UNIVERZITA JANA AMOSE KOMENSKÉHO PRAHA

magisterské kombinované studium
2010 – 2012

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Lenka Jonášová

Nula a nekonečno v matematice a příbuzných přírodních vědách. Analýza těchto pojmů v učebnicích od předminulého století dodnes.

Praha 2012

Vedoucí diplomové práce: Doc. Ivan Fischer, CSc.

COMENIUS UNIVERSITY PRAGUE

Master Combined (Part time) Studies
2010 - 2012

DIPLOMA THESIS

Lenka Jonášová

Zero and the infinity in mathematics and related natural sciences.
Analysis of these terms in textbooks since the 19th century.

Prague 2012

The Diploma Thesis Work Supervisor:

Doc. Ivan Fischer, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že předložená diplomová práce je mým původním autorským dílem, které jsem vypracovala samostatně. Veškerou literaturu a další zdroje, z nichž jsem při zpracování čerpala, v práci řádně cituji a jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v univerzitní knihovně.

V Dobrušce dne 11. 3. 2012 *Lenka Jonášová*

Zároveň bych chtěla vyslovit poděkování Doc. Ivanu Fischerovi, CSc. za profesionální přístup, praktické zkušenosti a vedení při zpracování práce.

Anotace

Diplomová práce se zabývá základními matematickými konstantami, nulou a nekonečnem. Teoretická část je věnována historickému vývoji, roli nuly a nekonečna v elementární i vyšší matematice a ve fyzice. Jsou zde analyzovány a na jednoduchých příkladech vysvětleny základní operace s nulou. Zvláštní pozornost je zaměřena na dělení nulou, které způsobuje problém žákům základních škol. Teoretická část je koncipována tak, aby mohla sloužit učitelům základních škol při seznamování žáků s nulou a její úlohou v matematice. Praktická část je rozdělena do dvou částí. V první je zkoumán přístup autorů učebnic matematiky pro základní školy k nule od předminulého století dodnes. Druhá část je věnována ověření znalostí žáků základních škol týkajících se nuly.

Klíčové pojmy

Číselné soustavy
Dělení nulou
Nekonečno
Nula
Nula faktoriál
Nula na nultou
Učebnice matematiky

Annotation

This master's thesis deals with elementary mathematical constants, zero and infinity. The theoretical part is devoted to history and function of zero and infinity in elementary and higher math and physics. In this part we also analyze basics operations with zero and show them on simple examples. We focus on division by zero and problems it causes to elementary school students. The theoretical part is written for teachers to introduce zero and its function in mathematics to the elementary school students. The practical part is dividend to two sections. The first part explores textbooks since the 19th century and the way how their authors wrote about zero. The second part examines knowledge of elementary school students concerning the zero.

Key words

Division by zero
Factorial of zero
Infinity
Mathematics textbooks
Numeral system
Zero
Zero to the zero power

OBSAH

ÚVOD

„Mezi všemi velkými věcmi kolem nás je existence ničeho ta největší“,
(Leonardo da Vinci)

„V dějinách kultury bude objev nuly znamenat vždycky jeden z největších úspěchů lidského rodu.“ (Tobias Danzing)

Nulu a nekonečno řadíme v současnosti mezi základní konstanty matematiky a potažmo celé přírody. Čím si nula a nekonečno zasloužily takového uznání matematiků? Je vůbec nějaký rozdíl mezi nulou a jinými známými přirozenými čísly, například sedmičkou? Jak matematici mohou pracovat s nekonečnem?

Početní dovednosti, práce s čísly, tj. sčítání, odčítání, násobení, dělení, …, patří mezi základní dovednosti, které si člověk osvojuje již na základní škole. Pojem čísla je jedním ze základních kamenů, na kterých je postavena moderní civilizace. Na čísla v různých podobách narážíme každý den nepočítaně. Budík nás probudí v 6 hodin. Ukrojíme si 1 krajíc chleba a do kávy si dáme 2 kostky cukru. Do práce nás odveze autobus č. 217. Vyjedeme do 3. patra a vejdeme do kanceláře č. 512. Vyřídíme 25 spisů a zavoláme manželovi na číslo 725832156, aby nezapomněl koupit 3,5 m pletiva. Večer strávíme příjemně v kině na sedadle č. 12 v 5. řadě. Protože je venku teplota -10,5º vrátíme se domů, do čísla popisného 546, taxíkem, což nás ale stojí 196 korun. Jaká je role čísla nula? Čísla můžeme dělit na čísla tzv. kardinální, která popisují množství (např. 2 kostky cukru, 25 spisů, 3,5 m záclony, 196 korun) a čísla ordinální, která popisují pořadí, umístění mezi ostatními prvky (např. 3. patro, sedadlo č. 12, 5. řada). Jaká je role nuly kardinální a ordinální? Kardinální nula se vyskytuje skrytá v pojmu „nic“, „žádný“. Na otázku kolik kostek chceme do kávy, asi nikdo neodpoví „nula“. Ani používání ordinální nuly nebývá časté. V kině nebývají nulté řady a sedadla č. 0. Nula v praxi není často považována za plnohodnotné ordinální číslo, jak je možné se přesvědčit pohledem na klávesnici svého počítače nebo mobilního telefonu. Nula není na místě, které by jí správně příslušelo, tj. před jedničkou, ale až za devítkou nebo, u mobilního telefonu, dokonce mimo číselné klávesy. „Cítíme“, že nula je trochu jiné číslo než třeba šestka. Je nula vůbec potřeba? Jakou roli hraje v matematice a ve fyzice?

Cílem této práce je ukázat roli nuly a nekonečna v matematice a v samotné přírodě, která je zde reprezentována základní přírodní vědou – fyzikou. Dalšími cíli byla analýza přístupu k nule v učebnicích pro základní školy od předminulého století dodnes a průzkum početních dovedností žáků základních škol v příkladech obsahujících nulu.

Teoretická část práce je rozdělena do tří kapitol. První kapitola je věnována historii. Je zde popsán „objev" nuly a vztah jednotlivých významných civilizací k nule. Je ukázán význam poziční nuly v číselných soustavách a její nelehké pronikání do naší západní civilizace. Závěr kapitoly je věnován historii nekonečna. Druhá kapitola popisuje roli nuly a nekonečna v matematice. Větší část je věnována základním matematickým operacím s nulou, které jsou pro žáky základních škol „odlišné" od operací s jinými čísly. Je zde analyzováno například umocňování na nultou, výraz nula na nultou. Hlavní část této kapitoly je věnována dělení nulou, které způsobuje problém některým žákům základních škol. Je ukázáno několik cest, jak je možné žákům vysvětlit otázku dělení nulou. V části věnované „vyšší" matematice je ukázána nezastupitelná role nuly a nekonečna v základním matematickém aparátu přírodních věd, v teorii diferenciálního a integrálního počtu. Tato část práce je chápána jako pomůcka učitelům základních škol, jak populárně vysvětlit talentovaným žákům význam nuly a nekonečna pro matematiku a hlavně přírodní vědy. Závěr kapitoly je věnován otázce matematického nekonečna. Třetí kapitola ukazuje, že nula a nekonečno není pouze otázkou teoretických prací a matematiků, ale že leží v samotných základech znalostí o přírodě.

Praktická část práce je rozdělena do dvou částí. V první je zkoumán přístup k nule a základním matematickým operacím s nulou v učebnicích matematiky pro základní školy a první stupeň víceletých gymnázií od předminulého století do dnešní doby. V druhé části je prezentován výsledek průzkumu znalostí žáků základních škol týkajících se nuly. Písemný test byl zaměřen na základní vlastnosti nuly a na základní operace s ní. Je nula číslo, číslice? Je nula sudé nebo liché číslo? Je nula kladné nebo záporné číslo? Na jednoduchých příkladech byla ověřována schopnost žáků provádět základní operace s nulou (násobení dělení a umocňování). Na menším vzorku byly zkoumány i znalosti učitelů základních škol.

1 HISTORIE

1.1 Nula a její historie

První setkání s nulou včetně jednoduchých výpočtů probíhá již na prvním stupni základní školy, kde žáci 2. třídy zvládají jednoduché výpočty s nulou jako např. 3 + 0 = 3, 5 x 0 = 0, 4 – 4 = 0 apod. Ve stejné době se žáci seznamují s další rolí nuly, tj. označení chybějícího řádu při zápisu čísel. Přečíst a porozumět zápisu (číslu) 104 nepůsobí problémy žákům třetích tříd. „Komplikovaná“ matematika zabývající se Pythagorovou větou, řešením rovnic, procenty, …, přichází později. Z tohoto pohledu nám přijde samozřejmé, že nula musí být jedním z prvních matematických pojmů, který se v historii matematiky a výpočtů obecně objeví. Dost překvapující asi bude zjištění, že tak „matematicky“ vyspělé civilizace jako Řekové, Egypťané a vlastně celá západní Evropa dlouho nulu neznaly a jejímu zavedení se dlouho bránily. Pouze tři, nám poměrně vzdálené, civilizace nulu používaly a jen jedna z nich nulu používala i v našem smyslu, tj. pro označení „ničeho“.

Počítání, stejně tak jako čtení a psaní, je jednou ze základních dovedností, kterou si osvojujeme již na základní škole. Lidstvu trvalo tisíce let, než se k současným znalostem dopracovalo. Zatím co jazyků, kterými hovoří jednotlivé národy, jsou stovky, počítání a znázornění čísel díky „objevu“ desítkové soustavy je v celém světě (samozřejmě až na velmi výjimečné případy některých domorodých kmenů) stejné. Jako turisté se i bez znalosti jazyka bez větších problémů, např. pomocí prstů na rukou, domluvíte v otázkách množství. Cesta k univerzální desítkové soustavě včetně uznání důležitého významu nuly byla dlouhá.

První označování množství se většinou omezovalo na pojmy jeden a mnoho. Lovec ulovil jednoho nebo mnoho jelenů. Ještě v současné době existují kmeny, které počítají s nejvyšším číslem dvě. Jedná se o kmen Bacairy a Bororo (Brazílie), kde číslovky následují po sobě v pořadí „jeden“, „dva“, „dva a jeden“,

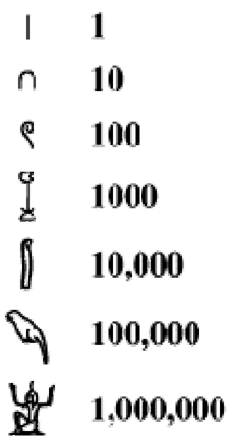
„dva a dva“, „dva a dva a jeden“. Není těžké vidět, že takový systém je pro užívání, zvláště pro práci s většími čísly, značně nepraktický.

Nejstarší civilizace měly vyvinuté své početní systémy, které se od sebe odlišovaly a měly i rozdílné místo pro nulu

Egypt

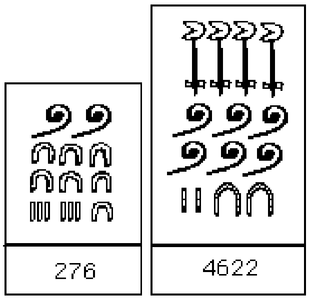
Nejstarší rozvinuté početní soustavy používali staří Egypťané a Babyloňané na území Mezopotámie asi od roku 3000 před naším letopočtem. Nejranější Egyptská hieroglyfická soustava používá speciální symboly pro jednotky, desítky, stovky, tisíce, desetitisíce, statisíce a milióny.

Obrázek 1: Egyptské hieroglyfické symboly



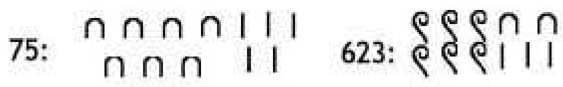
Symbol pro množství od jedné do devíti byl zobrazen odpovídajícím počtem symbolů pro jednotku tj. jednoduché vertikální čáry. Deset se označovalo pomocí obráceného U, sto spirálou, tisíc lotosovým květem, deset tisíc vztyčeným prstem, sto tisíc rybou a milion figurou člověka. Jednotlivá čísla se znázorňovala pomocí vhodného seskupování těchto symbolů, viz obr. 2.

Obrázek 2: Příklady jednoduchých čísel



Pořadí, ve kterém se znaky zapisují, není důležité, protože symboly pro jedničku, desítku, stovku atd. jsou odlišné. Obvyklé uspořádání bylo však zprava do leva, tak jak se četly hieroglyfy. U zápisu čísel však toto pravidlo nebylo striktně dodržováno, takže se často čísla zapisovala i nám běžnějším způsobem zleva doprava, viz obr. 3.

Obrázek 3: Zápis čísel v pořadí zleva doprava



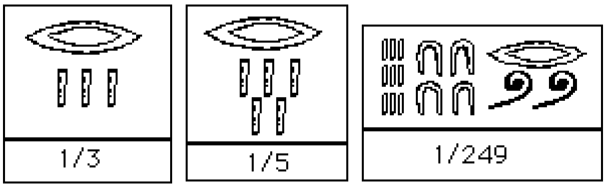
Praktickou ukázkou je číselný zápis na chrámové zdi v Egyptě:

Obrázek 4: Zápis čísla na chrámové zdi v Egyptě

Je zřejmé, že sčítání v hieroglyfickém zápise je snadné. Jedná se totiž o soustavu o základu deset, která ovšem na rozdíl od naší známé desítkové soustavy není poziční. Sčítání je možné tedy provést prostým sečtením jednotlivých symbolů a nahrazením deseti stejných symbolů symbolem o řád vyšším.

Egypťané měli vyvinutý i způsob zápisu zlomků ve formě 1/n, kde n je přirozené číslo. Z příkladů na obr. 5 je patrné, že se k zápisu používalo speciálního symbolu „úst“, který znamenal, že se jedná o část.

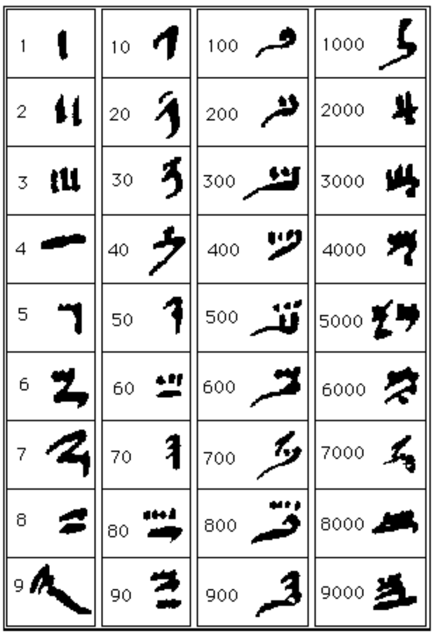
Obrázek 5: Zápis zlomků v hieroglyfickém systému



Podoba hieroglyfů pro zápis čísel se po dobu trvání egyptské civilizace (cca 2000 let) mírně měnila.

Další číselný systém, který používali Egypťané v dobách po objevu papyru, byl hieratický číselný systém. Tento systém využíval více symbolů pro zápis čísel (symboly pro čísla 100, 200, 300, …, 1000, 2000, 3000, …). Bylo tedy nutné znát více znaků, ale zápis byl oproti výše zmíněnému hieroglyfickému zápisu kompaktnější. Například číslo 9999 vyžadovalo pouze 4 hieratické symboly oproti 36 hieroglyfickým.

Obrázek 6: Hieratické egyptské symboly



Co však oba tyto systémy spojuje a je charakteristické pro egyptskou početní soustavu, je to, že nebyla poziční a pro svůj zápis tedy nevyžadovala nulu. Nulu Egypťané neznali.

Babylon

Nejstarší sumerská soustava užívaná rovněž okolo roku 3000 před Kristem byla složitější než egyptská a zdá se, že se obě rozvinuly nezávisle. Později si jejich sumerskou verzi přizpůsobili Babylóňané a tak jsou tyto dvě civilizace obvykle považované za odlišné etapy jediného kulturního vývoje.

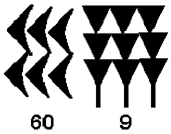
Početní soustava raného Sumeru užívala základu deset pro zaznamenávání čísel, ale zavedla též šedesátku jako další základní číslo. Sumerové měli slova pro veličiny 1, 60, 60 x 60, 60 x 60 x 60, …. Měli také slova pro čísla 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a 10 a rovněž pro násobky deseti až do šedesáti. Takovéto způsoby zapisování čísel měly stejnou nevýhodu jako egyptské hieroglyfy. Jsou velmi pracné v užívání, jakmile chceme provádět výpočty, které zahrnují násobení či dělení. Stejně jako u egyptské početní soustavy raný sumerský zápis čísel nevyžadoval nulu.

Původní, takzvané křivkové znaky, byly po zavedení klínového rydla, které mohlo vytvářet ostré čáry, nahrazeny novými klínovými tvary. Užívány byly pouze dva základní znaky, vertikální klín označující „jedna“ a špice představující „deset“.

 - jedna

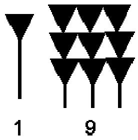
 - deset

Babylonská civilizace převzala způsob značení a přeměnila starý sumerský systém na systém poziční, kde místo naší desítky byla používána šedesátka. Tento významný krok se odehrál okolo roku 2000 před Kristem. V poziční soustavě závisí hodnota symbolu na jeho umístění. To dovolí užívat menšího počtu symbolů, protože stejný symbol bude symbolizovat na různých pozicích různou hodnotu. Poziční systém byl využíván převážně matematiky a astronomy. Babylonská soustava v sobě zahrnovala jak poziční tak i aditivní systém, protože pro stanovení počtu jednotlivých mocnin 60 používala dále aditivní způsob. Číslo 69 mohlo být zapsáno klasickým aditivním způsobem



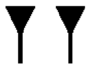
= 60 + 9 = 69

nebo pozičním způsobem, kde jednička označovala počet vyššího řádu, tj. 60



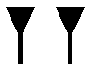
= 1 x 60 + 9 = 69

Tento systém pozičního zápisu měl velkou nevýhodu v nejednoznačnosti. Zápis

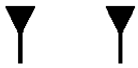


mohl znamenat 61 = 1 x 60 + 1
nebo 3 601 = 1 x 60 x 60 + 1
nebo i jiná větší čísla.

Babylonští písaři řešili tento problém necháním prázdného prostoru místo chybějícího násobku 60.



= 1 x 60 + 1 = 61



= 1 x 60 x 60 + 1 = 3 601

Je vidět, že způsob psaní mohl vést k mnoha omylům a správná interpretace závisela někdy i na odhadu předpokládané velikosti čísla, se kterým se pracovalo (např. při astronomických výpočtech). Není těžké si uvědomit, že sebepečlivější zápis mezer neřeší problém v případě chybějících posledních řádů.

 = 1

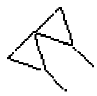
 = 60

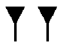
 = 3 600

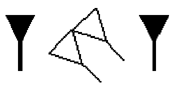
Při astronomických výpočtech Babyloňanů šlo většinou ze zadání úlohy určit řád čísla a provést tak správný výpočet. Zápis byl ovšem používán také babylonskými obchodníky. Zde byl ale veliký rozdíl, zda se obchodník zavázal dodat za danou cenu 60 nebo 3 600 měr pšenice. Pod tlakem obchodníků zavedli babylonští písaři poprvé symbol, který reprezentuje naší nulu (poziční). 1 500 let se Babyloňané obešli bez symbolu pro nulu. Teprve ve 4. století před Kristem se v babylonských zápiscích objevuje symbol pro nulu. Vzhledem k tomu, že se jedná o zápisy, které reprodukují starší texty, dá se předpokládat, že symbol pro nulu vznikl o něco dříve.

Jak tedy první nula vypadala? Separátor, který zaplnil prázdné místo ve vyjádření čísla, měl tvar dvou šikmých klínů. Na obrázku 7 je tedy zobrazena pravděpodobně první nula v historii lidstva.

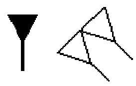
Obrázek 7: První nula v historii lidstva



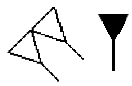
Před zavedením „nuly“ mohl zápis  znamenat 61 nebo 3 601 (pozn. u dvojky byly klíny spojené ). Jakmile se začala používat nula, zápis znamenal 61. Číslo 3601 se zapsalo totiž

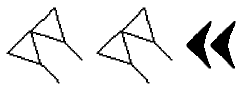
 $= 1 \text{ x } 60 \text{ x } 60 + 0 \text{ x } 60 + 1 = 3\ 601$

Babylonská nula působila podobně jako nula, kterou známe. Zrodila se, podobně jako poziční zápis, jako způsob zkrácení používaný babylonskými matematiky. Rozsáhle byla používána babylonskými astronomy. Někdy bývá mylně uváděno, že Babyloňané nepoužívali nulu na začátku a na konci čísla. Toto platí pouze pro babylonské matematiky. Astronomové běžně používali nulu na začátku a konci čísla (a samozřejmě uprostřed). Nula na konci měla stejný smysl, jako má naše nula. V babylonském zápise rozhodovala nejasnost zmíněnou výše, tj. rozdíl mezi 1 a 60.

 = 1 x 60 + 0 = 60

Nula na začátku čísla znamenala zlomek se jmenovatelem zapsaným jako násobky mocnin 60.

 = 1/60

 = 20/3600

Od babylonských matematiků jsme soustavu se základem 60 převzali pro zápis úhlů. Není těžké vidět, že výše uvedená čísla v případě úhlů znamenají 1 oblouková minuta, resp. 20 obloukových vteřin.

Babylonská nula není úplně totožná s nulou, jakou známe v současné době. Babylonská nula reprezentovala pouze označení prázdného místa v zápise čísel. Samotná se nikde neobjevovala a nebyla žádným způsobem spojována s významem „nic“. Nula byla chápána pouze jako formální znak, nikoli jako číslice a nepředstavovala žádné číslo, neměla žádnou hodnotu. Nikdy nebyla použita pro výsledek operace 4 – 4 nebo ve smyslu „nic“.

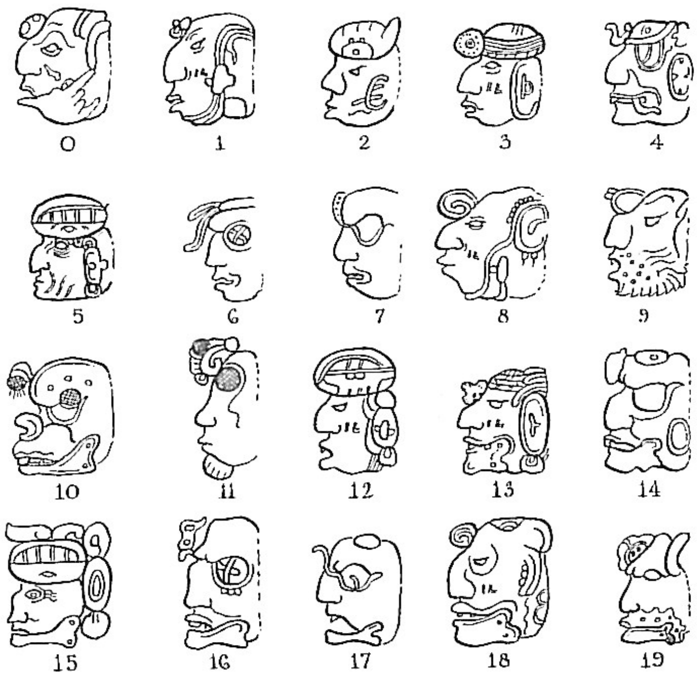
Toto je vyvrcholení babylonského vývoje. První symbolická reprezentace nuly v lidské kultuře.

Mayové

Další kulturou, která používala poziční systém pro zápis čísel, byla podivuhodná a mnoha záhadami opředená Mayská civilizace. Mayská civilizace se rozprostírala na území dnešního Mexika, Belize, Hondurasu a Guatemaly a trvala zhruba po období 500 – 925 let po Kristu.

Zápis čísel byl podobný zápisu Babylonskému. Jenom místo základu 60 byla mayská soustava založena na čísle 20. V závislosti na účelu zápisu používali Mayové dva typy číslic. Pro vizuální a ozdobné nápisy byl používán složitější a rozhodně časově náročnější zápis pomocí tzv. glyfů – zobrazení groteskních obličejů. Tyto obličeje byly některými „záhadology" považovány za obličeje mimozemšťanů. Na obrázku 8 jsou zobrazeny číslice od 0 do 19.

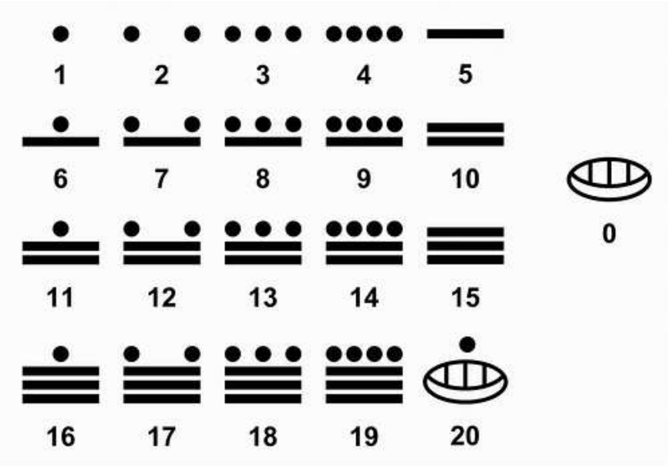
Obrázek 8: Mayské glyfické číslice



Zdroj: Seife, 2005

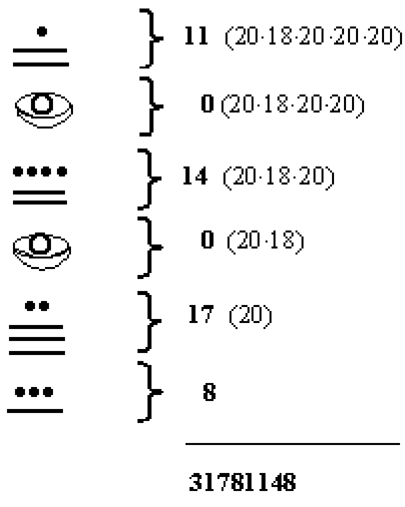
Jednodušší varianta, která byla používána při praktických výpočtech a obyčejných zápisech, používala pro zápis kombinace teček a čárek. Každá tečka znamenala „jednu" a každá čárka znamenala „pět". Prvních devatenáct číslic bylo vytvořeno z teček a čárek prostým aditivním způsobem, který patrně vznikl ze systému počítání na prstech rukou a nohou. Tečka (někdy malé kolečko) byla používána pro značení „jedné“ ve starších dobách všude ve Střední Americe. Souvislost je dávána s užíváním kakaového zrna jako jednotky měny. Na obrázku 9 jsou zobrazeny číslice od nuly do 20 pomocí tohoto zápisu.

Obrázek 9: Mayské číslice



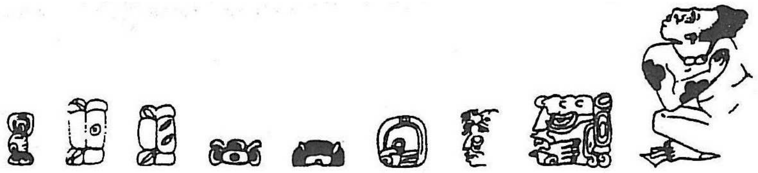
Pro zápis čísel větších než 20 byl používán poziční způsob zápisu, kde se symboly řadily do sloupce. Nejnižší řádek představoval počet jednotek, další počet dvacítek, dále se systém trochu „porouchal“, když další řádek místo další mocniny dvaceti $20^2 = 400$ představoval násobek čísla 360. Dále se systém vrátil do správných kolejí, když další řádky znamenaly násobky čísel 7 200 (360 x 20) potom 144 000 (360 x 20 x 20) a další řádky byly vždy násobky dvaceti. Na obrázku 10 je příklad zápisu čísla 31 781 148

Obrázek 10: číslo 31 781 148 zapsané v mayské soustavě



Nula v mayském způsobu zápisu představovala symbol znamenající, že určitý řád není v čísle přítomen. Jednalo se o poziční nulu. Zajímavostí je, že Mayové měli pro nulu více symbolů. Některé symboly pro nulu v glyfickém zápise jsou ukázány na obrázku 11.

Obrázek 11: Mayské nuly v glyfickém zápise



Zdroj: Barrow, 2005

Nula v zápise čísel pomocí teček a čárek byla zobrazena pomocí symbolu jakési škeble či lastury mořských živočichů.

Obrázek 12: Mayské nuly v klasickém zápise

Zdroj: Barrow, 2005

Mayové používali nulu běžně i na konci řad symbolů. Zvláštní krok na druhé úrovni, kde se místo „správného“ čísla 400, které odpovídá základu 20 ($400 = 20^2$) objevuje číslo 360, má za následek, že se symbol nula v mayském zápise liší od našeho v jedné důležité věci. Když v naší desítkové soustavě přidáme za číslo číslici nula, dostaneme číslo, které je násobkem deseti čísla původního. Obecně to platí v soustavě o libovolném základu, tj. přidáním nuly číslo vynásobíme základem. Násobení deseti díky tomu patří k operacím, které bez větších problému zvládají žáci na prvním stupni základní školy.

124 x 10 = 1 240

423_6 x 10_6 = 4 230_6

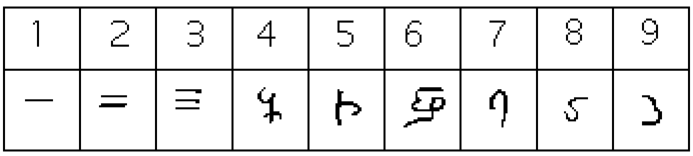
Mayská soustava vzhledem ke změně kroku na druhé úrovni tuto užitečnou vlastnost postrádá, což při praktických výpočtech komplikovalo výpočetní postupy. Co vedlo Maye k tomuto zvláštnímu kroku? Pravděpodobným důvodem bylo to, že Mayové považovali za prioritní časové záznamy. Pro zaznamenávání času vyvinuli propracovaný systém tří kalendářů, kde byla důležitá perioda 360 dnů, nazývaná *tun*.

Podobně jako babylonská nula, byla mayská nula nulou poziční. Také nebyla předmětem matematických operací. Na rozdíl od babylonské nuly měla mayská ještě jednu funkci a to funkci estetickou. Často bývala „nadbytečně“ dokreslována do piktogramů zaznamenávajících časové údaje. Bez obrázku pro nulu by piktogram pro datum měl prázdné místo a působil by neesteticky. Propracované symboly pro nulu vyplňovaly mezery a vytvářely dramatické zpodobnění data, jež vyzdvihovalo mystický význam čísel, která s ním byla spojena.

Indie

Třetí civilizací, která znala a používala nulu, byla civilizace rozkládající se v oblasti údolí Indu. Vzhledem k tomu, že babylonská i mayská civilizace zanikly, aniž by předaly své vynálezy nulového symbolu dalším následovníkům, je kolébkou naší nuly právě Indie. Od této civilizace pochází rovněž i náš způsob zapisování čísel, který je nyní univerzálně používán. Zápis číslic byl v Indii a blízkých oblastech jihovýchodní Asie různorodý a procházel svým vývojem. Rané indické symboly pro číslice 1 až 9 z doby 4. století n. l. jsou ukázány na obrázku 13.

Obrázek 13: Indické číslice z období kolem 4. století



Indická soustava se stala poziční se základem 10, čili soustavou desítkovou, v šestém století našeho letopočtu. Používala různých znaků pro čísla 1 až 9 a úsporné poziční notace pro větší čísla. Nejstarší známý písemný doklad užívání této soustavy je z roku 595 našeho letopočtu na měděné náhrobní desce ze Sankhedy. Jedním z podnětů vedoucí k zavedení poziční soustavy byly studie indických astronomů, kteří byli ovlivněni staršími babylonskými záznamy a způsoby zápisu.

Po zavedení pozičního systému zápisu čísel bylo samozřejmé, že zavedení symbolu pro nulu je pouze otázkou času. Nejstarším příkladem jeho užití je indická nula z roku 458 našeho letopočtu, která se objevuje v dochovaném džinistickém spise o kosmologii. Existují nepřímé doklady, že nula byla již užívána 200 let před Kristem. Prvotním symbolem pro nulu byla pravděpodobně tečka. Ta byla později nahrazena okrouhlým symbolem „o“, který se rozšířil i na východ do Číny. Indická desítková soustava byla analogií naší číselné soustavy, kde každý řád je násobkem deseti řádu předcházejícího. Neobjevuje se zde žádná nepravidelnost, jak tomu bylo například u Mayů. Nula byla používána jako symbolu označujícího nepřítomnost určitého řádu (desítek, stovek, tisíců, …). Při této pravidelnosti mohla být nula použita, jak již bylo zmíněno u mayské civilizace, jako operátoru, kdy dodáním nuly na konec libovolného čísla bylo provedeno násobení deseti. Barrow (2005, str. 42) zmiňuje sanskrtskou báseň od Biharilaly, kde autor vyjadřuje obdiv ke krásné ženě tím, že mluví o tečce na jejím čele v matematickém duchu.

„Bod uprostřed jejího čela
Násobí její krásu desetkrát,
právě tak, jak bod nula [sunja – bindu]
násobí každé číslo desetkrát“

Přestože indická nula byla poprvé zavedena k označení chybějícího čísla podobně jako u Babyloňanů a Mayů, získala zásluhou indických matematiků i postavení samostatného čísla. Na rozdíl od jiných vynálezců ji indičtí matematikové uznali za výsledek odečtení čísla od sebe samého. Roku 628 našeho letopočtu ji indický astronom a matematik Brahmagupta tímto způsobem definoval. Brahmagupta vyjádřil algebraická pravidla pro sčítání, odčítání, násobení a dělení s nulou. Ve své nejznámnější knize Brahmasphutasiddhanta v kapitole 18. zavádí pravidla pro zacházení s kladnými čísly, zápornými čísly a nulou. Níže uvádíme pravidla, kde Brahmagupta pracuje s nulou.

- Součet nuly a záporného čísla je číslo záporné
- Součet nuly a kladného čísla je číslo kladné
- Součet nuly s nulou je nula
- Součet kladného a záporného čísla je jejich rozdíl, pokud se rovnají, je součet nula
- Součin nuly s kladným nebo záporným číslem je nula
- Součin nuly s nulou je nula
- Nula dělená záporným nebo kladným číslem je buď nula, nebo je vyjádřena zlomkem s čitatelem nula a konečnou hodnotou ve jmenovateli
- Kladné nebo záporné číslo dělené nulou je zlomek s nulou ve jmenovateli
- Nula dělená nulou je nula

Pravidla týkající se součtu a součinu, ve kterých se objevuje nula, jsou pravidla, se kterými se seznamuje v současné době žák základní školy. Co se týká dělení (poslední tři pravidla), zde Brahmagupta naráží na problémy. První pravidlo pro dělení s nulou v čitateli, tj. v přepisu $0/a = 0$ pro a kladné i záporné, je v pořádku. Není zřejmé, co myslel Brahmagupta druhým pravidlem, které v přepisu zní: “a děleno nulou se rovná a/0“. U třetího pravidla již Brahmagupta chybuje, když definuje

$$\frac{0}{0} = 0$$ *Brahmaguptova chybná definice dělení nuly nulou*

Brahmaguptova práce byla první knihou, kde se s nulou zachází ve smyslu dnešního používání a kde se poprvé definují matematické vlastnosti nuly (vliv nuly při násobení, sčítání, odčítání a dělení). Jak bylo zmíněno, v dělení nulou Brahmagupta chyboval.

Další práce indických matematiků navazovaly na Brahmaguptu a byly jakýmsi „updatem“ *Brahmasphutasiddhanty*. Za zmínku stojí minimálně další dvě významné matematické knihy. První z nich *Ganita Sara Samgraha* napsal v roce 830, tedy téměř 200 let po Brahmaguptovi, indický matematik Mahavira. Mahavira v ní správně uvádí: *„… číslo vynásobené nulou je nula a číslo zůstává nezměněno, když od něj odečteme nulu.“* Zde ovšem pouze přebírá Brahmaguptovy poznatky. V části, kde se pokouší Brahmaguptu opravit, tj. v části o dělení nulou, ale také chybuje, když píše: *„Číslo zůstává nezměněno, pokud ho dělíme nulou“*. Tedy

$$\frac{n}{0} = n\,.$$

Jak je vidět, ani po dvě stě letech nebylo v dělení nulou moc jasno.

Druhá kniha, napsaná matematikem Bháskarou (1114 – 1185 n. l.) 500 let po Brahmaguptovi, se také pokouší definovat dělení nulou. Bháskara píše: *„Množství dělené nulou je zlomek, jehož jmenovatel je nula. Tento zlomek má nekonečnou hodnotu. Ta se nezmění, ani když se k ní mnoho přidá nebo odebere, stejně jako se neděje žádná změna nekonečnému a neměnnému Bohu v době destrukcí a vzniku nových světů“*. Okolo roku 1150 n. l. definuje Bháskara dělení nulou:

$$\frac{n}{0} = \infty\,.$$ [1]

Takto je dělení nulou často nesprávně chápáno i dnes.

Jak je vidět, žádný indický matematik nedospěl k závěru, že nulou dělit nelze. Bháskara ale např. správně ve své práci uvádí další operace s nulou jako např.

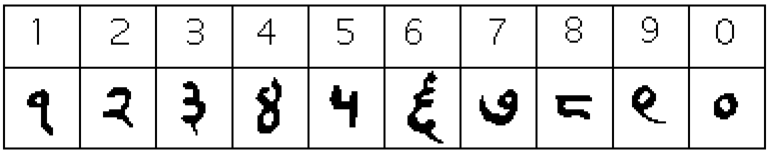
$$0^2 = 0,$$

$$\sqrt{0} = 0$$

[1] Pro jednoduchost je použit symbol ∞ pro nekonečno. Tento symbol byl zaveden až v roce 1655 anglickým matematikem Johnem Wallisem

Zápis indických číslic se postupně vyvíjel. Indické číslice, již vzdáleně připomínající naše číslice, z doby kolem jedenáctého století i s nulou, jsou ukázány na obrázku 14.

Obrázek 14: Indické číslice s nulou z období kolem 11. století



V Indii nabyla nula té podoby, kterou používáme dosud. Na rozdíl od babylonské a mayské nuly, která znamenala pouhé označení prázdného místa v řadě symbolů zobrazujících číslo a která nikdy nestála samostatně, indická nula je brána jako samostatný symbol, kterému je přiřazen význam „ničeho“, „prázdnoty“ apod. Je považována za samostatné číslo, které se může účastnit početních operací a které může být i výsledek těchto operací.

Nula v Evropě

„Naše“ nula je potomkem indické nuly. Žádný západní učenec nulu nezavedl. Významné evropské civilizace (Římané, Řekové) nepoužívaly poziční zápis čísel a nulu tedy nepotřebovaly. Naopak západní civilizace se nule, prázdnotě, silně bránila. Nula odporovala tehdy přijímanému pohledu na svět. Cesta nuly z východu na západ nebyla nijak jednoduchá. Prostředníkem, přes kterého se indická nula dostala na západ, byla arabská civilizace a její rozvíjející se náboženské učení – islám.

Deset let po smrti zakladatele islámu Mohameda, k níž došlo v roce 632, obsadili jeho přívrženci Egypt, Sýrii, Mezopotámii a Persii. Dobyli svaté město Židů a křesťanů Jeruzalém. Do roku 700 sahal vliv islámu na východě až k řece Indu a na západě dosahoval po Alžírsko. V roce 711 pak muslimové obsadili Španělsko a postoupili až do jižní Francie. Na východě porazili roku 751 čínskou armádu. Cestou do Číny dobyli Arabové také část Indie a přitom se dozvěděli i o indických číslicích. Arabové neměli vyvinutou vlastní soustavu číslic. Dokonce i v matematických pracích vypisovali čísla slovy a doprovázeli je paralelními výpočty v jiných soustavách, např. v řecké. Toto používání slov anebo řeckých písmen pro čísla přetrvávalo do desátého století, kdy se začaly rozvíjet dva soubory arabských číslic „západní“ a „východní“. Obě soustavy převzaly indické symboly pro číslice 1 až 9. Zajímavé je, že z nějakého důvodu nebyl zpočátku převzat symbol pro nulu. Vzhledem k pozičnímu zápisu čísel v těchto soustavách, bylo nutné chybějící nulu nahradit. Měla-li číslice znamenat počet desítek, umisťovala se nad ní tečka. Číslice označující počet stovek se označovala dvěma tečkami atd. Takže číslo šest set osmdesát sedm, které zapisujeme jako 687, se v raném arabském systému zapisovalo jako

$$\ddot{6}\dot{8}7 = 687$$

dále například

$$\ddot{1}4 = 104$$
$$\ddot{1}\dot{4} = 140$$

Později východní Arabové zavedli malý kroužek pro nulový symbol a ztotožnili tak svoji notaci s notací indickou.

Cesta arabských číslic a nuly na západ do Evropy nebyla jednoduchá. Evropa v té době prožívala nejtemnější středověk a těžkopádně počítala pomocí římských číslic. Jádrem západní filozofie bylo Pythagorovo učení, které připisovalo řídící roli ve vesmíru poměrům čísel a tvarům. Číslo nebylo chápáno samostatně, ale pouze ve spojení s geometrickým významem. Číslo bylo chápáno jako vzdálenost bodů, úsečka o dané velikosti. Součin čísel byl reprezentován obdélníkem o dané ploše. Třetí mocnina byla chápána jako objem krychle. Nula v takovémto nahlížení na čísla neměla místo. O jaký se jedná obrazec s nulovou, žádnou, délkou resp. šířkou?

Ještě větší bariérou pro pronikání nuly bylo Aristotelovo učení, které za své vzala církev. Aristotelova koncepce zdokonalená alexandrijským astronomem Ptolemaiem se stala vedoucí filozofií křesťanské církve a tím i celého západního světa. Aristoteles zatracoval nulu i nekonečno. Ve vesmíru neexistuje prázdnota ani nekonečno. Matematici podle Aristotela nepotřebují nulu ani nekonečno. Na odmítnutí prázdnoty a nekonečna byl založen i Aristotelův důkaz existence Boha, který za svůj převzala křesťanská církev. Nula měla vskutku mocného nepřítele.

Je příznačné, že hlavní roli v zavedení arabských, tj. indických, číslic včetně nuly do Evropy je přisuzována vzdělanému francouzskému mnichu Gerbertu z Aurillacu (945 – 1003). Ten se seznámil s arabskou vědou a matematikou během dlouhého pobytu v tehdy arabském Španělsku. V církevní hierarchii dosáhl postu nejvyššího, když byl roku 999 zvolen jako papež Sylvestr II (pontifikát 999 -1003). Byl bezpochyby jedním z prvních, který se v Evropě pokoušel zavést místo dosavadních římských číslic číslice arabské. Díky jeho schopnosti řešit snadno a rychle pomocí arabského systému v té době zdánlivě obtížné matematické úlohy jej po jeho smrti podezírali ze styků s ďáblem.

Dalším významným popularizátorem arabské matematiky a jejich číselné soustavy byl Leonardo Pisánský, v matematických kruzích známý jako Fibonacci. Při cestách se svým otcem obchodníkem po arabských částech Afriky se seznámil s arabským zápisem čísel a způsobem počítání a rychle pochopil jeho nesporné výhody oproti stávajícímu systému. Roku 1202 vydal knihu „Liber Abaci“ (kniha o abaku), v níž tento systém popsal. Poté bylo třeba jen krátké doby, aby italští učenci, bankéři a obchodníci pochopili výhody arabského systému a začali ho používat.

Obrázek 15: Fibonacci – průkopník v zavádění nuly v Evropě

Místní vlády v Itálii neměly zpočátku pro nový systém velké pochopení. Florencie v roce 1299 a Padova v roce 1348 dokonce zakázaly používání arabských číslic. Vedle již zmíněného rozporu s Aristotelovým, tj. církevním, učením, zde byl i praktický důvod. A to byla obava z možných podvodů. Doposud používaný systém římských číslic nebyl poziční systém a neznal nulu. Před vynálezem knihtisku byly psány veškeré účetní záznamy ručně a byly nutná opatření, zabraňující přepisování a upravování těchto záznamů. Například končilo-li číslo římskou číslicí I, např. XII, zapisovala se jako J, tj. XIJ, aby se označilo, že číslo symbolem napravo končí. Bohužel indicko-arabská soustava dávala takovýmto podvodům větší prostor. Na rozdíl od římské soustavy v ní přidání číslice na konec čísla vždy vytvoří jiné, o řád větší, číslo. V římské soustavě většinou takovéto připsání vede k nesmyslnému číslu. Vedle toho samotná nula byla lehce přepisovatelná na 6 nebo 9. Tyto důvody hrály roli, že zavedení indicko-arabské soustavy do celé Evropy se, přes její nesporné přednosti, zdrželo až do 15. století. Možná není náhoda, že právě tehdy skončil středověk.

1.2 Nekonečno a jeho historie

Nula čekala na svůj objev poměrně dlouhou dobu, ale hned po svém zavedení začala hrát velmi významnou roli v matematice a později i v dalších přírodních vědách. Nekonečnem se lidstvo zaobíralo podstatně déle, ovšem bez větší odezvy v matematických pracích. Nekonečno bylo předmětem zkoumání převážně teologů a filozofů. Pojem nekonečna patřil na jedné straně k základní výbavě lidského myšlení, na druhé straně pokusy skutečně myslet na nekonečno vedly a vedou často přinejmenším k neznepokojení.

Mnohé civilizace se obávaly připustit nekonečno do svého matematického systému, podobně jako se vyhýbaly zavedení nuly. Například Zenon odmítal myšlenku, že by se „nic“ mohlo považovat za „něco“ a do logické soustavy řecké logiky by se tak mohl zavést nepříjemný spor. Nekonečno mělo podobně nepříjemné vlastnosti. Nechovalo se jako jiná čísla. Připočteme-li k nekonečnu libovolné číslo, nekonečno se nezmění, výsledek bude opět nekonečno. Obdobně po odečtení konečného čísla od nekonečna zůstane opět nekonečno. Nekonečno bylo spojeno s „ničím“. Známý indický matematik Brahmagupta, kterému vděčíme za definování matematických operací s nulou, píše:

$$\infty = \frac{1}{0}$$
$$0 = \frac{1}{\infty}$$

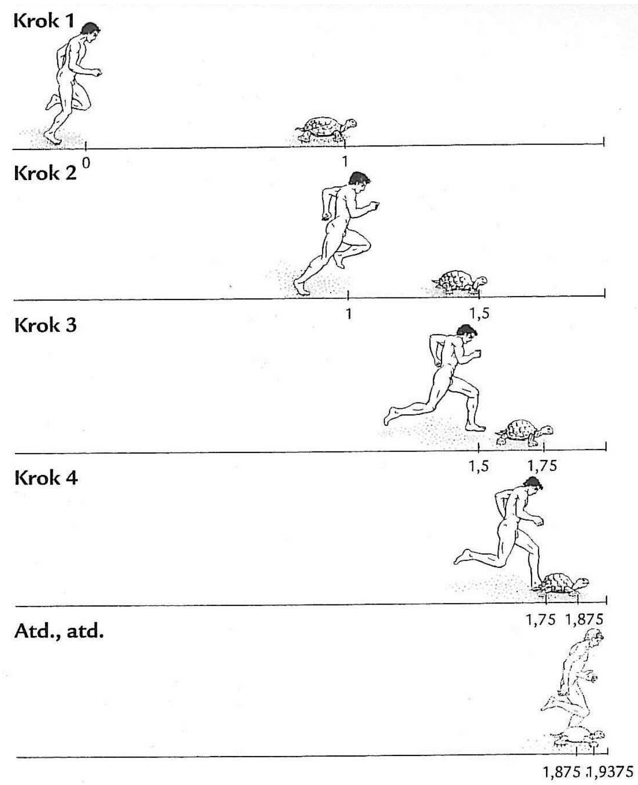
Podle své základní logické povahy se nekonečno rozlišuje na dvě kategorie:

- **Nekonečno potenciální –** představuje možnost pokračování určitého procesu „až do nekonečna“, například procesu postupného přibližování k nějaké hodnotě (limitě), či možnost neustálého zvyšování určité veličiny „nade všechny meze“.

- **Nekonečno aktuální –** představuje nekonečnou velikost určitého skutečného celku. Toto nekonečno může být objektem dalších matematických manipulací

Západní filozofie byla postavena na Pythagorově učení, podle kterého je celý vesmír řízen poměry a tvary. Planety se pohybují po kulových plochách – sférách, které se otáčejí. Na otázku, co leží za těmito sférami, zda další a další sféry (nekonečně mnoho sfér) Aristoteles a jeho následovníci odpovídali, že nemůže existovat nekonečno sfér, jelikož nekonečno neexistuje. Za sférami je místo pro toho, který sférami otáčí. Aristoteles připouštěl pouze možnost nekonečna potencionálního. Nekonečno aktuální Aristoteles odmítal. Přijetím této filozofie vypadlo nekonečno ze zájmu matematiků. Mužem, který tabu nekonečna prolomil, byl filozof a matematik Zenon z Eleje. Zenon byl tvůrcem celé řady logických hříček a paradoxů. Pro nekonečno a jeho vstup do matematiky sehrál významnou roli jeho paradox o Achillovi a želvě. V tomto paradoxu Zenon dokazuje, že rychlejší Achilles nedohoní pomalejší želvu, pokud bude mít želva v počátku závodu náskok. Pro názorný příklad je dobré pracovat s čísly. Předpokládejme, že v počátku závodu má želva náskok 1 metru a Achilles běží dvakrát rychleji (pro jednoduchost), než se pohybuje želva. Achilles vyrazí a za sekundu doběhne na místo, kde byla želva, ta se ovšem za tuto dobu posune o 0,5 m. Achilles za 0,5 sekundy doběhne na toto místo, ale želva bude již o čtvrt metru dál atd. Ať Achilles běží, jak dlouho bude moci, vždy bude želva před ním a Achilles ji nikdy nedohoní.

Obrázek 16: Achilles a želva



Zdroj: Seife, 2005

Vzdálenost, kterou Achilles musí uběhnout je

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

Řekové neznali nulu a neuznávali nekonečno, takže si nedokázali představit, že by součet těchto čísel mohl existovat.

Při práci s nekonečnými počty čísel naráželi matematici na vlastnosti, na které nebyli u konečných počtů zvyklí. Například při určení součtu řady čísel

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots$$

Je možné chytrým trikem „dokázat“, že součet je nula. Řadu upravíme uzávorkováním

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+0+\cdots=0\,.$$

Jiným trikem „dokážeme“, že součet je jedna. Členy řady uzávorkujeme takto

$$1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1+0+0+0+\cdots=1\,.$$

Jinou možnost „výpočtu“ součtu této nekonečné řady čísel je následující postup, kde jsme písmenem S označili náš hledaný součet

$$\begin{aligned}
S &= 1-1+1-1+1-1+\ +1-1+\cdots \\
S &= 1-(1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots) \\
S &= 1-S \\
2S &= 1 \\
S &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Čili součet je ½. Vypadá to, že součet by mohlo být jakékoliv číslo. Italský kněz Guido Grandi použil této řady jako podpůrného argumentu k tvrzení, že Bůh mohl vytvořit vesmír (1) z ničeho (0). Na tomto příkladu je patrné, že při zacházení s nekonečnem je nutné zachovávat opatrnost. Postupy, které fungují u konečných počtů, dávají při práci s nekonečnem zjevně rozporuplné výsledky. Při sčítání nekonečně čísel můžeme dospět ke konečnému výsledku. Někdy směřuje součet k nekonečnu. Pokud sčítáme nekonečné množství nul, můžeme dospět, jak se zdá, k čemukoliv. S nekonečnem neuměli dlouho matematikové zacházet.

2 MATEMATIKA

Nula, číslo 0, je jedna z nejzákladnějších matematických konstant. Má tu vlastnost, že pro každé číslo a platí.

$$a + 0 = 0$$
$$a \cdot 0 = 0$$

Číslo nula na číselné ose odděluje záporná čísla od čísel kladných. Nezastupitelnou roli hraje číslice nula v pozičních číselných soustavách, kde se tato číslice používá k označení prázdného místa pro daný řád. Například zápis 102 v desítkové soustavě znamená

102 = jedna stovka + žádná desítka + dvě jednotky

2.1 Elementární matematika

První seznámení s číslem, resp. číslicí, nula probíhá v prvních ročnících základní školy, kde se nula objevuje jako číslo v základních matematických operacích: sčítání, odčítání, násobení, dělení, umocňování a odmocňování. Nula se zde definuje jako nejmenší nezáporné celé číslo. Nula není ani číslo kladné ani číslo záporné. Nula je sudé číslo. Ne zcela jednoznačné je zařazení nuly mezi přirozená čísla. Někdy je nula považována za číslo přirozené. V našich současných učebnicích nula není zařazena mezi přirozená čísla.

Základní matematické operace s nulou. Pro libovolné reálné číslo x platí:

$$x + 0 = x$$
$$0 + x = x$$
$$x - 0 = x$$
$$0 - x = -x$$

$$0 \cdot x = 0$$
$$x \cdot 0 = 0$$
$$0 : x = 0 \quad (pro\, x \neq 0)$$
$$x : 0 = nedefinováno$$
$$0^x = 0 \quad (pro\, x \neq 0)$$
$$x^0 = 1 \quad (pro\, x \neq 0)$$
$$0^0 = 1$$
$$0! = 1$$

2.1.1 Je nula sudé číslo?

Přes svoji jednoduchost způsobuje tato otázka žákům základní školy značné problémy. Otázku lze jednoduše odpovědět pomocí definice sudého čísla, která říká: „Sudé číslo je celé číslo, které je beze zbytku dělitelné dvěma“. Tedy například

$$6 : 2 = 3 \quad zbytek\ 0 \quad \rightarrow \quad 6\ je\ sudé\ číslo$$
$$7 : 2 = 3 \quad zbytek\ 1 \quad \rightarrow \quad 7\ není\ sudé\ číslo$$

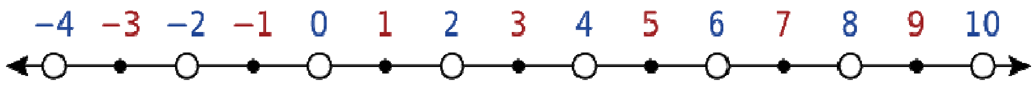
Takže

$$0 : 2 = 0 \quad zbytek\ 0 \quad \rightarrow \quad 0\ je\ sudé\ číslo\,.$$

Tímto je většinou otázka sudosti nuly učitelem ukončena. Někdy je dokonce pouze oznámeno, že *nula je sudé číslo.* Není divu, že žáci na otázku sudosti nuly dávají nezřídka chybnou odpověď (viz praktický výzkum). Žákům je možné ukázat i další přístupy k „problému“ sudosti nuly, kde je možné i zjednodušeně ukázat jak „matematický jazyk“ vzniká a jak je možné „matematicky myslet“.

Nejjednodušeji se dá sudost nuly zdůvodnit využitím číselné osy. Pokud zobrazíme na číselnou osu celá čísla a odlišíme sudá a lichá čísla, je zřejmé, že se střídají. Pokud k sudému číslu přičteme nebo od něj odečteme dvojku, získáme opět číslo sudé. Obdobně pokud k lichému číslu přičteme nebo od něj odečteme dvojku, získáme číslo liché. Pokud nemáme zvláštní zájem (a ten nemáme) není důvod z tohoto hezkého pravidla vyloučit nulu.

Obrázek 17: Zdůvodnění sudosti nuly pomocí číselné osy



Bylo by samozřejmě možné definovat sudá čísla tak, aby neobsahovala nulu. Definice matematických pojmů je většinou záležitost konvence, která se může z různých důvodů měnit. Například definice prvočísla se změnila z „*kladného celého čísla, které je beze zbytku dělitelné maximálně dvěma různými přirozenými čísly*“ na „*kladné celé číslo, které je dělitelné beze zbytku právě dvěma různými přirozenými čísly*“. Číslo 1 tak vypadlo z prvočísel. Důvod byl, že nová definice vyhovuje více pro matematické teorémy týkající se prvočísel. Při změně definice sudosti nuly (vyloučení nuly ze sudých čísel) bychom museli opravovat i další zažitá matematická pravidla, kde se pojem sudosti objevuje. Jedná se např. o pravidla týkající se sčítání, odčítání a násobení celých čísel

- Sudé číslo ± sudé číslo = sudé číslo
- Liché číslo ± liché číslo = sudé číslo
- Sudé číslo × celé číslo = sudé číslo

Zvolením vhodných čísel můžeme získat na pravé straně nulu

- $6 - 6 = 0$
- $-3 + 3 = 0$
- $4 \times 0 = 0$

Výše uvedená pravidla by nebyla platná, pokud bychom nulu nepovažovali za sudé číslo, jak je tomu z neznámých důvodů v (Stewart, 2001), kde je sudé číslo charakterizované jako celočíselný násobek čísla 2 s výjimkou nuly, která není ani sudá ani lichá. Při takové změně definice bychom museli psát výše uvedená pravidla komplikovaněji.

- Sudé číslo ± sudé číslo = sudé číslo (nebo nula)
- Liché číslo ± liché číslo = sudé číslo (nebo nula)

- Sudé číslo × nenulové celé číslo = sudé číslo

I z těchto důvodů (jasnosti a přehlednosti navazujících pravidel) je zřejmé, že je lepší považovat nulu za sudé číslo.

Jak již bylo zmíněno a v praktické části bude ukázáno, není sudost nuly žákům základní školy zcela zřejmá. K podobným závěrům došel např. i Frobischer (1999). K čemu může tato neznalost vést, je možné žákům ukázat na ne úplně nepravděpodobné životní situaci, kdy v současné době silně znečištěného ovzduší velkých aglomerací není úplnou výjimkou regulace jízdy osobními automobily. Ve většině případů (Paříž, Londýn, …) je toto omezení vázáno na registrační značku vozidla ve smyslu „v sudé dny mohou vjíždět do centra vozy, jejichž registrační značka končí sudou číslicí, v liché dny ty vozy, kterých registrační značka končí lichou číslicí“. Při problémech se sudostí nuly se majiteli automobilu, kterému končí značka na nulu, může stát, že automobilem „nebude moci“ jezdit, nebo v horším případě jej tato neznalost může připravit o značný finanční obnos, který bude muset zaplatit ve formě pokuty za neoprávněný vjezd vozidla (a za nepozornost ve škole).

2.1.2 Nula faktoriál – 0!

Matematická operace faktoriál je operací velmi jednoduchou k pochopení. Tato operace je většinou používána při praktických výpočtech až v kombinatorice při výpočtu tzv. kombinačních čísel. Nebývá proto předmětem výuky matematiky na základních školách a ani většinou na prvním stupni víceletých gymnázií. Přes svoji jednoduchost způsobuje výraz 0! problém i mezi učiteli, kdy někteří učitelé výraz faktoriál vůbec neznají.

Co znamená výraz n!? Na níže uvedených příkladech

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$$
$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$$
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cdots (n-1) \cdot n \quad pro\ n \in N$$

Je snadné pochopit operaci faktoriál včetně jejího vyčíslení. Z příkladů není ale zcela zřejmé, co znamená, kolik je, nula faktoriál. Při „odhadu“ podle vzoru výše uvedených příkladů zní odpověď většinou nula, nedefinováno a výjimečně jedna. Jasno vnese rekurzivní definice faktoriálu:

$$n! = (n-1)! \cdot n \quad pro\ n \geq 1.$$

Pro n=1 dostáváme

$$1! = 0! \cdot 1$$
$$0! = \frac{1!}{1}$$
$$0! = 1$$

Pokud by se 0! nerovnalo jedné, bylo by nutné upravit rekurentní definici faktoriálu. Někdy se 0! přímo definuje jako rovno jedné. Důvodů pro to, abychom položili 0! rovno jedné je víc. Faktoriál se například objevuje v řadě výrazů a vzorců, kde se 0! = 1 předpokládá. Jedná se třeba o mocninný rozvoj výrazu e^x.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Dále n! udává počet permutací množiny n prvků, tj. počet způsobů, jak seřadit n prvků. Prázdnou množinu můžeme uspořádat jedním způsobem (ponechat beze změny), tj.

$$0! = 1$$

Faktoriál se objevuje v definici tzv. kombinačního čísla (binomického koeficientu)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \quad pro \quad n \geq k \geq 0$$

Toto číslo udává v kombinatorice, kolika způsoby můžeme vybrat *k* prvků z množiny n prvků, přičemž nezáleží na pořadí a žádný prvek nemůžeme vybrat vícekrát. Při n = k, tj. vybíráme n prvků z množiny n prvků, existuje pouze jeden způsob

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} = \frac{1}{0!} = 1 .$$

Vidíme, že musí platit 0! = 1. Obdobně z binomické věty

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k ,$$

plynou požadavky

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} = \frac{1}{0!} = 1$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{1}{0!} = 1 .$$

Jedná se totiž o koeficienty u mocnin a^n a b^n, které jsou rovny jedné. Opět musí tedy platit 0! = 1.

2.1.3 Mocnina s nulou v exponentu

Mocnina s nulou v exponentu, je dalším matematickým výrazem, ve kterém žáci základních škol velmi často chybují.

Umocňování můžeme ve zjednodušeném přístupu chápat jako opakované násobení. Například

$$5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Mocniny s nulou v základu nepůsobí žákům většinou žádné potíže

$$0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$
$$0^n = 0$$

Je vhodné uvažovat n různé od nuly, protože zatím nevíme, co znamená umocnit něco na nultou. Umocňování na nultou není operace, jejíž výsledek by byl hned zřejmý. Některé učebnice matematiky pro základní školy řeší tuto otázku definicí „Matematici definují $n^0 = 1$“ nebo uvedou pouze výsledný vzorec. Některé učebnice se mocninám s nulou v exponentu vůbec nevěnují.

Čemu se tedy rovná 5^0? Pětku násobíme pětkou nulakrát. Bude to nula? Výraz nemá smysl? Možná, že pět na nultou znamená, že pětku vlastně neumocňujeme, tj. s pětkou nic neděláme, takže výsledek bude pět. Tato úvaha se často u žáků objevuje, protože někteří mají silné spojení „0 = nic“ a používají je i na matematické operace. Dělat něco s nulou je stejné jako nic nedělat. Při řešení otázky, čemu se rovná 5^0 je možné vycházet z již známého

$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Čemu se rovná $5^4 \cdot 5^3$?

$$5^4 \cdot 5^3 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5)$$
$$5^4 \cdot 5^3 = 5^{(4+3)}$$
$$5^4 \cdot 5^3 = 5^7$$

Čemu se rovná $5^7 : 5^4$?

$$\frac{5^7}{5^4} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}$$
$$\frac{5^7}{5^4} = 5^{(7-4)}$$
$$\frac{5^7}{5^4} = 5^3$$

Z výše uvedeného plyne pravidlo pro násobení a dělení mocnin o stejném základu. Násobíme – li mocniny o stejném základu, získáme výsledek umocněním základu na součet exponentů. Dělíme-li mocniny o stejném základu, získáme výsledek umocněním základu na rozdíl exponentů.

Nyní již můžeme psát

$$\frac{5^7}{5^7} = 5^{(7-7)}$$
$$\frac{5^7}{5^7} = 5^0$$

Výpočet levé strany nečiní problémy a tak je možné psát

$$5^0 = 1.$$

Vzhledem k tomu, že pětka není žádné speciální číslo, můžeme tento postup provést s libovolným číslem a psát obecně

$$a^0 = 1$$

Samozřejmě je možné při odvozování postupovat rovnou obecně. Tento postup nemusí být ale pro žáky základní školy vždy nejsrozumitelnější.

Získali jsme dva vztahy pro umocňování s nulou

$$0^x = 0$$
$$x^0 = 1$$

Nabízí se otázka. Jaký bude výsledek při x = 0? Bude to nula podle prvního vztahu nebo máme použít druhý vztah a výsledek bude jedna? Nebo se jedná o neurčitý výraz a výsledek není definován?

$$0^0 = ?$$

Při řešení otázky je vhodné rozšířit znalosti práce s mocninami. Co se rozumí záporným exponentem.

$$\frac{5^4}{5^7} = \frac{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot}{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5} = \frac{1}{5^3}$$
$$\frac{5^4}{5^7} = 5^{(4-7)} = 5^{-3}$$

Obecně

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Co znamená, pokud je v exponentu zlomek.

$$5^{1/2} \cdot 5^{1/2} = 5^{(1/2+1/2)} = 5^1 = 5$$

Čili $5^{1/2}$ vynásobeno samo sebou, umocněno na druhou, se rovná 5. Neboli

$$5^{1/2} = \sqrt{5}$$

Podobnou úvahou lze dospět k

$$5^{1/3} = \sqrt[3]{5}\,.$$

Obecně můžeme psát

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Nyní je možné se vrátit k otázce kolik je nula na nultou. Jednoduché úpravy a úvahy typu

$$x^0 = x^{1-1} = x^1 \cdot x^{-1} = \frac{x}{x} = 1$$

čili pro x = 0 plyne $0^0 = 1$ nebo

$$0^x = 0^{1+x-1} = 0^1 \cdot 0^{x-1} = 0 \cdot 0^{x-1} = 0$$

kde se využilo znalostí, že nula krát cokoliv je nula a ze které pro x = 0 plyne $0^0 = 0$, vedou na již uvedené vztahy. Bohužel oba způsoby, kterými se došlo k těmto výsledkům, naráží na jinou záludnost nuly (podrobněji v další kapitole) a to na dělení nulou. Pro x = 0 nabývají totiž výrazy x^{-1} a 0^{x-1} hodnoty 1/0 a nulou, jak bude ukázáno dále, se dělit nesmí. Korektnější je následující úvaha

$$0^4 = 0$$
$$0^3 = 0$$
$$0^{1/2} = \sqrt{0} = 0$$
$$0^{1/8} = \sqrt[8]{0} = 0$$
$$\vdots$$

Při zmenšování exponentu, tj. jeho směřování nule, zůstává výraz nulový. Z toho plyne, že $0^0 = 0$. Stejně korektní je ale bohužel i následující úvaha

$$4^0 = 1$$
$$3^0 = 1$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$
$$\left(\frac{1}{8}\right)^0 = 1$$
$$\vdots$$

Při zmenšování základu, tj. jeho směřování k nule, zůstává výraz roven jedné. Z toho plyne, že $0^0 = 1$. Matematicky je možné zapsat výše uvedené úvahy

$$\lim_{x\to 0^+} 0^x = 0$$
$$\lim_{x\to 0} x^0 = 1$$

Vidíme, že funkce $f(x,y) = y^x$ je nespojitá v bodě (x, y) = (0, 0). Blížíme-li se k bodu (0, 0) podél osy x dostáváme

$$\lim_{y\to 0} f(0, y) = 1,$$

Ale při přibližování z jiné strany, ve směru osy y (pro x>0) dostaneme

$$\lim_{x\to 0^+} f(x, 0) = 0.$$

Řešením může být nepostupovat k nule jednotlivě, ale najednou, tj. řešit limitu

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = ?$$

Aplikací L´Hospitalova pravidla získáme výslednou hodnotu limity

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1.$$

Tj. pokud se budeme přibližovat k nule zprava (tj. od kladného směru osy x) bude se hodnota funkce f(x) = x^x blížit hodnotě 1. Pro záporná x se funkce komplikuje a přechází do komplexních hodnot, např. hodnota funkce v bodě x = -1/2 bude

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}}},$$

tj. ocitáme se v oboru komplexních čísel. Už výše uvedený výpočet limity je dobrý důvod proč je možné, a matematici to tak opravdu dělají, definovat

$$0^0 = 1.$$

Důvodů, proč je vhodné, aby nula na nultou byla jedna, je více. Jak již bylo zmíněno v kapitole o sudosti nuly, je potřeba zkoumat veškeré souvislosti a případy, do kterých daná definice zasáhne. V našem případě se jedná hlavně o binomickou větu (binomický teorém), která se zde již objevila

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k .$$

Položíme-li b = 0 a předpokládáme-li a ≠ 0 dostáváme

$$a^n = (a+0)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot 0^k$$

$$a^n = \binom{n}{0} \cdot 0^0 \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot 0^1 \cdot a^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 0^2 \cdot a^{n-2} + \cdots$$

$$a^n = \binom{n}{0} \cdot 0^0 \cdot a^n$$

$$a^n = 0^0 \cdot a^n$$

Pokud by 0^0 nebylo rovno jedné, potom by binomický teorém neplatil pro b = 0 a bylo by nutné zavádět doplňující pravidla, případně opravit jeho zápis do komplikovanější a méně elegantní podoby. Binomický teorém považuje za hlavní důvod, proč je nutné definovat $0^0 = 1$ např. Graham (1988), když píše „*Některé učebnice nechávají výraz 0^0 nedefinovaný, protože funkce 0^x a x^0 mají rozdílné limity pro x blížící se nule. To je ale chyba. Musíme definovat $x^0 = 1$ pro všechna x, pokud chceme, aby platil binomický teorém pro x = 0, y = 0. Tento teorém je příliš důležitý, než abychom ho narušili. Naopak funkce 0^x je zcela nedůležitá.*"

Dalším, hlavně estetickým důvodem, proč je vhodné definovat $0^0 = 1$, je zápis mocninné řady

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot (x-c)^n \ ,$$

Kde předpokládáme pro x = c, f(c) = a_0. Pokud by 0^0 nebylo definováno, nebo bylo definováno jako rovno nule, bylo by nutno člen a_0 z řady vyjmout, což by vedlo k méně elegantnímu zápisu

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot (x-c)^n \ .$$

Při práci s mnohočleny se definice $x^0 = 1$ pro všechna x uplatní v kompaktním zápise. V mnohočlenu

$$x^4 + 2x + 3$$

chybí členy obsahující druhou a třetí mocninu. Pokud chceme mnohočlen zapsat tak, aby obsahoval postupně všechny mocniny, musíme zvolit zápis

$$x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x + 3x^0 \ .$$

Tento zápis musí platit pro libovolné x, tedy i pro x = 0. Odtud plyne podmínka $0^0 = 1$.

2.1.4 Dělení nulou

Aritmetické výpočty s nulou způsobují většinou žákům základních škol nečekané problémy. Jednou z operací, kde žáci nejčastěji chybují je dělení nulou. V praktické části jsou prezentovány výsledky testů žáků základních škol a učitelů, ze kterých je vidět, že přes poměrně jednoduchou „definici“ žáci operaci dělení nulou správně nerozumí. V této části práce je dán prostor matematickému rozboru dělení nulou.

Čemu se rovná 6/2, 5/0, 0/0 ? U prvního příkladu většinou nezaváhá ani žák druhé třídy, 6/2 = 3. Pokud se zeptáme na důvod, odpověď zní většinou: „Protože dva krát tři je šest“. Dělení je správně chápáno jako obrácená operace k operaci násobení. Takto je možné velmi jednoduše a pochopitelně analyzovat a žákům vysvětlit otázku dělení nulou. Při dělení např.

$$\frac{8}{4} = x\,,$$

hledáme takové neznámé číslo x, pro které platí

$$4 \cdot x = 8\,.$$

Řešení je jediné číslo a to číslo 2, protože platí, že

$$4 \cdot 2 = 8\,.$$

Stejným postupem je možné pokusit se najít řešení příkladu

$$\frac{5}{0} = x\,.$$

Hledáme tedy takové neznámé číslo x, pro které platí

$$0 \cdot x = 5\,.$$

Operace násobení nulou je operace jednoduchá a nepůsobí žádné problémy. Je známo, že jakékoliv číslo vynásobené nulou je nula

$$0 \cdot x = 0 \quad \textit{pro všechna } x \; (\forall x).$$

Ať zvolíme číslo x jakkoliv, vždy bude výsledek nula. Nikdy nemůžeme získat pětku, kterou bychom potřebovali. Můžeme říci, že příklad 5/0 nemá řešení. Příklad je opět možné zobecnit a uvažovat místo pětky libovolné číslo (kromě nuly) a učinit závěr, že dělení nulou není definováno.

Co se bude dít, pokud bude v čitateli nula, tj. příklad

$$\frac{0}{0} = x.$$

Zde pro jakékoliv číslo x bude platit

$$0 \cdot x = 0.$$

Tj. příklad 0/0 má nekonečně mnoho řešení

$$\frac{0}{0} = \text{ neurčitý výraz.}$$

Na výše uvedených příkladech je vidět smysl pravidla, kterému se učí žáci na prvním stupni základní školy a to

NULOU SE DĚLIT NESMÍ!

Nekorektnost dělení nulou je možné ukázat na praktických příkladech. Například můžeme k dělení přistupovat jako rozdělování určitého počtu prvků (čitatel) do určeného počtu skupin (jmenovatel), tak aby každá skupina obsahovala stejný počet prvků.

Př. „Máme dvanáct banánů, které chceme spravedlivě, tak aby každé dítě mělo stejný počet banánů, rozdělit mezi tři děti. Kolik banánů dostane každé dítě?“ Řešení je jednoduché

$$\frac{12}{3} = 4.$$

Každé dítě dostane čtyři banány.

Pokud v předchozím příkladu změníme zadání na nulový počet banánů, tj. nemáme žádné banány a chceme je rozdělit mezi tři děti. Kolik dostane každé dítě?

$$\frac{0}{3} = 0 \,.$$

Každé dítě dostane nula banánů (žádné banány). Výsledek zřejmý a lehce pochopitelný. Dělení s nulou ve jmenovateli je snadné a děti v něm chybují pouze minimálně.

Opět zkusíme změnit zadání. Máme opět 12 banánů, které chceme rozdělit mezi děti. Bohužel široko daleko žádné dítě není. Budeme tedy dělit mezi nulu dětí. Kolik banánů bude mít každé dítě? Při analogickém postupu jako v minulých příkladech získáme „řešení“ výpočtem výrazu

$$\frac{12}{0} = ?$$

Již ze zadání je zřejmé, že se jedná o nelogickou úlohu. Nikde není žádné dítě a máme odpovědět, kolik banánů toto neexistující dítě dostane.

Ještě nelogičtěji, spíše hloupě, by zněla úloha, která by vedla na řešení výrazu

$$\frac{0}{0} = ?$$

Nemám žádné banány. Nikde není žádné dítě a řešíme, kolik banánů mám dát po spravedlivém dělení každému dítěti. U obou posledních příkladů je třeba, aby děti pochopily, že je nesmyslné uvažovat, kolik má něčeho neexistující dítě. Je totiž možné, že by odpověď mohla znít nula (nic).

K dělení je možné přistupovat také jako k opakovanému odčítání. Příklad může znít: „Farmář má dvanáctihektarové pole. Každý den sklidí úrodu ze tří hektarů. Za kolik dní sklidí farmář celé pole?“

Řešení opakovaným odčítáním:

Po prvním dnu zbývá 12 – 3 = 9 hektarů

Po druhém dnu zbývá 12 – 3 – 3 = 6 hektarů
Po třetím dnu zbývá 12 – 3 – 3 – 3 = 3 hektary
Po čtvrtém dnu zbývá 12 – 3 – 3 – 3 – 3 = 0 hektarů

Odpověď: „Farmář sklidí úrodu za 4 dny“

Řešení dělením: 12 : 3 = 4

Znění příkladu vedoucí na dělení nulou, tj. 12 : 0, by bylo: „Farmář má pole o rozloze 12 hektarů. Vzhledem k tomu, že se mu nechce pracovat, nesklidí za den žádnou část úrody (sklidí 0 hektarů). Za kolik dní sklidí farmář celé pole?“

Jak vidíme, úloha vede na dělení:

$$\frac{12}{0} = ?$$

Řešíme-li úlohu postupným odčítání, abychom analogií s minulým příkladem získali výsledek dělení 12 : 0, dostáváme

Po prvním dnu zbývá 12 – 0 = 12 hektarů
Po druhém dnu zbývá 12 – 0 – 0 = 12 hektarů
Po třetím dnu zbývá 12 – 0 – 0 – 0 = 12 hektarů
Po čtvrtém dnu zbývá 12 – 0 – 0 – 0 – 0 = 12 hektarů

$\vdots$

Je zřejmé, že úloha nemá řešení. Na tomto příkladu je možné ukázat, že výsledkem dělení nulou není ani někdy zmiňované nekonečno (∞). Pokud farmář nebude sklízet, tak ani po nekonečně dnech nebude mít úrodu ve stodole.

$$\frac{12}{0} \rightarrow \textit{nemá smysl}$$

Poměr a/b může mít v některých úlohách geometrický význam. Může se jednat například o výpočet s plošnými mírami nebo výpočet směrnice přímky v analytické geometrii. Příklad zní: „Obdélník o ploše 12 (z důvodů úspornosti opomíjíme jednotky) má jednu stranu rovnou 4. Jak je dlouhá druhá strana?“

Výpočet: $\frac{12}{4} = 3 \quad \rightarrow$ druhá strana obdélníka je 3

„Obdélník o ploše 0 má jednu stranu rovnou 2. Jak je dlouhá druhá strana?“

Výpočet: $\frac{0}{2} = 0 \quad \rightarrow$ druhá strana obdélníka je 0

Ne úplně pěkný příklad, ale zcela jistě korektní.

„Obdélník o ploše 12 má jednu stranu rovnou 0. Jak je dlouhá druhá strana?“

Ze zadání je zřejmé, že úloha nemá řešení. Obdélník o ploše 12 nemůže mít jednu stranu nulovou.

$$\frac{12}{0} \rightarrow \textit{nemá smysl}$$

Elegantní matematický důkaz nemožnosti dělit nulou je možné provést sporem. Důkaz sporem je typ logického důkazu, kde se prokáže, že určitý předpoklad vede k nesmyslnému výsledku (ke sporu), čímž se prokáže, že předpoklad je nepravdivý, a tedy platí jeho negace.

Předpokládejme, že můžeme dělit nulou, takže nula se chová jako každé jiné číslo n, ke kterému existuje multiplikativní inverzní prvek

$$n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

Takže pro $n = 0$ platí

$$0 \cdot \frac{1}{0} = 1.$$

Zvolíme dvě navzájem různá čísla a, b, tj. $a \neq b$. Dále víme, že jakékoliv číslo vynásobené nulou je nula

$$a \cdot 0 = 0$$
$$b \cdot 0 = 0,$$

A tudíž

$$a \cdot 0 = b \cdot 0 .$$

Vynásobením obou stran rovnice „inverzním“ prvkem k nule, $\frac{1}{0}$

$$(a \cdot 0) \cdot \frac{1}{0} = (b \cdot 0) \cdot \frac{1}{0} .$$

Použitím asociativního zákona pro násobení můžeme změnit uzávorkování

$$a \cdot \left(0 \cdot \frac{1}{0} \right) = b \cdot \left(0 \cdot \frac{1}{0} \right) .$$

Výraz v závorce je vzhledem k výše uvedenému předpokladu roven jedné, takže

$$a \cdot 1 = b \cdot 1 ,$$

neboli

$$a = b ,$$

Což je ve sporu s tím, že a je různé od b. Vzhledem k tomu, že všechny výše prováděné operace byly platné, musí být chybný předpoklad, že existuje výraz 1/0 – tedy, že je možné dělit nulou.

Výše uvedené příklady potvrzují známou skutečnost, že nulou se dělit nesmí. Dělení nulou vede k nesmyslným důsledkům a je ho proto nutné z matematiky vyloučit.

2.2 Vyšší matematika

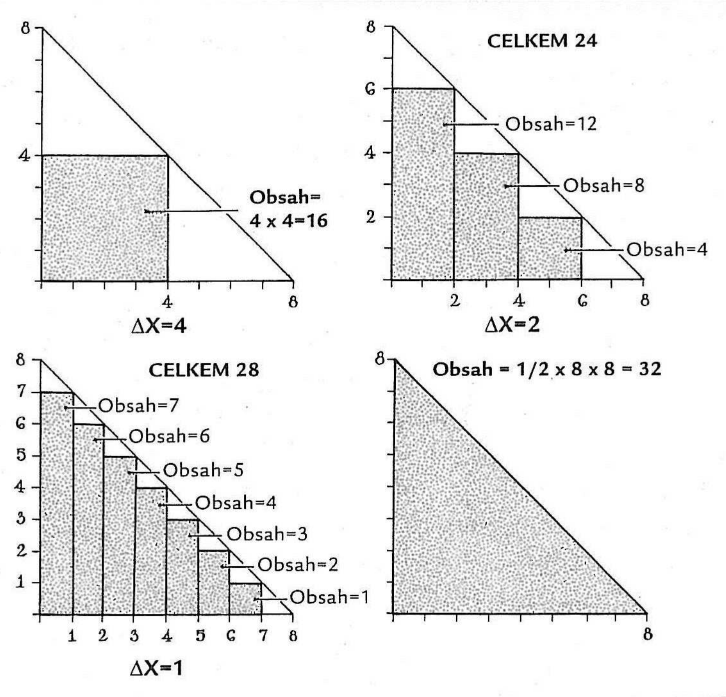
2.2.1 Matematická analýza

Nula a nekonečno je v současné době běžnou součástí té části matematiky, která se nazývá matematická analýza. Matematická analýza pracuje s takovými pojmy, jako je limita, diferenciální a integrální počet, kde jsou nula a nekonečno základními výchozími pojmy. Infinitezimální počet (diferenciální počet a integrální počet) se převážně v anglosaských zemích označuje jako calculus. Počeštěný název kalkulus se začal po roce 2000 prosazovat i v české terminologii a v tomto významu bude používán i v této práci.

Jak bylo zmíněno v kapitole o historii, nula a nekonečno se zdály pro matematiky neužitečnými prvky, které je třeba trpět, ale jejich užívání způsobuje problémy. Dělení nulou vede k nesmyslným výsledkům. Sčítání nekonečného množství nekonečně malých částí vede téměř k čemukoliv. Překvapující je, že jeden z nejmocnějších a nejdůležitějších matematických nástrojů, bez kterého by současné přírodní vědy a potažmo celá současná společnost nemohla existovat, je založen na dělení nulou a sčítání nekonečného množství nul. Kalkulus objevili nezávisle na sobě dva vědci. Angličan Isaac Newton a Francouz Gottfried Wilhelm Leibnitz.

Dva problémy, které matematici řešili v 17. století a kde naráželi na nekonečně malé veličiny, byl problém určování ploch a objemů nepravidelných těles a problém určování tečny křivky. Jedním z prvních, kteří řešili otázku objemů těles (v tomto případě vinných sudů) byl Johannes Kepler, autor tří Keplerových zákonů, kterými se řídí planety obíhající okolo Slunce. Kepler spočítal objem sudu tak, že v duchu rozsekal sud na nekonečný počet malých dílků, které potom zase složil dohromady. Galileův student Bonaventura Cavalieri určoval plochy geometrických objektů tak, že chápal každou plochu, jako plochu tvořenou nekonečným množstvím úseček a každý objem vznikal složením nekonečného množství rovin nulové výšky. Postup je zřejmý na příkladu výpočtu plochy trojúhelníku, obr. 18.

Obrázek 18: Výpočet plochy trojúhelníku



Zdroj: Seife, 2005

Plocha trojúhelníku se podle exaktního vztahu rovná polovině základny vynásobené výškou, tj plocha = ½ × 8 × 8 = 32. Cavalieri počítal plochu tak, že do trojúhelníku vpisoval malé pravoúhelníky. V prvním přiblížení čtverec o straně 4, tj. ploše 16. V druhém přiblížení byla plocha počítána jako součet tří obdélníků o základně 2, tj. plocha je 24. Další přiblížení pomocí obdélníků o základně 1 plochu počítá s ještě lepším výsledkem, plocha = 28. Dalším zmenšováním základny Δx obdélníků, získáváme čím dál lepší přiblížení ke správnému výsledku.

$$S = \sum f(x) \cdot \Delta x .$$

Matematici zavedli označení pro Δx přibližující se nule, kde znak pro sumu pro případ nekonečného součtu těchto veličin nahradili symbolem integrálu a místo Δx píší dx.

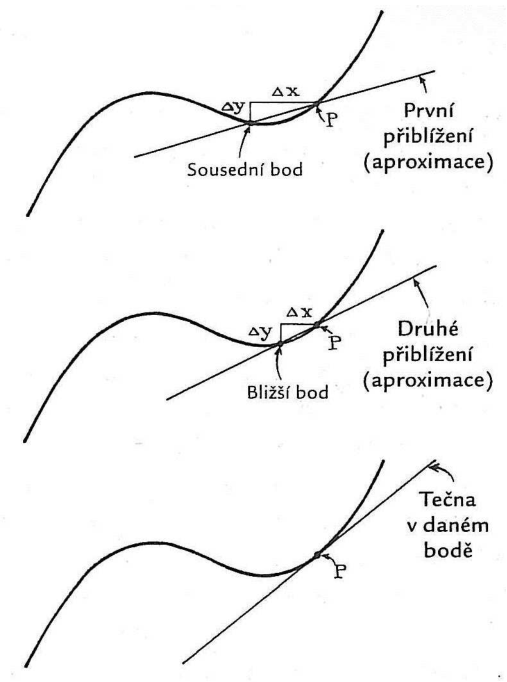
$$S = \int f(x) dx .$$

Pomocí pravidel výpočtů integrálů a přechodem na určitý integrál dosazením mezí bylo možné spočítat plochu, která byla hraničena grafem funkce $f(x)$.

Cavalieriho metoda byla těžko pochopitelná. Jak může dát sčítání nekonečného množství úseček o nulové ploše dát plochu konečnou. Přes svoji nepochopitelnost dávala metoda správné výsledky. Matematici nechali problém nekonečna a nuly filozofům a sami metodu začali používat.

K problémům s nekonečně malými částmi vede i otázka určení tečny ke křivce. Tečnou se rozumí přímka, která je tak blízká křivce, že se jí dotkne v jednom bodě. Problém je možné řešit opět pomocí nekonečně malých veličin. Při konstrukci tečny ke křivce v daném bodě P je možné najít v prvním přiblížení přímku, která nebude přesně tečnou, ale bude se jí blížit. Na křivce zvolíme blízký bod k bodu P a těmito dvěma body vedeme první přiblížení hledané tečny. Pokud se bude druhý bod přibližovat k bodu P, bude se i přímka přibližovat hledané tečně.

Obrázek 19: Hledání tečny ke křivce



Zdroj: Seife, 2005

Přímka je určená svojí směrnicí, tj. sklonem, která popisuje, o kolik se změní y-ová souřadnice (svislá vzdálenost) bodu na přímce, při změně x-ové souřadnice (vodorovné vzdálenosti). Směrnice hledané tečny na obrázku 19 je $\Delta y / \Delta x$. Pokud se budeme přibližovat k bodu P, tj. zmenšovat přírůstky Δy a Δy, dospějeme k směrnici hledané tečny. Jak je patrné vede hledání plochy a tečny k výpočtům s nulou a nekonečnem.

plocha ~ $\infty \cdot 0$,

tečna ~ $\frac{0}{0}$.

Matematici před Newtonem a Leibnitzem nedokázali s takovými výrazy pracovat, protože vedly k neurčitým výsledkům.

Newtonův přístup byl založen na metodě tzv. fluxí (diferenciálech) výrazů, které nazýval fluenty. Newtonův přístup je možné ukázat na příkladu rovnice

$$y = x^2 + x + 1.$$

Fluenty jsou v této rovnici y a x. Newton předpokládal, že se y a x mění s časem. Rychlost jejich změny, tj. diferenciály, označil $\dot{y}$ a $\dot{x}$. Newtonův trik spočíval v tom, že veličiny nechal měnit jenom velice málo. Ve velmi malém úseku času o se fluenty změní na

$$y \to y + o \cdot \dot{y}$$
$$x \to x + o \cdot \dot{x}$$

Písmeno o představuje množství času, který uplynul. V Newtonově přístupu se jedná téměř o nulu, ale ne úplně. Zkoumanou rovnici je možné po čase o zapsat

$$(y + o \cdot \dot{y}) = (x + o \cdot \dot{x})^2 + (x + o \cdot \dot{x}) + 1.$$

Po roznásobení

$$y + o \cdot \dot{y} = x^2 + 2x \cdot (o\dot{x}) + (o\dot{x})^2 + x + (o\dot{x}) + 1$$

a úpravách

$$y + o\dot{y} = \left(x^2 + x + 1\right) + \left(o\dot{x}\right) \cdot \left(2x + 1\right) + \left(o\dot{x}\right)^2,$$

protože $y = x^2 + x + 1$, dostáváme

$$o\dot{y} = \left(o\dot{x}\right) \cdot \left(2x + 1\right) + \left(o\dot{x}\right)^2.$$

Nyní přichází Newtonův „trik“, když řekl, že za předpokladu, že $\left(o\dot{x}\right)$ je velmi malé, bude výraz $\left(o\dot{x}\right)^2$ ještě menší a je možné ho zanedbat, tj. je možné psát

$$o\dot{y} = \left(o\dot{x}\right) \cdot \left(2x + 1\right).$$

Směrnice hledané tečny ke křivce dané rovnicí $y = x^2 + x + 1$ bude

$$\frac{o\dot{y}}{o\dot{x}} = 2x + 1.$$

Z matematického hlediska byla Newtonova metoda značně pochybná, ale dávala správné výsledky.

Kalkulus, který spojuje diferenciální a integrální počet, jako první zkrotil nulu i nekonečno a stal se matematickou metodou, kterou můžeme považovat za jeden z největších objevů v matematice, který vzhledem ke svému praktickému využití je považován za nejdůležitější nástroj současné fyziky. Matematika je jazyk, pomocí kterého komunikujeme s přírodou. Nikdo neví proč, ale pomocí matematiky je možné popsat chování vesmíru v nekonečných vzdálenostech, ale také chování jednotlivého atomu. Příroda k nám hovoří pomocí rovnic. Většinou se nejedná o rovnice klasické, se kterými se seznamují žáci na základní škole, ve kterých je řešením jedno nebo několik konkrétních čísel, ale o rovnice diferenciální, kde řešením je funkce. Newton pomocí svého kalkulu dokázal sestavit a hlavně řešit diferenciální rovnice popisující například pohyb planet kolem Slunce. Pokud je známa síla působící na planety je možné pomocí Newtonova kalkulu určit dráhu planet. Obráceně se znalostí drah planet byl Newton schopen určit vztah pro sílu, která na planety působí.

Jak bylo zmíněno, kalkulus pracoval s takovými výrazy, kterým se matematici vždy vyhýbali, se kterými neuměli pracovat. Jedná se o výrazy typu

$$0 \cdot \infty \quad \text{a} \quad \frac{0}{0}.$$

Přestože je objev kalkulu připisován Newtonovi, je zřejmé, že i W. G. Leibnitz vyvinul svoji, od Newtona lehce odlišnou, verzi diferenciálního a integrálního počtu. Z Leibnitzovy práce převzali např. matematici jeho způsob značení diferenciálů a derivací funkce. Leibnitzovu práci zpopularizoval Francouz Guillame Francois Antoine de l'Hôspital, který ve své knize vydané v roce 1696 „Analyse des infinimen + petits" (Analýza nekonečně malých hodnot) využil, s jeho souhlasem, i objevy dalšího významného matematika Johanna Bernoulliho. Zda objev pravidla, které ukazuje jak pracovat s výrazy typu 0/0 byl objevem l'Hôspitalovým, nebo byl převzat z objevů Bernoulliho, jak tvrdil sám Bernoulli, není zcela jasné. Pravidlo bylo nazváno po l'Hôspitalovi. Toto l'Hôspitalovo pravidlo, se kterým se seznamuje každý student matematiky na vysoké škole, ukazuje způsob výpočtu skutečné hodnoty matematické funkce, která se přibližuje hodnotě 0/0. Pravidlo říká, že hodnota zlomku tohoto typu je rovna derivaci čitatele dělené derivací jmenovatele. Například pokud je potřeba zjistit, k jaké hodnotě se přibližuje funkce

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x},$$

Pokud se x blíží nule, stačí spočítat derivaci funkce $\sin(x)$, vydělit ji derivací funkce x a spočítat hodnotu pro $x = 0$. Jelikož derivace funkce $\sin(x)$ se rovná funkci $\cos(x)$ a derivace funkce x je 1, je možné hodnotu, ke které se výše uvedená funkce blíží v bodě $x = 0$, spočítat

$$\frac{\cos(0)}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Po vhodných úpravách vstupujících výrazů lze l'Hôspitalova pravidla použít i na další výrazy obsahující nulu a nekonečno, které před l'Hôspitalem nebyly definované. Jedná se například o výrazy

$$\frac{\infty}{\infty},\ 0^0,\ 0^\infty \ \text{a}\ \infty^0.$$

Všechny tyto výrazy mohou nabývat jakékoliv hodnoty v závislosti na vstupujících funkcích, které k těmto hodnotám vedou. Po l'Hôspitalovi přestaly být výrazy 0/0 pro matematiky záhadou a nula se z role nepřítele matematiků stala předmětem hodným dalšího studia.

Matematici ale nemohli být zcela spokojeni, poněvadž zkrocení neurčitých výrazů obsahujících nulu a nekonečno bylo založeno na derivacích, jejichž definice byla založena rovněž na zpracování výrazu $0/0$, které nebylo z matematického hlediska zcela korektní. Metoda ale bezchybně fungovala a rolí matematiků bylo pouze dočištění definice derivace. Této role se zhostil Jean Le Rond d'Alembert. D'Alembert přišel jako první s myšlenkou limity a tím vyřešil matematicky korektně problémy, které způsobovaly v kalkulu nuly. To co d'Alembert učinil neformálními prostředky a co později formálně vyjádřili Francouz Augustin Cauchy, Čech Bernard Bolzano a Němec Karel Weistrass – byl zápis součtu, v našem případě řady z Achillova závodu se želvou

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots,$$

ve formě

$$\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{2^n}.$$

Tento na pohled drobný rozdíl v zápise uspokojil přísný matematický požadavek na logickou přesnost. Odstranil totiž manipulaci s nekonečně malými veličinami a nulami. Zavedl konečný částečný součet, který vznikne po sečtení konečného množství prvků. S těmito konečnými hodnotami je možno provádět libovolné matematické operace jako sčítání, násobení, umocňování, dělení a to bez problémů s nulami. Teprve po úpravách se určí limita, tj. určí se hodnota, ke které se částečné součty blíží. Z d'Alembertovy definice je zřejmé, že limitu má smysl určovat pouze u součtů, kde se dá spočítat limita částečných součtů. Například u již zmíněné řady

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\dots$$

Je zřejmé, že limitu nemá. Částečné součty skáčí mezi hodnotami 1 a 0 a nesměřují k žádnému konkrétnímu číslu. Naopak částečné součty u „Achillovy“ řady jsou postupně

1; 1,5; 1,75; 1,875; 1,9375; …

A čím dál více se přibližují k číslu 2, tedy k limitě této řady.

V matematice je možné definovat limitu i jiným způsobem. Hlavní zůstává fakt, že limity mají pevný matematický základ, díky čemu se stal kalkulus plnohodnotným matematickým nástrojem bez znaků mystyčna.

2.2.2 Mnoho nul – teorie grup

Nula známá z výuky matematiky na základní škole je definována jako takové číslo, které při připočtení k jakémukoliv jinému číslu toto číslo nezmění

$$a + 0 = a \, .$$

Dá se dokázat, že takové číslo existuje právě jedno, tj. existuje jedna nula. Dále se dají dokázat další známé vlastnosti nuly jako např.

$$a \cdot 0 = 0 \, .$$

Matematici se učili s touto nulou pracovat.

Matematika se rozvinula v samostatný vědní obor, který byl v podstatě širší než přírodní vědy, když vyžadovala pouze vnitřní bezespornost. Matematika je založena pouze na zřejmých výchozích pravdách, tzv. axiómech, ze kterých jsou pomocí logických pravidel odvozeny další matematické konstrukce. Jediným požadavkem je logická bezespornost při odvozování. Příkladem může být klasická geometrie, která byla odvozena Euklidem na základě pěti výchozích axiomů pomocí logických bezesporných postupů. Euklides odvodil z těchto axiomů bez odkazů na praktickou zkušenost kompletní geometrii. Tato, po svém objeviteli nazývaná, Euklidova geometrie je příkladem tzv. matematického modelování. Úspěchy Euklidovy geometrie zavedly styl zdůvodňování, kdy jsou pravdy vyvozeny aplikací určitých pravidel ze souboru očividně platných axiomů. V extrémních příkladech, jako například v dílech holandského filozofa Spinozy, byly dokonce i filozofické výroky prezentovány jako definice, axiómy, teorémy a důkazy podle Euklidova vzoru. Matematika se v té době skládala z aritmetiky a Euklidovy geometrie, které korespondovaly se skutečným fyzickým světem. Aritmetiku využívali obchodníci, astronomové, …. Geometrii architekti, stavitelé a geometři. Že se matematika stala oborem širším než přírodní vědy, vděčí pracem Carla Friedricha Gausse (1777-1855), Nikolaje Lobačevského (1793-1856) a Jánose Bolyaie (1802-1860), kteří nezávisle na sobě zkonstruovali novou geometrii pouhým vynecháním pátého Euklidova axiómu (axiómu o rovnoběžkách). Objev, že mohou existovat logicky bezesporné geometrie odlišné od Euklidovy, byl mezníkem. Počet různých logických systémů, které mohou být matematicky popsány, je obsáhlejší, než se očekávalo. Některé systémy mohou mít protějšek ve fyzické realitě. U některých může být praktická aplikace teprve objevena a některé zůstanou pouze předmětem zkoumání matematiků. Příkladem může být zmíněná neeuklidovská geometrie, kterou vzal za základ své fenomenální obecné teorii relativity Albert Einstein několik desítek let po jejím objevení. V dřívějších dobách byla tato teorie pouze nástrojem teoretických fyziků, sloužícím ke zkoumání vesmíru v oblastech silných gravitačních polí. V současnosti by bez této teorie nefungoval například systém GPS tak, jak jsme zvyklí třeba v automobilových navigacích.

Jedna z důležitých matematických struktur tohoto druhu je grupa. Grupa je představována množinou **X** prvků, nad kterými je definována určitá operace o. Prvky množiny **X** můžeme označit např. x, y, z, …. Dvojice (**X**, o) složená z množiny a operace nad ní se nazývá grupa, pokud operace o má tyto vlastnosti:

- Úplnost – dá se použít na každé dva prvky množiny **X**
- Uzavřenost – při použití na libovolné prvky množiny **X** bude výsledkem zase prvek z **X**
- Asociativita – pro prvky x, y, z z množiny **X** platí x o (y o z) = (x o y) o z, kde závorky označují jako obvykle pořadí operací

- Existence nulového (neutrálního) prvku – množina **X** obsahuje prvek, který při použití nezmění hodnotu druhého prvku v operaci. Tj. pokud tento prvek označíme 0 musí pro x ϵ **X** platit 0 o x = x a x o 0 = x

- Existence inverzních prvků - množina **X** obsahuje ke každému prvku x ϵ **X** prvek k němu opačný (-x), pro který platí x o (-x) = 0, resp. (-x) o x = 0, kde 0 je neutrální prvek.

Pokud k těmto vlastnostem přidáme ještě vlastnost

- Komutativita – nezáleží na pořadí prvků, v jakém prvky do operace vstupují, tj. pro prvky y, x množiny **X** platí x o y = y o x,

nazývají se tyto grupy grupami komutativními nebo také Abelovými grupami.

Pokud se za prvky množiny **X** vezmou celá čísla (...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …) a za operaci o operace sčítání, potom dvojice (N, +) bude grupou a to grupou Abelovou. Lehce je možné ověřit, že tato dvojice splňuje všechny požadavky kladené na Abelovu grupu. Nulovým (neutrálním) prvkem je naše známá nula, protože pro libovolné celé číslo n platí

$$n + 0 = n$$
$$0 + n = n$$

Pokud uvažujeme opět množinu celých čísel N, ale za operaci zvolíme operaci násobení, potom dvojice (N, $\cdot$). Požadavky úplnosti, uzavřenosti a asociativity jsou splněny, což je možné lehce ověřit na příkladech. Nulový (neutrální) prvek je v tomto případě 1, protože pro libovolné celé číslo n platí

$$n \cdot 1 = n$$
$$1 \cdot n = n$$

Problémy způsobí požadavek na existenci inverzního prvku, který je například pro číslo 5 prvek 1/5, protože

$$5 \cdot \frac{1}{5} = 1 .$$

Prvek 1/5 ale není prvkem množiny N, protože se nejedná o celé číslo. Pokud bychom místo množiny celých čísel uvažovali množinu všech racionálních čísel, potom by tato množina s operací násobení tvořily grupu.

Operace identity, která nechává prvek grupy nezměněn, je nulová operace. V prvním případě je nulovým prvkem obvyklá aritmetická nula. V druhém případě není tímto prvkem nula. Nulovou (identickou) operaci v případě násobení reprezentuje číslo 1. Nula v první grupě je zcela odlišná od nuly v druhé grupě. V jiných matematických strukturách je možné nalézt další zcela odlišné „nuly“.

Rozšíření matematiky o teorii grup vytváří potenciálně nekonečné množství nul. Je rozdíl mezi nulovým symbolem, který zavedli indičtí matematici, aby označili prázdné místo v řadě číslic a nulou či nulovou operací, která je v těchto matematických strukturách potřebná k označení, že nedochází k žádné změně. Rozdílná povaha nul, které jsou obsaženy v různých matematických strukturách, je humorně ilustrovaná v zábavném článku Franka Hararyho a Ronalda Reada „Je nulový graf nesmyslným pojmem?“ (Harary, 1973). Na obrázku 20 je ukázán graf, který má nula vrcholů a nula hran.

Obrázek 20: Nulový graf

Rozdíl mezi tradiční nulou a jinými nulovými matematickými entitami je nejvýrazněji ilustrován zavedením pojmu množiny do matematiky. Existuje významný rozdíl mezi číslem nula a pojmem množiny, která neobsahuje žádné prvky, tj. nulové či prázdné množiny. Idea nulové množiny se ukázala být pro matematiku neobyčejně významná. Krok za krokem z ní může být vytvořen celý zbytek matematiky.

2.2.3 Nulová množina a její role v matematice

Jedním z nejmocnějších nástrojů logiky a matematiky se stala idea množiny zavedená britským matematikem Gergem Boolem (1815-1864). Svou nejslavnější prací z roku 1854 „An Investigation of the Laws of Thought on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities“ (Výzkum základů myšlení, na kterých jsou založeny matematické teorie logiky a pravděpodobnosti), zkráceně obvykle uváděné jako „The Laws of Thought“ (Zákony myšlení), položil základy matematické teorie logiky a pravděpodobnosti. Pro potřeby práce s nekonečnými množinami ji významně rozvinul Georg Cantor mezi léty 1874 a 1897.

Množina je soubor objektů chápaný jako celek. Objekty množiny se nazývají prvky množiny. Množina je jednoznačně určena svými prvky (nezávisí na jejich pořadí). Předmětem zájmu bude tzv. prázdná (nulová) množina, tj. množina, která neobsahuje žádné prvky. Tato množina se značí symbolem Ø. Obecně se množiny značí velkými písmeny a její prvky písmeny malými. Je-li prvek a prvkem množiny B píšeme

$$a \in B .$$

Prvky množiny mohou být čísla, dny v týdnu, písmena atd. Množina číslic může být zapsána $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Tato množina obsahuje například podmnožinu sudých číslic $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Z každé množiny je možné vytvořit větší množinu jako množinu obsahující všechny podmnožiny původní množiny. Množiny mohou obsahovat konečný počet prvků, jak tomu bylo u výše uvedených množin, ale existují i množiny s nekonečným počtem prvků, např. množina přirozených čísel.

Boole definoval základní operace s množinami jako sjednocení množin $A \cup B$ a průnik množin $A \cap B$. Průnikem množin se rozumí množina všech prvků, které jsou společné oběma množinám. Pokud nemají množiny žádné společné prvky, jako např. množina všech sudých čísel a množina všech lichých čísel, jedná se o tzv. disjunktní množiny. Průnik disjunktních množin je prázdná množina, množina bez prvků. Tato prázdná neboli nulová množina zosobňuje pro matematiky to, co pro fyziky zosobňuje pojem vakua. Je to nejvyšší možné přiblížení matematiků k nicotě.

Jednou z nejúžasnějších schopností matematiky je možnost vytvoření celé matematiky z absolutní nicoty.

Stanovme, že číslo nula, 0, je prázdná množina, Ø, protože tato množina nemá žádné prvky.

$0 \equiv \emptyset.$

Číslo 1 je možné definovat jako množinu, která obsahuje nulu

$1 \equiv \{0\},$

tj. množinu, která obsahuje jeden prvek. Protože nula je definovaná jako prázdná množina je možné psát

$1 \equiv \{\emptyset\},$

tj. číslo 1 je množina, která obsahuje prázdnou množinu jako prvek. Dále je možné definovat číslo 2 jako množinu {0, 1}

$2 \equiv \{0, 1\} \equiv \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$

číslo 3

$3 \equiv \{0, 1, 2\} \equiv \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$

Obecně se přirozené číslo n definuje jako množina obsahující nulu a všechna přirozená čísla menší než n

$n \equiv \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n\text{-}1\}.$

Přepis pomocí prázdných množin vzhledem k typografické nepřehlednosti vynecháme. Důležité je zjištění, že je možné vytvořit všechna přirozená čísla z ničeho – z množiny bez prvků.

Velice důmyslným postupem dokázal anglický matematik John Conway vytvořit z prázdné množiny nejen celá čísla, racionální a reálná čísla, ale i další dosud nedefinovaná čísla, která nazval čísly surreálnými, jako například

$$\sqrt{\infty}.$$

Nula ukazuje v matematice svoji výjimečnost. Nula znamená „nic“, ale dá se z ní vytvořit „všechno“.

2.2.4 Nekonečno v matematice

Jak bylo zmíněno v kapitole o historii, dlouho zůstávalo nekonečno předmětem zkoumání pouze teologů a filozofů. Ještě v roce 1638 Galileo tvrdil, že termíny „rovná se“, „větší než“ a „menší než“ se nemohou vztahovat na nekonečné veličiny, protože úsečka obsahuje nekonečně mnoho bodů, takže delší úsečka musí obsahovat více než nekonečno bodů, a to je nemožné. Další paradox, který Galileo zmiňuje, se týká přirozených čísel a jejich druhých mocnin. Každému přirozenému číslu je možné jednoznačně přiřadit jeho druhou mocninu

$$\begin{gathered}
1 \leftrightarrow 1 \\
2 \leftrightarrow 4 \\
3 \leftrightarrow 9 \\
4 \leftrightarrow 16 \\
\vdots \\
n \leftrightarrow n^2
\end{gathered}$$

Druhých mocnin je tedy přesně stejně jako přirozených čísel, přestože jich je viditelně méně, protože čím dále se dostáváme na číselné ose, tím řidčeji se druhé mocniny vyskytují. Obdobně jasná je jednoduchá korespondence mezi přirozenými a kladnými sudými čísly (jako násobek dvěma).

$$
\begin{aligned}
1 &\leftrightarrow 2\\
2 &\leftrightarrow 4\\
3 &\leftrightarrow 6\\
4 &\leftrightarrow 8\\
5 &\leftrightarrow 10\\
&\vdots\\
n &\leftrightarrow 2\times n
\end{aligned}
$$

Je „zřejmé“, že přirozených čísel je stejně jako kladných sudých čísel. Stejně je prostou úvahou „zřejmé“, že přirozených čísel musí být dvakrát více. Matematici dlouho neuměli tyto problémy řešit a nejjednodušší bylo je prostě odložit.

Objasnění nekonečna muselo počkat až do 19. století, kdy geniální matematik George Cantor (1845-1918), obr. 21, vytvořil teorii, kde vnesl jasno do problémů nekonečen. Nekonečno se stalo plnohodnotnou součástí matematiky.

Obrázek 21: George Cantor – otec matematického nekonečna

George Cantor navázal na dílo českého matematika Bernarda Bolzana (1781-1848), který formuloval základní poznatky teorie množin a v posledních letech svého života se soustředil na způsob porovnávání „velikosti“ nekonečných množin.

Jak je možné porovnávat nekonečné množiny z hlediska jejich „velikosti“? Princip použitý Cantorem je velmi jednoduchý. Pro dvě konečné množiny platí, že jsou stejně velké (mají tentýž počet prvků), když ke každému prvku a množiny A lze přiřadit právě jeden prvek b množiny B tak, že všechny prvky b

z množiny B jsou přiřazeny. Pokud například chceme zjistit, zda v tanečním kurzu je stejný počet děvčat jako chlapců, není nutné počítat děvčata a chlapce, ale stačí požádat chlapce, aby se zadali. Pokud nezůstane žádný volný chlapec, resp. děvče, můžeme prohlásit, že chlapců je stejně jako děvčat. Totéž platí i pro nekonečné množiny: pokud ke každému prvku z jedné množiny lze přiřadit právě jeden prvek z druhé množiny tak, že všechny prvky z druhé množiny jsou přiřazeny, hovoříme o stejné mohutnosti obou množin. Mohutnost množiny je tak jakýmsi zobecněním pojmu velikosti pro nekonečné množiny.

Jak jsme viděli u předchozích příkladů, vede pojem mohutnosti u nekonečných množin ke zdánlivému paradoxu. Existují totiž množiny, které mají stejnou mohutnost jako jejich části, jejich podmnožiny. Jedná se například o výše uvedenou množinu všech přirozených čísel $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ a její podmnožinu, množinu všech druhých mocnin přirozených čísel $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$. Jak bylo ukázáno, ke každému číslu z první množiny je možné jednoznačně přiřadit číslo z druhé množiny a naopak.

Cantor definoval spočetné nekonečno jako to, které může být uvedeno do vzájemné jednoznačné korespondence se souborem všech přirozených čísel. Spočetné nekonečno je tedy takové nekonečno, které má stejnou mohutnost, jako množina přirozených čísel $\mathbb{N}$. Všechny spočetné nekonečné množiny mají stejnou velikost v Cantorově smyslu. Pro mohutnost množiny Cantor zavedl symbol „alef“, což je první písmeno hebrejské abecedy $\aleph$. Cantor se domníval, že spočetná nekonečna jsou ta nejmenší nekonečna, která mohou existovat a označil jejich mohutnost indexem nula. Mohutnost spočetné množiny označil tedy $\aleph_0$.

Cantor dal množině technický význam a naučil matematiky „počítat“ prvky nekonečných množin. U konečných množin je mohutnost množiny dána počtem prvků, které množina obsahuje. Množina dnů v týdnu má například mohutnost 7. U nekonečných množin řekneme, že množina je spočetně nekonečná, pokud má stejnou mohutnost jako množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.

Cantor „počítal“ další nekonečné množiny, tj. snažil se nalézt korespondenci s množinou přirozených čísel $\mathbb{N}$. Dokázal například, že množina celých čísel $\mathbb{Z}$ je rovněž spočetně nekonečná, tj. má mohutnost $\aleph_0$. Ne zcela zřejmá je korespondence mezi množinou racionálních čísel, tj. zlomků utvořených dělením jednoho celého čísla jiným takovým číslem (např. ¾ nebo ½). Cantor dokázal, že i racionálních čísel je spočetně mnoho. Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ má rovněž mohutnost $\aleph_0$. Všechna nekonečna, o nichž diskutovali matematici a filozofové v dávných dobách, byla spočetná nekonečna v Cantorově smyslu. Existují ale vůbec nějaká jiná? Kandidátem na „větší“ nekonečno byla množina reálných čísel $\mathbb{R}$ se všemi racionálními, ale i iracionálními čísly. Cantor po usilovném hledání objevil důkaz, že reálná čísla není možné žádným způsobem dát do korespondence 1:1 s přirozenými čísly – že jsou nespočetná. Nekonečno reálných čísel je „větší“ nekonečno než nekonečno celých nebo racionálních čísel. Mohutnost množiny reálných čísel se označuje $\aleph_1$ a platí

$$\aleph_1 > \aleph_0 .$$

Čísla označující mohutnosti množin se nazývají kardinální čísla. Můžeme mezi ně zařadit i naše známá přirozená čísla, která označují velikost konečných množin. Přirozená čísla se dělí někdy na čísla kardinální, které ukazují velikost, množství a čísla ordinální, které zobrazují umístění na číselné ose, ukazují pořadí. Známá přirozená kardinální čísla (např. 7, 12, atd.) matematikové rozšířili o čísla zobrazující mohutnost nekonečných množin, o čísla $\aleph_0$, $\aleph_1$ a rozšířili aritmetiku kardinálních čísel o další pravidla:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 ,$$
$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0} .$$

To, že mohutnost množiny $\mathbb{R}$ je vyjádřena výrazem $2^{\aleph_0}$ souvisí se skutečností, že 2^n udává počet všech podmnožin množiny o n prvcích. Z těchto pravidel dál plyne

$$2^{\aleph_0} \times 2^{\aleph_0} = 2^{(\aleph_0 + \aleph_0)} = 2^{\aleph_0} ,$$

neboli

$$\aleph_1 \times \aleph_1 = \aleph_1 .$$

Tyto pravidla je možné přeložit do formy: Množina, která vznikne součtem dvou spočetných nekonečných množin, je spočetně nekonečná (pravidlo s $+$). Existuje prosté zobrazení přímky na rovinu, neboli množina bodů přímky má stejnou mohutnost jako množina všech bodů roviny (pravidlo s $\times$). První pravidlo není po zkušenostech s nekonečny překvapivé. Zato druhé pravidlo může vyvolat údiv. Že každý bod roviny lze jednoznačně přiřadit bodu na přímce dokázal rovněž Cantor. Nad důkazem strávil poměrně dlouhou dobu, ale samotná myšlenka není nikterak komplikovaná. Cantorův důkaz je uveden např v (Kaplan, 2010). Rozšířením Cantorova důkazu do více dimenzí, resp. ze vztahu

$$\aleph_1 \times \aleph_1 \times \aleph_1 \times \cdots \times \aleph_1 = \aleph_1 ,$$

který plyne z $\aleph_1 \times \aleph_1 = \aleph_1$, je možné zjistit, že i bodů v trojrozměrném a i dokonce ve vícerozměrném prostoru je „stejně“ jako bodů na přímce. Cantor se dlouho domníval, že množina bodů v rovině bude reprezentovat „větší“ nekonečno než množina bodů na přímce, tj. že její mohutnost bude větší než $\aleph_1$. Místo dlouho hledaného důkazu Cantor zjistil, že jeho intuice byla chybná. Použitím vyšších dimenzí se nezískají větší nekonečna. Cantora dlouho trápila otázka, zde tedy existují „větší“ nekonečna než nekonečno odpovídající reálným číslům. Odpověď nalezl v teorii množin. Z nekonečné množiny je možné vytvořit jinou, nekonečně větší, když se vezme v úvahu množina obsahující všechny možné podmnožiny množiny původní – její tzv. potenční množinu. Je možné uvést jednoduchý příklad potenční množiny. Výchozí množinou bude množina tří objektů A={a, b, c}. Potenční množina množiny A obsahuje následující členy:

{Ø}, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}.

Dohodou se za členy potenční množiny považují i prázdná množina a množina původní. Množina B

B = {{Ø}, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}},

se nazývá potenční množina množiny A a značí se

B = P[A].

Z nekonečné množiny typu alef nula $\aleph_0$ je možné vytvořit nekonečně větší množinu, tj. množinu, kterou nelze uvést do vzájemné jednoznačné korespondence s původní množinou, jakožto její potenční množinu P[$\aleph_0$]. Další větší nekonečná množina se vytvoří jako potenční množina množiny P[$\aleph_0$]. A tak dále. Pro mohutnosti těchto množin je možné psát (použijeme pro přehlednost stejné označení pro množinu a její mohutnost)

$$
\begin{aligned}
\aleph_1 &= P[\aleph_0] \\
\aleph_2 &= P[\aleph_1] \\
&\vdots \\
\aleph_n &= P[\aleph_{n-1}]
\end{aligned}
$$

Podle Cantora existuje nekonečný počet různě mohutných nekonečen. $\aleph_0$ je menší než $\aleph_1$, které je menší než $\aleph_2$ atd. Cantor vyslovil tzv. hypotézu kontinua, že neexistuje kardinální číslo k takové, že $\aleph_0 < k < \aleph_1$, neboli neexistuje množina, jejíž mohutnost by byla větší než mohutnost množiny přirozených čísel, ale menší než mohutnost množiny reálných čísel. V roce 1963 matematik Paul Cohen Pomocí Gödelovy věty o neúplnosti dokázal, že tuto hypotézu nelze ani dokázat, ani vyvrátit. Přijetí ani odmítnutí této hypotézy nevede ke sporu. Mohou existovat nejméně dvě zcela různé teorie množin, s hypotézou kontinua nebo s její negací.

Cantorova práce položila základy celého nového odvětví matematiky: teorie množin. Matematikové mohli pomocí této teorie konstruovat nejen nová čísla, ale i čísla do té doby nepředstavitelná jako nekonečno nekonečen. Cantor otevřel celý nový vesmír čísel. Geniální německý matematik David Hilbert prohlásil: „*Nikdo nás již nevyžene z ráje, který pro nás Cantor stvořil.*“

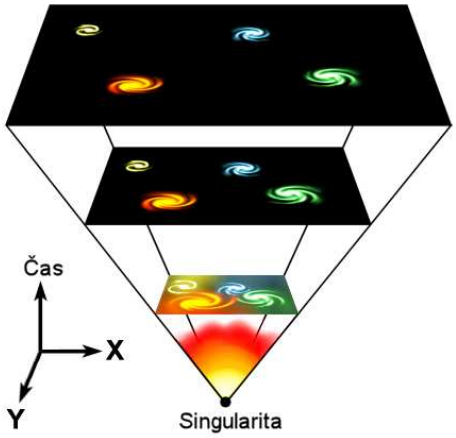
3 FYZIKA

Matematici zjistili, že nula a nekonečno jsou neoddělitelné a pro matematiku nepostradatelné veličiny. Díky pracím I. Newtona, J. G. Leibnitze a G. Cantora se nula a nekonečno staly běžnou součástí matematiky hodnou dalšího zkoumání. Naproti tomu fyzikům připadaly nula a nekonečno pro popis fyzikálního světa bezvýznamné. Dělení nulou, sčítání a porovnávání nekonečen se zdálo být součástí matematiky a nikoliv přírody. Na konci 19. století to vypadalo, že fyzika je v podstatě již ukončená věda, která nemá co nového objevovat a zkoumat. Ve fyzice 19. století byly nula a nekonečno opravdu bezvýznamné. Fyzici s nimi nepotřebovali pracovat. Roku 1894 prohlásil slavný experimentální fyzik Albert Michelson, že „většina nejdůležitějších principů fyziky byla zcela odhalena“ a citoval jiného vynikajícího vědce, britského fyzika lorda Kelvina, že zbývá už jen určit jisté konstanty na více desetinných míst. V roce 1900 Kelvin prohlásil, že se na obzoru vznášejí pouze „dva mráčky“. První z nich se týkal pohybu světla a druhý souvisel s nekonečny objevující se v teorii záření zahřátých těles. Mezi fyziky převládal názor, že se jedná jen o drobnosti, které budou brzy vyřešeny. Tyto dva mráčky ale přinesly do fyziky bouři, která způsobila nutnost přepsání fyzikálních zákonů a zcela rozvrátila dosavadní chápání přírody. Klasické chápání času, prostoru a reality, které fungovalo ve fyzikálních zákonech a odpovídalo běžným zkušenostem, se náhle zhroutilo jako domeček z karet. Do fyziky vtrhly nula a nekonečno.

První Kelvinův mráček přinesl famózní Einsteinovu speciální a obecnou teorii relativity. Einstein ukázal, že Newtonovy představy času a prostoru – základní kameny klasické fyziky – byly scestné. Einsteinova obecná teorie relativity, nová teorie gravitace, spolu s rozvojem pozorovacích technik, dala podnět k rozvoji kosmologie, vědy zabývající se otázkami vesmíru.

Jedním z mála, možná jediným, odvětví fyziky, ve kterém se vědci zaobírali nekonečnem, byla právě kosmologie, věda zabývající se vesmírem jako celkem. Kosmologie se věnuje vzniku, vývoji a dalšímu osudu vesmíru. Po pravdě řečeno kosmologie nebyla většinou fyziků považována za vědecké odvětví, ale spíše za část filozofie. Otázky vzniku vesmíru jeho konečnosti či nekonečnosti byly bez nové teorie gravitace a možností ověřit teorie pozorováním opravdu pouhým filozofováním. Zrod nové kosmologie založil americký astronom Edwin Hubble, který roku 1924 prokázal, že naše galaxie není ve vesmíru jediná. Hubble vymyslel způsob jak změřit vzdálenosti a rychlosti galaxií. Prokázal, že galaxie se od sebe vzdalují. Vesmír není statický. Statický vesmír odporoval v podstatě jak staré Newtonově, tak nové Einsteinově teorii gravitace. Einstein si byl tohoto „problému" vědom a zavedl dokonce korekční člen, tzv. kosmologickou konstantu, který by statičnost vesmíru umožňoval. Skutečnost, že se galaxie od sebe vzdalují a vesmír se rozpíná, vedla ke dvěma teoriím. Teorii stacionárního vesmíru, kterou vytvořili v roce 1948 Fred Hoyle, Herman Bondi a Thomas Gold. Podle této teorie se v rozpínajícím vesmíru vytváří nová hmota, nové galaxie, a vesmír bude tudíž vypadat ve všech dobách a místech přibližně stejně. Druhá, vytvořená a obhajovaná ruským emigrantem Georgem Gamowem, předpokládala, že vesmír vznikl v konečném čase v jednom bodě, ze kterého se pořád rozpíná. Název této teorie: „Velký třesk" (Big Bang) pochází paradoxně od „konkurenta" Freda Hoyla. Mělo se totiž původně jednat o hanlivý popis teorie, který se ale brzy ujal. Rozvoj pozorovacích technik přinesl zdrcující podporu teorii velkého třesku, která je od poloviny 60. let 20. století považována za nejlepší teorii vzniku vesmíru. Samotný vesmír vznikl tedy v bodě o nulových rozměrech. V tomto bodě panovala nekonečná hustota a nekonečné zakřivení časoprostoru. Velký třesk představuje ryzí fyzikální absolutní nekonečno. K přístupu fyziků k problému tohoto nekonečna se vrátíme ještě v závěru této kapitoly.

Obrázek 22: Velký třesk – nula a nekonečno ve fyzice



Zdroj: Wikipedie

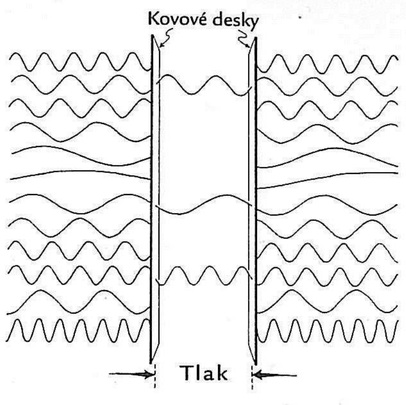
Z rovnic obecné teorie relativity se zrodil fyzikální objekt, který nedával spát teoretickým fyzikům a stal se objektem zájmu spisovatelů populární i sci-fi literatury – černá díra. Po pravdě řečeno, myšlenka existence tak masivního tělesa, že úniková rychlost na jeho povrchu přesáhne rychlost světla a to se tak stane pro vnějšího pozorovatele neviditelné, se nezrodila až díky obecné teorii relativity. Na přelomu 19. století přišli s touto myšlenkou nezávisle na sobě britský fyzik John Michell a francouzský matematik a fyzik Pierre Laplace. Vzhledem k tomu, že v té době převládala tzv. vlnová teorie světla, které není ovlivňováno gravitací, jednalo se pouze o teoretickou úvahu, kterou například v pozdějších pracích Laplace již dále nezmiňoval. Michellova-Laplaceova „černá díra“ (termín *černá díra* zavedl až v roce 1969 americký vědec John Wheeler) neobsahovala v sobě nekonečno a nulu a prošla mimo zájem teoretických fyziků. Je pozoruhodné, že černá díra byla prvním exaktním řešením Einsteinových rovnic, které fyzici nalezli. Německý fyzik a teoretický astronom Karl Schwarzchild (1873 - 1916) nalezl řešení rovnic obecné teorie relativity pro kulovou nerotující hvězdu krátce po uveřejnění této teorie. Přestože se jednalo o první řešení těchto rovnic, bylo asi jedním z posledních, které fyzici pochopili. Vede totiž k nekonečnu. Obecná teorie relativity totiž předpovídá, že pod tzv. horizontem událostí existuje singularita, místo, kde je zakřivení prostoročasu nekonečné a gravitační síly nabývají nekonečných hodnot. Podobně jak tomu bylo u nuly, fyzici dlouho nevěřili, že by takové objekty mohly ve skutečnosti ve vesmíru existovat. Černou díru považovali pouze za teoretickou zajímavost a přenechali ji autorům sci-fi románů. Astronomové ale zatím začali shromažďovat nepřímá pozorování, které předpovídaly existenci černých děr. Prvním vážným, dnes již prokázaným, kandidátem na černou díru, se stala v roce 1971 hvězda v binárním systému v souhvězdí Labutě. V roce 2004 bylo objeveno velké množství černých děr, což vedlo ke vzniku nové teorie o rozšíření černých děr ve vesmíru. Pro přesnost je nutné zmínit, že existují alternativní modely černých děr, které mají vlastnosti černých děr, ale neobsahují singularitu. Tyto modely nenašly u teoretických fyziků odezvu, protože jsou podstatně komplikovanější a nepřinášejí nové pozorovatelné skutečnosti, nevyhovují logice tzv. Occamovy břitvy. Je možné tedy říci, že singularita v centru černých děr je jedním z prvních fyzikálních nekonečen, které bylo potvrzeno pozorováním.

Druhý Kelvinův mráček přinesl kvantovou teorii. Zcela novou převratnou teorii mechaniky na atomové a subatomové úrovni. Teorii, která pracuje s nulou, s nekonečně malými bodovými částicemi. V počátku této teorie stálo nekonečno. Ne skutečné fyzikální nekonečno, ale nekonečno, které se objevilo při výpočtech vyzařované energie absolutně černým tělesem. Klasická fyzika používala do té doby pro výpočet záření absolutně černého tělesa tzv. Rayleighův-Jeansův zákon, podle kterého je energie, kterou těleso vyzařuje na jednotlivých vlnových délkách, tím vyšší, čím je vlnová délka kratší. Na vlnových délkách blížících se nule by těleso vyzařovalo energii blížící se nekonečnu a to bez ohledu na jeho teplotu (tzv. ultrafialová katastrofa). Nulová vlnová délka odpovídá nekonečné energii. Nula a nekonečno zničily zatím konzistentní systém fyzikálních zákonů. Vyřešení tohoto problému se stalo hlavním úkolem fyziky. Toto byl druhý mráček, o kterém se zmiňoval lord Kelvin.

Problém byl vyřešen roku 1900 německým fyzikem Maxem Planckem, který vyslovil hypotézu, že energie se nevyskytuje jako spojitá veličina, ale pouze v jakýchsi nedělitelných balíčcích, které nazval kvanta. Každé kvantum obsahovalo přesně určené množství energie, tím větší, čím vyšší byla frekvence vln. Nad určitou hranicí by tedy emise jediného kvanta vyžadovala více energie, než má objekt celkově k dispozici. Záření na vysokých frekvencích je tedy omezené a tak je zažehnána ultrafialová katastrofa. Odstraněním nekonečna, nekonečné energie, ale vedlo k bizardnímu vniknutí nuly do teorie. Kvantová mechanika předpokládá, že celý vesmír, včetně vakua, je naplněn nekonečným množstvím energie, tzv. energií nulových kmitů.

Roku 1926 formuloval svůj slavný princip neurčitosti jiný německý fyzik, Werner Heisenberg. Tento princip je důsledkem Planckova kvantového přístupu. Heisenberg ukázal, že součin hmotnosti částice, nepřesnosti v určení polohy a nepřesnosti v určení její rychlosti, nemůže být nikdy menší než určitá mezní hodnota, dnes známá jako Planckova konstanta. Právě objev tohoto principu vedl k přeformulování klasické mechaniky v novou teorii – kvantovou mechaniku. Princip neurčitosti dal do jisté míry za pravdu Aristotelovi, když zničil představu vakua, jako fyzikální nuly, jako naprosté úplné nicoty. Kvantová mechanika ukázala, že ve vesmíru neexistuje absolutní prázdno. Vakuum přímo ze své definice neobsahuje nic – žádné částice, žádné světlo. Neobsahuje žádnou energii, což odporuje principu neurčitosti, který v jiné formě vlastně říká, že nikdy není možné vědět, kolik se v nějakém objemu vakua skrývá energie. V malém objemu vakua musí energie kolísat, musí vznikat a zanikat tzv. virtuální částice. Odstraněním nekonečna z výpočtu záření černého tělesa vzniklo jiné nekonečno, nekonečná energie „prázdného“ prostoru. Nekonečno v nule. Že se nejedná o pouhé teoretizování, prokázal holandský fyzik Hendrick Casimir, který předpověděl v roce 1948 kvantový jev, tzv. Casimirův efekt (Casimirovu sílu). Dvě rovnoběžné nenabité desky se navzájem přitahují malou silou, která je podstatně větší než by odpovídalo gravitační přitažlivosti. Tato síla je způsobena tlakem virtuálních částic, kterých vzniká na vnějších stranách desek podstatně více než mezi deskami. Mezi deskami mohou totiž vzniknout jen takové částice, jejichž vlnové délky odpovídají rozměrům štěrbiny (obrázek 23). Roku 1997 se podařilo fyzikovi Stevenu Lamoreauxovi tuto velmi nepatrnou sílu změřit. Velikost síly odpovídala Casimirově teoretické předpovědi.

Obrázek 23: Casimirův jev – „nekonečno v nule“



Zdroj: Seife, 2005

Pokud fyzikové zkoumají silná gravitační pole, zkoumají nekonečno ve vesmíru, používají obecnou teorii relativity. Pokud zkoumají mikrosvět, nulu, používají kvantovou teorii. Problém nastává, pokud je potřeba zkoumat velmi malé objekty se silným gravitačním polem (černou díru, vesmír krátce po velkém třesku), kde je nutné použít obě teorie, použít zároveň nekonečno i nulu. To fyzika v současné době neumí. Přestože na takzvané teorii všeho, která by sjednocovala všechny částečné teorie, pracují stovky nejchytřejších mozků, takovouto teorii se dosud nepodařilo objevit. Všechny pokusy sjednotit obecnou teorii relativity a kvantovou mechaniku vedou k rovnicím, jejichž výsledkem je – nekonečno. To je vážný problém, jelikož takový výsledek je ve své podstatě nesmyslný. Experimentátoři nikdy nenaměří nekonečné hodnoty. To co způsobuje neřešitelné problémy při sjednocení obou teorií, je nula. Výše uvedené nulové kmity (fluktuace vakua) způsobí, že prostor v měřítkách Planckovy délky (10^{-35} metru) se stává značně bouřlivým. Fluktuace nabývají extrémních hodnot. S takovýmto „pokrouceným“ prostorem neumí pracovat rovnice obecné teorie relativity, která předpokládá hladký spojitý prostoročas bez hran a hrotů. Kvantoví fyzici vytvořili metodu, jak se nekonečen způsobených nulou zbavit – metodu renormalizace. V současnosti je nejmodernější teorií, jejíž snahou je nulu a tím i nekonečna z fyziky sjednocení obecné teorie relativity a kvantové mechaniky odstranit, strunová teorie. Tato teorie předpokládá, že elementární částice nejsou 0 – rozměrné body, ale 1 – rozměrné struny. Jednotlivé částice se liší pouze způsobem kmitání této struny. Strunová teorie odstraňuje nekonečna tím, že odstraní nulu.

Aby se tato teorie vyhnula nejednoznačnostem, musí být prostoročas 10-ti rozměrný. To znamená, že náš známý prostor obsahuje mimo viditelných třech rozměrů šest dalších rozměrů, které jsou svinuty do takové velikosti, že se v přírodě neprojeví. Strunová teorie staví na tzv. supersymetrii, teorii, která předpokládá, že každá částice hmoty má tzv. superpartnera v odpovídající silové částici. Supersymetrie pracuje se svými pravidly algebry, která jsou v příkrém rozporu se zažitými pravidly. Jestliže například a a b jsou „superčísla“, potom platí

$$a \times b = -b \times a\,.$$

Platí tedy

$$a \times a = -a \times a\,.$$

Pro normální čísla by plynulo

$$a \times a = 0$$
$$a = 0.$$

Celý číselný systém by se zhroutil. Pro superčísla se systém nezhroutí. Platí totiž nezvyklé

$$a \times a = 0 \quad \text{i když} \quad a \neq 0\,.$$

Fyzikální nulu se fyzici pokouší odstranit tak, že zavádějí nový matematický aparát, kde se s matematickou nulou zachází zcela jinak, než jsme byli zvyklí.

Je docela dobře možné, že fyzici používají k boji s nulou špatné zbraně. Superstrunová teorie nemusí být hledanou teorií všeho. Superpartneři ke známým částicím nebyli dosud objeveni. Způsobů, kterým lze svinout šest „neviditelných“ rozměrů jsou miliardy a každý představuje svoji verzi superstrunové teorie. Dá se tedy zvolit takový způsob navinutí, který bude odpovídat téměř jakýmkoliv počátečním podmínkám. Trochu tak připomíná Ptolemaiův model pohybu planet, kde se při nesouladu teorie s pozorováním zavedly opravné epicykly. Ve strunové teorii se při nesouladu prostě zvolí jiný způsob navinutí, jiná forma tzv. Calabiho

– Yauovy variety. Strunová teorie nedává dosud žádné pozorovatelné předpovědi, což někteří významní fyzici považují za velký problém.

Praktičtí a částicoví fyzici ve fyzikální nekonečno nevěří. Nekonečno, které se objeví ve výpočtech, předznamenává nějakou chybu, kterou je potřeba „lepší“ teorií odstranit. V přírodě se nekonečno neobjevuje. Složitější pohled na nekonečno mají kosmologové. Mohou ve vesmíru existovat místa, kde se měřitelné fyzikální veličiny, jako je hustota či teplota, stanou nekonečnými? Může se nějaká věc konečných rozměrů stlačit k nulové velikosti a nekonečné hustotě v konečném čase? Odpovědi na otázky týkající se reality fyzikálních nekonečen se různí. Otázky nekonečnosti vesmíru jak v prostoru, tak v čase vedou k různým paradoxům, kterým jsou věnována jak fyzikální sympózia, tak i vědeckofantastické romány. Jedná se například o princip nekonečného kopírování, viz (Barrow, 2007). Boj fyziků s nulou a nekonečnem není u konce. Pokud se někomu podaří vnést jasno do otázek fyzikálního nekonečna a nuly, vytvořit tzv. teorii všeho, může si chystat na poličce čestné místo pro Nobelovu cenu za fyziku.

PRAKTICKÁ ČÁST

Cílem praktické části je analyzovat přístup autorů učebnic matematiky pro základní školy k číslu nula. Druhým cílem je ověřit metodou průzkumu znalosti žáků základních škol týkajících se čísla nula. Vzhledem k cílům praktické části nebyly definovány žádné hypotézy.

4 ANALÝZA – NULA V UČEBNICÍCH MATEMATIKY

4.1 Cíl

Cílem je zjistit, jak je pojem nula, číslo nula, začleněn do učebnic matematiky základních škol. Jaký rozsah a jak podrobně se věnují učebnice číslu nula, práci s nulou a vysvětlení ne zcela triviálních matematických operací s nulou.

4.2 Přípravné práce

Přípravné práce spočívaly převážně ve shromažďování studijního materiálu, tj. učebnic. Nejnovější (současné) učebnice matematiky byly zapůjčeny z místních základních škol. Starší učebnice byly zapůjčeny pomocí knihovní výpůjční služby. Zkoumání nejstarších učebnic bylo prováděno v Muzeu J. A. Komenského v Praze, které má ve svých depozitářích jednu z nejrozsáhlejších sbírek učebnic v republice. Vedle učebnic byly zapůjčeny i metodické materiály věnované výuce matematiky. Zkoumáno bylo 105 učebnic včetně metodických návodů. Seznam zkoumaných učebnic je uveden v příloze A.

4.3 Analýza

Sledování výskytu nuly bylo rozlišeno podle role nuly, tj. historie, definice nuly (sudá, nekladná a nezáporná), základní operace s nulou, dělení nulou, mocniny s nulou. Dále bylo zkoumáno historické hledisko, tj. zda se liší přístup k nule ve starších učebnicích a v učebnicích současných.

Historie

Historie, týkající se přímo čísla nula nebyla ve zkoumaných učebnicích nalezena. Nula byla zmíněna v historických vsuvkách týkajících se číselných soustav jako např. v (Kneidl, 1910, 1. M)[2], (Bílek, 1952, 1. G), (Čech, 1949, 1. G), (Trajer, 1950, 5. tř.)

Definice (vlastnosti) nuly

Pouze v jedné učebnici byla zjištěna zmínka o sudosti nuly a to v přehledu učiva základní školy (Talián, 1999).

Nezápornost a nekladnost nuly byla zmíněna ve dvou učebnicích. Jedná se např. o (Fischer, 1868, 3. G, 4. G) – „*Hodnotu kladného čísla pokládati dlužno za větší nežli nicku a hodnotu čísla záporného za menší nežli nicku*“.

V jedné učebnici byl zvýrazněn význam číslice 0 při zápisu neúplných (zaokrouhlených) čísel. (Sommer, 1904, 3. G, 4. G) – „*… nully na konci čísla 4,5 a 4,50 neznačí totéž, neboť číslo 4,50 určuje hodnotu správně až do setin, kdežto číslo 4,5 toliko do desetin. 4,50 je přesnější než 4,5. Vynecháním nully na posledním místě čísla neúplného by se tedy přesnost zmenšila*“

V našich učebnicích není nula považována za přirozené číslo např. (Odvárko, 1998, 6. tř).

[2] V knižních citacích v této kapitole je u učebnic uvedena třída, pro kterou byly určeny (s případnou poznámkou M - měšťanské školy, G – gymnázia)

Základní operace s nulou

Sčítání a odčítání s nulou se objevuje u starších učebnic až ve vyšších třídách. Nula se například vůbec neobjevila v 25 zkoumaných učebnicích, které se věnovali příkladům na sčítání a násobení. Jednalo se například o početnice pro obecné a měšťanské školy z přelomu 19. a 20. století Josefa Úlehly a Františka rytíře Močnika. Celkem podrobně se naopak v tomto období věnuje nule (Horčička, 1907, 4. M). Současné učebnice definují nulu jako výsledek odčítání stejných čísel a uvádí příklady na sčítání s nulou již v první třídě. Nulu jako číslo vzniklé odčítáním dvou stejných čísel definuje například Sommer až v učebnicích pro první ročníky nižšího gymnázia. (Sommer, 1902, 1. G, 2. G, str. 16) – *„Rozdíl dvou stejných čísel jest nulla. Tím nabyla nicka nového významu a to význam čísla (početního výsledku), kdežto dosud značila toliko nedostatek jednotek některého řádu.“*

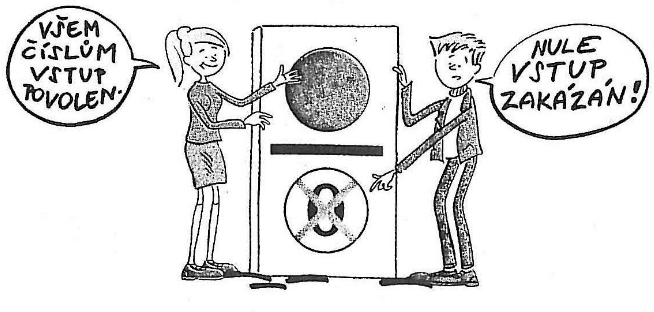
Dělení nulou

Dělení nulou je operace, ve které žáci nejčastěji chybují. Jak přistupují k dělení nulou učebnice? Pokud se učebnice zmiňují o dělení nulou, často se jedná o definici ve smyslu „Nulou se nedělí“, bez podrobnějšího zdůvodnění. Jednalo se např. o učebnice (Eisler, 1996, 6. – 9. tř.), (Talián, 1999). Některé učebnice současné doby jsou poměrně pěkně graficky upravené a otázka dělení nulou je pro lepší zapamatování graficky doplněna (Odvárko – Kadleček, 1999, 7. ročník) *„Zlomkem, který má čitatele 0, nemůžeme dělit“*, obr. 24, nebo učebnice stejných

Obrázek 24: Dělení nulou

Autorů (Odvárko – Kadleček, 2002, 9. ročník), obr. 25.

Obrázek 25: Zákaz dělení nulou



Pouze u 3 zkoumaných učebnic bylo vysvětleno na příkladu, proč nemá dělení nulou smysl. Vždy se jednalo o vysvětlení dělení jako obrácené operace k násobení. Např. (Bydžovský, 1913, 4. G, 5. G) – „*Nulla násobená číslem jakýmkoli dá zase 0, je-li tedy dáno číslo např. 10, není možno najít číslo, kterým 0 násobena by dala 10. Z toho plyne, že dělení nullou nemá smyslu. Dělitel je nutně číslo od 0 různé*“, či (Bílek, 1949, 3. G, str. 42) – „*Nulou dělit nelze. Např. 6 : 0 nemá význam, neboť podíl by měl být číslo, které násobeno nulou dává 6. Takové číslo však není, neboť každé číslo násobeno nulou dává nulu. Rovněž 0 : 0 nemá význam, neboť by to mělo znamenat takové číslo, které násobeno nulou dává nulu, tuto vlastnost však mají všecka čísla. Proto nelze znakem 0 : 0 žádné číslo vystihnout.*“

Dělení nulou při řešení rovnic, tj. upozornění, že obě strany rovnice se smí dělit jakýmkoliv výrazem, číslem, různým od nuly, je u novějších učebnic ošetřeno vždy. U starších učebnic tomu tak většinou není. Tato poznámka chybí např. u (Horčička, 1907), (Kneidl, 1910, 1. M), (Schubert, 1910), (Horčička, 1913), (Bílek, 1952, 1. G), (Bílek, 1953, 2. G).

Mocniny s nulou

Operace umocňování se objevuje ve vyšších ročnících. Přístup autorů učebnic se liší. Ve většině učebnic není výraz a^0 zmiňován. Je tomu tak i v nejstarší zkoumané knize (Wydra, 1805). V této poměrně rozsáhlé práci (např. kapitola o logaritmech) je definováno $a^{-m} = 1/a^m$ bez zmínky o mocniteli nula. Ve třech učebnicích je zdůvodněno (dělením stejných mocnin) proč je výraz a^0 roven 1. Jednalo se např. o (Eisler, 1996, 6. – 9. tř.). Ne zcela šťastné je vysvětlení výrazu a^0 v (Odvárko, 1999, 8. tř) – *„Matematici se dohodli, že pro každé číslo a různé od nuly, je $a^0 = 1$“*

Historický vývoj

Z analýzy učebnic a metodických materiálů je zřejmý posun k přístupu ve výuce týkající se čísla nula. Jak již bylo zmíněno výše, ve starších učebnicích, tj. v učebnicích až do poloviny dvacátého století, je nule jako číslu a operací s nulou věnován prostor až na druhém stupni základních škol. Na prvním stupni se nula objevuje pouze v pozičním smyslu. Téměř žádné početnice neobsahují příklady, kde by děti počítaly s nulou. Například v poměrně rozsáhlém metodickém návodu na výuku počtů (Domin, 1908) není nule věnována téměř žádná pozornost. Známý autor učebnic matematiky druhé poloviny 19. století, Dr. František rytíř Močnik, nezmiňuje nulu ani v početnici určené žákům druhého stupně (Močnik, 1879, 6. – 8. tř.). Nulu nezmiňuje Močnik ani ve své metodice vyučování počtům ve škole obecné (Močnik, 1876). Změna v přístupu k číslu nula se začala objevovat v učebnicích až po druhé světové válce. Např. (Trajer, 1949, 3. tř.) – *„Násobíme-li nulu, je výsledkem násobení nula“*. Metodické návody z tohoto období se věnují nule obšírněji. Pčelko (1954, str. 48) v rozsáhlé stati věnované nule např. uvádí:

„Žáci počáteční školy se seznámí nejdříve s nulou jako se znakem, který označuje chybějící jednotky v tom nebo onom řádu. Takové chápání nuly se přenáší i na ty případy, v nichž nula vystupuje jako číslo: zde si vykládají nulu jako „nic“. Ve skutečnosti je nula číslo“.

„…tento stav je komplikován i tím, že se děti setkávají s nulou obyčejně při počítání příkladu s vícemístnými čísly. Zatím by bylo pro děti jednodušší a pochopitelnější, kdyby se výkony s nulou probraly a vyložily nejdřív odděleně, na zvláštních příkladech, a potom se teprve zavedly do výkonů s vícemístnými čísly“.

Poměrně rozsáhle se věnuje nule i Hruša (1968, str. 79), např.

„Na pomezí mezi numerací v první desítce a numerací v oboru do dvaceti stojí poučení o čísle 0 (nula). Vedle jednociferných přirozených čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, která znázorňují rozličný počet prvků, nejméně však jeden prvek (číslo 1), máme číslo, které nevyjadřuje žádný prvek. Mluvíme o nulovém počtu prvků. Jde tu o prázdnou množinu, jejíž kardinální i ordinální číslo se nazývá nula … proto je účelné zavést číslo nula v souvislosti s odčítáním. Počítání s číslem nula a užívání nuly v různých početních výkonech bude vyznačeno na příslušných místech“.

V těchto metodikách se autoři nevěnují dělení nulou.

Od šedesátých let 20. století se početní výkony s nulou běžně objevují v učebnicích pro nejnižší ročníky základních škol. Sčítání s nulou a nula jako číslo se objevuje např. (Kadeřávek, 1962, 2. tř.), (Rosecká, 1999, 1. tř.), (Čížková, 2008, 1. tř.), násobení nulou v (Kobele, 1978, 2. tř.) a všech novějších učebnicích pro druhé ročníky. Dokonce v Matematice pro 2. ročník ZŠ, kolektiv, vydané v roce 1994 se na str. 30 objevuje (bez podrobnějšího vysvětlení): *„Pamatuj si! Nulou se dělit nedá. Dělení nulou nemá smysl“.*

4.4 Dílčí závěry

Nule je v učebnicích matematiky pro základní školy věnováno poměrně málo místa. Do poloviny minulého století nebývali žáci s nulou jako číslem téměř seznamováni. Nula vystupovala pouze ve své poziční roli, tj. jako označení neexistence chybějícího řádu v čísle. V současné době se žáci s nulou jako číslem seznamují již v první třídě. Většinou jsou pravidla pro počítání s nulou uváděna bez dalšího vysvětlení, na základě kterého by žák operaci správně pochopil. Jedná se zvláště o dělení nulou, kdy je v učebnicích většinou pěkně graficky znázorněno, že nulou se dělit nedá, ale důvody, přestože nejsou složité na výklad, bývají opomíjeny. Obdobně je tomu ve vyšších ročnících s operací umocňování na nultou.

5 PRŮZKUM

5.1 Cíl

Cílem průzkumu je zjistit míru znalostí žáků základních škol týkajících se čísla nula. A to znalostí týkajících se přímo čísla nula, kde je zjišťováno, zda žáci považují nulu za číslo (číslici), zda správně zařazují nulu mezi sudá čísla, zda je nula kladné nebo záporné číslo. Dále jsou ověřovány znalosti týkající se základních matematických operací s číslem nula. Příklady byly zaměřeny na násobení, dělení a umocňování. Druhotným cílem průzkumu je ověření těchto znalostí i u učitelů základních škol.

5.2 Použité metody, techniky a postupy

Pro dosažení stanovených cílů byla zvolena kvantitativní metoda. Data byla získána metodou písemného testu.

Testování bylo naplánováno na konec roku 2011. V měsíci říjnu bylo započato s přípravami, které předcházely vlastnímu testování. Byly připraveny tři verze písemných testů. Zvlášť byly připraveny testy pro první stupeň, druhý stupeň a testy pro učitele. Byly zajištěny souhlasy ředitelů/ředitelek základních škol s provedením průzkumu. Následovaly rozhovory s učitelkami a učiteli matematiky, při kterých jim byl objasněn záměr a cíl testování.

Vlastní šetření proběhlo v prosinci 2011 na sedmi základních školách.

Po ukončení testování byla získaná data analyzována. Shromážděná data byla zpracována do tabulek a grafů. Tyto práce proběhly v měsíci lednu r. 2012.

5.3 Charakteristika zkoumaného vzorku

Zkoumaný vzorek byl tvořen 462 žáky základních škol, z toho 240 žáky prvního stupně (4. a 5. třída) a 222 žáky druhého stupně (8. a 9. třída) viz tabulka č. 1.

Tabulka 1: Základní charakteristika zkoumaného vzorku

	1. stupeň	2. stupeň	celkem
škola A	82	95	177
škola B	35	41	76
škola C	41	39	80
škola D	37	29	66
škola E	27	18	45
škola F	8	-	8
škola G	10	-	10
celkem	240	222	**462**

Průzkumné šetření proběhlo na sedmi základních školách. Školy se nacházely ve čtyřech krajích, ve městech o velikosti od 5 tisíc do 20 tisíc obyvatel. Dvě školy byly školy malotřídní.

5.4 Analýza dat

První otázka testů (viz příloha B) se ptala na to, zda žáci považují nulu za číslici. Shrnutí odpovědí rozdělených podle škol a stupňů je prezentováno v tabulce č. 2.

Tabulka 2: Odpovědi na otázku: „Je nula číslice?“

	1. stupeň		2. stupeň		% správných odpovědí		
	ANO	NE	ANO	NE	1. stupeň	2. stupeň	celkem
škola A	47	35	55	36	57,3	60,4	59,0
škola B	27	8	22	19	77,1	53,7	64,5
škola C	29	12	16	22	70,7	42,1	57,0
škola D	26	11	12	16	70,3	42,9	58,5
škola E	23	4	9	9	85,2	50,0	71,1
škola F	5	3	-	-	62,5	-	62,5
škola G	3	7	-	-	30,0	-	30,0
Celkem	160	80	114	102	66,7	52,8	**60,1**

Z tabulky je patrné, že značná část žáků, na druhém stupni téměř polovina, nepovažuje nulu za číslici.

Odpovědi na druhou otázku, zda je nula číslo, jsou shrnuty v tabulce č. 3.

Tabulka 3: Odpovědi na otázku: „Je nula číslo?“

	1. stupeň		2. stupeň		% správných odpovědí		
	ANO	NE	ANO	NE	1. stupeň	2. stupeň	celkem
škola A	76	6	76	15	92,7	83,5	87,9
škola B	17	18	33	8	48,6	80,5	65,8
škola C	38	3	31	7	92,7	81,6	87,3
škola D	28	9	27	1	75,7	96,4	84,6
škola E	14	13	17	1	51,9	94,4	68,9
škola F	5	3	-	-	62,5	-	62,5
škola G	10	0	-	-	100	-	100
celkem	188	52	184	32	78,3	85,2	**81,6**

Zde většina žáků odpověděla správně, tj. že nula je číslo. Výjimku tvoří žáci prvního stupně školy B a E, kde jich polovina nepovažuje nulu za číslo.

Odpovědi na otázku, jak chápou žáci paritu nuly, jsou zobrazeny v tabulkách č. 4 a 5.

Tabulka 4: Odpovědi na otázku: „Je nula sudé číslo?“

	1. stupeň		2. stupeň		% správných odpovědí		
	ANO	NE	ANO	NE	1. stupeň	2. stupeň	celkem
škola A	60	16	28	52	78,9	35,0	56,4
škola B	22	3	6	27	88,0	22,2	48,3
škola C	31	9	15	16	77,5	48,4	64,8
škola D	25	8	5	23	75,8	17,9	49,2
škola E	21	6	10	7	77,8	58,8	70,5
škola F	5	0	-	-	100	-	100
škola G	7	3	-	-	70,0	-	70,0
Celkem	171	45	64	125	79,2	33,9	**58,0**

Tabulka 5: Odpovědi na otázku: „Je nula liché číslo?“

	1. stupeň		2. stupeň		% správných odpovědí		
	ANO	NE	ANO	NE	1. stupeň	2. stupeň	celkem
škola A	21	55	9	71	72,4	88,7	80,1
škola B	4	21	4	29	84,0	87,9	86,2
škola C	8	30	8	24	78,9	75,0	77,1
škola D	12	21	2	25	63,6	92,6	76,7
škola E	2	12	4	13	85,7	76,5	80,6
škola F	4	1	-	-	80,0	-	80,0
škola G	6	4	-	-	60,0	-	60,0
celkem	57	144	27	162	71,6	85,7	**78,5**

Zde, pokud žák v předchozí otázce odpověděl, že nulu nepovažuje za číslo, nebylo jeho nezakroužkování nuly v otázkách týkajících se parity, považováno za zápornou odpověď. V otázce sudosti nuly se objevil jediný výraznější rozdíl v celém testu mezi počty správných odpovědí žáků 1. stupně a žáků 2. stupně. Tento rozdíl byl v průměru o 45% překvapivě v neprospěch žáků 2. stupně. Rozdíl se projevil ve všech školách a činil až 65%. Z tabulky je patrné, že dvě třetiny žáků 2. stupně nepovažuje nulu za sudé číslo. U otázky, zda je nula liché číslo, je procento správných odpovědí podstatně větší. I zde ale téměř 30% žáků prvního stupně chybně zařadilo nulu mezi lichá čísla. Pro „kontrolu“ byly vyhodnoceny i odpovědi týkající se parity ostatních čísel v testu. Odpovědi u ostatních čísel byly správné v 85% u žáků 1. stupně a 89% u žáků 2. stupně.

Vzhledem k tomu, že záporná čísla nejsou předmětem výuky na 1. stupni základní školy, byla otázka zařazení nuly mezi kladná nebo záporná čísla zahrnuta pouze do testu pro druhý stupeň. Odpovědi na tuto otázku jsou shrnuty v tabulce č. 6. V posledním sloupci této tabulky je zobrazeno procento správných odpovědí, tj. nula není ani kladné ani záporné číslo.

Tabulka 6: Odpovědi na otázku: „Je nula kladné, záporné číslo?“

	nula – kladné číslo		nula – záporné číslo		% správných odpovědí
	ANO	NE	ANO	NE	NE - NE
škola A	29	66	44	51	42,1
škola B	17	24	16	25	43,9
škola C	16	23	24	15	35,9
škola D	9	20	17	12	41,4
škola E	13	5	17	1	5,6
celkem	84	138	118	104	**38,3**

Zde drtivá většina chybných odpovědí, kdy žáci zařadili nulu mezi záporná čísla, byla způsobena „chytákem“ a to číslem -0, které žáci označili za číslo záporné. Procento správných odpovědí (38 %) není zvlášť vysoké.

Podle očekávání nečinilo žákům problém násobení nulou. U násobení žáci počítali tři příklady. V tabulce č. 7 jsou uvedena procenta žáků, kteří vyřešili tři, dva, jeden nebo nevyřešili žádný příklad na násobení nulou správně.

Tabulka 7: Správně vyřešené příklady (v %) na násobení nulou

	1. stupeň				2. stupeň			
	3	2	1	žádný	3	2	1	žádný
škola A	78,0	11,0	4,9	6,1	89,5	8,4	2,1	0
škola B	68,6	8,6	11,4	11,4	78,0	7,3	4,9	9,8
škola C	85,4	7,3	7,3	0	76,9	15,4	2,6	5,1
škola D	97,3	0	2,7	0	96,6	3,4	0	0
škola E	74,1	22,2	3,7	0	66,7	16,7	5,6	11,1
škola F	75,0	12,5	12,5	0	-	-	-	-
škola G	100	0	0	0	-	-	-	-
celkem	**81,3**	**9,2**	**5,8**	**3,7**	**84,3**	**9,4**	**2,7**	**3,6**

Značně nízká úspěšnost, necelých 70 %, u této poměrně lehké otázky u žáků prvního stupně školy B, jde v korelaci s úspěšností v otázce dělení nulou (viz tabulky č. 10 a 11). Někteří žáci totiž přenášeli pravidla o dělení nulou i na násobení a chybné odpovědi byly ve smyslu, že násobit nulou nelze.

Příklady na dělení byly rozděleny do čtyř kategorií. V prvním případě byl dělenec i dělitel různý od nuly, v druhé kategorii byl dělenec nulový a dělitel různý od nuly, ve třetí kategorii byl nenulový dělenec a dělitel byl nula a v poslední kategorii byl dělenec i dělitel roven nule. Stejně jako u násobení byla každá kategorie zastoupena třemi příklady. Tabulky č. 8 až 11 ukazují procenta žáků, kteří vyřešili tři, dva, jeden nebo nevyřešili žádný příklad na dělení správně.

Tabulka 8: Správně vyřešené příklady (v %) na dělení a/b (a≠0, b≠0)

	1. stupeň				2. stupeň			
	3	2	1	žádný	3	2	1	žádný
škola A	72,0	20,7	4,9	2,4	62,1	24,2	11,6	2,1
škola B	85,7	8,6	2,9	2,9	75,6	22,0	2,4	0
škola C	85,4	12,2	0	2,4	69,2	15,4	12,8	2,6
škola D	73,0	21,6	0	5,4	79,4	17,2	3,4	0
škola E	51,9	33,3	11,1	3,7	77,8	16,7	5,6	0
škola F	87,5	12,5	0	0	-	-	-	-
škola G	90	10	0	0	-	-	-	-
celkem	**75,5**	**18,3**	**3,3**	**2,9**	**69,3**	**20,7**	**8,6**	**1,4**

Tabulka 9: Správně vyřešené příklady (v %) na dělení a/b (a=0, b≠0)

	1. stupeň				2. stupeň			
	3	2	1	žádný	3	2	1	žádný
škola A	48,8	6,1	4,9	40,2	35,8	20,0	27,4	16,8
škola B	57,1	17,1	5,7	20,0	41,5	26,8	19,5	12,2
škola C	65,9	19,5	0	14,6	41,0	23,1	28,2	7,7
škola D	81,1	8,1	5,4	5,4	86,2	6,9	0	6,9
škola E	55,6	22,2	7,4	14,8	66,7	16,7	11,1	5,6
škola F	75,0	12,5	12,5	0	-	-	-	-
škola G	70,0	20,0	0	10,0	-	-	-	-
celkem	**60,4**	**12,9**	**4,6**	**22,1**	**46,9**	**19,8**	**21,2**	**12,1**

Tabulka 10: Správně vyřešené příklady (v %) na dělení a/b (a≠0, b=0)

	1. stupeň				2. stupeň			
	3	2	1	žádný	3	2	1	žádný
škola A	29,3	6,1	2,4	62,2	17,9	10,5	6,3	65,3
škola B	82,9	2,9	5,7	8,6	17,1	14,6	12,2	56,1
škola C	0	0	0	100	5,1	2,6	15,4	76,9
škola D	0	0	0	100	13,8	0	3,4	82,8
škola E	0	0	0	100	27,8	5,6	16,7	50,0
škola F	0	0	0	100	-	-	-	-
škola G	0	0	0	100	-	-	-	-
celkem	**22,1**	**2,5**	**1,7**	**73,7**	**15,8**	**8,1**	**9,4**	**66,7**

Tabulka 11: Správně vyřešené příklady (v %) na dělení a/b (a=0, b=0)

	1. stupeň				2. stupeň			
	3	2	1	žádný	3	2	1	žádný
škola A	32,9	6,1	0	61,0	16,8	3,2	6,3	73,7
škola B	60,0	2,9	8,6	28,6	19,5	9,8	0	70,7
škola C	0	0	0	100	5,1	0	5,1	89,7
škola D	0	0	0	100	6,9	3,4	0	89,7
škola E	0	0	0	100	11,1	11,1	5,6	72,2
škola F	0	0	0	100	-	-	-	-
škola G	0	0	0	100	-	-	-	-
celkem	**20,0**	**2,5**	**1,3**	**76,2**	**13,5**	**4,5**	**4,1**	**77,9**

První typ příkladů, tj. příklady neobsahující nulu, byl zvolen pro kontrolu a pro možnost porovnání s příklady obsahující nulu ve jmenovateli. Úspěšnost v řešení tohoto typu příkladu byla podle očekávání nejvyšší. Trochu je zarážející až třicetiprocentní chybovost u těchto poměrně jednoduchých příkladů u žáků druhého stupně. Ne zcela přesvědčivě dopadlo řešení příkladů s nulou v čitateli a jmenovatelem různým od nuly, kdy u žáků druhého stupně vyřešila všechny tři příklady správně necelá polovina z nich. Ukázalo se, že v otázce dělení nulou má naprostá většina žáků, bez ohledu na věk, značné nejasnosti. Výjimku tvoří žáci prvního stupně školy B, jejichž úspěšnost značně převýšila ostatní.

Tabulka č. 12 ukazuje odpovědi na slovní úlohu, kde bylo úkolem odhalit chybné vysvětlení dělení nulou (správná odpověď – NE).

Tabulka 12: Odpovědi na slovní úlohu týkající se dělení nulou

	1. stupeň		2. stupeň		% správných odpovědí		
	ANO	NE	ANO	NE	1. stupeň	2. stupeň	celkem
škola A	34	48	29	66	58,5	69,5	64,4
škola B	5	30	11	30	85,7	73,2	78,9
škola C	13	28	10	29	68,3	74,4	71,2
škola D	6	31	10	19	83,8	65,5	75,8
škola E	9	16	5	13	64,0	72,2	67,4
škola F	6	2	-	-	25,0	-	25,0
škola G	5	5	-	-	50,0	-	50,0
celkem	78	160	65	157	67,2	70,1	**68,9**

Zde byla dána možnost žákům napsat svůj postoj k dělení nulou. Některé odpovědi jsou uvedeny v příloze D. Zde se projevily problémy s dělením nulou, kdy slovní popis byl často v rozporu s žákovým řešením příkladu. Nejčastější rozpor spočíval v tom, že žák napsal, že slovní příklad je správně, tj. 6 děleno nulou je šest, a v písemném popisu dělení nulou psal, že cokoliv děleno nulou je nula apod. Zde je nutné zmínit, že slovní popis žáků otázky dělení nulou vedl ke zjištění, že žáci někdy nepovažují nulu za číslo, ale za „nic“ způsobující problém, když několikrát psali, že dělit nulou nejde, protože výsledek je vždy nula.

Poslední tabulka je věnována příkladům s mocninami.

Tabulka 13: Správně vyřešené příklady (v %) na umocňování

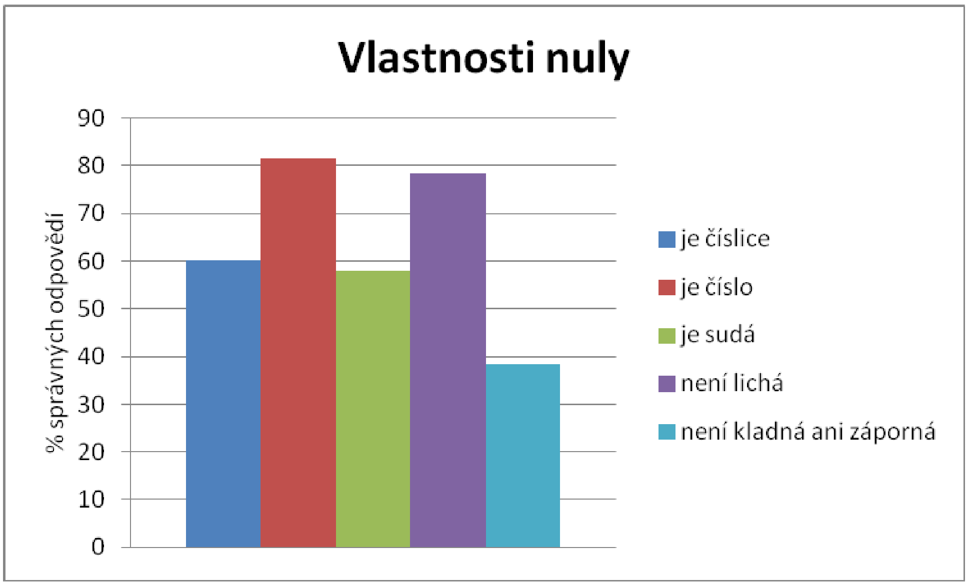
	2^3	0^3	3^0	0^0
škola A	84,2	94,7	16,8	11,6
škola B	78,0	90,2	4,9	0
škola C	82,1	89,7	71,8	53,8
škola D	51,7	93,1	0	0
škola E	72,2	83,3	11,1	22,2
celkem	**77,5**	**91,9**	**21,6**	**16,2**

Příklady se objevily pouze u žáků druhého stupně. Podle očekávání nepůsobilo vedle klasické mocniny (bez nuly) ani umocňování nuly na třetí. Zde úspěšnost žáků byla dokonce větší než u mocniny dvě na třetí. Ukázalo se, že žáci nerozumí mocnině s nulovým mocnitelem. Výjimku v tomto ohledu tvořili žáci školy C. Příklad nula na nultou byl zařazen na doplnění. Zde se nepředpokládala větší znalost žáků, protože výsledek nelze lehce odvodit (viz teoretická část) a je dán spíše definicí.

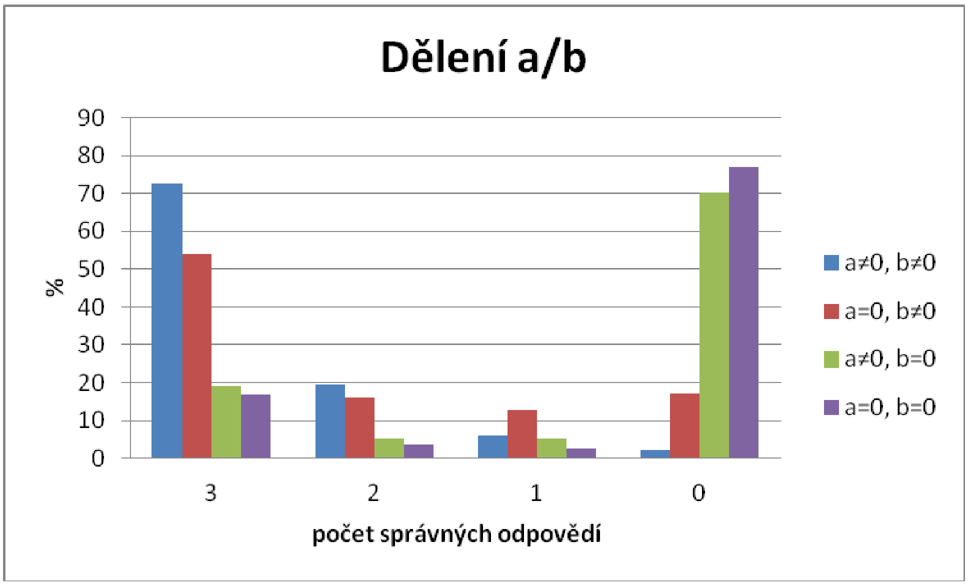
Ze všech 462 žáků pouze jeden žák, a to žák prvního stupně školy A, odpověděl na všechny testovací otázky bez chyb (test přiložen v příloze C). Z tohoto pohledu nebylo považováno za chybu u žáků druhého stupně „nevyřešení“ příkladu 0^0.

Výsledky testů jednotlivých příkladů bez ohledu na školu a stupeň jsou shrnuty podle kategorií v grafech 1 až 3.

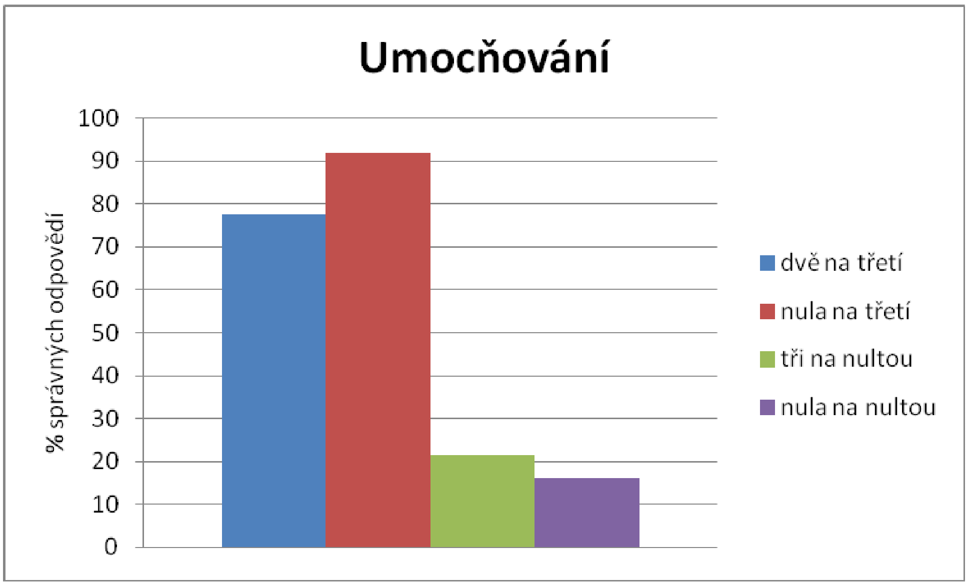
Graf 1: Správné odpovědi v definicích nuly



Graf 2: Celková úspěšnost při řešení příkladů na dělení



Graf 3: Správně vyřešené příklady na umocňování



Jako doplnění testů žáků byly zpracovány testy pro učitele, které byly rozdány společně s testy pro žáky. Z 20 učitelů bylo pět učitelů matematiky. Procenta správných odpovědí u jednotlivých příkladů jsou uvedeny v tabulce č. 14.

Tabulka 14: Výsledky testů učitelů ZŠ týkajících se nuly

	všichni učitelé	učitelé matematiky
nula číslice	100	100
nula číslo	85	80
je sudá	50	80
není lichá	100	100
není kladná ani záporná	75	100
0/4	100	100
15/0	50	80
0/0	35	60
3^0	60	80
0^3	80	80
0^0	25	40
4!	40	80
0!	20	40
0/∞	75	60
∞ + ∞	85	80
∞ - ∞	25	60
∞/0	60	100

Vzhledem k malému rozsahu vzorku (cílem práce nebylo zkoumat znalosti učitelů) není možné vznášet konkrétnější závěry. Přesto je možné říci, že práce s nulou dělá problém i učitelům základních škol, a to i některým učitelům matematiky. Celkem překvapivá je vysoká chybovost v otázce sudosti čísla nula. U dělení nulou byla úspěšnost menší než 50%. Značné problémy se objevily i v otázce odčítání nekonečen.

Na přibližně dvojnásobném vzorku jsou podrobněji anylyzovány znalosti učitelů týkající se dělení nulou např. v (Crespo, 2006), (Wheeler, 1983).

5.5 Dílčí závěry

Na základě vyhodnocení testů je možné tvrdit, že žáci základních škol mají problémy s nulou. Více než 40% žáků například nepovažuje nulu za číslici. Že je nula sudé číslo správně odpovědělo jen málo přes polovinu testovaných žáků. Naopak žáci bez problémů zvládají násobení nulou a umocňování s nulou jako mocněncem. Zde se úspěšnost v prvém příkladě blížila 90% a ve druhém případě překročila 90%, což byl výsledek dokonce lepší, než při umocňování nenulového čísla (v tomto případě dvojky). Největší problémy mají žáci s dělením nulou a s nulou jako mocnitelem. V obou případech odpověděli chybně čtyři žáci z pěti. Ze slovního popisu otázky dělení nulou (viz příloha D) je zřejmé, že řada žáků si spojuje nulu s pojmem „nic nedělat“ nebo „nemá smysl“. Na menším vzorku učitelů bylo zjištěno, že problémy s dělením nulou má i řada učitelů základních škol a to i učitelů vyučujících matematiku. Opět je zajímavé, že polovina učitelů nepovažuje nulu za sudé číslo. Příklad 0/0 správně vyřešila pouze třetina učitelů.

ZÁVĚR

Tato práce je věnována dvěma základním matematickým konstantám, nule a nekonečnu. Pochopení významu nuly trvalo matematikům stovky let. Nula, natož nekonečno, nebyla v praktických výpočtech potřeba. Pojem prázdnoty, který byl s nulou spojován, budil u filozofů hrůzu. Aristotelova autorita a hlavně převzetí jeho učení církví nadlouho zavřely nule dveře do Evropy. Teprve tlak obchodníků, kteří komplikovaně počítali v nepozičních číselných soustavách, vedl k zavedení arabsko – indické desítkové soustavy i s převzetím číslic včetně nuly. Poziční nula, označení neexistujícího řádu v čísle, zaujala pevné místo v matematice. S nulou jako číslem, jako výsledkem či předmětem matematických operací, neuměli matematici dlouho pracovat. Zlom přinesly teprve průlomové práce I. Newtona a J. G. Leibnitze. Na infinitezimálním počtu (diferenciálním a integrálním počtu či kalkulu), který z těchto prací vzešel, stojí matematické základy většiny přírodních věd. Bez přehánění je možné prohlásit, že bez objevů Newtona a Leibnitze, tj. bez zvládnutí počítání s nulou a nekonečnem, by nemohla existovat současná moderní civilizace.

Specifické vlastnosti nuly způsobují problémy v řešení jednoduchých matematických operací, které jsou při práci s nenulovými čísly triviální. Jedná se například o faktoriál, umocňování a zvlášť „komplikovanou“ operaci – dělení nulou. Všem těmto operacím se práce podrobně věnuje ve své teoretické části a může tak sloužit jako pomůcka pro učitele základních škol při vysvětlování operací s číslem nula.

Jedním z cílů práce byla analýza pojmů nula a nekonečna v učebnicích matematiky od předminulého století dodnes. Za zkoumaný vzorek byly vybrány učebnice pro základní školy. Bohužel je nutné zmínit, že nule bylo věnováno v těchto učebnicích poměrně málo prostoru a analýza nemohla být z tohoto důvodu příliš rozsáhlá. Žáci se s nulou jako číslem seznamují již v prvním ročníku základní školy. Operace s nulou jsou jim většinou podávány ve tvaru vzorců a pouček, bez hlubšího vysvětlení. Zvlášť znatelné to je v současnosti, kdy se většinou pracuje s pracovními sešity, sbírkami příkladů, a vysvětlení stojí plně na bedrech učitele. Z tohoto pohledu není možná příliš překvapivé zjištění vyplývající z testování žáků zaměřené na práci s nulou. Bylo zjištěno, že většina žáků má v otázce nuly jako čísla značné problémy. Zvláště viditelně se to objevilo v operacích umocňování na nultou a dělení nulou. Speciálně operace dělení nulou je citlivá na správné pochopení významu čísla nula. Bohužel se ukázalo, že v otázce nuly nemají zcela jasno ani učitelé, nevyjímaje učitele matematiky. Je nutné podotknout, že u učitelů se nejednalo o reprezentativní vzorek. Hlubší analýza by vyžadovala testování na větším vzorku s případnými ústními rozhovory, což může být námět na téma případného dalšího průzkumu a práce.

Práce může být podnětem k rozšíření prostoru věnovanému nule ve výuce matematiky na základních školách a v přípravě učitelů základních škol. Zároveň může sloužit i jako odrazový můstek či pomůcka v této výuce.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

BARROW, J., D. *Kniha o nekonečnu.* 1. vyd. Praha: Paseka, 2007.
ISBN 978-80-7185-822-5

BARROW, J., D. *Teorie ničeho.* 1. vyd. Praha: Mladá Fronta, 2005.
ISBN 80-204-1156-9

CRESPO, Sandra, NICOL, Cynthia. *Challenging Preservice Teachers‘ Mathematical Understanding: The Case of Division by Zero.* School Science and Mathematics, No2, 2006

FROBISHER, Len. *Primary School Children's Knowledge of Odd and Even Numbers,* London: Casell 1999

GRAHAM, R., KNUTH, D., PATASHNIK, O., Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1988

HARARY, F., READ, R., *Proc. Graphs and Combinatorics Conference,* George Washington University, New York, Springer, 1973

KAPLAN, Robert. *The Nothing That is, A Natural History of Zero,* Oxford, 1999, ISBN 13: 978-0-19-514237-2

KAPLAN, Robert, KAPLANOVÁ Ellen. *Umění nekonečna,* Praha: Triton, 2010, ISBN 978-80-7387-245-8

SEIFE, Charles. *Nula. Životopis jedné nebezpečné myšlenky,* Dokořán a Argo, Praha, 2005, ISBN80-7363-048-6

STEWART, Mark Alan *30 Days to the GMAT CAT,* Stamford 2001.
ISBN 0-7689-0635-0

TSAMIR, Pessia and SHEFFER Ruth. *Concrete and Formal Arguments: The Case of Division by Zero,* Mathematics Education Research Journal, Vol. 12, No.2, 2000

WHEELER, M., FEGHALI, I. *Much Ado about Nothing: Preservice Elementary School Teachers‘ Concept of Zero,* Journal for Research in Mathematics Education, Vol 14, 1983

Elektronické zdroje

SU, FRANCIS E., et al. *Zero to the Zero Power*, Math Fun Facts.
Dostupné na www: http://www.math.htmc.edu/funfacts

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK A GRAFŮ

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam grafů

SEZNAM PŘÍLOH

PŘÍLOHY

Příloha A – Seznam zkoumaných učebnic

ANON. *Elementa arithmeticae singularis et universalis ad usum studiosae juventutis in classibbus humanitatis.* Vindobonae, 1824

ANON. *Cvičná kniha k vyučování v počtech pro žáky třetí třídy městských škol v císařství Rakouském.* Praha, 1861

BÍLEK, J. a kol. *Aritmetika pro první třídu středních škol*. Praha, 1952

BÍLEK, J. a kol. *Aritmetika pro druhou třídu středních škol*. Praha, 1953

BÍLEK, J. a kol. *Aritmetika pro třetí třídu středních škol*. Praha, 1949

BÍLEK, J. a kol. *Aritmetika pro čtvrtou třídu středních škol*. Praha, 1949

BLAŽKOVÁ, Růžena a kol. *Matematika pro 3. ročník ZŠ.* Pardubice: ALTER, 1995

BUZEK, Kamil, KRUTA, Josef *Početnice pro měšťanské školy chlapecké II.* Praha, 1913

BYDŽOVSKÝ, B. *Aritmetika pro IV. a V. třídu gymnasií a reálných gymnasií.* Praha, 1913

ČECH, Eduard *Aritmetika pro I. třídu středních škol*. Praha, 1949

ČECH, Eduard *Aritmetika pro II. třídu středních škol*. Praha, 1949

ČÍŽKOVÁ, Miroslava *Matematika pro 1. ročník základní školy, 1. díl.* 1. vyd. Praha: SPN, 2008

ČÍŽKOVÁ, Miroslava *Matematika pro 1. ročník základní školy, 2. díl.* 1. vyd. Praha: SPN, 2008

ČÍŽKOVÁ, Miroslava *Matematika pro 2. ročník základní školy, 2. díl.* 1. vyd. Praha: SPN, 2010

ČÍŽKOVÁ, Miroslava *Matematika pro 2. ročník základní školy, 1. díl.* 1. vyd. Praha: SPN, 2010

DISMAN, Miroslav *Reformní snahy v početním vyučování.* Praha, 1934

DOMIN, Karel *Stručná methodika počtů*. Praha, 1908

EISLER, Jaroslav *Matematika od šestky do devítky*. 2.vyd. Havlíčkův Brod: Fragment, 1996

FISCHER, František Xaver *Arithmetika pro třetí a čtvrtou třídu nižšího gymnázia*. Praha, 1868

FISCHER, František Xaver *Arithmetika pro nižší třídy středních škol, 2. díl*. Praha, 1873

HAVLÍK, Miroslav, PIDRNOČI, Šimon, PEPŘ, Karel *Početnice pro čtvrtý ročník základní devítileté školy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1962

HAVLÍK, Miroslav, PIDRNOČI, Šimon, PEPŘ, Karel *Početnice pro pátý ročník*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1963

HORČIČKA, J., NEŠPOR, J. *Početnice pro měšťanské školy chlapecké II*. Praha, 1907

HORČIČKA, J., NEŠPOR, J. *Početnice pro měšťanské školy chlapecké III*. Praha, 1913

HORČIČKA, J., NEŠPOR, J. *Početnice pro měšťanské školy chlapecké i dívčí IV*. Praha, 1907

HRUŠA, Karel a kol. *Metodika počtů pro pedagogické fakulty*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1968

JON, Karel, MAXOVÁ, Antonie *Početnice pro pražské školy měšťanské*. Praha, 1921

JOZÍFEK, Vítězslav, BALADA, František, HORÁK, Stanislav, KOUTSKÝ, Karel *Algebra pro osmý postupný ročník*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1955

KABELE, Jiří a kol. *Matematika pro 2. ročník základní školy, Pracovní sešit*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1978

KADEŘÁBEK, Stanislav, ŽILINKOVÁ, Jůlia *Početnice pro druhý ročník*. c

KNEIDL, František *Početnice pro první třídu měšťanských škol dívčích*. Praha, 1910

KNEIDL, František *Početnice pro druhou třídu měšťanských škol dívčích*. Praha, 1915

KNEIDL, František *Početnice pro třetí třídu měšťanských škol dívčích.* Praha, 1915

KNÍŽE, Gustav a kol. *Metodický průvodce k početnici pro první postupný ročník.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1955

KNÍŽE, Gustav a kol. *Početnice pro první ročník, pokusná učebnice 1. část.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1957

KNÍŽE, Gustav a kol. *Početnice pro první ročník.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1962

kolektiv autorů *Mladý počtář, Početnice pro 2. postupný ročník obecných škol.* Praha: Státní nakladatelství, 1948

kolektiv autorů *Mladý počtář, Početnice pro 3. postupný ročník obecných škol.* Praha: Státní nakladatelství, 1946

kolektiv autorů *Mladý počtář, Početnice pro 4. postupný ročník obecných škol.* Praha: Státní nakladatelství, 1948

kolektiv autorů *Mladý počtář, Početnice pro 5. postupný ročník obecných škol.* Praha: Státní nakladatelství, 1946

kolektiv autorů *Matematika.* Praha: ORFEUS, 1992

kolektiv autorů *Matematika pro 1. ročník ZŠ.* Pardubice: ALTER, 1993

kolektiv autorů *Matematika pro 2. ročník ZŠ.* Pardubice: ALTER, 1994

KOZÁK, Jan, ROČEK, Jan *Druhá početnice pro školy obecné, hlavně ménětřídní pro 2, 3. popřípadě 4. školní rok, obor čísel 1-100.* Praha 1899

KOZÁK, Jan, ROČEK, Jan *Stručný výklad první početnice pro školy obecné ménětřídní.* Praha, 1899

KOZÁK, Jan, ROČEK, Jan *Početnice pro 4. školní rok vícetřídních škol obecných.* Praha 1932

KUBÁLEK, Josef *První početnice.* Praha 1926

KUBÍNOVÁ, Marie *Klíč k matematice aneb přijdu na to sám!* 1. vyd. Praha: Albatros, 2005

KUNZ, G. *Teoreticko praktická kniha pro výuku a učení (psáno v němčině).* Praha, 1816

LUKŠOVÁ, Hana, TOMICOVÁ, Jelena *Matematika.* 1. vyd. Praha: Fortuna, 1999

MARHAN, Michael, NAGEL, Jan *Početnice pro školy obecné.* Praha, Vídeň, 1898

MATOLÍN, Augustýn *Početnice pro druhou třídu obecných škol pětitřídních až osmitřídních.* Praha, 1914

MATOLÍN, Augustýn *Početnice pro třetí třídu obecných škol pětitřídních až osmitřídních.* Praha, 1912

MATOLÍN, Augustýn *Početnice pro pátou třídu obecných škol pětitřídních až osmitřídních.* Praha, 1914

MATOLÍN, Augustýn *Početnice pro horní stupeň obecných škol (čtvrtá početnice pro ménětřídní školy obecné).* Praha: Státní nakladatelství, 1926

MATOLÍN, Augustýn, VLASÁK, Emanuel *Početnice pro 4. postupný ročník obecných škol pětitřídních až osmitřídních.* Praha: Státní nakladatelství, 1935

MATOLÍN, Augustýn *Početnice pro první třídu obecných škol pětitřídních až osmitřídních.* Praha: Státní nakladatelství, 1930

MICHL, Josef Justin *Pravidla k počjtánj z hlavy.* Praha, 1836

MOČNIK, František rytíř *Vyučování počtům ve škole obecné, návod pro učitele k početnicím pro obecné školy.* Praha, 1876

MOČNIK, František rytíř *Pátá početnice pro šesti-, sedmi- a osmi třídní obecné školy (úkoly početní pro poslední ročníky).* Praha, 1879

MOČNIK, František rytíř *Čtvrtá početnice pro školy obecné.* Praha, 1895

MOČNIK, František rytíř *Pátá početnice pro školy obecné šesti- až osmi třídní.* Praha, 1897

MOLNÁR, Josef, MIKULENKOVÁ, Hana *Matematika 3. ročník, 1. díl.* Olomouc: PRODOS, 2009

MOLNÁR, Josef, MIKULENKOVÁ, Hana *Matematika 3. ročník, 2. díl.* Olomouc: PRODOS, 2009

MOLNÁR, Josef, MIKULENKOVÁ, Hana *Matematika 3. ročník, 3. díl.* Olomouc: PRODOS, 2009

MOLNÁR, Josef, MIKULENKOVÁ, Hana *Matematika pro 4. ročník, 1. díl.* Olomouc: PRODOS, 2008

MOLNÁR, Josef, MIKULENKOVÁ, Hana *Matematika pro 4. ročník, 2. díl.* Olomouc: PRODOS, 2008

MOLNÁR, Josef, MIKULENKOVÁ, Hana *Matematika pro 4. ročník, 3. díl.* Olomouc: PRODOS, 2008

MOLNÁR, Josef, MIKULENKOVÁ, Hana *Matematika 5. ročník, 1. díl.* Olomouc: PRODOS, 2008

MOLNÁR, Josef, MIKULENKOVÁ, Hana *Matematika 5. ročník, 2. díl.* Olomouc: PRODOS, 2008

MOLNÁR, Josef, MIKULENKOVÁ, Hana *Matematika 5. ročník, 3. díl.* Olomouc: PRODOS, 2009

ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří *Matematika pro 6. ročník základní školy, 1. díl.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998

ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří *Matematika pro 6. ročník základní školy, 2. díl.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998

ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří *Matematika pro 6. ročník základní školy, 3. díl.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1997

ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří *Matematika pro 7. ročník základní školy, 1. díl.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999

ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří *Matematika pro 7. ročník základní školy, 2. díl.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999

ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří *Matematika pro 7. ročník základní školy, 3. díl.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999

ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří *Matematika pro 8. ročník základní školy, 1. díl.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999

ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří *Matematika pro 8. ročník základní školy, 3. díl.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2000

ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří *Matematika pro 9. ročník základní školy, 1. díl.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2002

ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří *Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2001

ODVÁRKO, Oldřich, KADLEČEK, Jiří *Matematika pro 9. ročník základní školy, 3. díl.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2001

PČELKO, A. S. *O vyučování aritmetice v počáteční škole, Metodická stať.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1954

PETŘÍK, František A. *Podobné navedení jak vyučovati počtům v prvé třídě škol obecných.* Praha, 1889

POTUČKOVÁ, Jana *Matematika pro 2. ročník základní školy 1, 2, 3 díl.* Brno: Studio 1+1, 1999

ROSECKÁ, Zdena a kol. *Matematika, Učebnice pro 1. ročník.* Brno: Nová škola, 1999

SCHUBERT, Eduard *Metodika počítání pro vyšší třídy školy obecné a pro školy měšťanské.* Velké Meziříčí, 1910

SOMMER, Jan *Aritmetika pro III. a IV. třídu škol gymnasijních.* Praha, 1904

SOMMER, Jan *Aritmetika pro I. a II. třídu škol gymnasijních.* Praha, 1902

TICHÝ, Jan *Počítání v první třídě národních škol.* Praha, 1865

TICHÝ, Jan *Počítání v druhé třídě obecných škol.* Praha, 1866

TRAJER, J. a kol. *Početnice pro 2. postupný ročník národních škol.* Praha: Státní nakladatelství, 1949

TRAJER, J. a kol. *Početnice pro 3. postupný ročník národních škol.* Praha: Státní nakladatelství, 1949

TRAJER, J. a kol. *Početnice pro 4. postupný ročník národních škol.* Praha: Státní nakladatelství, 1949

TRAJER, J. a kol. *Početnice pro 5. postupný ročník národních škol.* Praha: Státní nakladatelství, 1950

TVRDEK, Václav *Průvodce k Mladému počtáři I.* Praha: Státní nakladatelství, 1935

TVRDEK, Václav a kol. *Početnice pro 1. postupný ročník národních škol.* Praha: Státní nakladatelství, 1949

ÚLEHLA, Josef *Početnice pro měšťanské školy dívčí (stupeň první a druhý).* Praha, 1909

ÚLEHLA, Josef *Početnice pro měšťanské školy chlapecké (stupeň první a druhý).* Praha, 1909

ÚLEHLA, Josef *Početnice pro měšťanské školy dívčí (stupeň třetí).* Praha, 1909

ÚLEHLA, Josef *Početnice pro měšťanské školy chlapecké (stupeň třetí).* Praha, 1909

VLK, Josef *Prvopočátečné vyučování počtům, část druhá, Praktické pojednání o číslech desítkových.* Praha, 1874

VLK, Josef *Prvopočátečné vyučování počtům, část první, Praktické pojednání o číslech 1-9.* Praha, 1873

WYDRA, Stanislav *Počátkové aritmetiky.* Praha, 1805

ZELINA, Ladislav, LEČKO, Imrich, BROŽ, Josef *Početnice pro třetí ročník.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1967

ZINDL, Jiří *Úvod teoreticko praktický k vyučování a počítání z hlavy.* Praha, 1835

Příloha B – Vzory testů

(1. stupeň)

Vypočítej:

$(16-4):4=$	, $15:0=$	, $(6-6):(2-1)=$
$7:(2-2)=$	, $\left(0\times(2\times3)\right):0=$	, $7:7=$
$0:(0\times3)=$	, $(0\times4):(5-1)=$	, $0:5=$
$(4\times3):0=$	, $0:0=$	, $(5\times3):3=$
$9\times0=$	, $0\times0=$	, $0\times16=$

Zakroužkuj správnou odpověď:

Je nula číslice? ANO NE

Je nula číslo? ANO NE

Zakroužkuj sudá čísla:	2	5	0	7	8	12	10
Zakroužkuj lichá čísla:	8	4	7	11	0	6	20

Jirka učí Hanku dělit nulou. „Když dělíme šestku trojkou, znamená to, že rozdělíme např. šest jablek třem dětem. Každé dítě bude mít dvě jablka. Šest děleno třemi jsou tedy dvě. Pokud dělíme šestku nulou, neprovádíme žádné rozdělování a zůstane nám všech šest jablek. Šest děleno nulou je tedy šest.“

Má Jirka pravdu? ANO NE

(můžeš napsat, co bys Hance o dělení nulou řekl/řekla Ty)

(2. stupeň)

Vypočítej:

$(16-4):4=$, $\frac{15}{0}=$, $\frac{6-6}{2-1}=$

$\frac{7}{2-2}=$, $\frac{0\times(2\times3)}{0}=$, $\frac{7}{7}=$

$\frac{3\times0}{0\times3}=$, $\frac{0\times4}{5-1}=$, $0:5=$

$(4\times3):0=$, $\frac{0}{0}=$, $\frac{5\times3}{3}=$

$9\times0=$, $0\times0=$, $0\times16=$

$2^3=$, $3^0=$, $0^3=$, $0^0=$

Zakroužkuj správnou odpověď:

Je nula číslice?	ANO	NE
Je nula číslo?	ANO	NE

Zakroužkuj sudá čísla:	2	5	0	7	8	12	10
Zakroužkuj lichá čísla:	8	4	7	11	0	6	20
Zakroužkuj kladná čísla:	2	-5	0	7	8	-0	-10
Zakroužkuj záporná čísla:	-0	7	11	0	-6	20	-45

Jirka učí Hanku dělit nulou. „Když dělíme šestku trojkou, znamená to, že rozdělíme např. šest jablek třem dětem. Každé dítě bude mít dvě jablka. Šest děleno třemi jsou tedy dvě. Pokud dělíme šestku nulou, neprovádíme žádné rozdělování a zůstane nám všech šest jablek. Šest děleno nulou je tedy šest.“

Má Jirka pravdu? ANO NE

(můžeš napsat, co bys kamarádovi/kamarádce o dělení nulou řekl/řekla Ty)

(učitel)

Vypočítejte:

$\frac{0}{4} =$, $\frac{15}{0} =$, $\frac{0}{0} =$

$3^0 =$, $0^3 =$, $0^0 =$

$4! =$, $0! =$, $\frac{3!}{2!} =$, $\frac{1!}{0!} =$

$\frac{0}{\infty} =$, $\infty + \infty =$ $\infty - \infty =$, $\frac{\infty}{0} =$

Zakroužkujte správnou odpověď:

Je nula číslice?	ANO	NE
Je nula číslo?	ANO	NE

Zakroužkujte sudá čísla:	2	5	0	7	8	12	10
Zakroužkujte lichá čísla:	8	4	7	11	0	6	20
Zakroužkujte kladná čísla:	2	-5	0	7	8	-0	-10
Zakroužkujte záporná čísla:	-0	7	11	0	-6	20	-45

Které z těchto starých civilizací podle Vás znaly a používaly nulu (můžete označit víc možností)

Egypťané Římané Mayové Babylóňané Řekové Indové

Žák vysvětluje dělení nulou. „Když dělíme šestku trojkou, znamená to, že rozdělíme např. šest jablek třem dětem. Každé dítě bude mít dvě jablka. Šest děleno třemi jsou tedy dvě. Pokud dělíme šestku nulou, neprovádíme žádné rozdělování a zůstane nám všech šest jablek. Šest děleno nulou je tedy šest.“ (Co byste mu k dělení nulou řekli Vy?)

Příloha C – jediný bezchybný test

<u>Vypočítej:</u>

$(16-4):4=3$	, $15:0=\cancel{0}*$	, $(6-6):(2-1)=0$
$7:(2-2)=\cancel{0}*$ nulou dělit nelze	, $\big(0\times(2\times3)\big):0=*$	, $7:7=1$
$0:(0\times3)=\cancel{0}*$	, $(0\times4):(5-1)=0$	, $0:5=0$
$(4\times3):0=\cancel{0}*$	, $0:0=*$	, $(5\times3):3=5$
$9\times0=0$	, $0\times0=0$	, $0\times16=0$

<u>Zakroužkuj správnou odpověď:</u>

Je nula číslice? ANO NE

Je nula číslo? ANO NE

<u>Zakroužkuj sudá čísla:</u> 2 5 0 7 8 12 10

<u>Zakroužkuj lichá čísla:</u> 8 4 7 11 0 6 20

Jirka učí Hanku dělit nulou. „Když dělíme šestku trojkou, znamená to, že rozdělíme např. šest jablek třem dětem. Každé dítě bude mít dvě jablka. Šest děleno třemi jsou tedy dvě. Pokud dělíme šestku nulou, neprovádíme žádné rozdělování a zůstane nám všech šest jablek. Šest děleno nulou je tedy šest."

Má Jirka pravdu? ANO NE

(můžeš napsat, co bys Hance o dělení nulou řekl/řekla Ty)

Nulou dělit nejde (nic nejde rozdělit na nula dílů), ale nula dělit jde, a nulou jde i násobit.

příklad:

15 : 0 = se tento příklad nejde vypočítat

0 : 15 = 0

0 ~~x~~ . 15 = 0

15 . 0 = 0

Ž1

Příloha D – slovní komentáře žáků k dělení nulou

Nulou nelze dělit

Nulou se nesmí dělit

Dělení nulou nemá smysl

Hanko, nulou se nikdy nemůže dělit

Dělení nulou je vždy nula

Vždy, když dělíme nulou, tak výsledek bude nula

Když dělíme jakékoliv číslo nulou, vždy je výsledek nula

Když se krátí a dělí nulou, výsledek je vždy nula

Nauč se, že když dělím nulou je výsledek vždy, opakuji vždy, nula

Co se dělí nulou, je nula

Nulou nejde dělit ani násobit, výsledek vždy nula

Když dělíme 0 např. 6 : 0 = 0 protože nikdo nic nedostane

Když budeš dělit nulou v tomto případě, vyjde ti skoro vždy nula 7:0=0, 8:0=0, 22:0=0, **100:0=10, 200:0=20, 3000:0=300**

Nulou nedělíme, číslo zůstává stejné

Když dělíme 6 nulou, řekneme si: kolikrát se nula vejde do šesti? Je to blbost, tudíž nulou dělit nelze

Když dělíme nulou, tak s příkladem vůbec nic neděláme, to platí i pro mínus, plus, krát, nulou nedělíme, nenásobíme

Když dělíme, nepíšeme nic, a když násobíme nulou, píšeme vždy nulu

Když se dělí nulou tak to nejde, takže tam nebude nic

Když dělím nulou, nebudu dělit na víc skupin, ale na jednu skupinu

Nula děleno nulou nemáš nic, takže nemůžeš nic rozdělit

Když mám 6 jablek a chci to rozdělit nulou, tak mi jich zbyde 6

No prostě měl Jirka pravdu a jináč 6 : 0 = 6

Nula je číslo, které nejde dělit ani násobit, proto šest děleno nulou je nula a nedáš to žádnému dítěti

Je to odlišné od násobilky (protikladně)

Když dělíme nulou, tak 6 : 0 = 0, 6 + 0 = 6, takže je to velký rozdíl

Dělení nulou je dost lehké, třeba 3 : 0 = 0

Když budeš dělit šest jablek nulou, tak ti šest jablek nezbyde

Vždy, když je v příkladu nula, výsledek je také vždy nula

Když máš deset kostek a nedáš to žádnému dítěti, tak ti zbydou všechny 0:0 nelze

Nula nic nezmění, protože nula není nic

Je to jednoduché jako při sčítání (odčítání) nula není žádný počet, takže nic nepřičítá (neodčítá)

Když se dělí nulou, to znamená, že 6 dělíme ničím, takže je to nula

Řekla bych to podobně, ale s bonbónama

Nulou se dělit nemůže, protože ti vždy vyjde dělenec např. 7 : 0 = 7

Že to je dělit nulou nejlehčí

Vždy, když se něco dělí nulou, je to vždy to samé číslo

Když dělíš 6 jablek 0, to je jako když máš 6 kamarádů, ale nemáš pro ně nic

Víme, že když násobíme nulou je to vždy 0, ale když dělíme, nemáme co rozdělovat, takže číslo zůstává stejné

Když dělíme šestku trojkou, je to vždy 2 a když dělíme šestku nulou je to vždy nula, protože nemáme co dělit

Když dělíš 6 jablek 2 dětem a sám si necháš taky, tak to dělíš 3 dětem, takže 6:3=2, když dělíš 6 jablek 0 dětem, tak se to rovná 0

6 : 0 = 0 rozdělování bude. Rozdáme je všechny

No v podstatě má Jirka pravdu v reálném životě, ale v příkladech je to jiné 6x0=0.

Každý člověk pochopí, že dělit nulou nejde (*výsledky 0*)

Na matematiku nejsem ať si zajdou na doučování!

Neděl, nenásob nulou

6 : 0 nejde, všechno, kde je nula nejde

Šest jablek nemůžeme dělit nulou, protože to nejde rozdělit

Všechno, co se dělí nebo násobí nulou, vyjde vždy 0

Šest děleno nulou nejde, protože je to pořád nula

To samé

Jestliže máme 6 bonbónů a nula dětí, dělíme tedy 6:0 a vyjde nám nula

Šest jablek rozdělím mezi nula dětí, každé dítě má nula jablek

Je to jednoduché, když je 0x0=0 velmi lehké, ale když máme (6-6) : (2-1)=0 je to jednoduché

6:0 musí být 0, protože to nejde vynásobit

Když se dělí nebo násobí nulou je to vždy nula! Myslím

Nulou nejde dělit ani krátit, ale s nulou můžeme odčítat a sčítat, nula je číslo jako každé jiné

Když dělíme šestku nulou, je to prostě nic

Nulou nelze dělit, krátit ani jiné matematické úkony

Aby si tý nuly nevšímala

Celé to má dobře, ale 6 : 0 = 0, vždy když dělíme 0 je to nula

Nulou dělit nejde, je to nesmysl

Opravdu netuším

To je jako když něco chceme dělit prázdnem. Tak nulou nikdy nejde dělit

Když 6 jablek rozdělíme 0 dětem, nedostane nikdo nic. Ani my nebudeme nic mít. Ale jablka se jen tak nikam nepodějí, takže nulou dělit nelze

Nula krát šest je nula, šest krát nula je nula, nula děleno šesti je nula, ale šest děleno nulou nemá řešení. Proto píšeme velké N a Ř

Hanko, musíš ještě hodně pilovat, abys byla dobrá jako já v dělení nulou. Já tě to naučím

Pozn.: Odpovědi ve smyslu, že nulou nelze dělit, nebo že nula děleno nulou se objevovaly vícekrát. Vybráno je jen několik variant odpovědí.

Tučně jsou označeny „zajímavé“ odpovědi z hlediska chápání dělení nulou.

BIBLIOGRAFICKÉ ÚDAJE

Jméno autora:	Lenka Jonášová
Obor:	Speciální pedagogika - učitelství
Forma studia:	kombinované
Název práce:	„Nula a nekonečno v matematice a v příbuzných přírodních vědách. Analýza těchto pojmů v učebnicích od předminulého století dodnes“
Rok:	2012
Počet stran bez příloh:	103
Počet stran příloh:	14
Vedoucí práce:	Doc. Ivan Fischer, CSc.