

Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2024

Magdaléna Ramešová

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

Sbírka řešených středoškolských úloh z
matematiky určená především pro technické
studijní obory

Bakalářská práce

Autor: Magdaléna Ramešová
Studijní program: B0114A17 Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání,
Základy techniky se zaměřením na vzdělávání
Vedoucí práce: doc. RNDr. PaedDr. Pavel Trojovský, Ph.D.



Zadání bakalářské práce

Autor: Magdaléna Ramešová

Studium: S21MA029BP

Studijní program: B0114A170006 Matematika se zaměřením na vzdělávání

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání, Základy techniky se zaměřením na vzdělávání

Název bakalářské práce: **Sbírka řešených středoškolských úloh z matematiky určená především pro technické studijní obory**

Název bakalářské práce: A collection of solved high school problems in mathematics intended primarily for technical fields

AJ:

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Cíl práce: Vytvořit ucelenou sbírku řešených a neřešených úloh s vazbou na aplikovatelnost v technických oborech středních škol. Všechny úlohy budou vždy precizně textově naformulovány a většinou doprovázeny obrázkem s technickým popisem problému. Následně budou úlohy vyřešeny a nebo pouze doplněn výsledek úlohy.

Struktura práce:

1. Porovnání různých českých učebnic matematiky a sbírek úloh z hlediska rozsahu, obtížnosti atd. ohledně tematiky "aplikované technické úlohy" (např. všech, které vyšly po roce 1945).
2. Sbírka kompletně vyřešených úloh (řazená vzestupně dle obtížnosti pro jednotlivé ročníky technických škol – bylo by vhodné užít řazení i s vazbou na strukturu témat v RVP SOV viz <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-stredniho-odborneho-vzdelavani-rvp-sov/>).
3. Sbírka neřešených úloh (vždy jen výsledek úlohy).

1. České středoškolské učebnice a sbírky úloh po roce 1945.
2. Články věnující se oblasti technické matematiky v českých časopisech pro učitele (např. časopisy "Učitel matematiky", "Matematika-Fyzika-Informatika", "Rozhledy matematicko-fyzikální" a "Journal of Technology and Information Education").
3. Příspěvky na seminářích a konferencích v tématice zadání BP.

Zadávací pracoviště: Katedra matematiky,
Přírodovědecká fakulta

Vedoucí práce: doc. RNDr. PaedDr. Pavel Trojovský, Ph.D.

Oponent: Ing. Mgr. Eva Trojovská, Ph.D.

Datum zadání závěrečné práce: 4.1.2023

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne

Magdaléna Ramešová

Poděkování:

Ráda bych tímto vyjádřila upřímné poděkování svému vedoucímu práce doc. RNDr. PaedDr. Pavlovi Trojovskému, Ph.D. za vstřícnost, trpělivost, jeho cenné rady a odborné vedení během zpracování mé bakalářské práce.

Anotace

RAMEŠOVÁ, M. Sbírka řešených středoškolských úloh z matematiky určená především pro technické studijní obory. Hradec Králové, 2024.

Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce Pavel Trojovský. 50 s.

Bakalářská práce se zaměřuje na sestavení sbírky řešených a neřešených úloh z matematiky pro střední odborné školy, avšak zahrnuje také porovnání a analýzu učebnic a sbírek úloh z matematiky pro střední školy. Teoretická část analyzuje dostupné knihy, zejména s ohledem na aplikované technické úlohy, a snaží se porovnat jejich obsah z hlediska rozsahu, obtížnosti a relevance pro technické obory. Praktická část obsahuje škálu úloh, které mají studentům poskytnout praktické zkušenosti s matematikou v technických oborech. Cílem práce je podpořit aplikované učení matematiky a přispět k lepší přípravě studentů na technické vzdělání na středních školách.

Klíčová slova

matematika, sbírka úloh z matematiky, matematika v praxi, učebnice matematiky, řešení technických úloh, strojírenství, elektrotechnika

Annotation

RAMEŠOVÁ, M. *A collection of solved high school problems in mathematics intended primarily for technical fields*. Hradec Králové, 2024. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Pavel Trojovský. 50 p.

The bachelor's thesis focuses on the compilation of a collection of solved and unsolved mathematics problems for secondary vocational schools, but also includes a comparison and analysis of textbooks and collections of mathematics problems for secondary schools. The theoretical part analyses the available books, especially with regard to applied engineering problems, and tries to compare their content in terms of scope, difficulty and relevance to engineering disciplines. The practical part contains a range of problems designed to give students practical experience of mathematics in technical fields. The aim of the work is to promote applied mathematics learning and to contribute to better preparing students for technical education in secondary schools.

Keywords

mathematics, collection of mathematics problems, mathematics in practice, mathematics textbooks, technical problem solving, mechanical engineering, electrical engineering

Seznam použitých zkratk

SŠ	Střední škola
ST	Strojnické tabulky
SOU	Střední odborné učiliště
SOŠ	Střední odborná škola
SPŠ	Střední průmyslová škola
RVP	Rámcově vzdělávací program
SZTŠ	Střední zemědělská technická škola
MŠMT	Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy
RVP SOŠ	Rámcově vzdělávací program pro střední odborné školy
23-41-M01	Kód maturitního oboru Strojírenství
26-41-M01	Kód maturitního oboru Elektrotechnika

Seznam použitých symbolů

R	elektrický odpor	[Ω]
R_c	celkový elektrický odpor	[Ω]
I	elektrický proud	[A]
U	elektrické napětí	[V]
$\sigma_{DOV,t}$	dovolené napětí v tahu	[MPa]
F	zatěžující síla	[N]
D	vnější průměr	[mm ²]
d	vnitřní průměr	[mm ²]
r	poloměr	[mm]
S	obsah průřezu	[mm ²]
Δl	poměrné prodloužení	[mm]
l_0	původní délka	[mm]
l	délka	[mm]
φ_c	úhel zkroucení	[°]
M_k	kroučící moment	[Nmm]
E	modul pružnosti v tahu	[MPa]
J_P	polární moment průřezu	[mm ⁴]
G	modul pružnosti ve smyku	[MPa]
$\tau_{DOV,k}$	dovolené napětí v krutu	[MPa]
f	součinitel smykového tření	[–]
M_B	budící moment	[Nmm]
α	úhel opásání	[°]
m	modul ozubeného kola	[mm]
n	počet otáček	[/s]
z	počet zubů	[–]
t	čas	[s]
Q	tíha zatěžujícího břemene	[N]
R_m	pevnost v tahu	[MPa]
$\sigma_{DOV,o}$	dovolené napětí v ohybu	[MPa]
V	objem	[mm ³]
ρ	hustota	[kg · m ⁻³]
m	hmotnost	[kg]
o	obvod	[mm]
k	míra bezpečnosti	[–]

I přesto, že základní jednotkou délky v soustavě SI je metr (m), ve strojírenství se však užívá jako základní jednotka 1 milimetr (mm), [14]. Proto seznam použitých symbolů uvádíme v jednotkách, se kterými se v technických oborech nejčastěji čtenář může setkat a se kterými budeme pracovat v praktické části.

Obsah

Úvod	9
Rozbor učebnic a sbírek úloh z matematiky pro střední odborné školy	10
1.1 Učebnice základů matematiky pro dělníky a techniky z praxe.....	12
1.2 Sbírka úloh z matematiky pro SPŠ a SZTŠ.....	13
1.3 Sbírka úloh z matematiky: Příručka pro přípravu na vysokou školu.....	14
1.4 Zábavná matematika	15
1.5 Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 1. část.....	16
1.6 Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 2. část.....	17
1.7 Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Maturitní minimum.....	18
1.8 Matematika polopatě	19
1.9 Odmaturuj! z matematiky 1	20
1.10 Sbírka úloh z matematiky pro SOU a SOŠ	21
2. Sbírka řešených a neřešených úloh z matematiky	24
2.1 Operace s čísly a jejich výrazy	25
2.1.1 Řešené úlohy	25
2.1.2 Neřešené úlohy.....	27
2.2 Rovnice a nerovnice.....	28
2.2.1 Řešené úlohy	28
2.2.2 Neřešené úlohy.....	30
2.3 Funkce a jejich užití	31
2.3.1 Řešené úlohy	31
2.3.2 Neřešené úlohy.....	36
2.4 Goniometrie a trigonometrie.....	37
2.4.1 Řešené úlohy	37
2.4.2 Neřešené úlohy.....	41
2.5 Planimetrie a stereometrie.....	41
2.5.1 Řešené úlohy	41
2.5.2 Neřešené úlohy.....	45
2.6 Analytická geometrie	47
2.6.1 Řešené úlohy	47
2.6.2 Neřešené úlohy.....	51
2.7 Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika	52
2.7.1 Řešené úlohy	52
2.7.2 Neřešené úlohy.....	54
3. Závěr	55
Seznam použité literatury	56
Seznam obrázků	58
Seznam tabulek	58

Úvod

Technické vzdělávání na středních odborných školách je klíčovým pilířem přípravy mladých lidí ke vstupu do moderního průmyslu. I přes existenci široké škály učebnic a sbírek úloh z matematiky pro střední školy a maturitní obory je dostupnost kvalitních materiálů přizpůsobených potřebám technicky zaměřených studentů stále omezená.

Jedním z hlavních důvodů vzniku této bakalářské práce je nezbytná spojitost matematiky a technických předmětů ve středoškolském vzdělávání. Významným motivačním prvkem je zajištění, aby studenti středních odborných škol měli k dispozici více praktických matematických úloh relevantních pro technické obory. A přestože mnozí studenti rozumí matematickým pojmům a jejich použití v matematických algoritmech, jsou rozrušeni, když se pokouší své znalosti aplikovat v odborných předmětech. Tato omezení často způsobují problémy při studiu technických oborů a také pokles schopnosti studentů přenášet své matematické znalosti a dovednosti do praktických příkladů.

V této bakalářské práci jsme se proto zaměřili na vytvoření sbírky řešených a neřešených úloh z matematiky technického zaměření, která by sloužila jako užitečný zdroj inspirativních úloh pro studenty a učitele středních odborných škol. Nicméně samotným cílem této bakalářské práce je nejen poskytnout studentům relevantní a praktické úlohy, se kterými se mohou setkat v rámci svých odborných předmětů, ale také porovnání a zhodnocení dostupných učebnic a sbírek úloh, které aplikují matematiku na příklady s technickým zaměřením. Tímto způsobem se snažíme identifikovat obsahové nedostatky vybraných knih, zejména v oblastech reálných a praktických problémů. Tyto nedostatky jsou klíčové pro upevnění si učiva a úspěšné absolvování odborných předmětů na SŠ.

Rozbor učebnic a sbírek úloh z matematiky pro střední odborné školy

Rozbor a analýza učebnic a sbírek úloh z matematiky, kterou provádíme v teoretické části bakalářské práce spočívá v porovnání deseti knih, které se zabývají středoškolskou matematikou, a z nichž pět je přímo určených pro SOŠ a SOU. Pro porovnání jsme vybrali i knihy, které nemají prioritní zaměření pro odborné střední školy. Důvodem je především to, že i přesto, že tímto chceme studentům a učitelům středních škol usnadnit vhodný výběr podkladů do hodin matematiky a inspirovat je, že i v hodinách matematiky se studenti mohou vzdělávat zároveň i v jiných odvětvích ve svém oboru, budou také muset studenti absolvovat maturitní zkoušku z matematiky, která obsahuje typy příkladů naopak bez technického zaměření. A proto jsme zvolili i knihy, které nejsou doporučené především středním odborným školám.

Hned po přečtení tohoto úvodního textu, čtenář nalezne detailní tabulku (Tab. 1), která poskytuje přehledné informace o jednotlivých učebnicích a sbírkách úloh z matematiky, včetně data vydání a schválení Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky. Pokud byla některá z učebnic či sbírek úloh schválena, nalezne ji čtenář vyznačenou šedým zvýrazněním.

Porovnání je u všech knih stejné. Prvně jsme o knize napsali krátký souhrn, který čtenáře s knihou mírně seznámí. Dále jsme shrnuli, jak je kniha strukturovaná a jak se v ní teoreticky orientovat, jedná se o část textu „Struktura“. Poté jsme u knih, ve kterých jsme našli užitečné příklady s technickým zaměřením vypsali oblasti a typy příkladů, které čtenáři mohou být užitečné právě svým „Technickým zaměřením“. Avšak další částí porovnání, kterou jsme tentokrát uvedli u všech knih jsou „Matematické oblasti“, ke kterým jsme vytvořili tabulky (Tab. 2, Tab. 3), díky kterým by se čtenář měl lépe orientovat, jaké všechny matematické oblasti jednotlivá kniha obsahuje. Závěrečným odstavcem je „Zhodnocení“, ve kterém jsme se snažili uvést, co dělá každou knihu jedinečnou a proč jsou či naopak nejsou relevantní k využití během hodin matematiky na středních odborných školách.

Tab. 1 Bibliografické údaje učebnic a sbírek úloh z matematiky pro SŠ

KNIHA	AUTOR	ROK VYDÁNÍ	NAKLADATELSTVÍ	SCHVÁLENÍ MŠMT ČR
<i>Učebnice základů matematiky pro dělníky a techniky z praxe</i>	B. DOBROVOLNÝ	1946	Josef Hokr	NE
<i>Sbírka úloh z matematiky pro SPŠ a SZTŠ</i>	E. KRIEGEL-STEIN et. kol.	1965	Státní pedagogické nakladatelství	ANO, dne 18.12.1964
<i>Sbírka úloh z matematiky: Příručka pro přípravu na vysokou školu</i>	M. ČERMÁK A. KAMARÝT H. KOŘÍNKOVÁ	1967	Státní nakladatelství technické literatury	NE
<i>Zábavná matematika</i>	Š. NOVOVESKÝ K. KRIŽALKOVIČ I. LEČKO	1974	Státní pedagogické nakladatelství	NE
<i>Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 1. část</i>	F. JIRÁSEK K. BRANIŠ S. HORÁK M. VACEK	1986	Prometheus	ANO, dne 04. 02. 1985
<i>Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 2. část</i>	F. JIRÁSEK K. BRANIŠ S. HORÁK M. VACEK	1989	Státní pedagogické nakladatelství	ANO, dne 07. 03. 1989
<i>Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Maturitní minimum</i>	J. KUBÁT D. HRUBÝ J. PILGR	1996	Prometheus	NE
<i>Matematika polopatě</i> https://www.matweb.cz/	L. HAVRLANT	2006	Webová stránka	NE
<i>Odmaturuj! z matematiky 1</i>	P. ČERMÁK P. ČERVINKOVÁ	2007	Didaktis	NE
<i>Sbírka úloh z matematiky pro SOU a SOŠ</i>	M. HUDCOVÁ, L. KUBIČÍKOVÁ	2007	Prometheus	NE

1.1 Učebnice základů matematiky pro dělníky a techniky z praxe

Tato učebnice základů matematiky se výrazně odlišuje od ostatních knih, které zde budou zmíněny. Je především určena studentům SOU. Obsahuje komplexní výklad celého základního matematického učiva, který je doplněn 60 obrázky. Zabývá se například změnou zápisu násobení čísel z „ \times “ na „ \cdot “, počítáním se zápornými čísly, operacemi se zlomky a používáním úhломěru. Důležitým prvkem jsou i příklady vyžadující použití logaritmického pravítka.

Struktura:

Učebnice dílenské matematiky je rozdělena do 54 kapitol. Značná část příkladů je podrobně řešena, avšak některé kapitoly obsahují pouze správné výsledky příkladů bez podrobných postupů. Obsah učebnice není pouze z matematických oblastí, ale zahrnuje i témata „význam matematiky pro dělníka“, „plánování výroby“ či „výpočet prodejní ceny“.

Technická zaměření:

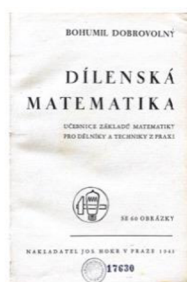
- **Výpočty měrné váhy¹ a objemu těles:** Příklady jsou odlišné v typu tělesa, jednou se jedná o výpočet váhy dutého litinového válce, jindy zase hřídele či odlitku.
- **Výpočty kuželovitosti:** Nachází se zde příklady, ve kterých se zjišťuje povrch kuželovitosti či druhý průměr kužele.
- **Převody u řemenic a ozubených kol:** Příklady na výpočet průměru hnacího ozubeného kola, rychlost hnané řemenice či například počet zubů na ozubeném kole.
- **Výpočty řezné rychlosti:** Hodnoty řezné či obvodové rychlosti jsou k nalezení v ST, ale určitě není zbytečné si je zkusit propočítat.
- **Příklady z praxe:** V této kapitole si čtenář můžete vypočítat zdvih pístu parního stroje, rychlost řemene, práci řemenice či například nosnost tyče.

Matematická témata:

- | | |
|-------------------------|------------------|
| I. Teorie čísel | IV. Planimetrie |
| II. Rovnice a nerovnice | V. Trigonometrie |
| III. Funkce | VI. Stereometrie |

Zhodnocení:

Jak už jsme výše zmiňovali tato učebnice je svým způsobem ojedinelá. Obsahuje opravdu z drtivé většiny jen příklady s technickým zaměřením. Ano, jedná se o středoškolskou matematiku, ale spíše obsah učebnice zabíhá do předmětu fyziky a konkrétně do oblasti mechaniky. Určitě bychom tuto učebnici doporučili studentům a učitelům na SOU a SOŠ jako inspirativní materiál a prostředek pro obohacení výuky. Každý čtenář v ní nalezne překvapivé prvky, které mohou přispět k oživení výuky a prohloubení porozumění „dílenské matematice“.



Obr. 1 Učebnice základů matematiky pro dělníky a techniky z praxe, vlastní

¹ V současném kontextu se měrná váha interpretuje jako hustota.

1.2 Sbírka úloh z matematiky pro SPŠ a SZTŠ

I přesto, že sbírka odráží svůj historický původ v odkazech na používání logaritmických pravítek a nomogramů, domníváme se, že bude bezpochyby svým obsahem velice přínosná studentům a jejich učitelům. Kniha je určena především studentům středních průmyslových a zemědělských škol, a přesně to se taky odráží v typech příkladů.

Struktura:

Sbírka úloh je rozčleněna do 23 kapitol a vyniká svou koncepcí, která se zaměřuje pouze na neřešené příklady. U příkladů, které si lze „vizuálně představit“ je doplněn obrázek či náčrt. Výsledky ke všem úlohám jsou k dispozici na konci knihy. Sbírka obsahuje také oblasti vyšší matematiky, a to diferenciální a integrální počet.

Technická zaměření:

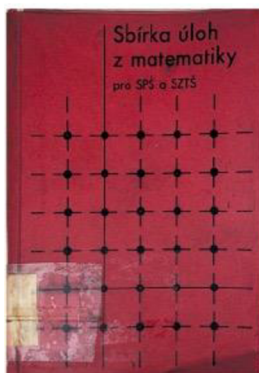
- **Slovní úlohy:** V kapitolách „opakování a prohlubování učiva“, „lineární rovnice a nerovnice“ a „logaritmy“ čtenář může nalézt velké množství úloh se zaměřením na chemii, zemědělství a strojírenství. Jedná se například o výpočet napětí v tyči, prodloužení tyče, účinnost převodu, ztráty gramů vyžháním, procentového složení kyseliny sírové či rychlosti vytékající kapaliny.
- **Strojírenské výpočty:** Výpočet šířky drážky ozubeného kola, průměr kotoučových nůžek, celkového tlaku v zubech ozubeného kola, délku řemene, průměr roztečné kružnice či výpočty obsahů neobvyklých ploch jsou k dispozici v kapitole „trigonometrie pravoúhlého trojúhelníka a obsahy rovinných obrazců“.

Matematická témata:

I. Operace s čísly	VI. Trigonometrie
II. Algebraické a číselné výrazy	VII. Stereometrie
III. Rovnice a nerovnice	VIII. Analytická geometrie
IV. Funkce	IX. Posloupnosti
V. Planimetrie	

Zhodnocení:

Celkově lze tuto sbírku úloh považovat za cenný nástroj pro studenty a učitele technických oborů na středních školách. Jako nevýhodu lze uvést absenci postupů řešení, což může čtenáře odradit. Nicméně pro učitele představuje skvělý zdroj inspirace a podkladů pro hodiny matematiky. Sbírka umožňuje žákům získat přehled o tom, že tyto typy příkladů nemusejí být použity pouze na hodinách odborných předmětů, ale mohou být součástí i výuky matematiky, přinášejíc nové metody a postupy řešení.



Obr. 2 Sbírka úloh z matematiky pro SPŠ a SZTŠ, vlastní

1.3 Sbírka úloh z matematiky: Příručka pro přípravu na vysokou školu

Analýzovali jsme druhé vydání, které má 580 stran, 326 obrázků a shrnuje ty nejdůležitější a nejpoužívanější definice, věty, a vzorce z oborů algebry, geometrie a vyšší matematiky. Tato sbírka úloh je především určena studentům výběrových a odborných středních škol, dále posluchačům vysokých škol technických a také těm, kteří během studia či své praxe volně používají základní oblasti matematiky.

Struktura:

Sbírka úloh je rozdělena do sedmi kapitol, z nichž každá přináší:

- A) přehled nejdůležitějších vzorců a vztahů,
- B) řešené příklady,
- C) cvičení, ke kterým jsou dostupné výsledky,

Kapitoly s řešenými příklady obsahují podkapitoly, které zajišťují hlubší pokrytí konkrétních oblastí matematiky, jsou velice zřetelně a pečlivě zkonstruovány a u vhodných kapitol jsou doplněny i obrázky a grafy.

Technická zaměření:

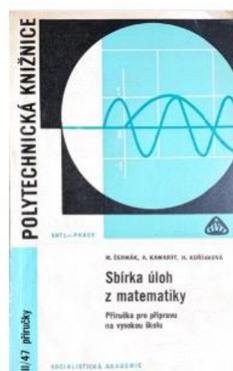
- **Výpočty obsahu a obvodu rovinných útvarů:** Příklady zahrnují výpočty obsahu mezikruží, velikosti poloměru vnější/ vnitřní kružnice mezikruží či například délky řemene u řemenových převodů. Příklady kladou důraz na praktické využití ve stavebnictví a strojním inženýrství.
- **Využití goniometrických funkcí:** Ve sbírce čtenář může nalézt, jak použít goniometrické funkce k získání chybějících údajů či k výpočtu výšky kruhového mostního oblouku.

Matematická témata:

- | | |
|------------------------------|----------------------|
| I. Operace s čísly | V. Stereometrie |
| II. Rovnice a nerovnice | VI. Kombinatorika |
| III. Planimetrie | VII. Pravděpodobnost |
| IV. Kryptografie a šifrování | VIII. Posloupnosti |

Zhodnocení:

I přesto, že tato sbírka úloh z matematiky obsahuje příklady s technickým zaměřením pouze zřídka, doporučili bychom ji studentům SŠ například k samostudiu či opravdu k přípravě na maturitu z matematiky nebo přijímacím zkouškám na vysokou školu. Sbírka je velice nápaditě zpracovaná a stručné, ale výstižné shrnutí na začátku každé nové matematické oblasti je za nás velikým plusem.



Obr. 3 Sbírka úloh z matematiky: Příručka pro přípravu na vysokou školu, vlastní

1.4 Zábavná matematika

Pro zpestření teoretické části jsme vybrali k posouzení knihu, která je určena jak pro studenty gymnázií, tak studenty středních odborných škol. Tato kniha obsahuje úlohy různých náročností, některé dokonce přesahují úroveň osnov pro střední školy. Autoři knihy také uvádějí, že se čtenář může dostat k úloze, která nemá matematické řešení. Cílem této knihy je ve studentech probudit zájem o matematiku a zábavnou formou vysvětlit a procvičit různé oblasti ze středoškolské matematiky.

Struktura:

Kniha je zpracována do devíti kapitol, ačkoliv názvy kapitol čtenáři nemusí vždy napovědět o jakou oblast matematiky se jedná, ze samotného obsahu to lze vyčíst. Úlohy v knize jsou neřešené, nicméně výsledky jsou dostupné na konci knihy včetně uvedeného postupu. Některé z úloh jsou doplněny ilustracemi případně grafy či tabulkami.

Matematická témata:

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------|
| I. Operace s čísly | V. Funkce |
| II. Rovnice a nerovnice | VI. Statistika |
| III. Číselné a algebraické výrazy | VII. Posloupnosti |
| IV. Pravděpodobnost | VIII. Analytická geometrie |

Zhodnocení:

Tuto poutavou knihu plnou zábavné a okouzující matematiky vřele doporučujeme každému učiteli a zvědavému studentovi, který se chce rozvíjet nevídanou formou. Kniha se sice nezaměřuje na cvičení s technickým zaměřením, nicméně věříme, že každý čtenář zde najde úlohy, které jsou vhodné a dostatečně obtížné pro využití v hodinách matematiky na středních školách či k samostudiu.



Obr. 4 Zábavná matematika, vlastní

1.5 Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 1. část

Tato sbírka úloh z matematiky je přednostně vytvořena pro 1. a 2. ročníky středních odborných škol a učilišť. Ve sbírce dominují základy matematiky pro střední školy, přičemž několik příkladů má praktickou aplikaci. Výjimečným prvkem jsou "vývojové diagramy", což je zajímavý prvek, který představuje nový pohled na vizualizaci matematických konceptů.

Struktura:

Sbírka úloh je rozvrhnutá do jedenácti kapitol, každá s obsahem strukturovaným do několika podkapitol. Pro každou část je poskytnut stručný teoretický přehled. Řešené příklady jsou řazeny dle rostoucí obtížnosti, a stejně tak je postupováno u neřešených úloh, přičemž výsledky k nim jsou uvedeny v hranatých závorkách ihned za textem úlohy. Obtížnější úlohy jsou označeny hvězdičkou před jejím číslem.

Technická zaměření:

- **Slovní úlohy:** V úlohách je čtenář schopen nalézt, jak vypočítat střižnou sílu, průměr hnaného kola řemenice, síly v prutech ocelové konstrukce či například jakou silou jsou namáhána připevněná lana ke stropu.
- **Výpočet obsahu mnohoúhelníků:** Tyto typy příkladů jsou velice vhodnou přípravou na výpočet těžiště a kvadratických a polárních momentů, které jsou potřeba ke studiu mechaniky na SPŠ a SOŠ.

Matematická témata:

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------|
| I. Operace s čísly | V. Goniometrie a trigonometrie |
| II. Číselné a algebraické úpravy | VI. Funkce |
| III. Trigonometrie | VII. Rovnice a nerovnice |
| IV. Stereometrie | VIII. Planimetrie |

Zhodnocení:

Tato matematická sbírka obecně neobsahuje velké množství příkladů s technickým zaměřením jako některé sbírky doposud shrnuté, avšak i přesto bychom tuto knihu považovali za cenného pomocníka studentů při studiu na střední škole. Svým přehledným zpracováním umožňuje čtenářům postupovat od jednodušších ke složitějším úlohám bez obav z náhlé obtížnosti na začátku studia knihy.



Obr. 5 Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 1. část, vlastní

1.6 Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 2. část

Druhá část sbírky matematických úloh je navržena především pro studenty 3. a 4. ročníků středních odborných škol a také pro případné zájemce vysokých škol. Sbírka nad rámec obsahuje kapitoly „lineární algebra“, „diferenciální počet“ a „úvod do integrálního počtu, o kterých je nutné podotknout, že nejsou běžnou součástí středoškolského učiva. Desátá kapitola: „matematika a její aplikovatelnost systematizace prohloubení a upevnění poznatků“ umožňuje studentovi zopakovat si učivo jak z 1. části, tak i z části 2. a to především na rovnicích a aplikačních příkladech.

Struktura:

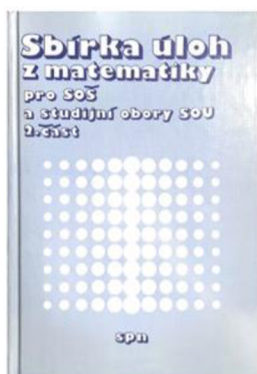
Sbírka úloh je shrnuta do deseti kapitol, z nichž každá obsahuje několik podkapitol a je zachován stejný typ struktury jako v první části sbírky úloh. Nově si čtenář může všimnout znaků „▲ ▼“, které vymezují nepovinnou látku v dané oblasti matematiky.

Matematická témata:

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| I. Komplexní čísla | IV. Statistika |
| II. Kombinatorika | V. Posloupnosti |
| III. Pravděpodobnost | VI. Analytická geometrie |

Zhodnocení:

Bohužel, v této sbírce úloh není výrazné zastoupení příkladů s technickým zaměřením. Ačkoliv jsme identifikovali několik takových příkladů, celková dostupnost jich je minimální až nulová. Tento nedostatek lze přičíst oblastem středoškolské matematiky, kde jsou technicky zaměřené příklady vzácnější. Samotná kniha, podobně jako její první část, má přehledné zpracování, a ty příklady, u kterých je to možné, jsou doplněny o obrázky, za účelem snazšího pochopení. Přestože tato sbírka nenabízí mnoho technicky zaměřených příkladů, doporučili bychom ji zejména proto, že některé konkurenční sbírky, jež pokrývají tyto matematické oblasti, nemají vůbec žádnou zmínku o technickém zaměření.



Obr. 6 Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 2. část, vlastní

1.7 Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Maturitní minimum

Tuto sbírku úloh považujeme za komplexní zdroj určený především studentům připravujícím se na maturitní zkoušku. Významným prvkem jsou i základy matematiky pro vysoké školy, jako jsou derivace funkce a výpočet integrálu, což může být užitečné pro studenty připravující se na přijímací zkoušky na vysoké školy či studenty 1. ročníků na VŠ.

Struktura:

Tato sbírka úloh je zpracována do 25 kapitol. Na začátku každé kapitoly je uveden výčet klíčových dovedností, které by si student měl během studia této knihy osvojit. Sbírka obsahuje pouze neřešené typy úloh, avšak správné výsledky jsou poskytnuty na konci knihy. Sbírka zahrnuje jak jednodušší, tak naopak obtížnější úlohy, přičemž náročnost by měla odpovídat přibližné úrovni specifikované v "Návrhu evaluačních standardů", jak uvádějí autoři.

Matematická témata:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| I. Teorie a operace s čísly | VII. Goniometrie a trigonometrie |
| II. Číselné a algebraické výrazy | VIII. Stereometrie |
| III. Rovnice a nerovnice | IX. Analytická geometrie |
| IV. Planimetrie | X. Kombinatorika |
| V. Funkce | XI. Pravděpodobnost |
| VI. Posloupnosti | XII. Statistika |

Zhodnocení:

Celkově lze tuto sbírku považovat za cenný nástroj pro systematickou přípravu na maturitu a případně i na vysokoškolské přijímací zkoušky. I přes úplnou absenci příkladů s technickým zaměřením bychom tuto sbírku úloh doporučili především studentům 4. ročníku, a to nejen na SOŠ či SPŠ. Obsah sbírky se velmi přibližuje typovým úlohám, které se často vyskytují právě u maturitních zkoušek. Je vhodné zmínit také sbírky úloh z matematiky bez odborného zaměření.



Obr. 7 Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Maturitní minimum, vlastní

1.8 Matematika polopatě

Tato online „učebnice“ matematiky je jedinečná v porovnání s ostatními učebnicemi v tom, že je volně dostupná pro všechny bez poplatků. Na webových stránkách této učebnice čtenář nalezne velice rozsáhlý obsah, který začíná s matematikou pro základní školy a postupuje až po matematiku pro střední a vysoké školy. Kromě matematiky je zde čtenář schopen najít také informace o informatice a základech programování.

Struktura:

Na webových stránkách má čtenář možnost volby, jak vyhledávat potřebné informace. První volbou je zadat konkrétní oblast nebo téma, které chce čtenář vyhledat, do pole pro vyhledávání v pravém horním rohu stránky, označené lupou. Druhou možností je prozkoumat obsah stránky, který se nachází pod vyhledávacím polem. Po kliknutí na zvolenou matematickou oblast čtenáře stránka přeměří na detailní témata v dané oblasti, kde si může vybrat přímo. Třetí možností je použít odkaz "Mapa webu" na konci stránky, který zobrazí všechny oblasti a detailní témata matematiky a dalších předmětů obsažených na stránce. Na těchto stránkách čtenář nalezne teorii a několik příkladů s řešením.

Matematická témata:

I. Teorie a operace s čísly	VII. Goniometrie a trigonometrie
II. Číselné a algebraické výrazy	VIII. Stereometrie
III. Rovnice a nerovnice	IX. Analytická geometrie
IV. Planimetrie	X. Kombinatorika
V. Funkce	XI. Pravděpodobnost
VI. Posloupnosti	XII. Statistika

Zhodnocení:

I když tato online učebnice není primárně zaměřena na střední odborné školy, vnímáme ji jako zajímavou alternativu k tradičním tištěným učebnicím, které nejsou vždy snadno dostupné pro každého. Online formát umožňuje studentům učit se ve vlastním tempu a kdykoliv podle svých potřeb. Osobně tuto stránku velice doporučujeme a schvalujeme. Máme za to, že student, který ji nezná, přichází o jednoduchou cestu k pochopení nejasných oblastí a témat v matematice.

Matematika polopatě

Obr. 8 Matematika polopatě

[\[https://www.matweb.cz/files/infrastructure/preview.png\]](https://www.matweb.cz/files/infrastructure/preview.png)

1.9 Odmaturuj! z matematiky 1

Učebnice "Odmaturuj! z matematiky 1" vyniká svým odlišným a užitečným konceptem výuky matematiky. Kniha je určena především studentům, kterým se krátí čas k přípravě na maturitní zkoušky či zkoušky přijímací. Edice "Odmaturuj!" však nenabízí pouze učebnice matematiky, ale také výukové materiály pro fyziku, český jazyk, anglický jazyk, a další předměty, ze kterých lze složit maturitní zkoušku.

Struktura:

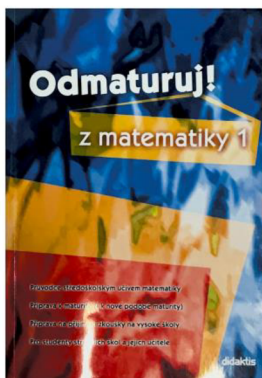
Učebnice obsahuje 37 kapitol, z nichž každá má několik podkapitol. Každá kapitola zahrnuje podrobnou teorii, která je vhodně doplněna obrázky, grafy či tabulkami. Druhá část každé kapitoly obsahuje řešené příklady, doplněné o komentáře vysvětlující postup při řešení. Na zadní straně obálky knihy je uveden návod, jak se v učebnici orientovat. Před samotným studiem knihy vřele doporučujeme čtenáři prostudovat tento návod.

Matematická témata:

I. Teorie a operace s čísly	VII. Goniometrie a trigonometrie
II. Číselné a algebraické výrazy	VIII. Stereometrie
III. Rovnice a nerovnice	IX. Analytická geometrie
IV. Planimetrie	X. Kombinatorika
V. Funkce	XI. Pravděpodobnost
VI. Posloupnosti	XII. Statistika

Zhodnocení:

Tato učebnice vyniká svým přístupem, který usnadňuje pochopení matematických koncepcí každému studentovi. Navazující učebnice se věnují přípravě na vysokou školu a obsahují sbírku řešených úloh. A i přesto, že není explicitně určena pro odborné školy, doporučujeme ji pro širokou škálu studentů zásluhou svému jasnému a efektivnímu provedení.



Obr. 9 Odmaturuj! z matematiky 1, vlastní

1.10 Sbírka úloh z matematiky pro SOU a SOŠ

Tato sbírka úloh zaměřená na střední odborné školy s nižší hodinovou dotací poskytuje studentům ucelený přehled matematických témat. Navazuje na ni další sbírka, která pokrývá střední odborné studium, střední odborné učiliště a nástavbové studium. Hned na začátku knihy je „návod – Jak se orientovat ve sbírce a jak s ní pracovat“. Vřele doporučujeme čtenářům tento návod nepřeskokovat, přečtením se čtenář dozví spousty praktických a vhodných informací o knize.

Struktura:

Sbírka úloh je rozdělena do čtrnácti kapitol, kde každá z nich obsahuje několik podkapitol. V rámečcích, označených P je uveden stručný přehled základních údajů potřebných k dané oblasti matematiky a nachází se u většiny kapitol. Obsahem sbírky jsou jak řešené, tak neřešené příklady, rozdělené dle stupně obtížnosti. Správné výsledky neřešených příkladů jsou uvedené na konci knihy.

Technická zaměření:

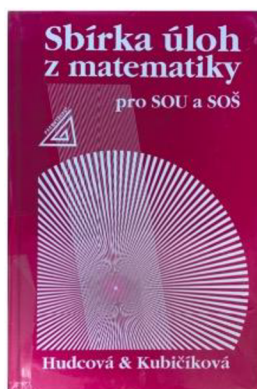
- **Slovní úlohy:** Ve cvičení můžete nalézt, jak vypočítat střižnou sílu, průměr hnaného kola řemenice, síly v prutech ocelové konstrukce či například jakou silou jsou namáhána připevňovací lana ke stropu.
- **Výpočet obsahu mnohoúhelníků:** Tyto typy příkladů jsou velice vhodnou přípravou na výpočet těžiště a kvadratických a polárních momentů, které jsou potřeba ke studiu předmětu mechanika na SPŠ a SOŠ.

Matematická témata:

I. Teorie a operace s čísly	VI. Goniometrie a trigonometrie
II. Číselné a algebraické výrazy	VII. Stereometrie
III. Rovnice a nerovnice	VIII. Pravděpodobnost
IV. Planimetrie	IX. Statistika
V. Funkce	

Zhodnocení:

Matematickou sbírku bychom doporučili z důvodu přehledného zpracování a uvedení stručných přehledů základních údajů, které čtenář nalezne ve většině kapitol. Přesto bychom vytkli minimální počet řešených příkladů, čtenáři to nemusí plně vyhovovat a dále malé množství příkladů s technickým zaměřením. Nicméně tuto sbírku doporučujeme pro přípravu či opakování učiva matematiky na SOU a SPŠ.



Obr. 10 Sbírka úloh z matematiky pro SOU a SOŠ, vlastní

Tab. 2 Obsah učebnic a sbírek úloh z matematiky pro střední odborné školy s ohledem na RVP SOV

KNIHA	OPERACE S ČÍSLY	ČÍSELNÉ A ALGEBRAICKÉ VÝRAZY	FUNKCE	ŘEŠENÍ ROVNIC A NEROVNIC	GONIOMETRIE A TRIGONOMETRIE	PLANIMETRIE
Učebnice základů matematiky pro dělníky a techniky z praxe	ANO	ANO	ANO	NE	ANO	ANO
Sbírka úloh z matematiky pro SPŠ a SZTŠ	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO
Sbírka úloh z matematiky: Příručka pro přípravu na vysokou školu	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO
Zábavná matematika	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO
Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 1. část	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO
Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 2. část	NE	NE	NE	NE	NE	NE
Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Maturitní minimum	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO
Odmaturuj! z matematiky 1	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO
Sbírka úloh z matematiky pro SOU a SOŠ	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO
Matematika polopatě https://www.matweb.cz/	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO

Tab. 3 Obsah učebnic a sbírek úloh z matematiky pro střední odborné školy s ohledem na RVP SOV

KNIHA	STEREOMETRIE	ANALYTICKÁ GEOMETRIE	POSLOUPNOSTI	KOMBINATORIKA	PRAVDĚPODOBNOST	STATISTIKA
Učebnice základů matematiky pro dělníky a techniky z praxe	ANO	NE	NE	NE	NE	NE
Sbírka úloh z matematiky pro SPŠ a SZTŠ	ANO	ANO	ANO	ANO	NE	NE
Sbírka úloh z matematiky: Příručka pro přípravu na vysokou školu	ANO	ANO	NE	NE	NE	NE
Zábavná matematika	ANO	NE	ANO	ANO	ANO	NE
Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 1. část	ANO	NE	NE	NE	NE	NE
Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 2. část	NE	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO
Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Maturitní minimum	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO
Odmaturuj! z matematiky 1	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO
Sbírka úloh z matematiky pro SOU a SOŠ	ANO	NE	NE	NE	ANO	ANO
Matematika polopatě https://www.matweb.cz/	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO	ANO

2. Sbírka řešených a neřešených úloh z matematiky

Tato sbírka úloh z matematiky by měla sloužit jako pomocný nástroj studentům a případně učitelům na středních odborných školách. Sbírka zahrnuje učivo pro první až čtvrté ročníky, avšak není tím pevně stanoveno, že se sbírkou nemohou inspirovat například i studenti a učitelé učebních oborů anebo nástavbového studia.

Struktura sbírky je koncipovaná podle jednotlivých ročníků a osnov RVP, zejména oborů strojírenství (23-41-M01) a elektrotechniky (26-41-M01). Každá kapitola obsahuje několik úloh s řešením, a na konci kapitoly čtenář nalezne neřešené příklady s uvedenými správnými výsledky ve zvýrazněných hranatých závorkách. Nicméně se čtenář nemusí bát, že by nepřišel na správný postup řešení. Neřešené příklady budou sestaveny na podobném principu, jako ty vyřešené.

Dovolili bychom si čtenáře ještě předtím, než začne se zkoumáním a bádáním nad touto sbírkou úloh z matematiky upozornit, že se nejedná o komplexně ucelený soubor, který obsahuje všechny oblasti středoškolské matematiky. Tuto sbírku úloh považujeme pouze za inspiraci či motivaci k procvičení konkrétních matematických dovedností s praktickým využitím v odborném studiu.

Pro ucelenější a plnohodnotnější studium středoškolské matematiky doporučujeme čtenáři nahlédnout do teoretické části bakalářské práce, ve které analyzujeme a rozebíráme učebnice a sbírky úloh z matematiky, kde většina z nich je určena právě odborným školám.

Věříme, že tato sbírka úloh z matematiky bude přínosná pro širokou škálu studentů.

2.1 Operace s čísly a jejich výrazy

2.1.1 Řešené úlohy

Úloha 1.

Obrobení jedné hřídele trvá přibližně 540 s. Kolik by se jich obrobilo za 7 hodin a 30 minut nepřetržité práce?

Řešení:

1. Převedeme 7 hodin a 30 minut na sekundy:

$$7 \text{ hodin } 30 \text{ minut} = (7 \cdot 60) \cdot 60 + 30 \cdot 60 = 27\,000 \text{ sekund}$$

2. Vypočítáme, kolik hřídelí se obrobí za 7 hodin a 30 minut.

$$\text{počet hřídelí} = \frac{\text{celkový čas práce}}{\text{doba obrobení jedné hřídele}}$$

$$\text{počet hřídelí} = \frac{27\,000 \text{ s}}{540 \text{ s}}$$

$$\underline{\text{počet hřídelí} = 50 \text{ kusů}}$$

Za 7 hodin a 30 minut nepřetržité práce by se obrobilo 50 kusů hřídelí.

Úloha 2.

V elektrickém obvodu s odporem $R = 12 \, \Omega$ protéká proud $I = 6,4 \text{ A}$. Jak se změní proud, vyřadíme-li odpor $2 \, \Omega$?

Řešení:

K dobrání se ke správnému výsledku je potřeba znát *Ohmův zákon*: $R = \frac{U}{I} \Rightarrow U = R \cdot I$

1. Vypočítáme napětí v elektrickém obvodu:

$$U = R \cdot I$$

$$U = 12 \cdot 6,4$$

$$U = 76,8 \text{ V}$$

2. Vyřadíme-li nyní $2 \, \Omega$, celkový odpor bude $R_C = R - 2$.

$$R_C = R - 2$$

$$R_C = 12 - 2$$

$$R_C = 10 \, \Omega$$

3. Nyní použijeme opět Ohmův zákon: $R_C = \frac{U}{I} \Rightarrow I = \frac{U}{R_C}$

$$I = \frac{U}{R_C} = \frac{76,8}{10}$$

$$\underline{I = 7,68 \text{ A}}$$

Vyřadíme-li z obvodu $2 \, \Omega$, proud se změní na 7,68 A.

Úloha 3.

Z rovnice $\sigma_{Dov,t} = \frac{4F}{\pi \cdot (D^2 - d^2)}$ vypočtete vnější průměr D ocelové trubky, jestliže její vnitřní průměr $d = 13 \text{ mm}$, dovolené napětí $\sigma_{Dov,t} = 60 \text{ MPa}$ a je zatížena silou $F = 15 \text{ kN}$.

Řešení:

1. Prvně si musíme vnější průměr D vyjádřit:

$$\sigma_{Dov,t} = \frac{4F}{\pi \cdot (D^2 - d^2)} \quad / \cdot \pi (D^2 - d^2)$$

$$\sigma_{Dov,t} \cdot \pi \cdot (D^2 - d^2) = 4F \quad / : (\pi \cdot \sigma_{Dov,t})$$

$$(D^2 - d^2) = \frac{4F}{\pi \cdot \sigma_{Dov,t}}$$

$$D^2 = \frac{4F}{\pi \cdot \sigma_{Dov,t}} + d^2 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$D = \sqrt{\frac{4F}{\pi \cdot \sigma_{Dov,t}} + d^2}$$

2. Abychom získali hodnotu vnějšího průměru D v mm, musíme dosadit zatěžující sílu v jednotkách N. Převedeme tedy $F = 15 \text{ kN} = 15\,000 \text{ N}$.

$$D = \sqrt{\frac{4F}{\pi \cdot \sigma_{Dov,t}} + d^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 15\,000}{\pi \cdot 60} + 13^2}$$

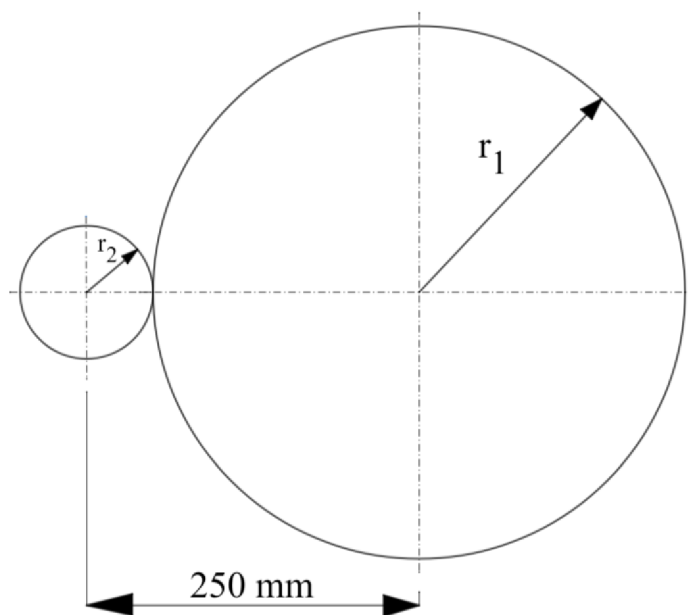
$D = 22 \text{ mm}$ Vnější průměr ocelové trubky je 22 mm.

Úloha 4.

Dva hřídele, vzdálené 250 mm, mají být spojeny ozubenými koly, jejichž průměry jsou v poměru 1:4. Vypočítejte průměry obou ozubených kol.

Řešení:

1. Vzdálenost ozubených kol od jejich středů je 250 mm (stejná vzdálenost jako u hřídelí). Budeme tedy počítat s poloměry ozubených kol. Tím, že jsou ozubená kola v poměru 1:4, můžeme napsat, že $r_1 = 4 \cdot r_2$



Obr. 11 Vzdálenost ozubených kol, vlastní

$$\begin{aligned}
r_1 + r_2 &= 250 \\
4 \cdot r_2 + r_2 &= 250 \\
5 \cdot r_2 &= 250 & /: 5 \\
\underline{r_2 = 50 \text{ mm}}
\end{aligned}$$

2. Víme poloměr jednoho ozubeného kola, nyní stačí dosadit do $r_1 = 4 \cdot r_2$.

$$\begin{aligned}
r_1 &= 4 \cdot r_2 \\
r_1 &= 4 \cdot 50 \\
\underline{r_1 = 200 \text{ mm}}
\end{aligned}$$

3. Dopočítáme průměr $\Rightarrow D_1 = 2 \cdot r_1, D_2 = 2 \cdot r_2$

Průměry ozubených kol jsou 400 mm a 100 mm.

2.1.2 Neřešené úlohy

a) Převed'te na zvolené jednotky.

0,25 m =	mm	86 cm =	mm
260 mm ² =	m ²	3,3 l =	m ³
74 N · m ⁻² =	kPa	30 kN =	N
$\frac{6}{8}\pi$ rad =	°	61 kg =	dkg
55° =	rad	0,04 kPa =	Pa
70 MPa =	Pa	97 cm ² =	mm ²

$$\text{[250mm; 0,00026 m}^2\text{; 0,074 kPa; 135}^\circ\text{; 0,959 rad; 70 000 000 Pa; 860 mm; 0,0033 m}^3\text{; 30 000 N; 6100 dkg; 40 Pa; 9700 mm}^2\text{]}$$

a) Jak dlouho potrvá soustružení plochy 3,5 m dlouhé při posuvu 1,2 cm na 1 otáčku, koná-li obrobek 64 otáček za minutu?

[Soustružení plochy potrvá přibližně 46 minut.]

b) Z daných vzorců vyjádřete veličiny uvedené v závorce.

$$S \cdot x_T = S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 + S_3 \cdot x_3 \quad (x_2) \quad \left[x_2 = \frac{S \cdot x_T - S_1 \cdot x_1 - S_3 \cdot x_3}{S_2} \right]$$

$$S = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad (d) \quad \left[d = \sqrt{\frac{S \cdot 4}{\pi}} \right]$$

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_0}{S \cdot E} \quad (l_0) \quad \left[l_0 = \frac{S \cdot E \cdot \Delta l}{F} \right]$$

$$\varphi_c = \frac{M_k \cdot l_1}{G \cdot J_{p1}} + \frac{M_k \cdot l_2}{G \cdot J_{p2}} \quad (J_{p2}) \quad \left[J_{p2} = \frac{M_k \cdot l_2}{G \cdot \left(\varphi_c - \frac{M_k \cdot l_1}{G \cdot J_{p1}} \right)} \right]$$

c) Dvě ozubená kola, zapadající do sebe, mají převod 3:1, středy obou kol mají vzdálenost 180 mm. Jaké poloměry mají kola?

[Poloměry ozubených kol jsou 45 mm; 135 mm.]

2.2 Rovnice a nerovnice

2.2.1 Řešené úlohy

Úloha 1.

Pro která čísla x, y jsou zlomky záporné?

$$a) \frac{x+13}{7-2x} \qquad b) \frac{\frac{1}{2}y+(-16)}{y+7(1-2y)}$$

Řešení:

a)

1. Musíme zjistit, která x jsou v čitateli i ve jmenovateli různá od nuly ($x \neq 0$).

$$x+13 \neq 0 \qquad 7-2x \neq 0$$

$$x \neq -13 \qquad x \neq \frac{7}{2} \qquad \dots \text{podmínky}$$

2. Pokud $x > -13 \Rightarrow$ zlomek bude kladný.
Pokud $x < -13 \Rightarrow$ zlomek bude záporný.
Pokud $x > \frac{7}{2} \Rightarrow$ zlomek bude záporný.
Pokud $x < \frac{7}{2} \Rightarrow$ zlomek bude kladný.

Aby zlomek $\frac{x+13}{7-2x}$ byl záporný, musí pro platit: $x < -13$ nebo $x > \frac{7}{2}$.

b)

1. Musíme zjistit, která y jsou v čitateli i ve jmenovateli různá od nuly ($y \neq 0$).

$$\frac{1}{2}y + (-16) \neq 0 \qquad y + 7(1-2y) \neq 0$$
$$y + 7 - 14y \neq 0$$

$$y \neq 32 \qquad y \neq \frac{7}{13} \qquad \dots \text{podmínky}$$

2. Pokud $y > 32 \Rightarrow$ zlomek bude záporný.
Pokud $y < 32 \Rightarrow$ zlomek bude kladný.
Pokud $y > \frac{7}{13} \Rightarrow$ zlomek bude kladný.
Pokud $y < \frac{7}{13} \Rightarrow$ zlomek bude záporný.

Aby zlomek $\frac{\frac{1}{2}y+(-16)}{y+7(1-2y)}$ byl záporný, musí pro platit: $y > 32$ nebo $y < \frac{7}{13}$.

Úloha 2.

Dva vodiče, které jsou zapojeny paralelně (vedle sebe) dávají celkový odpor $R = 4,5 \Omega$. Jeden z nich má však o 3Ω větší odpor než vodič druhý. Určete odpory těchto vodičů.

Řešení:

1. Pro výpočet celkového odporu v elektrickém obvodu je potřeba použít vzorec:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

2. Víme, že $R = 4,5 \Omega$ a také, že $R_1 = R_2 + 3$. Nyní z těchto údajů, které známe, sestavíme soustavu 2 rovnic o 2 neznámých.

$$4,5 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_1 = R_2 + 3$$

3. Dosazením rovnice $R_1 = R_2 + 3$ do rovnice $4,5 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ získáme:

$$4,5 = \frac{(R_2 + 3) \cdot R_2}{R_2 + 3 + R_2} \Rightarrow 4,5 = \frac{R_2^2 + 3R_2}{2R_2 + 3} \Rightarrow 9R_2 + 13,5 = R_2^2 + 3R_2$$

4. Rovnici upravíme do tvaru kvadratické rovnice a vypočítáme:

$$R_2^2 - 6R_2 - 13,5 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot (-13,5)$$

$$D = 36 + 54$$

$D = 90 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{90}$... Vypočítali jsme diskriminant, nyní nalezneme kořeny.

$$R_{2,1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$R_{2,1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{90}}{2} \Rightarrow R_{2,1} = 7,74 \Omega; R_{2,2} = -1,74 \Omega$$

5. Druhý kořen kvadratické rovnice není platným řešením, tedy odpor jednoho z vodičů je $R_2 = 7,74 \Omega$.

6. Dosazením do rovnice $R_1 = R_2 + 3$ získáme odpor druhého z vodičů, kterým je $R_1 = 10,74 \Omega$

Odpory vodičů jsou $7,74 \Omega$ a $10,74 \Omega$.

Úloha 3.

Vypočtěte dovolené zatížení $F = \frac{d^3 \cdot \tau_{Dov,k}}{5 \cdot r}$ šroubové pružiny vinuté z drátu o průměru $d = 0,0028$ m na poloměru $r = 1,5$ cm, pokud pro dovolené napětí platí, že $\tau_{Dov,k} = 3,6 \cdot 10^8$ N/m².

Řešení:

1. Musíme převést všechny parametry na základní jednotky:

$$\varnothing d = 0,0028 \text{ m} \Rightarrow \varnothing d = 2,8 \text{ mm}$$

$$r = 1,5 \text{ cm} \Rightarrow r = 15 \text{ mm}$$

$$\tau_{Dov,k} = 3,6 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 360\,000\,000 \text{ Pa} \Rightarrow \tau_{Dov,k} = 360 \text{ MPa}$$

2. Dosadíme do rovnice dovoleného zatížení $F = \frac{d^3 \cdot \tau_{Dov,k}}{5 \cdot r}$.

$$F = \frac{d^3 \cdot \tau_{Dov,k}}{5 \cdot r}$$

$$F = \frac{2,8^3 \cdot 360}{5 \cdot 15}$$

$$\underline{F = 105,37 \text{ N}}$$

Dovolené zatížení šroubové pružiny je velké $105,37$ N.

Úloha 4.

Určete součinitel tření f jednoduché pásové brzdy, je-li brzdící moment $M_B = 75 \text{ Nm}$, ovládací síla $F = 150 \text{ N}$, vzdálenost ovládací síly $a = 750 \text{ mm}$, vzdálenost normálové a vnitřní síly $b = 105 \text{ mm}$, bezpečnost $k = 2$, úhel opásání $\alpha = \pi$, poloměr bubnu $r = 0,3 \text{ m}$ a platí-li $M_B = \frac{F \cdot a \cdot (e^{\alpha \cdot f} - 1)}{k} \cdot r$.

Řešení:

1. Převedeme parametry na základní jednotky.

$$M_B = 75 \text{ Nm} \Rightarrow M_B = 75\,000 \text{ Nmm}$$

$$r = 0,3 \text{ m} \Rightarrow r = 300 \text{ mm}$$

2. Dosadíme do $M_B = \frac{F \cdot a \cdot (e^{\alpha \cdot f} - 1)}{k} \cdot r$ všechny parametry, které známe a budeme upravovat, dokud se nedostaneme k výsledku.

$$M_B = \frac{F \cdot a \cdot (e^{\alpha \cdot f} - 1)}{k} \cdot r$$

$$75\,000 = \frac{150 \cdot 750}{105} \cdot \frac{(e^{\pi \cdot f} - 1)}{2} \cdot 300 \quad / \cdot 2$$

$$150\,000 = \frac{150 \cdot 750}{105} \cdot (e^{\pi \cdot f} - 1) \cdot 300 \quad / \cdot 105$$

$$15\,750\,000 = 112\,500 \cdot (e^{\pi \cdot f} - 1) \cdot 300 \quad / : 300 / : 112\,500$$

$$\frac{7}{15} = e^{\pi \cdot f} - 1$$

$$\frac{22}{15} = e^{\pi \cdot f} \quad / \ln$$

$$\ln \frac{22}{15} = \pi \cdot f \cdot \ln e \quad / : \ln e / : \pi$$

$$\underline{f = 0,122}$$

Součinitel tření jednoduché pásové brzdy je $f = 0,122$.

2.2.2 Neřešené úlohy

a) Kus litiny o hmotnosti $m = 46,5 \text{ kg}$ byl tažen po zemi vodorovnou silou $F = 198 \text{ N}$. Určete součinitel tření f , platí-li rovnice $F = f \cdot G$

[Součinitel tření je $f = 0,434$.]

b) Vypočítejte modul ozubeného kola $m = 0,8 \cdot \sqrt{\frac{F}{\sigma_{Dov,o}}}$. Ozubené kolo je z materiálu 11 523², zatížené obvodovou silou $F = 6,8 \text{ kN}$, při dovoleném napětí v ohybu $\sigma_{Dov,o} = \frac{Rm}{k}$, kde bezpečnost $k = 5$.

[Ozubené kolo má modul 6,45 mm.]

² Jedná se o značku materiálu třídy 11 a podrobnosti lze nalézt v ST (ČSN 41 1523).

- c) Spojovací čep má snést zatížení $0,0036 \cdot 10^7 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ s dovoleným napětím $\sigma_{Dov,d} = 0,12 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$. Jaký musí mít průměr, když se jedná o čep s kruhovým průřezem?

[Čep musí mít průměr o velikosti průměru $d = 19,54 \text{ mm}$.]

- d) Která kladná čísla x, y vyhovují nerovnicím?

1. $(8x - 6) \cdot 2x > 24$

$[x > 1,656]$

2. $3 < \frac{2y - 15}{35 + 20y}$

$[-\frac{7}{4} < y < -\frac{60}{29}]$

2.3 Funkce a jejich užití

2.3.1 Řešené úlohy

Úloha 1.

Narýsujte grafy funkcí: a) $f: 2x - 3y = 12$, b) $k: 4y^2 - 7x - 1 = 0$,

c) $l: 5x^2 - y^2 = 15$

Řešení:

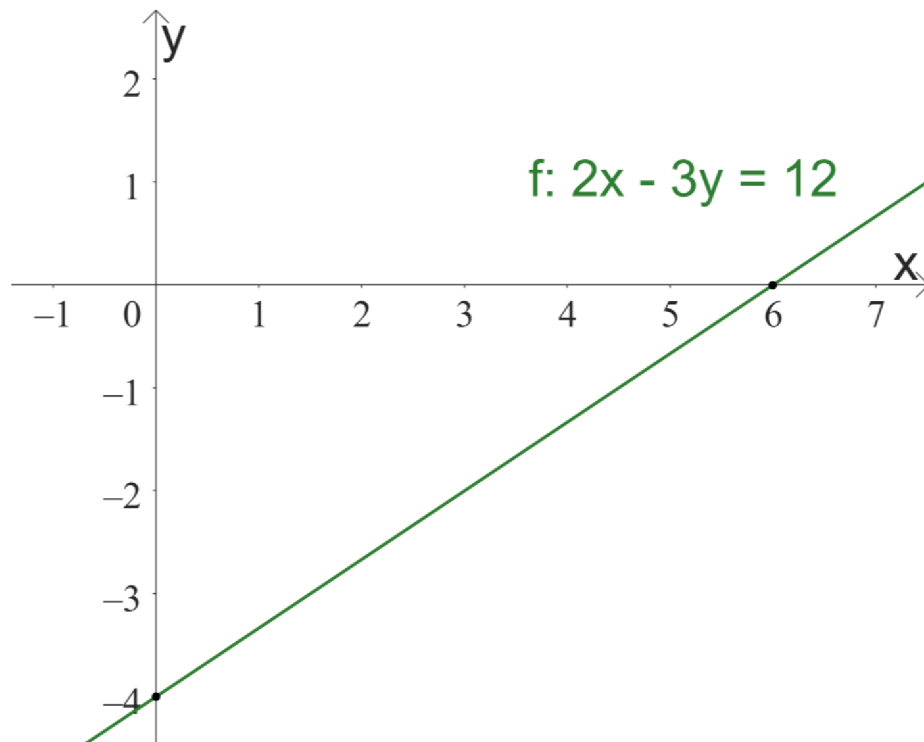
a)

1. Z rovnice vyjádříme $y \Rightarrow y = \frac{2x - 12}{3}$ a vytvoříme tabulku, do které budeme dosazovat čísla za x , čímž zjistíme hodnotu y :

Tab. 4 Tabulka funkčních hodnot funkce f

x	0	6
y	-4	0

2. Narýsujeme graf z výše zjištěných hodnot.



Obr. 12 Graf funkce f , vlastní

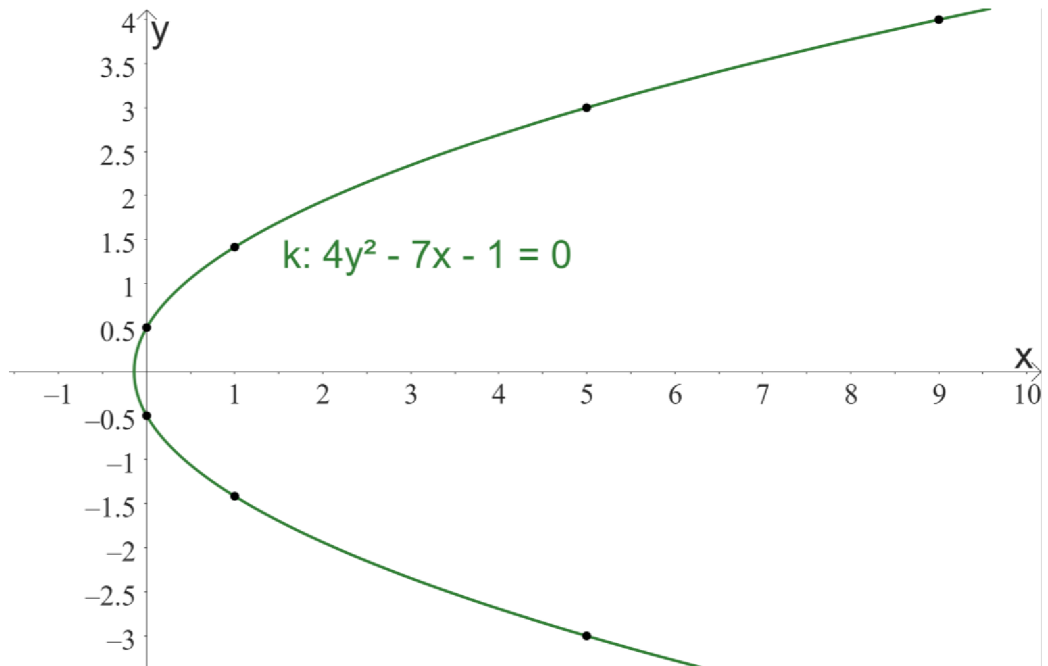
b)

1. Z rovnice lze odvodit, že se jedná o parabolu, upravíme rovnici na základní tvar $y^2 = \frac{7x+1}{4}$ a vyplníme tabulku jako v předchozím příkladu:

Tab. 5 Tabulka funkčních hodnot funkce k

x	0	1	5	9
y	$\pm 0,5$	$\pm\sqrt{2}$	± 3	± 4

2. Narýsujeme graf z výše zjištěných hodnot.



Obr. 13 Graf funkce k , vlastní

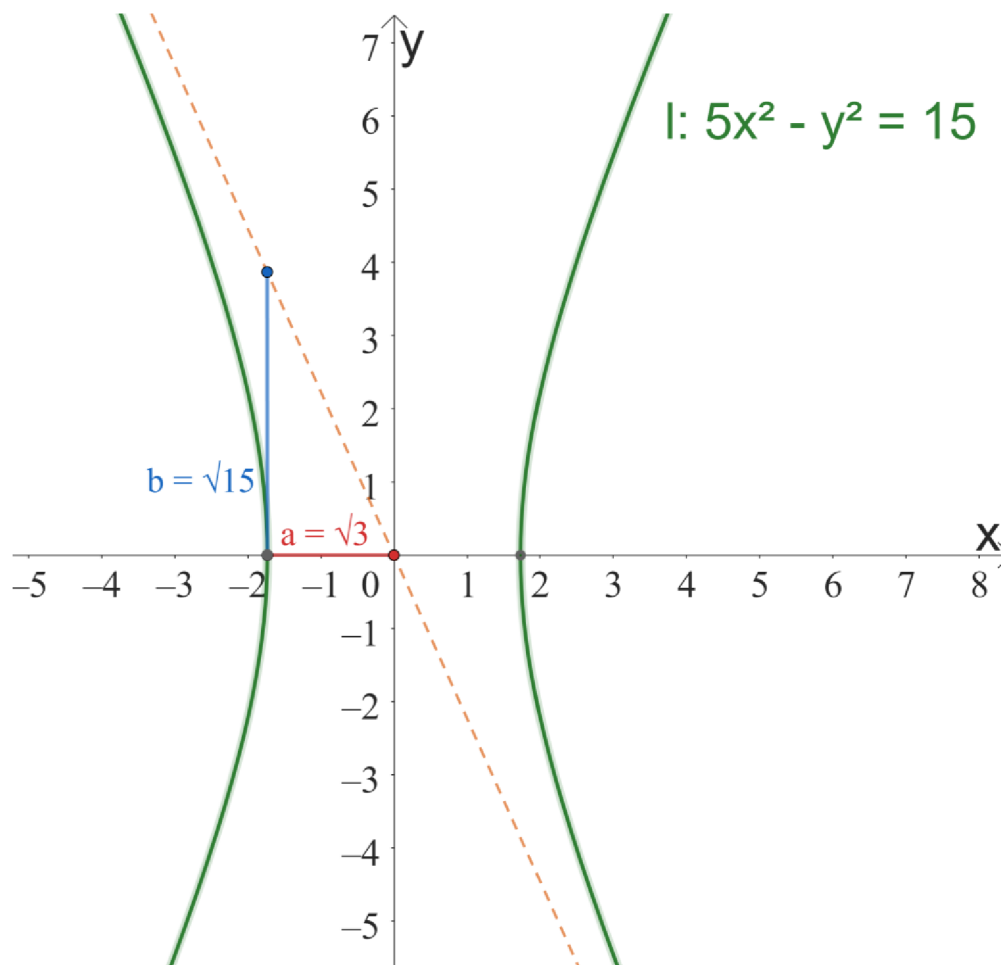
c)

1. Z rovnice lze odvodit, že se jedná o hyperbolu, upravíme rovnici tak, aby levá strana byla rovna 1:

$$5x^2 - y^2 = 15 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{15} = 1 \quad \dots \text{základní tvar rovnice hyperboly}$$

Z rovnice víme, že $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{15}$.

2. Nyní můžeme narýsovat graf hyperboly.



Obr. 14 Graf funkce I , vlastní

Úloha 2.

Napětí v elektrickém obvodu rovnoměrně klesá s časem t . Na počátku pokusu bylo toto napětí $U_1 = 8 \text{ V}$, na konci pokusu, který trval 12 s, bylo napětí $U_2 = 3,6 \text{ V}$. Vyjádřete tuto závislost napětí na čase rovnicí a znázorněte ji graficky.

Řešení:

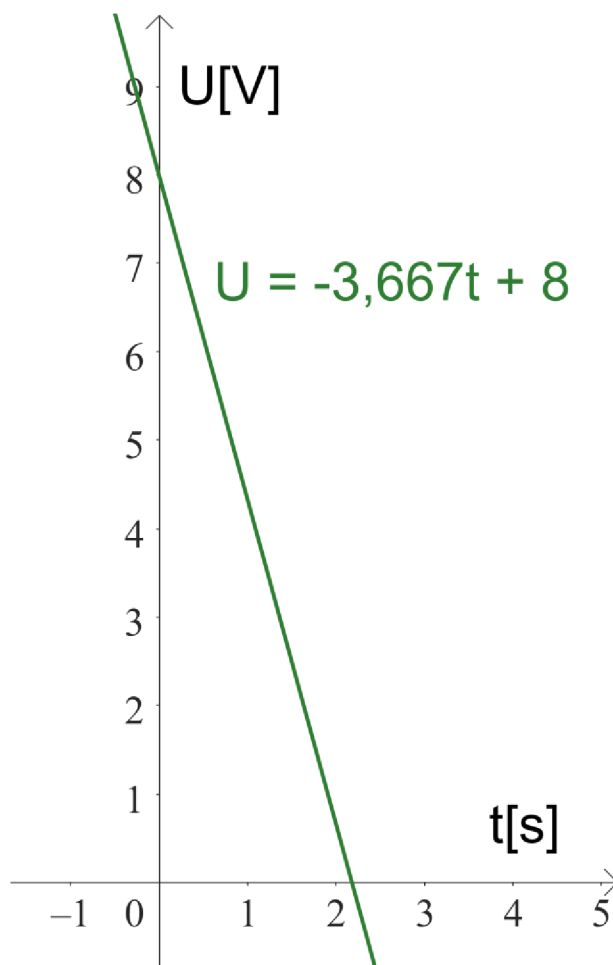
1. Závislost napětí na čase lze vyjádřit pomocí rovnice $U = kt + q$, kde
 k ... směrnice přímky
 q ... úsek na ose y , při $t = 0$ ($\Rightarrow U_1 = 8 \text{ V}$)
2. Směrnici k vypočítáme pomocí rozdílu napětí a času:

$$k = \frac{U_2 - U_1}{t_2 - t_1} = \frac{3,6 - 8}{12 - 0}$$

$$\underline{k = -3,667 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}}$$

3. Dosadíme do rovnice $U = kt + q$:
 $U = -3,667t + 8$... rovnice závislosti napětí na čase

4. Grafické znázornění:



Obr. 15 Graf znázorňující závislost elektrického napětí na klesajícím čase, vlastní

Úloha 3.

Do ozubeného kola s $z_1 = 18$ zubů zasahuje jiné ozubené kolo, které má z_2 zubů. Kolik otáček n_2 učiní druhé kolo, jestliže se první kolo otočí celkem devětkrát ($n_1 = 9$)? Znázorněte graficky závislost mezi počtem zubů z_2 a počtem otáček n_2 druhého kola.

Řešení:

1. Nejprve musíme spočítat, kolik otáček udělá druhé kolo, když bude v záběru s kolem prvním, který má 18 zubů a provede 9 otáček.

$$z_1 \cdot n_1 = z_2 \cdot n_2$$

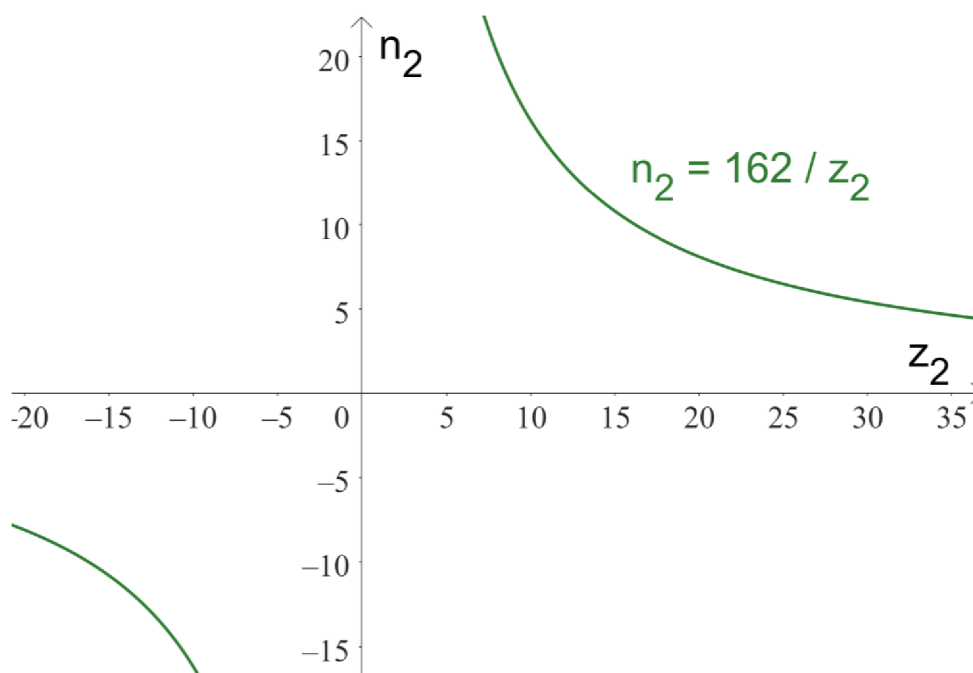
$$18 \cdot 9 = z_2 \cdot n_2 \Rightarrow n_2 = \frac{162}{z_2}$$

2. Nyní vytvoříme tabulku funkčních hodnot, díky které budeme moci graficky znázornit závislost mezi počtem zubů z_2 a počtem otáček n_2 druhého kola.

Tab. 6 Tabulka funkčních hodnot rovnice pro výpočet otáček druhého kola

z_2	0	12	18	24	54	72
n_2	0	13,5	9	6,75	3	2,25

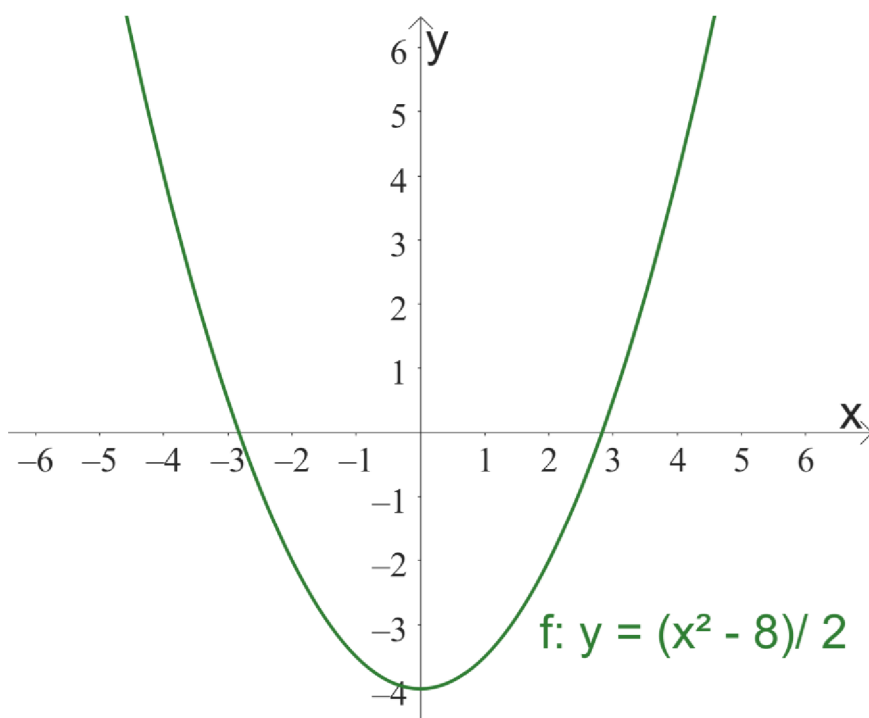
3. Grafické znázornění:



Obr. 16 Graf znázorňující závislost otáček druhého kola na počtu zubů, vlastní

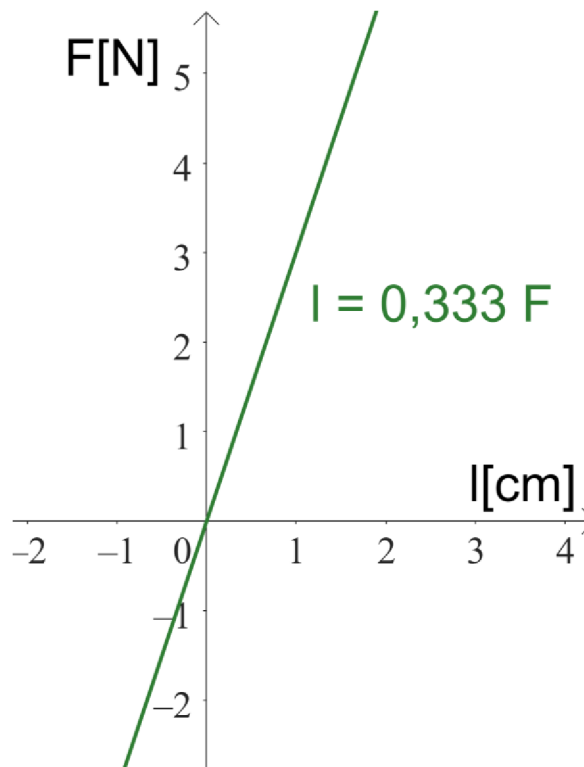
2.3.2 Neřešené úlohy

a) Znázorněte graf funkce $f: y = \frac{x^2 - 8}{2}$.



Obr. 17 Graf funkce f , vlastní

- b) Pružina se roztahuje v určitých mezích rovnoměrně se zatížením F . Jak se bude měnit délka pružiny se zatížením, má-li pružina při zatížení $F_1 = 27 \text{ N}$ délku $l_1 = 9 \text{ cm}$ a při zatížení $F_2 = 81 \text{ N}$ délku $l_2 = 27 \text{ cm}$. Znázorněte graficky závislost délky pružiny na zatěžující síle F .



Obr. 18 Graf znázorňující závislost délky pružiny na zatěžující síle, vlastní

[Délka pružiny se bude natahovat o 0,333 cm na jeden Newton, který na pružinu bude působit $\Rightarrow l = 0,333 F$.]

2.4 Goniometrie a trigonometrie

2.4.1 Řešené úlohy

Úloha 1.

Řešte trojúhelník $\triangle ABC$, když víte, že platí: $a = 540 \text{ mm}$, $c = 275 \text{ mm}$ a $\alpha = 30^\circ 45'$.

Řešení:

- Pro vypočítání úhlu γ použijeme sinovou větu: $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$

$$\frac{\sin 30^\circ 45'}{540} = \frac{\sin \gamma}{275} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{\sin 30^\circ 45' \cdot 275}{540}$$

$$\underline{\underline{\gamma = 16^\circ 46'}}$$

- Zbýlý úhel β vypočítáme dosazením do rovnice:

$$\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha$$

$$\beta = 180^\circ - 16^\circ 46' - 30^\circ 45'$$

$$\underline{\underline{\beta = 132^\circ 29'}}$$

3. Zbylou stranu b trojúhelníku ΔABC vypočítáme použitím cosinovy věty:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$b^2 = 540^2 + 275^2 - 2 \cdot 540 \cdot 275 \cdot \cos 132^\circ 28'$$

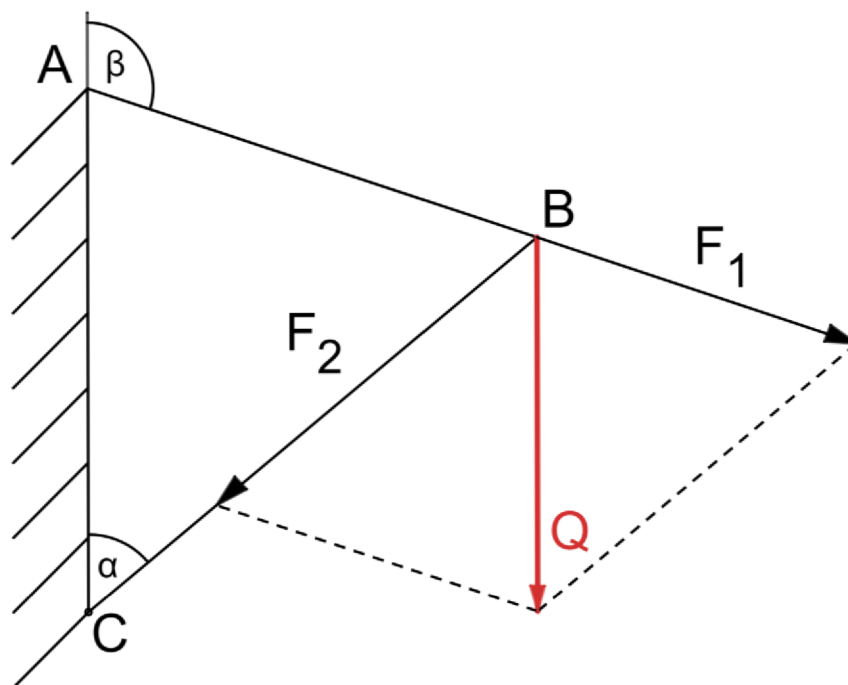
$$b^2 = 367\,225 - (-200\,522,86)$$

$$\underline{b = 753,49 \text{ mm}}$$

ΔABC má strany o délkách $a = 540 \text{ mm}$, $b = 753,49 \text{ mm}$, $c = 275 \text{ mm}$ a úhlech $\alpha = 30^\circ 45'$, $\beta = 132^\circ 28'$, $\gamma = 16^\circ 46'$.

Úloha 2.

Prutový nosník s rameny AB a BC nese břemeno $Q = 1821 \text{ N}$. Jakou silou F_1 je namáhán prut AB a jakou silou F_2 je namáhán prut BC , jestliže $\alpha = 50^\circ 20'$ a $\beta = 108^\circ 50'$.

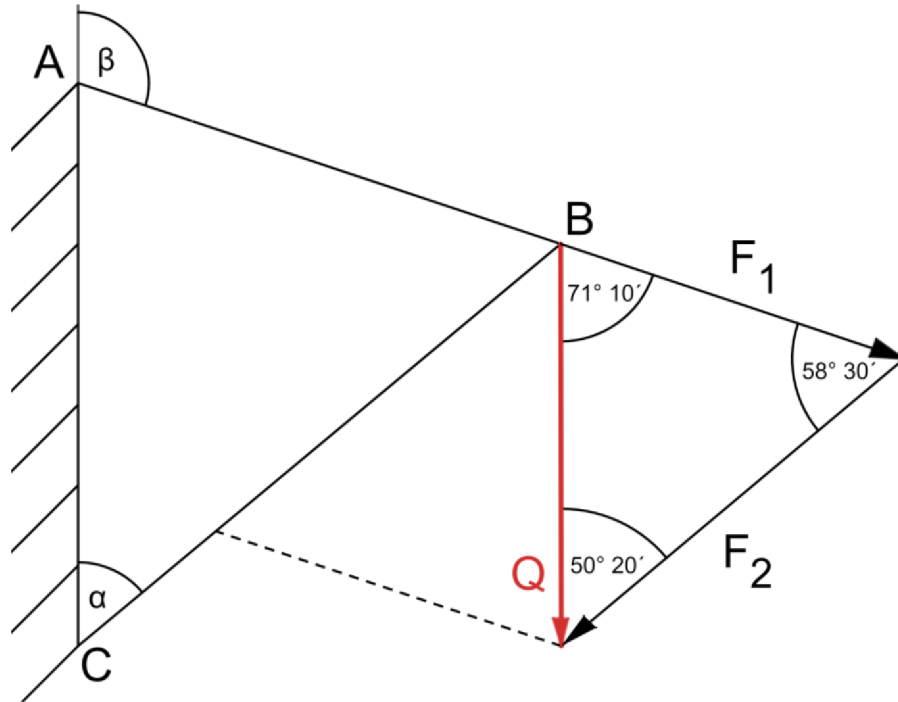


Obr. 19 Prutový nosník, vlastní

Řešení:

Síly F_1 a F_2 lze spočítat pomocí sinové a kosinové věty. My pro toto řešení zvolíme větu sinovou.

1. Ze sil F_1, F_2 a Q sestojíme trojúhelník (rovnováhu sil) a uvedeme velikosti vnitřních úhlů:



Obr. 20 Znárodnění rovnováhy sil v prutech, vlastní

2. Nyní víme všechny vnitřní úhly a velikost jedné strany. Pomocí sinové věty

$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$ tedy spočítáme velikosti sil F_1 a F_2 :

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \Rightarrow \frac{\sin 50^\circ 20'}{F_1} = \frac{\sin 58^\circ 30'}{Q}$$

$$F_1 = \frac{\sin 50^\circ 20' \cdot 1821}{\sin 58^\circ 30'}$$

$$\underline{F_1 = 1644 \text{ N}}$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} \Rightarrow \frac{\sin 58^\circ 30'}{Q} = \frac{\sin 71^\circ 10'}{F_2}$$

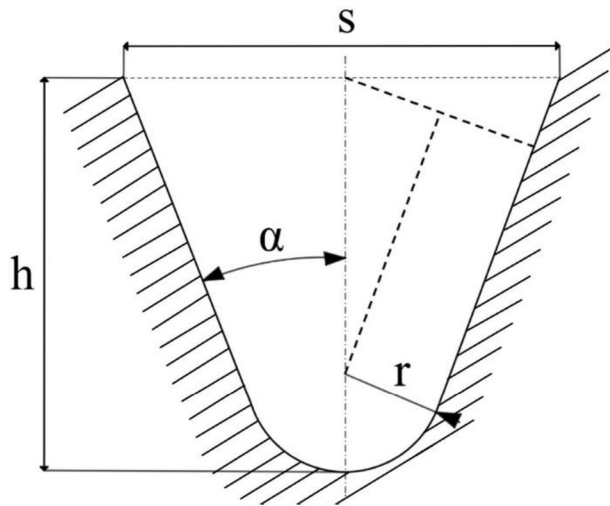
$$F_2 = \frac{\sin 71^\circ 10' \cdot 1821}{\sin 58^\circ 30'}$$

$$\underline{F_2 = 2021,4 \text{ N}}$$

Prut AB je namáhán silou $F_1 = 1644 \text{ N}$ a prut BC je namáhán silou $F_2 = 2021,4 \text{ N}$.

Úloha 3.

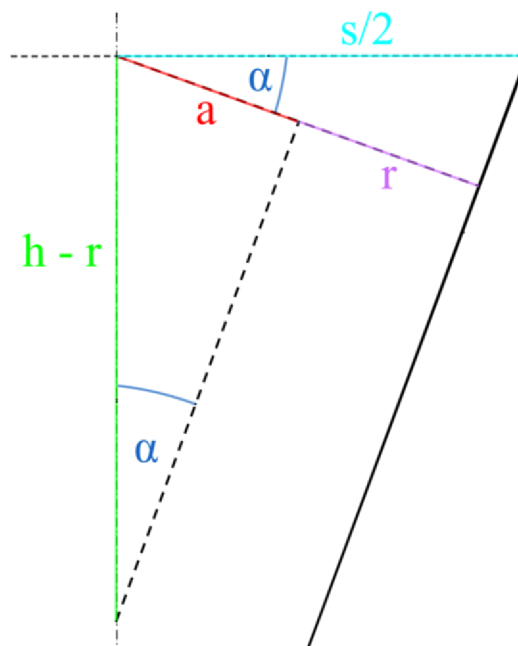
Vypočítejte šířku s drážky danou hloubkou $h = 22,5 \text{ mm}$, poloměrem $r = 11 \text{ mm}$ a úhlem $\alpha = 20^\circ$.



Obr. 21 Grafické znázornění profilu drážky, vlastní

Řešení:

1. K vypočítání velikosti šířky drážky je zapotřebí si uvědomit jisté vztahy a spojitosti, které jsme znázornili na Obr. 22.



Obr. 22 Pomocné znázornění profilu drážky, vlastní

2. K výpočtu velikosti šířky drážky využijeme goniometrické funkce. Prvně vypočítáme délku strany a :

$$\sin \alpha = \frac{a}{h - r} \Rightarrow a = \sin \alpha \cdot (h - r)$$

$$a = \sin 20^\circ \cdot (22,5 - 11)$$

$$a = 3,93 \text{ mm}$$

3. Díky vypočítání vzdálenosti a , lze nyní spočítat délku šířky drážky s :

$$\cos \alpha = \frac{a+r}{\frac{s}{2}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{(a+r) \cdot 2}{s}$$

$$s = \frac{(a+r) \cdot 2}{\cos \alpha} \Rightarrow s = \frac{(3,93 + 11) \cdot 2}{\cos 20^\circ}$$

$$\underline{s = 31,78 \text{ mm}}$$

Drážka má šířku o velikosti 31,78 mm.

2.4.2 Neřešené úlohy

a) Řešte trojúhelník ΔABC , když víte, že platí: $b = 108 \text{ mm}$, $\beta = 37^\circ 02'$, $\alpha = 71^\circ 42'$.

$$[a = 170 \text{ mm}, c = 169,62 \text{ mm}, \gamma = 71^\circ 16']$$

b) Rozložte sílu $F = 84 \text{ N}$ na dvě síly F_1, F_2 , tak, aby platilo $F_1 = F_2$ a zároveň aby $\sphericalangle FF_1 = \sphericalangle FF_2 = 32^\circ$.

$$[\text{Síly } F_1 \text{ a } F_2 \text{ jsou velké přibližně } 49,5 \text{ N.}]$$

2.5 Planimetrie a stereometrie

2.5.1 Řešené úlohy

Úloha 1.

Jak dlouhý vývalek ($l_{\text{vývalku}}$) čtvercového průřezu o straně $a = 16,5 \text{ cm}$ bude třeba k vykování desky $b = 200 \text{ mm}$ široké, $h = 85 \text{ mm}$ tlusté a $l = 0,73 \text{ m}$ dlouhé, počítáme-li s 2,75 % opalem?

Řešení:

1. Abychom mohli vypočítat délku vývalku, musíme prvně vypočítat objem desky, která je 200 mm široká, 85 mm tlustá a 730 mm dlouhá (zároveň jsme rovnou převedli na společné jednotky):

$$V_{\text{deska}} = b \cdot h \cdot l$$

$$V_{\text{deska}} = 200 \cdot 85 \cdot 730$$

$$V_{\text{deska}} = 12\,410\,000 \text{ mm}^3$$

2. Nyní musíme zohlednit 2,75 % opalu, což znamená, že objem vývalku bude o 2,75 % větší než samotný objem desky:

$$V_{\text{vývalek}} = V_{\text{deska}} \cdot \left(1 + \frac{2,75}{100}\right)$$

$$V_{\text{vývalek}} = 12\,410\,000 \cdot 1,0275$$

$$V_{\text{vývalek}} = 12\,751\,275 \text{ mm}^3$$

3. Když víme objem vývalku včetně opalu, nyní zjistíme pomocí délky strany a vývalku, délku vývalku (nezapomeňme převést hodnotu na společné jednotky):

$$V_{\text{vývalek}} = S_{\text{vývalek}} \cdot l_{\text{vývalek}}$$

$$V_{\text{vývalek}} = a^2 \cdot l_{\text{vývalek}}$$

$$12\,751\,275 = 165^2 \cdot l_{\text{vývalek}} \Rightarrow l_{\text{vývalek}} = \frac{12\,751\,275}{165^2}$$

$$l_{\text{vývalek}} = 468,36 \text{ mm}$$

K vykování desky bude potřeba 0,47 m dlouhý vývalek čtvercového průřezu o straně 165 mm.

Úloha 2.

Jaká je hmotnost ocelové tyče o délce 1,65 m, která má kruhový průřez o průměru $d = 35 \text{ mm}$. Hustota dané oceli je $\rho = 7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Řešení:

1. Převedeme průměr na společné jednotky a dále vypočítat objem ocelové tyče:

$$\varnothing d = 35 \text{ mm} \Rightarrow \varnothing d = 0,035 \text{ m}$$

$$V = S \cdot l$$

$$V = \frac{\pi \cdot 0,035^2}{4} \cdot 1,65 \Rightarrow V = 1,587 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

2. Hmotnost ocelové tyče je roven součinu objemu V a hustoty ρ

$$m = V \cdot \rho$$

$$m = 1,587 \cdot 10^{-3} \cdot 7850$$

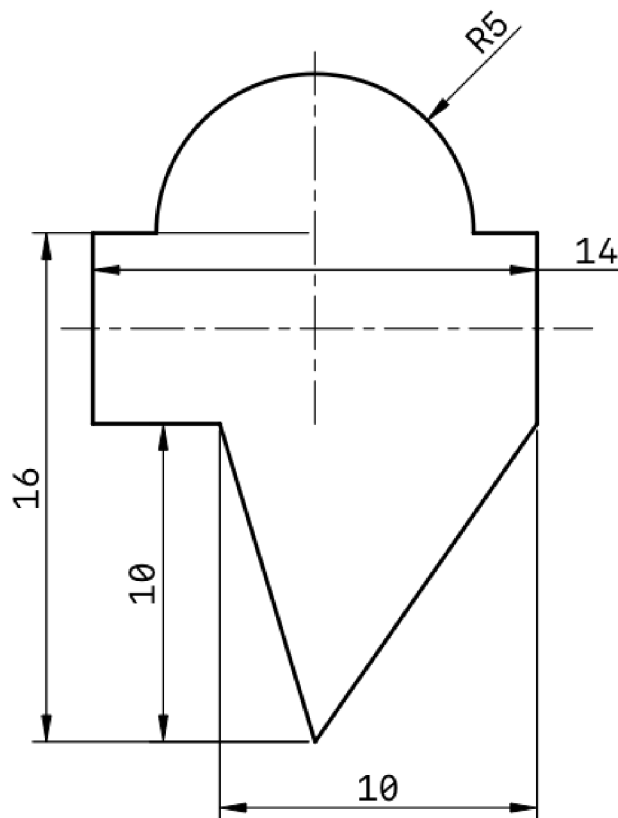
$$m = 12,46 \text{ kg}$$

Hmotnost ocelové tyče je přibližně 12,5 kg.

Úloha 3.

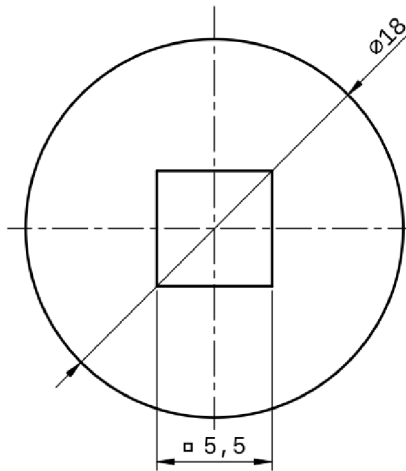
Vypočtěte obsah útvarů uvedených na obrázcích:

- a) Hodnoty jsou uvedené v cm.



Obr. 23 Nedefinovaný obrazec, vlastní

b) Hodnoty jsou uvedené v mm.

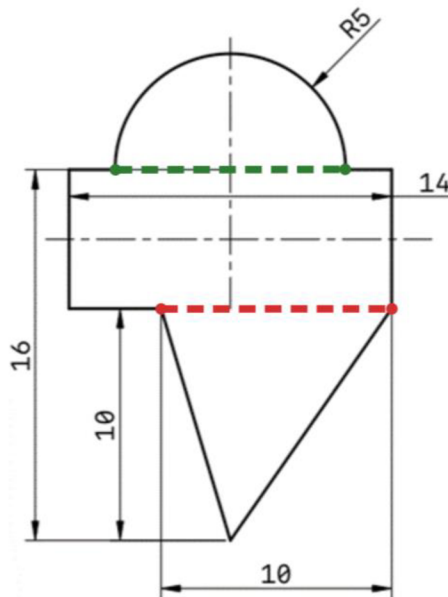


Obr. 24 Profil podložky 5,5, ČSN 02 1728, vlastní

Řešení:

a)

1. Prvně si obrazec rozdělíme na menší části, se kterými se nám bude lépe počítat.



Obr. 25 Pomocné znázornění nedefinovaného obrazce, vlastní

⇒ dostaneme trojúhelník, obdélník a půlkruh. Obsahy těchto menších částí lze nyní snadno vypočítat.

TROJÚHELNÍK:

Podstava trojúhelníku $a = 10$ cm, výška trojúhelníku $v_a = 10$ cm.

$$S_{\Delta} = \frac{a \cdot v_a}{2} \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{10 \cdot 10}{2}$$

$$S_{\Delta} = 50 \text{ cm}^2$$

OBDÉLNÍK

Obdélník má délky stran $a = 6$ cm, $b = 14$ cm.

$$S_{\square} = a \cdot b \Rightarrow S_{\square} = 6 \cdot 14$$

$$S_{\square} = 84 \text{ cm}^2$$

PŮLKRUH

Půlkruh má průměr o délce $d = 10 \text{ cm}$.

$$S_{\triangle} = \frac{\frac{\pi \cdot d^2}{4}}{2} = \frac{\pi \cdot d^2}{8} \Rightarrow S_{\triangle} = \frac{\pi \cdot 10^2}{8}$$

$$S_{\triangle} = 39,27 \text{ cm}^2$$

2. Nyní obsahy jednotlivých částí sečteme a dostaneme celkový obsah obrazce.

$$S = S_{\triangle} + S_{\square} + S_{\triangle}$$

$$S = 50 + 84 + 39,27$$

$$S = \underline{\underline{173,27 \text{ cm}^2}}$$

b)

1. Obsah profilu podložky můžeme vypočítat odečtením obsahu čtverce od obsahu kruhu. $S = S_{\circ} - S_{\square}$

KRUH

Kruh má průměr o velikosti $d = 18 \text{ mm}$.

$$S_{\circ} = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow S_{\circ} = \frac{\pi \cdot 18^2}{4}$$

$$S_{\circ} = 254,47 \text{ mm}^2$$

ČTVEREC

Délka stran čtverce je $a = 5,5 \text{ mm}$.

$$S_{\square} = a^2 \Rightarrow S_{\square} = (5,5)^2$$

$$S_{\square} = 30,25 \text{ mm}^2$$

2. Celkový obsah profilu podložky nyní vypočítáme výše zmíněným rozdílem jednotlivých obsahů.

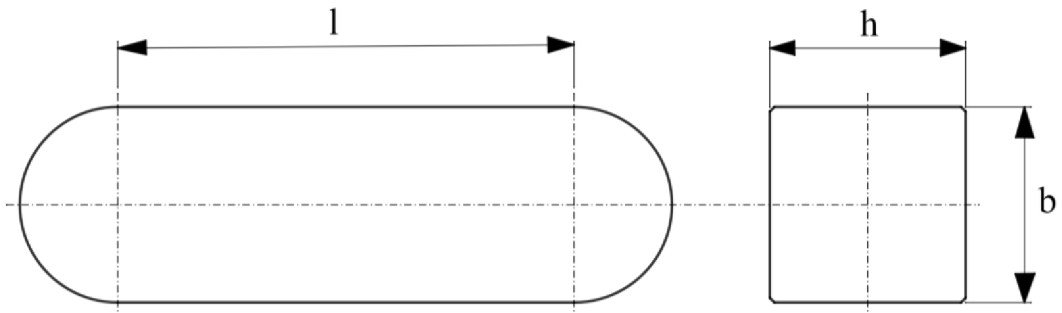
$$S = S_{\circ} - S_{\square} \Rightarrow 254,47 - 30,25$$

$$S = \underline{\underline{224,22 \text{ mm}^2}}$$

Obsahy jednotlivých obrazců jsou tedy $S = 173,27 \text{ cm}^2$ a $S = 224,22 \text{ mm}^2$.

Úloha 4.

Vypočtěte objem těsného pera, jestliže pero je široké $b = 25 \text{ mm}$, vysoké $h = 14 \text{ mm}$ a dlouhé $l = 11 \text{ cm}$. Během řešení nevěnujte pozornost zkosení hran.



Obr. 26 Těsné pero, ČSN 02 2562, vlastní

Řešení:

1. Převeďme všechny údaje na základní jednotky:

$$l = 11 \text{ cm} \Rightarrow l = 110 \text{ mm}$$

2. Řez těsnícím perem je složen z obdélníku a dvou půl kruhů (jednoho kruhu). Vypočítejme jejich obsahy, jejichž sečtením dostaneme obsah řezu těsnícím perem.

- a) Půl kruhy mají průměr roven šířce těsnícího pera $b \Rightarrow S_{\text{kr}} = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$.

$$S_{\text{kr}} = \frac{\pi \cdot 25^2}{4}$$

$$S_{\text{kr}} = 490,873 \text{ mm}^2$$

- b) Obdélník vznikne odebráním půl kruhů z obou konců $\Rightarrow l_{\text{ob}} = l - b = l - d$

$$S_{\text{ob}} = l_{\text{ob}} \cdot b$$

$$S_{\text{ob}} = (l - b) \cdot b = (110 - 25) \cdot 25$$

$$S_{\text{ob}} = 2125 \text{ mm}^2$$

- c) Obsah řezu těsnícím perem $\Rightarrow S = S_{\text{kr}} + S_{\text{ob}}$

$$S = 490,873 + 2125$$

$$S = 2615,873 \text{ mm}^2$$

3. Výpočet objemu V těsnícího pera provedeme vynásobením plochy řezu těsnícím perem a výšky těsnícího pera.

$$V = S \cdot h$$

$$V = 2615,873 \cdot 14$$

$$\underline{V = 36\,622,22 \text{ mm}^3}$$

Objem těsného pera je $36\,622,22 \text{ mm}^3$

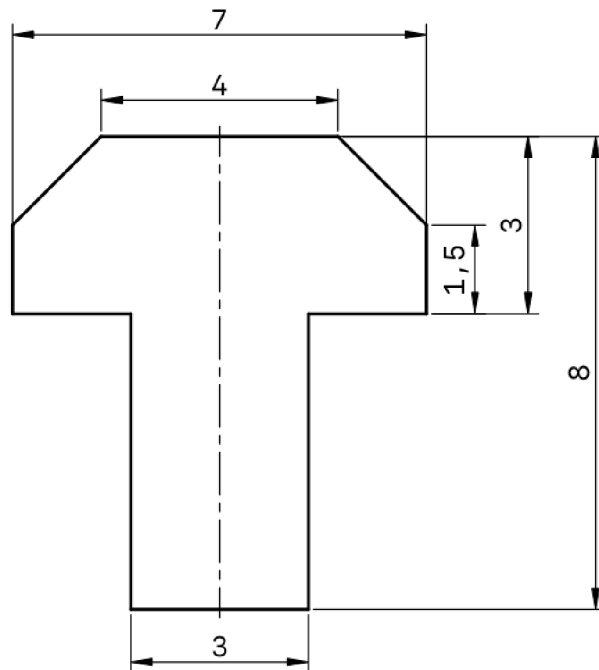
2.5.2 Neřešené úlohy

- a) Určete délku strany a měděné tyče se čtvercovým průřezem o hustotě $\rho = 8,96 \text{ g/cm}^3$, hmotnosti $m = 9 \text{ kg}$ a délce $l = 1890 \text{ mm}$.

[Strana měděné tyče má délku 53 mm.]

- b) Vypočtete obsah útvarů uvedených na obrázcích:

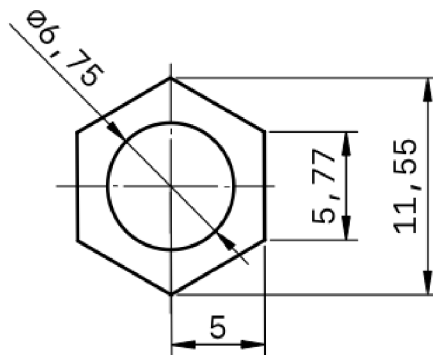
Hodnoty jsou uvedené v cm.



Obr. 27 Mnohoúhelník, vlastní

[S = 33,75 cm²]

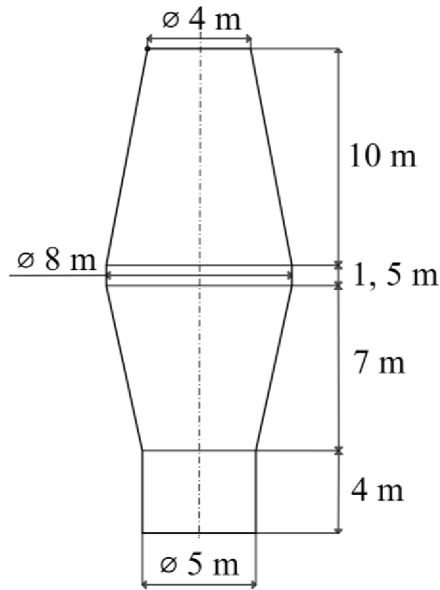
Hodnoty jsou uvedené v mm.



Obr. 28 Profil šestihránné matice M6, ČSN EN ISO 4032 (02 1401), vlastní

[S = 50,82 mm²]

- c) Vysoká pec, která je znázorněna na obrázku slouží k výrobě surového železa. Vypočtěte její objem. (Vzorec pro výpočet obsahu komolého kužele $S = \frac{\pi \cdot v}{3} (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$, kde r_1 je poloměr spodní podstavy, r_2 je poloměr podstavy horní a v je výška komolého kužele).



Obr. 29 Profil vysoké pece, vlastní

[Objem vysoké pece je 683, 56 m³.]

- d) Vypočítejte délku ozubeného řemene na řemenicích s průměry $d_1 = 140$ mm, $d_2 = 20$ cm, při vzdálenosti hřídelů $l = 0,63$ m.

[Délka ozubeného řemene je 1, 795 m.]

2.6 Analytická geometrie

2.6.1 Řešené úlohy

Úloha 1.

Vypočítejte souřadnice vrcholů čtverce, který má délku úhlopříčky $u = 32$ mm, jestliže průnik úhlopříček je $P = [10$ mm, 15 mm].

Řešení:

- Pomocí velikosti úhlopříček jsme schopni vypočítat délku strany:
Úhlopříčky čtverce se vzájemně půlí a svírají úhel 90° ⇒ použijeme Pythagorovu větu

$$a^2 = \left(\frac{1}{2}u\right)^2 + \left(\frac{1}{2}u\right)^2$$

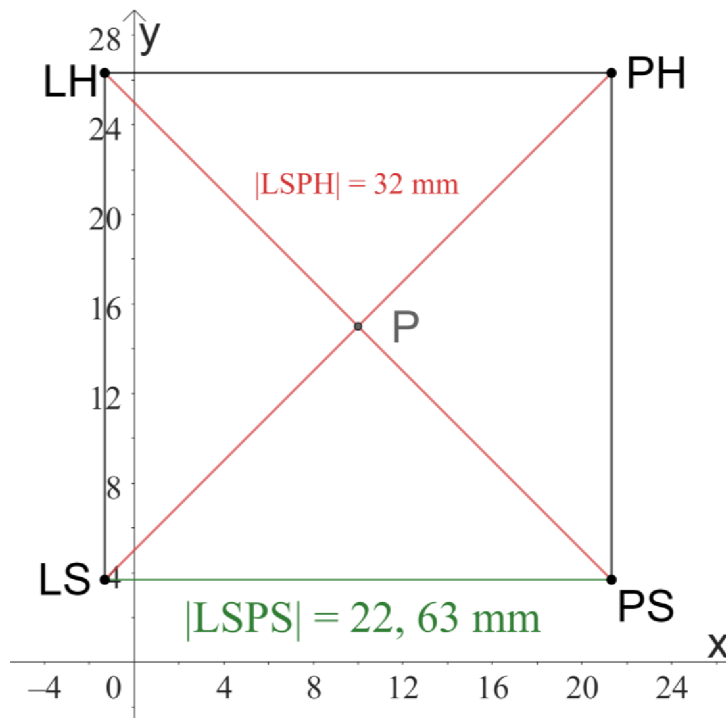
$$a^2 = 16^2 + 16^2 = 2 \cdot 256 \quad \sqrt{}$$

$$a = 22,63 \text{ mm... délka strany čtverce}$$

- Nyní délku strany vydělíme dvěma a získaný údaj budeme přičítat či odečítat k souřadnicím průsečíku P [10 mm, 15 mm] úhlopříček:

$$\frac{a}{2} = 11,315 \text{ mm}$$

- levý spodní vrchol: $LS = [-1,315 \text{ mm}; 3,685 \text{ mm}]$
- levý horní vrchol: $LH = [-1,315 \text{ mm}; 26,315 \text{ mm}]$
- pravý spodní vrchol: $PS = [21,315 \text{ mm}; 3,685 \text{ mm}]$
- pravý horní vrchol: $PH = [21,315 \text{ mm}; 26,315 \text{ mm}]$



Obr. 30 Grafické znázornění čtverce, vlastní

Čtverec má vrcholy o souřadnicích

$$LS = [-1,315 \text{ mm}; 3,685 \text{ mm}], LH = [-1,315 \text{ mm}; 26,315 \text{ mm}],$$

$$PS = [21,315 \text{ mm}; 3,685 \text{ mm}], PH = [21,315 \text{ mm}; 26,315 \text{ mm}].$$

Úloha 2.

Napište rovnici paraboly, která má ohnisko v bodě $E = [-6, 0]$, má-li její řídící přímka rovnici $d: x = -4$.

Řešení:

1. Pro parabolu platí: $|XF| = |Xd|$, kde X je její libovolný bod

$$|XF| = \sqrt{(x+6)^2 + (y-0)^2}$$

$$|Xd| = \frac{|x+4|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |x+4|$$

$$\sqrt{(x+6)^2 + (y-0)^2} = |x+4| \quad /^2$$

$$x^2 + 12x + 36 + y^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$\underline{y^2 = -4x - 20}$$

$$\text{Parabola je dána rovnicí } y^2 + 4x + 20 = 0.$$

Úloha 3.

Pomocí předložených rovnic určete souřadnice všech vrcholů profilu a poté se zamyslete nad tím, jakou součást daný profil připomíná.

$$p: y = 5$$

$$k: (x+30)^2 + y^2 = 225$$

$$l: (x+30)^2 + y^2 = 64$$

$$o: x = -30$$

$$q: y = -5$$

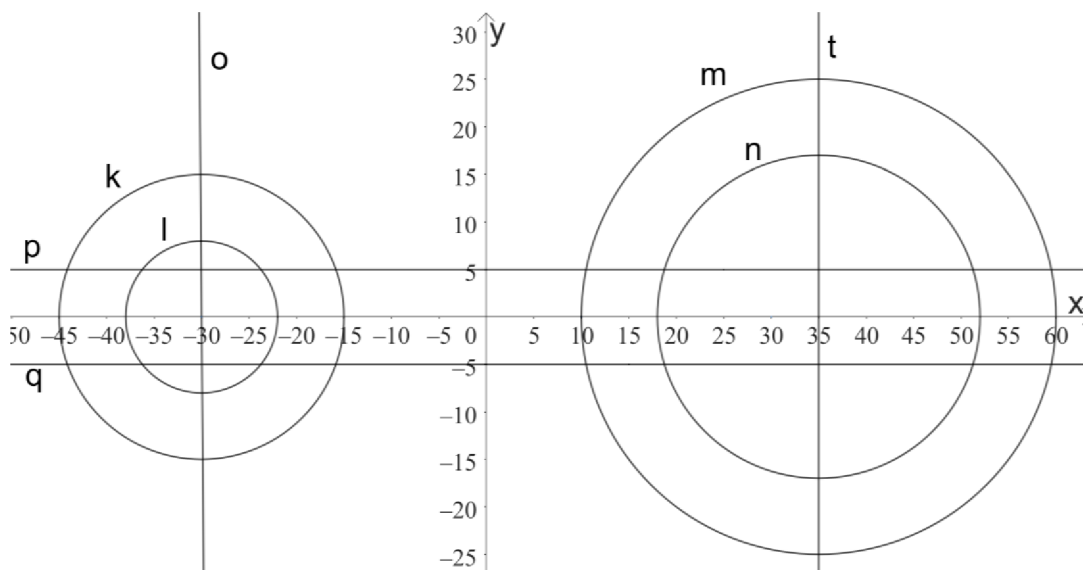
$$m: (x-35)^2 + y^2 = 625$$

$$n: (x-35)^2 + y^2 = 289$$

$$t: x = 35$$

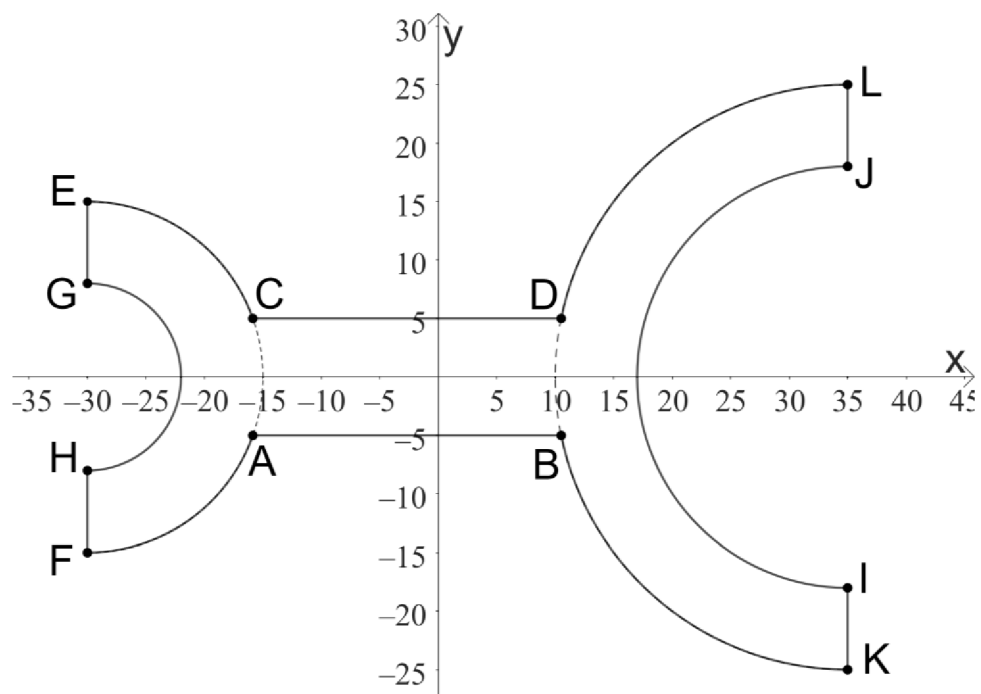
Řešení:

1. Z uvedených rovnic lze vyčíst, že se jedná o 4 přímky a 4 kružnice. Jednoduše lze tyto rovnice načrtnout do kartézské soustavy souřadnic:



Obr. 31 Grafické znázornění rovnic přímek a kružnic, vlastní

2. Na první pohled nám náčrt může připomínat profil ojnice, po úpravě a redukci přebytečných čar, získáme náčrt částečného řezu profilu ojnice, na kterém lze vyčíst souřadnice většiny vrcholů.



Obr. 32 Částečný řez profilu ojnice, vlastní

3. Vypíšeme souřadnice jednotlivých vrcholů, které lze vyčíst z náčrtku:

$$\begin{array}{lll} E = [-30, 15] & I = [35, -18] & A = [x_A, y_A] \\ F = [-30, -15] & J = [35, 18] & B = [x_B, y_B] \\ G = [-30, 8] & K = [35, -25] & C = [x_C, y_C] \\ H = [-30, -8] & L = [35, 25] & D = [x_D, y_D] \end{array}$$

4. Souřadnice vrcholů A, B, C, D vyčíst z náčrtku nejdou, vypočítáme je tedy pomocí průsečíků. Prvně budeme počítat průsečík přímky $p: y = 5$ s kružnicí $k: (x + 30)^2 + y^2 = 225$, čímž získáme x -ovou souřadnici bodů A a C :

$$(x + 30)^2 + y^2 = 225$$

$$(x + 30)^2 + 5^2 = 225$$

$$x^2 + 60x + 900 + 25 = 225$$

$$x^2 + 60x + 700 = 0$$

... kvadratická rovnice

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

, kde $b = 60, a = 1$ a $c = 700$

$$D = 60^2 - 4 \cdot 700 = 3600 - 2800$$

$$D = 800 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{800}$$

$$x_{C1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} \Rightarrow x_{C1,2} = \frac{-60 \pm \sqrt{800}}{2}$$

$$\underline{x_{C1} = -15,86}$$

$$x_{C2} = -44,14$$

Z náčrtku lze odvodit, že vrcholy A a C mají souřadnice $C = [-15,86; 5]$, $A = [-15,86; -5]$.

5. X -ové souřadnice vrcholů B a D vypočítáme také výpočtem průsečíku, akorát s přímkou $q: y = -5$ a kružnicí $m: (x - 35)^2 + y^2 = 625$.

$$(x - 35)^2 + y^2 = 625$$

$$(x - 35)^2 + (-5)^2 = 625$$

$$x^2 + 70x + 1225 + 25 = 625$$

$$x^2 + 70x + 625 = 0$$

... kvadratická rovnice

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

, kde $b = 70, a = 1$ a $c = 625$

$$D = 70^2 - 4 \cdot 625 = 4900 - 2500$$

$$D = 2400 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{2400}$$

$$x_{D1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} \Rightarrow x_{D1,2} = \frac{-70 \pm \sqrt{2400}}{2}$$

$$\underline{x_{D1} = 10,51}$$

$$x_{D2} = -59,49$$

Z náčrtku lze odvodit, že vrcholy B a D mají souřadnice $B = [10,51; -5]$, $D = [10,51; 5]$.

Souřadnice všech vrcholů profilu částečného řezu OJNICE jsou:

$$\begin{array}{lll} E = [-30, 15] & I = [35, -18] & A = [-15,86; -5] \\ F = [-30, -15] & J = [35, 18] & B = [10,51; -5] \\ G = [-30, 8] & K = [35, -25] & C = [-15,86; 5] \\ H = [-30, -8] & L = [35, 25] & D = [10,51; 5] \end{array}$$

2.6.2 Neřešené úlohy

- a) Jsou dány body $A[-5, -4]$, $B[8, -4]$, $C[8, 3]$. Najděte bod D tak, aby body A, B, C, D byly vrcholy pravoúhlého lichoběžníku o obsahu $S = 73,5 \text{ mm}^2$.

[Zbývající vrchol má souřadnice $D [0, 3]$.]

- b) Vypočítejte obsah trojúhelníku v mm^2 , který je tvořen přímkami $p: y = -\frac{1}{2}x + 5$, $q: y = 2x$ a jednou ze souřadnicových os.

[Výsledkem jsou dva trojúhelníky s obsahy 121 mm^2 a 484 mm^2 .]

- c) Pomocí uvedených souřadnic vrcholů určete, o jaký typ profilu se jedná a napište rovnice všech přímk, díky kterým se stane profil uceleným.

$$A = [-6, -12]$$

$$B = [6, -12]$$

$$C = [6, -8]$$

$$D = [2, -8]$$

$$E = [2, 8]$$

$$F = [6, 8]$$

$$L = [6, 12]$$

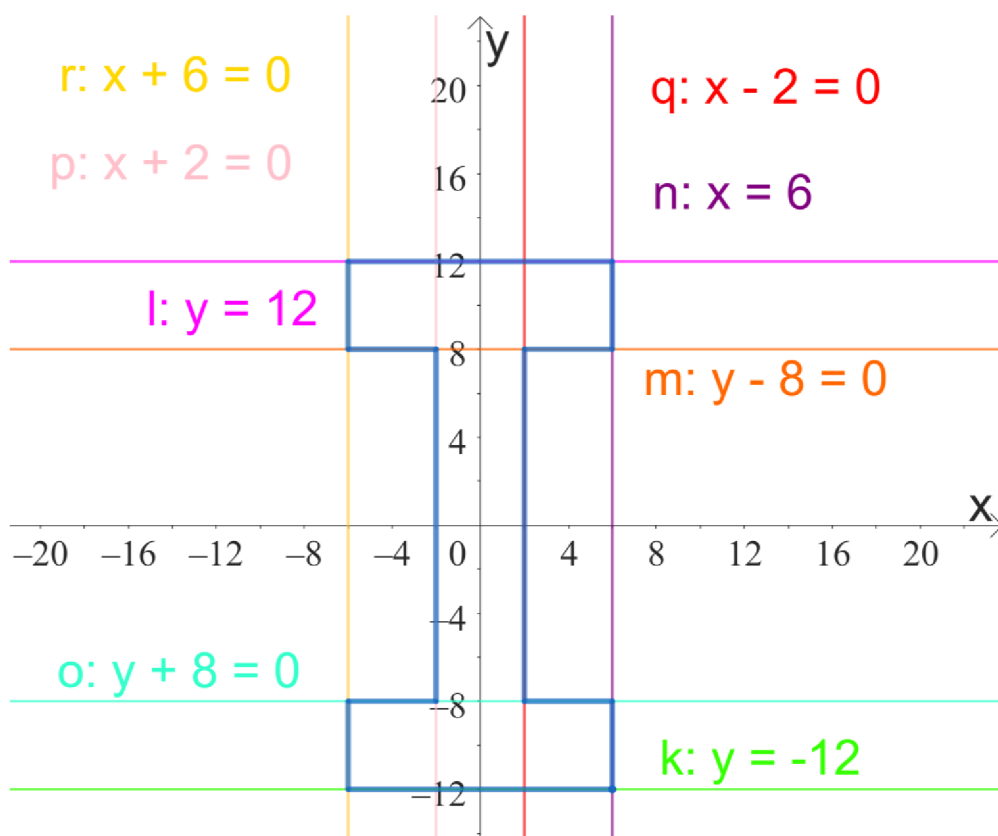
$$G = [-6, 12]$$

$$H = [-6, 8]$$

$$K = [-2, 8]$$

$$J = [-2, -8]$$

$$I = [-6, -8]$$



Obr. 33 Grafické znázornění I profilu, vlastní

[Jedná se o I profil, který je tvořen přímkami: $p: x + 2 = 0$, $q: x - 2 = 0$, $l: y = 12$, $k: y = -12$, $o: y + 8 = 0$, $m: y - 8 = 0$, $n: x = 6$, $r: x + 6 = 0$.]

2.7 Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika

2.7.1 Řešené úlohy

Úloha 1.

Kolik párů mimoběžných hran má kvádr?

Řešení:

1. Kvádr má 12 hran, přičemž jedna hrana se vždy protíná se 4 dalšími hranami (2 na každé stěně).
2. Každá hrana kvádrů je rovnoběžná se třemi dalšími hranami a různoběžná se čtyřmi \Rightarrow zbývají tedy 4 hrany, se kterými je zvolená hrana mimoběžná.
3. Když celkový počet hran kvádrů je 12 a každá hrana je mimoběžná se 4 hranami, vychází tedy, že máme celkem $12 \cdot 4 = 48$ párů mimoběžných hran.
4. Avšak v tomto výpočtu je každý pár započítán dvakrát, tedy správné řešení je:

$$\frac{12 \cdot 4}{2} = \underline{24} \quad \text{Kvádr má 24 párů mimoběžných hran.}$$

Úloha 2.

Frézka má pravděpodobnost selhání 0,025 a soustruh má pravděpodobnost selhání 0,041. Pokud výrobní linka vyžaduje, aby oba stroje fungovaly současně, jaká je pravděpodobnost, že celý systém bude fungovat bez selhání?

Řešení:

1. Frézka má pravděpodobnost selhání 0,025 \Rightarrow pravděpodobnost, že frézka bude pracovat bez selhání je $1 - 0,025 = 0,975 \Rightarrow 97,5 \%$.
2. Soustruh má pravděpodobnost selhání 0,041 \Rightarrow pravděpodobnost, že soustruh bude pracovat bez selhání je $1 - 0,041 = 0,959 \Rightarrow 95,9 \%$.
3. Celková pravděpodobnost, že oba stroje budou pracovat bez selhání je $0,975 \cdot 0,959 = \underline{0,935}$.

Pravděpodobnost, že souhrnná činnost frézky a soustruhu bude bez selhání je 93,5 %.

Úloha 3.

Máme 6 druhů ložisek (válečkové, kuličkové jednořadé a dvouřadé, jehličkové, kuželíkové a soudečkové) a 7 typů hřídelí. Kolik různých kombinací ložiska a hřídele můžeme vytvořit?

Řešení:

1. Pro výpočet použijeme kombinatorické pravidlo součinu, které spočívá v tom, že mezi sebou vynásobíme počet druhů ložisek s počtem typů hřídelí.

$$\text{počet druhů ložisek} \cdot \text{počet typů hřídelí} = 6 \cdot 7 \Rightarrow \underline{42 \text{ různých kombinací}}$$

Se 6 druhy ložisek a 7 typů hřídelí je možné vytvořit 42 různých kombinací.

Úloha 4.

Při výrobě ložisek je pravděpodobnost 95 %, že konkrétní ložisko bude bez vad. Jaká je pravděpodobnost, že ze série 20 ložisek budou všechny bez vad?

Řešení:

1. Ze zadání plyne, že pravděpodobnost výskytu vadného ložiska je 5%. Nás ale zajímá, jaká je pravděpodobnost výskytu 20 ložisek, kde ani jedno ložisko není vadné.
⇒ Použijeme pravděpodobnost současného nastání 20 nezávislých jevů, který je roven součinu pravděpodobností těchto jevů (kombinatorické pravidlo součinu).
2. Musíme mezi sebou dvacet-krát vynásobit 0,95. Pro jednodušší výpočet 0,95 umocníme na 20.
 $0,95 \cdot 0,95 \cdot \dots \cdot 0,95 = 0,95^{20} = 0,3585 \Rightarrow \underline{\underline{35,85\%}}$

Pravděpodobnost, že série 20 ložisek bude bez vad je 35,85 %.

Úloha 5.

Ze záznamů o výrobě válcových vrtáků v určité firmě za posledních šest měsíců zjistěte aritmetický průměr zhotovených vrtáků, modus a medián.

Tab. 7 Záznam půlroční výroby fiktivní firmy na výrobu válcových vrtáků

Srpen 2023	Září 2023	Říjen 2023	Listopad 2023	Prosinec 2023	Leden 2024
12 698 k.	14 056 k.	14 781 k.	13 463 k.	8 795 k.	10 411 k.

Řešení:

1. Průměrný počet zhotovených vrtáků za jeden měsíc vypočítáme tak, když sečteme celkové množství zhotovených vrtáků po dobu šesti měsíců a vydělíme počtem měsíců:

$$\bar{x} = \frac{\text{celkové množství zhotovených vrtáků}}{\text{počet měsíců, za kterých se zhotovily}}$$

$$\bar{x} = \frac{12698 + 14056 + 14781 + 13463 + 8795 + 10411}{6} = \frac{74174}{6}$$

$$\bar{x} = \underline{\underline{12362,3}}$$

Průměrné množství válcových vrtáků vyrobených za jeden měsíc je 12 362 kusů.

2. Modus je nejčastější hodnota statistického znaku:

$$\hat{x} = \underline{\underline{\text{Říjen 2023 (14 781 kusů)}}$$

3. Mediánem rozumíme prostřední hodnotu ve skupině dat, které jsou seřazeny podle velikosti:

- a) Seřadíme výše zmíněné hodnoty podle velikosti:

$$8\,795, 10\,411, 12\,698, 13\,463, 14\,056, 14\,781$$

- b) Tím, že máme sudý počet hodnot, musíme spočítat aritmetický průměr prostředních dvou hodnot:

$$\tilde{x} = \frac{12\,698 + 13\,463}{2} = \frac{26\,161}{2}$$

$$\tilde{x} = \underline{\underline{13\,080,5\text{ kusů}}}$$

2.7.2 Neřešené úlohy

- a) Při výrobě elektronických součástek máme sadu 7 různých tranzistorů. Kolik různých skupin tří tranzistorů můžeme sestavit pro jeden elektrický obvod?

[Pro jeden elektrický obvod můžeme sestavit 35 skupin po třech tranzistorech.]

- b) Měření pevnosti materiálu ukazuje průměrnou hodnotu 400 MPa s odchylkou 25 MPa. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný vzorek bude mít pevnost menší než 395 MPa?

c) [Pravděpodobnost, že náhodně vybraný vzorek bude mít menší pevnost než 395 MPa je 42,07 %.]

3. Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo představení alespoň malé části úloh z matematiky s technickým zaměřením pro střední odborné školy, které se běžně nevyskytují ve školních učebnicích či sbírkách úloh, a i přesto by měly být nedílnou součástí výuky matematiky na středních odborných školách. Část úloh byla vytvořena na základě čerpání inspirace a adaptace vůči našim potřebám ze sbírky úloh z matematiky pro SPŠ a SZTŠ [2].

Při zpětném pohledu na tuto práci lze tvrdit, že stanovené cíle v rámci bakalářské práce byly úspěšně dosaženy. Plnění cílů bakalářské práce nám umožnilo rozšíření si dovedností ve vyhledávání relevantních zdrojů a informací, přičemž během tohoto procesu bylo objeveno mnoho užitečných zdrojů. Bohužel z důvodu omezenosti rozsahu práce nemohly být využity všechny. Avšak vybrané materiály byly důkladně zpracovány, aby mohly být studentům a jejich učitelům poskytnuty jako kvalitní zdroje pro studium matematiky, zejména se zaměřením na technické oblasti. Práce nás zavedla k objevu mnoha literárních zdrojů, učebnic a sbírek úloh z matematiky, které představují cenný přínos pro učitele a studenty matematiky na středních odborných školách.

Při přípravě praktické části došlo k uvědomění si náročnosti vymýšlení a přizpůsobování úloh pro konkrétní cílovou skupinu studentů. Tvůrčí práce učitelů, kteří denně vytvářejí nové a zajímavé příklady pro své studenty, je obdivována. Tato zkušenost nám otevřela oči pro složitost procesu vytváření vzdělávacích materiálů a zdůraznila význam pedagogické kreativity při přípravě výuky.

Důležitou součástí bakalářské práce bylo uvědomění si souvislosti matematiky s technickými obory. Toto propojení je vnímáno jako klíčové pro budoucí vzdělávání a pracovní uplatnění studentů. Věříme, že tímto způsobem může být posílena technická gramotnost a motivace studentů k učení matematiky.

Bakalářská práce nám přinesla mnoho poznatků a nových směrů pro budoucí výzkumy a profesní rozvoj, za což jsme velmi vděční.

Seznam použité literatury

- [1] DOBROVOLNÝ, Bohumil. *Dílenská matematika: učebnice základů matematiky pro dělníky a techniky v praxi*. 23. svazek sbírky Hokrovy technické a dílenské příručky. Praha: Josef Hokr, 1946.
- [2] KRIEGELSTEIN, Eduard. *Sbírka úloh z matematiky pro SPŠ a SZTŠ*. 10. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1965.
- [3] ČERMÁK, Miloš, Hana KOŘÍNKOVÁ a Antonín KAMARÝT. *Sbírka úloh z matematiky: příručka pro přípravu na vysokou školu: určeno [také] pro stud. vyšších roč. stř. škol*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1967. Polytechnická knižnice (SNTL).
- [4] NOVOVESKÝ, Štefan, Karol KRIŽALKOVIČ a Imrich LEČKO. *Zábavná matematika: 300 3 zábavných matematických úloh*. 4. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1974. Knižnica všeobecného vzdelávania.
- [5] BRANIŠ, Karel, Stanislav HORÁK a Milan VACEK. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU*. Dotisk, 5. vydání. Praha: Prometheus, 1986. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-465-0.
- [6] JIRÁSEK, František, Karel BRANIŠ, Stanislav HORÁK a Milan VACEK. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. Učebnice pro střední školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-042-1341-3.
- [7] KUBÁT, Josef, Josef PILGR a Dag HRUBÝ. *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: maturitní minimum*. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6030-6.
- [8] HAVRLANT, Lukáš. Matematika polopatě. HAVRLANT, Lukáš. *Matematika polopatě* [online]. 2006 [cit. 2024-01-16]. Dostupné z: <https://www.matweb.cz/>.
- [9] ČERMÁK, Pavel a Petra ČERVINKOVÁ. *Odmaturuj! z matematiky 1*. Vyd. 4. Brno: Didaktis, 2007. Odmaturuj!. ISBN 978-80-7358-102-2.
- [10] HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro dvouleté a tříleté učební obory SOU a SOŠ*. 3., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-344-8.
- [11] Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání: 23 - 41 - M/01 Strojírenství [online]. In: . s. 88 [cit. 2024-02-16]. Dostupné z: <https://www.edu.cz/rvpsov/ciste/23-41-M01.pdf>
- [12] Rámcový vzdělávací program pro obor vzdělání: 26 - 41 - M/01 Elektrotechnika [online]. In: . s. 87 [cit. 2024-02-16]. Dostupné z: <https://www.edu.cz/rvpsov/ciste/26-41-M01.pdf>
- [13] LEINVEBER, Jiří a Pavel VÁVRA. *Strojnické tabulky: učebnice pro školy technického zaměření*. Šesté vydání. Úvaly: Albra, 2017. ISBN 978-80-7361-111-8.

- [14] ELUC. OLOMOUCký KRAJ. Implementace IKAP [online]. 2020, 2022-01-17 [cit. 2024-03-20]. Dostupné z: <https://eluc.ikap.cz/>

Internetové programy

- [1] HOHENWARTER, Markus. *GeoGebra.org*. Online. 2001, 16.1.2024. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/>. [cit. 2024-02-17].
- [2] Shapr3D, online, angličtina, Budapešť, 2014 [Březen 2022]. Dostupné z <https://www.shapr3d.com/> [cit. 2024-03-12]

Seznam obrázků

Obr. 1 Učebnice základů matematiky pro dělníky a techniky z praxe, vlastní.....	12
Obr. 2 Sbírka úloh z matematiky pro SPŠ a SZTŠ, vlastní.....	13
Obr. 3 Sbírka úloh z matematiky: Příručka pro přípravu na vysokou školu, vlastní.....	14
Obr. 4 Zábavná matematika, vlastní.....	15
Obr. 5 Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 1. část, vlastní.....	16
Obr. 6 Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 2. část, vlastní.....	17
Obr. 7 Sbírka úloh z matematiky pro střední školy: Maturitní minimum, vlastní.....	18
Obr. 8 Matematika polopatě.....	19
Obr. 9 Odmaturuj! z matematiky 1, vlastní.....	20
Obr. 10 Sbírka úloh z matematiky pro SOU a SOŠ, vlastní.....	21
Obr. 11 Vzdálenost ozubených kol, vlastní.....	26
Obr. 12 Graf funkce f , vlastní.....	32
Obr. 13 Graf funkce k , vlastní.....	33
Obr. 14 Graf funkce l , vlastní.....	34
Obr. 15 Graf znázorňující závislost elektrického napětí na klesajícím čase, vlastní.....	35
Obr. 16 Graf znázorňující závislost otáček druhého kola na počtu zubů, vlastní.....	36
Obr. 17 Graf funkce f , vlastní.....	36
Obr. 18 Graf znázorňující závislost délky pružiny na zatěžující síle, vlastní.....	37
Obr. 19 Prutový nosník, vlastní.....	38
Obr. 20 Znázornění rovnováhy sil v prutech, vlastní.....	39
Obr. 21 Grafické znázornění profilu drážky, vlastní.....	40
Obr. 22 Pomocné znázornění profilu drážky, vlastní.....	40
Obr. 23 Nedefinovaný obrazec, vlastní.....	42
Obr. 24 Profil podložky 5,5, ČSN 02 1728, vlastní.....	43
Obr. 25 Pomocné znázornění nedefinovaného obrazce, vlastní.....	43
Obr. 26 Těsné pero, ČSN 02 2562, vlastní.....	44
Obr. 27 Mnohouhelník, vlastní.....	46
Obr. 28 Profil šestihrané matice M6, ČSN EN ISO 4032 (02 1401), vlastní.....	46
Obr. 29 Profil vysoké pece, vlastní.....	47
Obr. 30 Grafické znázornění čtverce, vlastní.....	48
Obr. 31 Grafické znázornění rovnic přímk a kružnic, vlastní.....	49
Obr. 32 Částečný řez profilu ojnice, vlastní.....	49
Obr. 33 Grafické znázornění I profilu, vlastní.....	51

Seznam tabulek

Tab. 1 Bibliografické údaje učebnic a sbírek úloh z matematiky pro SŠ.....	11
Tab. 2 Obsah učebnic a sbírek úloh z matematiky pro střední odborné školy s ohledem na RVP SOV.....	22
Tab. 3 Obsah učebnic a sbírek úloh z matematiky pro střední odborné školy s ohledem na RVP SOV.....	23
Tab. 4 Tabulka funkčních hodnot funkce f	31
Tab. 5 Tabulka funkčních hodnot funkce k	32
Tab. 6 Tabulka funkčních hodnot rovnice pro výpočet otáček druhého kola.....	35
Tab. 7 Záznam půlroční výroby fiktivní firmy na výrobu válcových vrtáků.....	53