



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ KOMPLEXNÍCH VLASTNÍCH  
FREKVENCÍ TRAMVAJOVÉHO KOLA PŘI PRŮJEZDU  
ZATÁČKOU**

COMPUTATIONAL MODELLING OF COMPLEX EIGENFREQUENCIES OF THE TRAM WHEEL DURING  
CORNERING

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

MASTER'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Bc. Josef Burian

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

Ing. Pavel Švancara, Ph.D.

BRNO 2016

## Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Bc. Josef Burian</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	<b>Ing. Pavel Švancara, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

### Výpočtové modelování komplexních vlastních frekvencí tramvajového kola při průjezdu zatáčkou

#### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Diplomová práce bude realizovaná ve spolupráci s firmou MECAS ESI s.r.o. Při průjezdu tramvajového vozidla zatáčkou dochází v důsledku kontaktu a působení třecích sil mezi koly a kolejnicí ke vzniku nestabilních komplexních vlastních frekvencí kola, což je doprovázeno vyzařováním intenzivního pískavého zvuku. Studium tohoto mechanismu je důležité pro návrh úprav eliminujících tento nežádoucí jev. Cílem práce je s využitím metody konečných prvků (MKP) vytvořit výpočtový model pro výpočet komplexních vlastních frekvencí tramvajového kola při průjezdu zatáčkou pro tramvaj Škoda T26. A dále na tomto modelu analyzovat vlivu parametrů jako je velikost zatížení, velikost součinitele tření apod. na nestabilní vlastní frekvence. Tento model bude dále využit pro následnou simulaci vyzařovaného hluku.

#### Cíle diplomové práce:

- 1) Na základě literatury vypracujte stručný přehled v současnosti používaných výpočtových metod pro analýzu vibrací a hluku železničních kol při průjezdu zatáčkou.
- 2) Úprava geometrického modelu a vytvoření konečněprvkové sítě tramvajového kola a kolejnice pro tramvaj Škoda T26.
- 3) Výpočet komplexních vlastních frekvencí kola s vlivem kontaktu kola s kolejnicí.
- 4) Analýza vlivu parametrů modelu na nestabilní vlastní frekvence kola.
- 5) Výpočet vibrací na povrchu tramvajového kola pro předpokládaný průběh zatížení a jejich příprava pro následný výpočet vyzařovaného hluku.

**Seznam literatury:**

Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (2000): The Finite Element Method. Butterwoth-Heineman, Oxford.

Thompson, D. J., Jones, C.J.C.(1999): A review of the modelling of wheel/rail noise generation. Journal of Sound and Vibration, roč. 231, č. 3, str. 519-536, DOI: 10.1006/jsvi.1999.2542.

Chen, G. X., Xiao, J. B., Liu, Q. Y., & Zhou, Z. R. (2008): Complex eigenvalue analysis of railway curve squeal. In Noise and Vibration Mitigation for Rail Transportation Systems, Springer, Berlin Heidelberg, str. 433-439.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **ABSTRAKT**

Tato diplomová práce se zabývá výpočtovým modelováním komplexních vlastních frekvencí tramvajového kola při průjezdu zatáčkou. Cílem bylo nalezení nestabilních tvarů kola, analýza vlivu parametrů na nestabilní tvary a výpočet vibrací na povrchu kola pro výpočtové modelování vyzařování hluku do okolí.

## **KLÍČOVÁ SLOVA**

Kolo, kolejnice, tramvaj, hluk, průjezd zatáčkou, tření, vlastní tvar, komplexní vlastní frekvence

## **ABSTRACT**

This Master's thesis deals with the computational modeling of complex natural frequencies of the tram wheels during cornering. The aim of this work is to determine eigenvalues, perform analysis of the influence of different parameters on eigenvalues and perform harmonic response analysis in order to find surface velocities that can be used in future noise emission analysis.

## **KEYWORDS**

Wheel, rail, tram, noise, cornering, friction, eigenvalue, complex natural frequency

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

BURIAN, J. Výpočtové modelování komplexních vlastních frekvencí tramvajového kola při průjezdu zatáčkou. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 73 s. Vedoucí diplomové práce Ing. Pavel Švancara Ph.D.

## **ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ**

**Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracoval jsem ji samostatně pod vedením Ing. Pavla Švancary Ph.D. a s použitím literatury uvedené v seznamu.**

**V Brně dne 27. května 2016**

.....

Josef Burian

## **PODĚKOVÁNÍ**

**Rád bych poděkoval panu Ing. Pavlu Švancarovi, Ph.D. za cenné rady a pomoc při realizaci této práce. Rád bych také poděkoval své rodině a všem, kteří mě při realizaci této práce podporovali.**

## OBSAH

ÚVOD .....	11
1 VYMEZENÍ PROBLÉMOVÉ SITUACE .....	12
2 FORMULACE PROBLÉMU A CÍLE ŘEŠENÍ .....	13
3 SYSTÉM PODSTATNÝCH VELIČIN .....	14
4 TYP PROBLÉMU A VOLBA METODY ŘEŠENÍ .....	17
4.1 Typ problému.....	17
4.2 Volba výpočtové metody .....	17
5 SOUČASNÝ STAV POZNÁNÍ.....	18
5.1 Souhrn publikací řešící dynamiku železničního kola.....	18
5.2 Hluk při pohybu kolejového vozidla a jeho příčiny .....	18
5.3 Dynamika vozidla projíždějícího zatáčkou .....	19
6 KONSTRUKČNÍ PRVKY SYSTÉMU .....	21
6.1 Tramvaj Škoda 26T.....	21
6.2 Tramvajové kolo .....	21
6.3 Kolejnice .....	22
6.4 Oblouk .....	24
6.5 Rozchod kolejnic.....	26
7 TVORBA VÝPOČTOVÉHO MODELU .....	27
7.1 Model topologie objektu.....	27



---

7.2	Model dekompozice objektu .....	27
7.3	Model geometrie .....	27
7.4	Model okolí.....	29
7.5	Model aktivace problému .....	29
7.6	Model materiálu.....	29
7.7	Model okrajových podmínek a provozních stavů kola .....	30
7.8	Model přenesení sil z nápravy na kolo .....	32
7.9	Model spojení kola s hřídelem.....	34
7.10	Model rotace kola .....	38
7.11	Model spojení kolejnice s podložím .....	39
8	ŘEŠENÍ MODELU PROBLÉMU .....	40
8.1	Popis řešení.....	40
8.2	Sestavení vstupních hodnot pro výpočet .....	40
8.3	Nastavení kontaktů.....	41
8.4	Tvorba sítě konečných prvků .....	42
8.5	Statická analýza .....	46
8.6	Modální analýza.....	48
8.7	Harmonická analýza .....	52
8.8	Parametrická studie modální analýzy .....	55
8.9	Nahrazení kontaktu kola s kolejnicí pružinami .....	58
9	NÁVRH DALŠÍHO POSTUPU .....	64

ZÁVĚR.....65

## Úvod

Numerické metody jsou v dnešní době masově rozšířeným nástrojem přispívajícím k rychlému technologickému pokroku. Jednou z hojně využívaných numerických je metoda konečných prvků. Ta je používána od napětově deformačních analýz součástí až po simulace crash testů v automobilovém průmyslu.

Využití numerických metod pro popis a optimalizaci systému vyzařující nežádoucí hluk je rozsáhlé a do hloubky popsáno v automobilovém průmyslu, a to konkrétně u analýzy pískání brzd. Nežádoucí vyzařování hluku způsobené vybuzením nestabilních tvarů prokluzem kontaktních ploch je však problémem i v jiných oblastech. Jednou takovou oblastí je také vyzařování „pískavého“ zvuku při průjezdu kolejového vozidla zatáčkou. Tato problematika je z pohledu aplikace numerických metod jen málo popsána. Proto bude v této práci proveden numerický výpočet nestabilních tvarů spolu s analýzou některých parametrů na nestabilní tvary. Dále bude provedena harmonická analýza s výpočtem rychlostí na povrchu kola.

## 1 VYMEZENÍ PROBLÉMOVÉ SITUACE

V první řadě musí být proveden rozbor problémové situace. Z něj poté může být vyvozena formulace problému, od kterého se odvíjí volba metody řešení. Před přistoupením k samotnému vymezení dané problémové situace je nezbytné samotné vymezení tohoto pojmu.

*„Problémová situace je takový nestandardní stav entity (objektu nebo člověka), který z objektivních nebo subjektivních důvodů vyžaduje řešení s určitým vymezeným cílem, přičemž proces řešení není rutinní, takže řešitel musí využívat informační, hodnotící, tvůrčí a rozhodovací činnosti a hledat metody řešení.“ [1]*

Z pohledu řešení problematiky dynamických vlastností železničních kol existuje celá řada problémových situací, které mohou za skutečného provozu nastat. Zaměříme-li se na zkoumání jevů souvisejících s průjezdem vozidla obloukem, můžeme rozlišit několik problémových situací. Jako příklady zde lze uvést vedení vozidla obloukem, tření okolku, prokluz vnitřního kola způsobeného rozdílnou trajektorií vnitřního a vnějšího kola, tvorba nerovností způsobených mechanismem adheze-prokluz či nežádoucí vyzařování hluku. Poslední zmíněná situace je řešená v této práci.

## 2 FORMULACE PROBLÉMU A CÍLE ŘEŠENÍ

Tato kapitola, která obsahuje formulaci problému a cíle řešení, bezpochyby patří k nejdůležitějším částem práce. Z výše uvedené problémové situace jsou zde vymezeny okruhy problémů, které budou řešeny, a cíle, kterých má být dosaženo. To slouží také jako podklad pro výběr podkladů v oblasti řešební studie. Pro zachování pojmové čistoty je pro účely této práce pojem „problém“ vymezen takto:

*„Problém je subjektem naformulované to podstatné z problémové situace, co vyžaduje řešení.“ [1]*

V souladu s uvedenou problémovou situací popsanou v kapitole 1 je možné formulovat problém a cíle práce následovně:

- **Formulace problému:** Výskyt nestabilních vlastních frekvencí a tvarů tramvajového kola při průjezdu zatáčkou při různých provozních a okrajových podmínkách vedoucí k nežádoucímu vyzařování hluku.
- **Cíle řešení:** Výpočet komplexních vlastních frekvencí kola vlivem kontaktu s kolejnicí pro dané provozní podmínky, na jejichž základě bude proveden výpočet vibrací na povrchu kola. Dále bude provedena analýza vlivu různých provozních parametrů na řešení.

### 3 SYSTÉM PODSTATNÝCH VELIČIN

Pro každý objekt je charakteristické, že má definovaný tvar (geometrii), má dané okolí a topologii (tedy zaujímá určitou polohu v prostoru). Interakce objektu s okolím je realizována prostřednictvím vazeb. Objekt je tedy pomocí vazeb okolím ovlivňován a aktivován. Aktivací jsou na objektu vyvolány procesy, které mění jeho stav.

Všechny podstatné entity lze nějakým způsobem popsat konkrétními veličinami a vytvořit z nich systém podstatných veličin. Dle charakteru lze podle [1] tyto veličiny rozdělit do devíti podmnožin (S0 – S8).

#### S0 - Okolí soustavy

Hlavním faktorem ovlivňujícím kontakt kola s kolejnicí je hmotnost vozidla. V modelu je tedy nutné uvažovat tíhové zrychlení (tíhovou sílu vozidla). Vliv atmosférických podmínek může měnit výrazně hodnotu součinitele tření mezi kolem a kolejnicí. Vlhkost, námraza či sníh tuto hodnotu výrazně snižují. Vliv atmosférických podmínek také ovlivňuje samotné šíření zvuku v prostoru.

#### S1 - Geometrie a topologie soustavy

Geometrie kola a její topologie má zásadní vliv na řešení problému. Geometrie je dána dokumentací vozidla, v tomto případě se jedná o tramvaj Škoda 26T. Topologií je zde myšlena vzájemná poloha kola a kolejnice, která tvoří dotykovou plochu. Jiné je prostorové uspořádání mezi kolem a kolejnicí pokud bereme v úvahu kolo vnitřní nebo vnější (z pohledu průjezdu zatáčkou).

Geometrie kolejnice je dána výkresovou dokumentací, která se řídí normou. V této práci je použita geometrie kolejnice Ri60. Důležitým parametrem je křivost oblouku (poloměr zatáčky) kolejnice, který vyvolává setrvačné síly na soustavu.

Všechny geometrické rozměry jsou uvažovány jako ideální a v práci není počítáno ani s nerovnostmi ve stykových plochách způsobenými nepřesnostmi výroby či opotřebením při provozu.

#### S2 - Vazby mezi objekty soustavy a vazby soustavy s okolím

Vazba mezi kolem a nápravou je modelována pomocí síly v ose kola nahrazující tíhovou sílu vozidla a geometrických podmínek nahrazujících spojení kola s nápravou.

Vazba mezi kolem a kolejnicí je realizována pomocí kontaktu s uvažováním tření mezi povrchy.

Spojení kolejnice s pražci a podložím je pro zjednodušení úlohy modelováno jako ideálně tuhé a nepohyblivé.

### **S3 - Aktivace soustavy**

Soustava je aktivována pohonnou jednotkou, která působí při ustáleném pohybu (pouze tento pohyb je uvažován). V modelu je tento pohyb popsán rychlostí vozidla. Dynamické projevy v kontaktu a tím i v celé soustavě jsou aktivovány skluzem kola po kolejnici, který je důsledkem různých velikostí drah opisující vnější a vnitřní kolo při průjezdu obloukem.

### **S4 - Ovlivnění soustavy okolím**

Největšími faktory okolí ovlivňující soustavu jsou atmosférické podmínky, jejichž vliv byl již také popsán výše. Dalšími faktory ovlivňujícími soustavu jsou nehomogenní vlastnosti podloží a jejich interakce s kolejnicí. Ty jsou však jen velice těžce kvantifikovatelné a nejsou v modelu uvažovány.

### **S5 - Vlastnosti soustavy**

Hmotnosti částí soustavy, jejich materiálové charakteristiky a charakteristiky vazeb mezi nimi, jsou určeny na základě dokumentace vozidla. Vlastnosti kolejnic, jejich materiálové charakteristiky a jejich uložení jsou popsány pomocí příslušných norem.

### **S6 - Procesy a stavy soustavy**

Hlavním procesem v soustavě je myšlen jeho pohyb. Soustava se může pohybovat několika rozdílnými způsoby. Z hlediska rychlosti můžeme uvažovat pohyb konstantní rychlostí či se zrychlením (rozjezd, brzdění). Z pohledu trajektorie pohybu můžeme rozdělovat pohyb soustavy na přímočarý, pohyb obloukem (zátáčkou) a popřípadě pohyb po přechodnici (nájezd do zatáčky). Vzájemný pohyb kola a kolejnice může také probíhat několika způsoby. Kolo se může po kolejnici čistě odvalovat, nebo může docházet k různě velkému prokluzu, který je závislý na několika parametrech. V této práci je uvažován pouze jako následek různých trajektorií vnitřního a vnějšího kola při průjezdu zatáčkou a překonáním třecí síly v důsledku setrvačných sil. Dalším uvažovaným procesem je kontakt okolku s kolejnicí vyvozený působením odstředivých sil při průjezdu vozidla obloukem.

Tyto procesy soustavy přispívají svou měrou k různým napěťovým a deformačním procesům systému.

### **S7 - Projevy a stavy soustavy**

Všechny tyto procesy vedou k jejich projevům v systému.

### **S8 - Důsledky projevů a chování soustavy**

Práce se zabývá pouze dynamikou soustavy a s ní souvisejícím vyzařováním akustické emise. Nejsou tedy brány v potaz napěťové ani neformační mezní stavy. Jako dynamické mezní stavy jsou hodnoceny vlastní frekvence, tvary a jejich stabilita.



## 4 TYP PROBLÉMU A VOLBA METODY ŘEŠENÍ

### 4.1 Typ problému

Jedná se o problém přímý. Vstupem do algoritmu řešení problému jsou tedy příčiny, výstupem jsou pak projevy. Pro daný problém můžeme jako příčiny brát prvky podskupin systému podstatných veličin S0-S6, jako projevy jsou brány prvky podskupin S7-S8, viz kapitola 3.

### 4.2 Volba výpočtové metody

Pro řešení problému byla zvolena metoda **výpočtového modelování**. Díky složitosti výpočtového modelu je nejvhodnější volbou **metoda konečných prvků** (v dalším jen MKP). Jako výpočetní program byl zvolen software Ansys s prostředím Ansys Workbench<sup>1</sup> společnosti Ansys, Inc., který má tuto metodu ve svém výpočetním jádře naprogramovanou. Prostředí Workbench bylo zvoleno zejména díky uživatelsky přívětivější práci s tvarově složitějšími modely.

---

<sup>1</sup> V dalším textu je odkazem na Ansys myšleno výpočetní jádro programu, odkazem na Workbench pak prostředí Ansys Workbench.

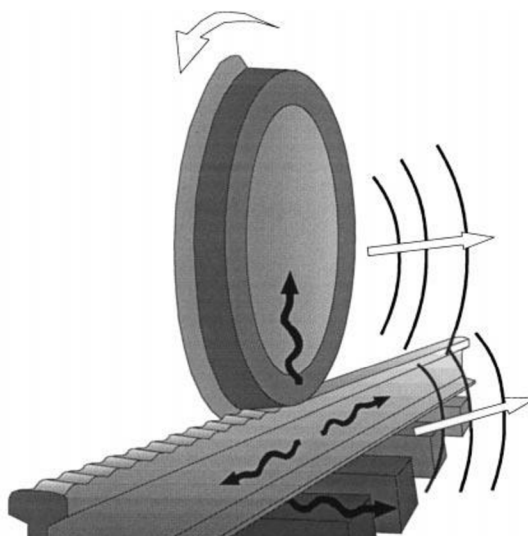
## 5 SOUČASNÝ STAV POZNÁNÍ

### 5.1 Souhrn publikací řešící dynamiku železničního kola

Problém popisu dynamiky železničního vozidla je velice rozsáhlý a v různých formách je zkoumán po celém světě. Při modelování a popisu dynamiky železničních vozidel existuje celá řada problémových situací. Nejpodstatnější část z nich tvoří problém opotřebení kol a kolejnic při provozu, bezpečnost vozidla a prevence vůči vykolejení při průjezdu zatáčkou, problém proměnného součinitele tření v závislosti na počasí a tím snížené adheze kola s kolejnicí. Další velkou kapitolou jsou problémy související s hlukem doprovázejícím pohyb kolejového vozidla způsobený nerovnostmi stykových ploch nebo pískavý zvuk při průjezdu vozu zatáčkou. Souhrn těchto problematik a metod jejich řešení můžeme získat například z publikací [2] a [2].

### 5.2 Hluk při pohybu kolejového vozidla a jeho příčiny

Příčiny vzniku hluku při pohybu kolejového vozidla se věnuje například publikace [3]. Příčinou hluku je zde uváděn vznik nadměrných vibrací v kole a kolejnici. D. J. Thompson zde popisuje tři možné příčiny vzniku hluku, jejich mechanismy a parametry, které je nejvíce ovlivňují. První z nich jsou nerovnosti způsobené nepřesností výroby či opotřebením dotykových ploch. Detailněji se příčinami a popisem zabývá řada publikací. Ty můžeme principiálně dále rozdělit do skupiny popisující problém analyticky (např. [18]) a použitím numerických výpočtů (MKP) (např. [4]). Vzhledem k dostupnosti výkonné výpočetní techniky se čím dál častěji přistupuje k explicitnímu řešení problémů. O tom pojednává článek [4], kde dynamika vozidla s nerovnostmi na kontaktních plochách řešena explicitně. Publikace [24] se věnuje tvorbě numerickému modelu dynamiky interakce kola s tzv. ploškou a kolejnicí. V tomto článku je také uvedeno porovnání nárůstu vibrací s rychlostí vozidla důsledkem nerovnosti (drsnosti) povrchu a interakcí s kolem mající plošku. I přesto, že nárůst vibrací s rostoucí rychlostí je větší u drsného povrchu, hodnoty těchto vibrací nikdy nepřesáhnou hodnoty vyvolané interakcí kolejnice s ploškou. Jako další příčina se zde uvádí přejezd přes mezery mezi kolejnicemi. Obě tyto příčiny se projevují jak na rovných tratích tak při jízdě v oblouku. Vibrace vyvolané těmito mechanismy mají dominantně vertikální směr, jak je znázorněno na obrázku 1.



Obrázek 1: Schématické znázornění vibrací způsobené nerovnostmi stykových ploch, převzato z [3]

Jako třetí, a poslední, příčina se v článku [3] uvádí skluz kola po kolejnici při průjezdu zatáčkou, která je detailněji popsána v další kapitole.

### 5.3 Dynamika vozidla projíždějícího zatáčkou

I pro oblast dynamiky vozidla projíždějícího obloukem existuje několik zkoumaných problémových situací. Jako příklady problémových situací zde lze uvést vedení vozidla obloukem, tření okolku, prokluz vnitřního kola způsobeného rozdílnou trajektorií vnitřního a vnějšího kola či tvorba nerovností způsobených mechanismem adheze-prokluz. Mechanismus adheze-prokluz není, alespoň co se hledání komplexních vlastních tvarů týče, dostatečně popsán. Velice dobře a do hloubky je tento mechanismus popsán při problému pískání automobilových brzd. Numerickým modelům hledání komplexních vlastních tvarů se věnuje spousta článků a metodiku výpočtu lze velice dobře využít i v problematice železničních kol a je proto dobré jich několik uvést. Jako příklad lze vzít článek [23]. Autor v něm popisuje tři možné přístupy tvorby modelu pro hledání nestabilních vlastních tvarů, který demonstruje na jednoduchém 2D modelu. Klíčovým aspektem je zavedení nesymetrické matice tuhosti do výpočtu v důsledku kontaktu. První metodou je nahrazení kontaktu pružinami, do kterých je zavedena nesymetrie manuálně. Další dva modely uvažují model reálného kontaktu typu uzel na uzel nebo plocha na plochu, u kterých je nesymetričnost matice tuhosti vytvořena vynucením prokluzu v kontaktu. V článku [25] jsou porovnávány tři metody výpočtu nestabilních tvarů s porovnáním přesnosti a časové náročnosti

jednotlivých metod. První metodou je výpočet lineární nepředepjaté modální analýzy, další dvě metody zahrnují výpočet předepjaté modální analýzy. Všechny uvedené metody zahrnují příkaz CMROTATE, který vynutí prokluz kontaktů. Výsledky zde ukazují dobrou shodu výsledků všech tří metod a doporučuje (hlavně pro parametrické studie) použití nepředepjaté modální analýzy.

V článku [28] jsou popsány dva přístupy pro řešení nestabilních tvarů kmitu. Jsou jimi již zmíněná modální analýza za využití nesymetrických matic a transientní analýza. V článku jsou popsány výhody, nevýhody a limitace použití jednotlivých analýz.

Vliv mazání kontaktu okolku s kolejnicí je popsán v článku [20]. Autor zde uvádí, že výskyt nestabilních vlastních tvarů je závislý na podmínkách kontaktu a to hlavně na velikost hodnoty součinitele tření. Mazáním se navíc docílí menšího opotřebení kontaktních ploch.

## 6 KONSTRUKČNÍ PRVKY SYSTÉMU

### 6.1 Tramvaj Škoda 26T

Škoda 26T (ForCity Classic) je nízkopodlažní pětičlánková obousměrná tramvaj vyráběná od roku 2013 pro maďarské město Miskolc. Tramvaj disponuje širší karoserií než typy předchozí a dokáže pojmout až 300 cestujících. Technický popis tramvaje je v tabulce 1.

Tabulka 1: Technické údaje tramvaje 26T [8],[5]

Celkový počet cestujících	více než 300
Délka	32 100 mm
Šířka	2 650 mm
Výška vozidla přes sběrač	3 560 mm
Max. rychlost	70km/h
Napájení	600 V DC
Pohon	760 kW
Nízkopodlažnost	100%
Rozchod	1 435 mm
Min. poloměr oblouku	25 m



Obrázek 2: Tramvaj 26T, převzato z [5]

### 6.2 Tramvajové kolo

Geometrie tramvajového kola se dá rozdělit na nosnou část a okolek. Nosná část je, co se její geometrie týče, tvořena většinou velice jednoduchou plochou. Nejpoužívanější jsou kuželové či válcové plochy. Řezem takové plochy je pak přímka s určitým sklonem vůči ose kola. Tvar okolku se blíží toroidnímu tvaru. Řezem takové plochy je potom kružnice. Pro předcházení skokových změn tvarů se pro přechodové části používá proložení skupiny bodů kubickým splainem, u které se jako podmínka stanoví spojitá druhá derivace [6].

V současnosti se používají dva typy tramvajových kol – celistvá a skládaná. Celistvá kola, u kterých jsou disk a obruč tvořeny jedním dílem, postupně vytlačují právě kola skládaná. U skládaných kol je mezi disk a obruč navíc ještě vložena pryžová vložka. Toto má za cíl snížení hladiny hluku uvnitř vozidla. Tato konstrukce se používá také u tramvaj

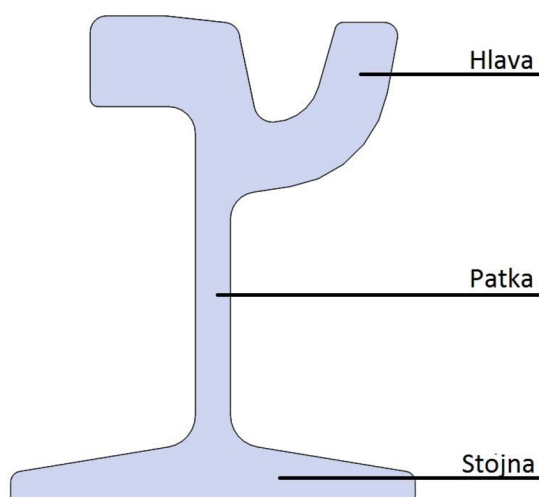
Škoda 26T, která je objektem zkoumání této práce. Řez skládaným kolem je vidět na obrázku 3.



Obrázek 3: Řez skládaným tramvajovým kolem, převzato z [7]

### 6.3 Kolejnice

Kolejnice je jednou z částí železničního svršku, která je v přímém kontaktu s železničním vozidlem. Můžeme ji rozdělit na tři části – patku, stojinu a hlavu kolejnice, jak je patrné z obrázku 4. Patka slouží k uchycení kolejnice k pražcům, stojina tvoří přechod od patky k hlavě a vytváří prostor pro kolo nad pražci. Tento prostor u tramvajových tratí je často vyplněn speciálním panelem, který umožňuje přejezdění vozidel městské dopravy přes koleje. Hlava slouží pro kontakt s kolem železničního vozidla.

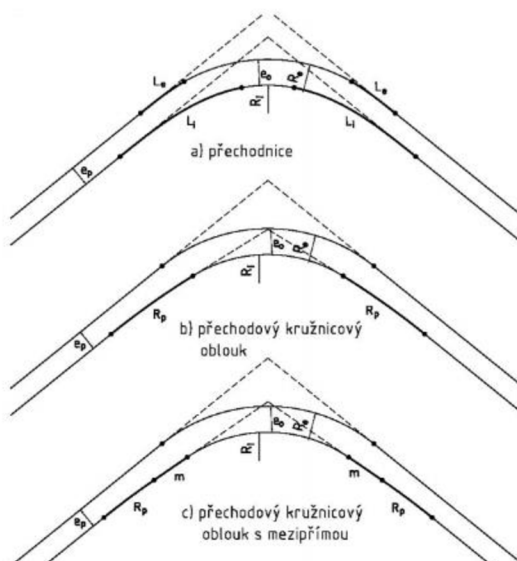


Obrázek 4: Průřez kolejnice

Z hlediska tvaru se kolejnice rozdělují do čtyř typů – širokopatní, žlábková, bloková a jeřabová. Širokopatní a žlábková jsou v současnosti nejpoužívanějšími typy [13]. Širokopatní kolejnice jsou používány především na vlakových tratích, žlábková na tratích tramvajových. Profily obou typů kolejnic jsou znázorněny na obrázku 5 a 6.







Obrázek 7: Základní typy tramvajových oblouků,  
převzato z [9]

Při jízdě v oblouku je navíc nutno počítat s odstředivou silou, která musí být nějakým způsobem vyrovnávána. Docházelo by tím k nadměrnému zatěžování kolejnic. To je kompenzováno vyvýšením vnější kolejnice o určité převýšení. Jeho hodnota je daná rovnicí 1 (převzato z [6]).

$$p_v = 7.1 * \frac{v_{max}^2}{R_s} \quad (1)$$

kde  $p_v$  [mm] je převýšení,  $v_{max}$  [km/h] je maximální povolená rychlost a  $R_s$  [m] je střední poloměr oblouku.

Z této rovnice je patrné, že převýšení je závislé na maximální rychlosti a poloměru oblouku. U tramvajových tratí je díky malým rychlostem toto převýšení zanedbáno. Pro tramvajové tratě je minimální poloměr oblouku stanoven na 20 m, ale ve výjimečných případech, kde to konstrukčně není možné, jsou povoleny oblouky až 15 m [9]. Maximální rychlost v oblouku je závislá právě na velikosti poloměru oblouku a pro tramvajové tratě je dána rovnicí 2 (převzato z [12]).

$$v_{max} = \sqrt{\frac{120 \cdot R_s}{11.5}} \quad (2)$$

## 6.5 Rozchod kolejnic

Pro zajištění bezpečnosti provozu proti vykolejení je důležitým parametrem rozchod kolejnic. Ten je definován jako kolmá vzdálenost mezi vnitřními stranami hlav kolejnic [13].

Pro tramvajové tratě bývá standardní rozchod 1435 mm. Na některých tratích však stále můžeme pozorovat rozchod kolejí 1000 mm (např. Liberec) [6]. Poloměr vnitřní (rovnice 3) a vnější kolejnice (rovnice 4) je dán:

$$R_e = R_s - \frac{e_p}{2} \quad (3)$$

$$R_i = R_s + \frac{e_p}{2} \quad (4)$$

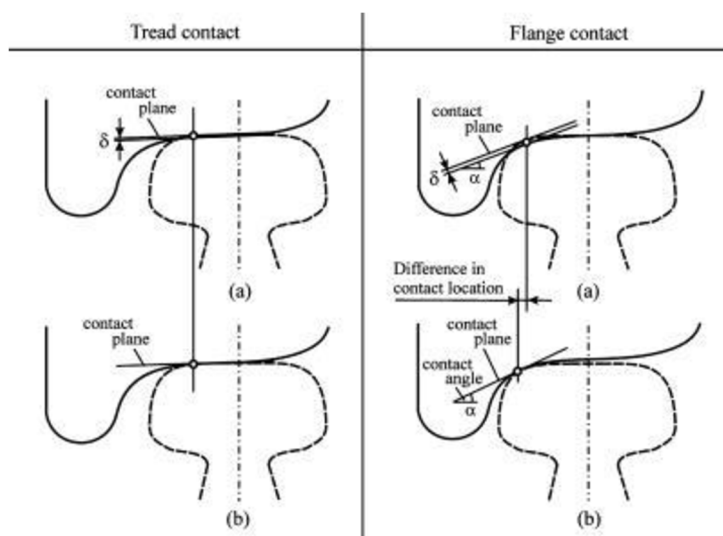
Kde  $R_e$  [m] je vnitřní poloměr oblouku,  $R_i$  [m] je vnější poloměr oblouku,  $R_s$  [m] je střední poloměr oblouku a  $e_p$  [m] je rozchod kolejnic.

## 7 TVORBA VÝPOČTOVÉHO MODELU

Výpočtový model se skládá z dílčích výpočtových modelů. Tyto dílčí modely jsou takovým výběrem z množiny podstatných veličin, které je použitá teorie schopna obsáhnout [1].

### 7.1 Model topologie objektu

Prostorovým rozmístěním objektů je zde myšlena především vzájemná poloha kola a kolejnice a jejich vzájemného kontaktu. Pro řešený problém existují dva možné scénáře vzájemné polohy. Při průjezdu zatáčkou je vzájemná poloha (a kontaktní plocha) rozdílná pro vnitřní a vnější kolo tramvaje viz obrázek 8.



Obrázek 8: Kontakt kola s kolejnicí, vlevo pro vnitřní a vpravo vnější kolo, převzato z [14]

### 7.2 Model dekompozice objektu

Kvůli zjednodušení modelu (zlepšení proveditelnosti) byla provedena dekompozice soustavy trakční soustavy tramvaje. Za podstatné z hlediska řešení problému se zde považuje pouze kolo tramvaje, kolejnice a interakce mezi nimi.

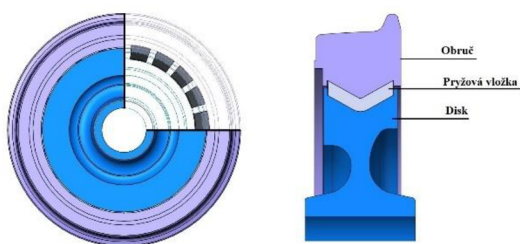
### 7.3 Model geometrie

Všechny modely geometrie jsou tvořeny přesnými rozměry. Výrobní nepřesnosti, vady a opotřebovanost byly zanedbány.

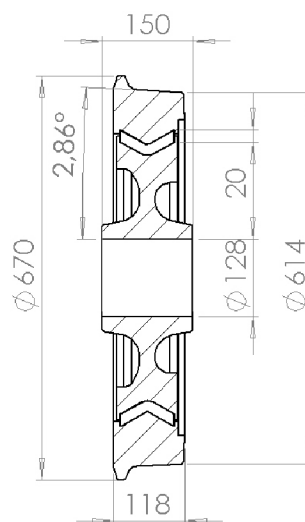
### 7.3.1 Model geometrie tramvajového kola

Prostorový model geometrie kola byl dodán společností MECAS ESI s.r.o. Tato geometrie je používaná pro tramvaje společnosti Škoda Transportation a.s., konkrétně typu Škoda 26T. Obdrženy formát modelu je typu .stp (STandard for the Exchange of Product model data), který má pouze omezené možnosti editace. Na základě tohoto modelu byl vytvořen nový model v programu SolidWorks, který umožňuje jednoduchou editaci parametrů modelu.

Prostorové rozmístění jednotlivých částí je patrné z obrázku 9, hlavní rozměry jsou vidět na obrázku 10.



Obrázek 9: Prostorový model kola

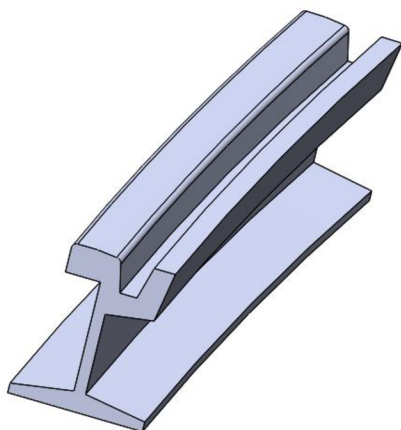


Obrázek 10: Hlavní rozměry kola

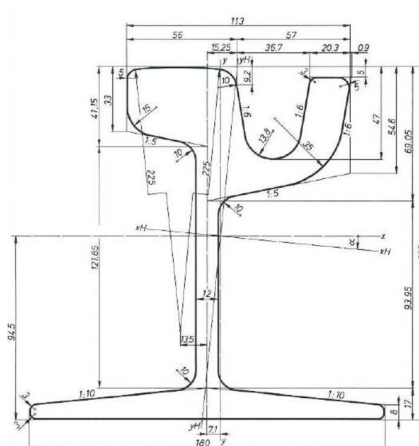
U modelu kola bylo pro účely práce odstraněno několik prvků nepodstatných na rozlišovací úrovni problému. Jsou to většinou technologické vruby a drážky, které komplikují tvorbu kvalitní sítě konečných prvků.

### 7.3.2 Model geometrie kolejnice

Model byl vytvořen na základě výkresu žlábkové kolejnice Ri60. Délka kolejnice byla zvolena 800 mm s radiem (poloměr oblouku) 25 m. Výsledky statické analýzy závisí na volbě radiu kolejnice, nicméně výsledky se mění pouze minimálně a pro účely práce s tímto rozměrem není potřebné pracovat jako s parametrem. Pro účely tvorby kvalitnější sítě byly opět některé prvky odstraněny. Prostorový model a výkres jeho průřezu je na obrázku 11 a 12.



Obrázek 11: Prostorový model kolejnice

Obrázek 12: Profil kolejnice Ri60  
Převzato z [11]

## 7.4 Model okolí

Entity v přímé interakci s modelem kola jsou pouze podloží kolejnice, náprava tramvaje a vzduch proudící kolem kola. Při definování systému podstatných veličin bylo vymezeno, že proudící vzduch není pro účely řešení problému podstatný a není tedy modelován.

Podloží kolejnice, respektive jeho tuhost, se v různých podmínkách mění. Pro zjednodušení výpočtové náročnosti bylo spojení kolejnice a podloží nahrazeno vetknutím na jeho koncích. Tím se tuhost kolejnice samozřejmě zvýší oproti reálným hodnotám a do výsledků je tak vložena určitá nepřesnost.

## 7.5 Model aktivace problému

Model kola bude aktivován silovými a deformačními podmínkami v místě osy kola, podmínkami v kontaktu kola s kolejnicí a objemovými silami od rotace kola.

## 7.6 Model materiálu

Práce se zabývá statickou, dynamickou a harmonickou analýzou soustavy. Pro řešení této skupiny problémů je zapotřebí v materiálových modelech určit jen skupinu vlastností nezbytných pro danou analýzu. Pro statickou analýzu jsou to modul pružnosti materiálu ( $E$ ) a poissonův poměr ( $\mu$ ). Pro účely modální analýzy pak přibude ještě hustota materiálů ( $\rho$ ).

### 7.6.1 Model materiálu kola

Tramvajové kolo je soustava složená z více částí. Ty se také liší svými materiálovými vlastnostmi. Vnitřní a vnější kola jsou z oceli, vnitřní tlumící segmenty jsou pryžové. Model konstitutivních vztahů byl volen jako lineární, homogenní a izotropní. Potřebné materiálové charakteristiky byly dodány firmou MECAS ESI s.r.o., které jsou v tabulce 2.

Tabulka 2: Materiálové charakteristiky kola

		Ocel	Pryž
Modul pružnosti (E)	[MPa]	210 000	2 300
Poissonův poměr ( $\mu$ )	[-]	0,3125	0,4896
Hustota ( $\rho$ )	[Kg.m <sup>-3</sup> ]	7 800	1 100

### 7.6.2 Model materiálu kolejnice

Materiál kolejnice je ocel jakosti R260 (dříve označované 900A), což je ocel nelegovaná s označením 1.0623. Jako model konstitutivních vztahů byl opět volen model lineární, homogenní a izotropní. Potřebné materiálové charakteristiky dle [15] jsou v tabulce 3.

Tabulka 3: Materiálové charakteristiky kolejnice

		Ocel 1.0623
Modul pružnosti (E)	[MPa]	210 000
Poissonův poměr ( $\mu$ )	[-]	0,34
Hustota ( $\rho$ )	[Kg.m <sup>-3</sup> ]	7 850

## 7.7 Model okrajových podmínek a provozních stavů kola

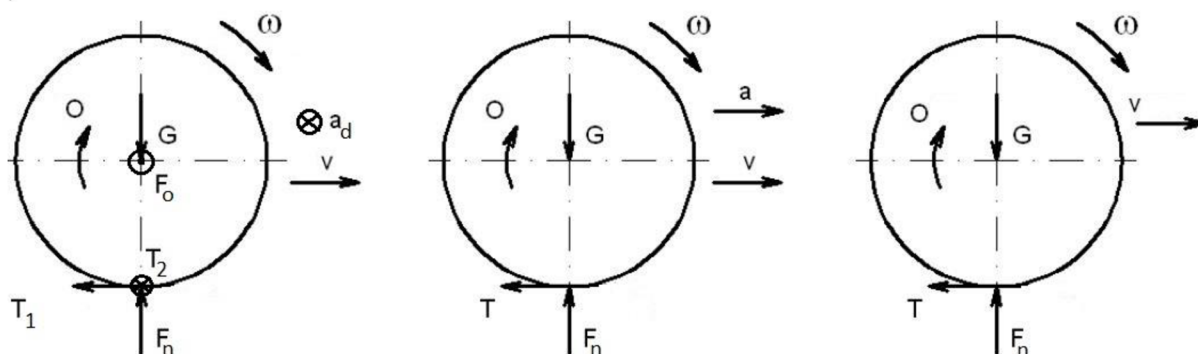
Veličiny aktivující objekt (tramvajové kolo) jsou silově-vazbové podmínky v kontaktu kola s kolejnicí, silově-vazbové podmínky v místě kontaktu nápravy s kolem a objemové síly od rotace kola.

V ose hřídele nápravy působí tíhová síla<sup>2</sup> ( $G$ ) v radiálním směru a odstředivá síla ( $F_o$ ) ve směru axiálním. V místě kontaktu kola a kolejnice působí třecí síly ( $T_i$ ) a normálová síla ( $F_n$ ). V celém objemu kola se nachází objemové síly ( $O$ ), které jsou způsobeny rotací kolem své osy. Všechny zmíněné síly (kromě tíhové a normálové síly), jejich velikosti a smysly jsou dány provozním stavem vozidla. O tom, jaké kombinace sil, jejich smysl a velikosti na kolo působí, je dáno především tím, jakou rychlostí se vozidlo pohybuje a zda zrychluje nebo zpomaluje. Dále záleží na charakteru styku kola s kolejnicí a na tom, zda se vozidlo pohybuje po přímé trati či v oblouku.

Několik možných provozních stavů s jejich charakteristikami jsou popsány v tabulce 4 a schematicky jsou znázorněny na obrázku 13.

Tabulka 4: Provozní stavy kolejového vozidla

Provozní stav	Aktivační síly na kole
Stání	tíhová síla ( $G$ )
Zrychlování, brzdění	tíhová síla ( $G$ ), třecí síla ( $T$ ), objemová síla ( $O$ ) (styk kola s kolejnicí má charakter adheze)
Pohyb konstantní rychlostí	tíhová síla ( $G$ ), třecí síla ( $T$ ), objemová síla ( $O$ ) (styk kola s kolejnicí má charakter adheze)



Obrázek 13: Provozní stavy kola. Zleva: jízda obloukem, zrychlování, jízda konstantní rychlostí

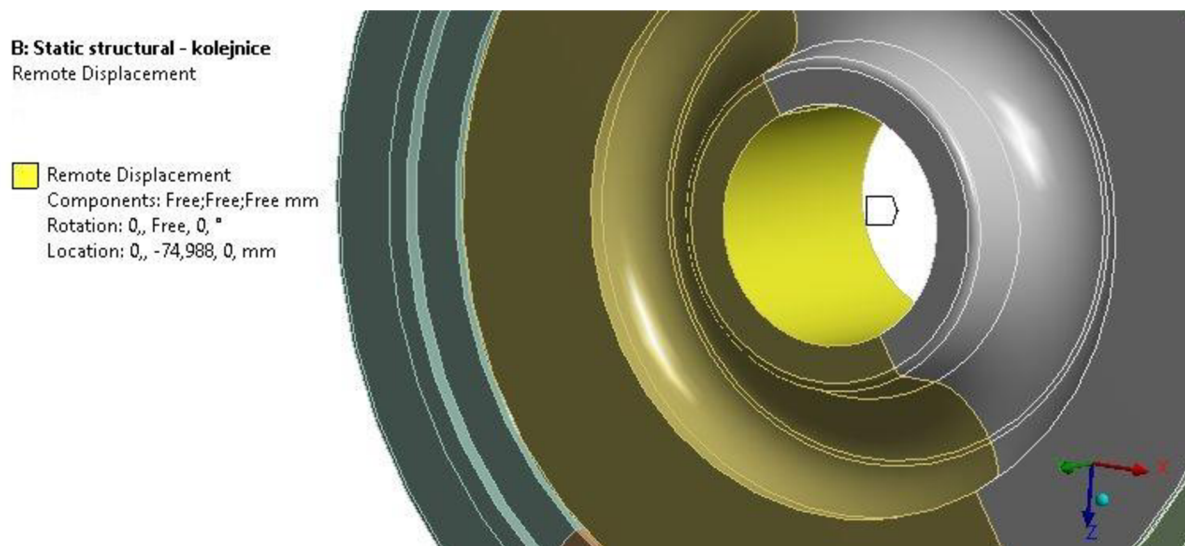
Jízda vozidla obloukem      tíhová síla ( $G$ ), třecí síly ( $T_i$ ), objemová síla ( $O$ ), odstředivá síla ( $F_o$ )

<sup>2</sup> Dle [16] je přesnějším označením veličiny tíha. V této práci však není mezi pojmy tíhová síla a tíha rozlišeno.





do vzdáleného bodu s působením na ploše náboje (v anglickém označení „remote displacement“). Tento vzdálený bod je totožný s bodem, kde byly předepsány účinky silové (těžiště náboje) viz obrázek 15.



Obrázek 15: Předepsání deformačních okrajových podmínek do vzdáleného bodu

### 7.8.1 Určení tíhové síly

Jak již bylo popsáno, působení tíhové síly od hmotnosti vozidla je modelováno do bodu v těžišti náboje kola. Tíhová síla působí ve směru gravitačního zrychlení a je dána vztahem 6.

Dle údajů poskytnutých firmou MECAS ESI s.r.o. je hmotnost vozu při poloviční obsazenosti 40 tun. Při počtu čtyř náprav na vozidlo je tedy hodnota hmotnosti působící na jedno kolo:

$$m_{1n} = \frac{m_c}{n_n \cdot n_k} = \frac{40\,000}{4 \cdot 2} = 5\,000 \text{ kg} \quad (5)$$

Kde  $m_c$  [kg] je celková uvažovaná hmotnost vozidla,  $n_n$  [-] je počet náprav a  $n_k$  [-] je počet kol na jedné nápravě.

Tíhová síla je potom:

$$G = m_{1n} \cdot g = 5000 \cdot 9.81 = 49\,050 \text{ N} \quad (6)$$

Kde  $g$  [ $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ] je gravitační zrychlení.

### 7.8.2 Určení odstředivé síly

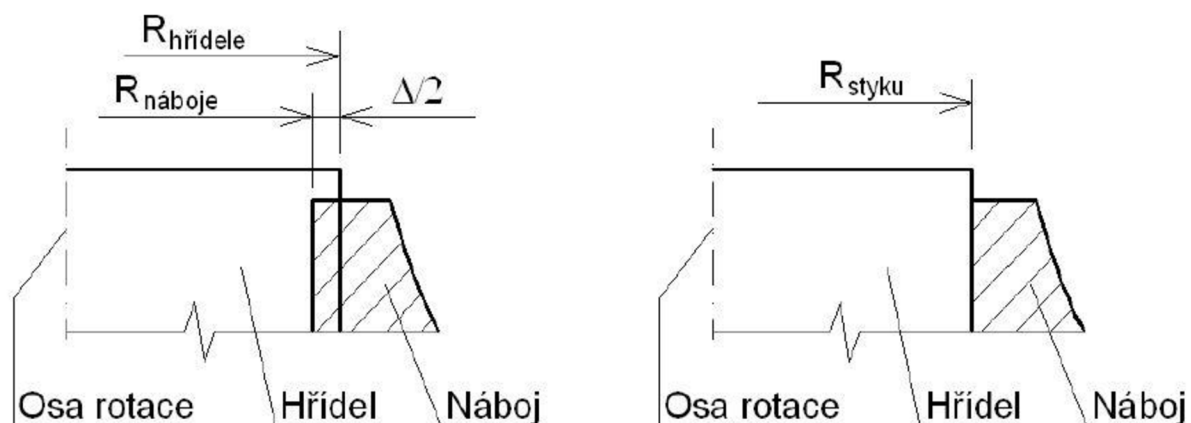
Při průjezdu vozidla zatáčkou působí na vozidlo (a tím i na kolo) odstředivá síla. Směr a smysl působení odstředivé síly je od středu křivosti trajektorie. Síla je stejně jako tíhová síla modelována do těžiště náboje kola. Velikost odstředivé síly působící na jedno kolo je dána vztahem:

$$F_o = \frac{m_{1n} \cdot v^2}{R_s} \quad (7)$$

### 7.9 Model spojení kola s hřídelem

Spojení kola s hřídele je realizováno nalisováním hřídele do náboje kola. Uložení je tedy s přesahem. Pomocí deformačního zatížení je mezi nábojem a hřídelem vyvinut takový kontaktní tlak, který dokáže bezpečně přenášet točivý moment z hřídele na kolo bez prokluzu kola a hřídele. Tento točivý moment může působit v jednom smyslu otáčení od hnací jednotky, nebo ve smyslu opačném při brždění.

Uložení hřídele a kola je uvažováno H7/u6, což je pevné spojení s přesahem. Toto uložení dává vzájemný přesah díry a hřídele v rozmezí 0,190 – 0,285 mm se střední hodnotou 0,238 mm, která bude uvažována ve výpočtu. Po nalisování je tento přesah v důsledku stlačení hřídele a rozeprnutí díry vyrovnán na určité hodnotě. To vyvolá v kole napětí, které může mít vliv na výsledky dalších analýz. Schematické znázornění uložení popisuje obrázek 16.

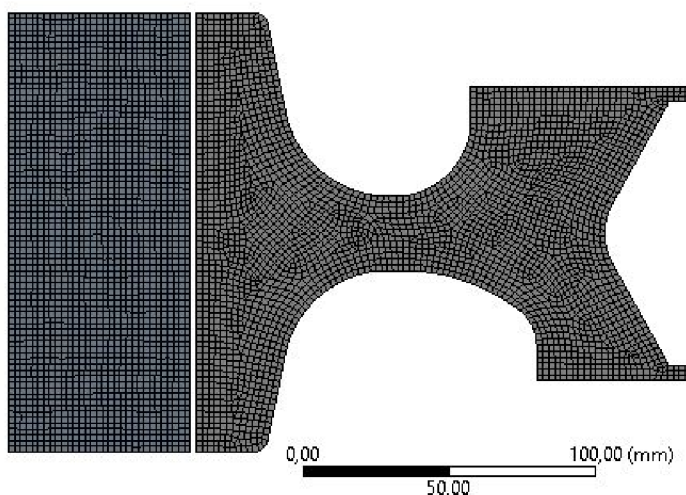


Obrázek 16: Schéma použitého uložení s přesahem

Cílem je tedy zjištění, jaké radiální deformace vzniknou po nalisování v díře náboje kola. Ty budou v dalších analýzách použity jako okrajové podmínky.

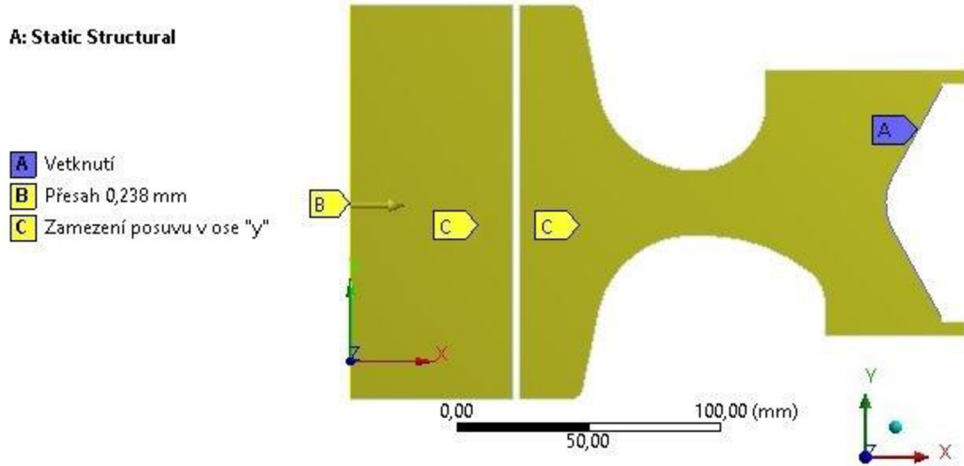
### 7.9.1 Výpočet radiálních deformací v náboji

Výpočet je řešen numericky pomocí metody konečných prvků v programu Ansys a jeho prostředí Workbench. Pro zjednodušení výpočtu byla úloha modelována jako rovinná s využitím axisymetrie. Do modelu byla použita pouze geometrie disku a hřídele. Diskretizace modelu MKP síť byla provedena prvkem Plane183 (rovinný kvadratický prvek). Kontaktní plochy byly vytvořeny pomocí prvků Targe169 a Conta172. Velikost prvků je díky jednoduchosti úlohy způsobené aplikací symetrie nastavena velice jemně na hodnotu 2 mm, a jelikož se jedná pouze o pomocný výpočet, nebyla provedena konvergence sítě. Síť konečných prvků je znázorněna na obrázku 17.



Obrázek 17: Síť konečných prvků

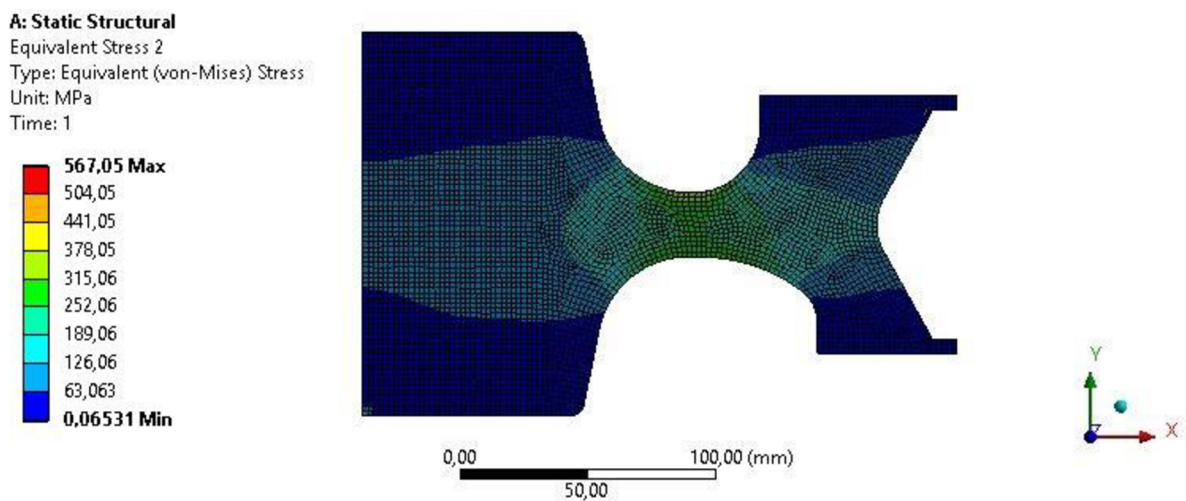
Model materiálu kola i hřídele je uvažován v souladu s kapitolou 7.6. Okrajové podmínky jsou znázorněny na obrázku 18.



Obrázek 18: Okrajové podmínky

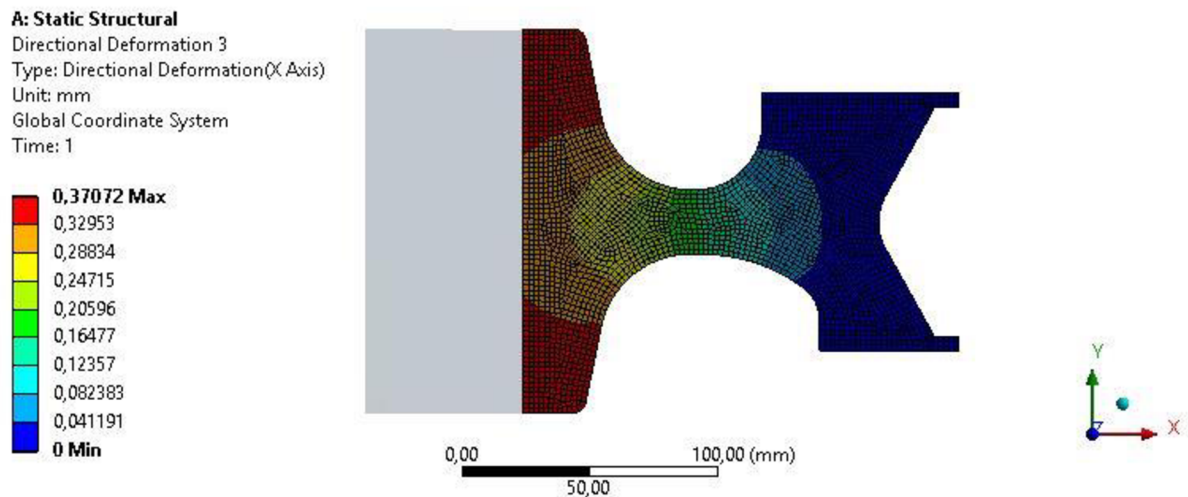
### 7.9.2 Výsledky napěťově deformační analýzy

Deformačně napěťová analýza ukázala, že napětí způsobené nalisováním hřídele na kolo dosahuje hodnot přesahující 400 MPa. V dalších analýzách je tedy nutné s tímto zatížením počítat. Průběh redukovaného napětí dle HMH je ukázán na obrázku 19.



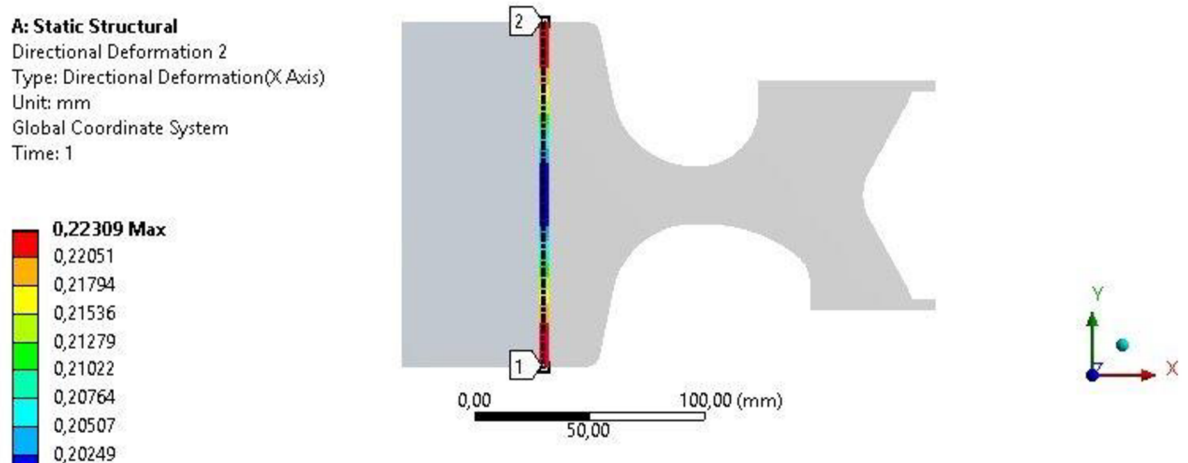
Obrázek 19: Průběh redukovaného napětí v kole

Z výsledků je také patrné, že radiální deformace se po délce náboje mění. Průběh radiální deformace je vidět na obrázku 20.

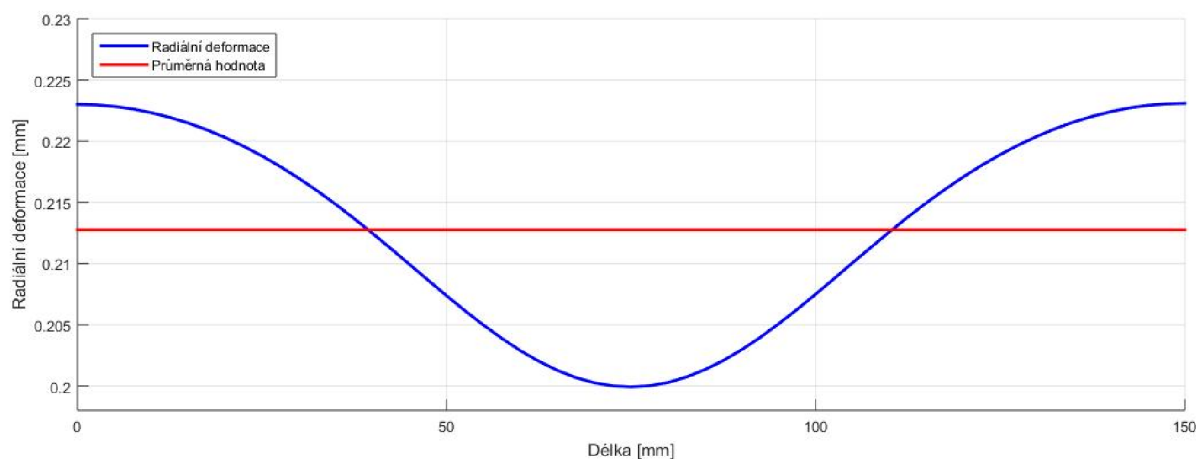


Obrázek 20: Průběh radiální deformace v kole

Pro vykreslení a vyčíslení hodnot deformace na ploše náboje je vytvořena cesta, na které jsou hodnoty v jednotlivých uzlech vykresleny a vyčísleny. Předepsání takových deformačních okrajových podmínek v dalších analýzách by bylo velice složité, proto se v dalších analýzách vezme průměrná hodnota deformace a ta se aplikuje na celý náboj. Průběh deformace na ploše náboje je znázorněn na obrázku 21 a 22.

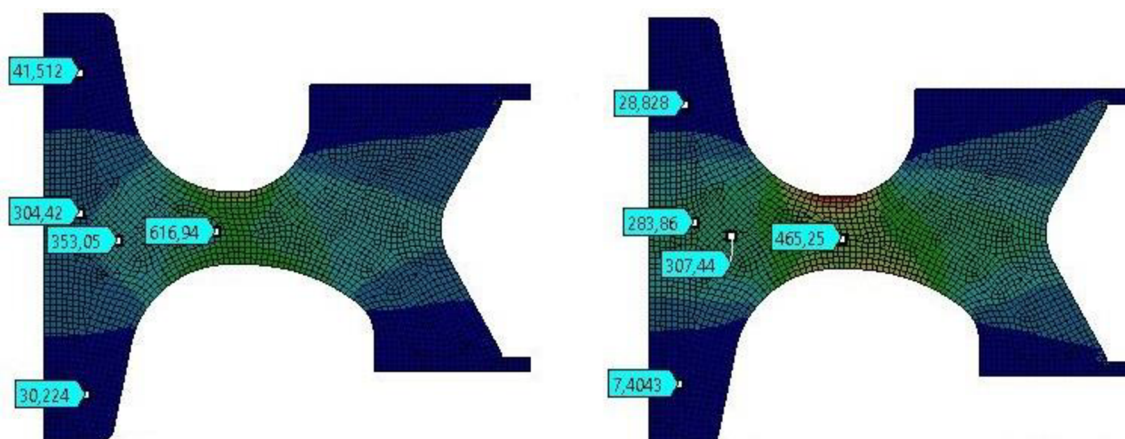


Obrázek 21: Průběh deformace na ploše náboje kola



Obrázek 22: Průběh deformace na ploše náboje kola a jeho průměrná hodnota

Průměrná hodnota přetvoření je 0,213 mm. Při aplikaci této okrajové podmínky se rozložení napětí v kole příliš nemění a poslouží jako dobrá aproximace. Porovnání rozložení napětí je ukázáno na obrázku 23.



Obrázek 23: Porovnání redukovaného napětí

## 7.10 Model rotace kola

Při rotaci kola působí v celém jeho objemu odstředivé síly vyvolané právě touto rotací. Model rotace kola tedy zavádí předepsání úhlové rychlosti do celého objemu kola o velikosti odpovídající rychlosti jízdy vozidla.

Přepočet je dán vztahem:

$$\omega = \frac{v}{r_k} \quad (8)$$

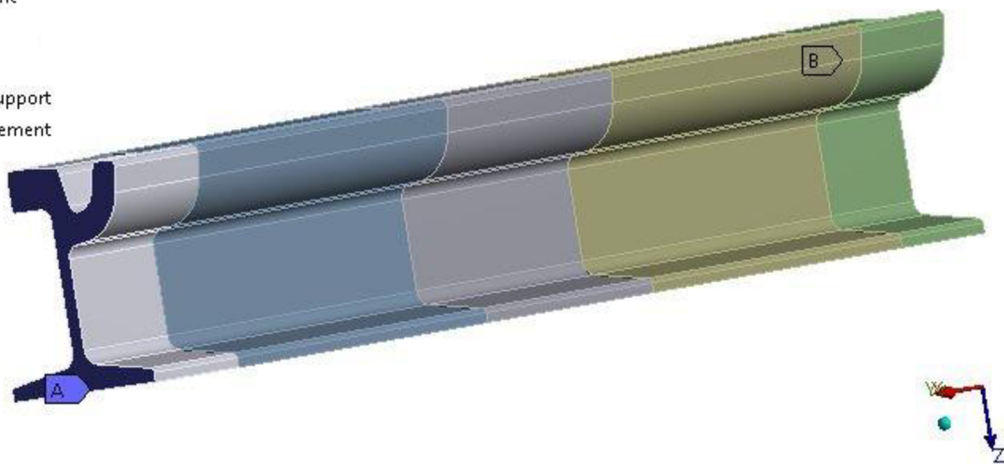
Kde  $r_k$  [m] je poloměr kola.

## 7.11 Model spojení kolejnice s podložím

V reálných podmínkách má spojení kolejnice s podložím vlastní dynamické chování a mělo by být reprezentováno pomocí členů pružina-tlumič. Takový model však přesahuje rozsah této práce a tvorba takového modelu by mohla být obsahem celé práce. Zde je spojení modelováno předepsáním deformačních okrajových podmínek pomocí vetknutí kolejnice na jedné straně a povolení posuvu po délce kolejnice na straně druhé. Schematicky jsou tyto okrajové podmínky znázorněny na obrázku 24.

**B: Static structural - kolejnice**  
Displacement

**A** Fixed Support  
**B** Displacement



Obrázek 24: Spojení kolejnice s podložím

## 8 ŘEŠENÍ MODELU PROBLÉMU

V předchozích kapitolách byly popsány všechny dílčí modely potřebné k řešení modelu problému. Proces řešení problému se redukuje na vhodné zvolení sítě konečných prvků, zvolení hodnot okrajových podmínek a správné nastavení kontaktů.

### 8.1 Popis řešení

Tento výpočtový model bude simulovat zatížení kola za vybraných provozních podmínek. Řešený provozní stav je jízda vozidla konstantní rychlostí v oblouku viz kapitola 7.7.

### 8.2 Sestavení vstupních hodnot pro výpočet

Z dílčích modelů problému je patrné, že některé hodnoty vstupující do výpočtu jsou často závislé na provozních podmínkách. Ty musí být přepočteny na základě požadovaných provozních podmínek. Z množiny možných provozních podmínek byla vybrána jízda obloukem o poloměru 25 m nejvyšší povolenou rychlostí. Modelované bylo jak kolo vnější (tzn. je uvažován kontakt okolku s kolejnicí), tak kolo vnitřní.

Maximální povolená rychlost jízdy v oblouku o poloměru 25 m je dle rovnice 3:

$$v_{\max_{R25}} = \sqrt{\frac{120 \cdot R_s}{11,5}} = \sqrt{\frac{120 \cdot 25}{11,5}} \cong 16 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \cong 4,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (9)$$

Odstředivá síla působící na kolo je dle rovnice 7:

$$F_{o_{R25}} = \frac{m_{1n} \cdot v_{\max_{R25}}^2}{r} = \frac{5000 \cdot 4,45^2}{25} = 3\,960 \text{ N} \quad (10)$$

Velikost objemové síly od rotace kola je podle rovnice 8:

$$\omega_{R25} = \frac{v_{\max_{R25}}}{r_k} = \frac{4,45}{0,310} = 14,35 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (11)$$



## 8.3 Nastavení kontaktů

### 8.3.1 Kontakt obruč-vložka, disk-vložka

Protože v reálném kontaktu mezi obručí a pryžovou vložkou, respektive disku a pryžovou vložkou, můžeme očekávat vzájemný relativní pohyb, měl by být v modelu použit kontakt se zahrnutím tření (v angličtině „frictional“). Vzhledem k faktu, že aplikace kontaktu se třením by vysoce zvýšila výpočetní náročnost a součinitel tření mezi jednotlivými komponenty není znám, byl zvolen kontakt lepený (v angličtině „bonded“). Takto definovaný kontakt nevyžaduje definování žádných dalších parametrů. Výsledkem bude pokaždé nulová penetrace, nulový kontaktní tlak i nulový relativní posuv. Je tedy nutno si uvědomit, že tím vkládáme do výpočtu určitou nepřesnost.

### 8.3.2 Kontakt kolo-kolejnice

Pro řešení problému je nezbytné použít kontakt s třením, jelikož model počítá s relativním pohybem kola a kolejnice a tento model nejvíce odpovídá realitě. Pro tento typ kontaktu je nutné zadání statického koeficientu tření. Dle doporučení společnosti MECAS ESI s.r.o. byl zvolen počáteční koeficient tření  $f = 0,5$ .

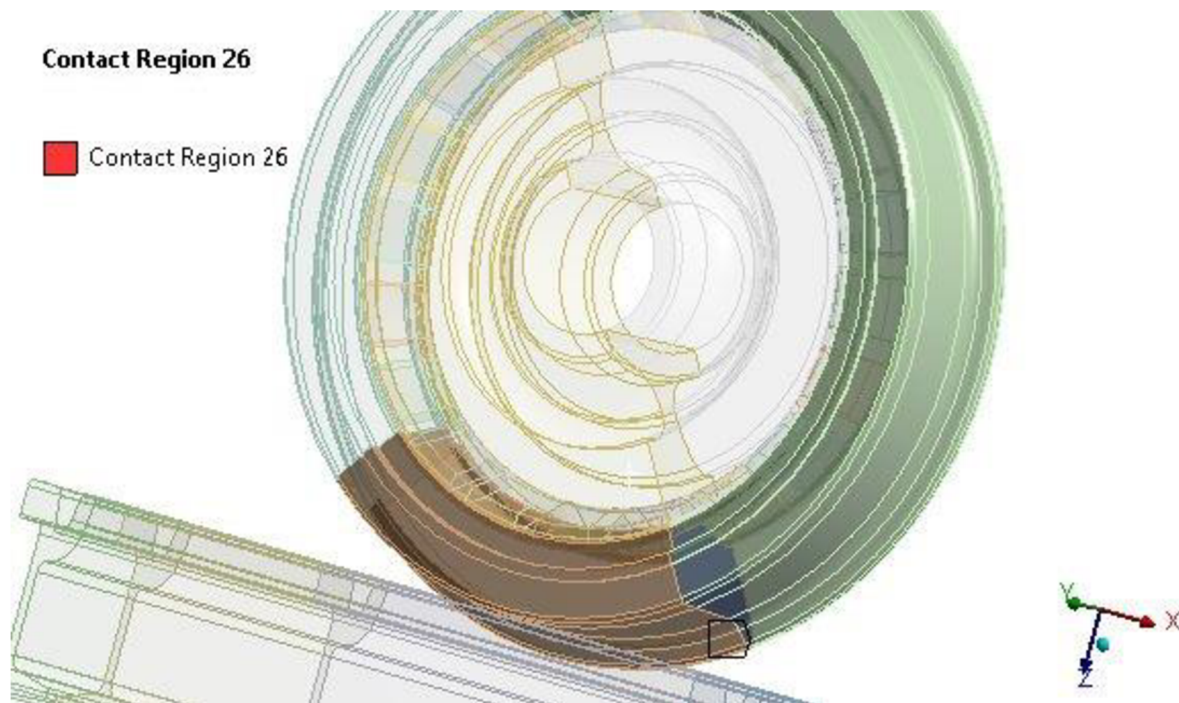
Dále bylo použito asymetricky definovaného kontaktu. To znamená, že kontaktní prvky na kole mají vlastnosti typu „contact“, které hlídají vzájemnou penetraci, a je v nich počítán kontaktní tlak. Kontaktní prvky na kolejnici mají vlastnosti typu „target“, do kterých pronikají prvky typu „contact“.

Pro řešení je použit algoritmus s názvem „Augmented Lagrange“, který je dle [17] pro tento typ kontaktu nejvhodnější. Velikost normálové tuhosti je ponechána na programem kontrolovanou hodnotu s tím, že po každé iteraci je umožněna její aktualizace. Nastavení programem kontrolované tuhosti je dáno malou plochou vzájemných kontaktních ploch a manuální nastavení by bylo velice obtížné a kontraproduktivní. Dalším možným nastavením kontaktu je velikost maximální penetrace. Ta byla pro jednoduchost také ponechána na výchozím nastavení.

### 8.3.3 Další kontakty

Kvůli lepší tvorbě sítě a snazšímu nastavení některých okrajových podmínek byla obruč, disk a kolejnice rozdělena na několik částí. Tímto rozdělením vzniknou nové kontaktní

páry, které je nutné definovat, viz obrázek 25. Rozdělení součástí je samozřejmě fiktivní a má pouze pomocný charakter a rozdělená tělesa se musí chovat jako jedno. Pro takové kontaktní páry je tedy volen kontakt lepený (bonded), který těmto požadavkům odpovídá.



Obrázek 25: Kontakt mezi pomocně rozdělenými tělesy

## 8.4 Tvorba sítě konečných prvků

### 8.4.1 Volba velikosti prvku

Vzhledem k tomu, že jednou částí práce je akustická úloha, počáteční hodnota maximální velikosti prvku bude volena dle ní. Při modelování akustického prostředí je nutno vycházet z podmínky, aby akustická vlna na její délku byla pokryta alespoň šesti akustickými prvky. Při uvažování frekvencí do 3500 Hz, maximální velikost prvku je dána vztahem:

$$l_{min} = \frac{\lambda}{6} = \frac{c}{6 \cdot f_{max}} \quad (12)$$

Kde  $\lambda$  [m] je vlnová délka akustické vlny a  $f_{max}$  [Hz] je frekvence vlnění.

Pro hodnotu rychlosti šíření vlny v oceli je přibližně  $300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a je počítáno s frekvencí do 3500 Hz, maximální velikost prvku musí být 15 mm.

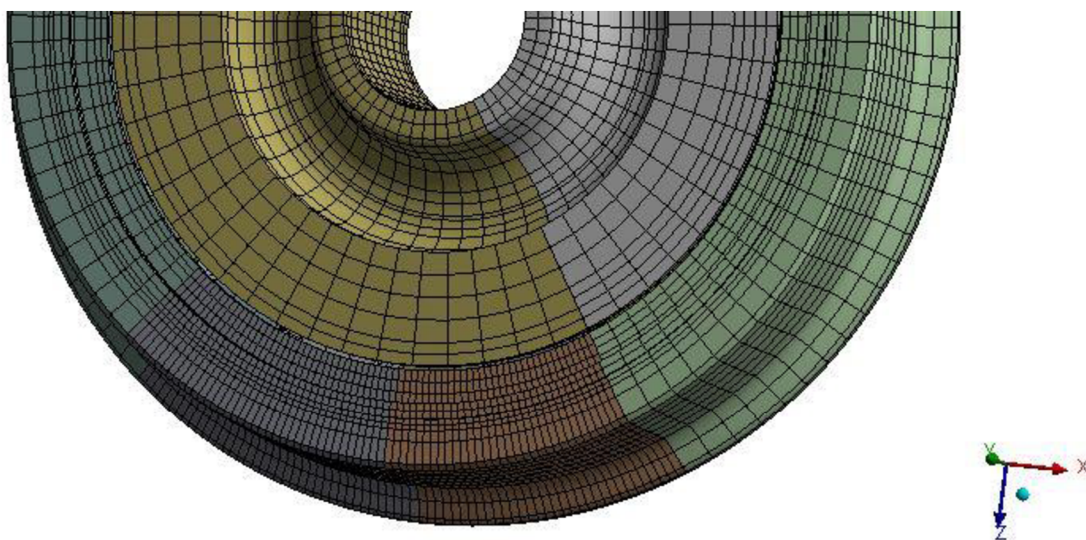
### 8.4.2 Volba typu prvků

Pro 3D objemová tělesa byl zvolen prvek „SOLID186“, tedy 20 uzlový kvadratický prvek. Workbench tento typ také používá jako standartní volbu.

Pro definování kontaktů jsou použity prvky „CONTA174“ a „TARGE170“, které jsou osmiuzlové kontaktní prvky typu „povrch na povrch“ (v angličtině „surface to surface“). Ty jsou opět i standartní volbou, kterou používá Workbench.

### 8.4.3 Obruč a disk kola

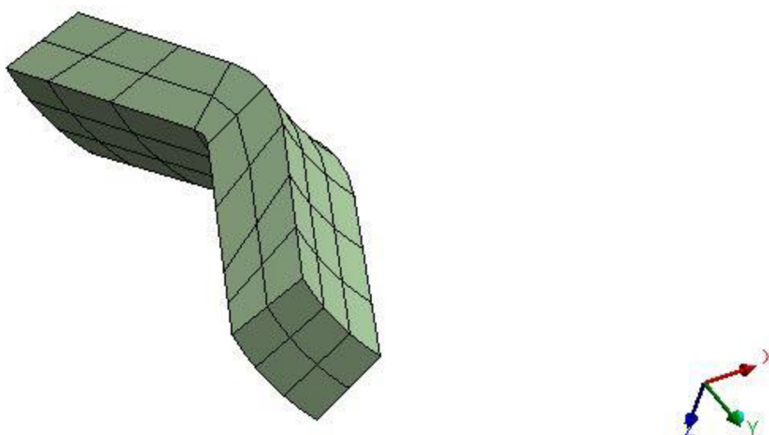
Obruč a disk kola je klíčovou částí řešené sestavy, proto je nutné věnovat tvorbě sítě těchto entit největší pozornost. Sít' konečných prvků byla vytvořena táhnutím po průřezu. Tento způsob tvorby sítě vytvoří u rotačních součástí (a samozřejmě nejen u nich) kvalitní sít' tvořená výhradně z šestihranných prvků, které jsou dle [17] doporučovány. V blízkosti kontaktu kola a kolejnice se nachází největší koncentrace napětí, je tedy nutné v této oblasti sít' více zahustit. Hustší sít' také napomáhá lepší konvergenci kontaktního problému. K tomu, aby bylo možné sít' v této části zahustit, ale zároveň zůstala neporušena tažená forma sítě (a tím prezence šestihranných prvků), je nutné obruč rozdělit do více entit. Problémy s tím spojené a jejich řešení bylo popsáno v kapitole 8.3.3. V místě zjemnění sítě je volena velikost elementu ve směru tažení sítě 5 mm, ve zbytku není očekávána výrazná koncentrace napětí a velikost prvku je volena 15 mm. Výslednou sít' konečných prvků obruče a disku kola je vidět na obrázku 26.



Obrázek 26: Sít' konečných prvků disku a obruče kola

#### 8.4.4 Pryžová vložka

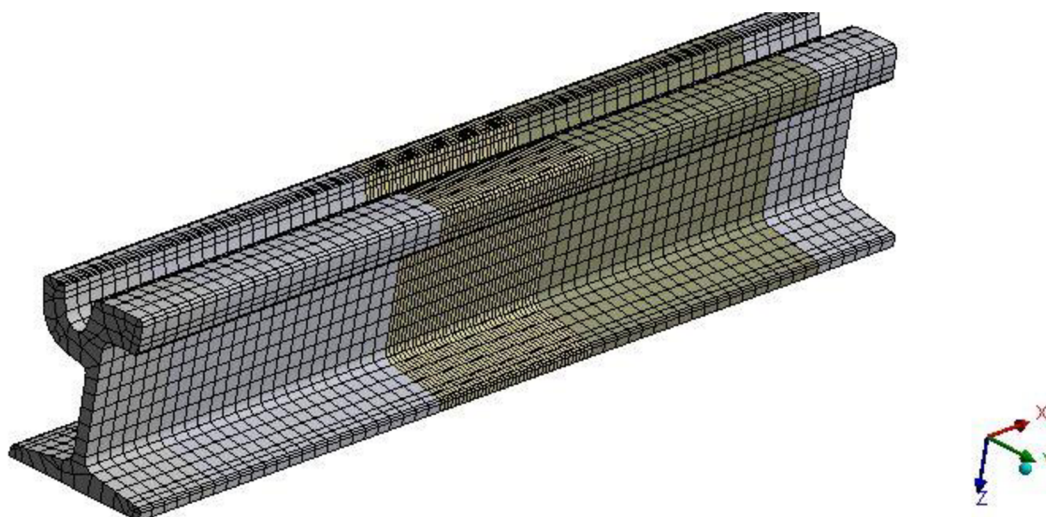
Jako nejlepší metoda pro vytvoření kvalitní sítě konečných prvků na pryžových vložkách se opět ukázala metoda tažení sítě po délce vložky. Velikost prvku byla opět volena 15 mm. Sít konečných prvků pryžové vložky je vidět na obrázku 27.



Obrázek 27: Sít konečných prvků pryžové vložky

#### 8.4.5 Kolejnice

Sít byla opět vytvořena pomocí metody tažení sítě konečných prvků vytvořených na průřezu kolejnice. Kvůli nutnosti zjemnění místa v okolí kontaktu s kolem bylo opět nutné kolejnici rozdělit do více částí. Velikost prvku je volena opět 15 mm a v místě zjemnění 5 mm ve směru tažení sítě viz obrázek 28.



Obrázek 28: Síť konečných prvků kolejnice

#### 8.4.6 Konvergence sítě

Výše zvolené velikosti prvků jsou pouze počátečním odhadem. Zda dokáží popsat skutečnost dostatečně věrohodně, musíme zjistit pomocí procesu konvergence sítě. To je proces, kdy opakujeme výpočty s pokaždé jemnější sítí. Pokud výsledky dvou po sobě jdoucích výpočtů nevykazují značnou změnu, je možné síť považovat za dostatečně hustou.

Pro ověřování dostatečně jemné sítě jsem zvolil místo kontaktu kola a kolejnice (M1) při výpočtu pouze statické analýzy. Srovnání výsledků je v tabulce 5.

Tabulka 5: Konvergence sítě

M1					
Počet uzlů	Změna	Doba výpočtu	Změna	$\sigma_{\text{HMH}}$	Změna
[-]	[%]	[min]	[%]	[Mpa]	[%]
142 591	-	31	-	270	-
185 073	29	52	67	301	11
220 485	19	86	65	312	3,5

Z tabulky 5 je patrné, že velikosti prvků jsou nedostatečné a měli by být dále zjemňovány. To však v této práci není z časových a výpočetních důvodů možné.

## 8.5 Statická analýza

Statická analýza je zde prováděna pro účely výpočtu předepjaté modální analýzy. V této statické analýze jsou vytvořeny nesymetrické matice tuhosti, které umožní nalezení nestabilních frekvencí a tvarů v následné modální analýze. Vytvoření nesymetrické matice je způsobeno prokluzem kontaktních ploch. Vynucení prokluzu kontaktních ploch je docíleno pomocí příkazu CMROTATE a je použito jak ve směru jízdy vozidla (prokluz způsobený různou trajektorií vnitřního a vnějšího kola), tak ve směru příčném (působením odstředivé síly).

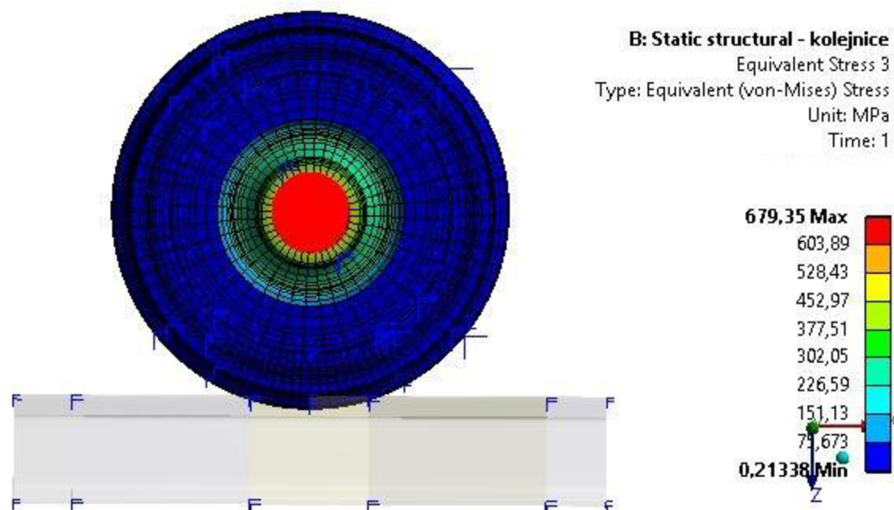
### 8.5.1 Nastavení řešiče

Pro výpočet je použit Sparse řešič, který je dle [17] pro daný typ úlohy nejrobustnější a byl použit i ve všech dalších analýzách. Pro zrychlení výpočtu je snížena hodnota tolerance konvergence na hodnotu  $10^{-6}$ , které nevede k významnému ponížení přesnosti. Vzhledem k předpokládaným plastickým deformacím je zapnuta volba velkých deformací (NLGEOM,ON). Dále byla zapnuta volba tvorby nesymetrických matic (NROPT,UNSYM), které budou použity v dalších výpočtech. Pokud bychom nezapnuly možnost tvorby nesymetrických matic, Ansys by i případné nesymetrické matice symetrizoval. Posledním použitým příkazem je zapnutí předepjaté analýzy (PSTRES,ON), která „informuje“ program, že výsledky budou použity pro další analýzu.

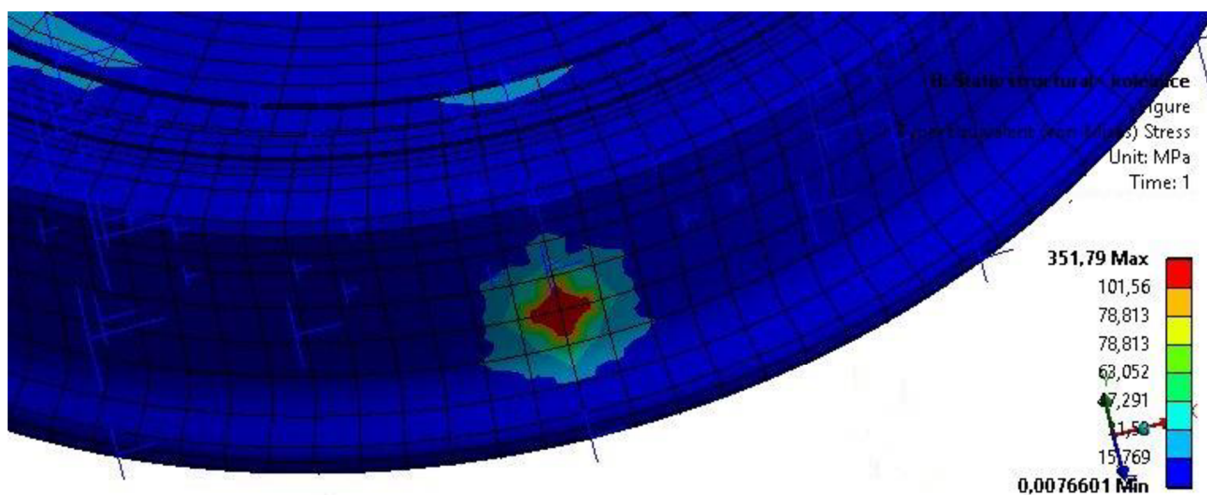
### 8.5.2 Prezentace výsledků

Výstupem statické analýzy je pouze informativní pohled na rozložení napětí a deformací v kole při provozních podmínkách, které mohou ovlivňovat výsledky dalších analýz. Tato práce neřeší hodnoty deformací ani napětí vzhledem k jejich mezním stavům. Jak bylo ukázáno v kapitole 8.4.6, síť konečných prvků není dostatečně hustá a výsledky (hlavně v místech koncentrace napětí) jsou zatíženy značnou chybou.

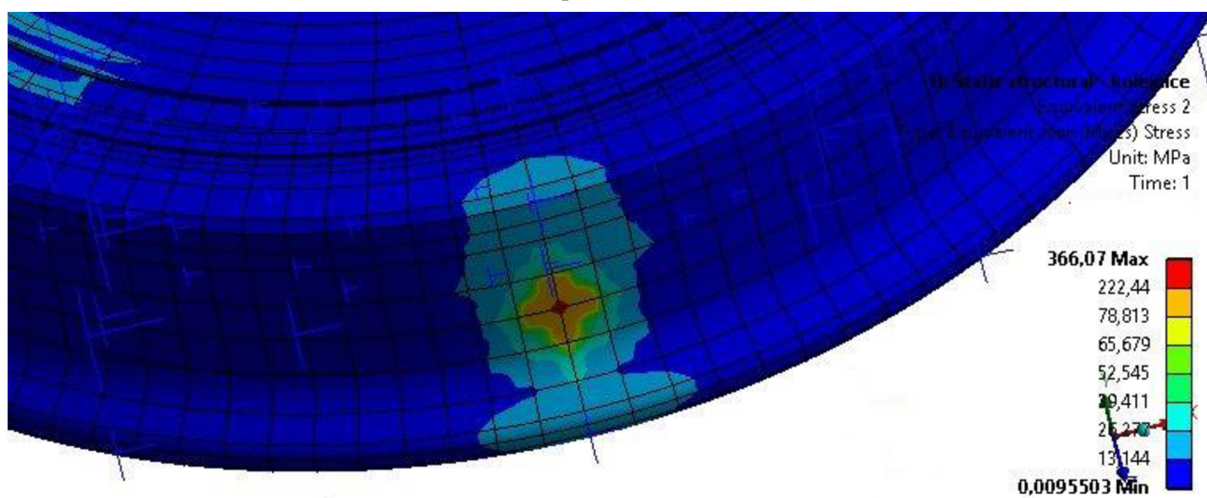
Z obrázku 29 je vidět, že největší napětí je tvořeno nalisováním hřídele na náboj (Poznámka: Rudě červená barva v náboji kola nereprezentuje napětí, ale okrajovou podmínku plochy náboje k bodu v jeho těžišti). Kontaktní tlak je zobrazen na obrázku 30 a 31.



Obrázek 29: Rozložení napětí na kole



Obrázek 30: Rozložení napětí v místě kontaktu – vnitřní kolo



Obrázek 31: Rozložení napětí v místě kontaktu - vnější kolo

## 8.6 Modální analýza

Provedení modální analýzy je asi nejdůležitější částí celé práce. Pro obdržení nestabilních frekvencí a tvarů je nezbytné, aby ve výpočtu figurovali nesymetrické matice tuhosti. To je dosaženo za použití předepjaté modální analýzy, přičemž nesymetrické matice tuhosti byly generovány již právě v analýze statické viz kapitola 8.5. Výsledkem analýzy jsou komplexní vlastní čísla, které mají reálnou a imaginární část (pokud je ve výpočtu nesymetrická matice tuhosti). Imaginární část odpovídá vlastní frekvenci, zatímco reálná složka určuje stabilitu. Kladná reálná složka vlastního komplexního čísla indikuje nestabilitu příslušného vlastního tvaru.

### 8.6.1 Nastavení řešiče

Jako metoda výpočtu byla zvolena tzv. „QR Damped method“. Opět musí být zapnuta volba předepjaté analýzy (PSTRES,ON), která zahrne do výpočtu nesymetrické matice vytvořené v analýze statické. Analýzu je nyní třeba řešit tzv. po částech. To znamená, že nejprve je provedeno částečné řešení „QR Damped method“ (PSOLVE,EIGQRDA) následováno rozšířením módů (PSOLVE,EIGEXP). To zabrání řešiči přeuspořádání nesymetrické matice na symetrickou.

### 8.6.2 Prezentace výsledků – vnější kolo

Vypočtené vlastní frekvence (imaginární část) a jejich stabilita (reálná část) pro vnější kolo jsou v tabulce 6.

Tabulka 6: Vlastní frekvence a jejich stabilita – vnější kolo

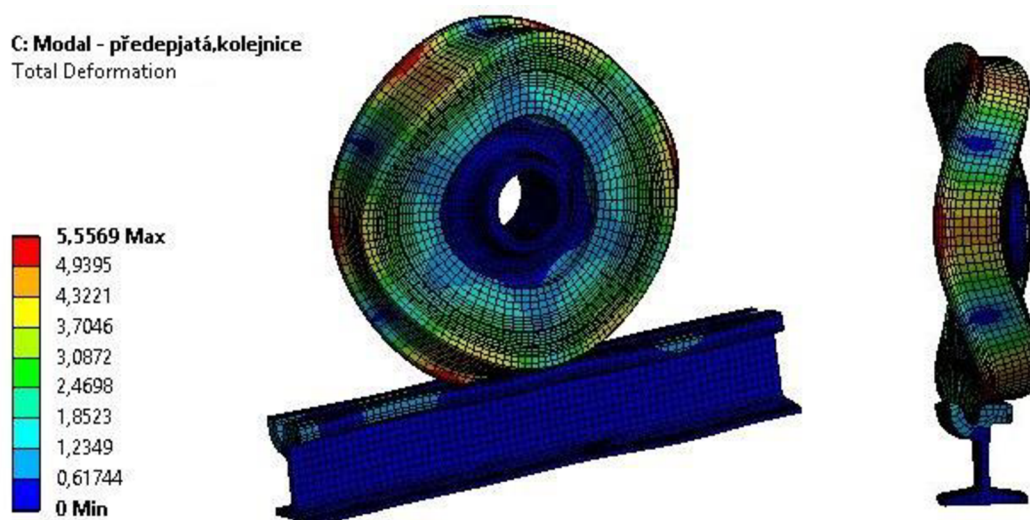
Mode	Frequency	Stability	Mode	Frequency	Stability
[-]	[Hz]	[Hz]	[-]	[Hz]	[Hz]
1	0,44848	0	25	2191,9	0
2	210,99	0	26	2228,1	0
3	381,41	0	27	2319,9	0
4	391,62	0	28	2445,9	0
5	424,32	0	29	2450,4	0
6	568,43	0	30	2506,1	0
7	752,94	0	31	2543,4	0
8	798,25	0	32	2598,7	0
9	817,14	0	33	2622,5	0
10	905,57	0	<b>34</b>	<b>2684,1</b>	<b>-6,2246</b>
11	1058,7	0	35	2684,1	6,2246
12	1068,3	0	36	2691,9	0



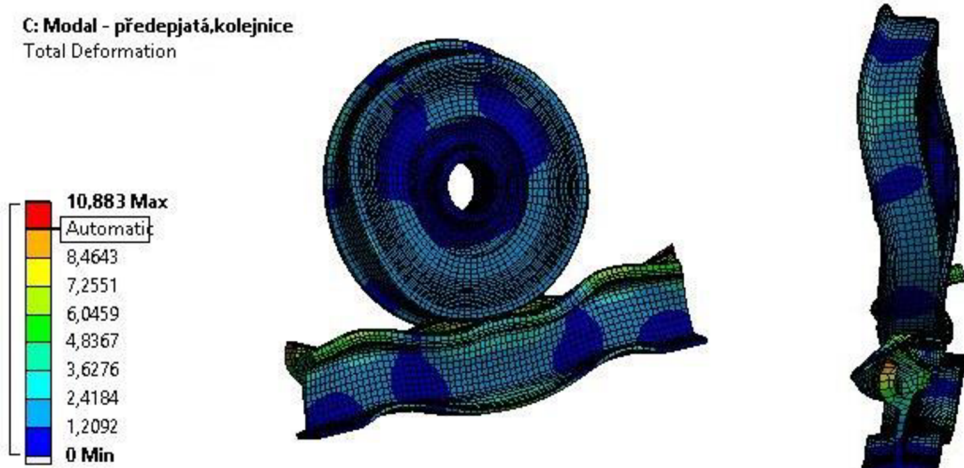
13	1084,3	0	37	2950,4	0
14	1207,6	0	38	2981,4	0
15	1367,4	0	39	3017	0
16	1445,5	0	40	3070,5	0
17	1620,6	0	41	3121,9	0
<b>18</b>	<b>1742,2</b>	<b>11,661</b>	42	3192	0
19	1742,2	-11,661	43	3213,7	0
20	1762,8	0	44	3275,6	0
21	1911,9	0	45	3374,6	0
22	1949,8	0	46	3457,6	0
23	1959,9	0	47	3504	0
24	2134,7	0			

Jediné vlastní frekvence, které mají nenulovou (kladnou) hodnotu reálné části (stability) jsou v módu 18 s frekvencí 1742 Hz a v módu 34 s frekvencí 2684 Hz. Vlastní tvary obou módů jsou znázorněny na obrázku 32 a 33.

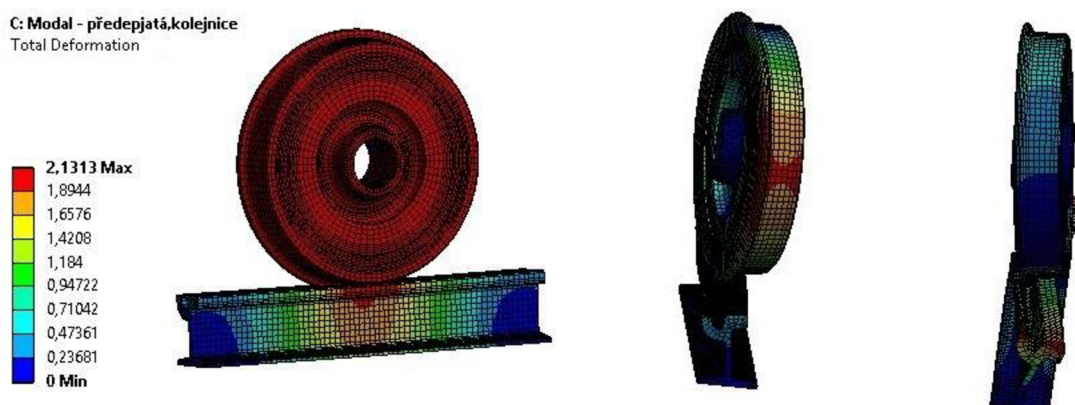
První tři módy mají charakter podélných vln, další dva módy jsou ohybové následované módem torzním. Jejich tvar je zobrazen na obrázku 34.



Obrázek 32: Osmnáctý tvar kmitu s frekvencí 1742,2 Hz



Obrázek 33: Třicátý čtvrtý tvar kmitu s frekvencí 2684,1 Hz



Obrázek 34: Tvar kmitu třetího (381,41 Hz), čtvrtého (391,61 Hz) a šestého módu (568,43 Hz)

Na obrázku 30 je vidět, že 18 mód reprezentuje ohybový tvar se třemi uzlovými průměry. Takový tvar kmitu bude při jeho vybuzení emitovat do okolí značné množství hluku. Obrázek 33 ukazuje tvar kmitu 34 módu. Tvar kmitu je nejspíše kombinací ohybového a torzního kmitu.

### 8.6.3 Prezentace výsledků – vnitřní kolo

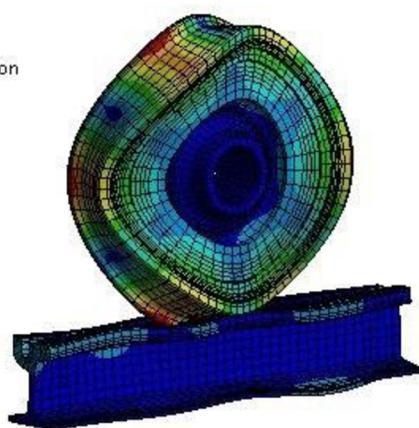
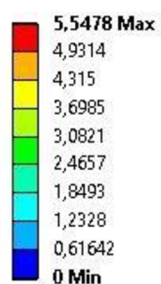
Vypočtené vlastní frekvence (imaginární část) a jejich stabilita (reálná část) pro vnitřní kolo jsou v tabulce 7.

Tabulka 7: Vlastní frekvence a jejich stabilita - vnitřní kolo

Mode	Frequency	Stability	Mode	Frequency	Stability
[-]	[Hz]	[Hz]	[-]	[Hz]	[Hz]
1	0,4481	0	25	2195,1	0
2	210,97	0	26	2226	0
3	381,36	0	27	2322,8	0
4	392,02	0	28	2432,3	0
5	424,55	0	29	2452,1	0
6	568,21	0	30	2501	0
7	752,91	0	31	2541,7	0
8	798,32	0	32	2601,2	0
9	819,42	0	33	2635,3	0
10	907,17	0	<b>34</b>	<b>2657</b>	<b>-9,184</b>
11	1059,72	0	35	2657	9,184
12	1068,1	0	36	2702,3	0
13	1084,3	0	37	2955	0
14	1208,2	0	38	2983,7	0
15	1370,1	0	39	3023,4	0
16	1445	0	40	3077,4	0
17	1623,6	0	41	3127,5	0
<b>18</b>	<b>1739,5</b>	<b>11,438</b>	42	3199,3	0
19	1739,5	-11,438	43	3223	0
20	1763,7	0	44	3283,5	0
21	1913,3	0	45	3391,4	0
22	1949	0	46	3465,2	0
23	1959,9	0	47	3511,8	0
24	2132,9	0			

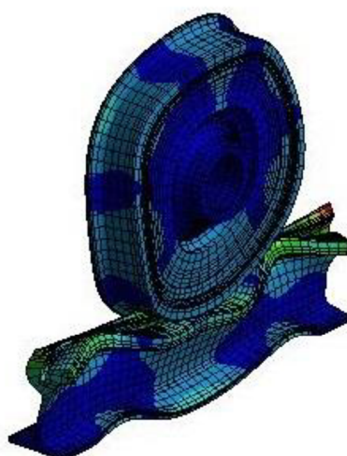
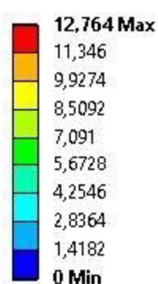
Z výsledků v tabulce 7 je patrné, že vlastní frekvence se pro vnitřní a vnější kolo téměř neliší. Rozdíl bych tu přisuzoval spíše numerickým chybám při výpočtu. Za zmínku stojí snad jen nárůst hodnoty stability (respektive nestability) u módu 34. Vlastní tvary se také shodují s vlastními tvary vnějšího kola, viz obrázky 35 - 37.

F: Modal  
Total Deformation  
Type: Total Deformation



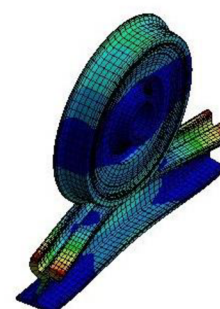
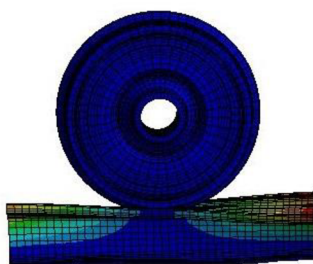
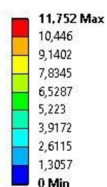
Obrázek 35: Osmnáctý tvar kmitu s frekvencí 1739,5 Hz

F: Modal  
Total Deformation  
Type: Total Deformation



Obrázek 36: Třicátý čtvrtý tvar kmitu s frekvencí 2657 Hz

F: Modal  
Total Deformation  
Type: Total Deformation



Obrázek 37: Tvar kmitu druhého, čtvrtého a šestého módu

## 8.7 Harmonická analýza

Výstupem modální analýzy bylo zjištění vlastních tvarů, frekvencí a jejich stability. Deformace v soustavě nenesou informaci o její velikosti, ale mají pouze proporcionální

charakter. Pokud je cílem určení skutečných vibrací na kole, je nutné provést harmonickou analýzu. Budící silou je v tomto případě třecí síla v místě kontaktu kola s kolejnicí. Její hodnota je zvolena jako její nejvyšší možná velikost a je dána:

$$T_{MAX} = G \cdot f = 49\,050 \cdot 0,5 = 24\,525\,N \quad (13)$$

Model je buzen silou 24 525 N s konstantní amplitudou pro všechny frekvence, jelikož jeho průběh ve frekvenční oblasti není znám. Tímto modelem buzení však zjistíme přenosovou funkci soustavy mezi místem buzení a libovolným místem na kole (popřípadě průměrem z celého povrchu kola).

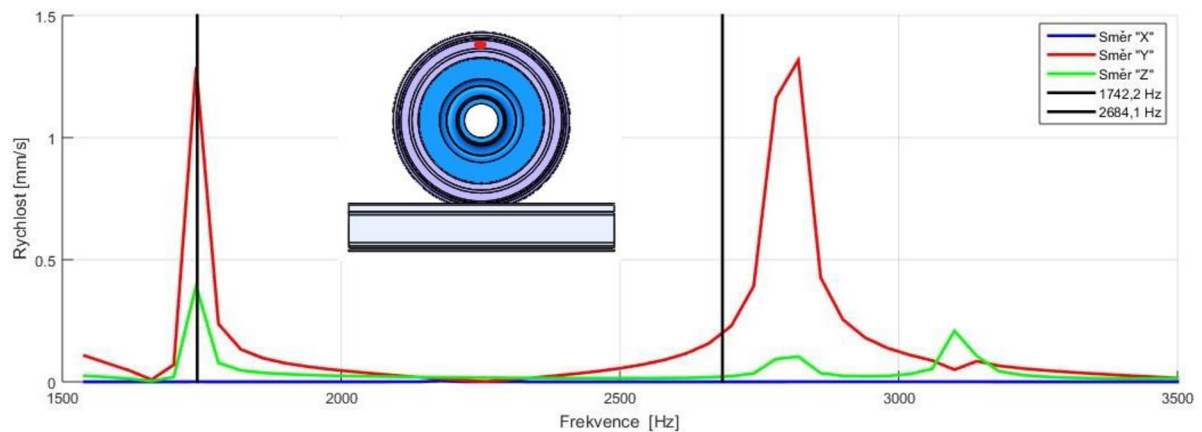
**Poznámka:** Vzhledem k téměř totožným výsledkům modální analýzy pro vnitřní a vnější kolo je analýza provedena pouze pro kolo vnitřní.

### 8.7.1 Nastavení řešiče

Jako metoda výpočtu byla zvolena metoda superpozice, která od verze Ansys 15.0 dokáže pracovat s nesympetrickými maticemi. Rozsah počítaných frekvencí byl volen 1500 - 3500 Hz s krokem 20 Hz. Tento rozsah je volen proto, že právě v tomto rozsahu se nachází všechny nestabilní tvary a právě v tomto rozsahu frekvencí se nachází největší frekvenční zastoupení vyzařovaného hluku. Všechny ostatní možnosti byly ponechány jako přednastavené.

### 8.7.2 Prezentace výsledků – vnitřní kolo

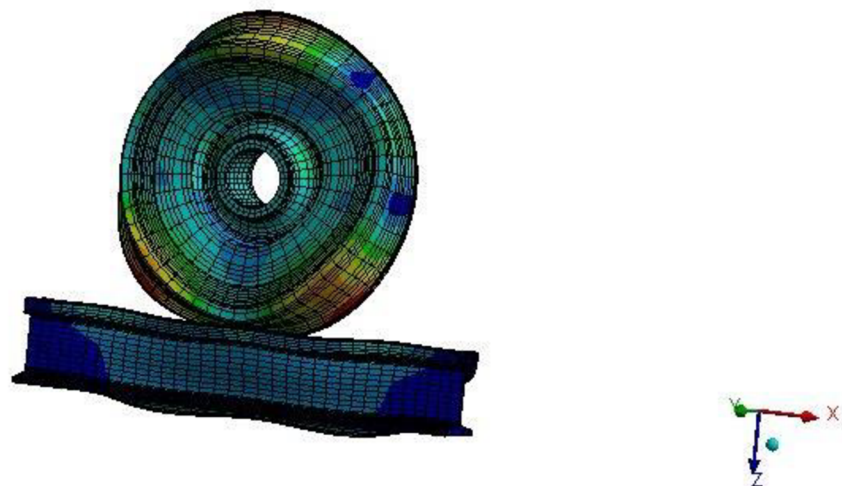
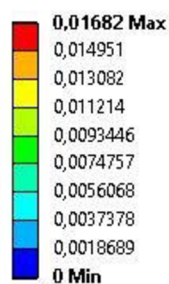
Z výsledku je možné vyhodnotit posuvy, rychlosti nebo např. zrychlení v libovolném uzlu sítě konečných prvků či ploše. Na obrázku 38 je graf rychlosti ve frekvenční oblasti na povrchu kola.



Obrázek 38: Vypočtené rychlosti v uzlu na povrchu kola

Z grafu je patrné, že vybuzené špičkové frekvence leží v blízkosti vypočtených vlastních nestabilních frekvencí. Na obrázku 39 a 40 jsou znázorněny deformace kola při špičkových frekvencích. Rychlosti na povrchu jsou pro tyto frekvence zobrazeny na obrázku 41 a 42. Obě tyto frekvence mají ohybový charakter, a tak budou nejvíce přispívat vyzařování hluku do okolí. To je patrné i z grafu na obrázku 38, který ukazuje výrazně vyšší rychlosti ve směru „y“.

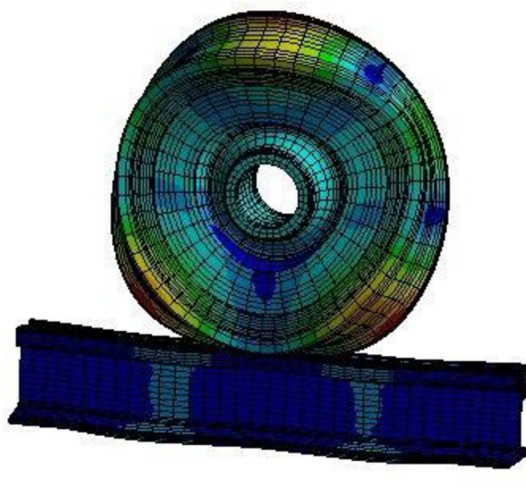
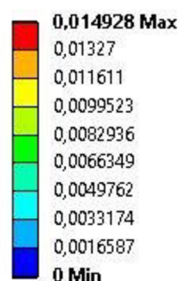
**E: Harmonic Response**  
 Total Deformation  
 Type: Total Deformation  
 Frequency: 1740, Hz  
 Sweeping Phase: 0, °



Obrázek 39: Deformace při frekvenci 1740 Hz

**F: Harmonic Response**

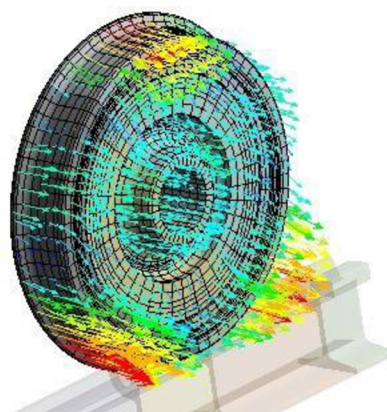
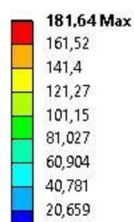
Total Deformation  
 Type: Total Deformation  
 Frequency: 1820, Hz  
 Sweeping Phase: 0, °  
 Unit: mm



Obrázek 40: Deformace při frekvenci 1820 Hz

**E: Harmonic Response**

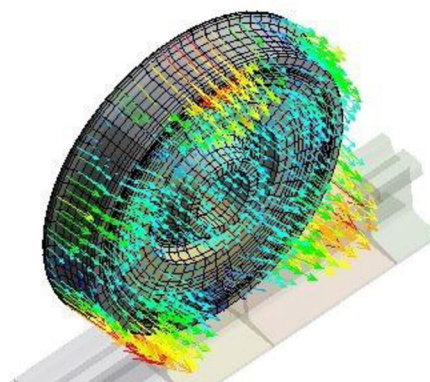
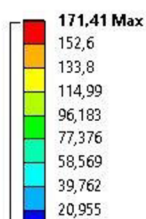
Total Velocity  
 Type: Total Velocity  
 Frequency: 1740, Hz  
 Amplitude  
 Unit: mm/s



Obrázek 41: Vektory rychlostí při frekvenci 1740 HZ

**E: Harmonic Response**

Total Velocity  
 Type: Total Velocity  
 Frequency: 1820, Hz  
 Amplitude  
 Unit: mm/s



Obrázek 42: Vektory rychlostí při frekvenci 1820 Hz

## 8.8 Parametrická studie modální analýzy

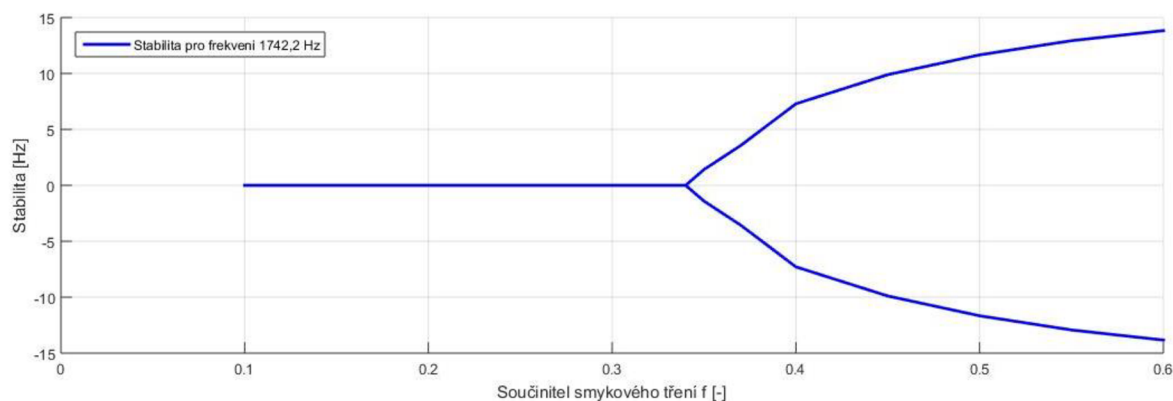
Doposud jsme se věnovaly analýzám soustavy pro jeden provozní stav a jedny provozní podmínky a dané parametry systému podstatných veličin. V reálných podmínkách se

však tyto hodnoty mění. Tyto hodnoty se mohou měnit změnou provozních podmínek, nebo změnou konstrukční. Tato kapitola bude věnována vlivu parametrů na nestabilní frekvence kola. Možných parametrů vstupujících do výpočtu je velké množství. V této práci bude analyzován pouze:

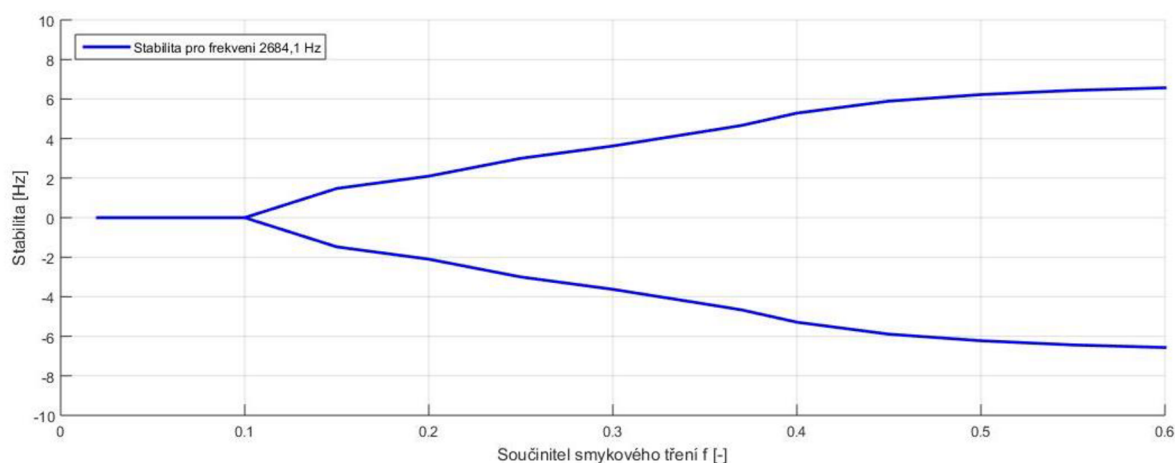
- a) Vliv součinitele tření v kontaktu kola s kolejnicí
- b) Vliv hodnoty modulu pružnosti pryžové vložky
- c) Vliv úhlu náběhu kola s kolejnicí

### 8.8.1 Vliv součinitele tření kontaktu kola s kolejnicí

Na výskyt nestabilních frekvencí má hodnota součinitele tření největší vliv. Na obrázku 43 a 44 jsou znázorněny grafy závislosti stability (reálná část vlastního čísla).



Obrázek 43: Graf závislosti koeficientu smykového tření na stabilitě pro mód 18



Obrázek 44: Graf závislosti koeficientu smykového tření na stabilitě pro mód 34

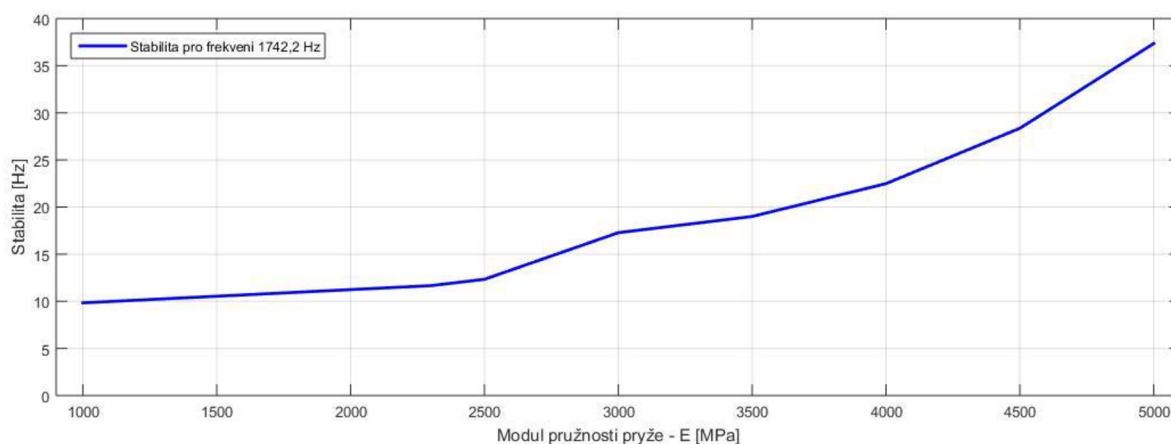


Z grafu je patrné, že při hodnotách součinitele tření menších než 3,4 se mód 18 (frekvence 1742,2 Hz) již stává stabilní. U módu 34 (frekvence 2684,1 Hz) je tato hodnota posunuta na hodnotu koeficientu tření 0,1. Z výsledků tedy vyplývá, že změnou koeficientu tření je možné snížit výskyt nestabilních frekvencí v systému.

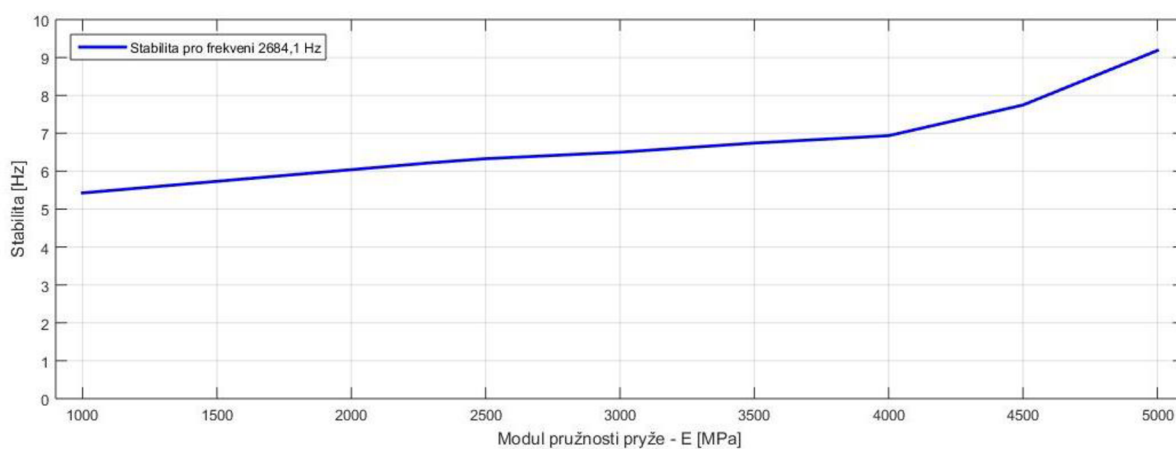
### 8.8.2 Vliv modulu pružnosti pryžové vložky

Modul pružnosti pryžové vložky ovlivňuje tuhost soustavy a je tedy pravděpodobné, že jeho hodnota bude mít vliv na výskyt nestabilních vlastních tvarů. Modul pružnosti stávající pryžové vložky je 2300 MPa. Rozsah zkoumaných hodnot byl určen jako 1000 - 5000 MPa.

Na obrázku 45 a 46 jsou grafy závislosti hodnoty nestabilních frekvencí na modulu pružnosti pryžové vložky.



Obrázek 45: Graf závislosti modulu pružnosti pryžové vložky na stabilitě pro mód 18

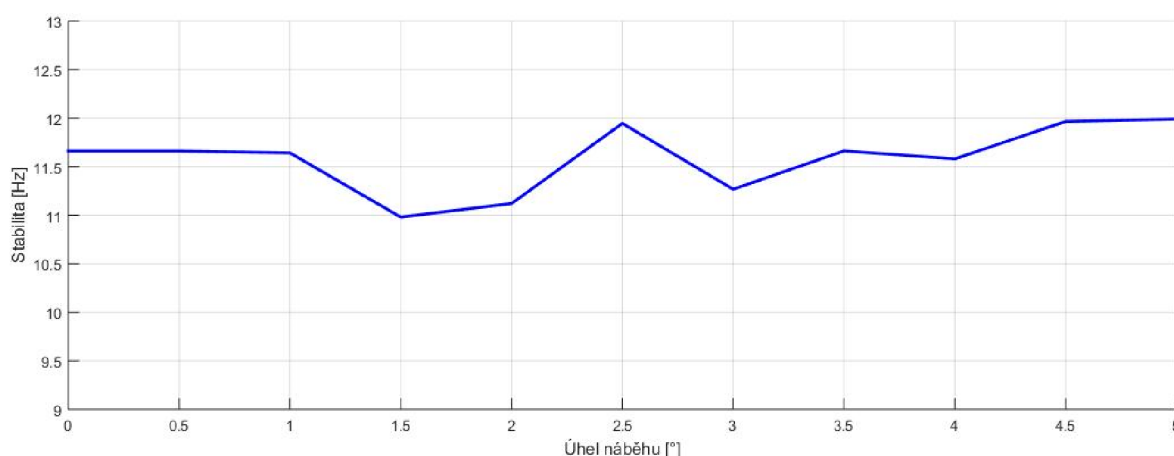


Obrázek 46: Graf závislosti modulu pružnosti pryžové vložky na stabilitě pro mód 34

Z grafů je patrné, že se zvyšující se tuhostí roste nestabilita systému pro oba módy. Snižováním modulu pružnosti pryžové vložky se sice nestabilita klesá, ale ne dostatečně. Změna modulu pružnosti pryže tedy nevede k odstranění nestabilních vlastních tvarů.

### 8.8.3 Vliv úhlu náběhu kola s kolejnicí

Úhel náběhu kola s kolejnicí mění výrazně tvar a velikost kontaktní plochy. Tato parametrická studie pracuje s rozmezím úhlu náběhu 0 - 5°. Graf závislosti úhlu náběhu kola je zobrazena na obrázku 47.



Obrázek 47: Graf závislosti úhlu náběhu na stabilitě módu 18

Z výsledků je patrné, že redukci nestabilních vlastních tvarů nelze dosáhnout změnou náběhu kola. Změna stability je nejspíše pouze numerickými chybami výpočtu.

## 8.9 Nahrazení kontaktu kola s kolejnicí pružinami

Všechny předešlé analýzy byly modelovány pomocí reálného kontaktu kola s kolejnicí s uvažováním tření. Vynucením prokluzu v kontaktu byly vytvořeny nesymetrické matice tuhosti, které umožňují nalezení vlastních frekvencí soustavy s jeho stabilitou. Vzhledem k nutnosti modelování části kolejnice, které zvyšuje počet uzlů sítě konečných prvků, a tím zvyšuje výpočetní nároky na čas, a vzhledem k faktu že všechny MKP programy neumožňují tvorbu nesymetrických matic vynucením prokluzu v kontaktu, je dobré představit nějakou alternativní možnost výpočtu.

Pokud hodnota třecí síly nedosáhne své maximální hodnoty (viz rovnice 14), tzn. kontakt má charakter adheze a matice tuhosti zůstane symetrická. Pokud ale hodnota třecí síly

dosáhne své maximální hodnoty (rovnice 15), kontakt bude mít charakter prokluzu a matice tuhosti se stane nesymetrickou. Pro jednoduchý případ kontaktu dvou uzlů jsou jednotlivé matice zobrazeny na obrázku 48.

$$T < \mu \cdot F_n \quad (14)$$

$$T = \mu \cdot F_n \quad (15)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_s & 0 & -k_s & 0 \\ 0 & k_n & 0 & -k_n \\ -k_s & 0 & k_s & 0 \\ 0 & -k_n & 0 & k_n \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} 0 & -\mu k_n & 0 & \mu k_n \\ 0 & k_n & 0 & -k_n \\ 0 & \mu k_n & 0 & -\mu k_n \\ 0 & -k_n & 0 & k_n \end{bmatrix}$$

Obrázek 48: Matice tuhosti vlevo symetrická, vpravo nesymetrická, převzato z [23]

Jak již bylo popsáno výše, nutnou podmínkou pro posouzení (a vyvolání) nestability vlastních tvarů soustavy je prezence nesymetrické matice tuhosti. Toho docílíme nahrazením kontaktu pružinovými elementy, kterým předepíšeme reálné konstanty tak, aby do výpočtu zanesly nesymetrickou matici tuhosti.

Jediným možným řešením, které nabízí Ansys je použití prvku MATRIX27.

### 8.9.1 Prvek MATRIX27

MATRIX27 je prvek, který není definován svou geometrií, ale pouze reálnými konstantami v podobě matice. Tyto matice můžou představovat matici tuhosti, matici tlumení nebo matici hmotnostních konstant. Právě matice tuhosti je využita pro popis kontaktu. Matice reálných konstant má rozměr 12x12, které reprezentují tuhosti  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ ,  $K_{\varphi_x}$ ,  $K_{\varphi_y}$ ,  $K_{\varphi_z}$  prvního uzlu následovaný tuhostmi  $K_x$ ,  $K_y$ ,  $K_z$ ,  $K_{\varphi_x}$ ,  $K_{\varphi_y}$ ,  $K_{\varphi_z}$  uzlu druhého.

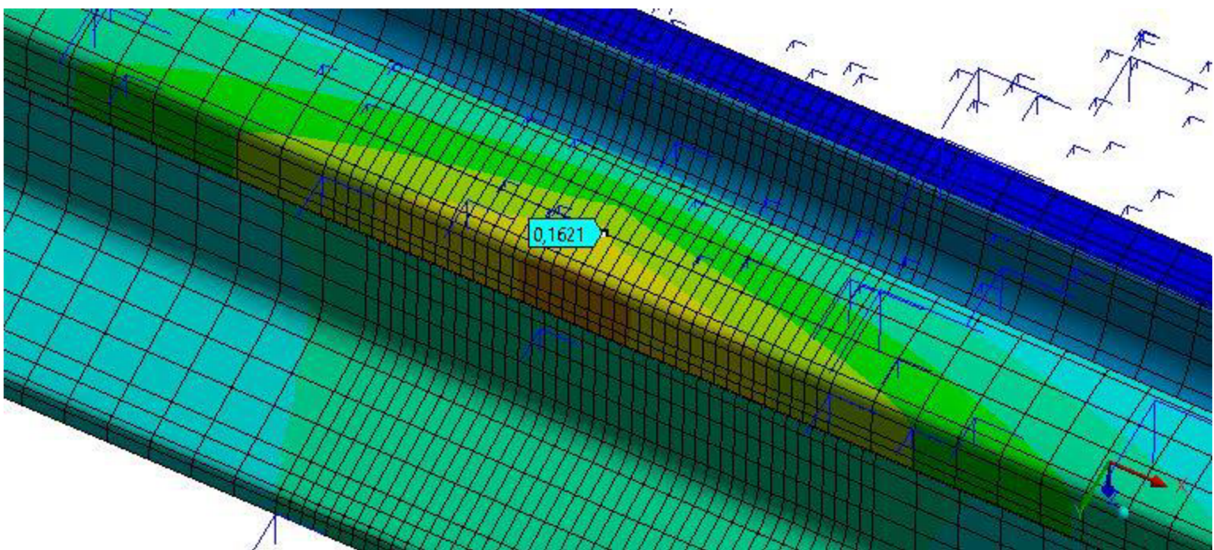
### 8.9.2 Aplikace prvku Matrix27

Pro určení reálných konstant matice je nutné znát tuhosti kontaktu. Ty je tedy nutné nejprve určit např. ze statické strukturální analýzy a to tak, že se vyčíslí hodnoty posuvů v místě kontaktu v osách „y“ a „z“ a dle vztahu 16 se přepočítají na příslušné tuhosti.

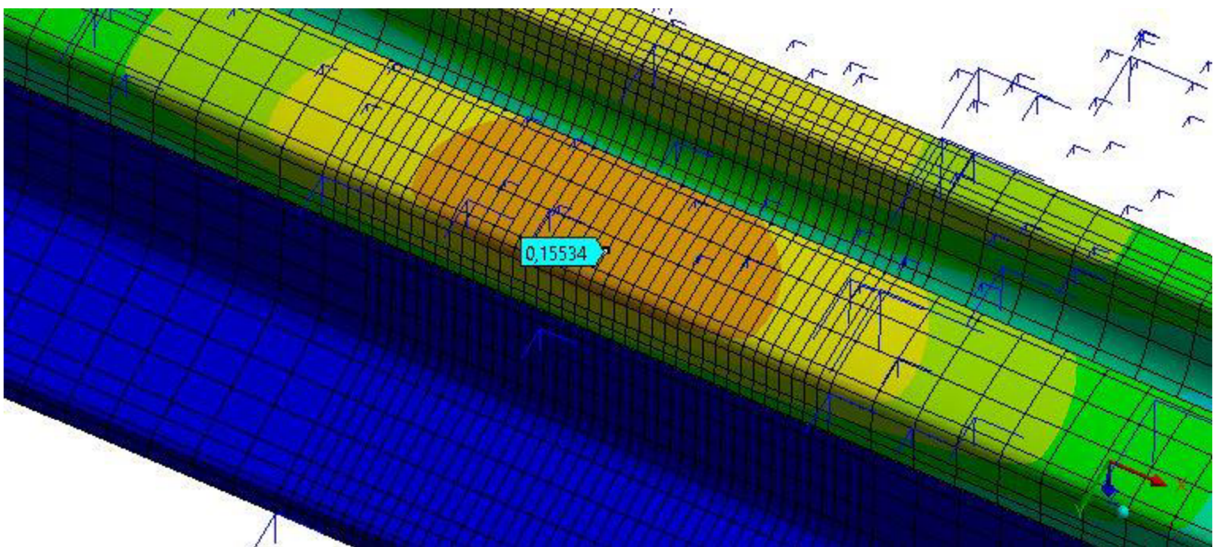
$$K_n = \frac{F}{\Delta l} \quad (16)$$

Kde  $F$  [N] je aplikovaná síla a  $\Delta l$  [m] je deformace v daném směru.

Hodnoty posuvů jsou zobrazeny na obrázku 49 a 50.



Obrázek 49: Hodnota posuvu v ose "z"



Obrázek 50: Hodnota posuvu v ose "y"

Hodnoty posuvů obdržené statickou analýzou jsou tedy:

- $\Delta l_z = 0,1621 \text{ mm}$
- $\Delta l_z = 0,15534 \text{ mm}$

Vypočtenou normálovou tuhost pak již jen dosadíme do matice tuhosti prvku. Výsledná matice tuhosti pro pružiny nahrazující kontakt na dosedací ploše mají podobu viz obrázek 51.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu \cdot \sin\theta \cdot K_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \cdot \sin\theta \cdot K_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \cdot \cos\theta \cdot K_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \cdot \cos\theta \cdot K_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \cdot \sin\theta \cdot K_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \cdot \sin\theta \cdot K_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \cdot \cos\theta \cdot K_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \cdot \cos\theta \cdot K_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obrázek 51: Matice tuhosti prvku MATRIX27

Kde  $K_z [\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$  je tuhost ve směru osy “z”,  $\mu[-]$  je součinitel smykové tření a  $\theta [^\circ]$  je úhel sklonu kontaktní plochy kola.

Pro pružiny nahrazující kontakt na okolku je matice tuhosti tvořena obdobným způsobem.

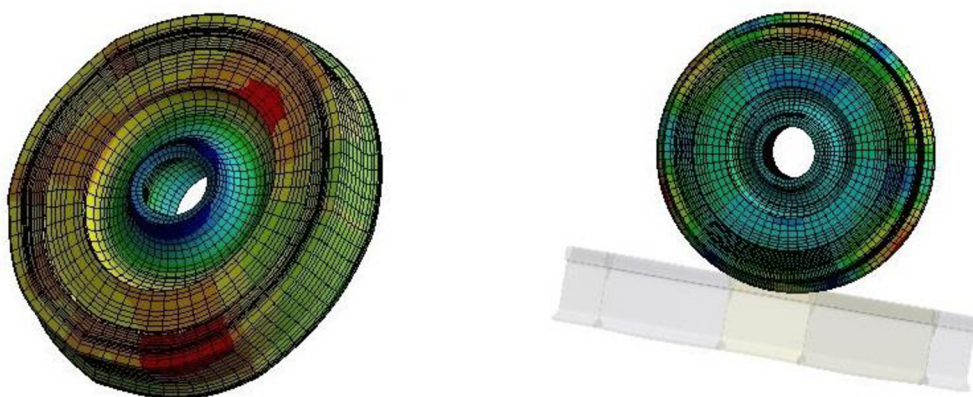
### 8.9.3 Modální analýza

Modální analýza je řešena opět jako předepjatá, kde ve statické analýze jsou stejné okrajové podmínky jako v kapitole 8.5. Obdržené vlastní frekvence a jejich stabilita jsou v tabulce 8.

Tabulka 8: Vlastní frekvence a jejich stabilita

Mode	Frequency	Stability	Mode	Frequency	Stability
[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]	[Hz]
1	409,08	0	16	2790,2	0
2	513,36	0	17	3044	0
3	584,87	0	18	3114	0
4	675,33	0	19	3417,1	0
5	805,08	0	20	3462,6	0
6	1350,6	0	21	3469,7	0
7	1394,2	0	22	3638	0
8	1431,7	0	23	3712	0
9	1730,9	44,259	24	3854,9	38,236
10	1730,9	-44,259	25	3854,9	-38,236
11	2004,4	0	26	3872,7	0
12	2361,8	0	27	3968	17,841
13	2701,6	0	28	3968	-17,841
14	2727,8	0	29	4050,3	10,668
15	2737,8	0	30	4050,3	-10,668

Pokud se podíváme na výsledky této analýzy tak je patrné, že je zde vybuzen nestabilní tvar o vlastní frekvenci 1730,9 Hz. Ta je velice podobná vlastní frekvenci nestabilního tvaru při použití kontaktu. Porovnání jejich vlastních tvarů je na obrázku 52. Nestabilní frekvence v okolí 2650 Hz se zde nevybudí vůbec. Naopak při vlastních frekvencích nad 3800 Hz se zde stávají nestabilní téměř všechny vlastní tvary.



Obrázek 52: Porovnání vlastních tvarů kmitu

### 8.9.4 Porovnání

Pokud chceme porovnávat jednotlivé způsoby řešení, musíme na ně podívat z několika hledisek. První a samozřejmě nejpodstatnější hledisko je zde přesnost výpočtu. Vzhledem k tomu, že do výpočtu s nahrazením kontaktu pružinami vnášíme spoustu nepřesností, jako například nepřesný odhad tuhosti kontaktu či plochy kontaktu. V tomto směru je jednoznačně přesnější a tudíž lepší metoda s využitím nuceného prokluzu v kontaktu.

Dalším aspektem při porovnávání je doba výpočtu. Hlavně při parametrických studiích je doba výpočtu velice důležitým faktorem. V tabulce 9 je porovnání doby výpočtu obou metod s informacemi o výpočetním výkonu PC.

Tabulka 9: Porovnání doby výpočtu obou metod

		Pružina	Kontakt
Parametry PC		Intel i7 – 4600U CPU, 2,7 GHz, 8GB RAM	
Doba výpočtu	[min]	27 min	103 min
Rozdíl	[%]	-	381,5

Pro parametrickou studii je tedy s ohledem na oba aspekty výhodnější metoda s nahrazením kontaktu pružinami.

## 9 NÁVRH DALŠÍHO POSTUPU

Pro pokračování v této práci navrhuji další postup:

- Provést detailnější analýzu amplitudo-frekvenční charakteristiky budící síly v kontaktu a na jejím základě provést analýzu harmonické odezvy a určit, které frekvence se nejvíce podílí na množství vyzařovaného hluku.
- Na základě výsledků z harmonické odezvy provést výpočet vyzařovaného hluku



## ZÁVĚR

Cílem práce bylo vytvořit výpočtový model pro analýzu komplexních vlastních frekvencí kola tramvaje vlivem kontaktu s kolejnicí. Toho bylo docíleno dvěma způsoby. První výpočtový model obsahoval geometrii kola i kolejnice, mezi kterými byl zaveden kontakt s uvažováním tření. Vynucením prokluzu kontaktu bylo umožněno spočítání komplexních vlastních tvarů. Druhý výpočtový model nahrazoval kontakt za využití pružin MATRIX27. Poté bylo provedeno srovnání těchto dvou přístupů. V dalším kroku byla provedena analýza vlivu různých parametrů na výskyt nestabilních vlastních tvarů. V poslední části práce byla provedena harmonická analýza, ze které byly obdrženy hodnoty rychlostí na povrchu kola, které mohou být dále použity pro výpočet vyzařování hluku do okolí.

### Podstatné závěry tedy jsou:

- Výpočtovým modelováním byly odhaleny existence nestabilních vlastních tvarů pro frekvence blízké 1750 a 2700 Hz pro jak vnitřní, tak vnější kolo. Ukázalo se, že tyto frekvence mají dominantně ohybový tvar a tudíž je možné předpokládat, že přispívají velkou měrou na vyzařování hluku do okolí.
- Výpočtový model uvažující nahrazení kontaktu pomocí pružin poskytuje na rozlišovací úrovni problému dobrou aproximaci a vzhledem k třetinovému času výpočtu je bezpochyby alespoň pro parametrické výpočty lepší volbou.
- Z výsledků parametrické analýzy vyplývá, že největší roli na výskyt nestabilních frekvencí má součinitel smykového tření v kontaktu mezi kolem a kolejnicí. Snižováním hodnoty součinitele tření je možné některé nestabilní tvary úplně potlačit. Změny ostatních parametrů neprokázali významnější vliv na výskyt nestabilních tvarů. V této analýze však bylo provedeno jen omezené množství výpočtů s malým množstvím parametrů, které by bylo zapotřebí obohatit hlavně o parametrickou studii geometrie kola. Ta však nebyla náplní této práce a nebyla počítána.
- Z výsledků harmonické analýzy je patrné, že největší hodnoty rychlostí na povrchu kola jsou dominantní ve směru osy „y“, tedy ve směru osy kola. Vzhledem k největší ploše kola právě v tomto směru to vede k značnému vyzařování hluku. V modelu výpočtu je budící síla brána s konstantní amplitudou pro všechny frekvence a výsledky tudíž nemají charakter reálných

hodnot, ale jsou jen přenosovou funkcí mezi místem buzení a libovolným místem na povrchu kola. Pro vyhodnocení skutečných hodnot rychlostí na povrchu a následného výpočtu vyzařovaného hluku do okolí je tedy do modelu výpočtu nutné zahrnutí reálného průběhu budící síly ve frekvenční oblasti.

---

## SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] JANÍČEK, Přemysl. *Systémové pojetí vybraných oborů pro techniky: hledání souvislostí. Učební texty I.* Vyd. 1. Akademické nakladatelství CERM : VUTIUM, 2007. ISBN 978-80-7204-555-6.
- [2] IWNICKI, S. *Handbook of railway vehicle dynamics.* Boca Raton: CRC/Taylor, 2006, 535 s. ISBN 0-8493-3321-0 s.
- [2] Dukkipati, R. V.: *Vehicle Dynamics.* Boca Raton: Narosa Publishing House, 2000, ISBN 0-8493-0976-X, 591 s.
- [3] THOMPSON D. J., C. J. C. JONES.: A Review of the Modelling of Wheel/Rail Noise Generation, *Journal of Sound and vibration* 231(3), 2000, str. 519-536
- [4] Yang Z., Z. Li and R. Dollevoet: *An explicit integration finite element method for impact noise generation at squat*, Proceedings of the 11th International Workshop on Railway Noise, 2013, str. 66-73
- [5] *Tramvaj ForCity Classic Miskolc.* ŠKODA TRANSPORTATION a.s.. [online]. [2012] [cit. 2014-05-01]. Dostupné z: [www.skoda.cz/cs/produkty/tramvaje/forcity/tramvaj-26-t/](http://www.skoda.cz/cs/produkty/tramvaje/forcity/tramvaj-26-t/)
- [6] JANDORA, R. *Výpočtové modelování dynamických projevů v kontaktu kola a kolejnice s obecnou geometrií kontaktních povrchů.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 154 s. Vedoucí prof. Ing. Přemysl Janiček, DrSc.
- [7] 2001 - Tramvajová kola průměru 600 mm. *ITC Group* [online]. 2001 [cit. 2016-05-01]. Dostupné z: <http://www.itcgroup.cz/reference/2001-tramvajova-kola-o-prumeru-600-mm>
- [8] Škoda 26T. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2014 [cit. 2016-05-01]. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/%C5%A0koda\\_26T](https://cs.wikipedia.org/wiki/%C5%A0koda_26T)
- [9] NOVOTNÝ, Vojtěch. *Městská kolejová doprava* [online]. Praha, 2015 [cit. 2016-05-01]. Dostupné z: <https://www.fd.cvut.cz/personal/novotvo4/wp-content/uploads/2014/02/MKDP-cvi%C4%8Den%C3%AD-2-download1.pdf>. ČVUT v Praze, Fakulta dopravní.
- [10] Comisión nacional de regulación del transporte: Perfiles de rieles, [cit. 2016-05-01]. Dostupné z: <http://www.cnrt.gov.ar/ultrasonido/GST%20%28VO%29%20022.jpg>
- [11] Fanpage-der-Wiener-Linien: Rillenschiene Ri 60, [cit. 2016-05-01]. Dostupné z: <http://www.fpdwl.at/4images/data/media/112/Ri60.jpg>
- [12] Katedra železničních staveb Fakulty stavební ČVUT: *Stavby kolejové dopravy*, [cit. 2016-05-01]. Dostupné z: <http://kzs.fsv.cvut.cz/>

- 
- [13] Kolejnice. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2016 [cit. 2016-05-02]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Kolejnice>
- [14] SUGIYAMA, Hiroyuki a Yoshihiro SUDA. On the Contact Search Algorithms for Wheel/Rail Contact Problems. *J. Comput. Nonlinear Dynam* [online]. 209n. l., 4(4), 1-7 [cit. 2016-05-03]. DOI: 10.1115/1.3187211. Dostupné z: <http://computationalnonlinear.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1395529>
- [15] *Techportal.cz* [online]. Praha, 2016 [cit. 2016-05-20]. Dostupné z: [www.techportal.cz](http://www.techportal.cz)
- [16] Tíha a tíhová síla. *Encyklopedie fyziky* [online]. [cit. 2016-05-03]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/61-tiha-a-tihova-sila>
- [17] LAWRENCE, Kent L. *ANSYS workbench tutorial: structural & thermal analysis using the ANSYS workbench release 14 environment*. Mission: SDC Publications, 2012, 1 sv. (různé stránkování) : il. ISBN 978-1-58503-754-4.
- [18] XUESONG, Jin a Zefeng WEN. Effect of passenger car curving on rail corrugation at a curved track. *Science direct*. 2006, 2006(260), 619-633.
- [19] Polách, O. Influence of locomotive tractive effort on the forces between wheel and rail. *Vehicle System Dynamics Supplement 35*, 2001: s. 7–22.
- [20] Matsumoto, A.; Sato, Y.; Ohno, H.; aj.: Improvement of bogie curving performance by using friction modifier to rail/wheel interface, Verification by full-scale rolling stand test. *Wear*, 258(7), 2005: str. 1201–1208.
- [21] Kalousek, J.: Wheel/rail damage and its relationship to track curvature. *Wear*, 258(7), 2005: str. 1330–1335.
- [22] Grassie, S. L.; Elkins, J. A.: Tractive effort, curving and surface damage of rails, Part 1. Forces exerted on the rails. *Wear*, 258(7), 2005: str. 1235–1244.
- [23] IMAOKA, Sheldon. *Sheldon's ANSYS Tips and Tricks: QR Damped Method and Unsymmetric [K]*. 2005, str. 1-5.
- [24] A Hybrid Model For The Noise Generation Due To Rsilway Wheel Flats. *Journal of Sound and Vibration*. 2002, (251), 115-139. DOI: 10.1006/jsvi.2001.3980
- [25] Brake Qqueel Analysis [Prezentace PowerPoint]. 2014 [cit. 2016-05-20]. Dostupné z: <http://register.ansys.com>
-

- [26] AHMED, Ibrahim, Essam ALLAM a Mohamed KHALIL. Automotive Drum Brake Squeal Analysis Using Complex Eigenvalue Methods. *International Journal of Modern Engineering Research*. 2012, 2(1), 179-199. ISSN 2249-6645.
- [27] Automotive Brake Squeal Analysis Using a Complex Modes Approach [Prezentace PowerPoint]. 2007 [cit. 2016-05-20]. Dostupné z: <http://www.simula.com>
- [28] OUYANG, Huajiang. Numerical analysis of automotive disc brake squeal: a review. *Int. J. Vehicle Noise and Vibration*. 2005, 1.

## SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

Veličina	Jednotka	Popis
$\mu$	[-]	Poissonův poměr
$a$	[m.s <sup>-2</sup> ]	Zrychlení
$a_d$	[m.s <sup>-2</sup> ]	Dostředivé zrychlení
$c$	[m.s <sup>-1</sup> ]	Rychlost zvuku v materiálu
$E$	[MPa]	Modul pružnosti materiálu
$e_p$	[m]	Rozchod kolejnic
$F$	[N]	Síla
$f_{\max}$	[Hz]	Frekvence vlnění
$F_o$	[N]	Odstředivá síla
$f_T$	[-]	Statický součinitel smykového tření
$G$	[N]	Tíhová síla, tíha
$g$	[m.s <sup>-2</sup> ]	Tíhové zrychlení
$k_n$	[N.m <sup>-1</sup> ]	Normálová tuhost
$k_s$	[N.m <sup>-1</sup> ]	Smyková tuhost
$l_{\min}$	[m]	Maximální velikost prvku
$m_{1n}$	[kg]	Hmotnost vozidla na jedno kolo
$m_c$	[kg]	Celková hmotnost vozidla
$n_k$	[-]	Počet kol na jedné nápravě
$n_n$	[-]	Počet náprav
$O$	[N]	Objemová síly
$\Theta$	[°]	Úhel sklonu kontaktní plochy kola
$p_v$	[mm]	Převýšení vnější kolejnice
$R_e$	[m]	Vnitřní poloměr oblouku
$R_i$	[m]	Vnější poloměr oblouku
$r_k$	[m]	Poloměr kola
$R_s$	[m]	Střední poloměr oblouku
$T$	[N]	Třecí síla
$v_{\max}$	[km.h <sup>-1</sup> ]	Maximální povolená rychlost
$\lambda$	[m]	Vlnová délka
$\rho$	[kg.m <sup>-1</sup> ]	Hustota materiálu
$\sigma_{\text{HMH}}$	[MPa]	Redukované napětí
$\omega$	[rad.s <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost

---

## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Schématické znázornění vibrací způsobené nerovností stykových ploch, převzato z [3]	19
Obrázek 2: Tramvaj 26T, převzato z [5]	21
Obrázek 3: Řez skládaným tramvajovým kolem, převzato z [7]	22
Obrázek 4: Průřez kolejnice	23
Obrázek 5: Profil kolejnice UIC 60, převzato z [10]	24
Obrázek 6: Profil kolejnice Ri60,	24
Obrázek 7: Základní typy tramvajových oblouků, převzato z [9]	25
Obrázek 8: Kontakt kola s kolejnicí, vlevo pro vnitřní a vpravo vnější kolo, převzato z [14]	27
Obrázek 9: Prostorový model kola	28
Obrázek 10: Hlavní rozměry kola	28
Obrázek 11: Prostorový model kolejnice	29
Obrázek 12: Profil kolejnice Ri60 Převzato z [11]	29
Obrázek 13: Provozní stavy kola. Zleva: jízda obloukem, zrychlování, jízda konstantní rychlostí	31
Obrázek 14: Působení tíhové a odstředivé síly ve vzdáleném bodu	32
Obrázek 15: Předepsání deformačních okrajových podmínek do vzdáleného bodu	33

---

Obrázek 16: Schéma použitého uložení s přesahem	34
Obrázek 17: Síť konečných prvků	35
Obrázek 18: Okrajové podmínky	36
Obrázek 19: Průběh redukováného napětí v kole	36
Obrázek 20: Průběh radiální deformace v kole	37
Obrázek 21: Průběh deformace na ploše náboje kola	37
Obrázek 22: Průběh deformace na ploše náboje kola a jeho průměrná hodnota	38
Obrázek 23: Porovnání redukováného napětí	38
Obrázek 24: Spojení kolejnice s podložím	39
Obrázek 25: Kontakt mezi pomocně rozdělenými tělesy	42
Obrázek 26: Síť konečných prvků disku a obruče kola	43
Obrázek 27: Síť konečných prvků pryžové vložky	44
Obrázek 28: Síť konečných prvků kolejnice	45
Obrázek 29: Rozložení napětí na kole	47
Obrázek 30: Rozložení napětí v místě kontaktu – vnitřní kolo	47
Obrázek 31: Rozložení napětí v místě kontaktu - vnější kolo	49
Obrázek 32: Osmnáctý tvar kmitu s frekvencí 1742,2 Hz	49
Obrázek 33: Třicátý čtvrtý tvar kmitu s frekvencí 2684,1 Hz	50
Obrázek 34: Tvar kmitu třetího (381,41 Hz), čtvrtého (391,61 Hz) a šestého módu (568,43 Hz)	50
Obrázek 35: Osmnáctý tvar kmitu s frekvencí 1739,5 Hz	52



---

Obrázek 36: Třicátý čtvrtý tvar kmitu s frekvencí 2657 Hz	52
Obrázek 37: Tvar kmitu druhého, čtvrtého a šestého módu	52
Obrázek 38: Vypočtené rychlosti v uzlu na povrchu kola	54
Obrázek 39: Deformace při frekvenci 1740 Hz	54
Obrázek 40: Deformace při frekvenci 1820 Hz	55
Obrázek 41: Vektory rychlostí při frekvenci 1740 Hz	55
Obrázek 42: Vektory rychlostí při frekvenci 1820 Hz	55
Obrázek 43: Graf závislosti koeficientu smykového tření na stabilitě pro mód 18	56
Obrázek 44: Graf závislosti koeficientu smykového tření na stabilitě pro mód 34	56
Obrázek 45: Graf závislosti modulu pružnosti pryžové vložky na stabilitě pro mód 18	57
Obrázek 46: Graf závislosti modulu pružnosti pryžové vložky na stabilitě pro mód 34	57
Obrázek 47: Graf závislosti úhlu náběhu na stabilitě módu 18	58
Obrázek 48: Matice tuhosti vlevo symetrická, vpravo nesymetrická, převzato z [23]	59
Obrázek 49: Hodnota posuvu v ose "z"	60
Obrázek 50: Hodnota posuvu v ose "y"	60
Obrázek 51: Matice tuhosti prvku MATRIX27	61
Obrázek 52: Porovnání vlastních tvarů kmitu	62

**SEZNAM TABULEK**

Tabulka 1: Technické údaje tramvaje 26T [8],[5]	21
Tabulka 2: Materiálové charakteristiky kola	30
Tabulka 3: Materiálové charakteristiky kolejnice	30
Tabulka 4: Provozní stavy kolejového vozidla	31
Tabulka 5: Konvergence sítě	45
Tabulka 6: Vlastní frekvence a jejich stabilita – vnější kolo	48
Tabulka 7: Vlastní frekvence a jejich stabilita - vnitřní kolo	51
Tabulka 8: Vlastní frekvence a jejich stabilita	62
Tabulka 9: Porovnání doby výpočtu obou metod	63