Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Analýza řešení vybraných úloh matematické olympiády kategorie Z - aritmetika

Vypracovala: Jana Řičicová
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.

České Budějovice 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Analýza řešení vybraných úloh matematické olympiády kategorie Z - aritmetika jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 22.3.2021 ....

(podpis)

Poděkování

Chtěla bych poděkovat svému vedoucí bakalářské práce prof. RNDr. Pavlovi Tlustému, CSc. za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce.

Anotace

Cílem bakalářské práce je podrobně řešená sbírka vybraných dvaceti úloh matematické olympiády kategorie Z5-Z9. Je určena žákům 5. až 9. třídy a odpovídajícím třídám osmiletého a šestiletého gymnázia, kteří se připravují na matematickou olympiádu či jinou podobnou soutěž. Zároveň je určena i pro učitele, kteří jim pomáhají s přípravou. Některé úlohy ze sbírky mohou být využity i v běžné hodině matematiky jako zpestření výuky. Součástí práce jsou také základní informace o matematické olympiádě.

Annotation

The aim of the bachelor thesis is a detailed collection of solutions of selected twenty tasks of the Mathematical Olympiad category Z5-Z9. It is intended for pupils in the 5th to 9th grade and the corresponding classes of eight-year and six-year grammar school preparing for the Mathematical Olympiad or another similar competition. It is as well intended for teachers who help them with preparation. Some of the tasks can be used in a standard Mathematics class as diversification of teaching. The thesis also includes some basic information about the Mathematical Olympiad.

1. Obsah

2. Úvod 7

3. Matematická olympiáda 9

3.1. Cíl matematické olympiády 9

3.2. Organizace a řízení soutěže 9

3.3. Organizace a vyhodnocování výsledků dílčích kol soutěže 10

4. Kategorie Z5 12

4.1. 70. ročník (2020/2021), I. kolo, Z5-I-3 12

4.2. 58. ročník (2008/2009), I. kolo, Z5-I-4 14

4.3. 62. ročník (2012/2013), I. kolo, Z5-I-5 16

4.4. 56. ročník (2006/2007), II. kolo, Z5-II-1 18

5. Kategorie Z6 20

5.1. 59. ročník (2009/2010), I. kolo, Z6-I-1 20

5.2. 70. ročník (2020/2021), I. kolo, Z6-I-2 22

5.3. 54. ročník (2004/2005), II. kolo, Z6-II-1 24

5.4. 60. ročník (2010/2011), II. kolo, Z6-II-3 27

6. Kategorie Z7 30

6.1. 60. ročník (2010/2011), I. kolo, Z7-I-1 30

6.2. 70. ročník (2020/2021), I. kolo, Z7-I-2 32

6.3. 66. ročník (2016/2017), II. kolo, Z7-II-1 33

6.4. 63. ročník (2013/2014), II. kolo, Z7-II-1 35

7. Kategorie Z8 37

7.1. 70. ročník (2020/2021), I. kolo, Z8-I-2 37

7.2. 61. ročník (2011/2012), I. kolo, Z8-I-4 40

7.3. 66. ročník (2016/2017), II. kolo, Z8-II-1 42

7.4. 51. ročník (2001/2002), II. kolo, Z8-II-3 43

8. Kategorie Z9 46
8.1. 56. ročník (2006/2007), I. kolo, Z9-I-1 46
8.2. 70. ročník (2020/2021), I. kolo, Z9-I-5 48
8.3. 62. ročník (2012/2013), II. kolo, Z9-II-2 52
8.4. 65. ročník (2015/2016), III. kolo, Z9-III-1 55
9. Závěr 57
9.1. Shrnutí 57
10. Použitá literatura a zdroje 59

2. Úvod

Tato bakalářská práce Analýza řešení vybraných úloh matematické olympiády kategorie Z - aritmetika je řešena jako sbírka vybraných úloh matematické olympiády kategorií Z5-Z9, které jsem všechny sama vypočítala. Tato sbírka je určena žákům připravující se na matematickou olympiádu nebo jinou podobnou soutěž (Pikomat, PraSe, KoKoS, BrKoS, Matematický klokan, Pythagoriáda) či pro učitele, kteří jim pomáhají s jejich přípravou. Některé úlohy ze sbírky mohou být využity i v běžné hodině matematiky. Úlohy z této sbírky jsou převzaty z online dostupného zadání matematické olympiády.

U každé řešené úlohy je napsán komentář, ve kterém upozorňuji na možné problémy při řešení. Je-li to možné, zmiňuji i radu žákům, jak se těmto problémům při řešení obdobné úlohy vyvarovat. Pokud při srovnávání svého a autorského řešení zjistím, že jsou postupy odlišné, uvádím pak za částí úlohy či celou úlohou poznámku (celé či zkrácené autorské řešení).

Téma matematické olympiády jsem si vybrala, protože jsem se této soutěže sama účastnila od 5. do 9. třídy - tj. 58. ročník (2008/2009) až 62. ročník (2012/2013). Ve školním roce 2020/2021 se koná již 70. ročník matematické olympiády.

Úlohy matematické olympiády jsem vybírala podle následujících kritérií:

- Úlohy sbírky jsou děleny na logické celky kategorie Z5-Z9 a dále uspořádány podle kol soutěže a podle čísla úlohy. (od nejmenšího po největší)
- Z každé kategorie vybírám právě čtyři aritmetické úlohy napříč ročníky matematické olympiády.
- Ze všech pořádaných kol kategorií vybírám alespoň jednu úlohu. (kategorie Z5-Z8 mají kola školní a okresní, kategorie Z9 má navíc kolo krajské)
- Vždy jedna úloha z každé kategorie je úlohou, se kterou jsem se setkala jako řešitel matematické olympiády.
- Vždy jedna úloha z každé kategorie je vybrána z I. kola aktuálního 70. ročníku matematické olympiády. (tj. ve školním roce 2020/2021 a odpovídajícím akademickém roce, ve kterém svoji bakalářskou práci píši)

Seznam vybraných úloh a klíč jejich výběru:

kategorie	1. úloha	2. úloha	3. úloha	4. úloha
Z5	70. ročník, I. kolo, Z5-I-3	58. ročník, I. kolo, Z5-I-4	62. ročník, I. kolo, Z5-I-5	56. ročník, II. kolo, Z5-II-1
Z6	59. ročník, I. kolo, Z6-I-1	70. ročník, I. kolo, Z6-I-2	54. ročník, II. kolo, Z6-II-1	60. ročník, II. kolo, Z6-II-3
Z7	60. ročník, I. kolo, Z7-I-1	70. ročník, I. kolo, Z7-I-2	66. ročník, II. kolo, Z7-II-1	63. ročník, II. kolo, Z7-II-1
Z8	70. ročník, I. kolo, Z8-I-2	61. ročník, I. kolo, Z8-I-4	66. ročník, II. kolo, Z8-II-1	51. ročník, II. kolo, Z8-II-3
Z9	56. ročník, I. kolo, Z9-I-1	70. ročník, I. kolo, Z9-I-5	62. ročník, II. kolo, Z9-II-2	65. ročník, III. kolo, Z9-III-1

Tabulka č. 1 - Přehled vybraných úloh

Klíč výběru:

- Úloha, se kterou jsem se setkala jako řešitel matematické olympiády.
- Úloha vybraná z I. kola aktuálního 70. ročníku matematické olympiády.
- Náhodně vybraná úloha, která však odpovídá zbylým kritériím.

Náročnosti úloh jsem určovala podle následující tabulky:

	analytické úlohy	logické úlohy
lehká	- úloha má jednu základní otázku, při řešení využijeme nejvýše pět rovnic	- úloha má jednu základní otázku a pouze jedno řešení
středně těžká	- úloha má jednu základní otázku, při řešení využijeme šest a více rovnic - úloha má více otázek či podotázek, při řešení využijeme nejvýše pět rovnic	- úloha má jednu základní otázku a hledáme více řešení - úloha má více otázek či podotázek a pouze jedno řešení
těžká	- úloha má více otázek či podotázek, při řešení využijeme šest a více rovnic	- úloha má více otázek či podotázek a hledáme více řešení

Tabulka č. 2 - Kriteria přiřazení náročnosti úloh

3. Matematická olympiáda

3.1. Cíl matematické olympiády

Matematická olympiáda je předmětová soutěž z matematiky pro žáky základních a středních škol, která má za úkol vyhledat nadané a talentované žáky a dále pak podporovat a rozvíjet jejich odborný růst. Cílem soutěže je dát žákům příležitost k řešení náročných problémů a dále nabídnout soustavu odborných činností, které vedou k popularizaci matematiky, informatiky a všestranné péči o talentované žáky. Matematická olympiáda je jednotná pro celé území České republiky, pořádá se každoročně a člení se podle kategorií a soutěžních kol. Vyhlašovatelem je Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. (Urban, 2016)

3.2. Organizace a řízení soutěže

Matematická olympiáda je organizována v následujících kategoriích:

- Kategorie Z5-Z9 pro základní školy (5. až 9. třída a odpovídající třídy osmiletého a šestiletého gymnázia) - všechny kategorie mají školní a okresní kolo, kategorie Z9 má navíc kolo krajské.
- Kategorie A, B, C pro střední školy (1. až 4. ročník a odpovídající třídy osmiletého a šestiletého gymnázia) - všechny kategorie mají školní a krajské kolo, kategorie A má navíc kolo ústřední.
- Kategorie P zaměřená na informatiku pro střední školy (1. až 4. ročník a odpovídající třídy osmiletého a šestiletého gymnázia) - všechny kategorie mají školní, krajské a ústřední kolo.(Urban, 2016)

Termíny konání jednotlivých soutěžních kol matematické olympiády se stanovuje tak, aby pokud možno nebylo narušeno pravidelné vyučování a obecně chod škol. Účast žáků v matematické olympiádě je dobrovolná. Žák soutěží v kategorii, která odpovídá jeho studijnímu ročníku, ale může soutěžit i v kategoriích určených pro vyšší ročníky. Úkolem žáků je samostatně vyřešit úlohy daného soutěžního kola, přičemž jejich myšlenkový postup musí být srozumitelný. (Urban, 2016)

Utajení textů úloh je nezbytnou podmínkou regulérnosti soutěže. Se zněním úloh se výjimkou úloh domácí části školního kola soutěžící seznamují bezprostředně při zahájení vlastního soutěžního kola. (Urban, 2016)

3.3. Organizace a vyhodnocování výsledků dílčích kol soutěže

Školní kolo matematické olympiády kategorií Z5-Z9 probíhá tak, že si žák doma vypočítá celkem šest úloh, které následně odevzdá pověřenému učiteli matematiky. Odevzdání úloh školního kola je rozděleno na dvě etapy, kdy žák nejprve odevzdá první tři úlohy v prvním termínu a poté zbylé tři úlohy ve druhém termínu. Pověřený učitel matematiky odevzdané úlohy opraví podle autorského řešení. Úspěšným řešitelem školního kola je ten žák, který má alespoň u čtyř úloh hodnocení výborně nebo dobře. Úspěšný žák pak postupuje do okresního kola, kde je již na výpočet úloh stanovený časový limit: kategorie Z5 má na tři úlohy 90 minut, kategorie Z6-Z8 má na tři úlohy 2 hodiny a kategorie Z9 má na čtyři úlohy 4 hodiny. Ve všech kategoriích se řešené úlohy obodují a podle součtu získaných bodů se sestaví pořadí účastníků okresního kola. Za každou úlohu může dostat žák maximálně šest bodů. Žáci, kteří získají předepsaný počet bodů (zpravidla aspoň polovinu z dosažitelných bodů), se stanou úspěšnými řešiteli okresního kola. V případě kategorie Z9 pak určitý počet úspěšných řešitelů postupuje do krajského kola, kde je průběh a vyhodnocení podobný jako při kole okresním. (MO, 2017)

Školní kolo kategorií A, B, C má dvě části - domácí a klauzurní. V domácí části žák doma vypočítá šest úloh, které poté odevzdá pověřenému učiteli matematiky. Ten úlohy opraví podle autorského řešení. Úspěšným řešitelem domácí části je žák, který má alespoň u čtyř úloh hodnocení výborně nebo dobře. Následně je žák pozván do klauzurní části školního kola, kde během 4 hodin samostatně řeší tři úlohy a kde jsou povolené pomůcky psací a rýsovací potřeby a školní matematicko-fyzikální tabulky. Nejlepší účastníci školního kola jsou následně pozváni do krajského kola, kde během 4 hodin samostatně řeší čtyři úlohy. O pořadí v krajských kolech soutěže rozhoduje součet bodů získaných za jednotlivé úlohy. Za každou úlohu může dostat žák maximálně šest bodů. Bodové hranice k určení úspěšných řešitelů jsou stanoveny centrálně po vyhodnocení statistik bodových výsledků ze všech krajů. V kategorii A pak nejlepší řešitelé krajského kola z celé republiky soutěží v ústředním kole. Z vítězů ústředního kola se vybírá družstvo České republiky, které je následně vysláno na mezinárodní matematickou olympiádu. (MO, 2018)

Ve školním kole kategorie P řeší žáci čtyři úlohy. Řešení neodevzdávají ve škole, ale odesílají ho přes webové rozhraní podle pokynů uvedených u úloh. Úspěšní řešitelé školního kola jsou přímo pozváni do krajského kola a následně do ústředního kola, jehož vítězové se zúčastní každoroční mezinárodní olympiády v informatice. (MO, 2018)

Každou řešenou úlohu okresního, krajského a ústředního kola opravují nejméně dva členové poroty a o případných nejasnostech rozhoduje předseda. Soutěžící, kteří se umístili na prvním až třetím místě, obdrží diplom s vyznačením umístění a věcný dar v ceně určené zvláštním právním předpisem. Soutěžící, kteří dosáhli počtu bodů stanovených v pokynech, obdrží diplom úspěšného řešitele. Ostatní soutěžící obdrží diplom za účast. (Urban, 2016)

Ústřední komise matematické olympiády vydala v roce 2017 na základě organizačního řádu matematické olympiády klíč k určení jednoznačného pořadí soutěžících v krajských kolech kategorií Z9, A, B, C, P a ústředních kolech kategorií A a P, když jiná kritéria než počty získaných bodů nejsou přípustná. Způsob rozlišení pořadí úspěšných řešitelů se stejným celkovým počtem bodů je tedy na základě počtů bodů získaných za jednotlivé úlohy. Bodové zisky každého soutěžícího v jednotlivých úlohách se zapíší v nerostoucím pořadí jako čtyřmístná čísla a tyto čísla se poté uspořádají podle velikostí. Následně se určí konečné pořadí soutěžících. (Šimša, 2017)

4. Kategorie Z5

4.1. 70. ročník (2020/2021), I. kolo, Z5-I-3

Pan režisér Alík potřeboval do televizní pohádky čtyři psy. Dostal nabídku z Řecka, Belgie, Irska a z Dolní Lhoty. Vybral ovčáka, dalmatina, vlkodava a jezevčíka, každého z jiné země, s různým jménem a různým věkem.

- Nejstarší ze psů byl jezevčík, bylo mu 5 let.
- Bucki byl z nich druhý nejmladší.
- Vlkodav pocházel z Irska.
- Pes z Dolní Lhoty se jmenoval Punťa.
- Oddi oslavil včera své čtvrté narozeniny.
- Ovčák pocházel z Belgie.
- Rubby nebyl dalmatin.
- Vlkodav měl tři roky.
- Nejmladší z vybraných psů byl Rubby, byly mu dva roky.

Zjistěte, jak se každý vybraný pes jmenoval, odkud pocházel, jaké byl rasy a kolik mu bylo let. (*L. Hozová*)

Řešení:

Vytvoříme tabulku, do které budeme postupně doplňovat informace:

	země	jméno	věk
ovčák			
dalmatin			
vlkodav			
jezevčík			

Do tabulky nejprve doplníme informace, které vychází ze zadání.

1) Nejstarší ze psů byl jezevčík, bylo mu 5 let.
2) Vlkodav pocházel z Irska.
3) Ovčák pocházel z Belgie.
4) Vlkodav měl tři roky.

	země	jméno	věk
ovčák	Belgie (3)		
dalmatin			
vlkodav	Irsko (2)		3 roky (4)
jezevčík			5 let (1)

Dále do tabulky doplníme informace, které vycházejí z kontextu:

- Ze zadání víme, že věky psů jsou 2, 3, 4 a 5. Pes Bucki je druhý nejmladší, tj. jsou mu 3 roky. Jedná se tedy o irského vlkodava.
- Ohledně Rubbyho víme, že jsou mu 2 roky a není dalmatin. Zbývá tedy, že je ovčák. (vlkodavovi jsou 3 roky a jezevčíkovi je 5 let)
- Zbývá, že dalmatinovi jsou 4 roky.
- Čtyřletému psovi říkají Oddi. Oddi je dalmatin.
- Zbývající pes se jmenuje Punťa - je to jezevčík a pochází z Dolní Lhoty.
- Zbývá, že dalmatin je z Řecka.

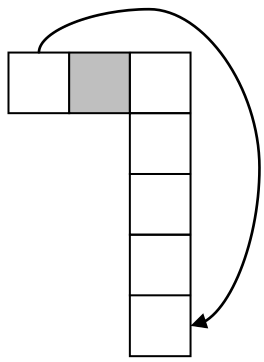
	země	jméno	věk
ovčák	Belgie	Rubby	2 roky
dalmatin	Řecko	Oddi	4 roky
vlkodav	Irsko	Bucki	3 roky
jezevčík	Dolní Lhota	Punťa	5 let

Zjistili jsme, že:

- ovčák se jmenuje Rubby, pochází z Belgie a jsou mu 2 roky
- dalmatin se jmenuje Oddi, pochází z Řecka a jsou mu 4 roky
- vlkodav se jmenuje Bucki, pochází z Irska a jsou mu 3 roky
- jezevčík se jmenuje Punťa, pochází z Dolní Lhoty a je mu 5 let

Komentář: Jedná se o lehkou úlohu, ve které žák musí umět správně pracovat s informacemi a odvodit na základě výroků řešení.

4.2. 58. ročník (2008/2009), I. kolo, Z5-I-4



Klasická hrací kostka se převracela naznačeným směrem po plánu na obrázku. Na každém políčku zůstaly otisknuty tečky ze stěny, kterou se kostka plánu dotýkala. Počet všech teček otisknutých na plánu byl 23.

Kolik teček bylo otisknuto na vybarveném políčku?

(Klasická hrací kostka má na stěnách tečky v počtu od 1 do 6 umístěné tak, že na protilehlých stěnách je vždy dohromady 7 teček. Plán je tvořen čtverci, které jsou stejně velké jako stěny kostky.) (*M. Dillingerová*)

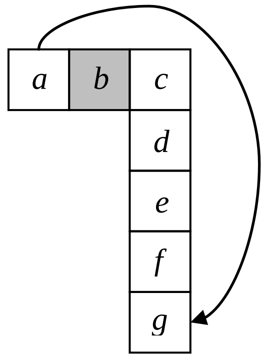
Řešení:

Ze zadání víme, že počet otisknutých teček byl 23. Zároveň platí, že součet dvou protilehlých stěn kostky je 7. (Úloha je na prostorovou představivost - žák musí správně rozlišit protilehlé strany.)

Tuto úlohu lze řešit dvěma různými způsoby.

1. Řešení

Políčka označíme písmeny $a - g$.



Sepíšeme protilehlá políčka, tj. jejich součet je 7:

$$a + c = 7$$
$$c + e = 7$$
$$e + g = 7$$
$$d + f = 7$$

Kromě těchto rovnic protilehlých políček známe součet všech otisknutých teček, tj. součet políček $a - g$.

$$a + b + c + d + e + f + g = 23$$

Do výše uvedené rovnice dosadíme $a + c = 7$, $e + g = 7$ a $d + f = 7$. (Rovnici $c + e = 7$ nevyužijeme, protože obě neznámé jsou již obsaženy v předchozích rovnicích.) Tím dostaneme:

$$7 + b + 7 + 7 = 23$$
$$b = 23 - b$$
$$b = 2$$

Na vybarveném políčku byly otisknuty dvě tečky.

Komentář k 1. řešení: Většina žáků si zvolí tento způsob řešení, protože se jedná o základní úvahu či nepřijdou na vyjádření $a + c = a + (7 - a)$.

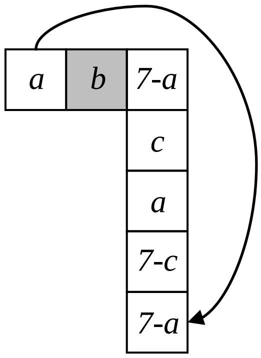
2. Řešení

Uvědomíme si, že vztah pro protilehlá políčka lze znázornit a napsat tímto způsobem:

a	*b*	*7-a*

$$a + c = 7$$
$$c = 7 - a$$

Podle výše uvedeného systému označíme první políčko jako a, druhé políčko jako b. Třetí políčko je protilehlé k a, píšeme tedy $7 - a$. Čtvrté políčko nelze označit jako $a, b, 7 - a$; proto ho značíme c. Páté políčko je protilehlé k $7 - a$, protože $7 - (7 - a) = 7 - 7 + a = a$, označíme ho a. Šesté políčko je protilehlé k c, označujeme ho tedy $7 - c$. Poslední sedmé políčko je protilehlé k a, značíme tedy $7 - a$.



Takto vyjádřená políčka zapíšeme do rovnice počtu otisknutých teček a upravíme:

$$a + b + (7 - a) + c + a + (7 - c) + (7 - a) = 23$$

$$a + b + 7 - a + c + a + 7 - c + 7 - a = 23$$

$$b + 21 = 23$$

$$b = 2$$

Na vybarveném políčku byly otisknuty dvě tečky.

Poznámka: V autorském řešení se nejprve sečetla levá strana výše uvedené rovnice a teprve pak se vytvořila rovnice $21 + b = 23$ a vyšel výsledek $b = 2$.

Komentář k 2. řešení: Tento způsob řešení zvolil žák, který upravil vztah $a + c = 7$ na $c = 7 - a$. Celkově se jedná o lehkou úlohu.

4.3. 62. ročník (2012/2013), I. kolo, Z5-I-5

Vypočtěte $3 \cdot 15 + 20 : 4 + 1$.

Pak doplňte závorky do zadání tak, aby výsledek byl:

1. co největší celé číslo,
2. co nejmenší celé číslo. (*M. Volfová*)

Řešení:

Tuto úlohu lze řešit dvěma různými způsoby. Nejprve však vypočítáme zadaný příklad bez umístění závorek (abychom měli představu o základním výsledku):

$$3 \cdot 15 + 20 : 4 + 1 = 45 + 5 + 1 = 51$$

1. Řešení

Většina žáků by úlohu řešila vypsáním variant s jednou či dvěma smysluplně umístěnými závorkami. Varianty se zbytečně napsanými závorkami nepíšeme (kdyby tam nebyly, příklad by měl stejné řešení):

$$[(3 \cdot 15) + 20] : 4 + 1 = [3 \cdot 15 + 20]: 4 + 1$$

1 závorka	
$(3 \cdot 15 + 20): 4 + 1 = (45 + 20): 4 + 1$	není celé číslo
$3 \cdot (15 + 20): 4 + 1 = 3 \cdot 35 : 4 + 1$	není celé číslo
$3 \cdot (15 + 20 : 4) + 1 = 3 \cdot (15 + 5) + 1 = 3 \cdot 20 + 1 = 60 + 1 = 61$	
$3 \cdot (15 + 20 : 4 + 1) = 3 \cdot (15 + 5 + 1) = 3 \cdot 21 = 63$	
$3 \cdot 15 + 20 : (4 + 1) = 45 + 20 : 5 = 45 + 4 = 49$	

2 závorky	
$(3 . 15 + 20): (4 + 1) = (45 + 20): 5 = 65 : 5 = 13$	
$3 . (15 + 20): (4 + 1) = 3 \cdot 35 : 5 = 105 : 5 = 21$	
$3 \cdot [(15 + 20) : 4 + 1] = 3 \cdot [35 : 4 + 1]$	není celé číslo
$3 \cdot [15 + 20 : (4 + 1)] = 3 \cdot [15 + 20 : 5] = 3 \cdot [15 + 4] = 3 \cdot 19 = 57$	

Na poslední dvě varianty možná žáci nepřijdou, protože by jim mohly přijít příliš složité či komplikované. Z výše uvedené tabulky vybereme varianty:

1. s největším celým číslem: $3 \cdot (15 + 20 : 4 + 1) = 63$
2. s nejmenším celým číslem: $(3 \cdot 15 + 20): (4 + 1) = 13$

Poznámka: Dle autorského řešení by někteří žáci mohli vynechat některé varianty, protože by výsledek byl moc malý.

2. Řešení

Nehledáme všechny možné varianty, ale odůvodňujeme svůj postup hledáním:

a) největšího dělitele a nejmenšího výrazu, který násobíme třemi (=výsledek s největším celým číslem):

$$3 \cdot (15 + 20 : 4 + 1) = 63$$

b) nejmenšího dělitele a největšího výrazu, který násobíme třemi (=výsledek s nejmenším celým číslem):

$$(3 \cdot 15 + 20) : (4 + 1) = 13$$

Poznámka: Žáka může napadnout umístit závorku doprostřed dvojmístného čísla - i takové řešení je dle autora platné.

$$(3 \cdot 15 + 2)0 : (4 + 1) = 47.0 : 5 = 0$$

Komentář: Úloha se zdá na první pohled jednoduchá, proto by někteří žáci mohli být spokojení s nalezením několika variant a nenajít úplně všechny. Jedná se o středně těžkou úlohu. Přijde mi zvláštní uznat řešení s rozdělením dvojciferného čísla.

4.4. 56. ročník (2006/2007), II. kolo, Z5-II-1

Děvčata sbírala víčka od PET-láhví. Šárka jich nasbírala 20, Světlana 29, Marta 31, Maruška 49 a Monika 51. Každá z dívek nasypala všechna svá nasbíraná víčka buď do modré, nebo do červené krabice. Pavlík při počítání víček zjistil, že v modré krabici je dvakrát více víček než v červené. Které z dívek nasypaly svá víčka do modré a které do červené krabice? (*L. Hozová*)

Řešení:

Máme dvě krabice. V modré krabici je dvojnásobek toho, co je v červené krabici.

Celkový počet víček v obou krabicích je:

$$20 + 29 + 31 + 49 + 51 = 180$$

Počet víček rozdělíme na 3 stejné díly.

$$180 : 3 = 60$$

V červené je 1 díl (60 víček) a v modré jsou 2 díly ($2 \cdot 60 = 120$ víček).

Nyní je potřeba zjistit, která čísla dávají součet 60 a která 120.

– součet 60 - vzhledem k velikostem čísel hledáme 2 čísla (další součty čísel, které jsou větší jak 60, neuvažujeme)

$30 + 29 = 59$	$20 + 51 = 71$
$20 + 31 = 51$	$29 + 31 = 60$
$20 + 49 = 69$	

Z výše uvedené tabulky vychází, že součet 60 dávají čísla 29 a 31.

Součet 120 dávají zbylá čísla, tj. 20, 49 a 51.

$$20 + 49 + 51 = 120$$

Do červené krabice nasypala víčka Světlana a Marta, do modré nasypala víčka Šárka, Maruška a Monika.

Komentář: Úloha je lehká. Navíc je určena pro druhé kolo soutěže, kde je čas na řešení úloh omezený.

5. Kategorie Z6

5.1. 59. ročník (2009/2010), I. kolo, Z6-I-1

Jeníček s Mařenkou chodí k babičce, která má cukrárnu a prodává perníky. Oba dva jí samozřejmě pomáhají, hlavně se zdobením. Za dobu, kdy babička ozdobí pět perníků, ozdobí Mařenka tři a Jeníček dva. Při poslední návštěvě ozdobili všichni tři dohromady pět plných táců. Mařenka s babičkou zdobily po celou dobu, Jeníček kromě zdobení rovnal perníky po dvanácti na jeden tác a odnášel je do spíže. Všichni tři ve stejnou dobu začali i skončili.

1. Kolik perníčků ozdobil Jeníček?
2. Jak dlouho jim celá práce trvala, když babička ozdobí jeden perníček za 4 minuty?
3. Jak dlouho pomáhal Jeníček zdobit? (*M. Petrová*)

Řešení:

Ze zadání víme, že za stejnou dobu ozdobí:

babička .... 5 perníků

Mařenka .... 3 perníky

Jeníček...................................... 2 perníky

Víme, že zdobili 5 táců a že na každém z nich bylo 12 perníků.

$$5 \cdot 12 = 60$$

1. Kolik perníčků ozdobil Jeníček?

Uvažujeme časový úsek (=cyklus), který je celé číslo a za který dohromady babička, Mařenka a Jeníček ozdobí $5 + 3 + 2 = 10$ perníčků.

Tato podotázka má dva způsoby řešení:

1. způsob

Kdyby Jeníček pouze zdobil, potřebovali by

$$60 : 10 = 6 \text{ cyklů.}$$

Protože ale Jeníček nezdobil celou dobu, potřebovala babička s Mařenkou zdobit alespoň 7 cyklů, tj.

$$(5+3)\cdot 7 = 8\cdot 7 = 56$$

Zbylé 4 perníky by zdobil Jeníček.

Kdyby zdobila babička s Mařenkou 8 cyklů, nazdobily by

$$(5+3)\cdot 8 = 8\cdot 8 = 64$$

Nejedná se o výsledek, neboť tolik perníků ani nebylo.

2. způsob

Vynecháme Jeníčkovo zdobení a vypočítáme, kolik cyklů je potřeba, aby babička s Maruškou ozdobily perníky.

$$60 : (5+3) = 60 : 8 = 7, zbytek\ 4.$$

Zbylé 4 perníky ozdobil Jeníček. Kdyby bylo cyklů 6, zdobil by celou dobu i Jeníček.

2. Jak dlouho jim celá práce trvala, když babička ozdobí jeden perníček za 4 minuty?

Jeden cyklus trvá

$$4\cdot 5 = 20 \text{ minut.}$$

Celá práce trvá 7 cyklů, tj.

$$7\cdot 20 = 140 \text{ minut (=2h 20 min)}$$

Celá práce jim trvala 2h a 20 minut.

3. Jak dlouho pomáhal Jeníček zdobit?

Jeníček zdobil 4 perníky, což jsou právě 2 cykly, tj.

$$2\cdot 20 = 40 \text{ minut.}$$

Jeníček pomáhal zdobit 40 minut.

Komentář: Jedná se o středně těžkou úlohu. Žák si musí vytvořit pojem cyklus a správně s ním pracovat.

5.2. 70. ročník (2020/2021), I. kolo, Z6-I-2

Vzal jsem klasickou černobílou šachovnici, která byla tvořena 8 × 8 čtvercovými políčky se stranami délky 3 cm. Políčka jsem v daném rámci přeskládal tak, že vznikl jeden černý obdélník, jeden černý čtverec a jeden souvislý bílý útvar. Jednotlivá políčka se i po přeskládání dotýkala celými stranami. Černé útvary se nedotýkaly (ani rohem) a každý z nich měl alespoň jednu stranu společnou s okrajem šachovnice.

Určete největší možný obvod bílého útvaru a nakreslete, jak by v takovém případě mohl vypadat. (*M. Mach*)

Řešení:

Máme 64 čtvercových políček o straně 3 cm. Z toho je 32 bílých a 32 černých.

Nejprve určíme rozměry útvarů (čtverec a obdélník), které vzniknou z černých políček. (Žák musí rozdělit zbývající políčka na násobky dvou čísel - ani jedno z těchto čísel nesmí být větší než 8, protože pak by se obdélník nevešel do rozměru šachovnice.)

čtverec		obdélník	
rozměry	počet políček	možné rozměry	počet políček
1 × 1	1	1 × 31 [a)]	$32 - 1 = 31$
2 × 2	4	2 × 14, 4 × 7 [b)]	$32 - 4 = 28$
3 × 3	9	1 × 23 [c)]	$32 - 9 = 23$
4 × 4	16	2 × 8, 4 × 4 [d)]	$32 - 16 = 16$
5 × 5	25	1 × 7 [e)]	$32 - 25 = 7$
6 × 6	36 - černých políček ani tolik není	nelze	$32 - 36 = -4$ - nelze

a) 1 × 31 - obdélník se nevejde - délka jedné strany je 31

b) 2 × 14 - obdélník se nevejde - délka jedné strany je 14
   4 × 7 - obě strany nejsou větší než 8, možné řešení

c) 1 × 23 - obdélník se nevejde - délka jedné strany je 23

d) 2 × 8 - obě strany nejsou větší než 8, možné řešení
   4 × 4 - obě strany nejsou větší než 8, možné řešení (čtverec je speciální případ obdélníku, který má všechny strany stejně dlouhé)

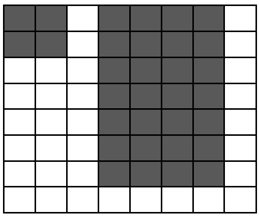
e) 1 × 7 - obě strany nejsou větší než 8, možné řešení

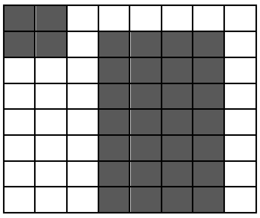
Možná řešení zapíšeme do tabulky:

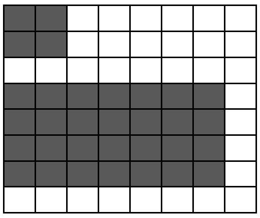
čtverec		obdélník	
rozměry	počet políček	rozměry	počet políček
2 × 2	4	4 × 7 [a)]	28
4 × 4	16	2 × 8 [b)], 4 × 4 [c)]	16
5 × 5	25	1 × 7 [d)]	7

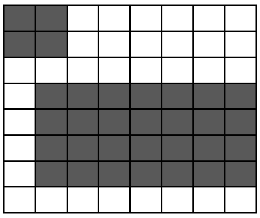
Výše uvedená řešení si znázorníme a určíme obvod bílého útvaru. Řešení se stejným obvodem, ale jinak umístěné neznázorňujeme.

Příklad stejných řešení:


46 · 3 = 138 cm

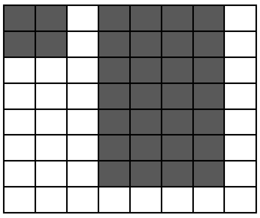

46 · 3 = 138 cm

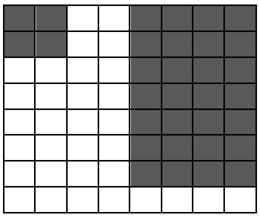

46 · 3 = 138 cm

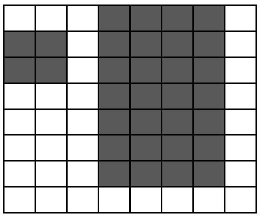

46 · 3 = 138 cm

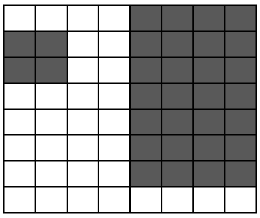
Možná řešení:

a)

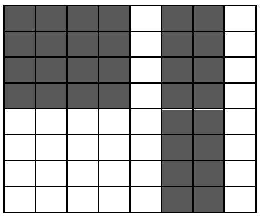

46 · 3 = 138 cm

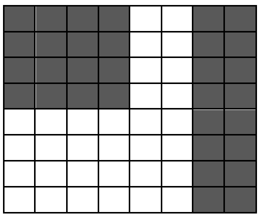

32 · 3 = 96 cm

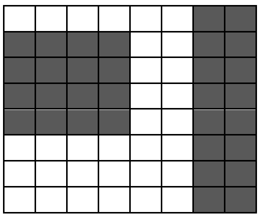

50 · 3 = 150 cm


36 · 3 = 108 cm

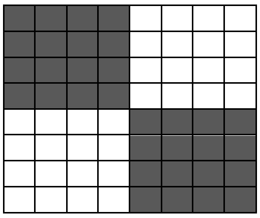
b)


- nejedná se o řešení, protože bílý útvar není souvislý


28 · 3 = 84 cm

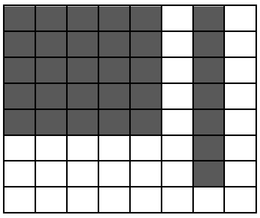

36 · 3 = 108 cm

c)

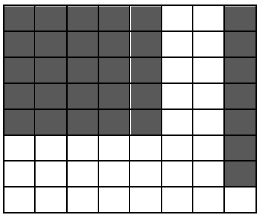


- nejedná se o řešení, protože se rohy útvarů dotýkají a bílý útvar není souvislý

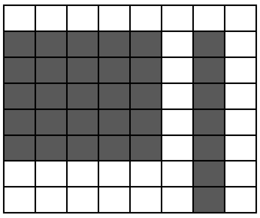
d)



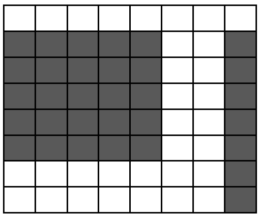
$46 \cdot 3 = 138$ cm



$32 \cdot 3 = 96$ cm

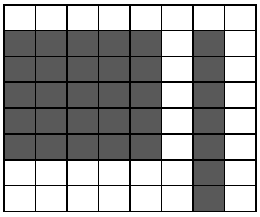


$56 \cdot 3 = 168$ cm



$42 \cdot 3 = 126$ cm

Ze znázorněných možností vyplývá, že bílý útvar má největší obvod v případě, že máme čtverec 5×5 a obdélník 1×7 takto uspořádán:



Komentář: Někteří žáci budou spokojeni s nalezením několika možných řešení bez toho, aby si uvědomili, že řešení jsou stejná (přestože nejde o počet řešení, ale o největší možný obvod). Jedná se o středně těžkou úlohu.

5.3. 54. ročník (2004/2005), II. kolo, Z6-II-1

Desetinné číslo nazveme vyvážené, jestliže je součet číslic ležících před desetinnou čárkou roven součtu číslic za desetinnou čárkou. Např. číslo 25,133 je vyvážené. V každém z čísel 497 365,198 043 a 197 352,598 062 škrtni několik číslic tak, aby vzniklo a) co největší vyvážené číslo, b) vyvážené číslo s co největším počtem číslic. (*S. Bednářová*)

Řešení:

Ze zadání získáváme definici vyváženého čísla:

$$25 \quad , \quad 133$$

součet $2+5=7$ součet $1+3+3=7$

Číslice před a za desetinnou čárkou se rovnají, tj. mají stejný součet.

Nejprve vezmeme číslo $497\,365{,}198\,043$ a sečteme číslice na obou stranách desetinné čárky.

$$497\,365 \quad , \quad 198\,043$$

$4+9+7+3+6+5=34$ $1+9+8+0+4+3=25$

Všimneme si, že před desetinnou čárkou je součet číslic větší o 9, proto musíme vyškrtnout číslice o celkové hodnotě. Možnosti máme tři - vyškrtneme buď jednu číslici (9), nebo dvě číslice ($4+5$ nebo $3+6$). Vzhledem ke kritériím hledaných čísel nám však zůstává jediná možnost - vyškrtnutí číslice 9.

a) co největší vyvážené číslo

Toto číslo dostaneme tak, že nejprve škrtneme číslici 9, která je před desetinnou čárkou. Dostaneme tak číslo 47 365,198 043. Dále můžeme škrtnout číslici 0, která nám součet čísel za desetinnou čárkou neovlivňuje, avšak výsledné číslo bude o čtyři desítitisíciny větší. Dostaneme tak výsledné největší vyvážené číslo 47 365,198 43.

b) vyvážené číslo s co největším počtem číslic

Největší počet číslic dostaneme tak, že škrtneme číslici 9, která je před desetinnou čárkou a dostaneme číslo 47 365,198 043, které má největší počet číslic a zároveň je vyváženým číslem.

Nyní budeme řešit číslo $197\,352{,}598\,062$. Opět určíme součet číslic na obou stranách desetinné čárky.

$$197\,352 \quad , \quad 598\,062$$

$$1+9+7+3+5+2=27 \qquad\qquad 5+9+8+0+6+2=30$$

Zjistili jsme, že součet číslic před desetinnou čárkou je o 3 menší. Vzhledem k tomu, že za desetinnou čárkou není číslice 3, musíme najít takové řešení, kde budeme škrtat celkem číslice dvě (jednu před desetinnou čárkou o hodnotě x a jednu za desetinnou čárkou o hodnotě $x+3$).

Nejprve nalezneme dvojice číslic, které splňují výše uvedenou podmínku. Za x uvažujeme pouze takové číslice, které jsou uvedeny před desetinnou čárkou (tj. číslice 1, 2, 3, 5, 7).

$x_1=1$	$x_1+3=4$	tuto číslici číslo za desetinnou čárkou neobsahuje
$x_2=2$	$x_2+3=5$	
$x_3=3$	$x_3+3=6$	
$x_4=5$	$x_4+3=8$	
$x_5=7$	$x_5+3=10$	nelze, tento součet není číslicí
$x_6=9$	$x_6+3=12$	nelze, tento součet není číslicí

Po vyškrtnutí výše uvedených číslic jsme získali následující čísla:

$19\,735{,}980\,62$ bez číslic 2 a 5

$19\,752{,}598\,02$ bez číslic 3 a 6

$19\,732{,}590\,62$ bez číslic 5 a 8

a) co největší vyvážené číslo

Největší z výše uvedených čísel je číslo $19\,752{,}598\,02$. Jako u předchozího čísla můžeme ze stejného důvodu škrtnout číslici 0 - součet čísel za desetinnou čárkou neovlivňuje, avšak výsledné číslo bude pak větší. Tak dostaneme číslo $19\,752{,}598\,2$, které je největším vyváženým číslem.

b) vyvážené číslo s co největším počtem číslic

Jedná se o tři čísla (tři řešení), která jsme získali vyškrtnutím dvojic číslic 2+5, 3+6 a 5+8, tj.

19 735,980 62

19 752,598 02

19 732,590 62

Komentář: Tato úloha je náročnější, protože žák musí přijít na logický postup vyškrtávání číslic tak, aby výsledná čísla splňovala všechny uvedené podmínky. Jedná se o těžkou úlohu. Žák se může spokojit s jedním řešením a nehledat pak další.

5.4. 60. ročník (2010/2011), II. kolo, Z6-II-3

V létě se u babičky sjelo šest vnoučat a víme o nich, že

- Martinka se někdy musí starat o brášku Tomáška, který je o 8 let mladší,
- Věrka, která je o 7 let starší než Ida, ráda vypráví strašidelné příběhy,
- s Martinkou se často pere o rok mladší Jaromír,
- Tomášek je o 11 let mladší než Kačka,
- Ida často zlobí svého o 4 roky staršího bratra Jaromíra,
- klukům je dohromady 13 let.

Jak staré jsou všechny zmiňované děti? (*M. Volfová*)

Řešení:

Vytvoříme tabulku, do které napíšeme údaje ze zadání:

<table>
<tr><td>Martinka</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Kačka</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Věrka</td><td colspan="2">o 7 let starší než Ida</td></tr>
<tr><td>Tomášek</td><td>o 8 let mladší než Martinka
o 11 let mladší než Kačka</td><td rowspan="2">dohromady 13 let</td></tr>
<tr><td>Jaromír</td><td>o 1 rok mladší než Martinka
o 4 roky starší než Ida</td></tr>
<tr><td>Ida</td><td colspan="2">ráda vypráví strašidelné příběhy - informace, kterou nijak nevyužijeme</td></tr>
</table>

Výše uvedenou tabulku si přepíšeme přehledněji, aby se nám s ní pracovalo lépe:

<table>
<tr><td>Martinka</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Kačka</td><td colspan="2">o 11 let starší než Tomášek</td></tr>
<tr><td>Věrka</td><td colspan="2">o 7 let starší než Ida</td></tr>
<tr><td>Tomášek</td><td>o 8 let mladší než Martinka</td><td rowspan="2">dohromady 13 let</td></tr>
<tr><td>Jaromír</td><td>o 1 rok mladší než Martinka</td></tr>
<tr><td>Ida</td><td colspan="2">o 4 roky mladší než Jaromír</td></tr>
</table>

Věk Martinky označíme jako x. Dostaneme tak následující tabulku. (Nejprve jsme vyjádřili věk Tomáška a Jaromíra, poté věk Kačky a Idy a nakonec věk Věrky.)

Martinka	x
Kačka	$(x-8)+11 = x-8+11 = x+3$
Věrka	$(x-5)+7 = x-5+7 = x+2$
Tomášek	$x-8$
Jaromír	$x-1$
Ida	$(x-1)-4 = x-1-4 = x-5$

Víme, že součet věků kluků je 13 let. Dostáváme tak rovnici:

$$\begin{aligned} x-8+x-1 &= 13 \\ 2x &= 13+9 \\ 2x &= 22 \end{aligned}$$

$$x = 11 \text{ let}$$

Nyní můžeme dosadit hodnotu $x = 11$ do výše uvedené tabulky a zjistit tak, kolik let je vnoučatům.

Martinka	$x = 11$ let
Kačka	$x+3 = 11+3 = 14$ let
Věrka	$x+2 = 11+2 = 13$ let
Tomášek	$x-8 = 11-8 = 3$ roky
Jaromír	$x-1 = 11-1 = 10$ let
Ida	$x-5 = 11-5 = 6$ let

Poznámka: Autorské řešení s neznámou nepracuje, nýbrž bere jako hlavní myšlenku výrok, že „klukům je dohromady 13 let“. Kombinací výroků „Martinka se někdy musí starat o brášku Tomáška, který je o 8 let mladší“ a „s Martinkou se často pere o rok mladší Jaromír“ dostáváme, že Jaromír je o 7 let starší než Tomášek.

Dále autorské řešení vznáší hypotézu: „Kdyby byl Tomášek o 7 let starší (tedy stejně starý jako Jaromír), bylo by jim dohromady 20 let.“, tj.

$$\text{Tomášek} + 7 \text{ let} = \text{Jaromír}$$

Dostáváme tak rovnici:

$$\text{Tomášek} + 7 \text{ let} + \text{Jaromír} = 13 + 7$$

$$2 \cdot \text{Jaromír} = 20 \text{ let}$$

$$\text{Jaromír} = 10 \text{ let}$$

a pak Tomášek $10 - 7 = 3$ roky

Poznámka: Výše uvedené řešení používá vyjádření neznámé x. Autorské řešení pracuje s výroky konkrétně, ale úvaha nad určením věku kluků může být pro některé žáky matoucí.

Komentář: Jedná se o středně těžkou úlohu.

6. Kategorie Z7

6.1. 60. ročník (2010/2011), I. kolo, Z7-I-1

Součin číslic libovolného vícemístného čísla je vždy menší než toto číslo. Pokud počítáme součin číslic daného vícemístného čísla, potom součin číslic tohoto součinu, poté znova součin číslic nového součinu atd., nutně po nějakém počtu kroků dospějeme k jednomístnému číslu. Tento počet kroků nazýváme *perzistence* čísla. Např. číslo 723 má perzistenci 2, neboť $7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$ (1. krok) a $4 \cdot 2 = 8$ (2. krok).

1. Najděte největší liché číslo, které má navzájem různé číslice a perzistenci 1.

2. Najděte největší sudé číslo, které má navzájem různé nenulové číslice a perzistenci 1.

3. Najděte nejmenší přirozené číslo, které má perzistenci 3.

(*S. Bednářová*)

Řešení:

1.

Víme, že liché číslo je číslo, které končí lichou číslicí, tj. $1, 3, 5, 7, 9$. Máme použít navzájem různé číslice. V zadání není napsáno, že nesmíme použít číslici 0 - nesmí být však na začátku (neovlivnilo by počet použitých číslic - tj. číslo 0985 a 985 bereme, že jsou stejná) a na konci čísla (hledáme číslo liché).

Sestavíme číslice od největší po nejmenší tak, že číslice 0 a 1 prohodíme a dostaneme číslo 9876543201. Perzistence tohoto čísla je:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0, \text{ perzistence } 1$$

2.

Tentokrát máme již v zadání napsáno, že nesmíme použít číslici 0. Hledáme tedy sudé číslo s co největším počtem číslic, tj. končí číslicemi $2, 4, 6, 8$. Zároveň víme, že ciferný součin bude také sudý ($2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$ - výsledek vždy sudý). Protože násobení číslicí 1 nijak neovlivňuje výsledek, můžeme ji vždy zapisovat do ciferného součinu.

ciferný součin	rozklad	varianty čísel
2	$1 \cdot 2$	12
4	$1 \cdot 2 \cdot 2$	nelze - opakování číslic
	$1 \cdot 4$	14
6	$1 \cdot 2 \cdot 3$	132 312
	$1 \cdot 6$	16
8	$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	nelze - opakování číslic
	$1 \cdot 2 \cdot 4$	124 142 214 412
	$1 \cdot 8$	18

Z výše uvedených čísel je největší číslo 412.

Komentář: Někteří žáci si nejspíš neuvědomí, že násobky sudých číslic mají vždy sudý ciferný součin a budou tak sáhodlouze vypisovat všechny možnosti.

3.

Víme, že jednociferná čísla mají vždy perzistenci 1.

Také víme, že dvojmístná čísla obsahující číslice 1 a 0 mají perzistenci 1, protože jejich ciferný součin je nejvýše 9.

$10, 1 \cdot 0 = 0$ - perzistence 1,

$19, 1 \cdot 9 = 9$ - perzistence 1.

Dále víme, že dvojmístná čísla obsahující číslici 2 mají perzistenci nejvýše 2, protože jejich ciferný součin je nejvýše 18.

$12, 1 \cdot 2 = 2$ - perzistence 1,

$29, 2 \cdot 9 = 18, \;\; 1 \cdot 8 = 9$ - perzistence 2.

Z těchto důvodů začneme prověřovat čísla až od čísla 33:

číslo	rozklad	perzistence
33	$3 \cdot 3 = 9$	perzistence 1
34	$3 \cdot 4 = 12, 1 \cdot 2 = 2$	perzistence 2
35	$3 \cdot 5 = 15, 1 \cdot 5 = 5$	perzistence 2
36	$3 \cdot 6 = 18, 1 \cdot 8 = 8$	perzistence 2
37	$3 \cdot 7 = 21, 2 \cdot 1 = 2$	perzistence 2
38	$3 \cdot 8 = 24, 2 \cdot 4 = 8$	perzistence 2
39	$3 \cdot 9 = 27, 2 \cdot 7 = 14, 1 \cdot 4 = 4$	perzistence 3

Zjistili jsme, že nejmenší přirozené číslo s perzistencí 3 je číslo 39.

Komentář: Jako u předchozího úkolu mohou žáci vynechat úvahu o již zjištěných vlastnostech perzistence čísla a začít tak vypisovat čísla zcela od začátku, tj. od čísla 0 či 1. Jedná se o středně těžkou úlohu.

6.2. 70. ročník (2020/2021), I. kolo, Z7-I-2

Kuba se domluvil s bačou, že se mu bude starat o ovce. Bača Kubovi slíbil, že po roce služby dostane dvacet zlatých a k tomu jednu ovci. Jenže Kuba dal výpověď, právě když uplynul sedmý měsíc služby. I tak ho Bača spravedlivě odměnil a zaplatil mu pět zlatých a jednu ovci.

Na kolik zlatých si bača cenil jednu ovci? (*L. Hozová*)

Řešení:

Ze zadání víme tyto informace:

1 rok (=12 měsíců) .... 20 zlatých + 1 ovce

7 měsíců... 5 zlatých + 1 ovce

Odečteme od odměny za 1 rok odměnu za 7 měsíců a získáme odměnu za zbývajících 5 měsíců.

20 zlatých + 1 ovce	-	5 zlatých + 1 ovce	=	15 zlatých
12 měsíců		7 měsíců		5 měsíců

Víme, že za zbývajících 5 měsíců by si Kuba vydělal 15 zlatých.

Průměrně je to:

$$15 : 5 = 3 \text{ zlaté za 1 měsíc.}$$

Za rok by si vydělal ve zlatých:

$$3 \cdot 12 = 36 \text{ zlatých,}$$

ale bača by mu dal 20 zlatých a 1 ovci.

Nyní lze vypočítat, na kolik zlatých si bača ovci cení:

$$36 - 20 = 16 \text{ zlatých}$$

Bača si cení jednu ovci na 16 zlatých.

Komentář: Celkově se jedná o lehkou úlohu, která je však úměrná věku a schopnostem žáků.

6.3. 66. ročník (2016/2017), II. kolo, Z7-II-1

Maruška dostala od babičky kouzelnou mošnu, která vždy o půlnoci zdvojnásobovala množství zlaťáků, které obsahovala. V pondělí v poledne vložila Maruška do prázdné mošny nějaké zlaťáky. V úterý a ve středu si z mošny vybrala vždy 40 zlaťáků a nic do ní nevkládala. Ve čtvrtek si opět vybrala 40 zlaťáků a mošna byla prázdná.

Kolik zlaťáků vložila Maruška v pondělí do mošny?

Kolik zlaťáků měla do prázdné mošny vložit, aby mohla opakovaně každý den vybírat 40 zlaťáků, nemusela nic vkládat a aby každý den před výběrem byl počet zlaťáků v mošně stejný? (*M. Volfová*)

Řešení:

V této úloze můžeme využít dva postupy - analytický (vycházíme z otázky úlohy) a syntetický (vycházíme z daných údajů). (Divíšek, 1989 str. 143)

1. Analytický postup řešení

1.

Úlohu si můžeme znázornit. Jako x si označíme počet zlaťáků v pondělí.

Pondělí	x
Úterý	$2x-40$
Středa	$2(2x-40)-40=4x-80-40=4x-120$
Čtvrtek	$2(4x-120)-40=8x-240-40=8x-280$

Ze zadání víme, že po vybrání 40 zlaťáků ve čtvrtek nezbyl v mošně žádný. Dostaneme tak rovnici:

$$\begin{aligned} 8x-280 &= 0 \\ 8x &= 280\ /:8 \\ x &= 35 \end{aligned}$$

Maruška vložila v pondělí do mošny 35 zlaťáků.

Poznámka: Žák může udělat chybu, pokud nebude ihned upravovat výrazy.

2.

Opět si úlohu znázorníme. Označíme vstupní hodnotu y. Další dny bude vždy hodnota stejná.

Pondělí	y
Úterý	$2y-40$
Středa	$2y-40$
Čtvrtek	$2y-40$

Můžeme proto zapsat rovnici:

$$\begin{aligned} 2y-40 &= y \\ y &= 40 \end{aligned}$$

Maruška měla v pondělí vložit do mošny 40 zlaťáků.

2. Syntetický postup řešení

1.

Začínáme počítat odzadu. Opět zapisujeme do tabulky.

Čtvrtek	před výběrem 40 zlaťáků
Středa	před zdvojnásobením $40 : 2 = 20$ zlaťáků před výběrem $20 + 40 = 60$ zlaťáků
Úterý	před zdvojnásobením $60 : 2 = 30$ zlaťáků před výběrem $30 + 40 = 70$ zlaťáků
Pondělí	před zdvojnásobením $70 : 2 = 35$ zlaťáků vloženo 35 zlaťáků

Zjistili jsme, že do mošny vložila Maruška 35 zlaťáků.

2.

Uvažujeme, že počet zlaťáků před zdvojnásobením musí být roven výběru 40 zlaťáků. Vychází nám tak, že Maruška vložila do mošny právě 40 zlaťáků.

Komentář: Jedná se o středně těžkou úlohu. Při srovnání výše uvedených postupů si můžeme všimnout, že analytický postup je mnohem cílevědomější a syntetický je více spekulativní. (Divíšek, 1989 str. 143)

6.4. 63. ročník (2013/2014), II. kolo, Z7-II-1

Tabulka na obrázku má obsahovat sedm přirozených čísel, přičemž v každém šedém poli má být součin čísel ze dvou bílých polí, která s ním sousedí. Čísla v bílých polích jsou navzájem různá a součin čísel v šedých polích je roven 525.

Jaký je součet čísel v šedých polích? Najděte všechny možnosti. (*E. Patáková*)

Řešení:

Bílá pole si označíme písmeny a, b, c, d. Šedá pole doplníme jako součiny sousedních bílých.

a	$a \cdot b$	b	$b \cdot c$	c	$c \cdot d$	d

Ze zadání víme, že součin čísel v šedých polích je 525. Dostáváme tak rovnici, kterou následně upravíme:

$$\begin{aligned} abbccd &= 525 \\ ab^2c^2d &= 525 \end{aligned}$$

Víme, že číslo 525 má být součin čtyř různých přirozených čísel, z něhož jsou dvě v součinu dvakrát. Rozložíme proto číslo 525 na součin prvočísel.

$$525 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

U takto rozloženého čísla si můžeme všimnout, že obsahuje již druhou mocninu. Další druhou mocninou, kterou potřebujeme do rovnice $ab^2c^2d = 525$, je 1^2, která však součin nijak neovlivňuje. Víme tedy, že čísla 1 a 5 musí být ve vnitřních bílých polích a čísla 3 a 7 musí být ve vnějších bílých polích. Máme tak následující dvě možnosti umístění (další dvě jsou osově souměrná) a určíme součet čísel v šedých polích:

3	3	1	5	5	35	7

- součet: $3 + 5 + 35 = 43$

3	15	5	5	1	7	7

- součet: $15 + 5 + 7 = 27$

Osově souměrná řešení:

7	7	1	5	5	15	3

- součet: $7 + 5 + 15 = 27$

7	35	5	5	1	3	3

- součet: $35 + 5 + 3 = 43$

Komentář: Někteří žáci mohou zprvu pochybovat, že 1^2 je další hledaná mocnina. Dále si mohou myslet, že osově souměrná řešení jsou dalšími plnohodnotnými řešeními. Jedná se o středně těžkou úlohu.

7. Kategorie Z8

7.1. 70. ročník (2020/2021), I. kolo, Z8-I-2

Na zahradě stály tři bedny s jablky. Celkem bylo jablek více než 150, avšak méně než 190. Maruška přemístila z první bedny do dvou dalších beden jablka tak, že se jejich počet v každé z těchto dvou beden oproti předchozímu stavu zdvojnásobil. Obdobným způsobem Marta přemístila jablka z druhé bedny do první a třetí. Nakonec Šárka podle stejných pravidel přemístila jablka z třetí bedny do první a druhé. Když přišel na zahradu Vojta, podivil se, že v každé bedně byl stejný počet jablek.

Kolik jablek bylo v jednotlivých bednách původně? (*L. Hozová*)

Řešení:

Ze zadaní víme, že celkový počet jablek S se dá vyjádřit jako $150 < S < 190$. Třetinu jablek, která mají být v bednách při příchodu Vojty označíme R. Platí:

$$S = 3R$$

$$150 < S < 190$$

Počáteční stav první bedny označíme jako x, druhé jako y a třetí jako z. Pro přehlednost provedené manipulace mezi bednami zapíšeme do tabulky. (Žák musí dát pozor při úpravě výrazů - možná záměna neznámých, špatně sečtené neznámé atd.).

	1. bedna	2. bedna	3. bedna
původně	x	y	z
Maruška	$x-y-z$	$2y$	$2z$
Marta	$2(x-y-z)$	$2y-(x-y-z)-2z=$ $2y-x+y+z-2z=$ $-x+3y-z$	$4z$
Šárka	$4(x-y-z)$	$2(-x+3y-z)$	$4z-2(x-y-z)-(-x+3y-z)=$ $4z-2x+2y+2z+x-3y+z=$ $-x-y+7z$
Vojta	R	R	R

Soustavu tří rovnic o třech neznámých si přepíšeme a upravíme:

$$\begin{array}{ll} 4(x-y-z) & = R \\ 2(-x+3y-z) & = R \\ -x-y+7z & = R \\ \hline 4x-4y-4z & = R \\ -2x+6y-2z & = R \\ -x-y+7z & = R\ /.2 \end{array}$$

Třetí rovnici vynásobíme dvěma, rovnice sečteme a vyjádříme z:

$$\begin{array}{ll} 4x-4y-4z & = R \\ -2x+6y-2z & = R \\ -2x-2y+14z & = 2R \\ \hline 8z & = 4R \\ z & = \dfrac{R}{2} \end{array}$$

Vyjádřené z dosadíme do dvou libovolných rovnic, tj. dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Vybíráme 1. a 2. rovnici.

$$\begin{array}{ll} 4x-4y-4\cdot\dfrac{R}{2} & = R \\ -2x+6y-2\cdot\dfrac{R}{2} & = R \end{array}$$

Druhou rovnici vynásobíme dvěma, rovnice sečteme a vyjádříme y:

$$\begin{array}{ll} 4x-4x-2R & = R \\ -2x+6y-R & = R \\ \hline 4x-4y & = 3R \\ -2x+6y & = 2R\ /\cdot 2 \\ \hline 4x-4y & = 3R \\ -4x+12y & = 4R \\ \hline 8y & = 7R \\ y & = \dfrac{7}{8}R \end{array}$$

Nyní do jedné z rovnic dosadíme y a z. Tím vyjádříme x:

$$4x - 4 \cdot \frac{7}{8}R - 4 \cdot \frac{R}{2} = R$$

$$4x - \frac{7}{2}R - 2R = R$$

$$4x = \frac{7}{2}R + 2R + R$$

$$x = \frac{7R + 4R + 2R}{8} = \frac{13}{8}R$$

Protože máme vyjádřeny neznámé x, y a z, můžeme vypočítat S. Víme, že R je dělitelné osmi a S je dělitelné třemi. Hledáme tedy číslo S, které je dělitelné 24 a zároveň platí:

$$150 < S < 190$$

$$S = 3R = x + y + z$$

Vydělíme číslo 150 a 190 číslem 24.

$$150 : 24 = 6{,}25$$

$$190 : 24 = 7{,}92$$

Jediný celý podíl, které lze najít mezi dělenci 150 a 190 je 7. Číslo S je tedy $24 \cdot 7 = 168$ a $R = 168 : 3 = 56$. Nyní můžeme vypočítat neznámé x, y, a z:

$$x = \frac{13}{8} \cdot 56 = 91$$

$$y = \frac{7}{8} \cdot 56 = 49$$

$$z = \frac{56}{2} = 28$$

Původně bylo v první bedně 91 jablek, ve druhé 49 jablek a ve třetí 28 jablek.

Komentář: Jedná se o středně těžkou úlohu. Problém při řešení úlohy může nastat při nepřehledném zapsání či špatné úpravě výrazu.

7.2. 61. ročník (2011/2012), I. kolo, Z8-I-4

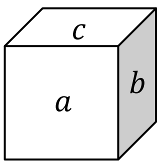
Na střed hrnčířského kruhu jsme položili krychli, která měla na každé své stěně napsáno jedno přirozené číslo. Těsně předtím, než jsme kruh roztočili, jsme ze svého stanoviště viděli tři stěny krychle a tedy pouze tři čísla. Jejich součet byl 42. Po otočení hrnčířského kruhu o 90º jsme ze stejného místa pozorovali tři stěny s čísly dávajícími součet 34 a po otočení o dalších 90º jsme stále z téhož místa viděli tři čísla o součtu 53.

1. Určete součet tří čísel, která z našeho místa uvidíme, až se kruh otočí ještě o dalších 90º.

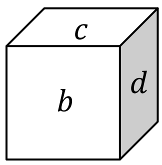
2. Krychle po celou dobu ležela na stěně s číslem 6. Určete maximální možný součet všech šesti čísel na krychli. (*L. Šimůnek*)

Řešení:

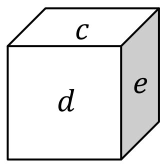
Ze zadání vychází následující rovnice:



$a + b + c = 42$



$b + d + c = 34$



$d + e + c = 53$

Z rovnice $b + d + c = 34$, která obsahuje vždy jednu společnou neznámou se zbývajícími rovnicemi, vyjádříme neznámou $c = 34 - b - d$ a dosadíme do dvou zbývajících rovnic:

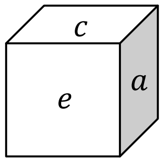
$$\begin{aligned} a + b + 34 - b - d &= 42 \\ a - d &= 42 - 34 \\ d &= a - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d + e + 34 - b - d &= 53 \\ e - b &= 53 - 34 \\ e &= b + 19 \end{aligned}$$

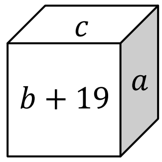
Poznámka: Autorské řešení se rovnou zaměřuje na vztah mezi čísly vzájemně rovnoběžných bočních stěn, tj. mezi prvními dvěma pootočeními je rozdíl 8 a tak platí $d = a - 8$; mezi druhým a třetím pootočením je rozdíl 19 a tak platí $e = b + 19$.

1. Určete součet tří čísel, která z našeho místa uvidíme, až se kruh otočí ještě o dalších 90º.

Po dalším pootočení o 90º nastane následující situace:



$e + a + c = ?$



$b + 19 + a + c = ?$

Víme ze zadání, že $a + b + c = 42$. Dosadíme tento vztah do rovnice $b + 19 + a + c = ?$ a dostaneme $42 + 19 = 61$. Součet těchto tří čísel je tedy 61.

2. Krychle po celou dobu ležela na stěně s číslem 6. Určete maximální možný součet všech šesti čísel na krychli.

1. způsob

Součet čísel na všech stěnách lze vyjádřit jako $a + b + c + d + e + 6$, do které dosadíme rovnice $a + b + c = 42$ a $d + e + c = 53$. Neznámou c však přičítáme již podruhé a dostáváme součet $42 + 53 - c + 6$.

Abychom získali maximální možný součet všech šesti čísel, zvolíme za neznámou c nejmenší možnou hodnotu, tj. $c = 1$. Dosadíme do součtu a získáme:

$$42 + 53 - 1 + 6 = 100$$

Součet na krychli může být maximálně 100.

2. způsob

Již jsme si vyjádřili, že platí $d = a - 8$ a $e = b + 19$. Dosadíme do součtu a dostaneme:

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e + 6 &= a + b + c + (a - 8) + (b + 19) \\ &= 2a + 2b + c + 17 \end{aligned}$$

Aby výše uvedený součet měl smysl, musí být $a \geq 9$, protože výraz $a - 8$ musí být přirozené číslo. Ze zadání máme rovnici $a + b + c = 42$. V součtu se neznámé a, b vyskytují právě dvakrát a neznámá c právě jednou. Abychom získali maximální možný součet všech šesti čísel, zvolíme za neznámou c jako v případě předchozího způsobu výpočtu nejmenší možnou hodnotu, tj. $c = 1$. Výraz $a + b$ je potom roven 41. Tento vztah dosadíme do součtu a získáme:

$$2a + 2b + c + 17 = 2 \cdot 41 + 1 + 17 = 100$$

Součet na krychli může být maximálně 100.

Komentář: Žák si musí uvědomit vztah mezi čísly vzájemně rovnoběžných bočních stěn. Jedná se o středně těžkou úlohu.

7.3. 66. ročník (2016/2017), II. kolo, Z8-II-1

Monika přemýšlí o čtyřmístném čísle, které má následující vlastnosti:

- součin dvou krajních číslic je 40,
- součin dvou vnitřních číslic je 18,
- rozdíl dvou krajních číslic je stejný jako rozdíl dvou vnitřních číslic,
- rozdíl myšleného čísla a opačně napsaného čísla (tj. čísla napsaného stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí) je největší možný.

Určete Moničino myšlené číslo. (*L. Hozová*)

Řešení:

Máme čtyřmístné číslo, jehož všechny číslice jsou přirozená čísla a nabývají hodnoty 1 až 9. Víme, že součin dvou krajních číslic je 40. Číselný rozklad čísla 40 je $2^3 \cdot 5$. jediná možnost jsou tedy číslice 5 a 8.

Dále víme, že součin dvou vnitřních číslic je 18. Číselný rozklad čísla 18 je $2 \cdot 3^2$. Existují tak dvě možnosti: číslice 2 a 9, číslice 3 a 6. Ze zadání známe další vlastnost hledaného čtyřmístného čísla - rozdíl dvou krajních číslic je stejný jako rozdíl dvou vnitřních číslic. Rozdíl dvou krajních číslic je $8 - 5 = 3$. Rozdíl dvou vnitřních číslic je $9 - 2 = 7$ nebo $6 - 3 = 3$. Jedinou možností vnitřních číslic je varianta 3 a 6.

Z již zjištěných číslic lze tak sestavit následující čtyřmístná čísla:

5368, 5638, 8365, 8635

Nyní zapíšeme rozdíl myšleného čísla a opačně napsaného čísla u všech možných variant myšleného čísla:

varianty	rozdíl čísel
5368	$5368 - 8635 = -3267$
5638	$5638 - 8365 = -2727$
8365	$8365 - 5638 = 2727$
8635	$8635 - 5368 = 3267$

Z výše uvedené tabulky je zřejmé, že Moniččino myšlené číslo je číslo 8635, neboť má největší možný rozdíl čísel.

Komentář: Žák může nejprve uvažovat čtyřmístné číslo zapsané pomocí neznámých jako $abcd$, ale touto úvahou nelze dojít ke správnému řešení. Jedná se o lehkou úlohu, která je však úměrná věku a schopnostem žáků.

7.4. 51. ročník (2001/2002), II. kolo, Z8-II-3

U ohně seděli náčelníci tří indiánských kmenů se třemi stejnými dýmkami. Měli válečnou poradu a kouřili. První z nich vykouří celou dýmku za deset minut, druhý za půl hodiny a třetí za hodinu. Jak si mají náčelníci mezi sebou měnit dýmky, aby se mohli radit co nejdéle. (*Bednářová*)

Řešení:

Údaje ze zadání si přehledně zapíšeme:

první náčelník .... 10 min

druhý náčelník .... půl hodiny, tj. 30 min

třetí náčelník .... hodina, tj. 60 min

1. způsob

Zjistíme, kolik dýmek vykouří každý náčelník za 60 minut:

první .... 6 dýmek

druhý.................................... 2 dýmky

třetí .... 1 dýmka

Víme, že za 60 minut vykouří tři náčelníci dohromady 9 dýmek. Vzhledem k tomu, že mají však k dispozici pouze 3, celkový možný čas porady je tak třetinový, tj. $60 : 3 = 20$ minut. Dýmku si pak musí měnit každých $\frac{20}{3}$ minut, aby každý náčelník kouřil každou dýmku stejný čas.

2. způsob

Délku schůzky, za kterou náčelníci vykouří všechny tři dýmky, si označíme jako s a vyjádříme:

první .... $\frac{s}{10}$

druhý.................................... $\frac{s}{30}$

třetí .... $\frac{s}{60}$

Když náčelníci jednají, vykouří dohromady tři dýmky. Tomu se rovná součet výše uvedených dob. Získáváme tak rovnici $\frac{s}{10} + \frac{s}{30} + \frac{s}{60} = 3$, kterou dále řešíme:

$$\frac{s}{10} + \frac{s}{30} + \frac{s}{60} = 3 \ /\cdot 60$$

$$\begin{aligned} 6s + 2s + s &= 180 \\ 9s &= 180 \\ s &= \frac{180}{9} \end{aligned}$$

$$s = 20 \text{ minut}$$

Porada může trvat maximálně 20 minut. Dýmku si pak musí měnit každých $\frac{20}{3}$ minut, aby každý náčelník kouřil každou dýmku stejný čas.

Poznámka: V případě tohoto způsobu řešení uvádí autorské řešení rovnici $\frac{x}{10} + \frac{x}{30} + \frac{x}{60} = 1$, kde neznámá x značí počet minut, po kterých si náčelníci podávají dýmku a celková doba porady je $3x$ minut.

Komentář: Je důležité si uvědomit, kolikrát je první a druhý náčelník rychlejší než náčelník třetí. Jedná se o lehkou úlohu.

8. Kategorie Z9

8.1. 56. ročník (2006/2007), I. kolo, Z9-I-1

Kolik šestimístných přirozených čísel má tu vlastnost, že součin jejich číslic je 750?

(*P. Tlustý*)

Řešení:

1. Řešení

Hledáme šestimístná přirozená čísla, která nabývají hodnoty 1 až 9. Nejprve si určíme ciferný součin čísla 750, tj. $2 \cdot 3 \cdot 5^3$. Dostáváme tak dvě možnosti kombinací těchto číslic:

$$750 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$750 = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Můžeme si všimnout, že oba možné rozklady vždy obsahují třikrát číslici 5. Proto budeme nejprve hledat možné kombinace číslic $1, 2, 3$ a $1, 1, 6$.

kombinace číslic $1, 2, 3$:	123	132	213	231	312	321
kombinace číslic $1, 1, 6$:	116	161	611			

Máme tedy celkem 9 různých kombinací, do kterých nyní vložíme zbývající tři číslice (jako příklad je použita kombinace 123, ale těchto kombinací je celkem 9, proto všechny výsledky násobíme devíti):

a) všechny číslice 5 jsou vedle sebe - čtyři možné způsoby uspořádání: před číslicemi, za první číslicí, za druhou číslicí, za všemi číslicemi

555123

155523

125553 $\quad 4 \cdot 9 = 36$ možností

123555

b) dvě číslice 5 jsou vedle sebe, třetí je před nimi

- samostatná číslice 5 na prvním místě šestimístného čísla

515523

512553 $\quad 3 \cdot 9 = 27$ možností

512355

- samostatná číslice 5 na druhém místě šestimístného čísla

  152553
  152355 $2 \cdot 9 = 18$ možností

- samostatná číslice 5 na třetím místě šestimístného čísla

  125355 $1 \cdot 9 = 9$ možností

c) dvě číslice 5 jsou vedle sebe, třetí je za nimi

- dvojice číslic 5 na prvním místě šestimístného čísla

  551523
  551253 $3 \cdot 9 = 27$ možností
  551235

- dvojice číslic 5 na druhém místě šestimístného čísla

  155253
  155255 $2 \cdot 9 = 18$ možností

- dvojice číslic 5 na třetím místě šestimístného čísla

  125535 $1 \cdot 9 = 9$ možností

d) všechny číslice 5 jsou samostatně - čtyři způsoby uspořádání

515253	první pětka před číslicí 1	
152535	první pětka za číslicí 1	
512535	první pětka před číslicí 1 a další až za číslicí 2	$4 \cdot 9 = 36$ možností
515235	první pětka před číslicí 1, druhá za ní a poslední za číslicí 3	

Nyní sečteme všechny nalezené kombinace šesticiferných čísel:

$$36 + 27 + 18 + 9 + 27 + 18 + 9 + 36 = 180 \text{ možností.}$$

2. Řešení

Vzhledem k tomu, že máme k dispozici 6 číslic, tak počet možností uspořádání je 6!. Protože číslo 750 má ciferní součet $2 \cdot 3 \cdot 5^3$ a tři čísla jsou tak stejná, zmenšuje se možný počet 3!krát, tj.

$$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Protože v rozkladu $750 = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ máme číslici 1 dvakrát a číslici 5 třikrát, je počet uspořádání:

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$$

Celkem je pak $120 + 60 = 180$ možností.

Komentář: Žák se může při řešení úlohy spokojit s několika základními řešeními a nehledat pak další - např. nevšimne si rozdílu mezi body b), c) a do celkového počtu možností započítá právě jedno z nich. Jedná se o středně těžkou úlohu.

8.2. 70. ročník (2020/2021), I. kolo, Z9-I-5

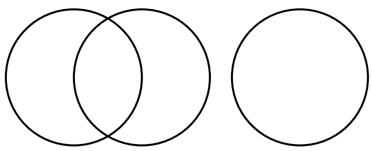
Na hřišti jsou nakresleny tři stejně velké kruhy, z nichž žádné dva nejsou totožné. Rozmístěte 16 dívek tak, aby v každém kruhu stálo 9 dívek.

Najděte alespoň osm podstatně různých rozmístění, tj. takových rozmístění, při kterých se nerozlišují dívky ani kruhy. (Záměna jednotlivých dívek, příp. celých kruhů s dívkami dává rozmístění, které není podstatně různé od původního.)

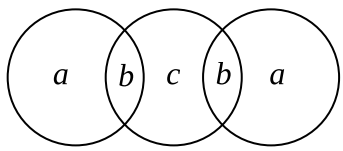
(*L. Hozová*)

Řešení:

Jako možná řešení by mohlo žáky napadnout, ale ani jedno nelze použít:

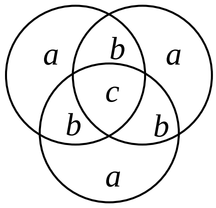


V jednom kruhu by muselo být 9 dívek a ve společné části zbývajících dvou kruhů také 9. Nelze použít, protože počet dívek je 16 a součet kruhů by byl 18.



Přestože lze vytvořit pomocí neznámých a, b a c tři rovnice ($a + b = 9$, $2b + c = 9$ a $2a + 2b + c = 16$), vypočítané kořeny nejsou celá čísla. Z tohoto důvodu nelze použít.

Ze zadání vychází, že všechny tři kruhy se musí překrývat. Je nutno použít Vennův diagram pro 3 množiny. Zvolíme tři neznámé a, b a c tak, že všechny tři kruhy budou mít stejné složení - tj. součet neznámých v každém kruhu lze vyjádřit jako $a + 2b + c = 9$:



Pomocí neznámých a, b a c lze vytvořit dvě rovnice.

$$a + 2b + c = 9$$

$$3a + 3b + c = 16$$

První rovnici odečteme od druhé.

$$\begin{array}{c} a + 2b + c = 9 \ /.\,(-1) \\ \underline{3a + 3b + c = 16} \\ -a - 2b - c = -9 \\ \underline{3a + 3b + c = 16} \\ 2a + b = 7 \end{array}$$

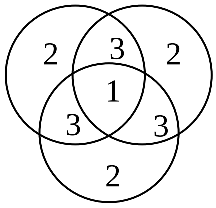
Vytvoříme uspořádané trojice pro $a = 1, 2, 3, 4$ (Vycházíme z rovnic $2a + b = 7$, $a + 2b + c = 9$ - tj. aby první rovnice byla řešitelná, musí být $a = 1, 2, 3, 4$.)

a	b	c
1	$b = 7 - 2 = 5$	$c = 9 - 1 - 10 = -2$ - nemá řešení
2	$b = 7 - 4 = 3$	$c = 9 - 2 - 6 = 1$
3	$b = 7 - 6 = 1$	$c = 9 - 3 - 2 = 4$
4	$b = 7 - 8 = -1$	nemá řešení

Z výše uvedené tabulky vyplývá, že c může být 1 nebo 4.

A) $c = 1$

- základní varianta:



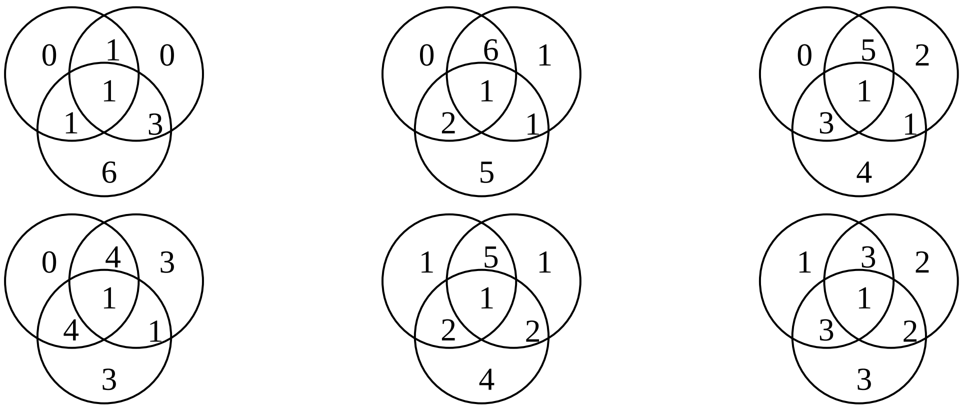
Ze základní varianty odvodíme vzorec, podle kterého nalezneme další řešení - tj. vytvoříme součty 3 čísel, které dohromady dávají 6.

$$3a = 6$$
$$3b = 9$$
$$c = 1$$

Možné varianty zapíšeme do tabulky - varianty s jiným pořadím sčítanců nepíšeme:

$0 + 6 + 0$	$1 + 4 + 1$	$2 + 2 + 2$ - základní varianta
$0 + 5 + 1$	$1 + 3 + 2$	
$0 + 4 + 2$		
$0 + 3 + 3$		

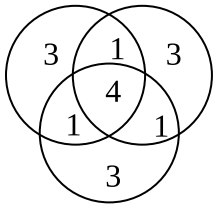
Nyní zakreslíme varianty do Vennova diagramu a dopočítáme zbylá pole tak, aby $3b = 9$.



Zjistili jsme, že pro $c = 1$ existuje sedm různých možností umístění dívek.

B) $c = 4$

- základní varianta:



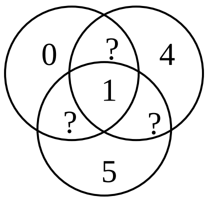
Ze základní varianty odvodíme vzorec, podle kterého nalezneme další řešení - tj. vytvoříme součty 3 čísel, které dohromady dávají 9.

$$3a = 9$$
$$3b = 3$$
$$c = 4$$

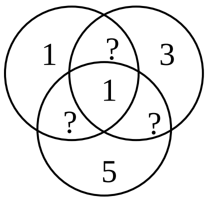
Možné varianty zapíšeme do tabulky - varianty s jiným pořadím sčítanců nepíšeme. Přestože má být součet tří čísel 9, největší možný sčítanec může být 5 - číslo c je 4 (je společné pro všechny 3 kruhy: $9 - 4 = 5$).

$0 + 5 + 4$	$1 + 5 + 3$	$2 + 5 + 2$	$3 + 3 + 3$ - základní varianta
	$1 + 4 + 4$	$2 + 4 + 3$	

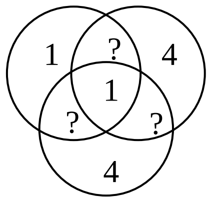
Nyní zakreslíme varianty do Vennova diagramu a dopočítáme zbylá pole tak, aby platilo $3b = 3$.



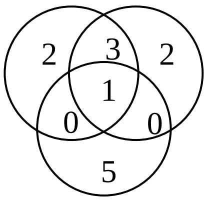
nelze - nevychází součet $3b = 3$

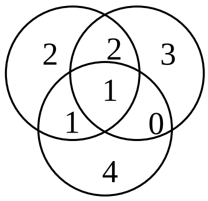


nelze - nevychází součet $3b = 3$



nelze - nevychází součet $3b = 3$





Zjistili jsme, že pro $c = 4$ existují 3 různé možnosti umístění dívek. Celkem tak existuje 10 možností umístění dívek do kruhů.

Komentář: Někteří žáci mohou mít problém s nalezením vzorce pro vytvoření dalších řešení. Jedná se o středně těžkou úlohu. Je obtížná hlavně na představivost.

8.3. 62. ročník (2012/2013), II. kolo, Z9-II-2

Na čistou tabuli jsme žlutou křídou napsali trojmístné přirozené číslo tvořené vzájemně různými nenulovými číslicemi. Pak jsme na tabuli bílou křídou vypsali všechna další trojmístná čísla, která lze získat změnou pořadí číslic žlutého čísla. Aritmetický průměr všech čísel na tabuli byl 370. Každé číslo menší než žluté jsme podtrhli. Podtržená čísla byla právě tři a jejich aritmetický průměr byl 205. Určete žluté číslo. (*L. Šimůnek*)

Řešení:

Máme trojmístné žluté číslo, které se skládá z číslic a, b, c, která jsou přirozená čísla a která nabývají hodnoty 1 až 9. Zároveň předpokládáme vztah $0 < a < b < c$. Vypíšeme si všechny kombinace těchto číslic:

$$\begin{array}{ccc} abc & bac & cab \\ acb & bca & cba \end{array}$$

Tyto čísla seřadíme podle vztahu $0 < a < b < c$ od největšího po nejmenší:

$$cba < cab < bca < bac < acb < abc$$

Ze zadání známe hodnotu aritmetického průměru všech těchto čísel. Abychom však mohli tyto čísla srovnávat, budeme číslice na místě jednotek násobit číslem 1, na místě desítek číslem 10 a na místě stovek číslem 100. Dostaneme tak rovnici:

$$\frac{100c + 10b + a + 100c + 10a + b + 100b + 10c + a + 100b + 10a + c + 100a + 10c + b + 100a + 10b + 100a + 10b + c}{6} = 370$$

$$\frac{222c + 222b + 222a}{6} = 370$$

$$
\begin{aligned}
222a + 222b + 222c &= 2220 \\
222 \cdot (a + b + c) &= 2220 \;/:222 \\
a + b + c &= 10
\end{aligned}
$$

Ze zadání vyplývá, že námi hledané číslo je označené jako bca. Víme také, že hodnota aritmetického průměrů třech nejmenších čísel bac, acb a abc je 205. Abychom opět mohli tyto čísla srovnávat, budeme číslice na místě jednotek násobit číslem 1, na místě desítek číslem 10 a na místě stovek číslem 100.

Dostaneme tak rovnici:

$$\frac{100b + 10a + c + 100a + 10c + b + 100a + 10b + c}{3} = 205$$

$$\frac{111b + 210a + 12c}{3} = 205$$

$$210a + 111b + 12c = 615$$

Takto jsme získaly celkem tři vztahy mezi neznámými a, b, c:

$$0 < a < b < c$$
$$a + b + c = 10$$
$$210a + 111b + 12c = 615$$

Nyní budeme vycházet ze vztahů $a + b + c = 10$ a $0 < a < b < c$. Vypíšeme všechny možnosti a zkusíme dosadit do rovnice $210a + 111b + 12c = 615$. Hodnoty dosazujeme za proměnnou a, protože je z neznámých a, b, c ta nejmenší.

a	b	c	dosazení do rovnice $210a + 111b + 12c = 615$
1	2	7	$210 + 222 + 84 \neq 615$ $516 \neq 615$ - nemá řešení
	3	6	$210 + 333 + 72 = 615$ $615 = 615$ - možné řešení
	4	5	$210 + 444 + 60 \neq 615$ $714 \neq 615$ - nemá řešení
2	3	5	$420 + 333 + 60 \neq 615$ $813 \neq 615$ - nemá řešení

Za proměnnou a můžeme dosazovat nejvýše číslo 2. Při vyšší hodnotě by rovnice $a + b + c = 10$ nedávala smysl. Z uvedené tabulky vyplývá, že úloha má jedno řešení, tj. $a = 1$, $b = 3$, $c = 6$.

Již víme, námi hledané číslo je označené jako bca. Žluté číslo je tedy číslo 361.

Poznámka: V autorském řešení jsou z odvozených vztahů $0 < a < b < c$, $a + b + c = 10$, $210a + 111b + 12c = 615$ jednoznačně určeny neznámé a, b, c.

Zapíšeme si všechny možnosti do tabulky:

$a \geq 3$	hodnota na levé straně rovnice $210a + 111b + 12c = 615$ je příliš velká a vztah $0 < a < b < c$ pak nemá smysl
$a = 2$	kvůli podmínce $210a + 111b + 12c = 615$ by pak muselo být $b \geq 3$, hodnota na levé straně této rovnice je pak příliš velká a vztah $0 < a < b < c$ pak nemá smysl
$a = 1$	splňuje všechny podmínky

Dosazením jediné přípustné hodnoty $a = 1$ do rovnic $a + b + c = 10$, $210a + 111b + 12c = 615$ pak dostáváme soustavu rovnic o dvou neznámých b, c.

$$\begin{aligned} 111b + 12c &= 405 \\ b + c &= 9 \end{aligned}$$

Druhou rovnici vyjádříme jako $b = 9 - c$ a dosadíme do první rovnice.

$$\begin{aligned} 111 \cdot (9 - c) + 12c &= 405 \\ 999 - 111c + 12c &= 405 \\ 99c &= 594 \end{aligned}$$

$$c = 6$$

Dopočítáme $b = 9 - c = 9 - 6 = 3$. Jediné řešení je $a = 1$, $b = 3$, $c = 6$. Hledané žluté číslo označené jako bca je tedy číslo 361.

Komentář: Je důležité si nejprve označit číslice hledaného čísla neznámými a, b, c. Jedná se o středně těžkou úlohu.

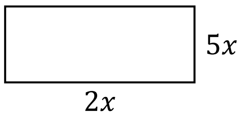
8.4. 65. ročník (2015/2016), III. kolo, Z9-III-1

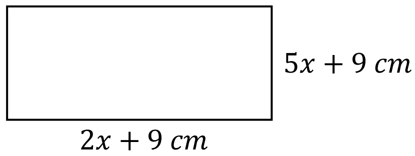
Obdélník má délky stran v poměru $2:5$. Prodloužíme-li všechny jeho strany o 9 cm, dostaneme obdélník, jehož délky stran jsou v poměru $3:7$. V jakém poměru budou délky stran obdélníku, který vznikne prodloužením všech stran o dalších 9 cm?

(*M. Petrová*)

Řešení:

Ze zadání vyplývá, že původní délky obdélníku můžeme zapsat jako $2x$ a $5x$ (viz znázornění). Po prodloužení obou stran o 9 cm jsou pak délky obdélníku $2x + 9$ a $5x + 9$.





poměr stran: $2 : 5$ poměr stran: $3 : 7$

Poměr nového prodlouženého obdélníku můžeme pak zapsat $\frac{2x+9}{5x+9} = \frac{3}{7}$. Tuto rovnici vyřešíme:

$$\frac{2x + 9}{5x + 9} = \frac{3}{7}$$

$$7 \cdot (2x + 9) = 3 \cdot (5x + 9)$$

$$14x + 63 = 15x + 27$$

$$x = 36 \text{ cm}$$

Hodnotu $x = 36$ dosadíme do vyjádření původního obdélníku:

$$2x = 2 \cdot 36 = 72 \text{ cm}$$

$$5x = 5 \cdot 36 = 180 \text{ cm}$$

Nyní vypočítáme délky stran obdélníku, který vznikne prodloužením všech stran o dalších 9 cm.

$$2x + 9 + 9 = 2x + 18 = 2 \cdot 36 + 18 = 90 \text{ cm}$$

$$5x + 9 + 9 = 5x + 18 = 5 \cdot 36 + 18 = 198 \text{ cm}$$

Vypočítané rozměry nového obdélníku jsou v poměru:

$$90 : 198 = 5 : 11$$

Komentář: Jedná se o lehkou úlohu, která je určena pro třetí kolo matematické olympiády, kde je čas na řešení úloh omezený.

9. Závěr

Cílem bakalářské práce je podrobně řešená sbírka vybraných dvaceti úloh matematické olympiády kategorie Z5-Z9. Každou úlohu jsem sama vypočítala a následně k ní napsala komentář, ve kterém hodnotím náročnost úlohy a v několika případech upozorňuji na možné problémy při řešení.

Sbírka úloh je určena žákům připravující se na matematickou olympiádu nebo jinou podobnou soutěž či pro učitele, kteří jim pomáhají s jejich přípravou. Některé úlohy mohou být využity i v běžné hodině matematiky.

Z každé kategorie jsem vybrala čtyři úlohy, kde vždy jedna úloha je z I. kola aktuálního 70. ročníku matematické olympiády a kde vždy jedna úloha je úlohou, se kterou jsem se setkala jako řešitel matematické olympiády.

Je zřejmé, že náročnost úloh v jednotlivých kategoriích závisí na tom, ze kterého kola soutěže jsou vybírána. (ve II. a III. kole je stanovený časový limit, ale v I. kole není)

9.1. Shrnutí

Z kategorie Z5 jsem vybrala tři úlohy z I. kol a jednu úlohu z II. kola. Z kategorií Z6-Z8 jsem vybrala dvě úlohy z I. kola a dvě úlohy z II. kola. Z kategorie Z9 jsem vybrala dvě úlohy z I. kola, jednu úlohu z II. kola a jednu úlohu z III. kola.

Celkem dvanáct úloh sbírky je zaměřeno na logický postup řešení a osm úloh je zaměřeno na analytický postup řešení.

kategorie	1. úloha	2. úloha	3. úloha	4. úloha
Z5	logické řešení	analytické řešení	logické řešení	logické řešení
Z6	logické řešení	logické řešení	logické řešení	analytické řešení
Z7	logické řešení	logické řešení	analytické řešení	logické řešení
Z8	analytické řešení	analytické řešení	logické řešení	logické řešení
Z9	logické řešení	analytické řešení	analytické řešení	analytické řešení

Tabulka č. 3 - Typy řešení

Sbírka obsahuje celkem dvě lehké, šest středně těžkých, žádnou těžkou analytickou úlohu a celkem pět lehkých, šest středně těžkých a jednu těžkou logickou úlohu.

kategorie	1. úloha	2. úloha	3. úloha	4. úloha
Z5	lehká	lehká	středně těžká	lehká
Z6	středně těžká	středně těžká	těžká	středně těžká
Z7	středně těžká	lehká	středně těžká	středně těžká
Z8	středně těžká	středně těžká	lehká	lehká
Z9	středně těžká	středně těžká	středně těžká	lehká

Tabulka č. 4 - Náročnosti úloh

Autoři úloh: (od nejčastějšího po méně častého autora, při stejném počtu řazeno podle abecedy)

jméno autora	počet úloh
L. Hozová	6
S. Bednářová	3
M. Volfová	3
M. Petrová	2
L. Šimůnek	2
M. Dillingerová	1
M. Mach	1
E. Patáková	1
P. Tlustý	1

Tabulka č. 5 - Autoři úloh

10.Použitá literatura a zdroje

1. DIVÍŠEK, Jiří. 1989. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ.* Praha : SPN, 1989. ISBN 80-04-20433-3.
2. MO. 2017. Termíny 67. ročníku MO (2017/18). *Matematická olympiáda.* [Online] 2017. [Citace: 19. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/media/3528998/info-zet.pdf.
3. MO. 2018. Termíny konání soutěžních kol olympiád pro školní rok 2018/2019. *Matematická olympiáda.* [Online] 2018. [Citace: 19. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/media/4989029/info-abcp.pdf.
4. MO. 2001/2002. 51. ročník. *Matematická olympiáda.* [Online] 2001/2002. [Citace: 20. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/51-rocnik-01-02.
5. MO. 2004/2005. 54. ročník. *Matematická olympiáda.* [Online] 2004/2005. [Citace: 20. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/54-rocnik-04-05.
6. MO. 2006/2007. 56. ročník. *Matematická olympiáda.* [Online] 2006/2007. [Citace: 21. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/56-rocnik-06-07.
7. MO. 2008/2009. 58. ročník. *Matematická olympiáda.* [Online] 2008/2009. [Citace: 20. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/58-rocnik-08-09.
8. MO. 2009/2010. 59. ročník. *Matematická olympiáda.* [Online] 2009/2010. [Citace: 20. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/59-rocnik-09-10.
9. MO. 2010/2011. 60. ročník. *Matematická olympiáda.* [Online] 2010/2011. [Citace: 20. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/60-rocnik-10-11.

10. MO. 2011/2012. 61. ročník. *Matematická olympiáda.* [Online] 2011/2012. [Citace: 20. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/61-rocnik-11-12.

11. MO. 2012/2013. 62. ročník. *Matematická olympiáda.* [Online] 2012/2013. [Citace: 20. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/62-rocnik-12-13.

12. MO. 2013/2014. 63. ročník. *Matematická olympiáda.* [Online] 2013/2014. [Citace: 20. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/63-rocnik-13-14.

13. MO. 2015/2016. 65. ročník. *Matematická olympiáda.* [Online] 2015/2016. [Citace: 20. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/65-rocnik-15-16.

14. MO. 2016/2017. 66. ročník. *Matematická olympiáda.* [Online] 2016/2017. [Citace: 20. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/66-rocnik-16-17.

15. MO. 2020/2021. 70. ročník. *Matematická olympiáda.* [Online] 2020/2021. [Citace: 20. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/70-rocnik-20-21.

16. ŠIMŠA, Jaromír. 2017. Vyhodnocování výsledků krajských a ústředních kol MO. *Matematická olympiáda.* [Online] 27. Březen 2017. [Citace: 19. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/media/41276/pokyny17.pdf.

17. URBAN, Michal. 2016. Organizace MO. *Matematická olympiáda.* [Online] 1. Srpen 2016. [Citace: 19. Březen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/media/41005/orgradmo.pdf.