Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Stereometrické úlohy řešené v programu GeoGebra

Vypracovala: Lenka Horáčková
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek Ph.D.

České Budějovice 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Stereometrické úlohy řešené v programu GeoGebra jsem vypracovala samostatně, pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v citované literatuře.

Prohlašuji, že v souladu s §47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ....

Lenka Horáčková

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, cenné rady, zapůjčené materiály, za trpělivost a čas.

Anotace

Cílem bakalářské práce na téma Stereometrické úlohy řešené v programu GeoGebra bylo vytvořit kolekci vlastních řešených příkladů ze stereometrie z učiva v rozsahu od základní školy, přes střední školu až po vysokoškolskou přípravu učitelů matematiky. Podpůrným prostředkem pro tuto bakalářskou práci je program GeoGebra. Práce se zaměřuje zejména na hranatá tělesa v rozsahu učiva na základních a středních školách a částečně i na vysokých školách.

Klíčová slova: Stereometrie, GeoGebra, Geometrický prostor, 3D, krychle, kvádr, jehlan, objem, povrch, Pythagorova věta, odchylky, řezy

Abstract

The aim of the bachelor‘s thesis on the subject of ‘Solving stereometric problems in GeoGebra’ was to create a collection of own solved examples from stereometry from the curriculum in the range from primary school, through secondary school to university training of mathematics teachers. The GeoGebra program is a support tool for this bachelor’s thesis. The work focuses mainly on the curriculum of primary and secondary schools, partly also on the curriculum at universities. The work focuses mainly on square figures in the scope of the curriculum at primary and secondary schools and partly also at universities.

Key words: Stereometry, GeoGebra, Geometric space, 3D, cube, cuboid, pyramid, volume, surface, Pythagoras’s theorem, deviation, cross-section

Obsah

1 Úvod

Bakalářská práce na téma Stereometrické úlohy řešené v programu GeoGebra se zaměřuje na vytvoření vlastních řešených příkladů pomocí programu GeoGebra pro žáky základních a středních škol.

S vnímáním trojrozměrného prostoru, kterým se stereometrie zabývá, jsme vázáni už od dětství. Jako malí si hrajeme s různými tělesy, například: kostičkami, válci, kvádry, jehlany a kužely, ze kterých si stavíme různé budovy. Postupem let používáme hrací kostky k deskovým hrám, koule ke kopané či ke stavění sněhuláka, ale nepozastavujeme se nad všemi tvary a spojitostmi se stereometrií. S nástupem do školních zařízení se se stereometrií postupně seznamujeme a učíme se vzorečky a jak co vypočítat.

Téma této bakalářské práce jsem si vybrala především z důvodů, že mě stereometrie bavila již od dětství a s GeoGebrou jsem se seznámila až na střední škole, kde mě okamžitě velmi zaujala svou rozmanitostí.

V mé bakalářské práci se soustředím pouze na hranatá tělesa (krychle, kvádr, pravidelný jehlan, včetně komolého). Mým cílem bylo vytvořit příklady, které jsem pomocí programu GeoGebra vymodelovala a přijít na to, jak žákům v budoucnu stereometrii názorněji vysvětlit.

Bakalářská práce je strukturovaná do kapitol dle těles, které se probírají na základních a středních školách dle RVP [13], [14].

V úvodu každé kapitoly je uvedena možná definice daného tělesa. Následuje podkapitola sítě tělesa, ve které se zabývám její definicí, nejběžnějším příkladem sítě a praktickým příkladem na její určení. Další podkapitolou je povrch a objem tělesa, kde uvádím vždy jeden příklad na užití Pythagorovy věty [8], což jsou témata probíraná na základních školách. Žáci s objemem a povrchem těles počítají dva typy úloh, buď mají zadané hrany těles a vypočítají objem či povrch. Anebo mají zadanou velikost povrchu nebo objemu tělesa a mají pomocí vzorečku dopočítat velikost hrany [1], [4], [8]. Poté uvádím podkapitoly řezy tělesem a odchylky v tělese, což jsou témata probíraná na středních školách [11], [12], [13]. Pomocí programu GeoGebra lze řezy tělesy názorněji ukázat a vysvětlit.

V kapitole krychle se zabývám navíc podkapitolou krychlové stavby, na kterých se snažím vysvětlit pojmy průměty (půdorys, bokorys, nárys) a kótování.

Součástí mé bakalářské práce jsou přílohy, které lze vytisknout a které slouží k řešení některých příkladů (sítě, řezy). Zároveň je také součástí bakalářské práce kniha Stereometrie, vytvořená v programu GeoGebra viz odkaz: https://www.geogebra.org/m/ed4xvpxx, ve které se na rozdíl od psané formy zabývám nejen hranatými tělesy, ale také oblými. Kniha je strukturována do kapitol podle těles s možností praktického vyzkoušení některých částí. V knize je také možnost vyzkoušet dynamické applety.

2 Stereometrie

Stereometrie je geometrie v prostoru [11], která se zabývá geometrickými útvary. Mezi základní pojmy patří: bod, přímka a rovina. Stereometrie se zabývá nejen vzájemnou polohou bodů, přímek a rovin, ale také tělesy, jejich řezy a výpočty odchylek v tělesech [12].

Tělesa, se kterými se ve stereometrii žáci setkávají již na základních školách, jsou: krychle, kvádr, jehlan, komolý jehlan, kužel, komolý kužel, válec a koule.

Na prvním stupni se žáci učí poznávat tělesa, pojmenovat je a poznat jejich sítě. Zároveň tělesa pro lepší představivost vytvářejí (modelují) [5], [7]. Dále pak pracují s krychlovými stavbami a kreslí průměty (půdorys, bokorys a nárys) nejen těles, ale i různých předmětů [3].

Na druhém stupni se žáci učí, co je objem a povrch tělesa a počítají různé úlohy s tím související. Dále pak využívají Pythagorovu větu v prostoru především na určení tělesových úhlopříček [4].

Na středních školách se žáci potýkají s odchylkami přímek a rovin v tělesech, které počítají užitím sinové a kosinové věty a pak s řezy těles [6], [12].

Na vysokých školách pak studenti probírají detailněji promítání těles a řezy tělesy.

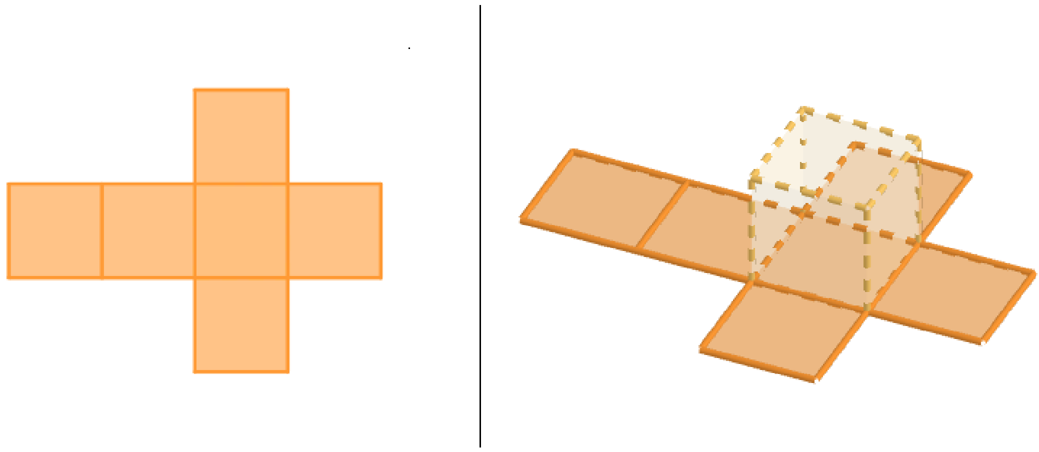
3 Krychle

Krychle je pravidelný čtyřboký hranol, všechny její stěny jsou shodné čtverce [10].

3.1 Síť krychle

Pojem síť krychle může být definován jako: *Síť krychle se skládá ze šesti shodných čtverců* [10]. Případně jako: *Síť krychle je rozložený povrch tělesa. Tzn., že síť je tedy složená ze šesti shodných, vzájemně se dotýkajících čtverců, které ovšem nemohou být pospojovány náhodně. Musí být rozmístěny tak, aby byly schopné obalit krychli o stejné velikosti, tak aby se žádné ze stěn nepřekrývaly, a naopak obalily celou krychli* (viz obrázek 1) [15].

V učebnicích se pak vyskytují úlohy typu: Nakreslete všechny možné sítě krychle, případně určete, zda se z daných obrazců dá sestavit krychle [1], [4].



Obrázek 1: příklad sítě krychle

Na obrázku 1 vidíme základní síť krychle a složenou krychli vytvořenou v programu GeoGebra.

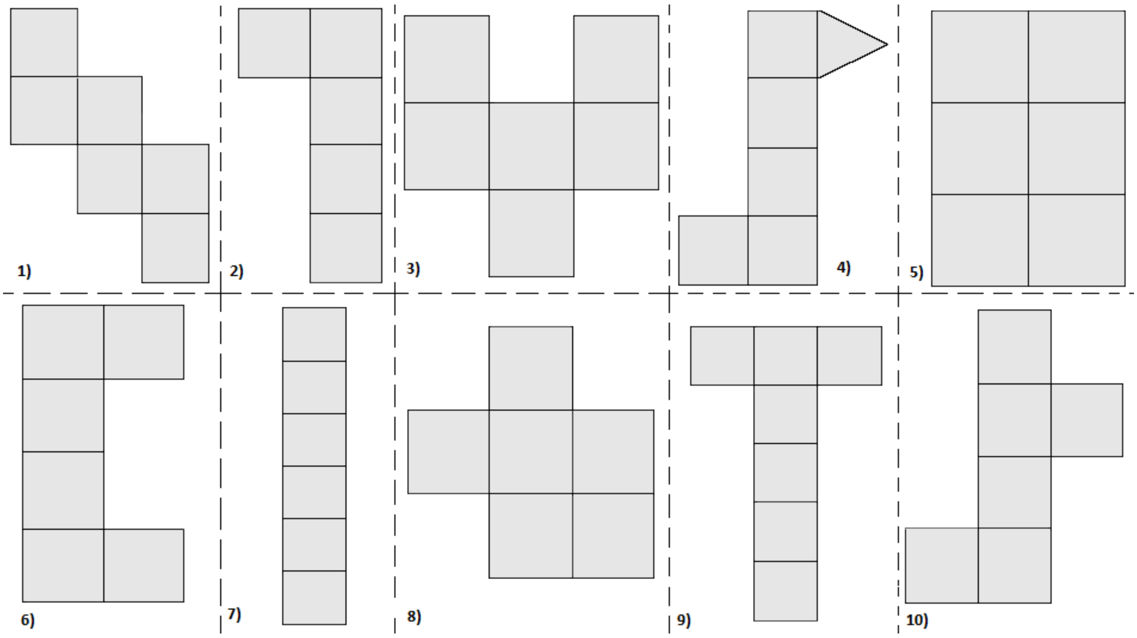
Názorně k vidění v knize na GeoGebře viz odkaz: https://www.geogebra.org/m/kwxmgzfp

Příklad 1:

a) Vystřihněte z přílohy 1 obrazec číslo 1 a číslo 6 a pokuste se z nich sestavit krychle.

b) Zdůvodněte, proč z nich lze či nelze krychle složit.

c) Na základě předcházejícího úkolu rozhodněte, zda ze zbylých 8 obrazců krychle složíte a zdůvodněte svou domněnku.



Obrázek 2: zadání příkladu 1

Řešení:

a, b) Vystřihnutím zjistíme, že z obrazce číslo 1 krychli lze složit a z obrazce číslo 6 krychli nelze složit, z důvodu překrývání stran.

c) Ze zbylých 8 obrazců lze složit pouze obrazec číslo 10. Možným zdůvodněním, proč ostatní nelze složit jsou: číslo 2 nelze, protože chybí jeden čtverec. Číslo 3 nelze, protože by se dva čtverce překrývaly. Číslo 4 nelze, protože jedna stěna má tvar trojúhelníku. Číslo 5 nelze, síť by se musela rozstřihnout na jednotlivé čtverce. Číslo 7 nelze, chybí podstavy. U čísla 8 by se stěny opět překrývaly. Číslo 9 nelze složit z důvodu sedmi čtverců.

3.2 Krychlové stavby

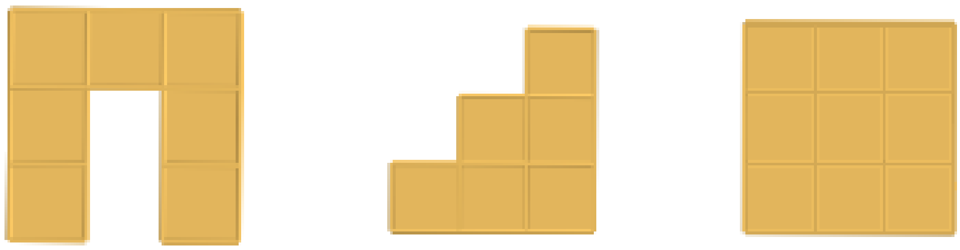
Krychlovou stavbou rozumíme stavbu z libovolného počtu krychlí. Krychlové stavby slouží k tomu, aby se žáci seznámili s pojmy průměty (půdorys, bokorys, nárys) a s kótováním. Řeší se tři typy úkolů:

1) typ A, zakreslení průmětů dle zadané stavby (viz příklad 2)
2) typ B, sestavení stavby podle průmětů (viz příklad 3)
3) typ C, postavení krychlové stavby podle kótovaného půdorysu (viz příklad 4) [3], [5].

Příklad 2: Podle fotografie nakreslete na čtverečkovaný papír půdorys, bokorys a nárys dané krychlové stavby.

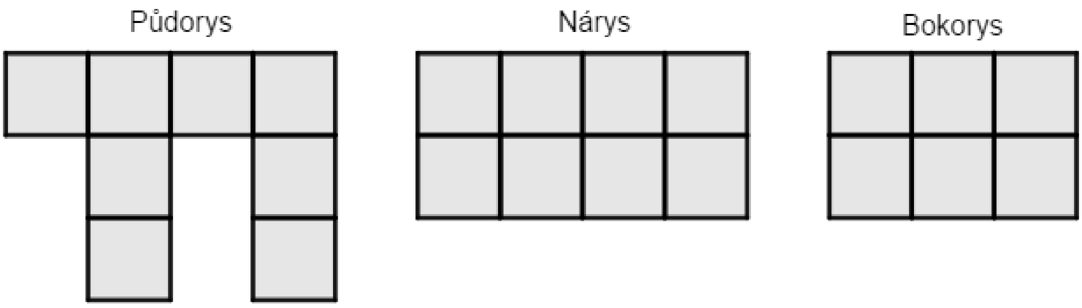
Obrázek 3: zadání příkladu 2

Řešení:



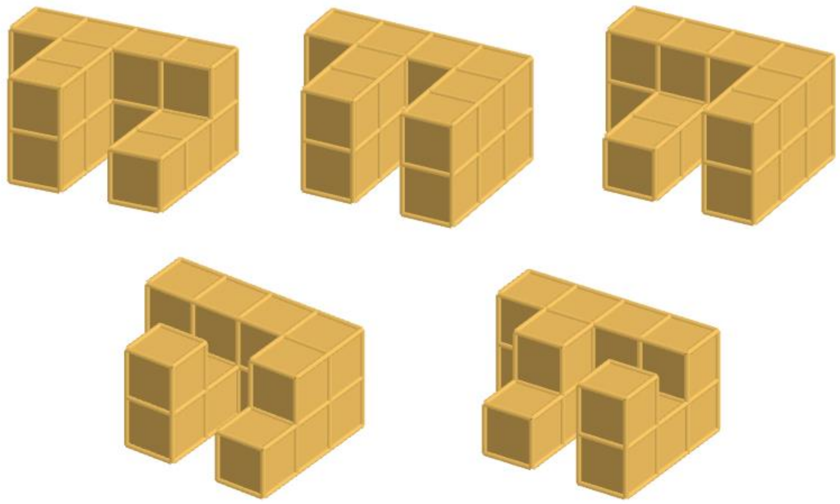
Obrázek 4: půdorys (vlevo), bokorys (uprostřed), nárys (vpravo)

Příklad 3: Podle zadaných průmětů sestavte co nejvíce různých staveb.



Obrázek 5: zadání příkladu 3

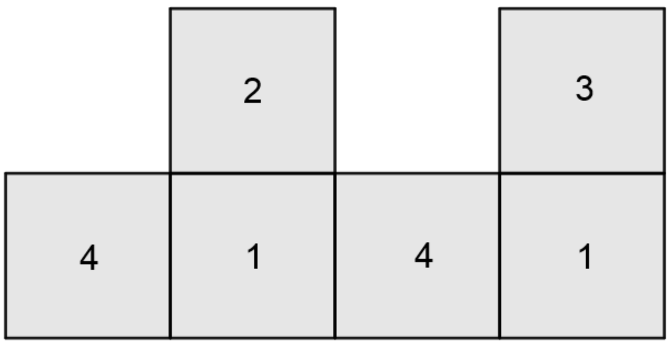
Řešení:



Obrázek 6: možná řešení příkladu 3

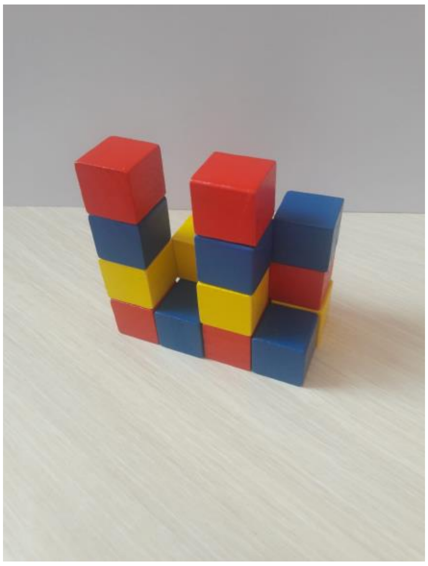
Z příkladu číslo 3 vidíme, že ze zadaného půdorysu, bokorysu a nárysu lze postavit více podobných staveb, které mají stejné průměty. K sestavení jediné stavby se zavádí pojem kótovaný půdorys a pojem kóta. Kóta (číslo v každém políčku půdorysu) označuje počet krychlí (výšku) dané stavby.

Příklad 4: Sestavte krychlovou stavbu podle následujícího kótovaného půdorysu.



Obrázek 7: zadání příkladu 4

Řešení:



Obrázek 8: řešení příkladu 4

3.3 Povrch, objem

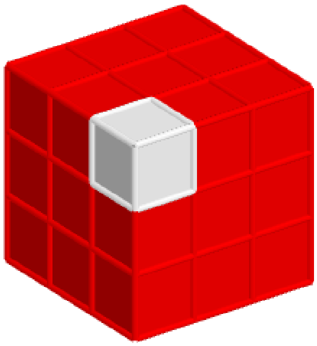
Povrchem krychle rozumíme součet obsahů všech stěn tedy šesti shodných čtverců.

Objem krychle je velikost prostoru, který krychli vyplňuje [9].

$S = 6 \cdot a \cdot a = 6a^2$ $\qquad V = a \cdot a \cdot a = a^3$

Applety na výpočet objemu a povrchu krychle jsou názorněji k nahlédnutí v knize GeoGebra viz odkaz: https://www.geogebra.org/m/pwu6qbae.

Příklad 5: Vypočtěte povrch dané stavby, víte-li, že povrch celé bílé krychle je 6 cm^2.



Obrázek 9: zadání příkladu 5

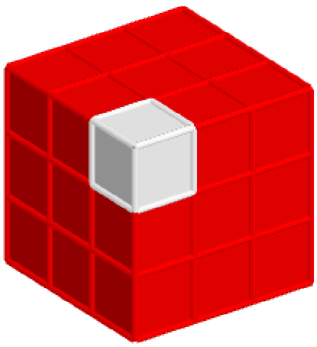
Řešení:

Jelikož známe povrch, musíme si nejdříve vypočítat velikost jedné hrany.

$6 = 6 \cdot a^2 \qquad a^2 = 1 \qquad a = 1$

Z obrázku vidíme, že v jedné řadě jsou tři krychle stejné velikosti, celkem jsou tři řady a do výšky jsou také tři stavby. Z tohoto důvodu: $S = 6 \cdot 3a \cdot 3a = 6 \cdot 3 \cdot 3 = 54cm^2$.

Příklad 6: Vypočtěte objem dané stavby, víte-li, že objem celé bílé krychle je 1 cm^3.



Obrázek 10: zadání příkladu 6

Řešení:

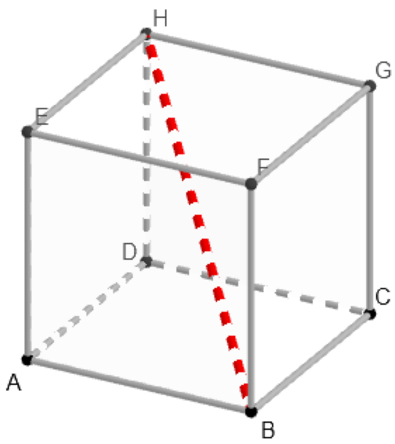
Známe-li objem jedné krychle, stačí pouze spočítat, kolik takových krychlí obsahuje celá stavba a vynásobit počet krychlí s velikostí objemu. Celkem máme 27 krychlí, proto:

$V_{stavby} = 27 \cdot V_{krychle} = 27 \cdot 1 = 27cm^3$

Pro zkoušku spočítáme stejný příklad užitím vzorečku na objem. Nejdříve zjistíme velikost hrany jedné krychle. Poté vynásobíme počtem krychlí v jednom sloupci či řadě a vypočítáme celkový objem, $a = 1$ $V = (3 \cdot a)^3 = 3^3 = 27cm^3$

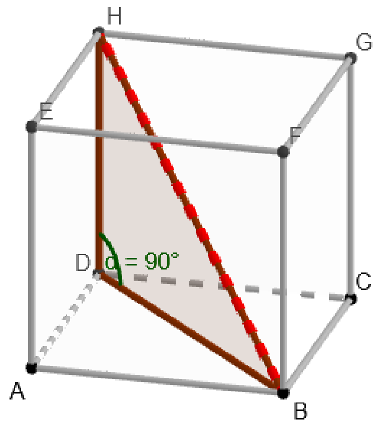
Závěr: jak vidíme, objem lze počítat u pravidelných staveb dvěma způsoby a výsledek bude shodný.

Příklad 7: Vypočítejte tělesovou úhlopříčku *BH* krychle *ABCDEFGH*, hrana krychle je 3 cm.



Obrázek 11: zadání příkladu 7

Řešení:



Obrázek 12: řešení příkladu 7

Tělesová úhlopříčka *BH* je přeponou pravoúhlého trojúhelníka *BDH*, ve kterém úsečky *BD* a *DH* jsou odvěsny. Zároveň *DH* je hrana krychle a *BD* je stěnová úhlopříčka. Pro výpočet tělesové úhlopříčky je nedříve potřeba vypočítat stěnovou úhlopříčku, obě pomocí Pythagorovy věty ($c^2 = a^2 + b^2$).

Výpočet stěnové úhlopříčky *BD*:

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

$BD^2 = 3^2 + 3^2$

$BD^2 = 18$

$BD = \sqrt{18} \cong 4{,}24$

Výpočet tělesové úhlopříčky *BH:*

$BH^2 = DH^2 + BD^2$

$BH^2 = 3^2 + \sqrt{18}^2$

$BH^2 = 27$

$BH = \sqrt{27} \cong 5{,}19$

3.4 Řezy krychle

Řezem krychle rozumíme průnik tělesa a roviny. Je to rovinný útvar, jehož hranice je průnik povrchu *tělesa a roviny řezu. Hranice řezu krychle se skládá z průniků roviny řezu* *se stěnami krychle. Sestrojit řez rovinou tedy znamená sestrojit průsečnice dané roviny s rovinami jednotlivých stěn* [12].

Řezy se provádí:

a) rovinou danou třemi body

b) rovinou danou bodem a přímkou.

Ad a) Tyto body mohou mít následující polohy:

1) Všechny tři body jsou zároveň vrcholy tělesa

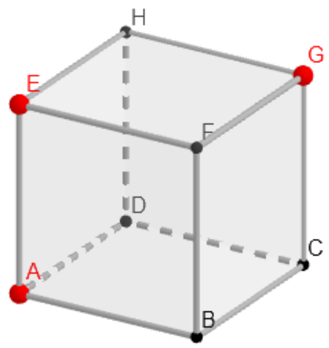
2) Body leží na hranách tělesa

3) Body leží mimo těleso

4) Kombinace prvních tří možností

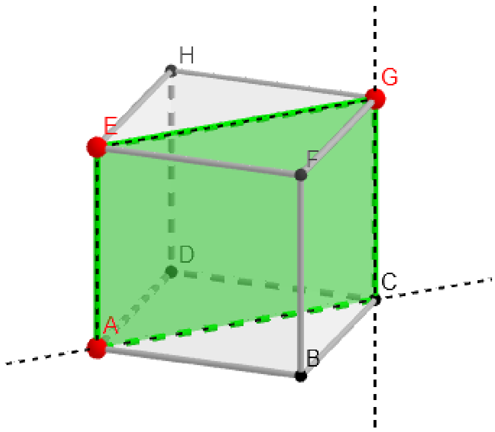
Ad 1) V tomto případě žáci musí dát pozor na polohu zadaných bodů. Jsou možné dva případy poloh těchto bodů, tj. zda dva zadané body leží v rovině jedné stěny či nikoliv (viz příklad 8).

Příklad 8: Proveďte řez krychle rovinou *AEG*.



Obrázek 13: zadání příkladu 8

Řešení:

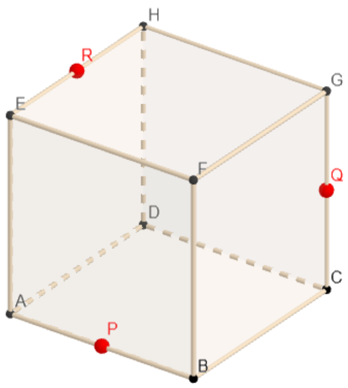


Obrázek 14: řešení příkladu 8

Body *AE* tvoří hranu krychle, proto je můžeme spojit. Body *E, G* leží ve stejné rovině, a proto je také můžeme spojit. Bod *A* a *G* neleží v rovině jedné stěny, proto je nemůžeme spojit úsečkou přímo. Z tohoto důvodu vedeme rovnoběžky s úsečkami *AE* a *EG* tak, aby se protnuly v bodě (vrcholu) *C*. Bod *C* je čtvrtým bodem řezu krychle rovinou *AEG*.

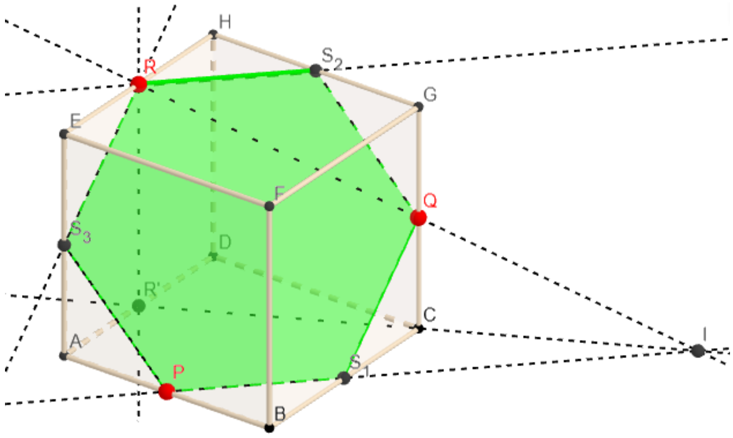
Ad 2) Nejdříve je opět potřeba určit polohu bodů. Body mohou ležet na stejných stěnách nebo nikoliv. Příklad 9 je ukázkou polohy bodů, kdy body neleží na stejných stěnách.

Příklad 9: Proveďte řez krychle rovinou *PQR*. Body *P*, *Q*, *R* jsou středy hran *AB*, *CG*, *EH*.



Obrázek 15: zadání příkladu 9

Řešení:



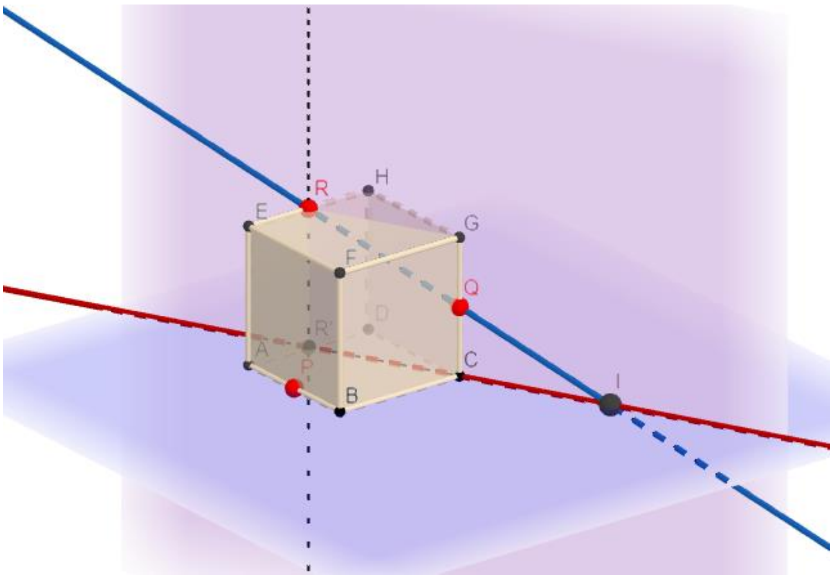
Obrázek 16: řešení příkladu 9

Postup:

Body *P, Q, R* jsou středy hran, z nichž žádné dva neleží v rovině jedné stěny, ale leží v rovině řezu. Tyto body můžeme spojit, ale o finálním řezu neposkytnou žádné informace. Jsou zde možné tři analogické postupy závisející na počátečním bodu výběru.

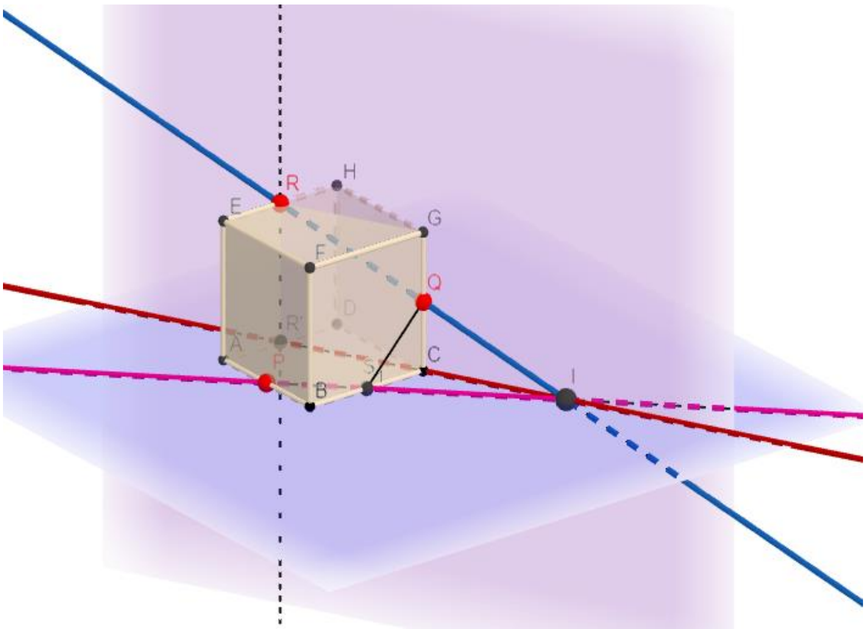
Jedním z možných řešení je vést kolmici z bodu *R* na hranu *AD*, vzniklý průsečík označíme *R‘* (půdorys bodu *R*).

Body *R‘* a *C* vedeme přímku, která je průsečnicí roviny podstavy s rovinou *CQR*, která je kolmá na rovinu podstavy. Zároveň vedeme pomocnou přímku body *R, Q,* které leží v rovině řezu. Protnutím těchto dvou přímek vznikne průsečík (pomocný bod) *I*, který leží ve třech rovinách: v rovině podstavy *ABCD,* v rovině řezu a v rovině *CQR*. Viz obrázek 17.



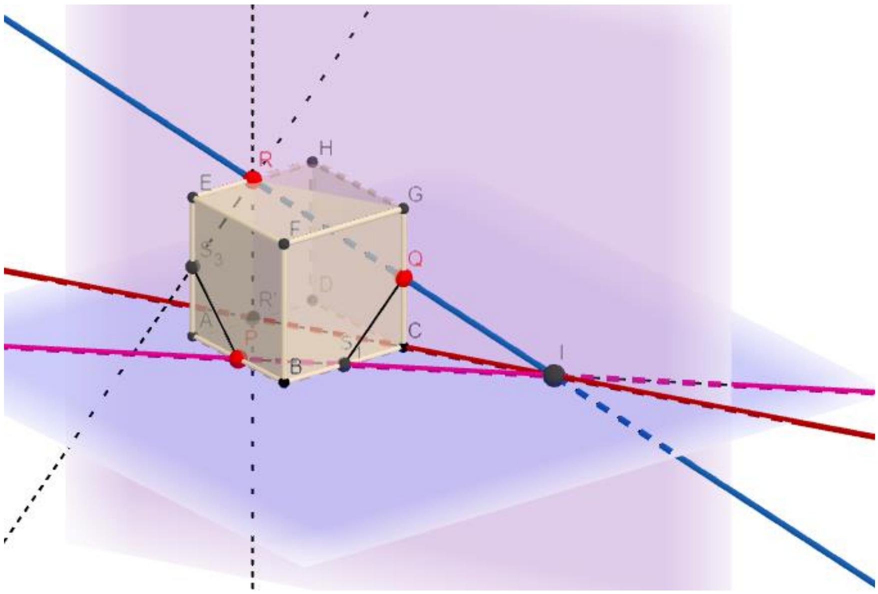
Obrázek 17: sestrojení průsečnic a bodu *I*

Bodem *I* vedeme přímku (průsečnici roviny podstavy a roviny řezu) procházející bodem *P*, která protne podstavu krychle na hraně *BC*, a tak vznikne průsečík S_1 (bod řezu). Úsečkami pak spojíme body *P*, S_1 a S_1, *Q*. Viz obrázek 18.



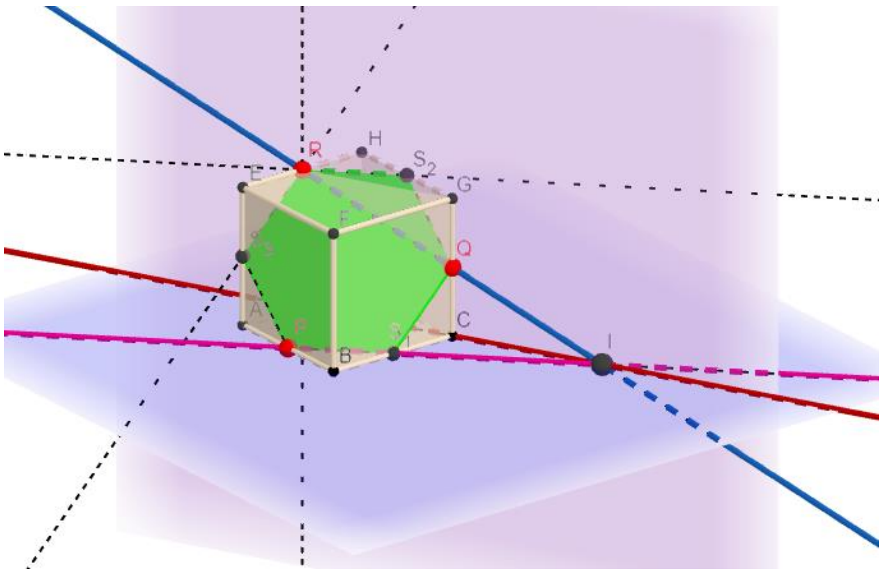
Obrázek 18: vytvoření bodu S_1

Bodem *R* (ležícím v rovině stěny *ADEH*) vedeme rovnoběžku s úsečkou QS_1 (ležící v rovině *BCGF*) a protnutím hrany *AE* vznikne průsečík S_3, ležící na této hraně. Spojíme body *P*, S_3 a body *R*, S_3 úsečkami. Viz obrázek 19.



Obrázek 19: vytvoření bodu S_3

Dále vedeme přímku procházející bodem *R*, rovnoběžnou s úsečkou PS_1. Všechny rovnoběžky leží v rovině řezu. Rovnoběžka procházející bodem *R* a je rovnoběžná s úsečkou PS_1 nám protne hranu *GH* v bodě S_2, který je průsečík ležící na hraně *GH*. Bod S_2 spojíme s body *R* a *Q* úsečkami a získáme výsledný řez krychle. Viz obrázek 20.

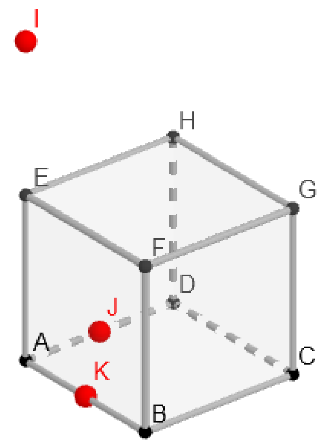


Obrázek 20: finální řez rovinou *PQR*

Názorný postup viz odkaz: https://www.geogebra.org/m/gwarzzgh

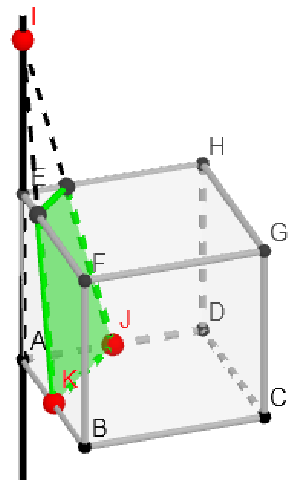
Ad 3) Je nutno zjistit polohy bodů roviny řezu. Bod může ležet na prodloužené hraně tělesa (viz příklad 10), případně mimo prodloužené hrany tělesa.

Příklad 10: Proveďte řez krychle rovinou *IJK*. Body *J, K* jsou středy hran *AB* a *AD*.



Obrázek 21: zadání příkladu 10

Řešení:



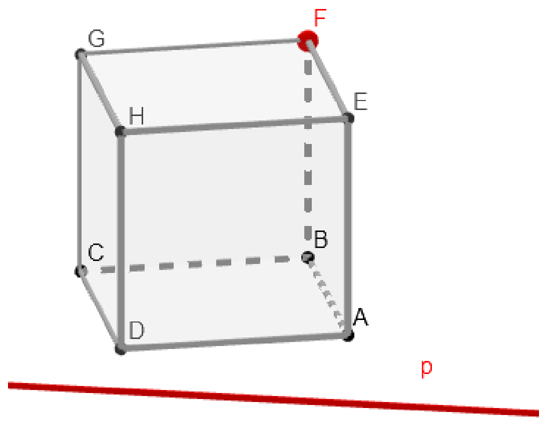
Obrázek 22: řešení příkladu 10

Bod *I* leží na prodloužené hraně *AE*, která je průsečnicí rovin stěn *ABEF* a *ADEH*, a proto může být spojen přímkou s bodem *K* a s bodem *J*, které leží ve stejných rovinách a zároveň tvoří body roviny řezu.

Spojením těchto bodů nám na hraně *EF* a hraně *EH* vzniknou průsečíky, které jsou zároveň body řezu, a proto je spojíme. Zároveň spojíme bod *J* s bodem *K* a tím nám vznikne celý řez krychle rovinou *IJK*.

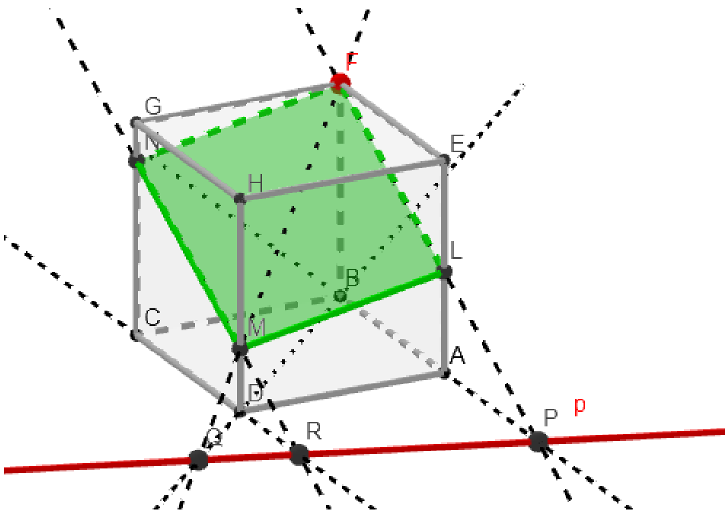
Ad b) níže uvedený příklad je řez krychle rovinou danou přímkou a bodem

Příklad 11: Proveďte řez krychle rovinou danou přímkou *p* a bodem *F*.



Obrázek 23: zadání příkladu 11

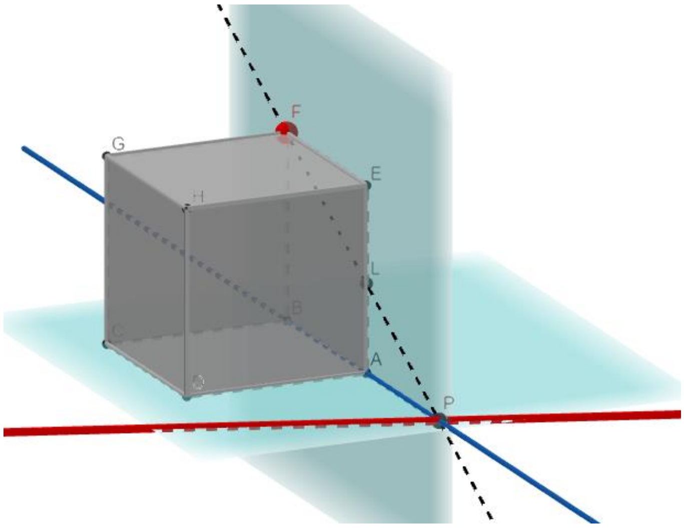
Řešení:



Obrázek 24: řešení příkladu 11

Postup:

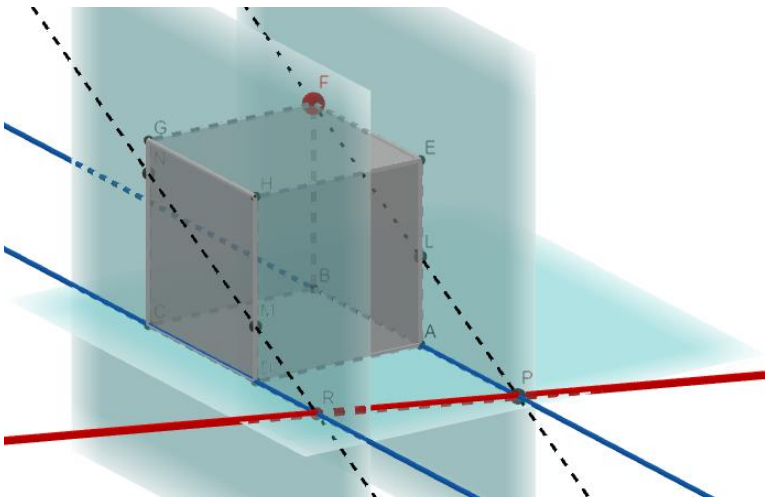
Přímka *p* leží ve stejné rovině jako podstava *ABCD*. Přímka *AB* je průsečnicí roviny podstavy a roviny stěny *ABEF*, které jsou na sebe kolmé, a zároveň protíná přímku *p* v bodě *P*. Bod *P*, leží ve stejné rovině jako bod *F* a z tohoto důvodu vedeme přímku těmito body, která protne hranu krychle *AE* v bodě *L*, který je prvním bodem řezu. Viz obrázek 25.



Obrázek 25: vznik bodu *L*

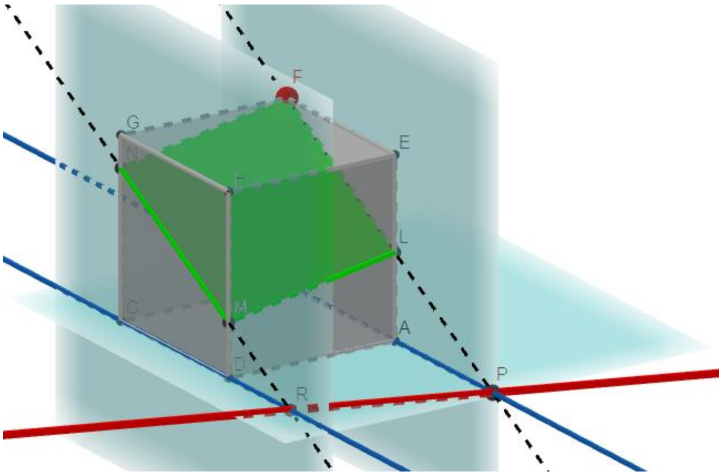
Rovina stěny *CDGH* je kolmá na rovinu podstavy *ABCD* a jejich průsečnice protíná přímku *p* v bodě *R*.

Rovina stěny *CDGH* je rovnoběžná s rovinou stěny *ABEF*, a proto můžeme bodem *R* vést přímku rovnoběžnou s přímkou *PF*. Tato přímka protne hranu *DH* v bodě *M* a hranu *CG* v bodě *N*. Tyto body jsou dalšími body řezu. Viz obrázek 26.



Obrázek 26: vznik průsečíků *M, N*

Body *L*, *M*, *N*, *F* můžeme spojit a tím získáme finální řez. Viz obrázek 27.



Obrázek 27: finální řez rovinou danou přímkou *p* a bodem *F*

Názorný postup viz kniha v GeoGebře: https://www.geogebra.org/m/gwarzzgh.

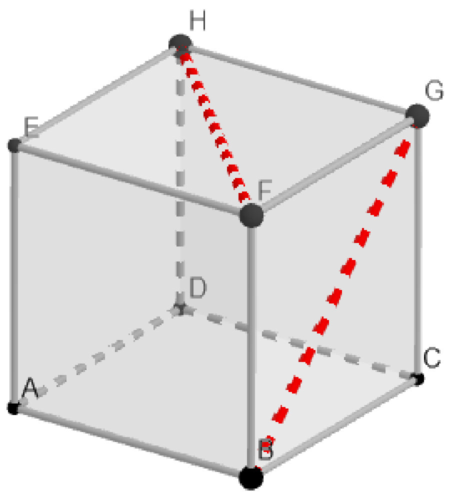
Přílohy 2-5 slouží k vytištění a sestrojení řezů dle výše uvedených příkladů.

3.5 Odchylky

S pojmem odchylka jsme se seznámili již v planimetrii (2D prostoru). Pojem odchylka se váže k úhlu, který spolu svírají dva geometrické útvary, například dvě přímky. Ve stereometrii (3D prostoru) odchylkou rozumíme úhel mezi dvěma přímkami, přímkou a rovinou nebo dvěma rovinami [12].

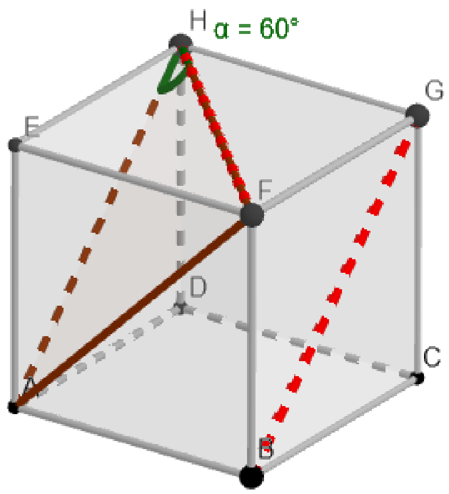
Jedná se o příklady, kdy žáci dostanou zadány dvě přímky a mají určit úhel daný mezi nimi. Zde by mohl být opět problém s prostorovou představivostí, neboť přímky nemusí mít společný bod a úhel, mohou být tudíž mimoběžkami a žáci musí nahradit přímky tak, aby měly stejný směr jako původní přímky, společný bod a svíraly spolu hledaný úhel.

Příklad 12: Vypočtěte odchylku přímek *BG* a *FH*. Hrana krychle je 3 cm.



Obrázek 28: zadání příkladu 12

Řešení:



Obrázek 29: řešení příkladu 12

Přímky *BG* a *FH* nemají žádný společný bod, jsou mimoběžkami. Nahradíme například přímku *BG* přímkou *AH*, která je s původní přímkou rovnoběžná a prochází společným bodem (bodem *H*) a její směr se nezmění. Přímky *AH* a *FH* jsou rameny rovnostranného trojúhelníka *AFH*, zároveň jeho ramena jsou stěnové úhlopříčky krychle. Pro výpočet stěnové úhlopříčky je použita Pythagorova věta $c^2 = a^2 + b^2$. Odchylka je dopočítána pomocí kosinové věty ($a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha$).

Druhý možný způsob řešení je nahradit přímku *FH* přímkou *BD*, čímž by vznikl rovnostranný trojúhelník *BDG*.

Výpočet:

$AF = FH = AH \qquad AF = a \qquad FH = b \qquad AH = c$

Stěnová úhlopříčka: $AF^2 = BF^2 + AB^2 \qquad a^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \quad a = \sqrt{18} \cong 4{,}24$

Odchylka:

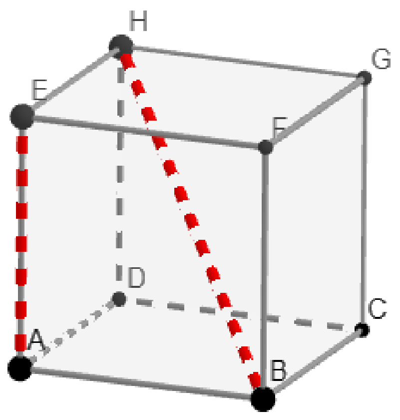
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha \qquad 18 = 18 + 18 - 2 \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{18}\, cos\alpha$

$b^2 + c^2 - a^2 = 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\alpha \qquad 18 = 36\, cos\alpha$

$cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2 \cdot b \cdot c} \qquad cos\alpha = \frac{1}{2} = 0{,}5$

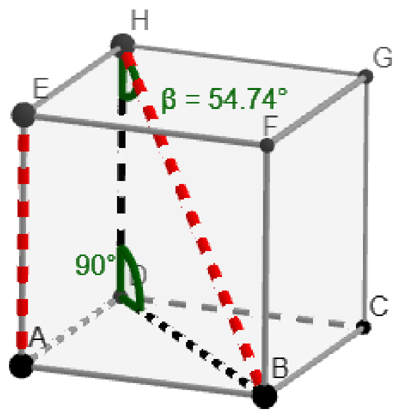
$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2 \cdot b \cdot c}\right) \qquad \alpha = 60°$

Příklad 13: Vypočtěte odchylku mezi přímkami *AE* a *BH*. Hrana krychle je 5 cm.



Obrázek 30: zadání příkladu 13

Řešení:



Obrázek 31: řešení příkladu 13

Přímky *AE* a *BH* nemají žádný společný bod, jsou mimoběžkami. Z tohoto důvodu nahradíme přímku *AE* přímkou *DH* (jsou rovnoběžky), čímž nám vznikne pravoúhlý trojúhelník *BDH*, jehož přepona *BH* je tělesová úhlopříčka, odvěsna *DH* je hrana krychle a odvěsna *BD* je stěnová úhlopříčka. Stěnovou úhlopříčku *BD* spočítáme užitím Pythagorovy věty. Pro výpočet hledaného úhlu použijeme trigonometrickou funkci tangens, neboť známe délku protilehlé a přilehlé strany.

Výpočet:

Stěnová úhlopříčka: $BD^2 = AB^2 + AD^2$ $\quad BD^2 = 5^2 + 5^2$ $\quad BD^2 = 50$

$BD = \sqrt{50} \cong 7{,}07$

Odchylka: $\tan\beta = \frac{protilehlá}{přilehlá} = \frac{BD}{DH} = \frac{7{,}07}{5} = 1{,}414$

$\beta \cong 54{,}74$

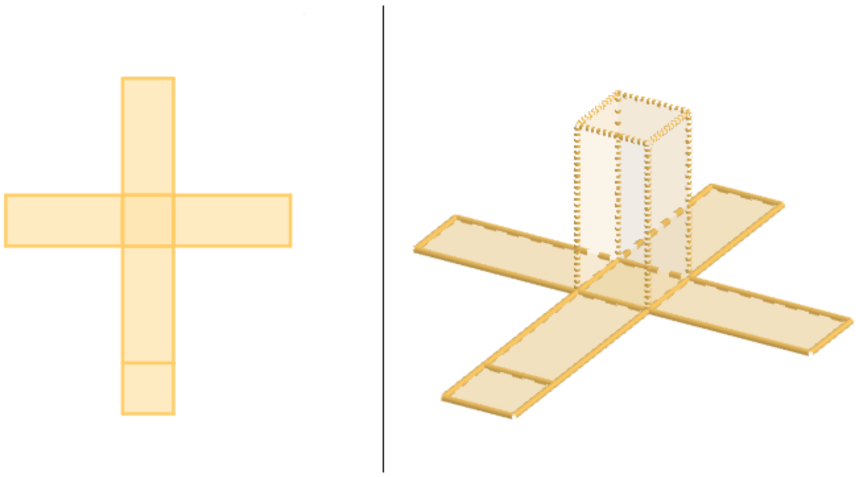
4 Kvádr

Kvádrem rozumíme kolmý hranol, jehož podstavou je čtverec (viz obrázek 32), *nebo obdélník* (viz obrázek 33). *Jedná se tedy o čtyřboký hranol, jehož protější stěny jsou shodné obdélníky, nebo čtverce* [10].

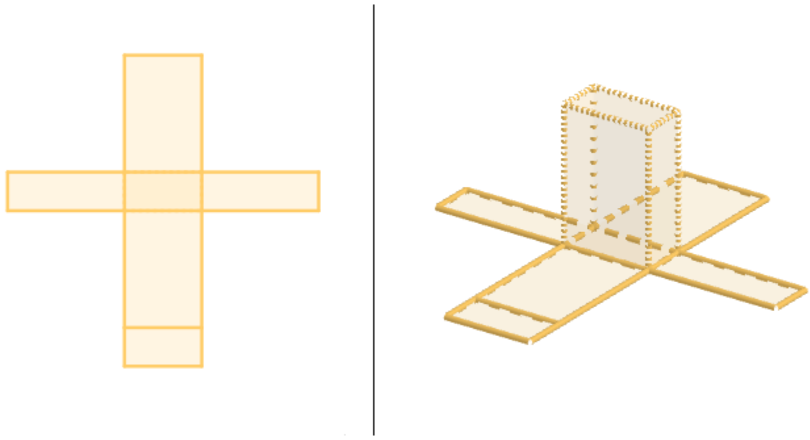
4.1 Síť kvádru

Pojem síť kvádru může být definován takto: *Síť kvádru se skládá ze všech jeho šesti stěn, každá z nich je obdélník, nebo čtverec* [10]. Nebo také takto: *Síť je rozložený povrch kvádru, který je tvořen třemi páry obdélníků (případně jedním párem čtverců a dvěma páry obdélníků), kdy dvojice tvoří vždy protější stěny. Jednotlivé stěny se v síti musí vzájemně dotýkat a jejich pospojování musí splňovat některá kritéria. Zároveň musí být rozmístěny tak, aby byly schopné obalit kvádr stejné velikosti a aby se žádné stěny nepřekrývaly* [16].

Za úkoly mají žáci opět určit, zda se z některých útvarů dají poskládat kvádry, případně mají nakreslit co nejvíce, ideálně všechny, sítě kvádru [4]. Pro lepší představivost žáků lze opět využít knihu Stereometrie, kterou jsem vytvořila v programu GeoGebra.



Obrázek 32: příklad sítě kvádru se čtvercovou podstavou



Obrázek 33: příklad sítě kvádru s obdélníkovou podstavou

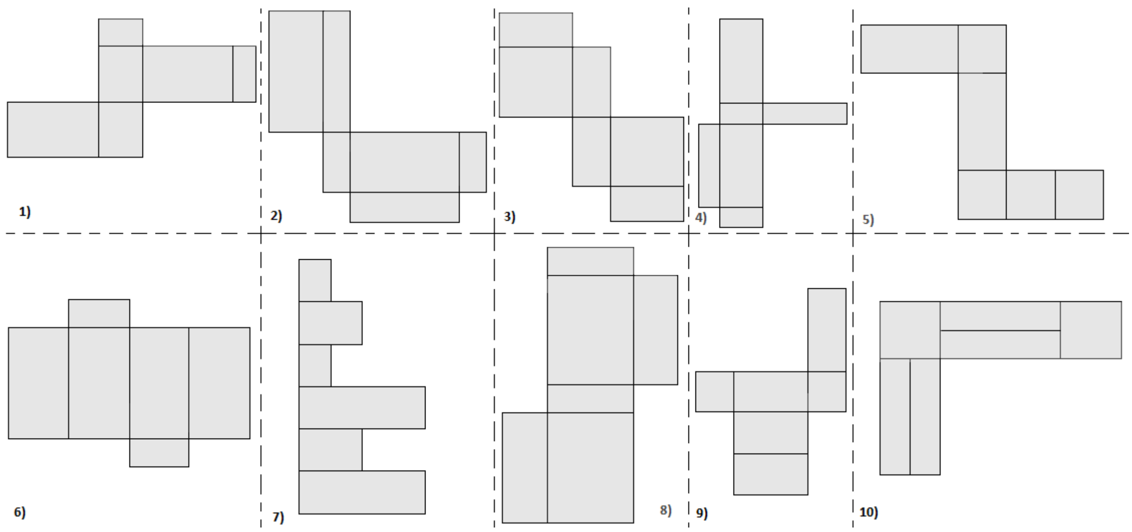
Na obrázku 32 a 33 vidíme základní síť kvádru a složený kvádr vytvořený v programu GeoGebra. Názorně k vidění viz odkaz: https://www.geogebra.org/m/x4wjqhsp

Příklad 14:

a) Vystřihněte z přílohy 6 obrazec číslo 1 a číslo 2 a pokuste se z nich sestavit kvádry.

b) Zdůvodněte, proč z nich lze či nelze kvádry složit.

c) Na základě předcházejícího úkolu rozhodněte, zda ze zbylých 8 obrazců kvádry složíte a zdůvodněte svou domněnku.



Obrázek 34: zadání příkladu 14

Řešení:

a, b) Vystřihnutím zjistíme, že z obrazce číslo 1 kvádr nelze složit (špatné uspořádání stěn) a z obrazce číslo 2, kvádr lze složit.

c) Možné zdůvodnění ostatních obrazců: ze zbylých 8 obrazců číslo 3 a 4 lze složit, číslo 5 nelze složit, protože síť neodpovídá definici sítě kvádru (max. 2 čtverce). Číslo 6 nelze složit, neboť malé obdélníky nekorespondují velikostně s velkými. Číslo 7 také nelze složit, důvodem je, že všechny stěny jsou v jedné řadě. Číslo 8 a číslo 9 lze složit. Číslo 10 nelze složit, protože obdélníkové stěny jsou spojené (nelze rozstřihnout).

4.2 Povrch, objem

Povrch kvádru je součtem obsahů pláště a obou podstav [9].

$S = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Povrch kvádru se čtvercovou, respektive obdélníkovou podstavou se počítá podle stejného vzorce.

Výpočet povrchů kvádru názorně k vidění v knize GeoGebra viz odkaz: https://www.geogebra.org/m/hfsj33bu

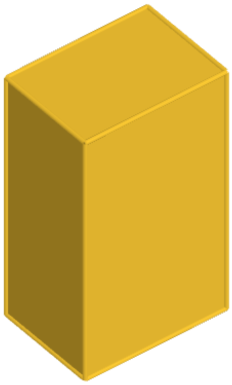
Objem kvádru je velikost prostoru, který kvádr vyplňuje [9].

$V = a \cdot b \cdot c$

Objem kvádru se čtvercovou, respektive obdélníkovou podstavu se počítá podle stejného vzorce.

Výpočet objemů kvádru názorně k vidění v knize GeoGebra viz odkaz: https://www.geogebra.org/m/cmdybx99

Příklad 15: Vypočítejte, kolik cm^2 papíru je potřeba na zabalení balíku velikosti 5x7x12 cm.



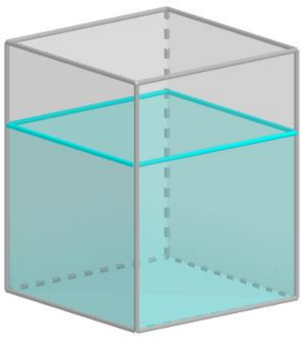
Obrázek 35: zadání příkladu 15

Řešení:

$$S = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 2 \cdot (5 \cdot 7 + 5 \cdot 12 + 7 \cdot 12) = 2 \cdot (35 + 60 + 84)$$

$S = 358cm^2$

Příklad 16: Kolik litrů vody nalijete do akvária tvaru kvádru, jehož podstava je čtverec o hraně 40 cm a výška je 50 cm, když ho naplníte ze dvou třetin?



Obrázek 36: zadání příkladu 16

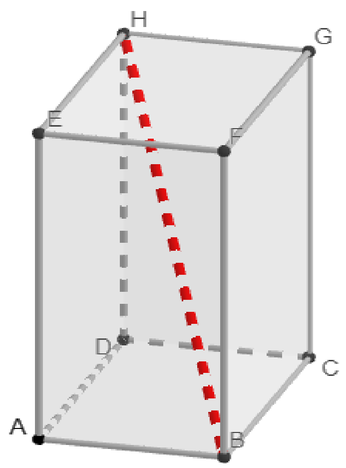
Řešení:

Ze zadání víme, že voda bude sahat do dvou třetin výšky nádoby $\frac{2}{3}$ z $50 \cong 33{,}3cm$. Pak jen vypočítáme objem menšího kvádru (objemu vody): $V = a \cdot b \cdot c = 40 \cdot 40 \cdot 33{,}3$

$V \cong 53280cm^3$

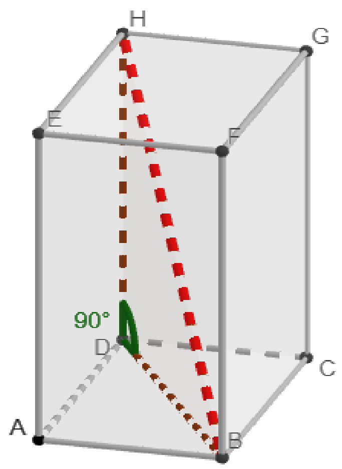
Výsledek nám vyjde v centimetrech krychlových, které převedeme nejdříve na mililitry a poté na litry, čímž zjistíme, že v nádobě bude celkem 53,28 l.

Příklad 17: Vypočtěte tělesovou úhlopříčku *BH* kvádru *ABCDEFGH*. Jsou zadány velikosti těchto hran: *AB* = 3 cm, *AD* = 4 cm a *DH* = 5 cm.



Obrázek 37: zadání příkladu 17

Řešení:



Obrázek 38: řešení příkladu 17

Trojúhelník *BDH* je pravoúhlý. Úsečky *BD* a *DH* jsou jeho odvěsny a *BH* jeho přepona. Zároveň *DH* je hrana kvádru, *BD* je stěnová úhlopříčka a *BH* tělesová úhlopříčka. Pro výpočet tělesové úhlopříčky je nedříve potřeba vypočítat stěnovou úhlopříčku, obě pomocí Pythagorovy věty ($c^2 = a^2 + b^2$).

Výpočet stěnové úhlopříčky *BD*:

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

$BD^2 = 3^2 + 4^2$

$BD^2 = 25$

$BD = \sqrt{25} = 5$

Výpočet tělesové úhlopříčky *BH:*

$BH^2 = DH^2 + BD^2$

$BH^2 = 5^2 + 5^2$

$BH^2 = 50$

$BH = \sqrt{50} \cong 7{,}07$

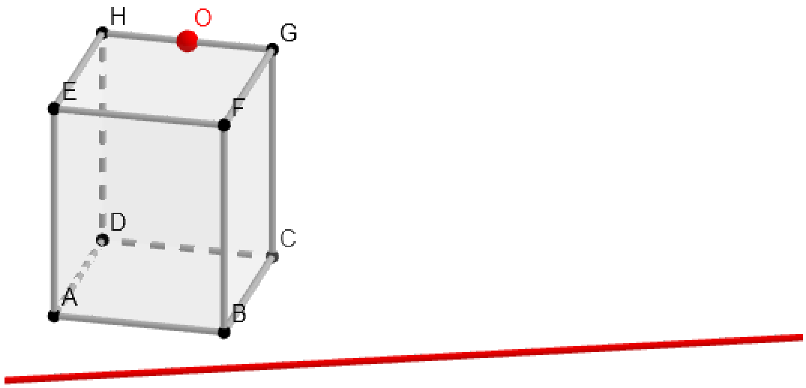
Stejný postup je pro výpočet tělesové úhlopříčky kvádru se čtvercovou podstavou.

4.3 Řezy kvádru

Řezem kvádru rozumíme průnik tělesa a roviny. Je to rovinný útvar, jehož hranice je průnik povrchu tělesa a roviny řezu. Hranice řezu kvádru se skládá z průniků roviny řezu se stěnami kvádru. Sestrojit řez rovinou tedy znamená sestrojit průsečnice dané roviny s rovinami jednotlivých stěn [12].

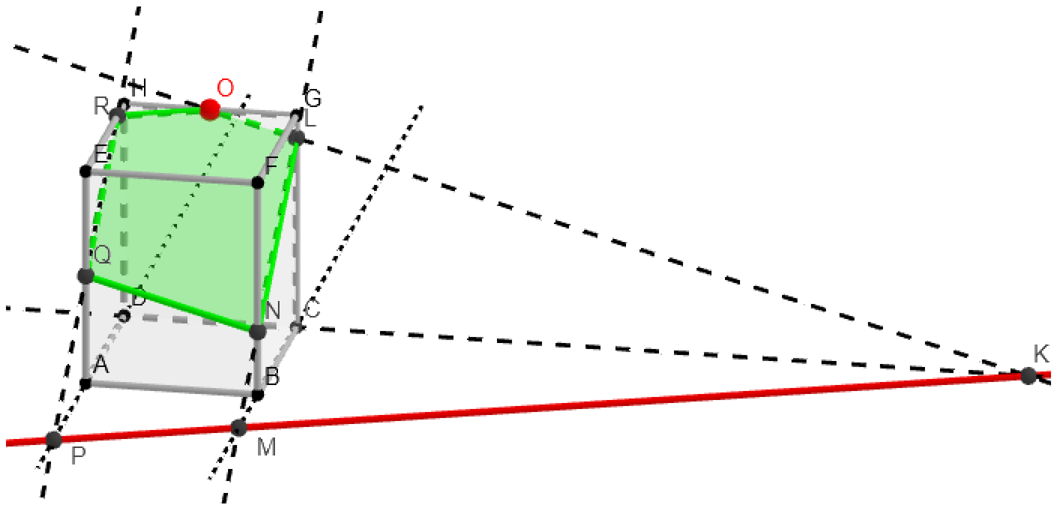
Opět se provádí stejným způsobem jako u krychle, tzn. rovinou tvořenou třemi body (vzájemné polohy stejné jako u krychle), případně bodem a přímkou.

Příklad 18: proveďte řez kvádru rovinou danou přímkou *p* a bodem *O*. Bod *O* je střed hrany *GH*.



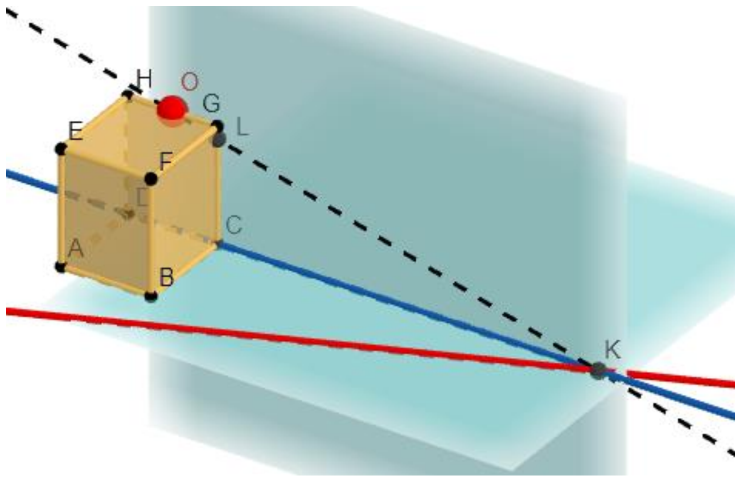
Obrázek 39: zadání příkladu 18

Řešení:



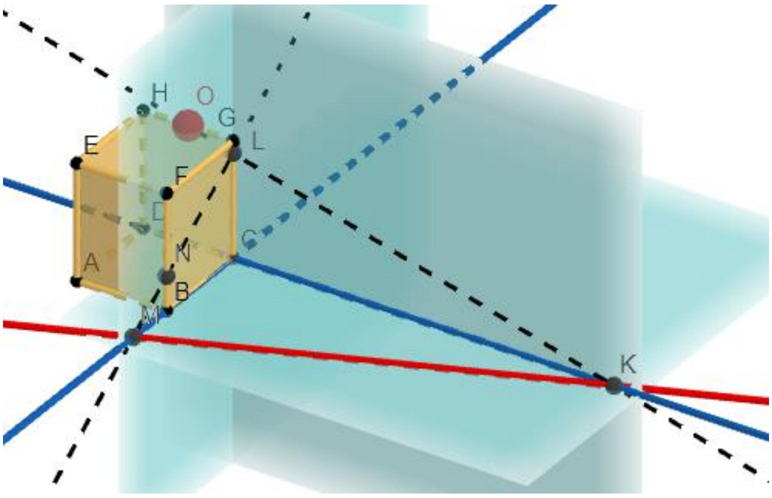
Obrázek 40: řešení příkladu 18

Roviny podstavy *ABCD* a stěny *CDGH* jsou na sebe kolmé a jejich průsečnice prochází hranou *CD* a zároveň protíná přímku *p* v bodě *K* (průsečík). Jelikož body *K* a *O* leží ve stejné rovině, můžeme jimi vést přímku, která protne hranu *CG* v bodě *L*. Bod *L* je bodem řezu. Viz obrázek 41.



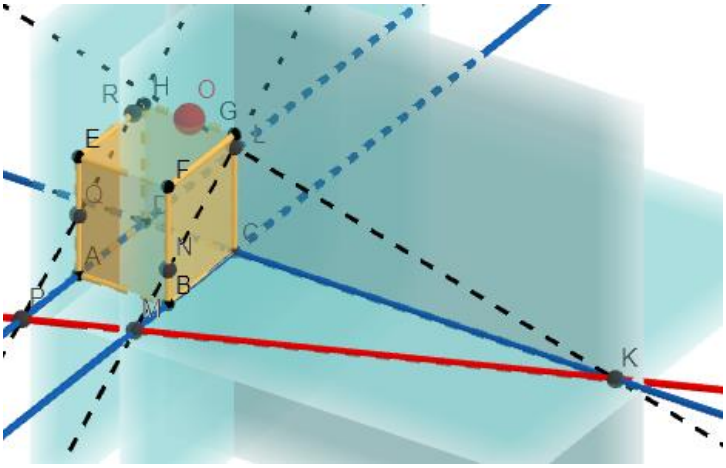
Obrázek 41: vznik bodu *L*

Rovina stěny *BCFG* je kolmá na rovinu podstavy a jejich průsečnice protne přímku *p* v bodě *M*. Tímto bodem vedeme přímku, která leží v rovině této stěny a spojuje body *M* a *L* a protíná hranu *BF* v bodě *N*. Tento bod je dalším bodem řezu. Viz obrázek 42.



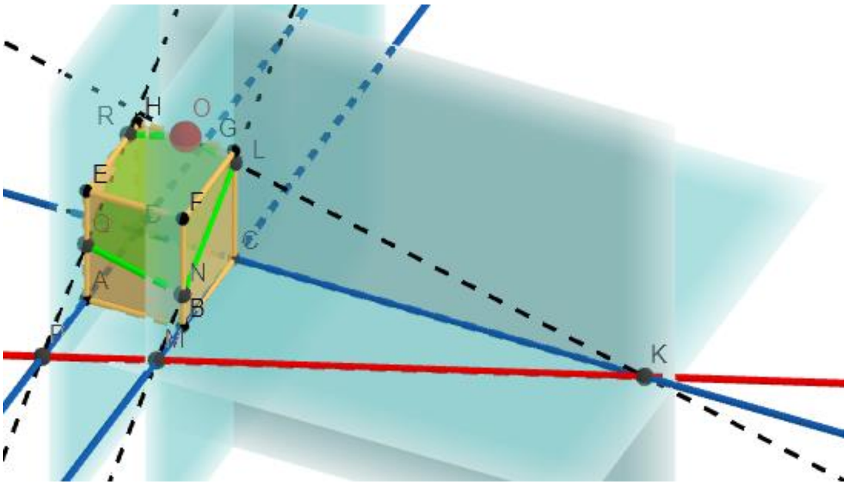
Obrázek 42: vznik bodu N

Rovina stěny *ADEH* je kolmá na rovinu podstavy a jejich průsečnice protíná přímku *p* v bodě *P*. Rovina stěny *ADEH* je rovnoběžná s rovinou stěny *BCFG*, proto můžeme vést přímku bodem *P*, která je rovnoběžná s přímkou *ML*. Tato přímka protíná hranu *AE* v bodě *Q* a hranu *EH* v bodě *R*. Body *Q*, *R* jsou další body řezu. Viz obrázek 43.



Obrázek 43: vznik bodů *Q* a *R*

Spojením bodů *O*, *L*, *N*, *Q*, *R* získáme konečný řez kvádru rovinou danou přímkou *p* a bodem *O*. Viz obrázek 44.



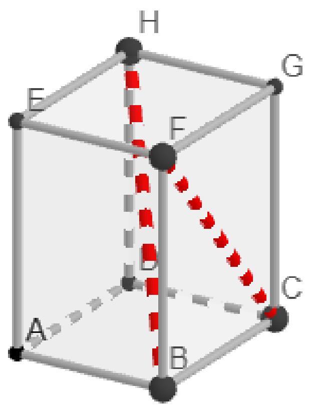
Obrázek 44: řez rovinou danou přímkou *p* a bodem *O*

Názorný postup viz kniha v GeoGebře: https://www.geogebra.org/m/gbwcyzdb

4.4 Odchylky

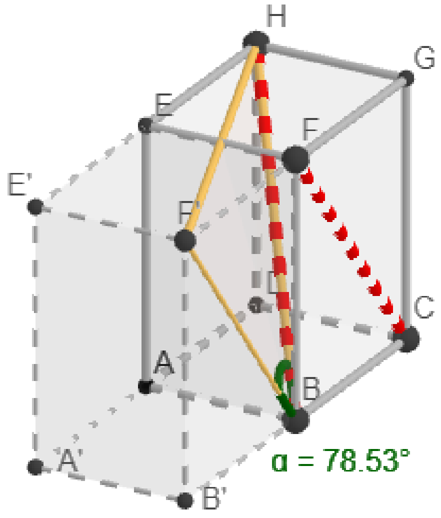
Odchylky u kvádru se počítají stejným způsobem jako u krychle, tj. zadány jsou dvě přímky a úkolem žáků je určit úhel mezi těmito přímkami. Při výpočtech se opět používají vzorečky na výpočet sinu a kosinu.

Příklad 19: vypočítejte odchylku mezi přímkami *BH* a *CF*. Jsou zadány velikosti těchto hran: *AB* = 3 cm, *AD* = 4 cm a *DH* = 5 cm.



Obrázek 45: zadání příkladu 19

Řešení:



Obrázek 46: řešení příkladu 19

Z obrázku vidíme, že přímky *CF* a *BH* nemají společný bod, jsou mimoběžky, proto musíme nahradit jednu z přímek, tak aby procházela společným bodem a byla rovnoběžná s původní přímkou. Aby úsečky měly společný bod, vytvoříme si kvádr *A'B'BAE'F'FE* stejné velikosti a úsečku *CF* nahradíme úsečkou *BF'*. Pro výpočet odchylky vytvoříme trojúhelník *BF'H*, kde úsečka *BH* je tělesovou úhlopříčkou kvádru, *BF'* je stěnová úhlopříčka a úsečka *F'H* je stěnovou úhlopříčkou kvádru *A'B'CDE'F'GH*.

Stěnovou úhlopříčku *BF'* vypočítáme pomocí Pythagorovy věty, stejně jako stěnovou úhlopříčku *F'H* kvádru *A'B'CDE'F'GH*. Pro výpočet tělesové úhlopříčky *BH* nejdříve musíme spočítat stěnovou úhlopříčku *BD*, oboje Pythagorovou větou. Vypočítáním tělesové úhlopříčky máme všechny tři strany trojúhelníku, které potřebujeme pro výpočet odchylky pomocí kosinové věty.

Výpočet stěnové úhlopříčky *BF'*:

$BF'^2 = BF^2 + FF'^2 \quad BF'^2 = 5^2 + 4^2 \qquad BF'^2 = 41 \qquad BF' = \sqrt{41} \cong 6{,}4$

Výpočet stěnové úhlopříčky *F'H*:

$F'H^2 = E'H^2 + E'F'^2 \qquad F'H^2 = 8^2 + 3^2 \qquad F'H^2 = 73 \qquad F'H = \sqrt{73} \cong 8{,}54$

Výpočet tělesové úhlopříčky *BH*:

$BH^2 = BD^2 + DH^2$ $(BD^2 = AB^2 + AD^2$ $BD^2 = 3^2 + 4^2$ $BD = 5)$

$BH^2 = 5^2 + 5^2$ $BH^2 = 50$ $BH = \sqrt{50} \cong 7{,}07$

Výpočet odchylky:

$F'H^2 = BF'^2 + BH^2 - 2 \cdot BF' \cdot BH \cdot cos\alpha$ $73 = 41 + 50 - 2 \cdot \sqrt{41} \cdot \sqrt{50}\, cos\alpha$

${BF'}^2 + BH^2 - F'H^2 = 2 \cdot BF' \cdot BH \cdot cos\alpha$ $-18 = -90{,}55\, cos\alpha$

$cos\alpha = \frac{{BF'}^2 + BH^2 - F'H^2}{2 \cdot BF' \cdot BH}$ $cos\alpha = \frac{18}{90{,}55} \cong 0{,}198$

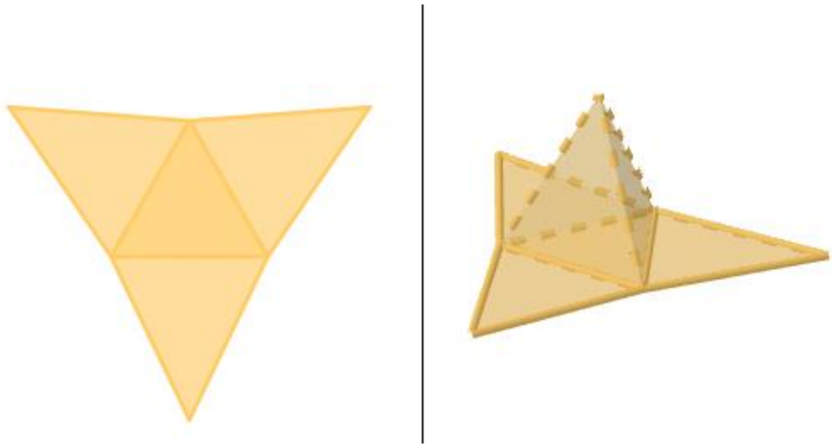
$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{{BF'}^2 + BH^2 - F'H^2}{2 \cdot BF' \cdot BH}\right)$ $\alpha = 78{,}53°$

5 Jehlan

Pravidelný jehlan se nazývá jehlan, jehož podstavou je pravidelný mnohoúhelník a jehož stěny jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky [10].

5.1 Síť jehlanu

Síť jehlanu je rozložený povrch tělesa, který je tvořen podstavou n-úhelníkového tvaru (n je počet hran) a pláště, který je tvořen n počtem trojúhelníků.



Obrázek 47: příklad sítě jehlanu

Na obrázku číslo 47 vidíme základní síť jehlanu s trojúhelníkovou podstavou (čtyřstěn) a složený jehlan vytvořený v programu GeoGebra. Názorně k vidění viz odkaz: https://www.geogebra.org/m/peungk5n

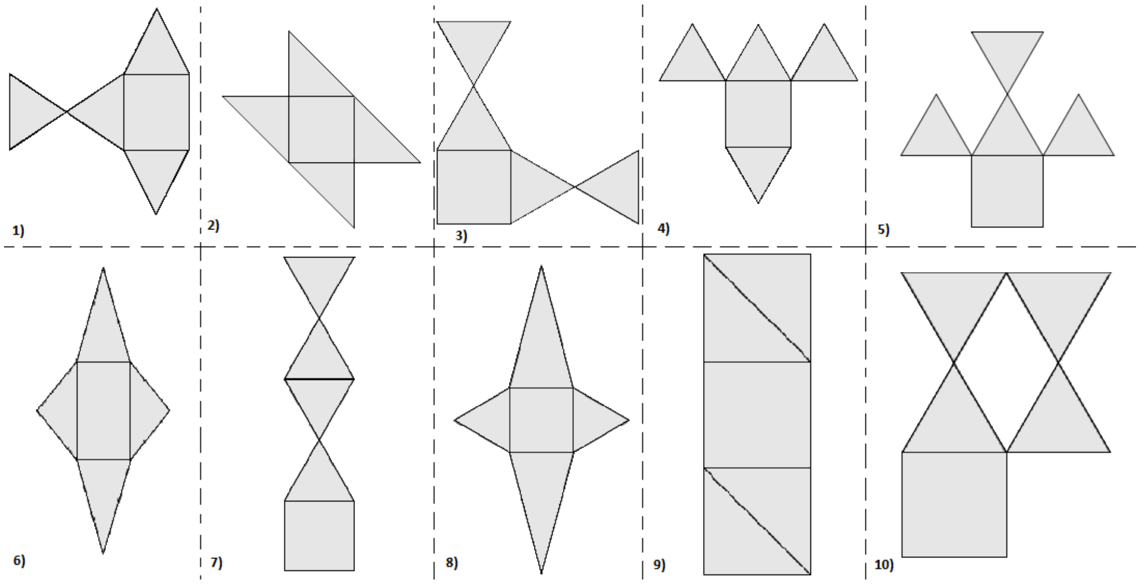
V učebnicích se pak vyskytují úlohy typu: Nakreslete všechny možné sítě jehlanu, případně určete, zda se z daných obrazců dá sestavit jehlan [2].

Příklad 20:

a) Vystřihněte z přílohy 8 obrazec číslo 1 a číslo 6 a pokuste se z nich sestavit jehlan se čtvercovou podstavou.

b) Zdůvodněte, proč z nich lze či nelze jehlan složit.

c) Na základě předcházejícího úkolu rozhodněte, zda ze zbylých 8 obrazců jehlan složíte a zdůvodněte svou domněnku.



Obrázek 48: zadání příkladu 20

Řešení:

a, b) Vystřihnutím zjistíme, že z obrazce číslo 1 jehlan lze složit a z obrazce číslo 6 jehlan se čtvercovou podstavou nelze složit, protože podstava má tvar obdélníka.

c) Možným zdůvodněním, proč zbylých 8 obrazců lze či nelze složit: číslo 2 nelze složit, protože trojúhelníky nemají společný vrchol, 3, 4 a 5 lze složit, číslo 6 nelze složit, podstavou je obdélník. Číslo 7 nelze složit, trojúhelníky se překrývají. Číslo 8 nelze, protože plášť je tvořen různými trojúhelníky. Číslo 9 nelze složit tak, aby mělo čtvercovou podstavu. Číslo 10 lze složit.

5.2 Povrch, objem

Povrch jehlanu je součet obsahů všech jeho stěn [10].

$S = S_p + S_{pl}$, kde S_p je obsah podstavy a S_{pl} obsah pláště.

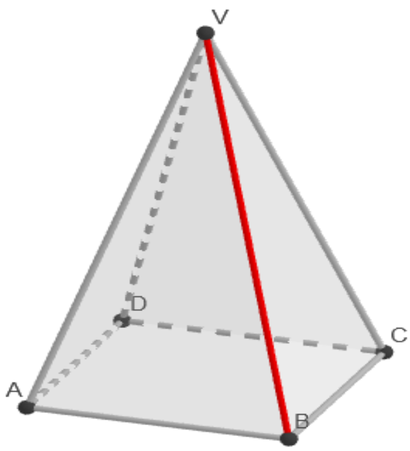
Objem jehlanu se rovná jedné třetině součinu obsahu jeho postavy a výšky [10].

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$

Výpočet objemu a povrchu jehlanu názorněji k vidění viz odkaz: https://www.geogebra.org/m/k74k9cg3

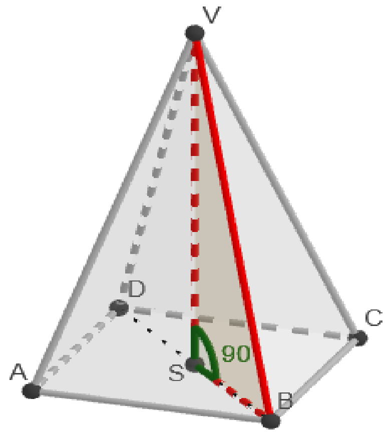
Pythagorova věta se v jehlanu používá především pro výpočet stěnové výšky pro výpočet obsahu. Pomocí Pythagorovy věty se dá také vypočítat i hrana stěny jehlanu viz příklad 21.

Příklad 21: Vypočítejte hranu *BV* jehlanu *ABCDV*. Hrana podstavy je 2 cm a výška jehlanu je 3,5cm.



Obrázek 49: zadání příkladu 21

Řešení:



Obrázek 50: řešení příkladu 21

Vyznačíme-li si výšku jehlanu, zjistíme, že pata výšky je uprostřed podstavy a je na ní kolmá. Z tohoto důvodu hranu *BV* jehlanu *ABCDV*, která je současně přeponou trojúhelníku *BVS* vypočítáme pomocí Pythagorovy věty. K výpočtu potřebujeme znát velikost úhlopříčky podstavy, kterou rovněž spočítáme užitím Pythagorovy věty.

Výpočet úhlopříčky:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

$BD = \sqrt{8} \cong 2{,}83$

$BS = \frac{BD}{2} \cong 1{,}415$

Výpočet hrany *BV*:

$BV^2 = BS^2 + VS^2$

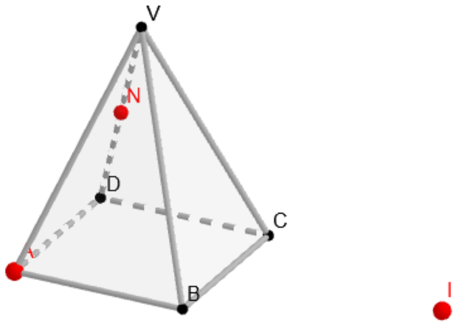
$BV^2 = 1{,}415^2 + 3{,}5^2 \cong 14{,}25$

$BV = \sqrt{14{,}25} \cong 3{,}77$

5.3 Řezy jehlanu

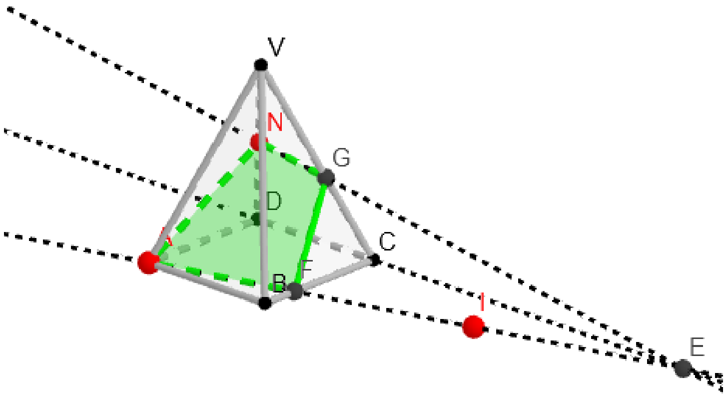
Řezem jehlanu rozumíme průnik tělesa a roviny. Je to rovinný útvar, jehož hranice je průnik povrchu tělesa a roviny řezu. Hranice řezu jehlanu se skládá z průniků roviny řezu se stěnami jehlanu. Sestrojit řez rovinou tedy znamená sestrojit průsečnice dané roviny s rovinami jednotlivých stěn [12].

Příklad 22: Proveďte řez jehlanu rovinou *AIN*. Bod *N* je střed hrany *DV*.



Obrázek 51: zadání příkladu 22

Řešení:

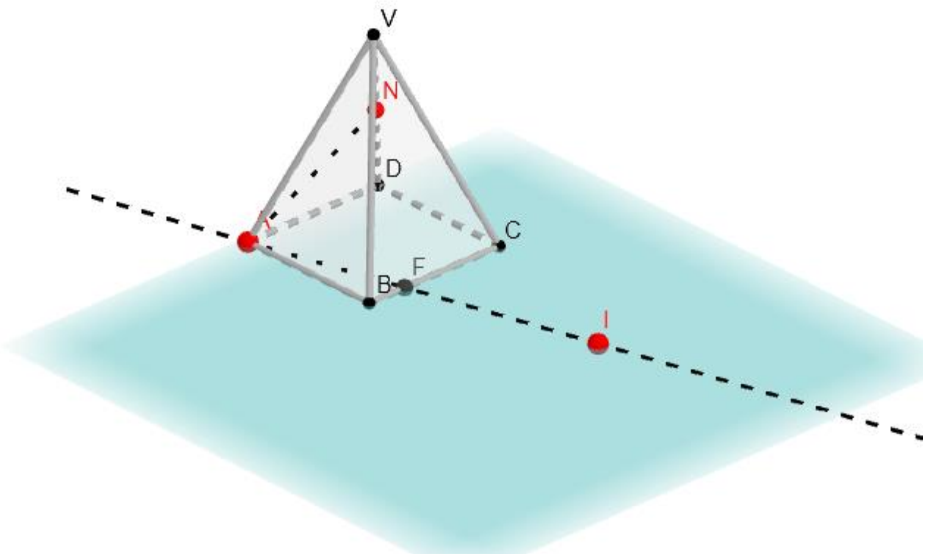


Obrázek 52: řešení příkladu 22

Postup:

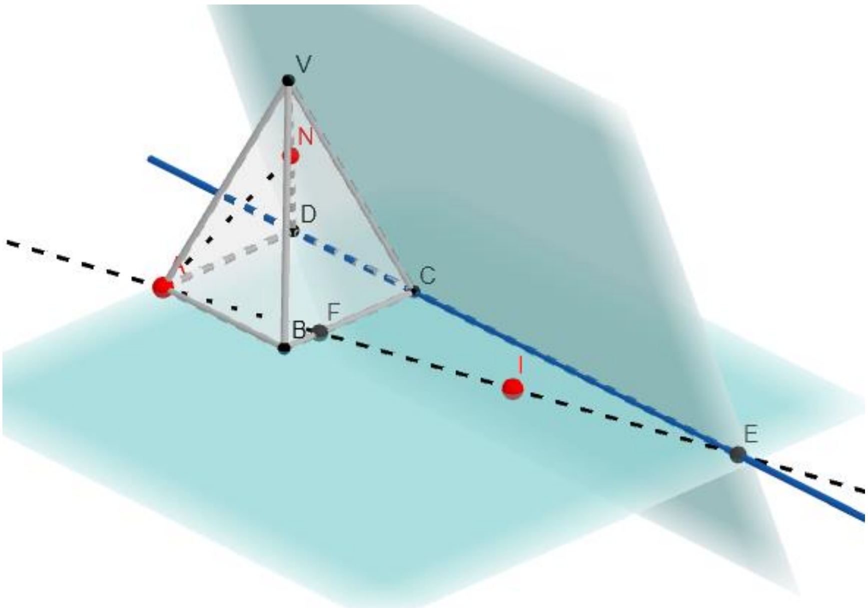
Body *A* a *N* leží ve stejné stěnové rovině a v rovině řezu, proto mohou být spojeny.

Bod *I* leží v rovině podstavy a zároveň v rovině řezu, stejně jako bod *A*, proto vedeme přímku protínající oba body. Tato přímka protne hranu *BC* v bodě *F*. Viz obrázek 53.



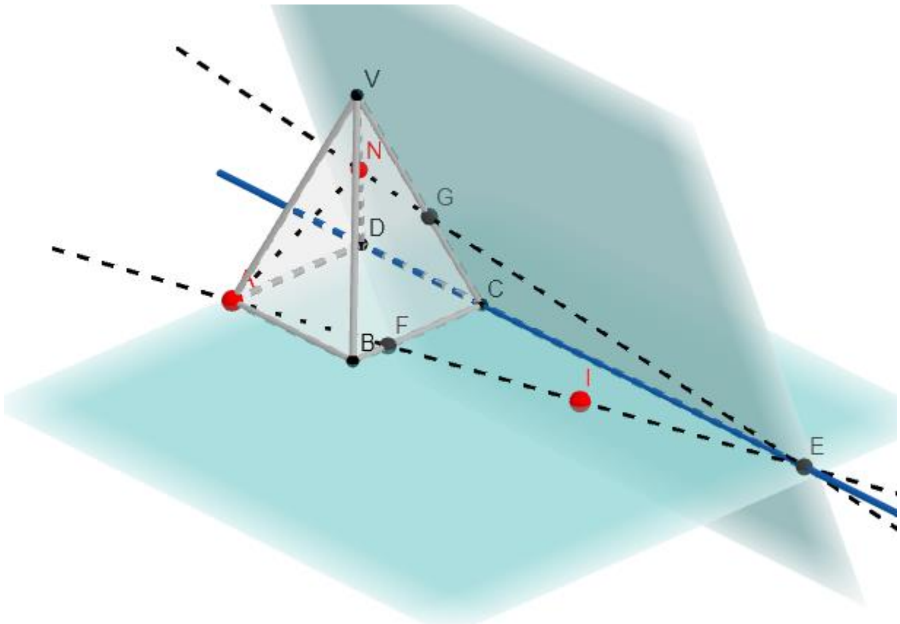
Obrázek 53: spojení bodů *AN* a *AI*

Pro možnost spojit bod *I* a bod *N*, prodloužíme hranu *CD* (průsečnici roviny podstavy a stěnové roviny *CDV*), která protne přímku vedoucí z bodu *A* přes bod *I* v bodě *E,* který leží v rovině řezu a v rovině stěny *CDV*. Viz obrázek 54.



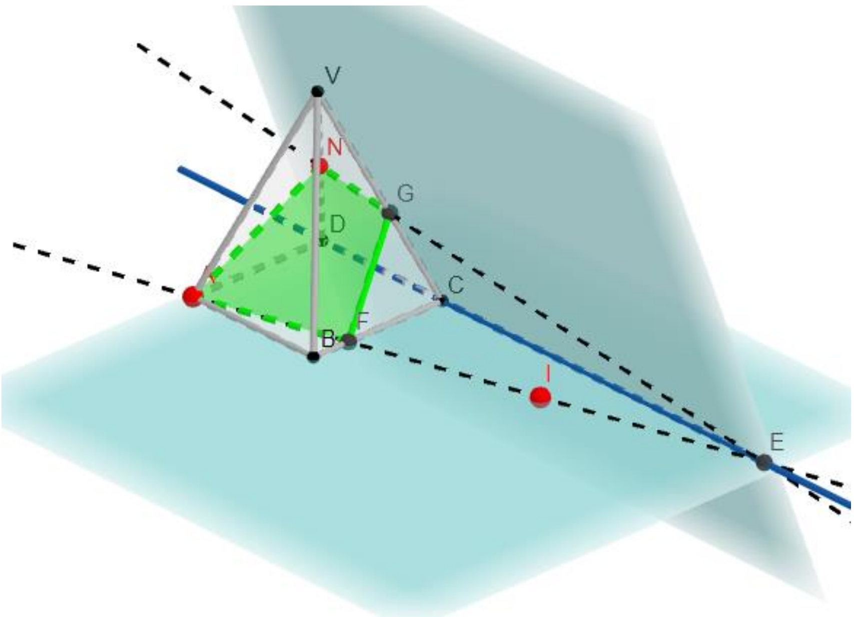
Obrázek 54: vznik bodu *E*

Spojíme bod *E* s bodem *N* přímkou, ležící v rovině stěny *CDV* a která protne hranu *CV* v bodě *G*, který je bod řezu. Viz obrázek 55.



Obrázek 55: vznik bodu *G*

Spojením bodů *A, N, G, F* vznikne výsledný řez. Viz obrázek 56.



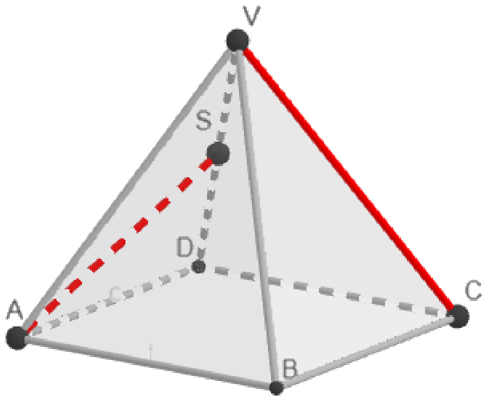
Obrázek 56: řez rovinou *AIN*

Názorný postup viz kniha v GeoGebře: https://www.geogebra.org/m/daeerana

5.4 Odchylky

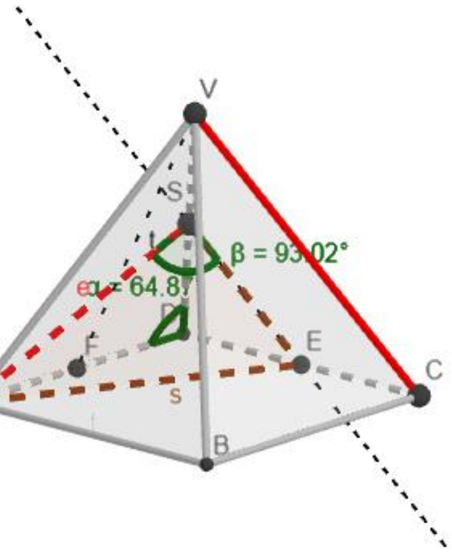
Odchylky u jehlanu se počítají stejným způsobem jako u krychle a kvádru, tj. zadány jsou dvě přímky a úkolem žáků je určit úhel mezi těmito přímkami. Při výpočtech se opět používají sinová a kosinová věta.

Příklad 23: Vypočítejte odchylku mezi přímkou *CV* a *AS*. Bod *S* je střed hrany *DV*. Velikost hrany podstavy je 3,4 cm a hrana stěny je 4 cm.



Obrázek 57: zadání příkladu 23

Řešení:



Obrázek 58: řešení příkladu 23

Přímky *CV* a *AS* neprochází společným bodem. Z tohoto důvodu nahradíme přímku *CV* přímkou *ES*, která je střední příčkou stěny *CDV* a kde bod *E* je střed hrany *CD*. Přímky *AS* a *ES* procházejí společným bodem, bodem *S*. Hledaná odchylka leží v trojúhelníku *AES* proti úsečce *AE*, v tomto trojúhelníku neznáme žádnou velikost stran, ale víme, že strana *ES* je polovina hrany *CV*, užitím Pythagorovy věty spočítáme stranu *AE* a stranu *AS* použitím kosinové věty.

Výpočty:

$$ES = \frac{CV}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$AE^2 = AD^2 + ED^2$, kde $ED = \frac{1}{2}CD = \frac{3{,}4}{2} = 1{,}7 \quad AE^2 = 3{,}4^2 + 1{,}7^2 = 14{,}45$

$$AE = \sqrt{14{,}45} \cong 3{,}8$$

Pro výpočet *AS* potřebujeme znát úhel u vrcholu *D* stěny *ADV*, který vypočítáme užitím sinové věty. Pro výpočet sinové věty potřebujeme znát velikost výšky *FV*, kterou vypočítáme opět pomocí Pythagorovy věty.

Výpočet:

$FV^2 = VD^2 - FD^2$, kde $FD = \frac{1}{2}AD = \frac{3{,}4}{2} = 1{,}7 \quad FV^2 = 4^2 - 1{,}7^2 = 13{,}11$

$$FV = \sqrt{13{,}11} \cong 3{,}62$$

$$\frac{FD}{sin\alpha} = \frac{DV}{sin90°} \quad \frac{3{,}6}{sin\alpha} = \frac{4}{sin90} \quad \frac{3{,}6}{4} = sin\alpha \qquad \alpha \cong 64{,}8°$$

$$AS^2 = \left(\frac{DV}{2}\right)^2 + AD^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot DV \cdot AD \cdot cos\alpha$$

$$AS^2 = \left(\frac{3{,}6}{2}\right)^2 + 3{,}4^2 - 3{,}6 \cdot 3{,}4 \cdot \cos 64{,}8$$

$$AS^2 = 3{,}24 + 11{,}56 - 5{,}21 = 9{,}59 \qquad AS = \sqrt{9{,}59} \cong 3{,}09$$

Výpočet odchylky:

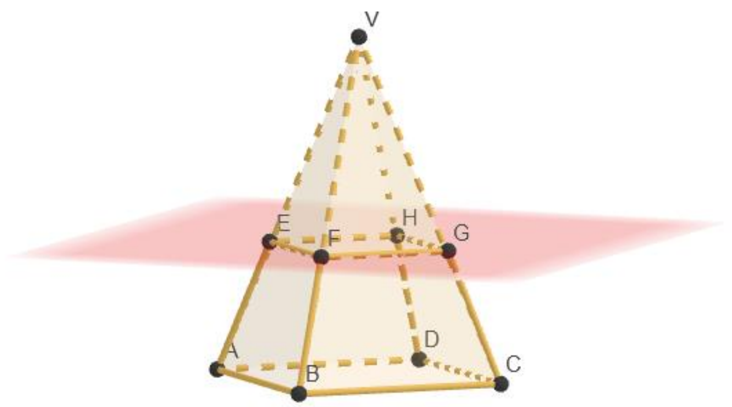
$AE^2 = AS^2 + ES^2 - 2 \cdot AS \cdot ES \cdot \cos\beta$ $3{,}8^2 = 3{,}09^2 + 2^2 - 2 \cdot 3{,}09 \cdot 2 \cdot \cos\beta$

$\cos\beta = \left(\frac{AS^2+ES^2-AE^2}{2 \cdot AS \cdot ES}\right)$ $\cos\beta = \left(-\frac{0{,}89}{12{,}36}\right)$

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{AS^2+ES^2-AE^2}{2 \cdot AS \cdot ES}\right)$ $\beta \cong 94{,}12$

6 Komolý jehlan

Protne-li se jehlan s rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy, rozdělí se na dvě tělesa. Jedno z nich je opět jehlan, druhé se nazývá komolý jehlan. Komolý jehlan má dvě podstavy, které jsou podobnými mnohoúhelníky, boční stěny jsou lichoběžníky [12].



Obrázek 59: vznik komolého jehlanu

6.1 Povrch a objem

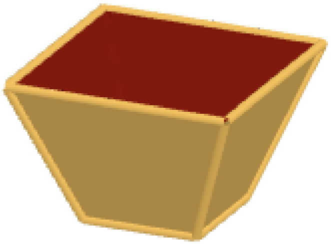
Povrchem komolého jehlanu rozumíme součet obsahů všech jeho stěn a obou podstav, objemem pak rozumíme prostor, který vyplňuje komolý jehlan.

$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$

$V = \frac{v}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$

S_1 a S_2 jsou obsahy dolní a horní podstavy. S_{pl} je obsah pláště, lichoběžníků.

Příklad 24: Zahradnice chce přemalovat květináč tvaru komolého jehlanu s dolní podstavou 3 cm, horní podstavou 5 cm, hranou 7 cm a hloubkou 4 cm. Kolik cm^2 přebarví, když přebarví všechny stěny? A kolik hlíny se do tohoto květináče vejde?



Obrázek 60: zadání příkladu 24

Řešení:

Zahradnice potřebuje přebarvit pouze stěny, nikoliv podstavy, proto S_1 a S_2 počítat musíme jen pro objem, nikoliv pro povrch.

Výpočet barvy: $S = S_{pl}$ $S_{pl} = 4 \cdot S_{lichoběžník} = 4 \cdot \frac{(a+c) \cdot v}{2}$, a = hrana dolní podstavy, c = hrana horní podstavy.

$v^2 = d^2 - \left(\frac{c-a}{2}\right)^2$, kde d je hrana květináče (lichoběžníku). $v^2 = 7^2 - 1^2 = 48$, $v \cong 6{,}93$

$$S = 4 \cdot \frac{(3+5) \cdot 6{,}93}{2} = 110{,}88 cm^2$$

Výpočet hlíny: $V = \frac{v}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$ $S_1 = 3 \cdot 3 = 9$ $S_2 = 5 \cdot 5 = 25$

$$V = \frac{4}{3}\left(9 + \sqrt{9 \cdot 25} + 25\right) \cong 65{,}3 cm^3$$

7 Závěr

V mé bakalářské práci jsem shrnula učivo základních a středních škol v oblasti stereometrie a důkladněji jsem se zaměřila na téma řezy, které jsou tradičním problémem pro řadu žáků.

K mé bakalářské práci jsem použila program GeoGebra pro ilustraci a výklad podstaty řešení. V tomto programu jsem důkladněji rozebrala příklady na řezy a výpočty těles tak, aby byly názorné a využitelné pro další praxi.

Věřím, že příklady a dynamické applety řešení úloh, které jsem v knize vytvořila, najdou uplatnění ve výuce stereometrie, ukáží učitelům další možnosti, jak využít program GeoGebra a pomohou žákům v pochopení stereometrických úloh.

V budoucnu bych ráda využila svou bakalářskou práci k ověření teoretických poznatků v praxi. Ráda bych se danému tématu nadále věnovala a dynamické modely metodicky zpracovala a ověřila na vzorku žáků základních a středních škol v rámci diplomové práce.

8 Použitá Literatura

[1] BÁRTOVÁ, Marie, Eva HRUBČOVÁ, Vlastimil CHYTRÝ, et al. *Hravá matematika 5: pro 5. ročník ZŠ*. 2. vydání. Praha: Taktik, 2015-. ISBN 978-80-87881-04-0.

[2] BUŠEK, Ivan, Marie CIBULKOVÁ a Věnceslava VÄTEROVÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro 9. ročník ZŠ*. Praha: Prometheus, 2012. ISBN 978-80-7196-408-7.

[3] DIVÍŠEK, Jiří. *Svět čísel a tvarů: sbírka úloh z matematiky pro 4. ročník základní školy*. Praha: Prometheus, 2003. ISBN 80-7196-269-4.

[4] DIVÍŠEK, Jiří. *Svět čísel a tvarů: sbírka úloh z matematiky pro 5. ročník základní školy*. Praha: Prometheus, 2004. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-7196-291-0.

[5] HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, et al. *Matematika*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2019. ISBN 978-80-905756-5-3.

[6] HRUBÝ, Daniel. *Matematická cvičení pro střední školy.* Praha. Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-374-5

[7] Metodické komentáře k oboru Matematika a její aplikace. *Metodický portál RVP – Modul Články* [online]. [cit. 16. 4. 2020] Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/20617/METODICKE-KOMENTARE-K-OBORU-MATEMATIKA-A-JEJI-APLIKACE.html/

[8] MIKULČÁK, Jiří. *Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. 4.vyd. Praha: Prometheus, 2007. ISBN 978-80-7196-345-5.

[9] NIMRICHTER F., HUBAČKOVÁ I., SCHRAMM L., TOPINKA V. *Matematika pro III. a IV. Ročník středních ekonomických škol.* 4. vydání. Praha. SPN, 1978. ISBN 55-00-20/4

[10] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia*. Praha: Prometheus, 2004. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-7196-276-7.

[11] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 10. vydání. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-458-2.

[12] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia – Stereometrie.* Praha: Prometheus, 4. vydání, 2014.

[13] Rámcovým vzdělávacím programem pro gymnázia, Národní ústav pro vzdělávání. *Národní ústav pro vzdělávání* [online]. Copyright © [cit. 10. 11. 2019].
Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/159

[14] RVP ZV_2017_červen.pdf, MŠMT ČR. *MŠMT ČR* [online]. Copyright ©2013 [cit. 17. 11. 2019]. Dostupné z: http://www.msmt.cz/file/43792/

[15] *Svobodná chebská škola | základní škola a gymnázium* [online]. Copyright © [cit.16. 04. 2020]. Dostupné z:
http://www.schs.cz/predmety/matematika/VY_42_INOVACE_AST_59.pdf?fbclid=IwAR0ck7h0NnjyMRz76NTrlaeGrrzh9rT57eWyN5YRA0BhJCoe-0BAXS_2ELU

[16] *Svobodná chebská škola | základní škola a gymnázium* [online]. Copyright © [cit. 17. 04. 2020]. Dostupné z:
http://www.schs.cz/predmety/matematika/VY_42_INOVACE_AST_56.pdf?fbclid=IwAR08UlCheDjyA454ZH1uQv4_3_nCFZskpyl-9RJ5xBjdrcywgZsQ32fC_MQ

9 Přílohy

Příloha 1: příklady sítě krychle

Příloha 2: řez krychle rovinou *AEG*

Příloha 3: řez krychle rovinou *PQR*

Příloha 4: řez krychle rovinou *IJK*

Příloha 5: řez krychle rovinou danou přímkou *p* a bodem *F*

Příloha 6: příklad sítě kvádru

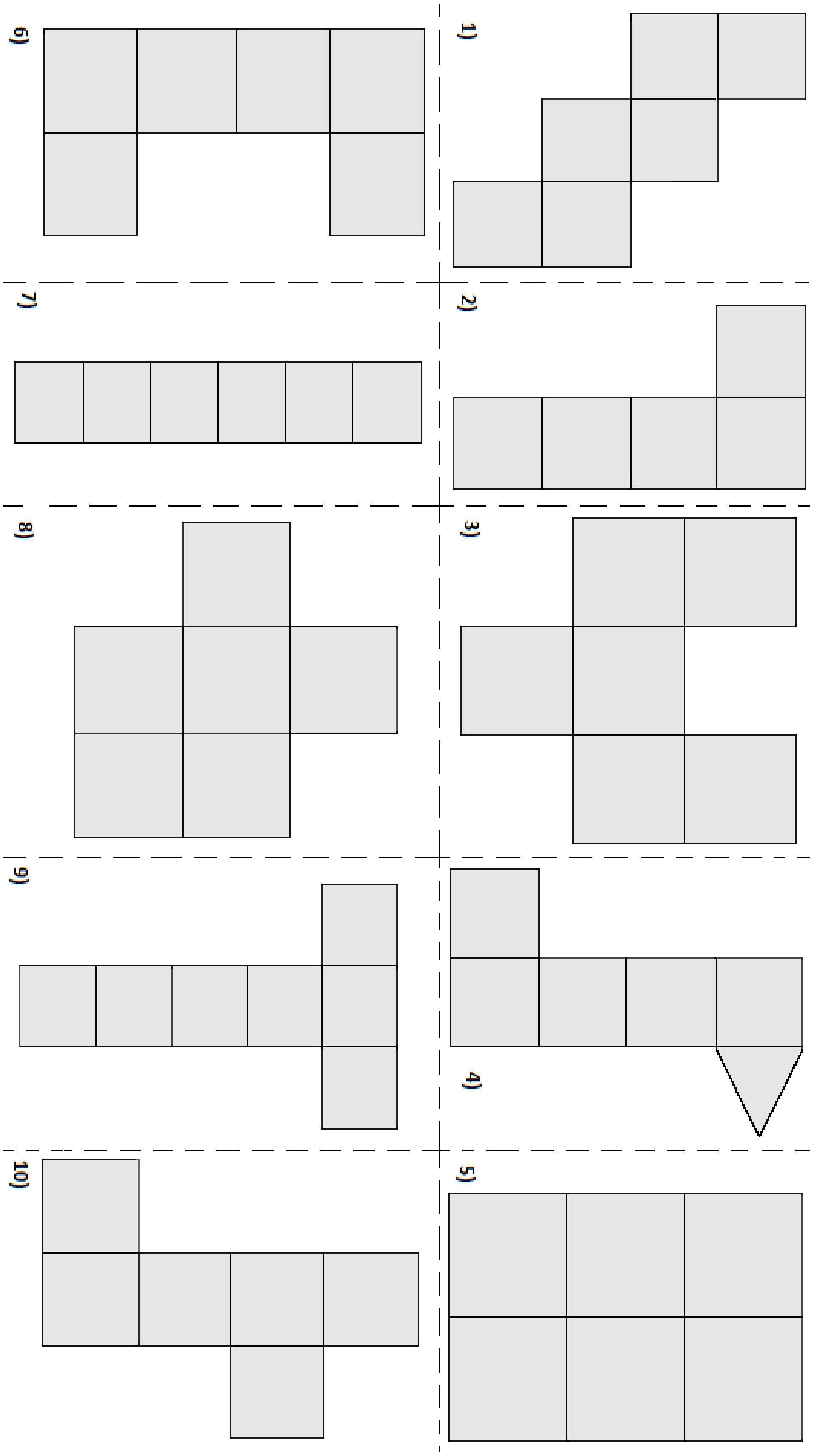
Příloha 7: řez kvádru rovinou danou přímkou *p* a bodem *O*

Příloha 8: příklady sítě jehlanu

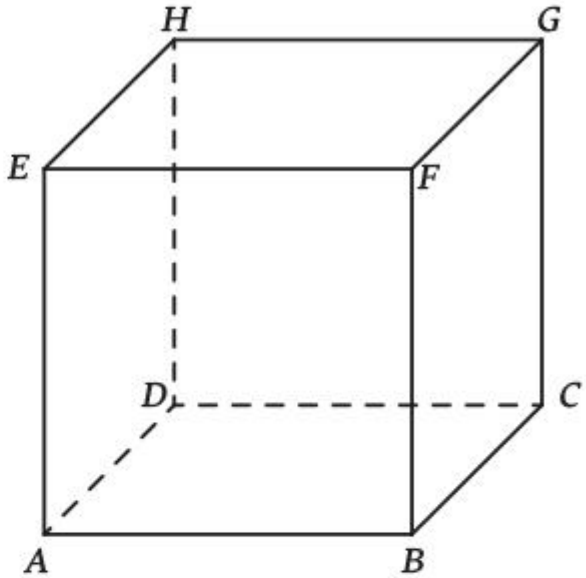
Příloha 9: řez jehlanu rovinou *AIN*

Příloha 10: kniha v GeoGebře - https://www.geogebra.org/m/ed4xvpxx

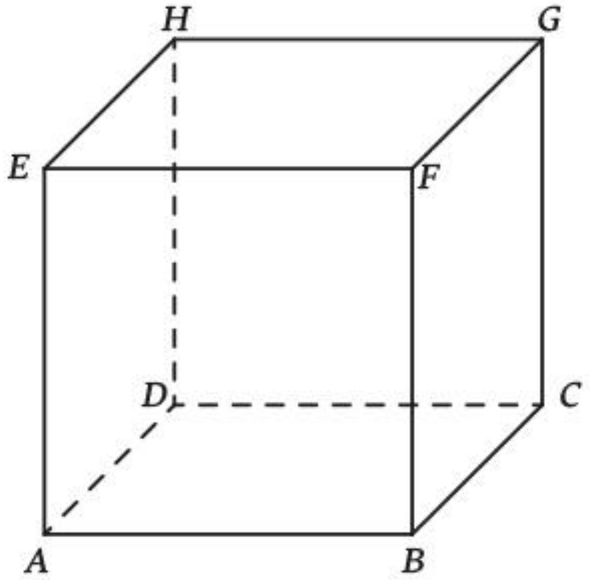
Příloha 1



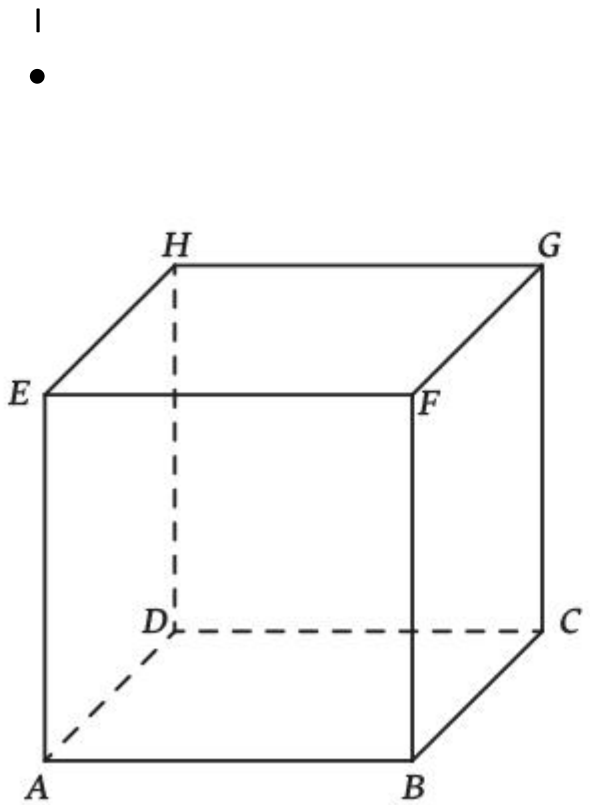
Příloha 2: Proveďte řez krychle rovinou *AEG*.



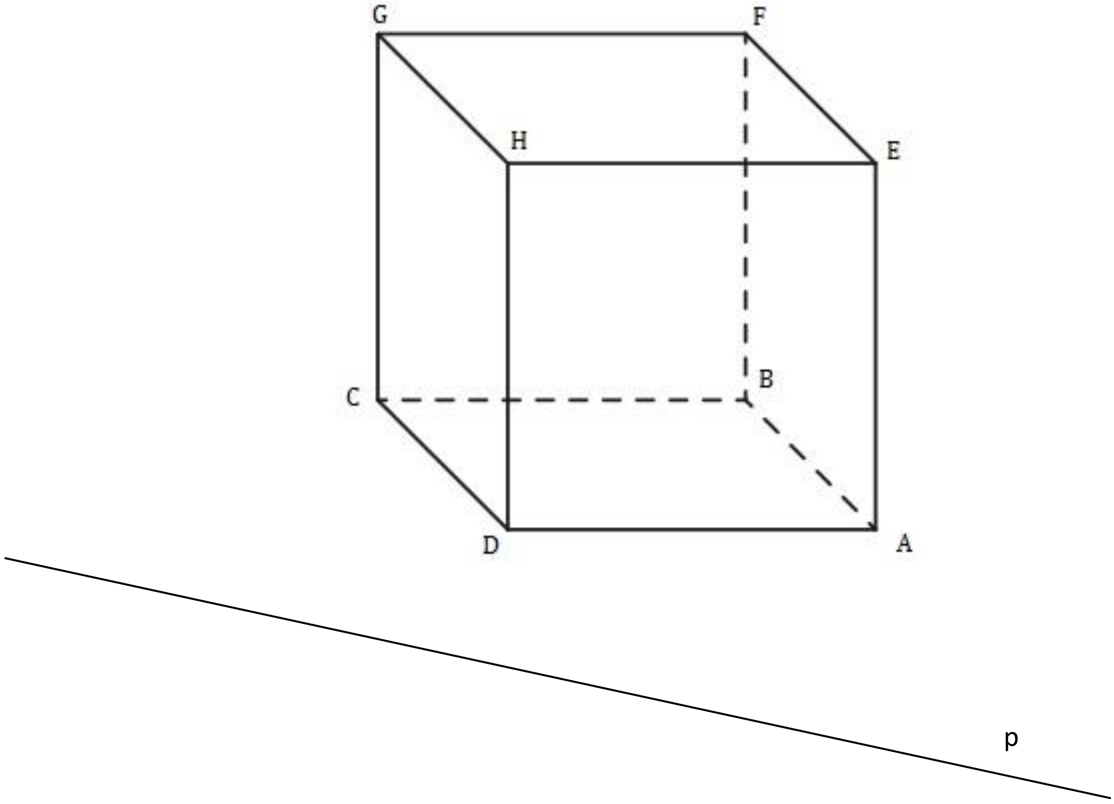
Příloha 3: Proveďte řez krychle rovinou *PQR*. Body *P*, *Q*, *R* jsou středy hran *AB*, *CG*, *EH*.



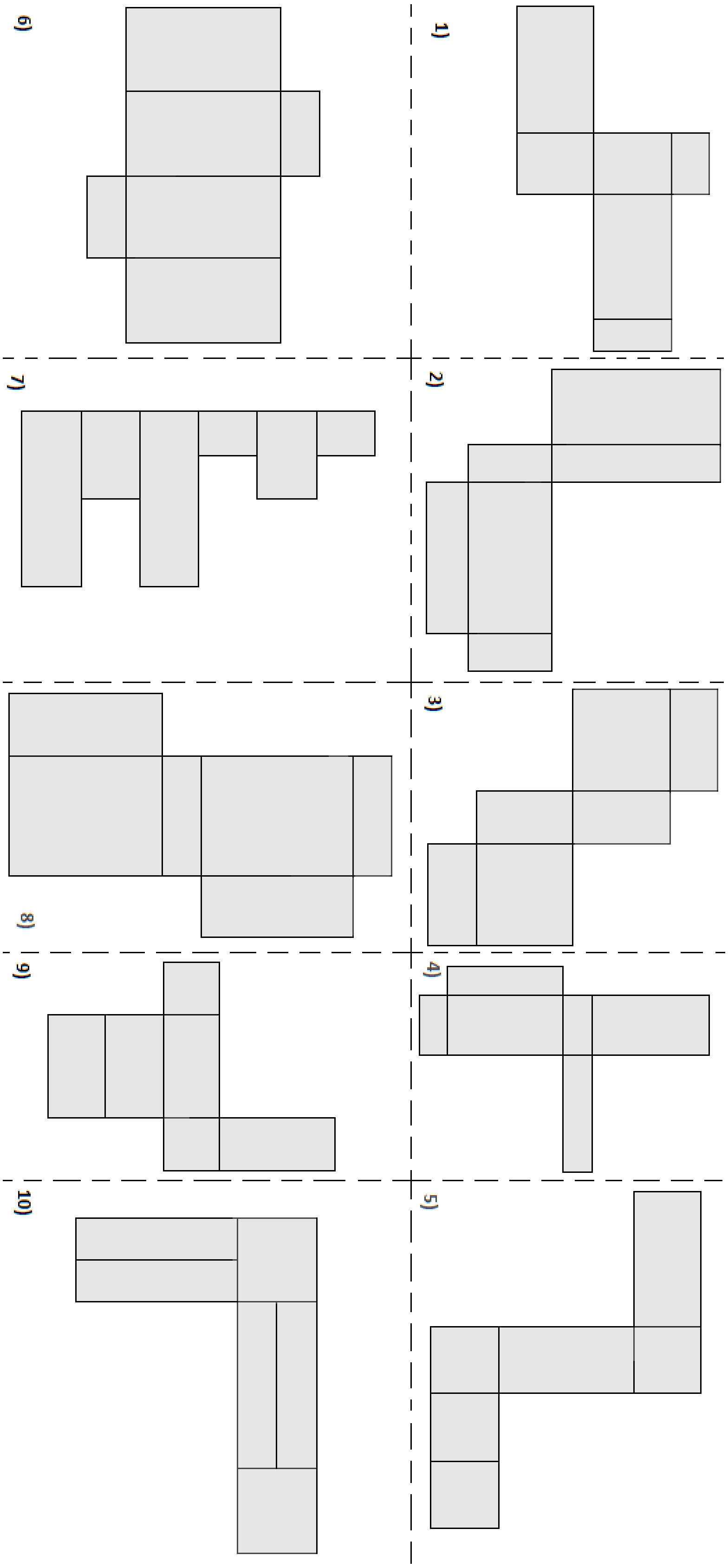
Příloha 4: Proveďte řez krychle rovinou *IJK*. Body *J*, *K* jsou středy hran *AB* a *AD*



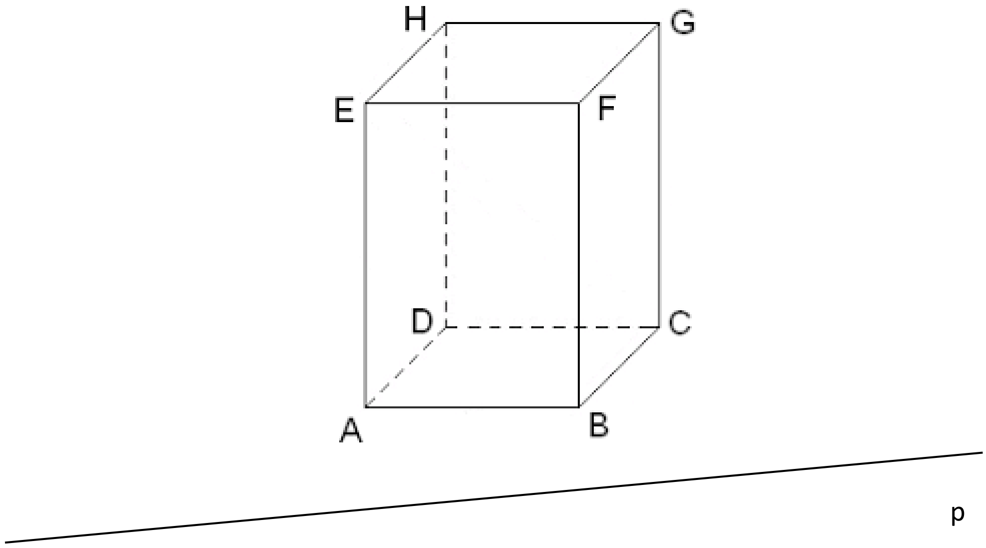
Příloha 5: Proveďte řez krychle rovinou danou přímkou *p* a bodem *F*



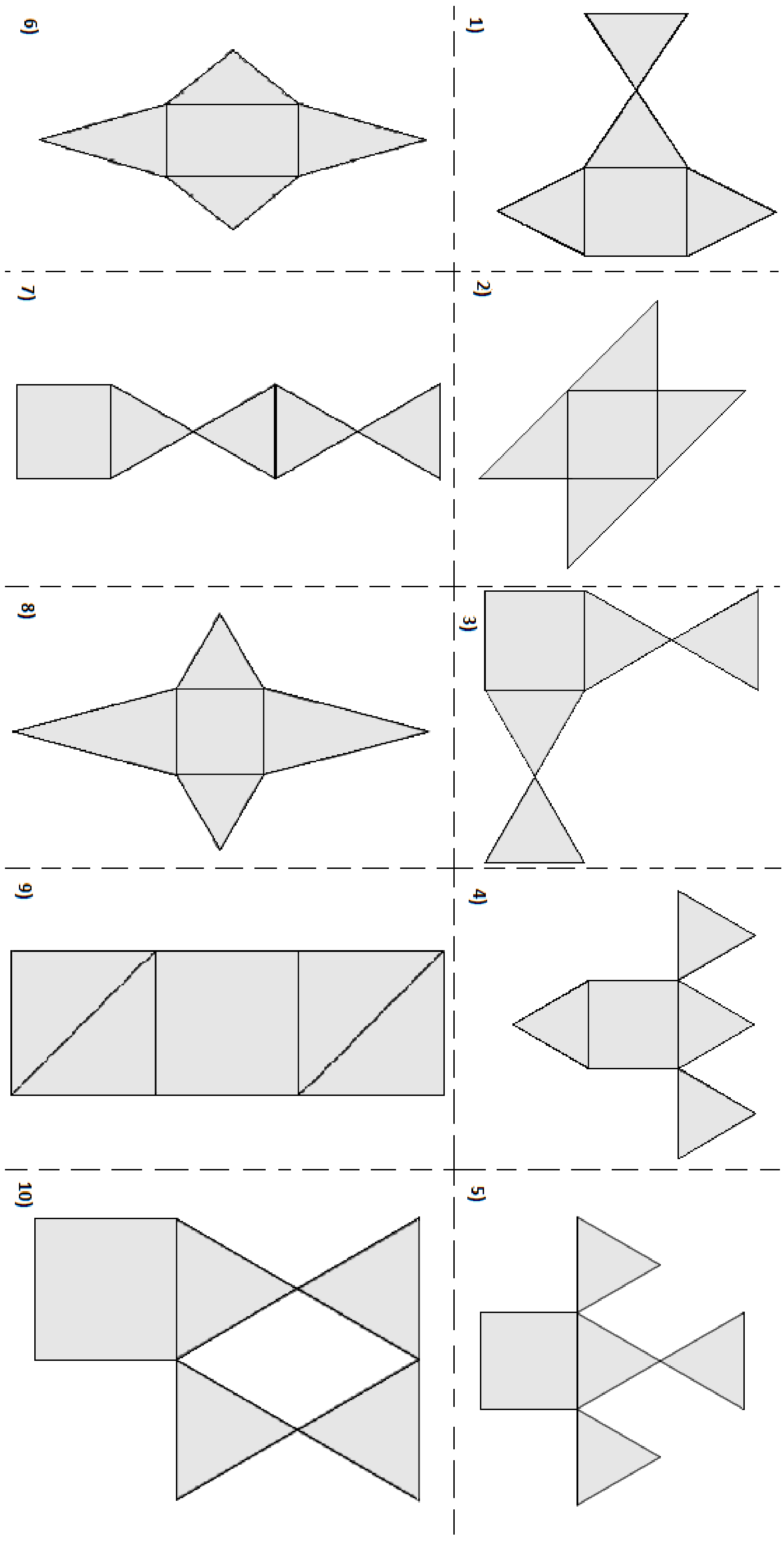
Příloha 6



Příloha 7: proveďte řez kvádru rovinou danou přímkou *p* a bodem *O*. Bod *O* je střed hrany *GH*.



Příloha 8



Příloha 9: Proveďte řez jehlanu rovinou *AIN*. Bod *N* je střed hrany *DV*.