VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA PODNIKATELSKÁ
FACULTY OF BUSINESS AND MANAGEMENT

ÚSTAV INFORMATIKY
INSTITUTE OF INFORMATICS

SHAPLEŮV VEKTOR V EKONOMII
SHAPLEY VALUE IN ECONOMICS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE Zuzana Maruniaková
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2016

Vysoké učení technické v Brně
Fakulta podnikatelská

Akademický rok: 2015/2016
Ústav informatiky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Maruniaková Zuzana

Matematické metody v ekonomice (6207R005)

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách, Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně a Směrnicí děkana pro realizaci bakalářských a magisterských studijních programů zadává bakalářskou práci s názvem:

Shapleův vektor v ekonomii

v anglickém jazyce:

Shapley Value in Economics

Pokyny pro vypracování:

Úvod
Cíle práce, metody a postupy zpracování
Teoretická východiska práce
Analýza současného stavu
Vlastní návrhy řešení
Závěr
Seznam použité literatury

Seznam odborné literatury:

GILLES, Robert P. The Cooperative Game Theory of Networks and Hierarchies. Berlin, Springer Berlin Heidelberg, 2010. ISBN 978-3-642-05281-1.
OWEN, Guillermo. Game Theory. Emerald Group Publishing Limited, 2013. ISBN 978-1-781-90507-4.
PETERS, Hans. Game Theory-A Multi-Leveled Approach. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. ISBN 978-3-540-69291-1.
SCHOFIELD, Norman. Mathematical Methods in Economics and Social Choice. Springer Texts in Business and Economics, 2014. ISBN 978-3-540-00086-0.

Vedoucí bakalářské práce: doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/2016.

L.S.

doc. RNDr. Bedřich Půža, CSc. Ředitel ústavu	doc. Ing. et Ing. Stanislav Škapa, Ph.D. Děkan fakulty

V Brně, dne 29.2.2016

Abstrakt

Táto bakalárska práca sa zaoberá analýzou kooperatívnych hier, Shapleyho hodnotou a následnou aplikáciou na ekonomické a iné oblasti ľudského záujmu s využitím matematických metód. V práci sú špecifikovené dôležité pojmy a vlastnosti demonštrované na príkladoch. Ďalej sú popísané vybrané triedy koaličných hier a aplikácie Shapleyho hodnoty v praxi. Tieto poznatky sú využité v modele o voľbách.

Abstract

The subject of this bachleor thesis is to introduce cooperative games, Shapley value and its application to economics and other human interests, using mathematical methods. This thesis is devoted to the important concepts and characteristics , which are illustrated by examples. The thesis also focused on describing selected classes of coalitional games and applications of Shapley´s value. These resulting findings are used in a model of election.

kľúčové slová

teória hier, kooperatívne hry, Shapleyho hodnota, triedy koaličných hier

key words

game theory, cooperative game, Shapley value, classes of coalitional games

Bibliografická citácia

MARUNIAKOVÁ, Z. Shapleův vektor v ekonomii. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská, 2016. 53 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D..

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že predložená bakalárska práca je pôvodná a spracovala som ju samostatne. Prehlasujem, že citácie použitých prameňov sú úplné, že som v svojej práci neporušila autorské práva (v zmysle Zákona č. 121/2000 Sb., o práve autorskom a o právach súvisiacich s právom autorským).

V Brne dňa 2.júna 2016

....

Zuzana Maruniaková

Poďakovanie

Týmto by som rada poďakovala svojmu vedúcemu bakalárskej práce doc. Mgr. Jaroslavovi Hrdinovi, Ph.D. za jeho odbornú pomoc a cenné rady, ktoré mi pomohli s vypracovaním tejto práce.

Obsah

Úvod **9**

Ciele práce, metódy a postupy spracovania **10**

1 Teoretické východiská práce **11**

1.1 Kooperatívne TU hry (TU GAMES) 11

1.2 Vlastnosti TU hier 16

1.3 Shapleyho hodnota 17

2 Analýza súčasného stavu **20**

2.1 Podniky a ich právna forma 20

2.2 Triedy koaličných hier 23

2.2.1 Tržné hry 23

2.2.2 Nákladové (alokačné) hry 25

2.2.3 Jednoduché hry 26

2.3 Aplikácia Shapleyho hodnoty v praxi 28

2.3.1 Dragon Den reality show 28

2.3.2 Teória hier v Talmude 31

2.3.3 Nákladová (úsporná) hra a Shapleyho vektor 34

3 Vlastné návrhy riešenia **38**

3.1 Spracovanie dát 38

3.2 Analýza výsledkov volieb od roku 1994 - 2016 40

Záver **49**

ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV **50**

ZOZNAM TABULIEK **51**

ZOZNAM GRAFOV **52**

ZOZNAM OBRÁZKOV **53**

Úvod

Veľmi často sa stretávame so situáciami, kedy sa snažíme rozhodnúť pre čo najlepšiu stratégiu s účelom dosiahnuť najlepší možný výsledok. Teória hier je matematický obor, ktorý sa zaoberá modelmi optimálneho rozhodovania v konfliktných situáciach. Za zakladateľa sa považuje John von Neumann, ktorý v roku 1928 publikoval sériu prác na túto tému. Pri hľadaní optimálnej stratégie nám môže pomôcť schopnosť zlepšiť svoj úžitok za pomoci iných subjektov. Tým sa dostávame k dvom základným rozdeleniam konfliktných situácií. Prvým typom je kooperatívna hra, kedy hráči môžu medzi sebou vytvárať koalície. Opakom je nekooperatívna hra kedy sa vytváranie koalícií neuvažuje. My sa budeme zaoberať kooperatívnymi hrami. Uplatnenie nájdeme v ekonómii, politológii, sociológii a dokonca aj v biológii.

V prvej kapitole sa zoznámime so základnými pojmami a vlastnosťami, ktoré demonštrujeme na príkladoch. Zavádzame pojmy ako je charakteristická funkcia a Shapleyho hodnota, ktoré sú pre celú prácu kľúčové.

V ďalšej kapitole dávame do pozornosti použitie aparátu teórie hier na rôzne modely. V prvej časti sa zaoberáme stručnou charakteristikou aplikácie kooperatívnych hier na právne formy podnikania. Právna forma podnikania nám môže pomôcť bližšie špecifikovať o akú triedu koaličných hier sa jedná. Triedy koaličných hier spolu s príkladmi definujeme v ďalšej časti tejto kapitoly. Posledná časť predstavuje spracovanie pokročilých modelov aplikácie Shapleyho hodnoty na kooperatívne hry. V poslednom príklade uvádzame aplikáciu Shapleyho hodnoty na nákladovú hru.

Pre vlastný návrh riešenia v poslednej kapitole sme zvolili analýzu volieb na Slovensku od roku 1994 - 2016. Na jednoduchú hru sme aplikovali Shapleyho hodnotu a tak sa dostávame k zaujímavému vývoju sily strán vytvárať koalície z časového hľadiska. Spracovanie dát nám uľahčí program *Matlab*. Následne vykreslíme diagramy a graf a vlastné návrhy riešenia interpretujeme.

Ciele práce, metódy a postupy spracovania

Cieľom je vytvoriť zrozumiteľný text spolu s modelmi aplikovanými na reálny problém z praxe. Má čitateľa zoznámiť s problematikou kooperatívnych hier a Shapleyho hodnotou za pomoci pokročilých matematických metód.

V teoretickej časti definujeme kľúčové pojmy. Rovnako sú v tejto časti uvedené príklady, ktoré sme sa snažili interpretovať z ekonomického hľadiska pre lepšiu orientáciu v danej problematike. Ďalším postupom bolo z veľkého množstva modelov z praxe aplikovateľných v ekonómii vybrať tie, ktoré nám pomôžu pochopiť všestrannosť a prispôsobivosť riešenia úloh pomocou aparátu teórie hier.

Analýza súčasného stavu a vlastné návrhy riešenia sa zaoberajú využitím metód v praxi aplikovaných na konkrétny model s interpretáciou výsledkov.

1 Teoretické východiská práce

V tejto časti popíšeme teoretické poznatky. Východiská práce sú založené v prvom rade na definíciách, ktoré demonštrujeme na konkrétnych príkladoch.

1.1 Kooperatívne TU hry (TU GAMES)

Stručne povedané, za predpoklad v koaličných (kooperatívnych) hrách sa považuje, že hráči môžu vytvárať koalície a v prípade TU hier potom aj záväzné dohody o spôsobe rozdelenia príjmov z týchto koalícií. Základná dilema hry n hráčov je teda voľba vhodnej spolupráce a následné prerozdelenie zisku. Podkladom pre túto kapitolu je [1], [2], [3].

Definícia 1.1. Kooperatívnou hrou s prenosným úžitkom, (ďalej len TU-hrou) rozumieme dvojicu (N, v), kde $N = \{1, 2, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$ je množina hráčov, v je funkcia priraďujúca každej koalícii S, t.j., každej podmnožine N reálne číslo $v(S)$ tak, že

$$v(\emptyset) = 0$$

a zároveň predpokladáme superaditivu. To znamená, že pre hru (N, v) platí:

$$(S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset) \Rightarrow v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Funkcia v sa nazýva charakteristická funkcia a $v(S)$ je jej hodnota. Koalícia N je množina všetkých hráčov. Výplatným rozdelením pre koalíciu S rozumieme vektor reálnych čísel $(x_i) \in \mathbb{R}^n$.

Pojem superatitivity môžeme demonštrovať napríklad v konkurenčnom boji, kedy sa snaží každý hráč zabezpečiť si maximálnu výšku svojej výhry, kde vlastnosť superaditivity vedie k tomu, že sa spojí so svojím konkurentom. V makroekonómií sa stretávame s touto situáciou napríklad v modele oligopolu, kedy dve konkurenčné firmy uzavrú kartelovú dohodu a tak sa zníži celkový boj v konkurenčnom prostredí na trhu. Čím menšia je konkurencia tým väčší zisk si dokážu firmy zabezpečiť.

Definícia 1.2. Hra (N, v) je *nepodstatná* ak platí $v(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

Pre ďalšiu definíciu použijeme nasledovný zápis

$$x(S) := \sum_{i \in S} x_i, \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \;\; S \subseteq N = \{1, ..., n\}.$$

Definícia 1.3. TU-hra (N, v) s pevne zvoleným výplatným rozdelením $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ je:

· *Individuálne racionálna vzhľadom k* x ak pre výplatné rozdelenie platí $x_i \geq v(\{i\})$, pre $i \in N$.

· *Kolektívne racionálna vzhľadom k* x ak pre výplatné rozdelenie platí $x(S) \geq v(S)$, pre každú neprázdnu koalíciu $S \subseteq N$.

Kolektívna racionalita nám hovorí o tom, že je pre koalíciu zabezpečený väčší úžitok ako si dokáže zabezpečiť sama. Individuálna racionalita má pre hráča tiež veľmi dôležitý význam pretože nám hovorí o tom, že hráč nevstúpi do koalície pokiaľ mu nezabezpečí prinajmenšom taký istý zisk aký si dokáže zabezpečiť sám. Ak by pre nejaké i platilo, že $x_i < v(\{i\})$ nebolo by pre daného hráča výhodné pridať sa do takej koalície, pretože by mu nepriniesla žiaden úžitok.

Definícia 1.4. *Imputácia* pre hru (N, v) je výplatné rozdelenie $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ spĺňajúce:

1. $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$,
2. $x_i \geq v(\{i\})$ pre všetky $i \in N$.

Definícia 1.5. Nech x a y su dve imputácie a nech S je koalícia. Hovoríme, že x *dominuje* y cez S (ďalej $x \rightarrow_S y$) ak platí :

1. $x_i > y_i$ pre všetky $i \in S$,

2. $x(S) \leq v(S)$.

Definícia 1.6. Množina nedominovaných imputácií pre hru (N, v) sa nazýva *jadro*. Budeme ho značiť $C(v)$.

Veta 1.7. *Jadro hry v je množina všetkých n-rozmerných vektorov x spĺňajúcich :*

1. $\sum_{i \in S} x_i \geq v(S)$, pre každú $S \subseteq N$,
2. $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

Dôkaz. Keby sme nechali $S = \{i\}$, podmienku (1.) zredukujeme na $x_i \geq v(\{i\})$. Spolu s podmienkou (2.) to znamená, že všetky tieto vektory sú imputácie. Predpokladajme teraz, že y spĺňa (1.), (2.) a že $y_i > x_i$ pre všetky $i \in S$. Avšak spoločne s podmienkou (1.) to znamená, že:

$$\sum_{i \in S} y_i > v(S),$$

a tak nie je možné aby $y \rightarrow_S x$. Preto $x \in C(v)$. Naopak, predpokladajme, že y nespĺňa (1.), (2.). Ak neplatí podmienka (2.), nie je to dokonca imputácia a tak ani nepatrí $C(v)$. Ďalej môžeme predpokladať, že existuje nejaká neprázdna $S \subseteq N$ spĺňajúca

$$\sum_{i \in S} y_i = v(S) - \epsilon,$$

kde $\epsilon > 0$. Majme

$$\alpha = v(N) - v(S) - \sum_{i \in N-S} v(\{i\}).$$

Môžme si všimnúť vďaka superaditivite, že $\alpha \geq 0$. Nakoniec majme s ako počet prvkov v S. Teraz definujme z ako:

$$z_i = \begin{cases} y_i + \frac{\epsilon}{s} & \text{ak } i \in S \\ v(\{i\}) + \frac{\alpha}{n-s} & \text{ak } i \notin S \end{cases}$$

Je ľahké ši všimnúť, že z je imputácia a čo viac, že $z \rightarrow_S y$. Preto aj $y \notin C(v)$.

■

Toto je veľmi zaujímavý poznatok z hľadiska klasickej ekonomickej teórie, ktorá považuje jadro hry za riešenie väčšiny problémov riešených pomocou teórie hier.

Ďalej poznamenajme, že vo všeobecnosti, jadro môže obsahovať viac než jeden bod. To však nepredstavuje problém, pretože sa jedná o viac ako jeden stabilný výsledok. Nastať však môže aj situácia, kedy jadro neexistuje t.j. prázdna množina. Poďme si ukázať všetky situácie ktoré môžu nastať.

Ak má hra jednoprvkové jadro jedná sa o prípad kedy sa hráči ľahko dohodnú na stabilnej koaličnej štruktúre. V prípade, že je jadro viacprvkové, vo všeobecnosti nie je daný ustálený postup ako sa výhry jednotlivých hráčov rozdelia. V niektorých literatúrach sa uvádza princíp nedostatočnej evidencie. Tento princíp však nebudem bližšie rozvíjať. Ďalší princíp sa opiera o hráčsku dôležitosť. Inak povedané o koľko by sa znížil zisk keby hráč do danej koalície nevstúpil. Tento princíp možno v praxi často vidieť v štátnej sfére napríklad vo voľbách kedy sú veľké strany tlačené malými. (Veľké strany by svoje návrhy nepresadili bez pomoci malej strany). Veľké strany sa tak snažia udržať koalíciu pretože je pre ne rozpad stratovejší. Tejto problematike sa budeme podrobnejšie venovať pomocou Shapleyho hodnoty, ktorá vyjadruje relatívnu vyjednávaciu silu.

Nakoniec hra, ktorá nemá žiadne jadro. V literatúrach by sme narazili na niekoľko postupov ako pri tejto situácií postupovať. Ja však uvediem spôsob kedy máme určenú charakteristickú funkciu a tak môžeme problém riešiť taktiež pomocou Shapleyho hodnoty, čo z pohľadu rôznych aplikácií predstavuje veľkú výhodu.

Prvý príklad demonštruje, že riešenie TU hier má význam uvažovať aj pri koalíciách len dvoch hráčov.

Príklad 1.8. Uvažujme 2 spoločnosti S_1, S_2 Prvá predáva spracované drevo ako polotovar a druhá toto spracované drevo nakupuje a ďalej predáva ako hotový výrobok. Uvažujme zjednodušenú situáciu, kedy firma, ktorá vyrába hotové výrobky nemá inú možnosť ako nakúpiť od firmy s polotovarmi. (Z hľadiska interpretácie táto situácia môže nastať napríklad, ak firma ktorá vyrába hotové výrobky sa snaží minimalizovať náklady na výrobu a tak si nemôže dovoliť nakupovať polotovary od inej spoločnosti). Charakteristická funkcia je daná nasledovne:

$$v(N) = 2, v(\{1\}) = 1, v(\{2\}) = 0.$$

Množina imputácií je nekonečná. Vyjadrujú ju nasledovné lineárne nerovnice, ktoré predstavujú aj individuálnu racionalitu hráčov:

$$S_1 \geq 1, S_2 \geq 0.$$

Priestor vyjednávania je určený nasledovne:

$$S_1 \in \langle 1, 2 \rangle, S_2 = 2 - S_1.$$

Táto hra nám vyúsťuje do situácie kedy spoločnosť S_1 má záujem vytvoriť koalíciu s druhou spoločnosťou, ak by jej zisk bol minimálne taký, aký si dokáže zabezpečiť sama. Ak sa teda spoločnosti spoja, zvýši sa tak dopyt po nábytku a tak aj po polotovare a pre obe spoločnosti je táto situácia výhodná, pretože spolu dokážu získať viac ako oddelene.

Jadro hry je v tomto prípade

$$S_1 \geq 1, S_2 \geq 0, S_1 + S_2 = 2, \text{t.j. } S_1 \in \langle 1, 2 \rangle, S_2 = 1 - S_1,$$

čo odpovedá intuitívnej predstave. Zaujímavejšie výsledky dostaneme ak je hráčov viac ako ukazuje nasledujúci príklad.

Príklad 1.9. Predstavme si, že máme akcionára A, ktorý vlastní akcie a snaží sa ich predať. Ďalej máme dvoch kupcov (1, 2), ktorí si cenia danú akciu na 90 a 100 eur. Ak akcionár A predá svoje akcie za cenu x, jeho zisk bude logicky x. Pričom však zisk kupca 1 bude $90 - x$. Celkový zisk koalície pozostávajúcej z hráčov A,2 bude teda

$$v(\{A, 1\}) = 90.$$

Podobne zisk koalície A,2 bude

$$v(\{A, 2\}) = 100.$$

Na druhej strane hráč, ktorý nevytvorí žiadnu koalíciu alebo dvaja kupujúci dokopy, nemôžu získať žiadny zisk.

$$v(\{i\}) = v(\{1, 2\}) = 0.$$

Nakoniec koalícia pozostávajúca zo všetkých troch hráčov:

$$v(\{A, 1, 2\}) = 100.$$

Môžme si všimnúť, že jadro hry pozostáva zo všetkých vektorov (x_1, x_2, x_3) spĺňajúcich:

$$x_1 + x_2 \geq 90, x_1 + x_3 \geq 100, x_1 + x_2 + x_3 = 100, x_i \geq 0.$$

Teda

$$C(v) = \{(t, 0, 100 - t)|90 \leq t \leq 100\}.$$

Vidíme, že rola druhého hráča je bezvýznamná a preto akcionár predá akcie prvému hráčovi.

1.2 Vlastnosti TU hier

TU hry môžu mať rôzne dodatočné vlastnosti, ktoré nám napovedajú o spôsobe ich riešenia. Uvediem základné z nich. Teoretické poznatky sme čerpali z [4].

Definícia 1.10. Hru (N, v) nazveme *slabo superaditívnou* ak platí:

$v(S \cup \{i\}) \geq v(S) + v(\{i\})$, pre všetky $S \subseteq N, i \notin S$.

Slabá superaditivita nám hovorí o tom, že ak sa k danej koalícií pridá ďalší (i-ty) hráč, celková hodnota účelovej funkcie sa nezmenší. Poznamenajme tiež, že superaditivita implikuje slabú superaditivitu.

Definícia 1.11. Hra (N, v) má *konštantný súčet* ak platí:

$v(S) + v(N - S) = v(N)$, pre všetky $S \subseteq N$.

Konštantný súčet má hra pri ktorej nemá význam vytvárať koalície, pretože hráči ktorý takúto koalíciu vytvoria nezvýšia svoj úžitok.

Definícia 1.12. Hra (N, v) je *0-normalizovaná* ak platí:

$v(\{i\}) = 0$, pre všetky $i \in N$.

Teda hráči, ktorí nevytvoria žiadnu koalíciu si nezabezpečia žiaden úžitok, resp. ich úžitok bude nulový. Zmyslom 0-normalizovanej hry je, že má zmysel uvažovať zisk, ktorý si hráči dokážu zabezpečiť nad rámec svojich istôt, teda v prípadoch kedy sú súčasťou nejakej koalície.

Definícia 1.13. Hra (N, v) je *monotónna* ak platí:

$S \subseteq T \subseteq N \Rightarrow v(S) \leq v(T)$.

Veľkosť zisku je neklesajúca funkcia.

1.3 Shapleyho hodnota

V tejto časti sa budeme zaoberať postupom ako analyzovať n-člennú hru v zmysle definície 1.1. Jadro hry je užitočné ak sa dívame na stabilitu riešenia. Našim zámerom je objasniť postupy, ktoré súvisia s vyjednávaním rozdelenia výhier. Budeme sa snažiť priradiť každému hráčovi práve jednu hodnotu vektoru (i-ty vstup hodnoty vektora môže byť považovaný za hodnotu miery sily i-teho hráča v hre).

Charakteristická funkcia, Shapleyho axiómy

Definícia 1.14. Charakteristická funkcia ϕ je funkcia, ktorá priraďuje každej charakteristickej funkcii n-člennej hry v, n-ticu reálnych čísel.

$$\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), ..., \phi_n(v)),$$

$\phi_i(v)$ reprezentuje hodnotu hráča i v hre s charakteristickou funkciou v.

Shapleyho axiómy pre $\phi(v)$:

1. *Efektívnosť:* $\sum_{i \in N} \phi_i(v) = v(N)$.
2. *Symetria:* v prípade, že i a j sú také, že $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ pre každú koalíciu S neobsahujúcu i a j, potom platí $\phi_i(v) = \phi_j(v)$.
3. *Dummy axióm:* v prípade, že i je také, že $v(S) = v(S \cup \{i\})$ pre každú koalíciu S neobsahujúcu i, potom $\phi_i(v) = 0$.
4. *Aditivita:* Ak u a v sú charakteristické funkcie, potom $\phi(u + v) = \phi(u) + \phi(v)$.

Axióm 1. nám hovorí o skupinovej racionalite. Druhý axióm hovorí, že ak je charakteristická funkcia symetrická pre hráčov i a j, potom hodnoty príslušné hráčom i a j sú si rovné. Tretí axióm nám približuje situáciu pri ktorej sa hráč pripojí ku koalícií a ak jej nepomôže ani neuškodí jeho hodnota by mala byť nulová. Najsilnejší posledný axióm v nás vzbudzuje dojem, že výsledná hodnota dvoch hier hraných súčasne by mala byť súčtom príslušných hodnôt hry hraných v rozdielnom čase. Treba poznamenať, že ak u a v sú charakteristické funkcie potom je tak aj pri $u + v$.

Axiómy (1)-(4) jednoznačne určujú jedinú charakteristickú funkciu nazývanú Shapleyho hodnota, ktorá je daná vzťahom:

$$\phi = (\phi_1, ..., \phi_n), \text{kde } i = 1, ..., n,$$

$$\phi_i(v) = \sum_{\substack{S \subset N \\ i \in S}} \frac{(|S| - 1)!(n - |S|)!}{n!} [v(S) - v(S - \{i\})].$$

Súčet v tomto vzorci je suma cez všetky koalície S, ktoré obsahujú i. Výraz $[v(S) - v(S - \{i\})]$ nám dáva hodnotu o ktorú sa zvýši úžitok koalície $S - \{i\}$ pridaním i-teho hráča. Nájsť hodnotu $\phi_i(v)$ teda znamená uvažovať všetky koalície obsahujúce i, vypočítať príspevok hráča i každej koalícií, vynásobiť s výrazom $\frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$ a následne sčítať.

Daný vzorec nám hovorí,že $\phi_i(v)$ je priemerné množstvo, ktoré hráč i prinesie do veľkej koalície, ak ostatní hráči postupne vytvárali túto koalíciu v náhodnom poradí.

Shapleyho hodnota má široké využitie v praxi. Je dôležité si uvedomiť, že koalície nemusia tvoriť len hráči, ale aj rôzne iné funkcie, hodnoty a situácie, ktoré nášmu modelu vyhovujú.

2 Analýza súčasného stavu

V praxi sa používa mnoho postupov na analýzu tržných, obchodných, optimalizačných a iných situácií. My sa na ne pozrieme z pohľadu teórie hier. V prvej časti diskutujeme o použití aparátu teórie hier na celú škálu podnikov z hľadiska právnej formy. Ďalšia časť sa sústredí na definovanie existujúcich tried koaličných hier. Právna forma podniku nám môže pomôcť bližšie špecifikovať o akú triedu koaličných hier sa jedná. Posledná časť tejto kapitoly je zameraná na predstavenie troch konkrétnych modelov z praxe, na ktorých je dokázaná všestrannosť použitia Shapleyho hodnoty za pomoci definovaných princípov.

2.1 Podniky a ich právna forma

Podniky podľa právnej formy v Českej republike rozdeľujeme na :

1. Podniky jednotlivca
2. Osobné spoločnosti
3. Kapitálové spoločnosti
4. Družstvá
5. Štátne podniky

Podnik jednotlivca (podnik fyzickej osoby):

- K založeniu je potrebný nižší kapitál a regulácia zo strany štátu je minimálna
- Neobmedzené ručenie za dlhy
- Podniky jednotlivca majú väčšinou formu živnosti

V prípade podnikov, ktorých je členom len jedna fyzická osoba (jeden hráč) nemá ako vzniknúť koalícia. Hráč (živnostník) sa môže podieľať na tvorbe koalícií iba navonok. (Napríklad s dodávateľmi, odberateľmi, rôznymi výrobcami, inými živnostníkmi, spoločnosťami atď).

Obchodné spoločnosti

- Sú vytvorené dvomi alebo viacerými osobami, ktoré sa delia o zisky a sú spoločne zodpovední za dlhy
- V Českej republike existujú dve formy a to verejná obchodná spoločnosť, komanditná spoločnosť

Bližšie popíšem komanditnú spoločnosť, pretože z pohľadu teórie hier je zaujímavejšia. Ako už bolo spomínané, komanditná spoločnosť môže byť založená spojením minimálne dvoch spoločníkov (zakladateľov). Jeden zo zakladateľov ručí za záväzky spoločnosti celým svojim majetkom (komplementár), a druhý len do výšky svojho vkladu (komanditista). Na riadení spoločnosti sa podieľajú komplementári. Práve preto majú pri tvorbe koalícií komanditisti nulovú vyjednávaciu schopnosť. Majú nárok na zisk, ale nie na riadenie spoločnosti. Zisk sa rozdeľuje podľa výšky vkladu. Ak je komplementárov viac, koalície a tak aj záväzné dohody môžu vznikať vo vnútri, ale aj navonok spoločnosti.

Kapitálové spoločnosti

- Spoločníci ručia za svoje záväzky len do výšky svojho vkladu
- Formami v Českej republike sú spoločnosť s ručeným obmedzením, akciová spoločnosť

Akciová spoločnosť

Základné ímianie je rozdelené na určitý počet akcií o určitej nominálnej hodnote. Charakteristickým znakom akciovej spoločnosti je akcia. Akcia je cenný papier s ktorým sú spojené práva akcionára podieľať sa na riadení spoločnosti, zisku a likvidačnom zostatku. S akciami sa obchoduje na burze za tržnú cenu, ktorá je tvorená ponukou a dopytom po akcii určitého podniku. Dopyt a ponuka sú ovplyvnené očakávaniami investorov, napríklad na základe odhadov aké budú výnosy plynúce z akcií. Aktuálnu tržnú cenu akcie môžeme zistiť z kurzového lístku burzy.

Z pohľadu teórie hier je akciová spoločnosť veľmi dobre aplikovateľná. Vyjednávacia sila jednotlivých spoločníkov (hráčov) je daná najčastejšie počtom akcií, ktoré vlastnia (podielom na celkovom majetku firmy). Je dôležité poznamenať, že v hrách nebudeme uvažovať žiadne obmedzenia práv vlastníkov akcií, ktoré im z nich plynú[5].

Bližšiu špecifikáciu akciovej a komanditnej spoločnosťou si uvádzame preto, pretože je to z hľadiska kooperatívnych hier zaujímavé. V komanditnej spoločnosti existuje skupina hráčov, ktorá nemôže do rozhodovania zasahovať. Ich prínos akejkoľvek koalícii je nulový, teda vzhľadom k Dummy axiómu neumožňuje v rámci Shapleyho hodnoty žiadnu silu. To sa u akciových spoločností stať nemôže, pretože každý akcionár vlastní určitý počet akcií a tým pádom sa podieľa na riadení spoločnosti. Ukážeme si zaujímavý príklad, kedy Shapleyho vektor môže priradiť nenulovú hodnotu aj hráčovi, ktorý má v jadre nulové členy x_i.

Príklad 2.15. Máme hru s nasledujúcimi charakteristickými funkciami:

$$v(\{1\}) = 0,\ v(\{2\}) = 0,\ v(\{3\}) = 0, v(\{1,2\}) = 5,$$

$$v(\{1,3\}) = 10,\ v(\{2,3\}) = 0,\ v(\{1,2,3\}) = 10.$$

Jadro hry je dané:

$$C(v) = \{(x_1, x_2, x_3) | x_2 = 0, x_1 + x_3 = 10, x_1 \geq 5\}.$$

Shapleyho hodnota jednotlivých hráčov:

$$\phi_1(v) = \frac{35}{6},$$
$$\phi_2(v) = \frac{5}{6},$$
$$\phi_3(v) = \frac{10}{3}.$$

Na základe individuálnej racionality sa hráčom 1 a 3 neoplatí vytvárať s hráčom 2 koalíciu. Je však vidieť, že v konečnom dôsledku aj hráčovi 2 Shapleyho hodnota priradila vyjednávaciu schopnosť (aj keď len veľmi nízku).

2.2 Triedy koaličných hier

Momentálne je vybudovaný aparát teórie hier pre riešenie rôznych konkrétnejších typov problému. Princípom je vytvorený všeobecnejší popis situácie, ktorý potom slúži na určenie hodnôt charakteristickej funkcie. Hodnoty charakteristickej funkcie sa následne používajú pri vyjednávaní rozdelenia výhier. Teoretické poznatky sme čerpali z [6].

2.2.1 Tržné hry

Nech $U,$ je množina hráčov. Trhom rozumieme štvoricu $(N, \mathbb{R}^m_+, A, W)$, kde N je koalícia (množina obchodníkov), $\mathbb{R}^m_+$ je taká časť Euklidovského priestoru v ktorom sú vždy hodnoty $\mathbb{R}^m$ kladné (priestor komodít), $A = (a^i)_{i \in N}$ je indexovaný súbor bodov v $\mathbb{R}^m_+$ (počiatočné dotácie) a nakoniec $W = (w^i)_{i \in N}$ sú indexované súbory spojitých konkávnych funkcií v $\mathbb{R}^m_+$ (úžitkové funkcie).

Predpokladáme, že náš trh má prenosný úžitok, to znamená, že existuje dodatočná komodita, peniaze, a každý obchodník zohľadňuje jeho úžitok za tovar v rámci svojich peňažných možností.

Formálne, úžitok obchodníka $i \in N$ pre $x \in \mathbb{R}^m_+$ a množstvo peňazí $\xi \in \mathbb{R}^N$ je $W^i(x, \xi) = w^i(x) + \xi^i$. Množstvo peňazí ξ^i môže nadobúdať záporné hodnoty. Tiež je dôležité poznamenať, že spočiatku každý obchodník vstupuje na trh s nulovým počiatočným kapitálom.

Nech $(N, \mathbb{R}^m_+, A, W)$ je trh a nech platí $\emptyset \neq S \subseteq N$. Obchod medzi členmi S sa zohľadní v indexovanom súbore $(x^i, \xi^i)_{i \in S}$, tak že $x^i \in \mathbb{R}^m_+$ pre všetky $i \in S$, $\sum\limits_{i \in S} x^i = \sum\limits_{i \in S} a^i$ a $\sum\limits_{i \in S} \xi^i = 0$. Celkový úžitok koalície S ako výsledok predchádzajúceho uzavretia obchodu je:

$$\sum_{i \in S} W^i(x^i, \xi^i) = \sum_{i \in S} w^i(x^i) + \sum_{i \in S} \xi^i = \sum_{i \in S} w^i(x^i).$$

Definícia 2.16. *Uskutočniteľné S-alokácie* sú indexované súbory $x_s = (x^i)_{i \in S}$ tak, že $x^i \in \mathbb{R}^m_+$ pre všetky $i \in S$ a $\sum\limits_{i \in S} x^i = \sum\limits_{i \in S} a^i$, X^S je množina všetkých uskutočniteľných S-alokácií.

Definícia 2.17. Hra (N, v) je *tržná hra* ak existuje trh $(N, \mathbb{R}^m_+, A, W)$ tak, že:

$$v(S) = \max \left\{ \sum_{i \in S} w^i(x^i) | x_s \in X^S \right\}$$

pre každú $S \subseteq N$.

Príklad 2.18. Uvažujme hru pozostávajúcu z troch hráčov. (Hráčmi sú 3 akciové spoločnosti, ktoré obchodujú na burze). Každá z nich sa snaží svoje komodity vhodne investovať a tak maximalizovať svoj zisk. Označme si spoločnosti $N = \{1, 2, 3\}$. Komoditami s ktorými môžu medzi sebou obchodovať sú káva a chmeľ (x_1, x_2). Spoločnosti disponujú nasledujúcim množstvom komodít:

$a^1 \to (2, 0)$,
$a^2 \to (1, 2)$,
$a^3 \to (1, 3)$,
pričom ich úžitok je daný nasledujúcimi funkciami:

$$w^1(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2,\ w^2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2,\ w^3(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Hráči sa snažia maximalizovať svoj zisk a uvažujú či sa im vyplatí vytvárať koalície. Výpočtom sa dostávame k nasledujúcim ziskom:

$$v(\{1\}) = 4,\ v(\{2\}) = 5,\ v(\{3\}) = 4,$$
$$v(\{1, 2\}) = 12,\ v(\{1, 3\}) = 9,\ v(\{2, 3\}) = 12,$$
$$v(\{1, 2, 3\}) = 18.$$

Výpočtom sa dostávame k záveru, že sa spoločnostiam vyplatí vytvárať koalície, pretože si tak zabezpečia vyšší zisk. Napríklad ak sa spoločnosť 2 spojí so spoločnosťou 3, ich zisk bude 12, čo je v porovnaní s tým čo si dokážu zabezpečiť samy viac. Ďalej ak sa k nim pridá hráč 1, ktorý si sám dokáže zabezpečiť len 4, celkový zisk sa zvýši na 18. Takáto situácia v praxi vedie napríklad ku vzniku monopolov.

2.2.2 Nákladové (alokačné) hry

Nech U je množina hráčov. *Alokačný problém* nákladov je hra (N, c), kde N je koalícia a c je koaličná funkcia - *nákladová funkcia* problému. Intuitívne N reprezentuje množinu potenciálnych zákazníkov verejnej služby alebo zariadenia. Každý zákazník je obslúžený v nejakej pred definovanej úrovni, alebo nie je obslúžený vôbec.

Definícia 2.19. Nech $S \subseteq N$. Potom $c(S)$ reprezentuje najnižšie náklady obsluhy člena S pomocou najúčinnejších možných prostriedkov. Hra (N, c) sa nazýva *nákladová hra.*

Hoci nákladovú hru (N, c) formálne považujeme za hru, z pohľadu aplikácií to tak nie je. Nákladová funkcia nie je interpretovaná ako obyčajná koaličná funkcia. Je možné priradiť nákladovej hre (N, c) obyčajnú hru zvanú *úsporná hra* $v(S)$ (saving game) , ktorá je daná vzťahom:

$$v(S) := \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S),$$

kde $S \subseteq N$.

Príklad 2.20. Airport game

Uvažujme letisko s jednou štartovacou dráhou. Predpokladajme, že máme m rozdielnych lietadiel a c_k, $1 \leq k \leq m$ je cena za prenájom pristávacej dráhy lietadla k. Nech N_k je množina lietadiel typu k pristávacích v danom čase a $N = \bigcup_{k=1}^{m} N_k$. To znamená, že hráči (členy množiny N), sú pristávacie lietadlá. Nákladová funkcia tejto hry je daná vzťahom:

$$c(S) = \max \left\{ \sum_{i \in S} c_k | S \cap N_k \neq \emptyset \right\},$$

$$c(\emptyset) = 0.$$

2.2.3 Jednoduché hry

Definícia 2.21. Jednoduchá hra je dvojica (N, W), kde N je koalícia a W je podmnožina množiny 2^N splňujúca:

1. $N \in W$,
2. $\emptyset \notin W$,
3. $(S \subseteq T \subset N) \wedge (S \in W) \Rightarrow T \in W$.

Prvkom W je koalícia a W je množina výherných koalícií. Vlastnosť $(S \subseteq T \subset N) \wedge (S \in W) \Rightarrow T \in W$ je vlastnosť *monotónnosti* jednoduchých hier. Intuitívne jednoduchá hra $g = (N, W)$ reprezentuje výbor: koalícia N je množina členov výboru a W je množina koalícií, ktoré plne kontrolujú rozhodnutia g. Všimnime si, že každý parlament je výbor, každé mestské zastupiteľstvo je výbor, atď..

Vlastnosti jednoduchých hier

Definícia 2.22. Nech $g = (N, W)$ je jednoduchá hra. Jednoduchú hru nazveme:

1. *Vlastnou* ak platí $S \in W \Rightarrow N - S \notin W$,
2. *Silnou* ak platí $S \notin W \Leftrightarrow N - S \in W$,
3. *Slabou* ak platí $V = \bigcap_{i \in S} S \neq \emptyset$.

Členovia V sa nazývajú *veto hráči*. Jednoduchá hra g je diktátorská ak existuje $j \in N$ (tzv. diktátor) tak, že $S \in W \Leftrightarrow j \in S$.

Poznámka. V mnohých aplikáciách je zvykom pridružiť g koaličnú hru $G = (N, v)$, kde $v(S) = 1$ ak $S \in W$ a $v(S) = 0$ inak. Myšlienku môžeme aplikovať napríklad na výbor g, ktorý musí umiestniť fixné množstvo peňazí medzi jeho členov a pomocou Shapleyho hodnoty potom navrhnúť prípadné rozdelenie. Tento fakt vedie k ďalšej definícii.

Definícia 2.23. Nech $g = (N, W)$ je jednoduchá hra. Pridružená koaličná hra s jednoduchou hrou je daná vzťahom:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{ak } S \in W, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Pripomeňme si, že akákoľvek monotónna koaličná hra (N, v), ktorá spĺňa $v(S) \in \{0, 1\}$ pre $S \subseteq N$ a $v(N) = 1$, je združená hra s jednoduchou hrou.

Definícia 2.24. Jednoduchá hra (N, W) je váhovo väčšinová hra (weighted majority game) ak existuje kvóta $q > 0$ a váha $w^i \geq 0$ pre každé $i \in N$, tak že platí

$$S \subseteq N, S \in W \Leftrightarrow w(S) \geq q,$$

kde $w(S) = \sum\limits_{i \in S} w^i$.

Príklad 2.25. Uvažujme štyroch akcionárov v podniku, ktorí vlastnia akcie s nasledujúcimi podielmi 10, 20, 30, 40. Je dané, že na schválenie rozhodnutia v podniku je potrebná nadpolovičná väčšina. Toto môžme považovať za jednoduchú hru, kde výherné koalície sú:

$$\{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}.$$

Táto hra sa nazýva váhovo väčšinová hra s váhami $w_1 = 10$, $w_2 = 20$, $w_3 = 30$, $w_4 = 40$, pričom kvóta je 50. Chceme nájsť Shapleyho hodnotu tejto hry. Výpočtom sa dostaneme k nasledujúcim výsledkom $\phi_1 = \frac{1}{12}, \phi_2 = \frac{1}{4}, \phi_3 = \frac{1}{4}, \phi_4 = \frac{5}{12}$. Shapleyho vektor je teda $(\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12})$.

Skúsme zmeniť zadanie. Ponechajme štyroch hráčov, ale podiely akcií zmeníme na 10, 30, 30, 40. Je viditeľné, že ak ktorýkoľvek z hráčov 2, 3 a 4 vytvoria koalíciu bude výherná. Hráč 1 je "nepotrebný". Nemôže zaručiť výhru žiadnej z koalícii bez toho, aby sa k nim už žiaden hráč nepridal. Výpočtom sa dostávame k nasledujúcemu Shapleymu vektoru:

$$(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}).$$

Príklad 2.26. Hlasovacia hra

Bezpečnostná rada Organizácie Spojených národov pozostáva z piatich stálych členov (USA, Rusko, Británia, Francúzsko, Čína) a ďalších desiatich nestálych. Návrhy musia byť schválené deviatimi členmi vrátane stálych členov. Táto situácia vedie k hlasovacej 15-člennej hre $(N, v), v(S) = 1$ ak koalícia pozostáva z piatich stálych členov a ďalších štyroch nestálych a $v(S) = 0$ inak. Takáto hra sa tiež nazýva jednoduchá hra. Koalícia s ohodnotením 1 je výherná.

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \{1, ..., 5\} \subseteq S, |S \geq 9, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

2.3 Aplikácia Shapleyho hodnoty v praxi

V tejto časti si ukážeme uplatnenie Shapleyho hodnoty na konkrétnych modeloch z praxe. Presvedčíme sa, že teória hier má široké uplatnenie nie len v oblastiach ekonómie, ale aj v mnohých iných situáciach, ktoré si podrobne rozoberieme. Zdrojom poznatkov v tejto časti sú [7].

2.3.1 Dragon Den reality show

Prvý model, ktorým sa budeme zaoberať je televízna show. Poďme sa pozrieť na elegantný spôsob akým budeme analyzovať rozhodovaciu situáciu investorov o kúpe akcií. Dragon Den je populárna televízna show, ktorej členmi sú traja dobrodružní investori. Ďalším členom je malý podnikateľ, ktorý opíše svoj podnikateľský zámer a snaží sa presvedčiť investorov pre investíciu do jeho plánu za výmenu akcií jeho spoločnosti. Hostitelia kladú otázky a diskutujú o vyhliadkach spoločnosti (napríklad na ktorý subjekt na trhu sa bude zameriavať, rôznorodosť obchodného modelu, atď.) a nakoniec navrhnú, čo vnímajú ako spravodlivú výmenu financovania za získanie akcií spoločnosti. Ako aj množstvo finančných prostriedkov tak aj akcie spoločnosti požadované na oplátku môžu byť odlišné v závislosti od investorov, pretože sú priamoúmerné zdrojom (napr. marketing, dodávateľské reťazce), ktoré investor investuje do spoločnosti, a tak zvýši jej hodnotu.

Úloha, ktorú v našom modele budeme riešiť znie ak všetci hostitelia chcú nájsť biznis, ktorí by financovali a tak by teda prispievali k rastu spoločnosti, ako rovnocenne rozdelíme akcie spoločnosti vlastníkovi a trom investorom. (Predpokladajme, že vieme presne odhadnúť koľko jednotliví členova môžu prispieť.)

Predpokladajme, že hráč P_1 spoločnosť ocenil na úroveň 10 mil. eur. P_2, P_3, P_4 sú hostitelia - investori. Najskôr si vypíšeme všetky možné vzniknuté koalície. To je 2^N, v našom konkrétnom príklade teda $2^4 = 16$. Do tohto výpočtu zahrnieme aj prázdnu množinu. Hostitelia nemôžu vytvoriť žiadnu dohodu bez súhlasu hráča P_1 a tiež nemôže vzniknúť koalícia, ktorá by žiadneho hráča neobsahovala. Najskôr teda:

$$v(\emptyset) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = v(\{2,3\}) = v(\{3,4\}) = v(\{2,3,4\}) = 0.$$

Ďalšie koalície ohodnotíme nasledujúcimi charakteristickými funkciami:

$v(\{1\}) = 10$, $v(\{1,2\}) = 20$, $v(\{1,3\}) = 30$, $v(\{1,4\}) = 35$,

$v(\{1,2,3\}) = 45$, $v(\{1,2,4\}) = 35$, $v(\{1,3,4\}) = 35$, $v(\{1,2,3,4\}) = 50$.

Tab. 1 Shapleyho hodnota hráč č.1 (Dragon Den reality show)

S	$P_4(S)$	$[v(S) - v(S - \{1\})]$	$P_4(S) \cdot \Delta_1(S)$
$\{1\}$	$\frac{0!3!}{4!} = \frac{6}{26} = \frac{1}{4}$	$v(\{1\}) - v(\emptyset) = 10$	$\frac{1}{4}10 = \frac{5}{2} = \frac{34}{12}$
$\{1,2\}$	$\frac{1!2!}{4!} = \frac{1}{12}$	$v(\{1,2\}) - v(\{2\}) = 20$	$\frac{20}{12} = \frac{5}{3}$
$\{1,3\}$	$\frac{1}{12}$	30	$\frac{30}{12} = \frac{5}{2}$
$\{1,4\}$	$\frac{1}{12}$	35	$\frac{35}{12}$
$\{1,2,3\}$	$\frac{2!1!}{4!} = \frac{1}{12}$	45	$\frac{45}{12}$
$\{1,2,4\}$	$\frac{1}{12}$	35	$\frac{35}{12}$
$\{1,3,4\}$	$\frac{1}{12}$	35	$\frac{35}{12}$
$\{1,2,3,4\}$	$\frac{3!0!}{4!} = \frac{1}{4}$	50	$\frac{50}{12}$

$$\phi_1(v) = \frac{280}{12} = 23,33.$$

Tab. 2 Shapleyho hodnota hráč č.2 (Dragon Den reality show)

S	$P_4(S)$	$\Delta_2(S)$	$P_4(S) \cdot \Delta_2(S)$
$\{2\}$	$\frac{1}{4}$	$0 \cdot 0$	0
$\{1,2\}$	$\frac{1}{12}$	$20 \cdot 10$	$\frac{10}{12}$
$\{1,2,3\}$	$\frac{1}{12}$	$45 - 30 = 15$	$\frac{15}{12}$
$\{1,2,4\}$	$\frac{1}{12}$	$35 - 35 = 0$	0
$\{1,2,3,4\}$	$\frac{1}{4}$	$50 - 35 = 15$	$\frac{15}{4} = \frac{45}{12}$

$$\phi_2(v) = \frac{70}{12} = 5,83.$$

Tab. 3 Shapleyho hodnota hráč č.3 (Dragon Den reality show)

S	$P_4(S)$	$\Delta_3(S)$	$P_4(S) \cdot \Delta_3(S)$
$\{3\}$	$\frac{1}{4}$	$0 \cdot 0$	0
$\{1,3\}$	$\frac{1}{12}$	$20 \cdot 10$	$\frac{10}{12}$
$\{1,2,3\}$	$\frac{1}{12}$	$45-30=15$	$\frac{15}{12}$
$\{1,3,4\}$	$\frac{1}{12}$	$35-15=20$	$\frac{20}{12}$
$\{1,2,3,4\}$	$\frac{1}{4}$	$50-35=15$	$\frac{15}{4}=\frac{45}{12}$

$$\phi_3(v) = \frac{90}{12} = 7,5.$$

Výpočty pre hráčov P_2, P_3 sú jednoduchšie, pretože koalícia medzi hostiteľmi dáva 0 v každom prípade. Hodnotu P_4 nemusíme počítať, pretože z definície musí platiť

$$\phi_1(v) + \phi_2(v) + \phi_3(v) + \phi_4(v) = 50,$$

z toho

$$\phi_4(v) = \frac{160}{12} = 13,33.$$

Je vhodné poznamenať, že $v(S)$ je monotónna (rastie, ale nie nevyhnutne). To znamená, že neexistuje hráč, ktorý by spôsobil, že $v(S) - v(S - \{i\})$ by bolo záporné. Hra je teda individuálne racionálna.

2.3.2 Teória hier v Talmude

Talamud je náboženským textom judaizmu. V niektorých jeho častiach pojednáva o občianskom práve a problémoch ako sa správať v období úpadku, kedy celkové dlhy dlžníka sú väčšie ako jeho majetok. Talmud poskytuje numerické súčty toho, čo má veriteľ získať v závislosti na veľkosti majetku dlžníka. Presnejšie úloha je daná nasledovne: zomrie dlžník a nezanechá po sebe ímanie vo výške postačujúcej na úhradu pohľadávok trom svojim dlžníkom v plnej výške.

Autor talmudistického traktátu potom tri situácie (100, 200, 300) ímania dlžníka rieši a rozdeľuje medzi troch veriteľov s pohľadávkami vo výške (100, 200, 300).

Identifikovanie jediného zjednocujúceho pravidla na rozdelenie týchto prostriedkov unikol pre tisícročia. V prvom prípade si môžeme všimnúť (keď je veľkosť pohľadávky 100), že majetok je rovnomerne rozdelený medzi veriteľov. V treťom prípade (veľkosť pohľadávky vo výške 300), je úmerne rozdelená tak, aby každý veriteľ dostal polovicu sumy ktorú mu bol dlžník dlžný. Druhý prípad uniká akémukoľvek jednoduchému vysvetleniu. Až Robert Aumann a jeho spoluautor boli schopní problém vyriešiť za pomoci teórie hier. Problém bol pôvodne vyriešený použitím koncepcie riešenia nazýva jadierko (nucleolus), ale Guiasu (2011) ukazuje, že pomocou Shapleyho vektoru môže vyriešiť problém rovnako dobre.

Hlavnou novinkou je rozlišovať medzi kumulatívnymi hrami, v ktorých účastníci odmietajú zdieľať svoj nárok na výhru a tak sa hodnota funkcie $v(S)$ vypočíta aditívne to znamená s ohľadom na maximalizáciu zisku.

Pri kumulatívnej hre definujeme

$$v(\{i\}) = \min\{d_i, E\},$$

kde d_i je veľkosť pohľadávky hráča i, a E je množstvo majetku. Následne

$$v(\{i, ..., j\}) = \min[v(\{i\}) + ... + v(\{j\}), E].$$

Prípad č. 1: Predpokladajme, že $d_1 < ... < d_n < E$.

Majme: $E = 100$, $d_1 = 100$, $d_2 = 200$, $d_3 = 300$, $v(\emptyset) = 0$, potom

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = E,$$

$$v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(N) = E,$$

kde $[v(S) - (v(S)\ \{i\})] = E - E$ pre všetky S, avšak bez $v(\{i\})$.

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= \sum \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}[v(S)-v(S\ \{i\})] \\ &= \frac{0!2!}{3!}[v(\{i\}-v(\emptyset)] \\ &= \frac{2[E-0]}{6} = \frac{E}{3} = 33\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Pokiaľ sú všetky pohľadávky väčšie alebo rovné majetku dlžníka rozdeľujú si ich rovným dielom. Zovšeobecnenie prípadu je dané vzťahom:

$$d_1 < ... < d_{m-1} < E \leq d_m < ... < d_n,$$

pričom charakteristickú funkciu definujeme ako:

$$v(\emptyset) = 0, v(\{i\}) = d_i, \forall i \in [1, m-1],$$

$$v(\{i\}) = d_{m-1} + (E - d_{m-1})/(n-m-1), \forall i \in [m, n].$$

Zovšeobecnenie si demonštrujeme na nasledujúcich prípadoch.

Prípad č. 2:

$E = 200$, $d_1 = 100$, $d_2 = 200$, $d_3 = 300$, $d_1 < E \leq d_2 < d_3$ a preto aj $n = 3$ a $m = 2$,
$v(\emptyset) = 0$, $v(\{1\}) = d_1$, $v(\{2\}) = v(\{3\}) = d_1 + (E - d_1)/2$,
$v(\{1,2\}) = \min\{d_1 + d_2, E\} = E$,$v(\{1,3\}) = \min\{d_1 + d_3, E\} = E$,
$v(\{2,3\}) = \min\{d_2 + d_3, E\} = E$, $v(N) = \min\{d_1 + d_2 + d_3, E\} = E$.

Pre hráča P_1 sčítame formule pre koalície $S = \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}$. P_2, P_3 sú rovnaké.

$$\begin{aligned}\varphi_1(v) &= \frac{0!2!}{3!}[d_1 - v(\emptyset)] + 2\frac{1!1!}{3!}\left[E - \left(d_1 + \frac{E-d_1}{2}\right)\right] + \frac{2!0!}{3!}[E-E] = \\ &= \frac{2}{6}100 + 2\frac{1}{6}\frac{200-100}{2} = 50, \\ \varphi_2(v) = \varphi_3(v) &= \frac{0!2!}{3!}\left[d_1 + \frac{E-d_1}{2} - 0\right] + \frac{1!1!}{3!}\left[E - d_1 - \left(d_1 + \frac{E-d_1}{2}\right)\right] + \\ &+ \frac{2!0!}{3!}[E-E] = \frac{5E-d_1}{12} = 75.\end{aligned}$$

Prípad č. 3: V tomto prípade máme $d_1 < d_2 < E < d_3, (n = 3, m = 3)$.

Dosádzame podobne ako v prípade č. 2, až na $v(\{2\}) = d_2$ a $v(\{1,2\}) = E$.

$$\varphi_1(v) = \frac{0!2!}{3!}[d_1 - 0] + \frac{1!1!}{3!}[E - d_1] + \frac{1!1!}{3!}[E - E] + \frac{2!0!}{3!}[E - E] = \frac{E + 2d_1 - d_2}{6} = 50,$$

$$\varphi_2(v) = \frac{0!2!}{3!}[d_2 - 0] + \frac{1!1!}{3!}[E - d_1] + \frac{1!1!}{3!}[E - E] + \frac{2!0!}{3!}[E - E] = \frac{E + 2d_2 - d_1}{6} = 100,$$

$$\varphi_3(v) = \frac{0!2!}{3!}[E - 0] + \frac{1!1!}{3!}[E - d_1] + \frac{1!1!}{3!}[E - d_2] + \frac{2!0!}{3!}[E - E] = \frac{4E + d_1 - d_2}{6} = 150.$$

Základná myšlienka Talmud zákona spočíva v tom, že rozdeľujeme majetok medzi troch veriteľov tak, že ktorýkoľvek dvaja veritelia si rozdelia súčet, ktorý spoločne získali, na základe rovnomerného rozdelenia spornej sumy. V prípade č. 2 vyššie vidíme, že ak E je rovné 200, Hráč P_1 dostane 50 a P_2 dostane 75, majetok po sčítaní dá 125. Vzhľadom k tomu, že hráčovi P_1 patrí len 100, 25 pustí hráčovi P_2, a zvyšok spornej sumy si rozdelia rovnomerne medzi dvoch.

A tak sme pomocou teórie hier vyriešili tisícročnú záhadu. Tento postup môžeme opakovať, ako aj originálni rabíni pravdepodobne robili, Shapleyho hodnota však ukazuje cestu zovšeobecnenia tohto pravidla použiteľného pre ľubovoľnú veľkosť majetku ako aj počet investorov.

2.3.3 Nákladová (úsporná) hra a Shapleyho vektor

V tejto časti podrobne zanalyzujeme nákladovú hru, určíme jadro, graficky ho znázorníme a nakoniec na celú hnu aplikujeme Shapleyho vektor.

Úloha - Tri spolupracujúce mestá (zdroj energie)

Mestá 1,2,3 chcú byť pripojené s blízkym zdrojom energie. Možné prenosné linky a ich ceny za prenájom sú zobrazené v Obr. 1. Každé mesto si môže prenajať ktorúkoľvek prenosnú linku. Ak mestá budú spolupracovať ušetria na prenájme. (Prenosné linky majú neobmedzenú kapacitu).

Model:

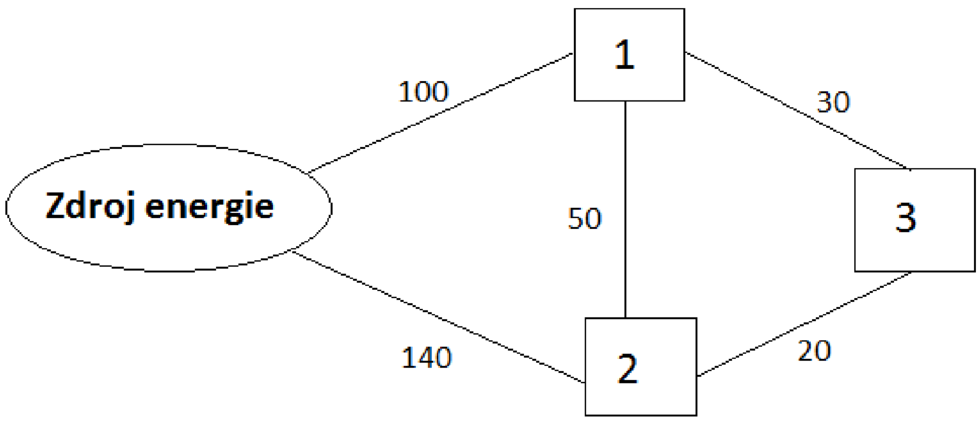
Hráči v tejto situácii sú 3 mestá. Označme množinu hráčov $N = 1, 2, 3$. Títo hráči môžu vytvárať koalície. Tabuľka 1. naznačuje nájmy ako aj ušetrené zdroje krytia každej koalície. Čísla $c(S)$ sme získali minimalizáciou nákladov spájajúcich mestá v koalícii S so zdrojom energie.

Úspory nákladov $v(S)$ sú určené:

$$v(S) := \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S),$$

kde $S \subseteq N$.

Úspory nákladov $v(S)$ pre koalície S sú rovné rozdielu nákladov zodpovedajúcich situácii, kedy všetci členovia S pracujú samostatne, a situácie, kedy všetci členovia pracujú spoločne.



Obr. 1: Prenosné linky - ceny

Riešenie:

Základná otázka v kooperatívnych hrách (N, v) znie: ktorá podmnožina S vytvorí koalíciu a ako budú rozdelené úspory takej koalície medzi jej členov? Je potrebné vytvoriť koalíciu so súhlasom každého hráča. Treba však brať do úvahy, že ochota hráčov vytvárať koalície závisí od úspory, ktorú hráč dosiahne pri vstupe do danej koalície.

Tab. 4 Nákladová hra - nájmy/úspora

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$c(S)$	100	140	130	150	130	150	150
$v(S)$	0	0	0	90	100	120	220

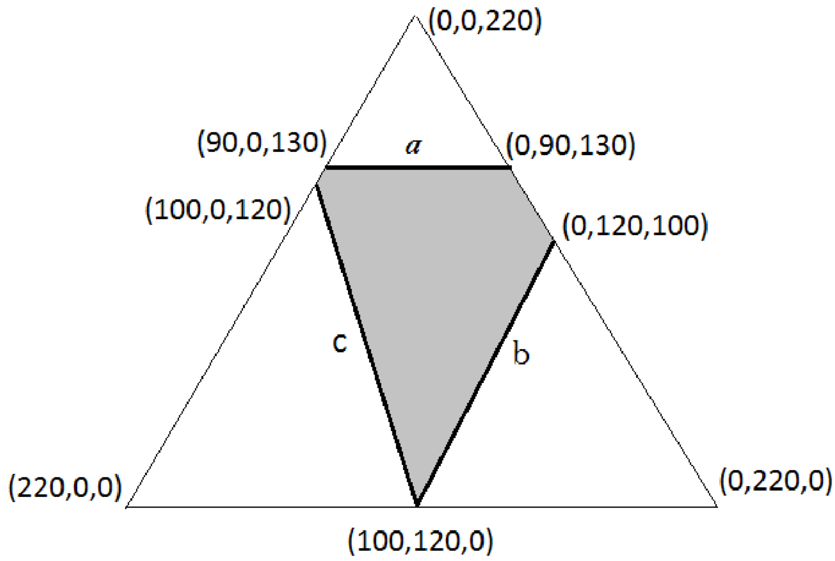
Hľadáme vektor $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $x_1 + x_2 + x_3 = 220$, kde hráči $i \in \{1, 2, 3\}$ získajú x_i. Výpočtom sa dostávame k veľkému a neurčitému súboru riešení. Predpokladajme napríklad, že množina všetkých hráčov vytvorí koalíciu s úsporou nákladov

$$x_1 = 40, x_2 = 40, x_3 = 140, v(N) = 220.$$

Hráč 1 a 2 môžu protestovať pretože $v(\{1, 2\}) = 90$, $v(\{1, 2\}) > 80$, $x_1 + x_2 = 80$. Pri takejto situácii hovoríme, že $x = (x_1, x_2, x_3)$ sa nenachádza v jadre tejto hry. Všeobecne, jadro hry o troch mestách je množina výplatných rozdelení pre $N = \{1, 2, 3\}$, tak že suma všetkých úspor nákladov je rovná $v(N) = 220$ a každá neprázdna koalícia S získa aspoň to čo by si sama dokázala zabezpečiť pokiaľ by nevstúpila do žiadnej koalície.
Formálne je to množina:

$$\begin{aligned} C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 90, x_1 + x_3 \geq 100, x_2 + x_3 \geq 120, x_1 + x_2 + x_3 = 220\} \end{aligned}$$

Pre predstavu ako daná množina vyzerá uvedieme nasledovný diagram. Keď C je podmnožina $\mathbb{R}^3$, obmedzenie $x_1 + x_2 + x_3 = 220$ spôsobí, že C je obsiahnuté v dvojdimenzionálnej podmnožine $\mathbb{R}^3$. To je cez body (220,0,0), (0,220,0), (0,0,220).

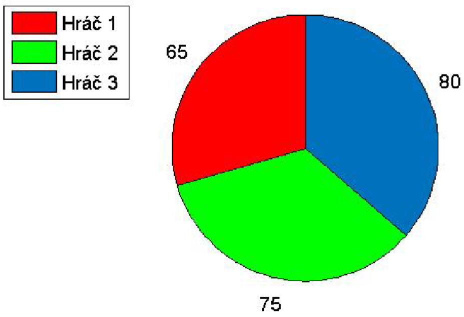


Obr. 2: Diagram - Jadro hry

Všimnime si, že C je podmnožina trojuholníka s obmedzením $x_i \geq 0$ pre každé $i = 1, 2, 3$ odvodené z podmienky $x_i \geq v(\{i\})$ pre $i = 1, 2, 3$. Množina C je šedá oblasť ohraničená tromi podmienkami pre dvojčlenné koalície. Jadro hry je polygón s vrcholmi (100,120,0), (0,120,100), (0,90,130), (90,0,130), (100,0,120).

Podľa Shapleyho hodnoty by úspory mali byť rozdelené nasledovne:

$$\phi(v) = (64, 75, 80).$$



Graf 1: Shapleyho vektor - nákladová hra

3 Vlastné návrhy riešenia

V predchádzajúcej kapitole sme si predstavili triedy koaličných hier a niektoré zaujímavé aplikácie Shapleyho hodnoty. Ako vlastný návrh riešenia využijeme vlastnosti a aparát jednoduchých hier pričom na ne následne aplikujeme Shapleyho vektor a tým vytvoríme ďalší model, ktorý je aplikovateľný v praxi.

Analýza volieb pomocou Shapleyho vektora

Budeme sa zaoberať analýzou konkrétnych výsledkov volieb na Slovensku od roku 1994 po rok 2016. Analýza bude spracovaná pomocou Shapleyho hodnoty. Výsledky budú prezentované v grafe a diagramoch. Najskôr si však poďme ukázať ako funguje volebný systém na Slovensku.

Volebný systém do Národnej rady Slovenskej republiky je daný v Ústave Slovenskej republiky. Voľby poslancov sa konajú raz za štyri roky. Občania si zvolia 150 členov (zástupcov politických strán - poslancov). Voľby sa riadia pomerným volebným systémom. Volebné kvótum (na vstup strany do parlamentu) je 5% z celkového počtu platných voličských hlasov. Volebná formula, podľa ktorej sú rozdeľované poslanecké mandáty sa nazýva Hagenbach-Bischoffova metóda. V príklade, ktorý uvediem uvažujem strany, ktoré získali minimálne 5% platných hlasov a bol im pridelený odpovedajúci počet mandátov [8].

3.1 Spracovanie dát

Je treba vhodne zvoliť postup, podľa ktorého čo najefektívnejšie vypočítame Shapleyho hodnotu. Dôvodom je veľký počet koalícií, ktorý môže vzniknúť. Vhodnou voľbou pre nás môže byť využitie programu Matlab.

Výpočet:

V programe Matlab zvolíme funkciu Shapley voľne dostupnú na [9]. Funkcia funguje na základe jedného vstupu. Týmto vstupom je vektor v, ktorý pozostáva z účelovej funkcie pre hodnoty všetkých koalícií, ktoré môžu vzniknúť radených postupne od jednočlenných po koalíciu tvorenú všetkými hráčmi. Hodnotu účelovej funkcie predpokladáme 0 alebo 1 napriklad podľa toho, či koalícia obsahuje nadpolovičnú väčšinu. Ako prvé si vygenerujeme vektor obsahujúci všetky možné koalície.

Pre predstavu uvádzam vektor, pre hru o štyroch hráčoch - (15 zložiek). Hráča číslo 1 charakterizuje vo vektore výraz 1. Koalíciu pozostávajúcu z hráčov 1 a 2 charakterizuje vo vektore výraz 12.

```
v = [1 2 3 4 12 13 14 23 24 34 123 124 134 234 1234]
```

Potom už len pripíšeme jednotlivých členom 0 alebo 1. Aby sme nemuseli vypisovať všetky kombinácie hráčov použijeme funkciu `nchoosek` v programe Matlab. V našom prípade by šlo konkrétne o kód

```
V=[1 2 3 4];
A1=nchoosek(V,1);
A2=nchoosek(V,2);
A3=nchoosek(V,3);
A4=nchoosek(V,4);
v = [A1;A2;A3;A4];
```

Nasledujúcim zápisom si môžeme overiť, že sa dostávame k číslu 15, čo značí počet všetkých možných kombinácií bez opakovania.

```
length(A1') + length(A2') + length(A3') + length(A4')
```

Ak by sme chceli vidieť všetky koalície tvorené tromi hráčmi, stačí zavolať premennú `A3`, ktorá nám všetky koalície vypíše presne v poradí v ktorom potrebujeme.
Zmyslom tejto hry je teda ohodnotenie jednotlivých koalícií na základe sily strán vytvoriť nadpolovičnú väčšinu. Koalícia, ktorej súčet bude väčší alebo rovný 76 ohodnotíme jednotkou. Koalíciu, ktorá nebude tvoriť nadpolovičnú väčšinu ohodnotíme nulou. Označme nadpolovičné koalície $K_1, ...K_m$. Jednoduchá hra je potom daná vzťahom:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{ak } S \in \{K_1, ..., K_m\}, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

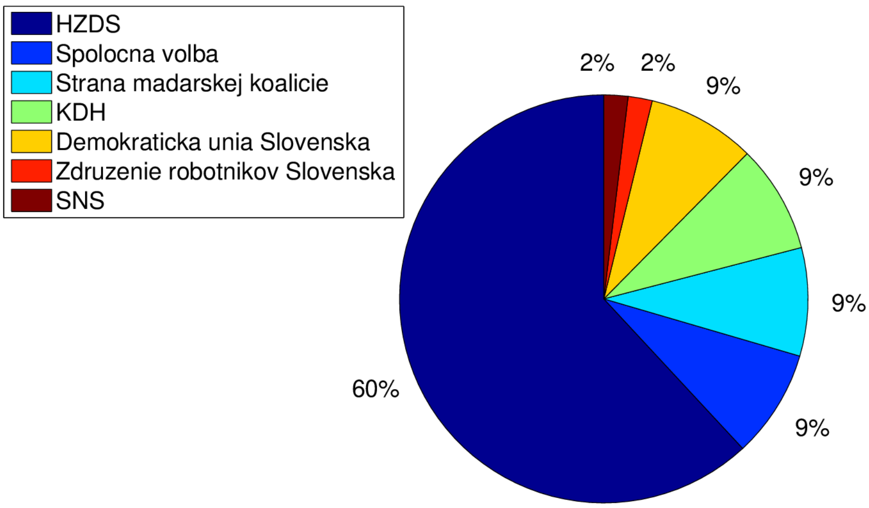
Výstupom je teda Shapleyho vektor, ktorý ďalej používame v grafe a diagramoch.

3.2 Analýza výsledkov volieb od roku 1994 - 2016

Uvažujeme strany, ktoré získali vo voľbách minimálne 5% hlasov a tak dostali možnosť podieľať sa na tvorbe koalícií, ktoré vytvoria vládu.

Výsledky volieb rok 1994 (počet mandátov)

1. Hnutie za demokratické Slovensko - Roľnícka strana Slovenska (ďalej HZDS): 61
2. Spoločná voľba: 18
3. Maďarská koalícia: 17
4. Kresťansko-demokratické hnutie (ďalej KDH):17
5. Demokratická únia Slovenska: 15
6. Združenie robotníkov Slovenska: 13
7. Slovenská národná strana (ďalej SNS): 9



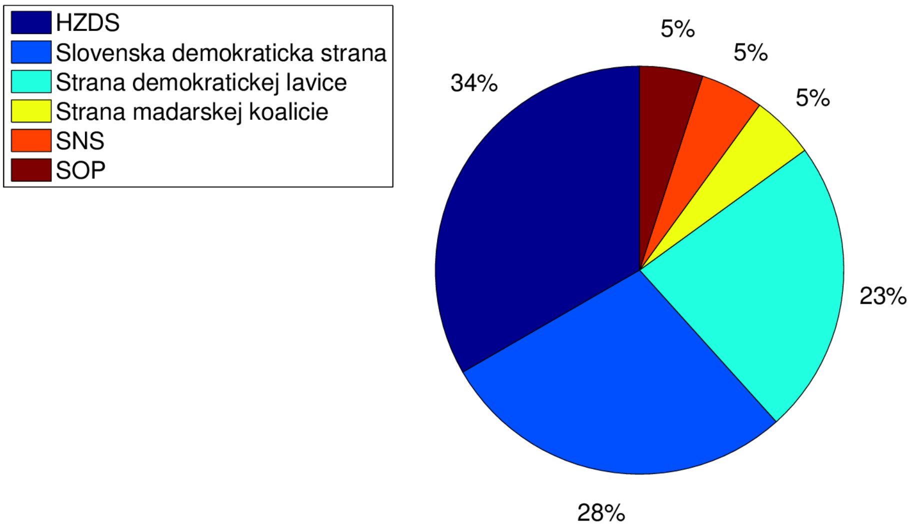
Graf 2: Shapleyho hodnota pre rok 1994 - Analýza volieb

Výsledok môžeme interpretovať nasledovne. Strany, ktoré dosiahli menej ako 15 mandátov majú najnižšiu vyjednávaciu schopnosť. Nedokážu zabezpečiť výhernú koalíciu bez toho aby sa k nim nepridala ďalšia strana. Preto majú nízku Shapleyho hodnotu. Zaujímavé je porovnanie výsledku Demokratickej únie a Združenia robotníkov Slovenska. Počet mandátov jednotlivých strán sa líše len o 2, avšak Shapleyho hodnota je u Združenia robotníkov diametrálne odlišná. Môžeme si všimnúť, že suma výsledkov nám dáva 100%

čo plynie priamo z definície Shapleyho hodnoty. Výsledok je uvedený v koláčovom grafe.

Výsledky volieb rok 1998

1. HZDS: 43
2. Slovenská demokratická strana: 42
3. Strana demokratickej ľavice: 23
4. Strana maďarskej koalície: 15
5. SNS: 14
6. Strana občianskeho porozumenia (ďalej SOP): 13

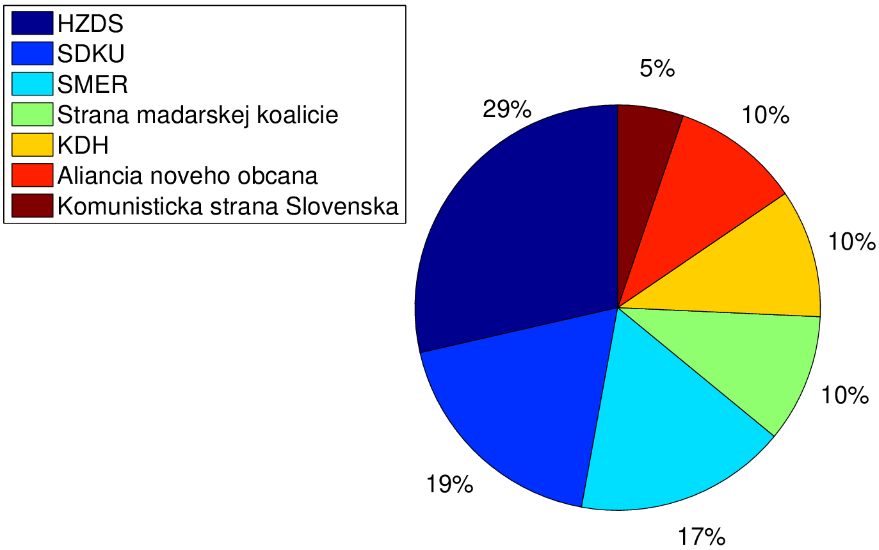


Graf 3: Shapleyho hodnota pre rok 1998 - Analýza volieb

Pri tomto výsledku je zaujímavé si všimnúť, že strany HZDS a Slovenská demokratická strana získali takmer rovnaký počet mandátov, ale Shapleyho hodnota sa nám líši o viac, čo sa ihneď odzrkadlí v sile vyjednávať. Ďalšia zaujímavosť je, že ak by tieto 2 strany nemali záujem o spoluprácu do hry by vstupovali ostatné strany, ktorým by sa ihneď zvýšila vyjednávacia schopnosť.

Výsledky volieb rok 2002

1. HZDS: 36
2. Slovenská demokratická a kresťanská únia (ďalej SDKÚ): 28
3. SMER: 25
4. Strana maďarskej koalície: 20
5. KDH: 15
6. Aliancia nového občana: 15
7. Komunistická strana Slovenska: 11

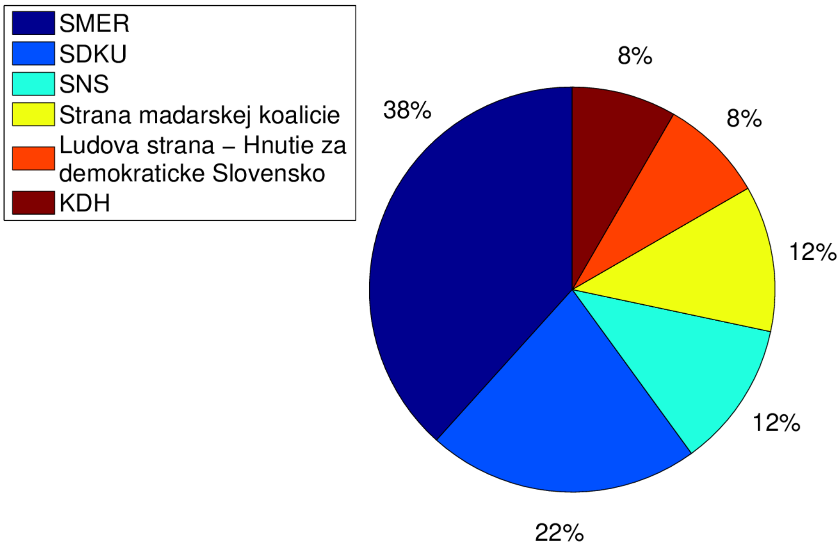


Graf 4: Shapleyho hodnota pre rok 2002 - Analýza volieb

Opäť si môžeme všimnúť veľký rozdiel medzi vyjednávaním Aliancie nového občana a KDH s Komunistickou stranou. Počet mandátov sa líši len o štyroch ale Shapleyho hodnota dvojnásobne.

Výsledky volieb rok 2006

1. SMER: 50
2. SDKÚ: 31
3. SNS: 20
4. Strana maďarskej koalície: 20
5. Ľudová strana - Hnutie za demokratické Slovensko: 15
6. KDH: 14

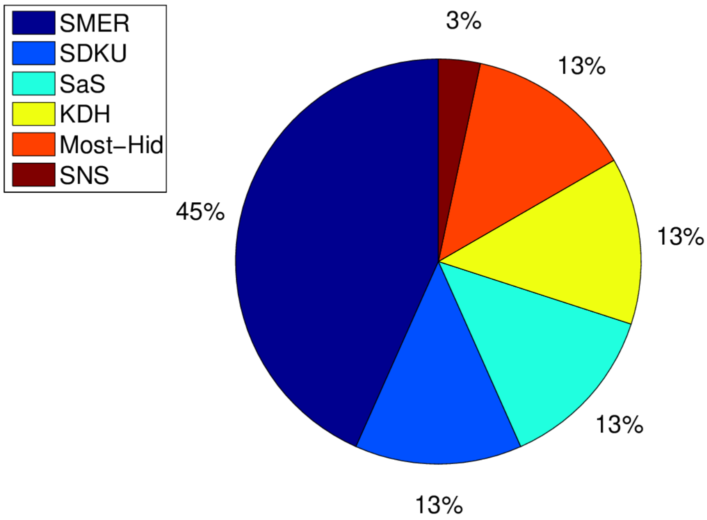


Graf 5: Shapleyho hodnota pre rok 2006 - Analýza volieb

Strana SMER má vysokú vyjednávaciu schopnosť, čo značí fakt, že bez strany SMER nedokáže vzniknúť žiadna iná dvojčlenná koalícia, ktorá by stranu SMER neobsahovala.

Výsledky volieb rok 2010

1. SMER: 62
2. SDKÚ: 28
3. Sloboda a Solidarita (ďalej SaS): 22
4. KDH: 15
5. Most-Híd: 14
6. SNS: 9

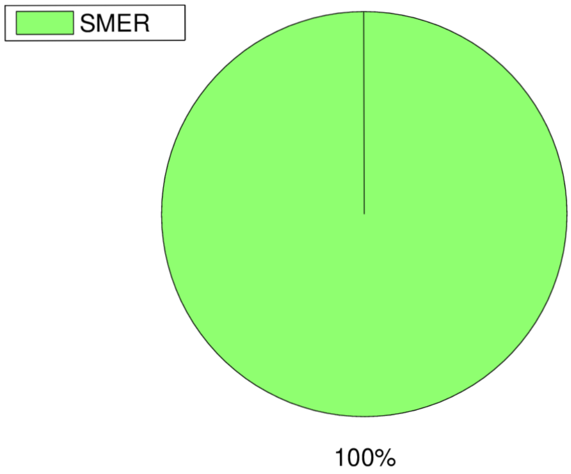


Graf 6: Shapleyho hodnota pre rok 2010 - Analýza volieb

Na výsledku si môžme všimnúť ako ovplyvnil výsledok volieb vyjednávaciu silu strany SNS. Ako jediná nedokáže zabezpečiť vytvorenie vlády pre stranu SMER, čo sa ihneď odzrkadlí na Shaplyho hodnote. Ostatné strany sú si rovné, napriek tomu, že niektoré majú viac či menej mandátov.

Výsledky volieb rok 2012

1. SMER: 83
2. KDH: 16
3. OBYČAJNÍ ĽUDIA a nezávislé osobnosti (ďalej OĽANO): 16
4. Most-Híd: 13
5. SDKÚ: 11
6. SaS: 11



Graf 7: Shapleyho hodnota pre rok 2012 - Analýza volieb

Pre tento prípad je koláčový graf triviálny, pretože už z výsledku volieb bez akéhokoľvek počítania je zrejmé, že strana SMER dostane 100% vďaka svojej sile vytvoriť vládu bez pomoci ktorejkoľvek inej strany.

Výsledky volieb rok 2016

1. SMER: 49

2. SaS: 21

3. OĽANO: 19

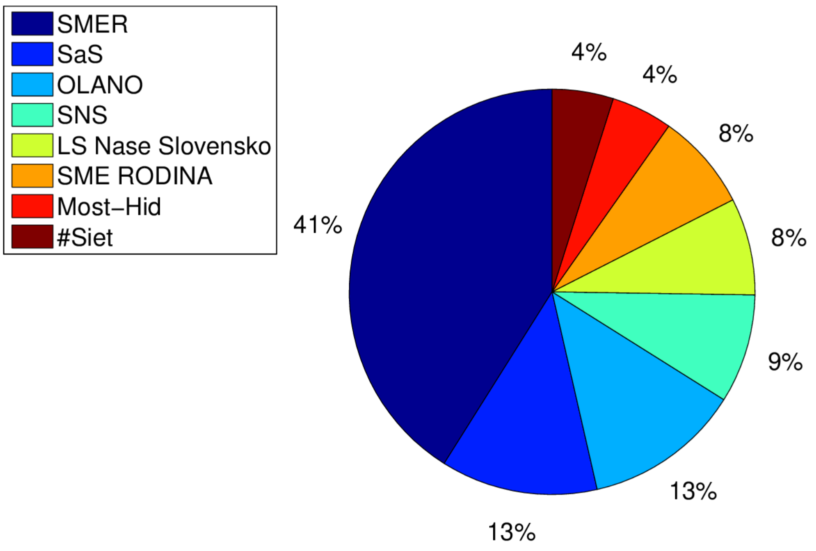
4. SNS: 15

5. Kotleba - Ľudová strana naše Slovensko (ďalej ĽS Naše Slovensko): 14

6. SME RODINA - Boris Kollár: 14

7. Most-Híd: 11

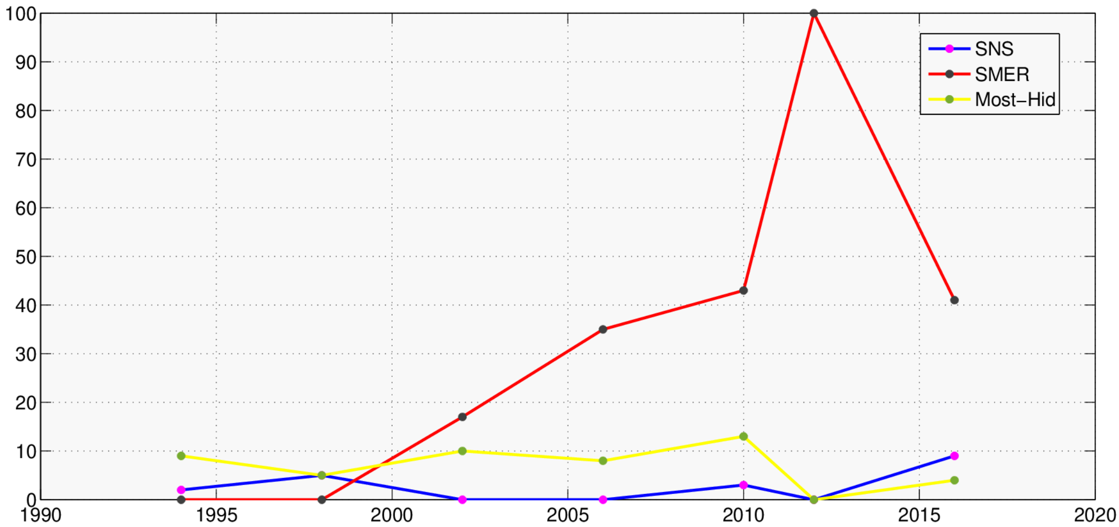
8. SIEŤ: 10



Graf 8: Shapleyho hodnota pre rok 2016 - Analýza volieb

Pri poslednom koláčovom grafe si môžeme všimnúť, že už na základe počtu mandátov pomaly vieme odhadnúť ako dopadnú príslušné Shapleyho hodnoty. Veľký počet strán, ktorý získal viac ako 5% hlasov vo voľbách zapríčinil, že nestačí žiadna 2-členná koalícia na zostavenie vlády. Do hry preto vstupujú aj ostatné a majú relatívne vysokú vyjednávaciu silu.

Pre predstavu uvediem porovnanie síl jednotlivých strán vytvárať koalície z hľadiska časového. Keďže strany SMER, SNS a Most-Híd sa najčastejšie vyskytovali vo výsledkoch volieb, je ich vhodné použiť pre nasledujúci graf. Môžeme si všimnúť vývoj Shapleyho hodnôt z hľadiska časového od roku 1994 do roku 2016. Je zrejmé, že pre prípady kedy strana nedostala potrebný počet mandátov, je nutné ju ohodnotiť nulou. Môžeme si tiež všimnúť rok 2010 a 100%-né ohodnotenie strany SMER. V dôsledku toho, že získala nadpolovičnú väčšinu nepotrebovala žiadnu inú stranu na vytvorenie koalície.



Graf 9: Shapleyho hodnota 1994-2016 - Analýza volieb

Teraz si ukážeme vývoj vyjednávacej sily strany SNS (Tab. 5). Je veľmi zaujímavé si všimnúť, že väčší počet mandátov nám nezaručí väčšiu veľkosť vyjednávacej sily. V roku 1994 strana SNS obdržala 9 mandátov pričom však vyjednávacia sila bola len 2%. Keď sa pozrieme na rok 2010, vyjednávacia sila sa zvýšila o 1%, ale počet mandátov je rovnaký. V roku 1998 kedy počet mandátov dosiahol počet 14, Shapleyho hodnota bola v porovnaní s rokom 2016 o takmer 100% nižšia pričom počet mandátov sa nám v roku 2016 zvýšil len o jednotku.

Tab. 5 Porovnanie Shapleyho hodnoty s počtom mandátov - STRANA SNS

Rok	1994	1998	2002	2006	2010	2012	2016
Shapleyho hodnota (v %)	2	5	0	12	3	0	9
Počet mandátov	9	14	0	20	9	0	15

Podrobnejšie si tiež rozoberieme výsledky strany SMER. Zaujímavé je všimnúť si rok 2006, kedy počet mandátov dosiahol počet 50 a Shapleyho hodnota bola 38%. V roku 2016 počet mandátov klesol o jedničku, ale Shapleyho hodnota sa nám dokonca zvýšila o 3%.

Tab. 6 Porovnanie Shapleyho hodnoty s počtom mandátov - STRANA SMER

Rok	1994	1998	2002	2006	2010	2012	2016
Shapleyho hodnota (v %)	0	0	17	38	45	100	41
Počet mandátov	0	0	25	50	62	83	49

Na záver je dôležité poznamenať, že vyjednávacia sila nezávisí len na počte mandátov daného hráča, ale aj na celkovom počte hráčov, ktorí mali možnosť podieľať sa na tvorbe koalícií. Shapleyho hodnota nám ukazuje nový pohľad na výsledok volieb, ktorý je v konečnom dôsledku realistickejší.

Záver

V práci sme postupne predstavili kooperatívne hry, definovali základné pojmy a vlastnosti. Danú problematiku sa nám podarilo demonštrovať na konkrétnych príkladoch.

Ďalej sme predstavili významné modely sústreďujúce sa v prvej časti na náčrt aplikácie aparátu kooperatívnych hier na právne formy podnikania, neskôr na triedy koaličných hier a nakoniec využitie Shapleyho hodnoty v zaujímavých modeloch z praxe. Každá trieda koaličnej hry je demonštrovaná na príklade. Vyústením kapitoly je komplexný príklad spájajúci nákladové hry so Shapleyho hodnotou využiteľný v praxi.

Nakoniec sme modelovali príklad jednoduchej hry s využitím Shapleyho hodnoty za prítomnosti reálnych dát s výberom vhodného programu. Cieľom bolo ukázať realistickejší odhad na výsledok volebného systému a interpretovať Shapleyho hodnotu nie len ako zisk po prerozdelení výhry, ale aj ako mieru sily vyjednávať pri tvorbe koalícií.

Na záver dodajme, že aparát teórie hier ma veľmi dobré uplatnenie v praxi, čoho dôkazom môže byť aj táto práca. Návrhy by mohli byť impulzom pre ďalšiu snahu o prepojenie matematickej disciplíny s využitím známych poznatkov z ekonómie alebo iných oblastí ľudského záujmu. Cieľom bolo tiež vytvoriť zrozumiteľný text, ktorý môže čitateľa zoznámiť s problematikou kooperatívnych hier s využitím Shaleyho hodnoty za pomoci pokročilých matematických metód.

ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV

[1] GILLES, Robert P. *The Cooperative Game Theory of Networks and Hierarchies*. Berlin, Springer Berlin Heidelberg, 2010. ISBN 978-3-642-05281-1. OWEN, Guillermo. Game Theory. Emerald Group Publishing Limited, 2013. ISBN 978-1-781-90507-4.

[2] OWEN, Guillermo. *Game Theory*. Emerald Group Publishing Limited, 2013. ISBN 978-1-781-90507-4.

[3] PETERS, Hans. *Game Theory-A Multi-Leveled Approach*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. ISBN 978-3-540-69291-1.

[4] SCHOFIELD, Norman. *Mathematical Methods in Economics and Social Choice*. Springer Texts in Business and Economics, 2014. ISBN 978-3-540-00086-0.

[5] SYNEK, Miloslav a Eva KISLINGEROVÁ. *Podniková ekonomika*. 6., přeprac. a dopl. vyd. V Praze: C.H. Beck, 2015. Beckovy ekonomické učebnice. ISBN 9788074002748.

[6] PELEG, Bezalel. a Peter. SUDHO?LTER. *Introduction to the theory of cooperative games*. 2nd ed. New York: Springer, c2007. ISBN 978-354-0729-440.

[7] ALPARSLAN GÖK, S. Z. a A. SARIARSLAN. *On the Bankruptcy Situations and the Alexia Value.* Journal of Applied Mathematics [online]. 2012, 2012, 1-7 [cit. 2016-05-27]. DOI: 10.1155/2012/813060. ISSN 1110757x. Dostupné z: http://www.hindawi.com/journals/jam/2012/813060/

[8] Ústava Slovenskej republiky. In: . Bratislava, 460/1992.

[9] BURG, Twan. *Shapley Value for n-player Cooperative Games.* In: http://www.mathworks.com/ [online]. 2012 [cit. 2016-05-27]. Dostupné z: http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/35334-shapley-value-for-n-player-cooperative-games

ZOZNAM TABULIEK

Tabuľka 1 : Shapleyho hodnota hráč č. 1 (Dragon Den reality show) .... (30)

Tabuľka 2 : Shapleyho hodnota hráč č. 2 (Dragon Den reality show) .... (30)

Tabuľka 2 : Shapleyho hodnota hráč č. 3 (Dragon Den reality show) .... (31)

Tabuľka 4 : Nákladová hra - nájmy/úspora ....(36)

Tabuľka 5 : Shapleyho hodnota / Počet mandátov - SNS .... (47)

Tabuľka 6 : Shapleyho hodnota / Počet mandátov - SMER .... (48)

ZOZNAM GRAFOV

Graf 1 : Shapleyho vektor - nákladová hra . . . . (37)

Graf 2 : Shapleyho hodnota pre rok 1994 - Analýza volieb . . . . (40)

Graf 3 : Shapleyho hodnota pre rok 1998 - Analýza volieb . . . . (41)

Graf 4 : Shapleyho hodnota pre rok 2002 - Analýza volieb . . . . (42)

Graf 5 : Shapleyho hodnota pre rok 2006 - Analýza volieb . . . . (43)

Graf 6 : Shapleyho hodnota pre rok 2010 - Analýza volieb . . . . (44)

Graf 7 : Shapleyho hodnota pre rok 2012 - Analýza volieb . . . . (45)

Graf 8 : Shapleyho hodnota pre rok 2016 - Analýza volieb . . . . (46)

Graf 9 : Shapleyho hodnota od roku 1994-2016 - Analýza volieb . . . . (47)

ZOZNAM OBRÁZKOV

Obrázok 1 : Prenosné linky - ceny . . . . (35)

Obrázok 2 : Diagram - Jadro hry . . . . (37)