2$ nenajdeme žádné aktivní podmínky, tj. $g_i(\boldsymbol{x}_k) \neq 0, k = 1,2, i = 1,2,3$. Množiny $LFD(\boldsymbol{x}_k), k = 1,2$ jsou prázdné množiny. Pro bod $\boldsymbol{x}_4$ platí $g_2(\boldsymbol{x}_4) = 0$, pro bod $\boldsymbol{x}_5$ platí $g_2(\boldsymbol{x}_5) = 0$, pro bod $\boldsymbol{x}_6$ platí $g_2(\boldsymbol{x}_6) = 0$ a $g_3(\boldsymbol{x}_6) = 0$ a pro bod $\boldsymbol{x}_7$ platí $g_1(\boldsymbol{x}_7) = 0$. Pro tyto body můžeme určit množinu linearizovaných směrů, tedy

$$LFD(\boldsymbol{x}_4) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0\} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1, p_2 \end{pmatrix}, p_1 \geq 0\},$$

$$LFD(\boldsymbol{x}_5) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0\} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1, p_2 \end{pmatrix}, p_1 \geq 0\},$$

$$LFD(\boldsymbol{x}_6) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0, \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leq 0\} =$$

$$= \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}, p_1 \geq 0, p_2 \leq 0\}.$$

$$LFD(\boldsymbol{x}_7) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3605}{937} \\ \\ \frac{1874}{721} \end{pmatrix} \leq 0\} =$$

$$= \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \frac{3605}{937} p_1 + \frac{1874}{721} p_2 \end{pmatrix} \leq 0\}.$$

Nyní určíme kritické kužely $C(\boldsymbol{x}_k)$, pro $k = \{4, 5, 6, 7\}$, tj.

$$C(\boldsymbol{x}_4) = \{\boldsymbol{p} \in LFD(\boldsymbol{x}_4) : \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0, p_2 \end{pmatrix}\},$$

$$C(\boldsymbol{x}_5) = \{\boldsymbol{p} \in LFD(\boldsymbol{x}_5) : \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0, p_2 \end{pmatrix}\},$$

$$C(\boldsymbol{x}_6) = \{\boldsymbol{p} \in LFD(\boldsymbol{x}_6) : \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\} =$$

$$= \{\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0, 0 \end{pmatrix}\},$$

$$C(\boldsymbol{x}_7) = \{\boldsymbol{p} \in LFD(\boldsymbol{x}_7) : \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3605}{937} \\ \\ \frac{1874}{721} \end{pmatrix} = 0\}.$$

Tedy $\frac{3605}{937} p_1 + \frac{1874}{721} p_2 = 0 \Longrightarrow p_1 = -\frac{506}{749} p_2 \Longrightarrow$

$$C(\boldsymbol{x}_7) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -\frac{506}{749} p_2, p_2 \end{pmatrix}\}.$$

Dále spočteme $\nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$, tedy

$$\nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} -6x_1 & \lambda_1 \\ \lambda_1 & -4 - 12x_2 \end{pmatrix}$$

a dosadíme do výrazu $\boldsymbol{p}^T \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k) \boldsymbol{p}$ pro $k = 4, 5, 6$.

Pro $\boldsymbol{x}_4$ a $\forall \boldsymbol{p} \in C(\boldsymbol{x}_4), \boldsymbol{p} \neq 0$, platí

$$\boldsymbol{p}^T \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}_4, \boldsymbol{\lambda}_4) \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4p_2 \end{pmatrix} = -4p_2^2.$$

Je tedy zřejmé, že $-4p_2^2 < 0 \quad \forall \boldsymbol{p} \in C(\boldsymbol{x}_4), \boldsymbol{p} \neq 0$, nejedná se tedy o bod ostrého lokálního minima.

Pro $\boldsymbol{x}_5$ a $\forall \boldsymbol{p} \in C(\boldsymbol{x}_5), \boldsymbol{p} \neq 0$, platí

$$\boldsymbol{p}^T \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}_5, \boldsymbol{\lambda}_5)\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4p_2 \end{pmatrix} = 4p_2^2.$$

Odtud plyne, že $4p_2^2 > 0 \quad \forall \boldsymbol{p} \in C(\boldsymbol{x}_5), \boldsymbol{p} \neq 0$, jedná se tedy o bod ostrého lokálního minima.

Pro $\boldsymbol{x}_6$ je kritický kužel pouze jednobodová množina, tj. $C(\boldsymbol{x}_6) = \{\boldsymbol{p} = (0,0)\}$. Výraz $\boldsymbol{p}^T \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}_6, \boldsymbol{\lambda}_6)\boldsymbol{p}$ uvažujeme pouze pro $\boldsymbol{p} \neq 0$. Tudíž bod $\boldsymbol{x}_6$ není bodem ostrého lokálního minima.

Pro $\boldsymbol{x}_7$ a $\forall \boldsymbol{p} \in C(\boldsymbol{x}_7), \boldsymbol{p} \neq 0$, platí

$$\boldsymbol{p}^T \nabla^2_{\boldsymbol{xx}} L(\boldsymbol{x}_7, \boldsymbol{\lambda}_7)\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} -\frac{506}{749}p_2 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{11773}{510} & \frac{5401}{408} \\ \frac{5401}{408} & -\frac{949}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{506}{749}p_2 \\ p_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8448}{293}p_2 & -\frac{24721}{76}p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{506}{749}p_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = -\frac{4071}{209}p_2^2 - \frac{24721}{76}p_2^2 = -\frac{18272}{53}p_2^2.$$

Je tedy zřejmé, že $-\frac{18272}{53}p_2^2 < 0 \quad \forall \boldsymbol{p} \in C(\boldsymbol{x}_7), \boldsymbol{p} \neq 0$, nejedná se o bod ostrého lokálního minima.

2.2. Vlastnosti Lagrangeovy funkce

Zabývejme se jednodušší úlohou nelineárního programování, a to úlohou ve tvaru

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{za podmínek} & g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i \in I = \{1, \dots, m\}, \\ \text{pro} & \boldsymbol{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Pro přehlednost bude tato úloha nelineárního programování označena symbolem *(NLP*)*. Lagrangeova funkce je pro tuto úlohu tvaru

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+.$$

Definice 2.2 (Sedlový bod)

Bod $\{\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*\} \in X \times \mathbb{R}^m_+$ nazveme **sedlovým bodem** Lagrangeovy funkce příslušející úloze nelineárního programování *(NLP*)*, jestliže platí

$$L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) \leq L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \leq L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*) \qquad \forall \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+.$$

Poznámka 2.2 Sedlový bod Lagrangeovy funkce je bod, ve kterém Lagrangeova funkce nabývá svého minima v proměnné $\boldsymbol{x}$ a maxima v proměnné $\boldsymbol{\lambda}$.

Věta 2.2 (Charakterizace sedlových bodů)

Nechť $\boldsymbol{x}^* \in X, \boldsymbol{\lambda}^* \in \mathbb{R}^m_+$. Bod $\{\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*\}$ je sedlovým bodem funkce $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ tehdy a jen tehdy, když platí

1. $L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \min\limits_{\boldsymbol{x} \in X} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)$,
2. $g_i(\boldsymbol{x}^*) \leq 0 \quad \forall i \in I$,
3. $\lambda_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \quad \forall i \in I$.

Důkaz: viz [6], strana 55.

Poznámka 2.3 Hledáme dvojici $\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*$, vyhovující podmínkám z předchozí věty. Z první podmínky plyne, že řešíme soustavu rovnic $\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = \mathbf{0}$, což můžeme zapsat ve tvaru $\nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \mathbf{0}$. Vyřešením této soustavy dostaneme kandidáty na řešení dané úlohy.

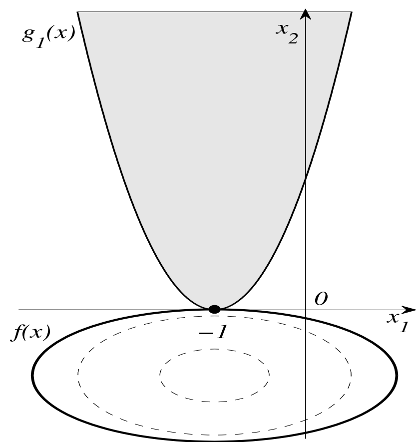
Předveďme si nyní, jak nalézt sedlový bod Lagrangeovy funkce dané úlohy.

Příklad 2.3 Dokažte, že pro Lagrangeovu funkci dané úlohy

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & f(\boldsymbol{x}) = \frac{(x_1+1)^2}{2} + (x_2+1)^2 - 1 \\ \text{za podmínek} & g_1(\boldsymbol{x}) = 2(x_1+1)^2 - x_2 \leq 0 \\ & g_2(\boldsymbol{x}) = x_1 \leq 0 \\ \text{pro} & \boldsymbol{x} \in X = \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

existuje sedlový bod.

Dokážeme, že jsou splněny předpoklady věty 2.2. Sestavíme Lagrangeovu funkci a najdeme adepty na řešení dané úlohy.



Obrázek 8: Příklad 2.3

Lagrangeova funkce pro tuto úlohu je tvaru

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{(x_1+1)^2}{2} + (x_2+1)^2 - 1 + \lambda_1(2(x_1+1)^2 - x_2) + \lambda_2 x_1.$$

Nejprve vypočteme $\nabla_x L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$, tj.

$$\nabla_x L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} (x_1+1) + 4\lambda_1(x_1+1) + \lambda_2 \\ 2(x_2+1) - \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Přípustná množina je tvaru $S = \{\boldsymbol{x} \in X : 2(x_1+1)^2 - x_2 \leq 0, x_1 \leq 0\}$. Nyní najdeme adepty na řešení úlohy. Tedy řešíme soustavu

$$\begin{aligned} (x_1+1) + 4\lambda_1(x_1+1) + \lambda_2 &= 0 \\ 2(x_2+1) - \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_1(2(x_1+1)^2 - x_2) &= 0 \\ \lambda_2 x_1 &= 0 \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Z rovnice $\lambda_2 x_1 = 0$ je zřejmé, že $\lambda_2 = 0$ nebo $x_1 = 0$.

I. Nechť $\lambda_2 = 0$. Pak je soustava tvaru

$$x_1 + 1 + 4\lambda_1(x_1 + 1) = 0$$
$$2(x_2 + 1) - \lambda_1 = 0$$
$$\lambda_1(2(x_1 + 1)^2 - x_2) = 0.$$

Z poslední rovnice máme, že $\lambda_1(2(x_1 + 1)^2 - x_2) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 0$ nebo $2(x_1 + 1)^2 - x_2 = 0$.

I.1. Nechť tedy $\lambda_1 = 0$. Poté obdržíme

$$x_1 + 1 = 0$$
$$2(x_2 + 1) = 0.$$

Odtud již plyne, že $x_1 = -1$ a $x_2 = -1$. Ale bod $\boldsymbol{x}_1 = (-1, -1) \notin S$, neboť $g_1(\boldsymbol{x}_1) \nleq 0$. Tento bod nemůže být řešením dané úlohy.

I.2. Nechť $2(x_1 + 1)^2 - x_2 = 0$, tedy $x_2 = 2(x_1 + 1)^2$, pak

$$x_1 + 1 + 4\lambda_1(x_1 + 1) = 0$$
$$2[2(x_1 + 1)^2 + 1] - \lambda_1 = 0.$$

Úpravou těchto rovnic, dostaneme

$$(x_1 + 1)(1 + 4\lambda_1) = 0$$
$$4x_1^2 + 8x_1 + 6 - \lambda_1 = 0.$$

Z první rovnice plyne, že $(x_1 + 1)(1 + 4\lambda_1) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{4}$ nebo $x_1 = -1$.

I.2.a. Nechť je nyní $\lambda_1 = -\frac{1}{4}$. Dostáváme ihned spor s podmínkou nezápornosti λ_1.

I.2.b. Nechť je nyní $x_1 = -1$, tj. $4(-1)^2 + 8(-1) + 6 - \lambda_1 = 0$. Odtud je již zřejmé, že $\lambda_1 = 2$.

Hodnotu x_2 dopočteme ze vztahu $x_2 = 2(x_1 + 1)^2$, kde $x_1 = -1$. Tedy $x_2 = 0$. Máme $\boldsymbol{x}_2 = (-1, 0)$ a $\boldsymbol{\lambda} = (2, 0)$.

II. Nechť je nyní $x_1 = 0$. Odtud máme

$$\begin{aligned} 1 + 4\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 2(x_2 + 1) + \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_1(2 - x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice plyne, že $\lambda_1(2 - x_2) = 0 \iff \lambda_1 = 0$ nebo $x_2 = 2$.

II.1. Nechť tedy $\lambda_1 = 0$. Dostaneme tedy

$$\begin{aligned} 1 + \lambda_2 &= 0 \\ 2x_2 + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Odtud již plyne, že $\lambda_2 = -1$ a $x_2 = -1$. Ale podmínka $\lambda_2 \geq 0$ neplatí.

II.2. Nechť je nyní $x_2 = 2$. Odtud máme

$$\begin{aligned} 1 + 4\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 6 + \lambda_1 &= 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -6. \end{aligned}$$

Dostáváme se ke sporu, neboť multiplikátor λ_1 musí být nezáporný.

Jediný kandidát na řešení dané úlohy je bod $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}_2 = (-1, 0)$ a bod $\boldsymbol{\lambda}^* = (2, 0)$. Ověříme, zda se je splněna podmínka $L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \min\limits_{\boldsymbol{x} \in X} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)$. Máme

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*) = \frac{(x_1 + 1)^2}{2} + (x_2 + 1)^2 - 1 + 2(2(x_1 + 1)^2 - x_2).$$

Najdeme stacionární body funkce $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)$, tj.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial x_1} &= x_1 + 1 + 8x_1 + 8 = 0 \Longrightarrow x_1 = -1 \\ \frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial x_2} &= 2x_2 + 2 - 2 = 0 \Longrightarrow x_2 = 0. \end{aligned}$$

Sestavíme Hessovu matici $H(L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*))$ a podle znamének jejích subdeterminantů určíme, zda se jedná o bod extrému. Nejprve spočteme druhé parciální derivace,tj.

$$\frac{\partial^2 L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial x_1^2} = 9 \qquad \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial x_2^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$

Hessova matice je tvaru $H(L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)) = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Je zřejmé, že oba subdeterminanty jsou kladné, tudíž bod $\boldsymbol{x}^* = (-1, 0)$ je bodem minima funkce $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)$. Tři podmínky věty 2.2 jsou splněny, tudíž bod $\{\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*\}$={(-1,0),(2,0)} je tedy sedlový bod Lagrangeovy funkce dané úlohy *(NLP*)*.

Věta 2.3 (Postačitelnost sedlových bodů)
Je-li $\{\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*\}$ *sedlovým bodem funkce* $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$, *pak* $\boldsymbol{x}^*$ *je bodem globálního minima odpovídající úlohy nelineárního programování.*

Důkaz: viz [6], strana 56.

Obrácené tvrzení věty 2.3 neplatí, existence sedlového bodu není v obecném případě zaručena. Z existence bodu globálního minima neplyne existence sedlového bodu.

Věta 2.4 (Existence sedlového bodu pro konvexní úlohu)
Nechť (NLP) je úloha konvexního programování splňující Slaterovu kvalifikační podmínku, tj. existuje bod* $\overline{\boldsymbol{x}} \in X$ *tak, že*

$$g_i(\overline{\boldsymbol{x}}) < 0 \qquad \forall i \in I.$$

Potom za předpokladu, že existuje řešení $\boldsymbol{x}^* \in X$ *této úlohy, existuje vektor multiplikátorů* $\boldsymbol{\lambda}^* \geq 0$ *takový, že* $\{\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*\}$ *je sedlovým bodem odpovídající Lagrangeovy funkce* $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$.

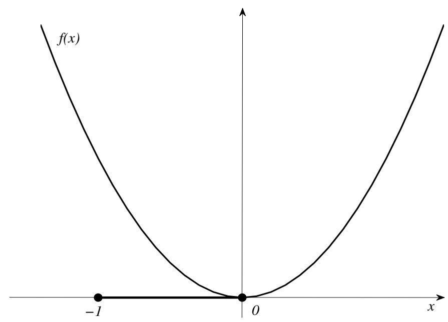
Důkaz: viz [1], strana 270.

Nyní uvedeme dva příklady na existenci a neexistenci sedlového bodu a vyvodíme z nich praktické závěry.

Příklad 2.4 Dokažte, že pro Lagrangeovu funkci dané úlohy

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & f(x) = x^2 \\ \text{za podmínky} & g(x) = x \leq 0 \\ \text{pro} & x \in X = [-1, 2] \end{cases}$$

existuje sedlový bod.



Obrázek 9: Příklad 2.4

Jedná se o úlohu konvexního programování, neboť funkce $f(x)$ je konvexní. Přípustná množina je tvaru $S = \{x \in [-1, 2] : x \leq 0\} = [-1, 0]$. Množina S je konvexní množina v $\mathbb{R}$. Z obrázku je zřejmé, že existuje řešení $x^* = 0 \in X$ dané úlohy. Tato úloha má také Slaterův bod, neboť jistě existuje bod $\overline{x}$ takový, že $\overline{x} \in S : g(\overline{x}) \leq 0$, tímto bodem je např. $\overline{x} = -1$. Předpoklady věty 2.4 jsou splněny, proto tedy existuje takové $\lambda^* \geq 0$, že $\{x^*, \lambda^*\}$ je sedlovým bodem Lagrangeovy funkce. Lagrangeova funkce dané úlohy je tvaru

$$L(x, \lambda) = x^2 + \lambda x.$$

Zbývá tedy najít x^*, λ^*, takové, že $\{x^*, \lambda^*\}$ je sedlový bod Lagrangeovy funkce. Spočteme $\nabla_x L(x, \lambda)$, tedy

$$\nabla_x L(x, \lambda) = 2x + \lambda.$$

Řešíme tedy soustavu

$$\begin{aligned} 2x + \lambda &= 0 \\ \lambda x &= 0 \\ \lambda &\geq 0. \end{aligned}$$

Naším úkolem je najít x a λ, vyhovující těmto podmínkám. Rovnice $\lambda x = 0$ platí $\iff \lambda = 0$ nebo $x = 0$. Soustavu vyřešíme pro tyto dvě možnosti.

I. Nechť $\lambda = 0$. Pak máme $2x = 0 \Longrightarrow x = 0$.

II. Nechť je nyní $x = 0$. Potom $\lambda = 0$.

Řešení této soustavy je tvaru $x^* = 0, \lambda^* = 0$. Bod $\{0, 0\}$ je jediný kandidát na sedlový bod Lagrangeovy funkce. Ověříme vztah $L(x^*, \lambda^*) = \min\limits_{x \in X} L(x, \lambda^*)$. Funkce $L(x, \lambda^*) = x^2$ je konvexní funkce proměnné x, neboť $\nabla^2_{xx} L(x, \lambda^*) = 2 \geq 0$.
K určení minima této funkce stačí položit první derivaci rovnu 0. Tedy

$$\nabla_x L(x, \lambda^*) = 2x = 0 \Longrightarrow x^* = 0.$$

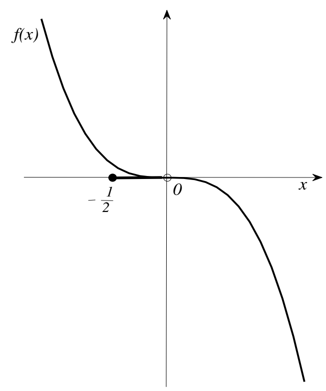
Bod $x^* = 0$ je bodem minima funkce $L(x, \lambda^*)$. Odtud již plyne $\min\limits_{x \in X} L(x, \lambda^*) = L(x^*, \lambda^*) = 0$. Předpoklady věty 2.2 jsou splněny a tudíž bod {0,0} je sedlovým bodem Lagrangeovy funkce.

Příklad 2.5 Dokažte, že pro Lagrangeovu funkci dané úlohy

$$\begin{cases} \text{minimalizovat funkci} & f(\boldsymbol{x}) = -x^3 \\ \text{za podmínky} & g(\boldsymbol{x}) = -4x - 2 \leq 0 \\ \text{pro} & x \in X = (-2, 0) \end{cases}$$

neexistuje sedlový bod.

Naším úkolem je tedy dokázat, že neexistují žádná x^* a λ^* taková, že bod $\{x^*, \lambda^*\}$ je sedlovým bodem Lagrangovy funkce. Přípustná množina je pro tuto úlohu tvaru $S = \{x \in (-2, 0) : -4x - 2 \leq 0\} = \Big[-\frac{1}{2}, 0\Big)$.



Obrázek 10: Příklad 2.5

Sestavíme Lagrangeovu funkci dané úlohy, tj.

$$L(x, \lambda) = -x^3 + \lambda(-4x - 2).$$

Nyní spočteme $\nabla_x L(x, \lambda)$, tj. $\nabla_x L(x, \lambda) = -3x^2 - 4\lambda$. Řešíme soustavu tvaru

$$\begin{aligned} -3x^2 - 4\lambda &= 0 \\ \lambda(-4x - 2) &= 0 \\ \lambda &\geq 0. \end{aligned}$$

Z rovnice $\lambda(-4x-2) = 0$ plyne, že $\lambda(-4x-2) = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0$ nebo $x = -\frac{1}{2}$.

I. Nechť $\lambda = 0$. Pak máme $-3x^2 = 0$. Odtud je zřejmé, že $x = 0$. Bod $x = 0$ není kandidátem na řešení, neboť $0 \notin \Big[-\frac{1}{2}, 0\Big)$. Nejedná se o sedlový bod dané úlohy.

II. Nechť je nyní $x = -\frac{1}{2}$. Pak obdržíme

$$-\frac{3}{4} - 4\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{3}{16}.$$

Odtud máme $x = -\frac{1}{2}$ a $\lambda = -\frac{3}{16}$.

Je zřejmé, že ani bod $\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{16}\}$ není kandidátem na řešení dané úlohy, neboť λ má být nezáporný multiplikátor. Sedlový bod pro Lagrangeovu funkci dané úlohy *(NLP*)* neexistuje.

Poznámka 2.4 Na příkladech 2.4 a 2.5 jsme ilustrovali rozdíl mezi úlohami konvexního a nekonvexního programování. V úloze konvexního programování je existence sedlového bodu zaručena, ale v úloze nekonvexního programování tento závěr neplatí. Přestože daná optimalizační úloha má řešení, sedlový bod Lagrangeovy funkce existovat nemusí.

3. Duální úloha a její vlastnosti

Zavedení duální funkce a formulace duální úlohy nám poskytuje prostředky pro výrazné zjednodušení a zkrácení výpočtu řešení optimalizační úlohy.

Věty a definice jsou převzaty z [1] a [6].

3.1. Úloha s nerovnostními omezeními

Úlohu nelineárního programování *(NLP*)* budeme dále nazývat primární úlohou nelineárního programování. Primární úlohu budeme značit (P) a budeme uvažovat úlohu tvaru

$$(\mathrm{P})\begin{cases}\text{minimalizovat funkci} & f(\boldsymbol{x})\\ \text{za podmínek} & g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \quad i \in I = \{1, \dots, m\},\\ \text{pro} & \boldsymbol{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n.\end{cases}$$

Definice 3.1 (Duální funkce)
Funkci

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}) = \inf_{\boldsymbol{x}\in X} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \inf_{\boldsymbol{x}\in X} \{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\}$$

budeme nazývat lagrangeovská **duální funkce** k úloze primární (P).

Definice 3.2 (Duální úloha)
Úlohu

$$\begin{cases}\text{maximalizovat} & \theta(\boldsymbol{\lambda})\\ \text{za podmínek} & \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in I = \{1, \dots, m\}\end{cases}$$

budeme nazývat lagrangeovskou **duální úlohou** k úloze primární.

Věta 3.1 (Konkávnost duální funkce)
Duální funkce θ je konkávní funkcí proměnné $\boldsymbol{\lambda}$ a množina, na níž tato funkce nabývá konečných hodnot, je konvexní.

Důkaz: viz [6], strana 59.

Důsledek 3.1 *Duální úloha přepsaná na tvar*

$$\begin{cases} \textit{minimalizovat} & -\theta(\boldsymbol{\lambda}) \\ \textit{za podmínek} & \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \end{cases}$$

je úloha konvexního programování.

V této části práce se zaměříme na vztahy a souvislosti mezi duální a primární úlohou *(NPL*)*.

Věta 3.2 (Věta o slabé dualitě)
Nechť $\boldsymbol{x}^* \in S$ je řešením primární úlohy a nechť $\boldsymbol{\lambda}^* \geq 0$ je řešením odpovídající duální úlohy. Potom platí

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}^*) \leq f(\boldsymbol{x}^*).$$

Důkaz: viz [6], strana 60.

Definice 3.3 (Dualitní mezera)
Rozdíl $f(\boldsymbol{x}^*) - \theta(\boldsymbol{\lambda}^*)$ nazveme **dualitní mezera** nebo **skok**.

Zadání následujícího příkladu je převzato z neřešených cvičení v kapitole 6 z [6].

Příklad 3.1 Dokažte, že pro úlohu

$$\begin{cases} \text{minimalizovat} & f(\boldsymbol{x}) = 10 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \text{za podmínky} & g(\boldsymbol{x}) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 4 \\ \text{pro} & X = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \end{cases}$$

existuje dualitní mezera.

Hledáme tedy $\boldsymbol{x}^* : f(\boldsymbol{x}^*) = \min_{\boldsymbol{x} \in S} f(\boldsymbol{x}^*)$, kde $S = \{\boldsymbol{x} \in X, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 4\}$ je přípustná množina dané úlohy. Z tvaru množiny X je zřejmé, že řešení dané úlohy hledáme ve vrcholech jednotkové krychle. Označme si tedy body z množiny X následujícím způsobem, tj. $\boldsymbol{x}_1 = (0,0,0), \boldsymbol{x}_2 = (0,0,1), \boldsymbol{x}_3 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{x}_4 = (1,0,0), \boldsymbol{x}_5 = (0,1,1), \boldsymbol{x}_6 = (1,0,1), \boldsymbol{x}_7 = (1,1,0), \boldsymbol{x}_8 = (1,1,1)$. Ověříme,

zda všechny tyto body náleží do přípustné množiny. Tedy dostaneme
$S = \{\boldsymbol{x} \in X, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 4\} = \{\boldsymbol{x}_1 = (0,0,0), \boldsymbol{x}_2 = (0,0,1), \boldsymbol{x}_3 = (0,1,0),$ $\boldsymbol{x}_4 = (1,0,0)\}$. Zbylé body z množiny X nenáleží do S, nemohou tedy být řešením dané úlohy. Určíme funkční hodnoty v bodech patřících do přípustné množiny, tj.

$$f(\boldsymbol{x}_1) = 10, \qquad f(\boldsymbol{x}_2) = 9,$$
$$f(\boldsymbol{x}_3) = 8, \qquad f(\boldsymbol{x}_4) = 7.$$

Odtud je již zřejmé, že $\boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{x}^* = (1,0,0)$ a tedy $\min\limits_{\boldsymbol{x} \in S} f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^*) = 7$.

Určíme duální úlohu k dané úloze. Najdeme duální funkci $\theta(\boldsymbol{\lambda}) = \inf\limits_{\boldsymbol{x} \in X} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$. Nejprve ale sestavíme Lagrangeovu funkci, která je pro tuto úlohu tvaru

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = 10 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 + \lambda(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4).$$

Z definice duální funkce 3.1 je zřejmé, že hledáme $x \in X$ takové, že Lagrangeova funkce v tomto bodě nabývá svého minima v proměnné x. Tedy

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -3 + 2\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -2 + 3\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{2}{3}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -1 + 4\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{4}.$$

Dosaďme $\boldsymbol{x}_i \in X,\ i = \{1, \ldots, 8\},$ do $L(\boldsymbol{x}, \lambda)$, neboť množinu X, na které hledáme řešení, máme zadanou pomocí osmi bodů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_8$. Po dosazení těchto bodů do Lagrangeovy funkce máme

$$L(\boldsymbol{x}_1, \lambda) = 10 - 4\lambda, \qquad L(\boldsymbol{x}_2, \lambda) = 9,$$
$$L(\boldsymbol{x}_3, \lambda) = 8 - \lambda, \qquad L(\boldsymbol{x}_4, \lambda) = 7 - 2\lambda,$$
$$L(\boldsymbol{x}_5, \lambda) = 7 + 3\lambda, \qquad L(\boldsymbol{x}_6, \lambda) = 6 + 2\lambda,$$
$$L(\boldsymbol{x}_7, \lambda) = 5 + \lambda, \qquad L(\boldsymbol{x}_8, \lambda) = 4 + 5\lambda.$$

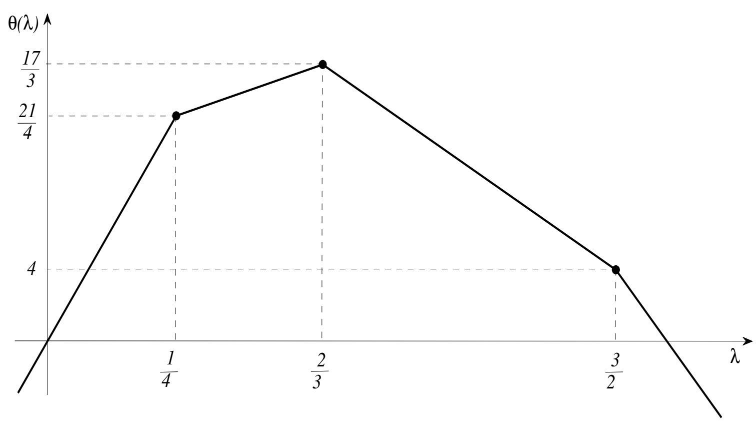
Nyní hledáme duální funkci, tj. funkci

$$\theta(\lambda) = \min_{\boldsymbol{x} \in X} L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \min_{\boldsymbol{x} \in X} \left(10 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 + \lambda(2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4)\right).$$

Hodnoty λ, které jsme našli, dosadíme postupně do Lagrangeovy funkce $L(\boldsymbol{x}_i, \lambda)$ $i = I = \{1, \ldots, 8\}$. Každému nalezenému λ přiřadíme Lagrangeovu funkci $L(\boldsymbol{x}_i, \lambda)$ $i = \{1, \ldots, 8\}$ s nejnižší funkční hodnotou. Dostaneme tedy duální funkci tvaru

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} 4 + 5\lambda & \text{pro } \lambda \leq \frac{1}{4} \\ 5 + \lambda & \text{pro } \lambda \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{3}] \\ 7 - 2\lambda & \text{pro } \lambda \in [\frac{2}{3}, \frac{3}{2}] \\ 10 - 4\lambda & \text{pro } \lambda \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Naším úkolem je tedy najít λ^* takové, že platí $\max\limits_{\lambda \geq 0} \theta(\lambda) = \theta(\lambda^*)$, viz definice 3.2.



Obrázek 11: Duální funkce příkladu 3.1

Z obrázku je zřejmé, že $\max\limits_{\lambda \geq 0} \theta(\lambda) = \theta(\lambda^*) = \theta(\frac{2}{3}) = \frac{17}{3}$.

Tedy $f(\boldsymbol{x}^*) - \theta(\lambda^*) = 7 - \frac{17}{3} \geq 0$, odtud již plyne existence dualitní mezery.

Věta 3.3 (Věta o silné dualitě)
Nechť X je neprázdná konvexní množina a nechť f a g_i jsou konvexní funkce na X. Dále nechť optimální hodnota $f(\boldsymbol{x}^*)$ je konečná a úloha má Slaterův bod, tj. existuje $\overline{\boldsymbol{x}} \in S$ takové, že $g_i(\overline{\boldsymbol{x}}) < 0 \ \ \forall i \in I$. Potom platí

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}^*) = f(\boldsymbol{x}^*).$$

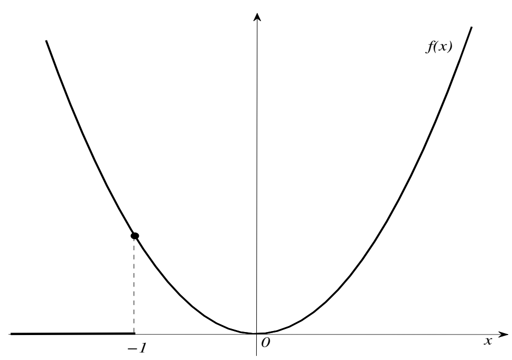
Důkaz: viz [1], strana 267.

Příklad 3.2 Analyzujte úlohu

$$\begin{cases} \text{minimalizovat} & f(x) = x^2 \\ \text{za podmínky} & g(x) = 2x + 2 \leq 0 \\ \text{pro} & x \in X = \mathbb{R} \end{cases}$$

pomocí úlohy k ní duální.

Funkce $f(x)$ je konvexní. Funkce $g(x)$ je lineární funkce, tj. jedná se o speciální případ konvexní funkce.



Obrázek 12: Příklad 3.2

Přípustná množina je pro tuto úlohu tvaru $S = \{x \in X = \mathbb{R} : 2x + 2 \leq 0\}$. Je tedy zřejmé, že se jedná o konvexní množinu. Navíc pro tuto úlohu existuje bod $\overline{x} \in S$ takový, že $g(\overline{x}) < 0$. Tímto bodem je např. $\overline{x} = -2$. Z obrázku je patrné, že $\boldsymbol{x}^* = -1$ a $f(x^*) = 1$.

Najdeme nyní duální funkci, tj. funkci

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}) = \inf_{\boldsymbol{x} \in X} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \inf_{\boldsymbol{x} \in X} \{f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\}.$$

Nejprve sestavíme Lagrangeovu funkci, která je tvaru

$$L(x, \lambda) = x^2 + \lambda(2x + 2).$$

Funkce $L(x, \lambda)$ je konvexní v proměnné x, neboť $\nabla^2_{xx} L(x, \lambda) = 2 \geq 0$. Svého minima tedy nabývá ve stacionárním bodě. Najdeme stacionární body Lagrangeovy funkce

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x} = 2x + 2\lambda = 0 \Longrightarrow x = -\lambda.$$

Hodnotu $x = -\lambda$ dosadíme do duální funkce, tedy

$$\theta(\lambda) = \inf_{\boldsymbol{x} \in X} L(x, \lambda) = (-\lambda)^2 + \lambda(-2\lambda + 2) = -\lambda^2 + 2\lambda.$$

Duální úloha je pro tuto úlohu tvaru

$$\begin{cases} \text{maximalizovat} & \theta(\lambda) = -\lambda^2 + 2\lambda \\ \text{za podmínky} & \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Předpoklady věty 3.3 jsou splněny, máme zaručenou platnost vztahu

$$\theta(\lambda^*) = f(x^*).$$

Zbývá najít maximum duální funkce. Vyšetřovaná duální funkce je konkávní, viz věta 3.1, tudíž k nalezení maxima stačí položit její první derivaci rovnu 0, tj.

$$\theta'(\lambda) = -2\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda^* = 1.$$

Dosazením do vztahu $x^* = -\lambda^*$ dostaneme řešení úlohy $x^* = -1$. Odtud již plyne $\min_{\boldsymbol{x} \in S} f(\boldsymbol{x}) = f(x^*) = 1 = \theta(\lambda^*) = \max_{\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}} \theta(\boldsymbol{\lambda})$.

Věta 3.4 (Sedlové body a silná dualita)
Platí

(i) *Má-li úloha (P) sedlový bod $\{\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*\}$, potom*

$$\max_{\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}} \theta(\boldsymbol{\lambda}) = \theta(\boldsymbol{\lambda}^*) = f(\boldsymbol{x}^*) = \min_{\boldsymbol{x} \in S} f(\boldsymbol{x}).$$

(ii) *Naopak, jestliže existují takové řešení $\boldsymbol{x}^*$ úlohy (P) a takové $\boldsymbol{\lambda}^* \geq 0$, že platí*

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}^*) = f(\boldsymbol{x}^*),$$

pak má úloha (P) sedlový bod a tímto bodem je $\{\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*\}$.

Důkaz: viz [7], strana 160.

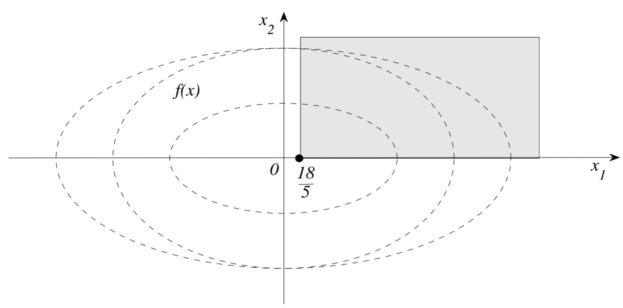
Příklad 3.3 Analyzujte úlohu

$$\begin{cases} \text{minimalizovat} & f(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} \\ \text{za podmínek} & g_1(\boldsymbol{x}) = -x_1 + \frac{18}{5} \leq 0 \\ & g_2(\boldsymbol{x}) = -x_2 \leq 0 \\ \text{pro} & \boldsymbol{x} \in X = \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

pomocí úlohy k ní duální.

K analýze této úlohy využijeme tvrzení $(\boldsymbol{i})$ věty 3.4.

Nejprve tedy dokážeme, že pro Lagrangeovu funkci dané úlohy existuje sedlový bod. K nalezení sedlového bodu užijeme tvrzení věty 2.2. Určíme přípustnou množinu, která je pro tuto úlohu tvaru $S = \{\boldsymbol{x} \in X : -x_1 + \frac{18}{5} \leq 0, -x_2 \leq 0\}$.



Obrázek 13: Příklad 3.3

Sestavíme Lagrangeovu funkci, tj.

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} + \lambda_1\Big(-x_1 + \frac{18}{5}\Big) - \lambda_2 x_2.$$

A spočteme $\nabla_x L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$, tj. $\nabla_x L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{9}x_1 - \lambda_1 \\ \\ \frac{2}{4}x_2 - \lambda_2 \end{pmatrix}$. Naším úkolem je najít

x_1, x_2, λ_1 a λ_2, vyhovující podmínkám

$$\begin{aligned}\frac{2}{9}x_1 - \lambda_1 &= 0\\ \frac{2}{4}x_2 - \lambda_2 &= 0\\ \lambda_1\Big(-x_1 + \frac{18}{5}\Big) &= 0\\ -\lambda_2 x_2 &= 0\\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Z poslední rovnice máme, že $-\lambda_2 x_2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_2 = 0$ nebo $x_2 = 0$.

I. Nechť $\lambda_2 = 0$. Soustava je tvaru

$$\begin{aligned}\frac{2}{9}x_1 - \lambda_1 &= 0\\ \frac{2}{4}x_2 &= 0\\ \lambda_1\Big(-x_1 + \frac{18}{5}\Big) &= 0.\end{aligned}$$

Ze druhé rovnice máme $x_2 = 0$. Z rovnice $\lambda_1\Big(-x_1 + \frac{18}{5}\Big) = 0$, je zřejmé, že $\lambda_1 = 0$ nebo $x_1 = \frac{18}{5}$.

I.1. Nechť je $\lambda_1 = 0$. Poté obdržíme $\frac{2}{9}x_1 = 0$. Odtud již plyne, že $x_1 = 0$. Máme tedy $\boldsymbol{x}_1 = (0,0)$ a $\boldsymbol{\lambda}_1 = (0,0)$. Bod $\boldsymbol{x}_1 = (0,0) \notin S$, neboť $g_1(\boldsymbol{x}_1) \nleq 0$.

I.2. Nechť $x_1 = \frac{18}{5}$, pak $\frac{4}{5} - \lambda_1 = 0$. Odtud dostaneme $\lambda_1 = \frac{4}{5}$. Máme $\boldsymbol{x}_2 = \Big(\frac{18}{5}, 0\Big)$ a $\boldsymbol{\lambda}_2 = (\frac{4}{5}, 0)$.

II. Nechť je nyní $x_2 = 0$. Tedy

$$\begin{aligned}\frac{2}{9}x_1 - \lambda_1 &= 0\\ -\lambda_2 &= 0\\ \lambda_1\Big(-x_1 + \frac{18}{5}\Big) &= 0.\end{aligned}$$

Je zřejmé, že $\lambda_2 = 0$ a $\lambda_1\Big(- x_1 + \frac{18}{5}\Big) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 0$ nebo $x_1 = \frac{18}{5}$.

II.1. Nechť je $\lambda_1 = 0$. Pak máme $\frac{2}{9}x_1 = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$.
Máme tedy $\boldsymbol{x}_3 = (0,0)$ a $\boldsymbol{\lambda}_3 = (0,0)$. Bod $\boldsymbol{x}_3 = (0,0) \notin S$, neboť $g_1(\boldsymbol{x}_3) \not\leq 0$.

II.2. Nechť je $x_1 = \frac{18}{5}$. Tedy $\frac{4}{5} - \lambda_1 = 0$. Odtud plyne, že $\lambda_1 = \frac{4}{5}$. Máme $\boldsymbol{x}_4 = \Big(\frac{18}{5}, 0\Big)$ a $\boldsymbol{\lambda}_4 = (\frac{4}{5}, 0)$.

Kandidátem na sedlový bod Lagrangeovy funkce je bod $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_4 = \boldsymbol{x}^* = \Big(\frac{18}{5}, 0\Big)$ a $\boldsymbol{\lambda}_2 = \boldsymbol{\lambda}_4 = \boldsymbol{\lambda}^* = \Big(\frac{4}{5}, 0\Big)$. Ověříme platnost vztahu $L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = \min\limits_{x \in X} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)$. Tedy

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*) = \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} + \frac{4}{5}\Big(- x_1 + \frac{18}{5}\Big).$$

Najdeme tedy stacionární body funkce $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)$, tj.

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial x_1} = \frac{2}{9}x_1 - \frac{4}{5} = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{18}{5}, \qquad \frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)}{\partial x_2} = \frac{2}{4}x_2 = 0 \Longrightarrow x_2 = 0.$$

Hessova matice je pro Lagrangeovu funkci tvaru $H(L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)) = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$. Hlavní minory jsou kladné, tj. $H(L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*))$ je pozitivně definitní a proto je bod $\boldsymbol{x}^* = \Big(\frac{18}{5}, 0\Big)$ bodem ostrého lokálního minima funkce $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*)$. Všechny tři podmínky věty 2.2 jsou splněny, tudíž bod $\Big\{\Big(\frac{18}{5}, 0\Big), \Big(\frac{4}{5}, 0\Big)\Big\}$ je sedlový bod Lagrangeovy funkce dané úlohy.

Nyní vyřešíme úlohu pomocí úlohy k ní duální. Podle tvrzení ***(i)*** věty 3.4 platí $\max\limits_{\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}} \theta(\boldsymbol{\lambda}) = \theta(\boldsymbol{\lambda}^*) = f(\boldsymbol{x}^*) = \min\limits_{\boldsymbol{x} \in S} f(\boldsymbol{x})$. Z definice 3.1 duální funkce plyne, že hledáme $\inf\limits_{\boldsymbol{x} \in S} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$. Sestavíme Lagrangeovu funkci dané úlohy, tj. funkci

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} + \lambda_1\Big(- x_1 + \frac{18}{5}\Big) - \lambda_2 x_2.$$

Funkce $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ je konvexní v proměnné $\boldsymbol{x}$, svého minima tedy nabude ve stacionárním bodě. Najdeme stacionární body Lagrangeovy funkce

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \lambda)}{\partial x_1} = \frac{2}{9}x_1 - \lambda_1 = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{9}{2}\lambda_1$$
$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \lambda)}{\partial x_2} = \frac{2}{4}x_2 - \lambda_2 = 0 \Longrightarrow x_2 = 2\lambda_2.$$

Hodnoty získané z parciálních derivací dosadíme do definičního vztahu pro duální funkci,

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}) = \inf_{\boldsymbol{x} \in S} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{9}\Big(\frac{9}{2}\lambda_1\Big)^2 + \frac{1}{4}\Big(2\lambda_2\Big)^2 + \lambda_1\Big(- \frac{9}{2}\lambda_1 + \frac{18}{5}\Big) - \lambda_2(2\lambda_2) =$$

$$= \frac{9}{4}\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \frac{9}{2}\lambda_1^2 + \frac{18}{5}\lambda_1 - 2\lambda_2^2 = -\frac{9}{4}\lambda_1^2 + \frac{18}{5}\lambda_1 - \lambda_2^2.$$

Duální úloha je tedy tvaru

$$\begin{cases} \text{maximalizovat} & \theta(\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{9}{4}\lambda_1^2 + \frac{18}{5}\lambda_1 - \lambda_2^2 \\ \text{za podmínky} & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0. \end{cases}$$

Duální funkce je funkce konkávní, viz věta 3.1. K nalezení jejího maxima stačí položit její první derivace rovny 0. Tedy

$$\frac{\partial \theta(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_1} = -\frac{9}{2}\lambda_1 + \frac{18}{5} = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \frac{4}{5}$$
$$\frac{\partial \theta(\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_2} = -2\lambda_2 = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = 0.$$

Duální funkce nabývá svého maxima v bodě $\boldsymbol{\lambda}^* = \Big(\frac{4}{5}, 0\Big)$. Dopočteme neznámé $x_1 = \frac{9}{2}\lambda_1 = \frac{18}{5}$ a $x_2 = 2\lambda_2 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{x}^* = \Big(\frac{18}{5}, 0\Big)$. Tedy $f(\boldsymbol{x}^*) = \frac{36}{25} = \theta(\boldsymbol{\lambda}^*)$.

Na příkladu 3.3 jsme ukázali, že sedlový bod dané úlohy je řešením primární i duální úlohy. Pokud v následujících příkladech budeme mít zaručenou existenci sedlového bodu, nebudeme již teto bod hledat. Využijeme tvrzení ***(i)*** věty 3.4 a najdeme řešení duální úlohy.

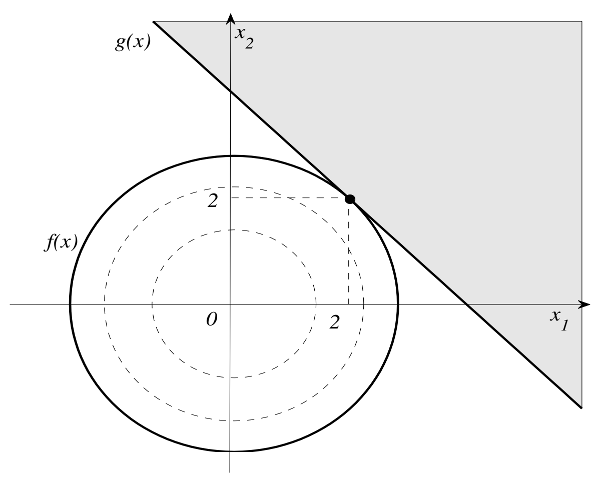
Zadání následujících dvou příkladů je převzato z neřešených cvičení v kapitole 6 z [6]. Ukážeme si výhodnost použití duální úlohy při řešení primární úlohy.

Příklad 3.4 Analyzujte úlohu

$$\begin{cases} \text{minimalizovat} & f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{za podmínky} & g(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 \geq 4 \\ \text{pro} & \boldsymbol{x} \in X = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0\} \end{cases}$$

pomocí úlohy k ní duální.

Nejprve upravíme nerovnostní omezující podmínku na tvar odpovídají úloze *(NLP*)*, tj. $g(\boldsymbol{x}) = -x_1 - x_2 + 4 \leq 0$.



Obrázek 14: Příklad 3.4

Nyní spočteme $\nabla f(\boldsymbol{x})$, tedy $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$. Vypočteme také Hessovu matici funkce $f(\boldsymbol{x})$, tj. $H(f(\boldsymbol{x})) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Tedy je zřejmé, že hlavní minory jsou nezáporné, tudíž se jedná o konvexní funkci. Přípustná množina je pro tuto úlohu tvaru $S = \{\boldsymbol{x} \in X : -x_1 - x_2 + 4 \leq 0\}$. Funkce $f(\boldsymbol{x})$ je konvexní a množina S je konvexní podmnožinou v $\mathbb{R}^2$, je zřejmé, že se jedná o úlohu konvexního programování. Pro úlohu konvexního programování máme zaručenou existenci sedlového bodu, viz poznámka 2.4, tedy bodu, v němž Lagrangeova funkce nabývá svého minima v proměnné x.

Dále využijeme tvrzení ***(i)*** věty 3.4. Sestavíme Lagrangeovu funkci, tj.

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(-x_1 - x_2 + 4).$$

Lagrangeova funkce je konvexní v proměnné $\boldsymbol{x}$. Svého minima nabývá ve stacionárním bodě. Najdeme stacionární body Lagrangeovy funkce, tj.

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{\lambda}{2}$$
$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \lambda)}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{\lambda}{2}.$$

Hodnotu $x_1 = \frac{\lambda}{2}$ a $x_2 = \frac{\lambda}{2}$ dosadíme do definičního vztahu pro duální funkci. Duální funkce je pro tuto úlohu tvaru

$$\theta(\lambda) = \inf_{\boldsymbol{x} \in S} L(\boldsymbol{x}, \lambda) = \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} + \lambda\Big(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} + 4\Big) = -\frac{\lambda^2}{2} + 4\lambda.$$

Duální úloha je pro danou úlohu tvaru

$$\begin{cases} \text{maximalizovat} & \theta(\lambda) = -\frac{\lambda^2}{2} + 4\lambda \\ \text{za podmínky} & \lambda \geq 0. \end{cases}$$

Zbývá najít maximum duální funkce. Vyšetřovaná duální funkce je konkávní, viz věta 3.1. Tudíž k nalezení maxima stačí položit její první derivaci rovnu 0. Máme

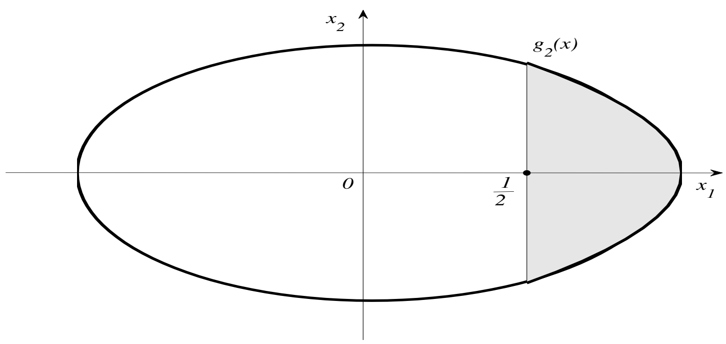
$$\theta'(\lambda) = -\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda^* = 4.$$

Dosazením do vztahu $x_1^* = x_2^* = \frac{\lambda^*}{2}$ dostaneme řešení úlohy $x_1^* = x_2^* = 2$. Odtud již plyne $f(x^*) = 8 = \theta(\lambda^*)$.

Příklad 3.5 Analyzujte úlohu

$$\begin{cases} \text{minimalizovat} & f(\boldsymbol{x}) = x_2 \\ \text{za podmínek} & g_1(\boldsymbol{x}) = -2x_1 + 1 \leq 0 \\ & g_2(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0 \\ \text{pro} & \boldsymbol{x} \in X = \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

s ohledem na platnost KKT podmínek v bodě řešení a existenci sedlového bodu. Napište a analyzujte úlohu k ní duální.



Obrázek 15: Příklad 3.5

K analýze této úlohy využijeme tvrzení $(\boldsymbol{i})$ věty 3.4. Ze zadání úlohy je zřejmé, že existuje sedlový bod dané úlohy, platí

$$\max_{\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}} \theta(\boldsymbol{\lambda}) = \theta(\boldsymbol{\lambda}^*) = f(\boldsymbol{x}^*) = \min_{\boldsymbol{x} \in S} f(\boldsymbol{x}).$$

Přípustná množina je rovna množině $S = \{x \in X : -2x_1 + 1 \leq 0, 2x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0\}$. K určení duální funkce nejprve musíme sestavit Lagrangeovu funkci, tj.

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = x_2 + \lambda_1(-2x_1 + 1) + \lambda_2(2x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

Hledáme tedy $\boldsymbol{x} \in X$ takové, že Lagrangeova funkce v tomto bodě nabývá svého minima v proměnné $\boldsymbol{x}$. Využijeme poznatků z matematické analýzy, najdeme možné adepty na řešení, tj.

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_1} = -2\lambda_1 + 4x_1\lambda_2 = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}$$
$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_2} = 1 + 2x_2\lambda_2 = 0 \Longrightarrow x_2 = -\frac{1}{2\lambda_2}.$$

Hodnotu $x_1 = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}$ a $x_2 = -\frac{1}{2\lambda_2}$ dosadíme do definičního vztahu duální funkce, tj.

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{1}{2\lambda_2} + \lambda_1\Big(-\frac{2\lambda_1}{2\lambda_2} + 1\Big) + \lambda_2\Big[2\Big(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\Big)^2 + \Big(-\frac{1}{2\lambda_2}\Big)^2 - 1\Big] =$$

$$= -\frac{1}{2\lambda_2} - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_2} + \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{2\lambda_2} + \frac{1}{4\lambda_2} - \lambda_2 = \frac{-2 - 4\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_1^2 + 1 - 4\lambda_2^2}{4\lambda_2}$$
$$= \frac{-2\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 - 4\lambda_2^2 - 1}{4\lambda_2}.$$

Duální úloha je pro danou úlohu tvaru

$$\begin{cases} \text{maximalizovat} & \theta(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{-2\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 - 4\lambda_2^2 - 1}{4\lambda_2} \\ \text{za podmínky} & \lambda_1, \lambda_2 \geq 0. \end{cases}$$

Duální funkce je funkce konkávní, viz věta 3.1. K nalezení jejího maxima stačí položit její první derivace rovny 0.

$$\frac{\partial\theta(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_1} = \frac{1}{4\lambda_2}(-4\lambda_1 + 4\lambda_2) = 0 \Longrightarrow -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$
$$\frac{\partial\theta(\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_2} = \frac{(4\lambda_1 - 8\lambda_2)4\lambda_2 - 4(-2\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 - 4\lambda_2^2 - 1)}{16\lambda_2^2} = \frac{8\lambda_1^2 - 16\lambda_2^2 + 4}{16\lambda_2^2} = 0.$$

Dosazením $\lambda_1 = \lambda_2$ je zřejmé, že $\frac{8\lambda_2^2 - 16\lambda_2^2 + 4}{16\lambda_2^2} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nebo $\widetilde{\lambda_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Je-li $\widetilde{\lambda_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ dostáváme se ihned ke sporu, neboť λ_2 musí být nezáporné. Ze vztahu $\lambda_1 = \lambda_2$ plyne, že $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dopočteme $x_1 = \frac{1}{2}$ a $x_2 = -\frac{1}{2\lambda_2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Odtud máme, že $\max\limits_{\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}} \theta(\boldsymbol{\lambda}) = \theta(\boldsymbol{\lambda}^*) = f(\boldsymbol{x}^*) = \min\limits_{\boldsymbol{x} \in S} f(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3.2. Obecná úloha nelineárního programování

V této kapitole se budeme zabývat obecnou úlohou nelineárního programování, tedy úlohou, jejíž omezující podmínky jsou ve tvaru rovností a nerovností. Uvažujme obecnou úlohu *(NLP)*

$$\begin{cases} \text{minimalizovat fukci} & f(\boldsymbol{x}) & \\ \text{za podmínek} & g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, & i \in I = \{1, \ldots, m\} \\ & h_j(\boldsymbol{x}) = 0, & j \in J = \{1, \ldots, r\} \\ \text{pro} & \boldsymbol{x} \in X. & \end{cases}$$

Lagrangeova funkce je pro tuto úlohu tvaru

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j h_j(\boldsymbol{x}) =$$

$$= f(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+, \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^r$$

Podmínky s rovnostmi $h_j(\boldsymbol{x}) = 0$ přetransformujeme na soustavu dvou nerovností, tj.

$$h_j(\boldsymbol{x}) \leq 0 \text{ a } -h_j(\boldsymbol{x}) \leq 0, \qquad j \in J.$$

Touto úpravou tedy z rovnostních omezení dostaneme opět úlohu s nerovnostními podmínkami, tedy úlohu *(NLP*)*. Podmínkám $h_j(\boldsymbol{x}) \leq 0$ přiřadíme hodnoty μ_j^+ a podmínkám $-h_j(\boldsymbol{x}) \leq 0$ hodnoty μ_j^-. Pokud

$$\lambda_i^* \geq 0, \qquad \forall i \in I,$$

$$\mu_j^+, \mu_j^- \geq 0 \quad \forall j \in J$$

a pokud (dle věty 1.1) platí

$$f(\boldsymbol{x}^*) = \min_{\boldsymbol{x} \in X} \left\{ f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{r} (\mu_j^+ - \mu_j^-) h_j(\boldsymbol{x}) \right\},$$

pak je vektor Lagrangeových multiplikátorů dán jako

$$(\lambda_1^*, \ldots \lambda_m^*, \mu_1^+, \mu_1^-, \ldots, \mu_r^+, \mu_r^-).$$

Tvar vektoru multiplikátorů je zde dán tímto rozšířeným vztahem díky přidání přetransformovaných podmínek tvaru rovností. Položíme nyní $\mu_j^* = \mu_j^+ - \mu_j^-$. Pak je možné definovat Lagrangeovu funkci

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j h_j(\boldsymbol{x}).$$

Hodnoty $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \ldots, \mu_r^*$ budou představovat optimální hodnoty Lagrangeových multiplikátorů, pokud $\lambda_i^* \geq 0 \;\; \forall i \in I$, a bude-li platit

$$f(\boldsymbol{x}^*) = \min_{\boldsymbol{x} \in X} \left\{ f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* h_j(\boldsymbol{x}) \right\}.$$

Nyní již můžeme definovat duální funkci

$$\theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \inf_{\boldsymbol{x} \in X} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$$

a duální úlohu

$$\begin{cases} \text{maximalizovat} & \theta(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \\ \text{za podmínek} & \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+, \ \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^r. \end{cases}$$

Nyní si na příkladech ukážeme použití předchozích úvah. Následující příklad je převzat z [1], strana 265, kde je uvedeno pouze stručné řešení.

Příklad 3.6 Dokažte, že pro tuto úlohu

$$\begin{cases} \text{minimalizovat} & f(\boldsymbol{x}) = -2x_1 + x_2 \\ \text{za podmínky} & g(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 = 3 \\ \text{pro} & X = \{(0,0), (0,4), (4,4), (4,0), (1,2), (2,1)\} \end{cases}$$

existuje dualitní mezera.

Hledáme $\boldsymbol{x}^* : f(\boldsymbol{x}^*) = \min\limits_{\boldsymbol{x} \in S} f(\boldsymbol{x}^*)$, kde $S = \{\boldsymbol{x} \in X, x_1 + x_2 = 3\}$ je přípustná množina. Z tvaru množiny X je zřejmé, že řešení dané úlohy hledáme na množině bodů $\{\boldsymbol{x}_1 = (0,0), \boldsymbol{x}_2 = (0,4), \boldsymbol{x}_3 = (4,4), \boldsymbol{x}_4 = (4,0), \boldsymbol{x}_5 = (1,2), \boldsymbol{x}_6 = (2,1)\}$. Ověříme zda všechny tyto body náleží do přípustné množiny. Tedy dostaneme $S = \{\boldsymbol{x} \in X, x_1 + x_2 = 3\} = \{\boldsymbol{x}_5 = (1,2), \boldsymbol{x}_6 = (2,1)\}$. Určíme funkční hodnoty v bodech přípustné množiny, tj.

$$f(\boldsymbol{x}_5) = 0, \qquad f(\boldsymbol{x}_6) = -3.$$

Odtud je již zřejmé, že $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}_6 = (2,1)$ a tedy $\min\limits_{\boldsymbol{x} \in S} f(\boldsymbol{x}^*) = f(\boldsymbol{x}_6) = -3$.

Nyní se podíváme na duální funkci dané úlohy. Určíme duální úlohu. Nejprve ale sestavíme Lagrengeovu funkci, tj.

$$L(\boldsymbol{x}, \mu) = -2x_1 + x_2 + \mu(x_1 + x_2 - 3).$$

Funkce $L(\boldsymbol{x}, \mu)$ je konvexní funkce v proměnné x. Svého minima nabude ve stacionárním bodech. Najdeme tedy stacionární body funkce $L(\boldsymbol{x}, \mu)$. Tedy

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \mu)}{\partial x_1} = -2 + \mu = 0 \Longrightarrow \mu = 2$$

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\mu)}{\partial x_2} = 1+\mu = 0 \Longrightarrow \mu = -1.$$

Dosaďme $\boldsymbol{x} \in X$ do $L(\boldsymbol{x},\mu)$, neboť množinu na které hledáme řešení, máme zadanou pomocí šesti bodů $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_6$. Tedy po dosazení těchto bodů do Lagrangeovy funkce máme

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{x}_1,\mu) &= -3\mu, & L(\boldsymbol{x}_2,\mu) &= 4+\mu,\\ L(\boldsymbol{x}_3,\mu) &= -4+5\mu, & L(\boldsymbol{x}_4,\mu) &= -8+\mu,\\ L(\boldsymbol{x}_5,\mu) &= 0, & L(\boldsymbol{x}_6,\mu) &= -3. \end{aligned}$$

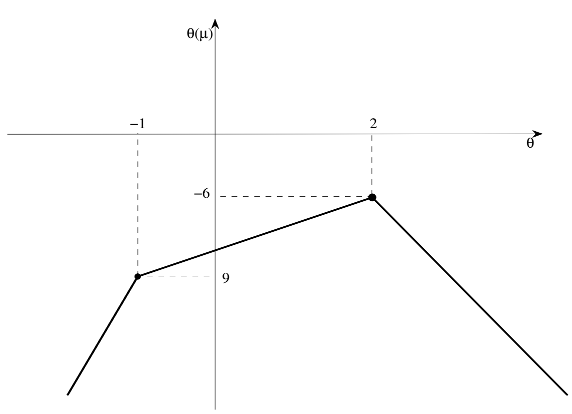
Hodnoty μ, které jsme našli, dosadíme postupně do Lagrangeovy funkce $L(\boldsymbol{x}_i,\mu)$ $i = I = \{1,\ldots,6\}$. Nyní hledáme duální funkci, tj.

$$\theta(\mu) = \min_{\boldsymbol{x}\in X} L(\boldsymbol{x},\mu) = \min_{\boldsymbol{x}\in X}\{-2x_1 \ + \ x_2 + \mu(x_1+x_2-3)\}.$$

Každému nalezenému μ přiřadíme část Lagrangeovy funkce s nejnižší funkční hodnotou. Dostaneme duální funkci tvaru

$$\theta(\mu)\begin{cases} -4+5\mu & \text{pro } \mu \le -1\\ -8+\mu & \text{pro } \mu \in [-1,2]\\ -3\mu & \text{pro } \mu \ge 2. \end{cases}$$

Naším úkolem je tedy najít μ^* takové, že platí $\max\limits_{\mu\in\mathbb{R}} \theta(\mu) = \theta(\mu^*)$.



Obrázek 16: Duální funkce příkladu 3.1

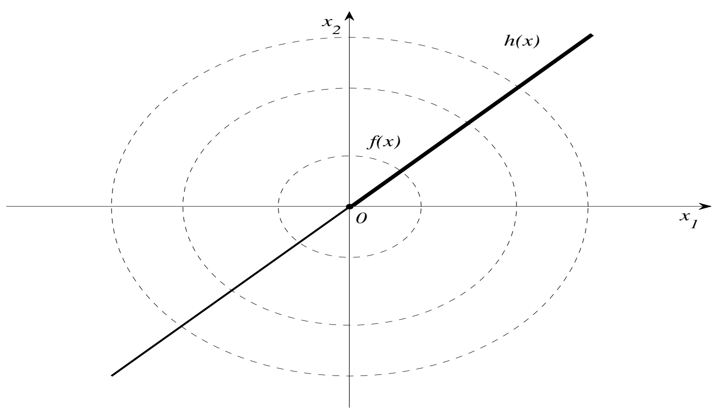
Z obrázku je zřejmé, že $\max_{\mu \in \mathbb{R}} \theta(\lambda) = \theta(\lambda^*) = \theta(2) = -6$. Odtud již plyne existence dualitní mezery, neboť $f(\boldsymbol{x}^*) - \theta(\mu^*) = -3 - (-6) \geq 0$.

Příklad 3.7 Analyzujte úlohu

$$\begin{cases} \text{minimalizovat} & f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{za podmínky} & g(\boldsymbol{x}) = -x_1 \leq 0 \\ & h(\boldsymbol{x}) = x_1 - x_2 = 0 \\ \text{pro} & \boldsymbol{x} \in X = \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

pomocí úlohy k ní duální.

Na tomto příkladu si ukážeme jak postupovat v případě rovnostních podmínek, neboť z obrázku je ihned zřejmé, že řešením dané úlohy je bod $\boldsymbol{x}^* = (0, 0)$.



Obrázek 17: Příklad 3.7

Jedná se o úlohu *(NLP)*. Nejprve rovnostní omezující podmínku přetransformujeme na dvě nerovnostní podmínky, tj. $x_1 - x_2 \leq 0$ a $-x_1 + x_2 \leq 0$. Těmto nerovnostním podmínkám přiřadíme hodnoty multiplikátorů po řadě μ^+, μ^-. Transformací jsme tedy z obecné úlohy *(NLP)* přešli na úlohu *(NLP*)*. Můžeme tedy využít definice a tvrzení z předchozí kapitoly.

Nyní blíže analyzujeme danou úlohu. Spočteme $\nabla f(\boldsymbol{x})$, tedy $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$.

Vypočteme také Hessovu matici funkce $f(\boldsymbol{x})$, tj. $H(f(\boldsymbol{x})) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Je zřejmé, že hlavní minory jsou nezáporné, tudíž se jedná o konvexní funkci. Přípustná množina je pro tuto úlohu tvaru $S = \{\boldsymbol{x} \in X : x_1 - x_2 \leq 0, -x_1 + x_2 \leq 0\}$. Funkce $f(\boldsymbol{x})$ je konvexní a množina S je konvexní podmnožinou v $\mathbb{R}^2$, jedná se o úlohu konvexního programování. Pro úlohu konvexního programování máme zaručenou existenci sedlového bodu, viz poznámka 2.4.

Označme nyní $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Můžeme sestavit Lagrangeovu funkci, která je tvaru $L(\boldsymbol{x}, \lambda, \mu) = f(\boldsymbol{x}) + \lambda g(\boldsymbol{x}) + \mu h(\boldsymbol{x})$ tj.

$$L(\boldsymbol{x}, \lambda, \mu) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(-x_1) + \mu(x_1 - x_2).$$

Lagrangeova funkce je konvexní v proměnné x. Svého minima nabude ve stacionárním bodě. Najdeme stacionární body Lagrangeovy funkce

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \lambda, \mu)}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda + \mu = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{2}(\lambda - \mu)$$
$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \lambda, \mu)}{\partial x_2} = 2x_2 - \mu = 0 \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{2}\mu.$$

Hodnotu $x_1 = \frac{1}{2}(\lambda - \mu)$ a $x_2 = \frac{1}{2}\mu$ dosadíme do duální funkce, tj.

$$\theta(\lambda, \mu) = \Big(\frac{1}{2}(\lambda - \mu)\Big)^2 + \Big(\frac{1}{2}\mu\Big)^2 - \frac{\lambda}{2}(\lambda - \mu) + \mu\Big(\frac{1}{2}(\lambda - \mu) - \frac{1}{2}\mu\Big) =$$
$$= \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda\mu}{2} + \frac{\mu^2}{4} + \frac{\mu^2}{4} - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda\mu}{2} + \frac{\lambda\mu}{2} - \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu^2}{2} =$$
$$= \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda\mu}{2} - \frac{\mu^2}{2}.$$

Duální úloha je pro danou úlohu tvaru

$$\begin{cases} \text{maximalizovat} & \theta(\lambda, \mu) = \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda\mu}{2} - \frac{\mu^2}{2} \\ \text{za podmínky} & \lambda \geq 0, \mu \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Duální funkce je funkce konkávní. K nalezení jejího maxima stačí položit její první derivace rovny 0. Tedy

$$\frac{\partial \theta(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = \frac{2\lambda}{4} - \frac{\mu}{2} = 0 \qquad \frac{\partial \theta(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = -\frac{\lambda}{2} - \mu = 0.$$

Z parciálních derivací dostaneme soustavu dvou rovnic, kterou vyřešíme, tj.

$$\frac{2\lambda}{4} - \frac{\mu}{2} = 0$$
$$-\frac{\lambda}{2} - \mu = 0.$$

Z první rovnice je zřejmé, že $\frac{2\lambda}{4} - \frac{\mu}{2} = 0 \Longrightarrow \lambda = \mu$. Odtud máme $-\frac{\mu}{2} - \mu = 0 \Longrightarrow \mu = 0$. Tudíž $\mu^* = \lambda^* = 0$. Dopočteme $x_1 = -\frac{1}{2}(\lambda - \mu) = 0$ a $x_2 = \frac{1}{2}\mu = 0$. Tedy $\boldsymbol{x}^* = (0, 0)$ a tudíž $f(\boldsymbol{x}^*) = 0 = \theta(\lambda^*, \mu^*)$.

Je tedy zřejmé, že transformací rovnostních podmínek dostaneme opět úlohu *(NLP*)*, se kterou jsme se naučili pracovat již v předchozí kapitole. Odtud již plyne, že při řešení úloh s rovnostními omezeními můžeme využít tvrzení z předchozí kapitoly.

Závěr

Primární úlohou této bakalářské práce bylo nastudovat teorii Lagrangeovy funkce a Lagrangeovské duality v optimalizačních úlohách. Práce byla napsána tak, aby mohla sloužit jako studijní materiál studentům, kteří mají o tuto problematiku zájem. Dalším důležitým cílem této práce bylo ukázat, že převedení úlohy primární na úlohu k ní duální výrazně ulehčí výpočet úlohy primární. Pokud je ovšem použití duální úlohy možné.

V první části této práce jsme se zaměřili na vysvětlení základních pojmů. Kapitola byla doplněna příklady, na kterých bylo ilustrováno praktické využití nových pojmů.

Stěžejní část této práce tvoří druhá a třetí kapitola. Zde je uvedeno zobecnění podmínek optimality definovaných v první kapitole. Dále jsme se zabývali Lagrangeovou funkcí a jejími základními vlastnostmi, které umožňují v následující kapitole zavést duální funkci a formulovat duální úlohu. V práci jsou také uvedeny dva příklady, které jsou zaměřeny na chybné použité duální úlohy.

Přínosem při tvorbě této bakalářské práce pro mne bylo seznámení s teorií duality a duálních funkcí, práce se zpracováváním odborné literatury nejen v českém ale i v anglickém jazyce. Dále jsem také zlepšila své dovednosti s prací v typografickém programu LaTeX, ve kterém je práce vysázena. Obrázky byly nakresleny v matematickém softwaru Matlab, který byl použit i při některých výpočtech v této práci.

Literatura

[1] Bazaraa, M.S., Sherali, H.D., Shetty, C.M.: Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. Third Edition. Wiley, 2006.

[2] Došlý, O.: Základy konvexní analýzy a optimalizace v $\mathbb{R}^n$. Skriptum MU Brno, 2004.

[3] Fletcher, R.: Practical Methods of Optimization. Second Edition John Wiley & Sons, Chichester, 1987.

[4] Gao, D. Y.: Duality Principles in Nonconvex Systems: Theory, Methods and Applications. Springer, 2000.

[5] Machalová, J., Netuka, H.: Numerické metody nepodmíněné optimalizace. Skriptum UP Olomouc, 2013.

[6] Machalová,J., Netuka, H.: Nelineární programování: Teorie a metody. Skriptum UP Olomouc, 2013.

[7] Míka, S.: Matematická optimalizace. Skriptum ZČU Plzeň, 1997.