

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Přírodovědecká fakulta  
Katedra algebry a geometrie



Marie Ošlejšková

ROTAČNÍ KVADRIKY V PŘÍKLADECH

Diplomová práce  
v oboru Matematika – Deskriptivní geometrie

Vedoucí práce: RNDr. Lenka Juklová, Ph.D.

Olomouc 2012

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a že jsem uvedla veškerou použitou literaturu.

V Olomouci 21. května 2012

.....

## **Poděkování**

Děkuji vedoucí diplomové práce RNDr. Lence Juklové, Ph.D za cenné rady, připomínky a poznámky, které mi poskytla v průběhu zpracovávání celé práce. Děkuji také svým rodičům za jejich podporu, kterou mi po celou dobu studia poskytovali.

## Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>6</b>
<b>2 Metodika</b>	<b>7</b>
<b>3 Rotační kvadriky - teorie</b>	<b>8</b>
<b>3.1 Definice rotačních kvadrik, základní vlastnosti</b>	<b>8</b>
3.1.1 Rotační elipsoidy	9
3.1.2 Rotační paraboloidy	11
3.1.3 Rotační hyperboloidy	12
<b>3.2 Řezy rotačních kvadrik rovinou</b>	<b>16</b>
3.2.1 Řez rotačních elipsoidů rovinou	16
3.2.2 Řez rotačního paraboloidu rovinou	16
3.2.3 Řez rotačních hyperboloidů rovinou	17
<b>3.3 Průsečíky přímky s rotační kvadrikou</b>	<b>18</b>
3.3.1 Průsečíky přímky s rotačním elipsoidem	19
3.3.2 Průsečíky přímky s rotačním paraboloidem	21
3.3.3 Průsečíky přímky s rotačními hyperboloidy	21
<b>3.4 Tečné roviny rotační kvadriky</b>	<b>22</b>
<b>3.5 Průniky rotačních kvadrik</b>	<b>24</b>
<b>3.6 Osvětlení rotačních kvadrik</b>	<b>25</b>
3.6.1 Osvětlení rotačního elipsoidu	31
3.6.2 Osvětlení rotačního paraboloidu	31
3.6.3 Osvětlení rotačního hyperboloidu	32
<b>3.7 Zobrazení rotačních kvadrik v různých projekcích</b>	<b>33</b>
3.7.1 Obrys rotační kvadriky v Mongeově projekci	33
3.7.2 Obrys rotační kvadriky v kótovaném promítání	35
3.7.3 Obrys rotační kvadriky v pravouhlé axonometrii	36
<b>4 Řešené příklady</b>	<b>37</b>
<b>4.1 Konstrukce rotačních kvadrik ze zadaných podmínek</b>	<b>37</b>
Příklad 1 – Konstrukce rotačního elipsoidu v Mongeově promítání	37
Příklad 2 – Konstrukce rotačního paraboloidu v Mongeově promítání	39

## Rotační kvadriky v příkladech

Příklad 3 – Konstrukce rotačního paraboloidu v kótovaném promítání _____	41
Příklad 4 – Konstrukce dvojdílného rotačního hyperboloidu v Mongeově promítání _____	43
Příklad 5 – Konstrukce jednodílného rotačního hyperboloidu v pravouhlé axonometrii _____	45
Příklad 6 – Konstrukce dvojdílného rotačního hyperboloidu v Mongeově promítání _____	48
<b>4.2 Řezy rotačních kvadrik _____</b>	<b>51</b>
Příklad 7 – Řez rotačního elipsoidu v Mongeově promítání _____	51
Příklad 8 – Řez rotačního paraboloidu v kótovaném promítání _____	53
<b>4.3 Průsečíky přímky s rotační kvadrikou _____</b>	<b>56</b>
Příklad 9 – Průsečíky přímky s jednodílným rotačním hyperboloidem, tečná rovina hyperboloidu v Mongeově promítání _____	56
Příklad 10 – Průsečíky přímky s rotačním elipsoidem v axonometrii _____	59
Příklad 11 – Průsečík přímky s dvojdílným hyperboloidem, tečná rovina _____	62
Příklad 12 – Tečné roviny k jednodílnému hyperboloidu procházející nevlastní přímkou _____	65
Příklad 13 – Průsečík přímky s rotačním paraboloidem _____	67
<b>4.4 Průniky rotačních kvadrik _____</b>	<b>69</b>
Příklad 14 – Průnik dvojdílného hyperboloidu a elipsoidu _____	69
Příklad 15 – Průnik paraboloidu a protáhlého elipsoidu v axonometrii _____	72
Příklad 16 – Vivianioho křivka _____	75
<b>4.5 Osvětlení rotačních kvadrik _____</b>	<b>78</b>
Příklad 17 – Rovnoběžné osvětlení rotačního paraboloidu _____	78
Příklad 18 – Středové osvětlení protáhlého elipsoidu _____	80
Příklad 19 – Rovnoběžné osvětlení rotačního paraboloidu v axonometrii _____	83
Příklad 20 – Rovnoběžné osvětlení jednodílného hyperboloidu _____	86
<b>5 Zadání příkladů _____</b>	<b>89</b>
<b>6 Závěr _____</b>	<b>109</b>
<b>7 Literatura _____</b>	<b>110</b>

## 1 Úvod

V této diplomové práci bylo mým záměrem sestavit sbírku řešených příkladů věnující se tématu rotačních kvadrik.

Tato sbírka může být využita studenty, kteří studují deskriptivní geometrii na vysokých školách, k procvičení probírané látky, jako příprava na zkoušku nebo jako opakování probraného učiva před státní závěrečnou zkouškou z deskriptivní geometrie. Příklady mohou být také vhodnou pomůckou pro učitele deskriptivní geometrie přímo při výuce, případně jako zadání písemné práce nebo podklady pro zadání domácí práce k samostatnému vypracování.

První část diplomové práce obsahuje teorii rotačních kvadrik. Zde jsou jednotlivé rotační kvadriky definovány a jsou popsány základní pojmy a vlastnosti rotačních kvadrik. Dále jsou zde uvedeny základní konstrukce, které se při řešení příkladů na rotačních kvadrikách využívají. V jednotlivých kapitolách teorie je vždy uvedeno, které příklady se k dané části vztahují. Další část diplomové práce tvoří vlastní řešené příklady na rotačních plochách. Jsou zde uvedeny příklady konstrukcí rotačních kvadrik ze zadaných prvků, řezy rotačních kvadrik, průsečíky přímky s rotační kvadrikou, průniky rotačních kvadrik a osvětlení rotačních kvadrik. Příklady jsou řešeny v různých typech projekcí.

Každý řešený příklad obsahuje tři části:

- **Zadání** – je v textu práce uvedené pouze slovně. Grafické zadání příkladů je zařazeno na konci diplomové práce v kapitole 5 a je zpracováno tak, aby mohlo být použitelné pro učitele jako podklad pro kopírování a předložení žákům k vypracování.
- **Postup** – je pro větší přehlednost popsán v jednotlivých bodech. Postup obsahuje popis prostorového řešení i řešení v konkrétní zobrazovací metodě a uvádí použité konstrukce a metody řešení.
- **Řešení** – obsahuje vyřešený narýsovaný příklad.

Při popisu konstrukcí a řešení příkladů se předpokládá, že je čtenář seznámen se základními typy zobrazovacích metod a dokáže v nich řešit základní úlohy, umí aplikovat ohniskové vlastnosti kuželoseček při jejich konstrukci, ovládá Rytzovu konstrukci [11] a je seznámen se základy projektivní geometrie, především s polárními vlastnostmi kuželoseček [12, s. 236-238].

## **2 Metodika**

Po prostudování dané problematiky z uvedené literatury jsem sestavila vhodné příklady tak, aby byly názorné a pokryly dané téma. Všechny příklady jsou vytvořené v programu DesignCAD a následně převedené jako vektorové obrázky do diplomové práce.

### 3 Rotační kvadriky - teorie

#### 3.1 Definice rotačních kvadrik, základní vlastnosti

Rotační kvadrika je rotační plocha, která vzniká rotací kuželosečky kolem některé její osy. Je-li rotující kuželosečka regulární (resp. singulární), pak také příslušná kvadrika je regulární (resp. singulární). Mezi singulární kvadriky patří rotační válcová plocha a rotační kuželová plocha. Regulárními kvadrikami jsou: kulová plocha, rotační elipsoidy, rotační paraboloid a rotační hyperboloidy. Průsečky rotační kvadriky s osou rotace nazýváme vrcholy kvadriky. Je-li rotující kuželosečka středová, pak také příslušná kvadrika je středová a jejím středem je střed kuželosečky. [10, s. 101]

Každý bod kuželosečky, jejíž rotací vzniká rotační kvadrika, vytváří při rotaci kolem osy kružnici, kterou nazýváme rovnoběžková kružnice nebo zkráceně rovnoběžka. Průniky kvadriky s rovinami procházející osou rotace kvadriky jsou tvořící kuželosečky plochy. Tyto průnikové kuželosečky nazýváme meridiány. Každý meridián je souměrný podle osy rotace, všechny meridiány rotační kvadriky jsou shodné kuželosečky, kde jedna přechází v druhou otočením kolem osy rotace. Každým bodem rotační kvadriky neležícím na ose rotace prochází právě jedna rovina kolmá k ose rotace a právě jedna rovina obsahující osu rotace, proto každým takovým bodem prochází právě jedna rovnoběžka a právě jeden meridián plochy. [5]

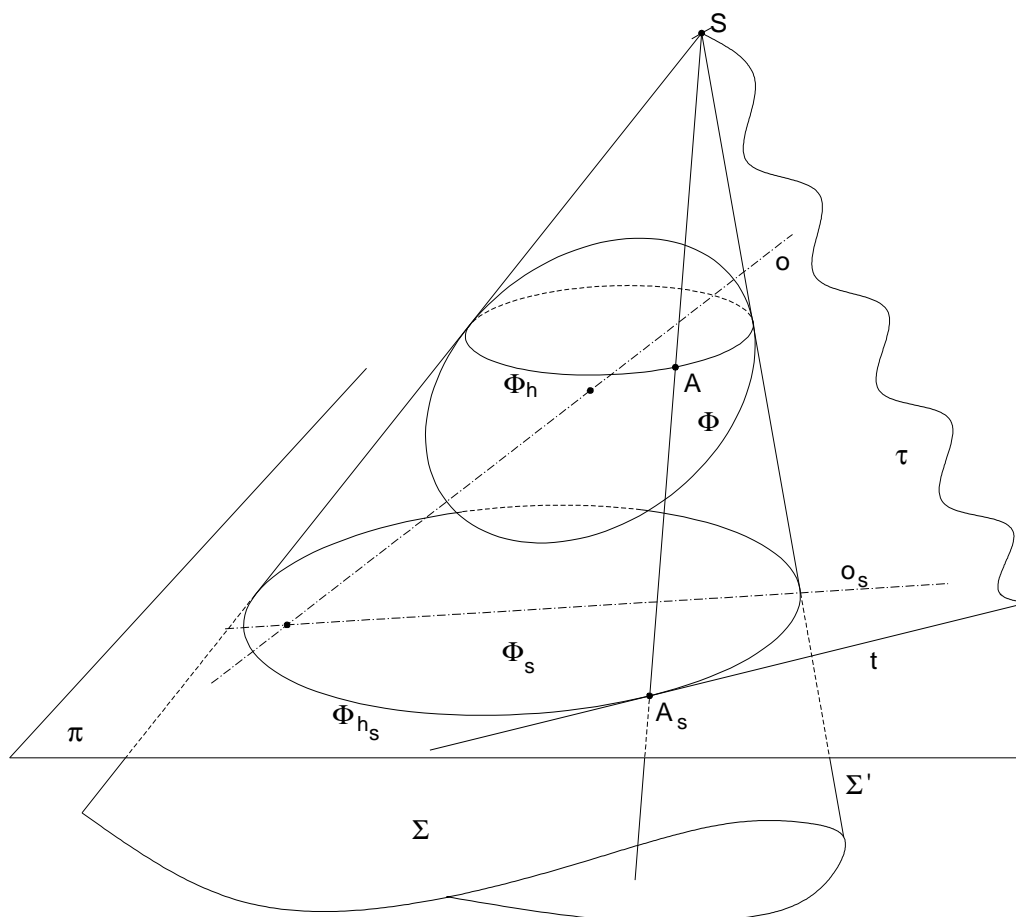
Při řešení úloh na rotačních plochách v Mongeově promítání, které mají osu rotace kolmou k průmětně  $\pi$ , využíváme meridián rotační plochy ležící v rovině  $\mu$  rovnoběžné s nárysnou, který nazýváme hlavní meridián.

Jestliže je v jistém okolí bodu  $A$  na tvořící křivce plochy vzdálenost bodu  $A$  od osy rotace největší (resp. nejmenší), rovnoběžku bodu  $A$  pak nazýváme rovník (resp. hrdlo). [5]

Nechť je dáno promítání středem  $S$  na průmětnu  $\pi$  a nechť je dána rotační plocha  $F$ , která neprochází bodem  $S$ . Množinu všech spojnic bodu  $S$  se všemi body rotační plochy  $F$  označíme  $S$ . Průnik množiny  $S$  a průmětny  $\pi$ , který označíme  $F_s$ , je průmětem plochy v daném promítání. Označme  $S'$  hranici plochy  $S$ . Jestliže bod  $A$  ( $A \in S$ ) patří množině  $S'$ , pak je v  $S'$  obsažena celá promítací přímka  $AS$ , které říkáme stýčná přímka plochy  $F$  vzhledem k  $S$ . Množina  $F_h$ , která obsahuje všechny body plochy ležící na stýčných přímkách se nazývá skutečný obrys plochy. Průnik množiny  $S'$  a průmětny  $\pi$ , který



označíme  $Fh_s$ , se nazývá zdánlivý obrys plochy. Jestliže  $S = E_3$ , pak plocha nemá ani skutečný ani zdánlivý obrys. Tento případ nastane např. pokud  $S$  leží uvnitř plochy. Necht'  $A$  je bod skutečného obrysu  $F_h$ ,  $A_s$  bod zdánlivého obrysu  $Fh_s$ , tj.  $AA_s$  prochází bodem  $S$ . Tečná rovina  $\tau$  plochy  $\Phi$  v bodě  $A$  obsahuje přímku  $AS$  a průsečnice  $t$  roviny  $\tau$  a průmětny  $\pi$  je tečnou ke křivce zdánlivého obrysu  $Fh_s$  v bodě  $A_s$ . [6]



### 3.1.1 Rotační elipsoidy

Rotací elipsy kolem její osy vznikne rotační elipsoid. Průsečky rotačního elipsoidu s osou rotace nazýváme vrcholy elipsoidu. Jestliže elipsa rotuje kolem své hlavní osy, vzniká protáhlý (vejčitý) elipsoid, jestliže elipsa rotuje kolem své vedlejší osy, vzniklý elipsoid se nazývá zploštělý. Základní vlastnosti mají oba typy elipsoidů stejné.

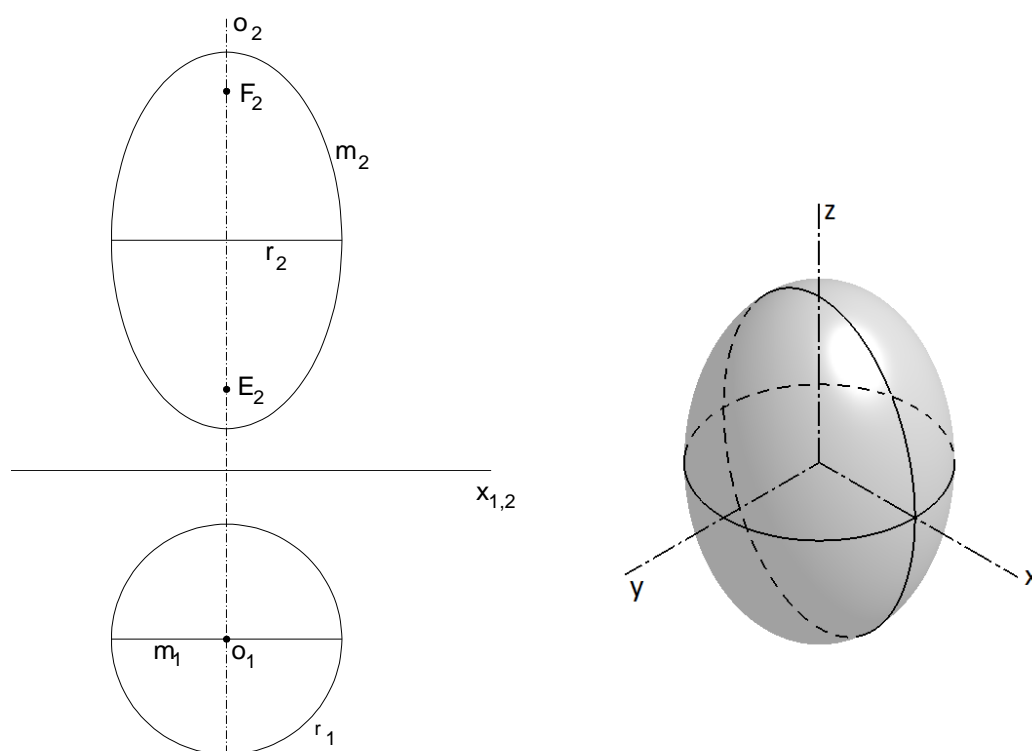
Rotační elipsoid je středová kvadrika, jejíž střed je pólem nevlastní roviny vzhledem k elipsoidu a která má dva vrcholy na ose rotace. Průnikem elipsoidů a nevlastní roviny

je prázdná množina. Jestliže je osa rotace kolmá k půdorysně, pak prvním obrysem je rovníková kružnice, půdorysem plochy je kruh. [6]

### Protáhlý elipsoid

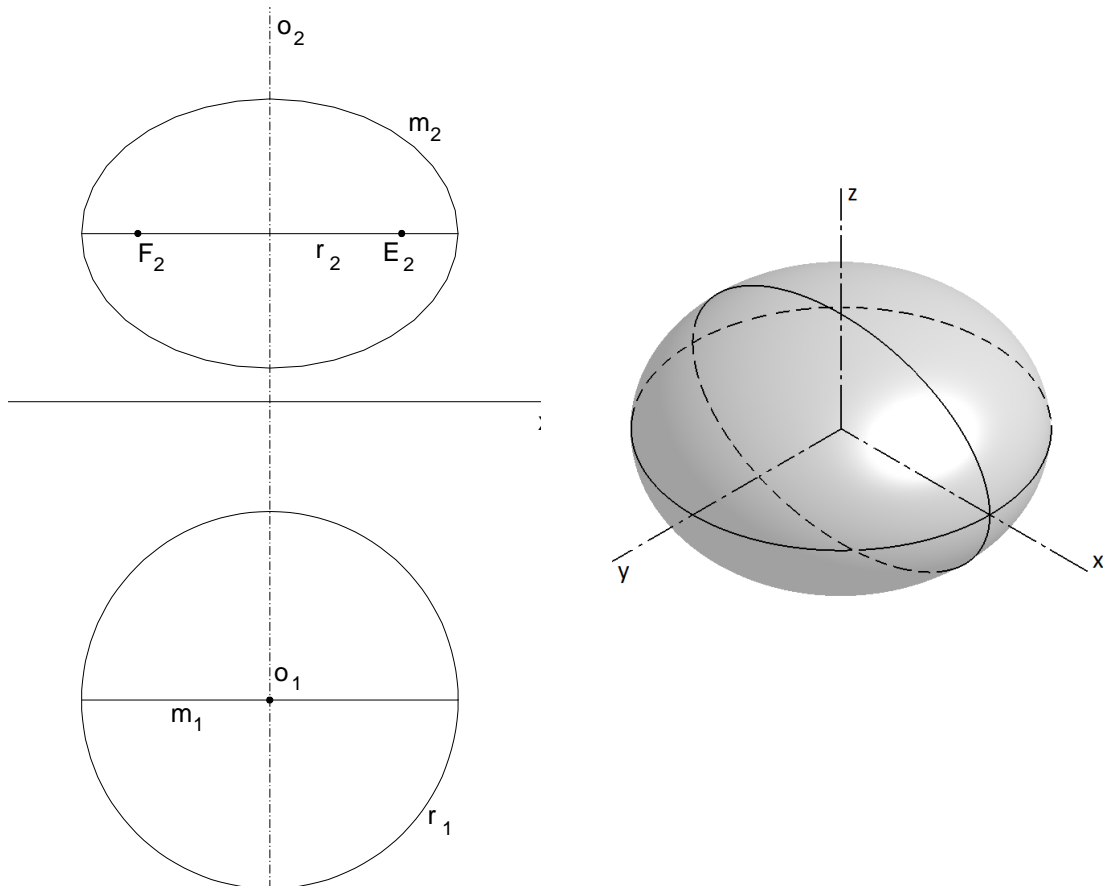
Ohniska  $E, F$  elipsoidu leží na ose rotace. Elipsa v rovině je definována jako množina bodů v rovině, pro které platí, že součet jejich vzdáleností od dvou pevných různých bodů (ohnisek) je konstantní a větší než vzdálenost těchto dvou bodů. [14, s. 101]

Protože při rotaci elipsy kolem její hlavní osy zůstávají ohniska na stejném místě a jsou společné pro všechny meridiány, můžeme tedy psát že rotační protáhlý elipsoid je množina bodů v prostoru, pro které platí, že součet jejich vzdáleností od dvou pevných různých bodů  $E, F$  (ohnisek) je konstantní a větší než vzdálenost těchto dvou bodů. Jestliže je osa rotace plochy kolmá k půdorysně, prvním obrysem je kružnice rovníku, půdorysem plochy je kruh. [6]



### Zploštělý elipsoid

Ohniska rotačního zploštělého elipsoidu neleží na ose, rotací opíše kružnici. V případě, že je osa rotace kolmá k půdorysně, je půdorysem plochy kruh, prvním obrysem je kružnice rovníku. [6]



### 3.1.2 Rotační paraboloidy

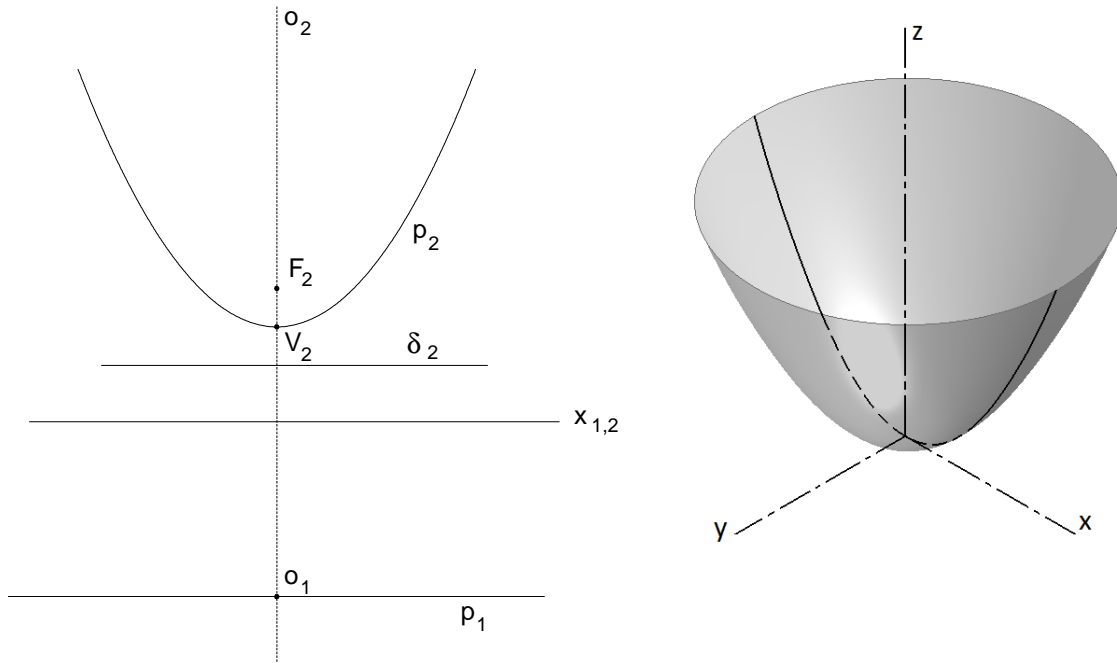
Rotací paraboly kolem její osy vzniká rotační paraboloid. Je to nestředová kvadrika, která má na své ose jeden vrchol. Nevlastní rovina se plochy paraboloidu dotýká v nevlastním bodě osy. Řídící přímka  $d$  tvořící paraboly vyplní rotací rovinu  $d$ , kterou nazýváme řídící rovina. [10, s. 103]

Ohnisko  $F$  tvořící paraboly plochy leží na ose rotace. Parabola v rovině je definována jako množina bodů v rovině, které mají od pevného bodu (ohniska) a pevné přímky (tzv. řídící přímky) stejnou vzdálenost. [14, s. 105]

Protože při rotaci paraboly kolem osy zůstává ohnisko na stejném místě, je tedy společným ohniskem pro všechny meridiány rotačního paraboloidu.

Proto můžeme psát, že rotační paraboloid je množina bodů v prostoru, které mají od pevného bodu (ohniska) a pevné roviny (řídící roviny) stejnou vzdálenost.

Jestliže je osa paraboloidu kolmá k půdorysně, pak plocha nemá první obrys a půdorysem plochy je celá půdorysna. [6]



### 3.1.3 Rotační hyperboloidy

Rotační hyperboloidy jsou středové kvadriky, jejichž střed je pólem nevlastní roviny vzhledem k hyperboloidu. Rotací asymptot tvořící hyperboly vzniká asymptotická kuželová plocha, která se rotačního hyperboloidu dotýká podél nevlastní regulární kuželosečky (rotační hyperboloid protíná nevlastní rovinu v regulární kuželosečce).

Hyperboloidy rozlišujeme podle toho, zda tvořící hyperbola rotuje kolem hlavní nebo vedlejší osy, na rotační dvojdílné hyperboloidy a rotační jednodílné hyperboloidy. Tyto dva typy hyperboloidů nemají základní vlastnosti stejné. [6]

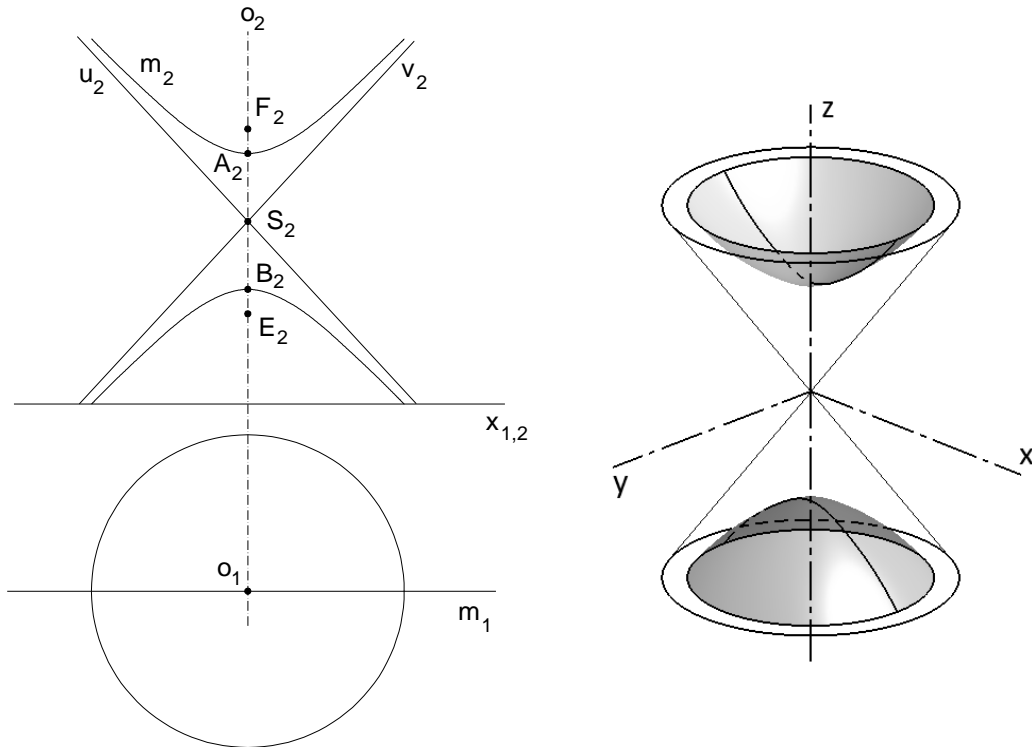
#### Rotační dvojdílný hyperboloid

Rotací hyperboly kolem její hlavní osy vzniká rotační dvojdílný hyperboloid. Je bodovou kvadrikou a má dva vrcholy. Ohniska  $E, F$  tvořící hyperboly leží na ose rotace. Hyperbola je definována jako množina bodů v rovině, které mají od dvou různých pevných bodů  $E, F$  (ohnisek) stálý rozdíl vzdáleností, který je menší než vzdálenost ohnisek. [14]

## Rotační kvadriky v příkladech

Protože při rotaci hyperboly kolem osy zůstávají ohniska na stejném místě, jsou společnými ohnisky pro všechny meridiány rotačního dvojdílného hyperboloidu. Můžeme tedy rotační dvojdílný hyperboloid definovat jako množinou bodů v prostoru, které mají od dvou pevných různých bodů  $E, F$  (ohnisek) stálý rozdíl vzdáleností, který je menší než vzdálenost ohnisek.

Je-li osa rotace kolmá k půdorysně, pak půdorysem plochy je celá půdorysna. [6]



### Rotační jednodílný hyperboloid

Rotační jednodílný hyperboloid  $F$  vzniká rotací hyperboly kolem její vedlejší osy, na ose rotace nemá žádné body.

Mějme bod  $M$  na tvořící hyperbole (hlavní meridián). Tečná rovina  $\tau$  plochy  $F$  v bodě  $M$  protíná plochu  $F$  v kuželosečce  $q$ , která je singulární, protože  $\tau$  je tečná rovina.

Rovina  $\tau'$ , která prochází středem  $S$  plochy  $\Phi$  a je rovnoběžná s  $\tau$  protíná asymptotickou kuželovou plochu hyperboloidu ve dvou povrchových přímkách  $a', n'$ , tedy v kuželosečce  $q'$  typu hyperbola. Plocha  $\Phi$  a asymptotická kuželová plocha mají společnou nevlastní kuželosečku  $l^\infty$ , roviny  $\tau$  a  $\tau'$  mají společnou nevlastní přímku  $p^\infty$ , proto mají kuželosečky  $q, q'$  tytéž nevlastní body. Proto je také kuželosečka  $q$  typu hyperbola a rozpadá se na dvě přímky  $a, n$ , pro které platí  $a \parallel a', n \parallel n'$ . Přímka  $a$  leží na ploše  $\Phi$  a protíná všechny její rovnoběžky, je tedy také tvořící křivkou plochy  $\Phi$ . Přímka  $a$  je s osou rotace mimoběžná, pokud by byla různoběžná, musela by plocha obsahovat bod na ose. Rotační jednodílný hyperboloid tedy můžeme vytvořit nejen rotací hyperboly kolem její vedlejší osy, ale také rotací přímky kolem osy za podmínky, že je přímka s osou rotace mimoběžná, proto takto vytvořené ploše říkáme přímková plocha.

Množina všech přímek, které vzniknou rotací přímky  $a$  kolem osy se nazývá regulus hyperboloidu. Všechny přímky jednoho regulu jsou vzájemně mimoběžné. Kdyby totiž byly některé dvě přímky různoběžné, musely by se protínat v samodružném bodě na ose rotace. Kromě přímky  $a$  obsahuje tečná rovina  $\tau$  i přímku  $n$ , která je s přímkou  $a$  různoběžná. Rotací přímky  $n$  kolem osy dostáváme druhý regulus plochy  $\Phi$ , jehož všechny přímky jsou opět vzájemně mimoběžné.

Rotací přímek  $a', n'$  kolem osy vznikne asymptotická kuželová plocha. Každá přímka  $a$  plochy je tedy rovnoběžná s některou povrchovou přímkou  $a'$  asymptotické plochy.

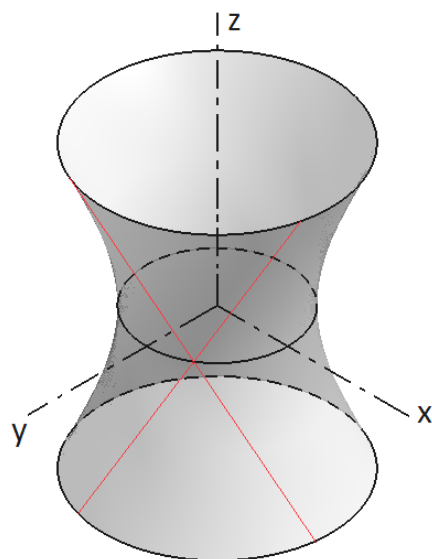
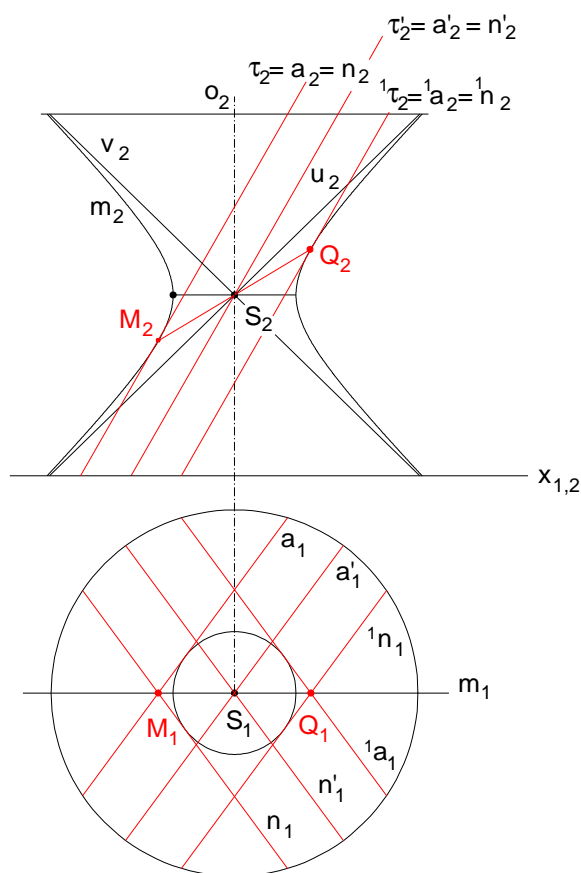
Jestliže  $M$  je bod hlavního meridiánu a  $Q$  je bodem k němu souměrným podle středu  $S$  hyperboloidu, pak tečná rovina  ${}^1\tau$  k ploše  $\Phi$  v bodě  $Q$  je rovnoběžná s rovinou  $\tau$  a protíná  $\Phi$  opět ve dvojici různoběžek  ${}^1a, {}^1n$ . Rotací přejde  $\tau$  do  ${}^1\tau$ . K přímce  $a$  ležící v rovině  $\tau$  existuje přímka  $a'$  s ní rovnoběžná, která leží na asymptotické kuželové ploše hyperboloidu. K přímce  $a'$  existuje v rovině  ${}^1\tau$  přímka  ${}^1a$  plochy  $\Phi$ , která je s ní rovnoběžná. Protože přímky jednoho regulu jsou vzájemně mimoběžné, platí  $a \parallel a' \parallel {}^1n$ . Ke každé přímce patřící do jednoho regulu existuje přímka druhého regulu, která je s ní rovnoběžná a platí:

**Věta:** V rozšířeném Eukleidovském prostoru se na rotačním jednodílném hyperboloidu  $\Phi$  každé dvě přímky různých regulů protínají.

**Věta:** Každým bodem  $M$  jednodílného rotačního hyperboloidu prochází dvě přímky  $a, n$  různých regulů. Přímky  $a, n$  tvoří tečnou rovinu  $\tau$  v bodě  $M$  a současně jsou řezem plochy rovinou  $\tau$ . Tečné roviny bodů téže přímky  $p$  vytvářejí svazek rovin o ose  $p$ .

Pozn.: Důkazy výše uvedených vět lze najít např. v [6].

Jestliže je osa rotace kolmá k půdorysně, pak prvním obrysem rotačního jednodílného hyperboloidu je hrdelní kružnice, která vzniká rotací vrcholů tvořící hyperboly. Půdorysem rotačního jednodílného hyperboloidu je množina vnějších bodů hrdelní kružnice. Druhým obrysem plochy je hyperbola, nárys plochy tvoří vnitřní body hyperboly hlavního meridiánu. [10, s. 105-106], [6]



### 3.2 Řezy rotačních kvadrik rovinou

Ke konstrukci řezu na rotačních kvadrikách můžeme použít metody sestrojení řezu pro obecné rotační plochy uvedené např. v [5].

Konstrukci řezu ale není nutné provádět bodově, protože řezem rotační kvadriky rovinou  $\rho$  je kuželosečka  $q$ , takže stačí sestrojít pouze její určující prvky.

Jestliže je rovina řezu tečnou rovinou, je řezem kuželosečka singulární, jestliže rovina řezu nemá s kvadrikou společné body, je řezem prázdná množina, ostatní řezy jsou regulárními kuželosečkami. Rotační kvadrika je souměrná podle všech rovin procházejících osou.

Každá rovina je souměrná podle roviny k ní kolmé, proto je řez kvadriky souměrný podle roviny  $\lambda$ , která prochází osou rotace a je kolmá k rovině řezu  $\rho$ . Průsečnice  $s$  rovin  $\lambda$  a  $\rho$  je pak osou souměrnosti řezu, tedy osou kuželosečky  $q$ . Průsečíky přímky  $s$  s kvadrikou jsou vrcholy kuželosečky  $q$  řezu. Průsečíky nevlastní přímky  $u^\infty$  roviny  $\rho$  a nevlastní kuželosečky  $l^\infty$  kvadriky (tj. řez kvadriky  $\Phi$  nevlastní rovinou  $\omega^\infty$ ) jsou nevlastní body řezu  $q$ . [10, s. 109], [6]

#### 3.2.1 Řez rotačních elipsoidů rovinou

Rotační elipsoid nemá žádné nevlastní body, tedy ani jeho řez rovinou nemá žádné nevlastní body a řezem je kuželosečka typu elipsa. [8] Podle polohy roviny  $\rho$  vzhledem k elipsoidu je řezem buď prázdná množina, jednobodová množina ( $\rho$  je tečná rovina plochy) nebo elipsa. Konstrukce řezu rovinou  $\rho$  je podobná jako pro obecné rotační plochy. [6]

Příklad 7 ukazuje podrobný popis konstrukce řezu elipsoidu rovinou  $\rho$ .

#### 3.2.2 Řez rotačního paraboloidu rovinou

Rotační paraboloid se dotýká nevlastní roviny  $\omega^\infty$  v nevlastním bodě  $O^\infty$ . Typ řezu je určený pomocí polohy roviny  $\rho$  a bodu  $O^\infty$ . Není-li rovina řezu  $\rho$  rovnoběžná s osou  $o$  rotace, pak její nevlastní přímka neobsahuje žádný nevlastní bod paraboloidu a řezem je kuželosečka typu elipsa, podle polohy roviny a kvadriky je to buď prázdná množina, jednobodová množina (tečná rovina) nebo elipsa.



Jestliže rovina  $\rho$  obsahuje bod  $O^\infty$ , tzn.  $\rho$  je rovnoběžná s osou rotace paraboloidu, pak je řezem kuželosečka typu parabola. Protože rotační paraboloid neobsahuje přímky (tzn. je bodová kvadrika), je řezem parabola.

Pro eliptické řezy na rotačním paraboloidu platí:

**Věta:** Pravoúhlý průmět eliptického řezu na rotačním paraboloidu do roviny, která je kolmá k ose  $o$ , je kružnice.

Pro parabolické řezy platí:

**Věta:** Všechny paraboly na rotačním paraboloidu jsou shodné. [10, s. 110-111], [6]

Důkazy těchto dvou vět lze nalézt např. v [10, s. 111].

Příklad 8 popisuje řez rotačního paraboloidu v kótovaném promítání.

### 3.2.3 Řez rotačních hyperboloidů rovinou

Rotační hyperboloid  $\Phi$  se dotýká asymptotické kuželové plochy  $\Omega$  podél nevlastní regulární kuželosečky  $l^\infty$ .

Nevlastní body řezů ploch  $\Phi$  a  $\Omega$  rovinou  $\rho$  jsou společné a rovina  $\rho$  protíná obě plochy v homotetických kuželosečkách  $q, q'$ . Jestliže přímka  $u^\infty$  roviny  $\rho$  není tečnou ke kuželosečce  $l^\infty$ , je pól přímky  $u^\infty$  vzhledem ke  $q$  i  $q'$  středem těchto kuželoseček a kuželosečky  $q$  i  $q'$  jsou soustředné.

Podle vzájemné polohy přímky  $u^\infty$  s kuželosečkou  $l^\infty$  existují na hyperboloidech řezy všech tří typů: typ elipsa (pokud  $u^\infty$  a  $l^\infty$  nemají společné body), typ parabola (přímka  $u^\infty$  je tečna ke kuželosečce  $l^\infty$ ), typ hyperbola ( $u^\infty$  a  $l^\infty$  se protínají ve dvou různých bodech). [10, s. 113], [6]

#### Řez rotačního dvojdílného hyperboloidu

Rovinným řezem dvojdílného hyperboloidu mohou být všechny tři kuželosečky typu elipsa, z dalších typů jen hyperbola a parabola, protože plocha neobsahuje přímky.

Jestliže je řezem dvojdílného hyperboloidu kuželosečka typu elipsa, obsahuje rovina  $\rho'$ , která je rovnoběžná s rovinou  $\rho$  a prochází středem  $O$  hyperboloidu, pouze tento bod.

Potom rovina  $\rho$  buď neprotíná hyperboloid v žádném bodě, nebo je tečná (má s hyperboloidem společný pouze bod dotyku), nebo protíná plochu v elipse.

Pokud je řezem dvojdílného hyperboloidu kuželosečka typu parabola, rovina  $\rho'$  se dotýká asymptotické kuželové plochy hyperboloidu podél její površky  $a$ . Rovina  $\rho$  je pak buď asymptotickou rovinou (tedy se dotýká dvojdílného hyperboloidu v nevlastním bodě přímky  $a$ ) nebo protíná hyperboloid v parabole (dvojdílný hyperboloid neobsahuje přímky).

Jestliže je řezem kuželosečka typu hyperbola, potom rovina  $\rho'$  protíná asymptotickou rovinu ve dvojici různoběžek. [10, s. 113], [6]

### **Řez rotačního jednodílného hyperboloidu**

Protože rotační jednodílný hyperboloid  $\Phi$  je přímková plocha, řezem rovinou  $\rho$  je množina průsečíků přímek plochy s rovinou  $\rho$ . Nemůže tedy nastat, že by řezem byla jednobodová nebo prázdná množina. Je-li rovina  $\rho'$  rovnoběžná s  $\rho$  procházející středem  $O$  hyperboloidu a má s asymptotickou kuželovou plochou společný pouze bod  $O$  (tj. přímka  $u^\infty$  a kuželosečka  $l^\infty$  nemají společné body), pak roviny  $\rho$  a  $\rho'$  protínají hyperboloid v elipse (příp. v kružnici, pokud je rovina  $\rho$  kolmá k ose).

Jestliže se rovina  $\rho'$  dotýká asymptotické plochy podél površky  $a'$ , je řezem kuželosečka typu parabola. Rovina  $\rho$  buď obsahuje přímku  $a$  plochy  $\Phi$ , která je rovnoběžná s  $a'$ , a pak obsahuje také další přímku  $n$  plochy  $\Phi$  s ní rovnoběžnou a řezem je asymptotická rovina, nebo rovina  $\rho$  neobsahuje žádnou přímku plochy  $\Phi$  a řezem je parabola.

Pokud rovina  $\rho'$  protíná asymptotickou plochu ve dvojici různoběžek, je řezem hyperbola. Jestliže  $\rho$  obsahuje přímku  $a$  plochy  $\Phi$ , pak obsahuje i přímku  $n$  plochy  $\Phi$  s ní různoběžnou a  $\rho$  je tečná rovina, průsečík  $T$  přímek  $a$ ,  $n$  je její bod dotyku. Jestliže  $\rho$  neobsahuje žádnou přímku plochy, je řezem hyperbola. [6]

### **3.3 Průsečíky přímky s rotační kvadrikou**

Přímka protíná kvadriku obecně ve dvou bodech. Průsečíky přímky s kvadrikou určíme tak, že danou přímku proložíme vhodnou rovinou, sestrojíme její řez kvadrikou a určíme společné body přímky a průnikové křivky řezu. Prostorovou úlohu tedy převádíme na rovinnou úlohu sestrojení průsečíků přímky s kuželosečkou. Často můžeme i tuto rovinnou úlohu ještě zjednodušit na určování průsečíků přímky s kružnicí.

Průsečíky přímky s rotační kvadrikou lze určit třemi způsoby, které volíme podle typu kvadriky a podle polohy přímky vzhledem k dané kvadrice. [6]

### 3.3.1 Průsečíky přímky s rotačním elipsoidem

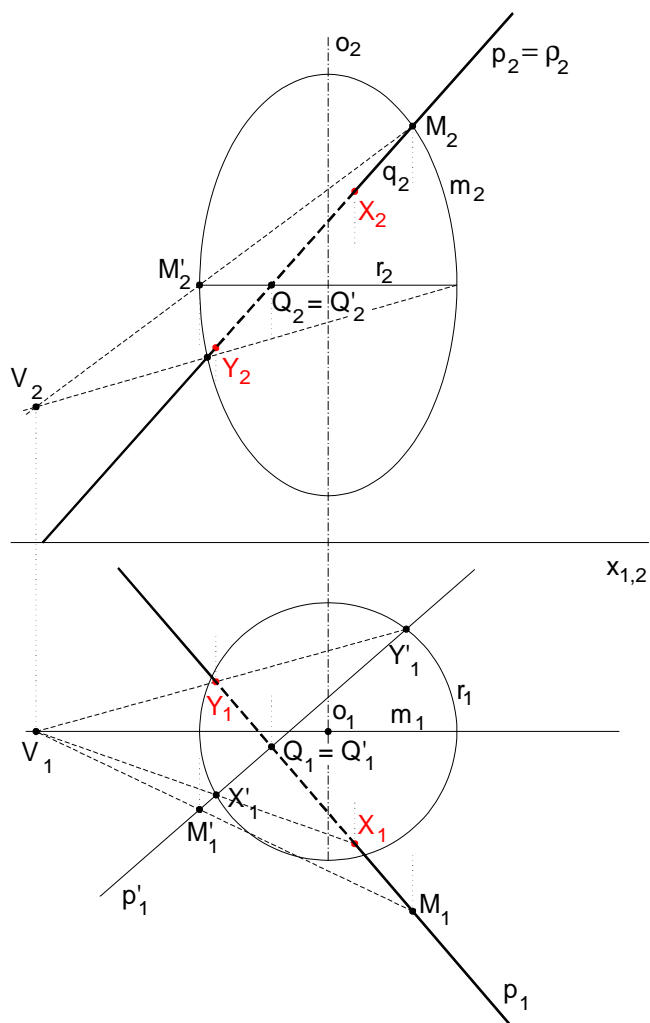
1. Danou přímkou  $p$  proložíme rovinu  $\rho$  nejlépe takovou, aby byla kolmá k některé průmětně. Sestrojíme řez  $q$  rotačního elipsoidu rovinou  $\rho$  a určíme průnikové body  $X, Y$  řezu  $q$  a přímky  $p$ . Protože řezem  $q$  je elipsa, může být konstrukce průsečíků s přímkou  $p$  nepřesná, proto raději volíme jiné způsoby sestavení průsečíků.

Příklad 10

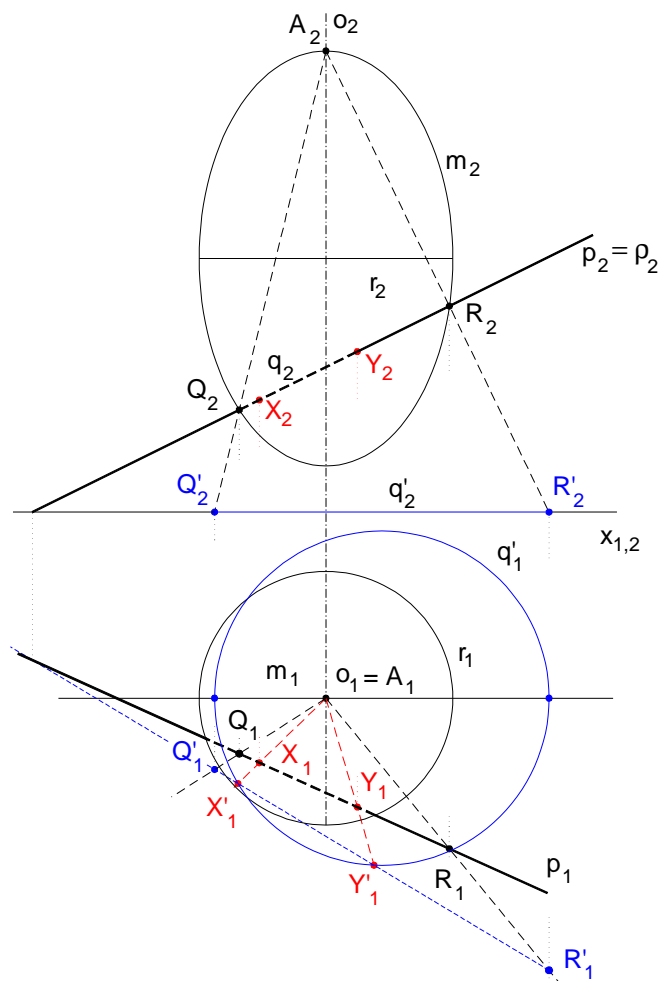
2. Přímkou  $p$  proložíme rovinu  $\rho$  kolmou k nárysně, která protne elipsoid v elipse  $q$ . Na elipsoidu leží rovník  $r$  v rovině  $\alpha$ . Rovníková kružnice  $r$  a elipsa  $q$  jsou kuželosečky, které leží na dvou kuželových plochách s vrcholy  $V, W$ . Kuželosečky jsou souměrné podle roviny  $\mu$  hlavního meridiánu, tedy body  $V, W$  leží v rovině  $\mu$ . Určíme jednu z uvedených kuželových ploch, např. s vrcholem  $V$ . V prostorové kolineaci zadané středem  $V$  pak elipse  $q$  odpovídá kružnice  $r$ . V takto určené kolineaci sestrojíme obraz  $p'$  přímky  $p$ , kde  $p'$  leží v rovině  $\alpha$ . Na přímce  $p$  zvolíme bod  $M$  a v kolineaci určíme jeho obraz  $M'$ . Bod  $Q$  přímky  $p$ , který leží v rovině  $\alpha$ , je samodružný. Prostorová kolineace zachovává incidenci bodů a přímek, sestrojíme tedy průsečíky  $X', Y'$  kružnice  $r$  a přímky  $p'$  a dané kolineaci se středem  $V$  určíme jejich obrazy  $X, Y$  ležící na  $p$ . Body  $X, Y$  jsou pak průsečíky přímky  $p$  s elipsoidem.

Protože je tato konstrukce přesnější než konstrukce řezu, používá se při sestavování průsečíků přímky s rotačním elipsoidem nejčastěji.

## Rotační kvadriky v příkladech



3. Přímkou  $p$  proložíme rovinu  $\rho$  kolmou k nárysňe, která protíná elipsoid v kuželosečce  $q$ . Pravoúhlý průmět elipsy  $q$  z vrcholu  $A$  elipsy do průmětny  $\pi$  je kružnice  $q'$ . Přímkou  $p$  promítneme z bodu  $A$  také do průmětny  $\pi$  a sestrojíme průsečíky  $X'$ ,  $Y'$  přímky  $p'$  a kružnice  $q'$ . Z bodu  $A$  promítneme body  $X'$ ,  $Y'$  zpět na přímkou  $p$  a získáme průsečíky  $X$ ,  $Y$  přímky  $p$  s plochou. Tato konstrukce je přesnější než první způsob konstrukce řezu, často se však kružnice  $q'$  nevejde na nákresnu. [6]



### 3.3.2 Průsečíky přímky s rotačním paraboloidem

Při konstrukce průsečíků přímky  $p$  s rotačním paraboloidem využijeme věty, že do roviny kolmé k ose se eliptický řez promítne jako kružnice. Přímkou  $p$  proložíme rovinu, která je kolmá k nárýsně, sestrojíme půdorys  $q_l$  řezu  $q$ . Půdorysem  $q_l$  řezu  $q$  je kružnice, sestrojíme tedy průsečíky  $X_l, Y_l$  kružnice  $q_l$  s přímkou  $p_l$  a odvodíme nárýsy těchto průsečíků. [6]

Příklad 13

### 3.3.3 Průsečíky přímky s rotačními hyperboloidy

Pro oba typy hyperboloidů se jejich průsečíky s přímkou  $p$  sestavují stejně jako u rotačních elipsoidů. Nejčastěji se používá druhý způsob řešení, tedy prostorová kolineace.

U jednodílného hyperboloidu může nastat situace, kdy nárýs přímky  $p$  neprotíná hlavní meridián plochy. V tomto případě nelze prostorové kolineace využít a k řešení se používá první způsob konstrukce, tedy řez plochy vhodnou rovinou. [6]

Příklad 9, Příklad 11

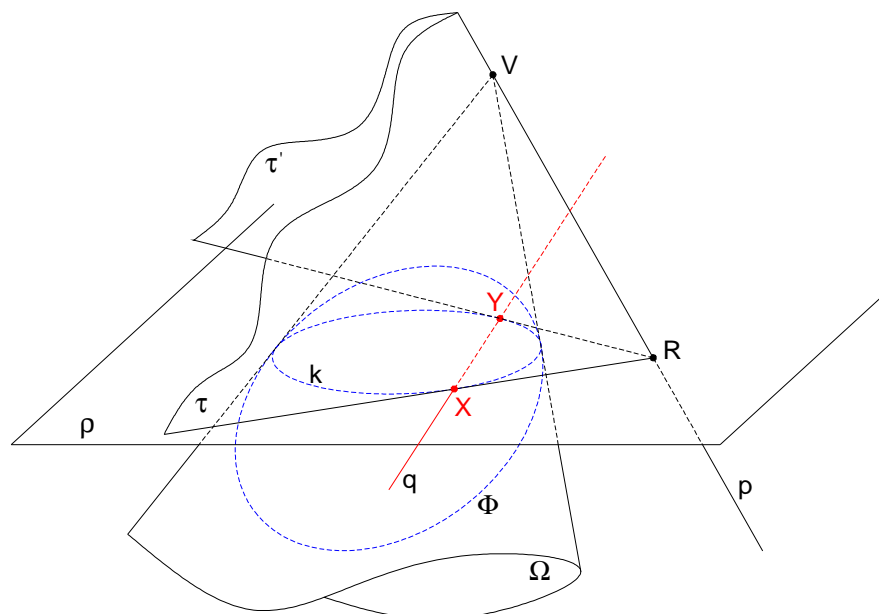
### 3.4 Tečné roviny rotační kvadriky

Tečné roviny rotační bodové kvadriky<sup>1</sup>, které procházejí danou přímkou, můžeme sestrojit dvěma způsoby:

1. Na přímce  $p$  zvolíme vhodný bod  $V$ , ze kterého kvadrice  $\Phi$  opíšeme kuželovou plochu  $\Omega$ , která se kvadriky  $\Phi$  dotýká podél kuželosečky  $k$  ležící v rovině  $\rho$ . Rovina  $\rho$  je polární rovinou bodu  $V$  vzhledem ke kvadrice  $\Phi$ . Tečné roviny  $\tau$  a  $\tau'$  vedené přímkou  $p$  ke kuželové ploše  $\Omega$  jsou hledané tečné roviny. Body dotyku tečných rovin s kvadrikou jsou body dotyku tečen kuželosečky  $k$  sestrojených z průsečíku  $R$  přímky  $p$  a roviny  $\rho$ .
2. K přímce  $p$  sestrojíme přímku  $q$ , která je s přímkou  $p$  polárně sdružená vzhledem ke kvadrice  $\Phi$ . Určíme průsečíky  $X, Y$  přímky  $q$  a kvadriky  $\Phi$ . Tyto průsečíky jsou body dotyku tečných rovin, které procházejí přímkou  $p$ .  
Pro bodové kvadriky platí, jestliže přímka  $p$  nemá s kvadrikou žádný společný bod, potom přímkou  $p$  prochází dvě různé tečné roviny kvadriky. Přímka  $q$  polárně sdružená s přímkou  $p$  protíná plochu  $\Phi$  ve dvou různých bodech. Jestliže se přímka  $p$  dotýká bodové kvadriky v bodě  $T$ , existuje pouze jedna tečná rovina procházející přímkou  $p$  a přímka  $q$  polárně sdružená s přímkou  $p$  vzhledem ke kvadrice  $\Phi$  prochází také bodem  $T$ . Jestliže přímka  $p$  protíná bodovou kvadriku ve dvou různých bodech, neexistuje tečná rovina kvadriky  $\Phi$  procházející přímkou  $p$ . [10, s. 124], [6]

---

<sup>1</sup> tzn. rotační elipsoidy, rotační paraboloid a rotační dvojdílný hyperboloid



### Tečné roviny jednodílného rotačního hyperboloidu

1. Předpokládáme, že přímka  $p$  nemá s jednodílným hyperboloidem  $\Phi$  žádný společný bod (vlastní ani nevlastní). Jestliže je  $\tau$  tečná rovina kvadriky  $\Phi$  procházející přímkou  $p$ , pak rovina  $\tau$  protíná plochu  $\Phi$  ve dvojici přímek  $a, n$  různých regulů. Přímka  $p$  však také patří rovině  $\tau$ , takže musí protínat přímky  $a, n$  a to znamená, že má s plochou  $\Phi$  dva společné body, což je ale spor s předpokladem, že přímka  $p$  nemá s plochou  $\Phi$  společné body. Tedy přímkou  $p$ , která nemá s jednodílným hyperboloidem žádný společný bod, neprochází žádná tečná rovina.
2. Přímka  $p$  protíná jednodílný rotační hyperboloid  $\Phi$  ve dvou různých bodech  $X, Y$  (vlastních nebo nevlastních). Jestliže jeden z bodů  $X, Y$  je nevlastní, je přímka  $p$  rovnoběžná s některou površkou. Bodem  $X$  prochází dvě přímky  $a, n$  různých regulů plochy  $\Phi$ , také bodem  $Y$  prochází dvě přímky  $b, q$  různých regulů. Přímky  $a, q$  jsou různoběžné, protínají se v bodě  $R$  a tvoří rovinu  $\tau$ , která obsahuje i přímku  $p$ , tzn. že  $\tau$  je tečná rovina plochy  $\Phi$  procházející přímkou  $p$ . Podobně i bod  $Q$  je průsečíkem přímek  $b, n$ , které tvoří rovinu  $\tau'$  (různou od  $\tau$ ), která obsahuje přímku  $p$  a která je tečnou rovinou plochy  $\Phi$  procházející přímkou  $p$ . Přímkou  $p$  tedy prochází dvě různé tečné roviny  $\tau$  a  $\tau'$  jednodílného hyperboloidu  $\Phi$ .

Příklad 12

3. Jestliže se přímka  $p$  dotýká jednodílného hyperboloidu  $\Phi$  v jednom bodě  $T$  (vlastním nebo nevlastním), ale celá neleží na ploše  $\Phi$ , leží pak přímka  $p$  v tečné rovině  $\tau$  plochy  $\Phi$ . Tečná rovina  $\tau$  se plochy  $\Phi$  dotýká v bodě  $T$ , další tečné roviny neexistují. Jestliže je bod  $T$  nevlastní, je rovina  $\tau$  asymptotickou rovinou. [10, s. 129-130], [6]

### 3.5 Průniky rotačních kvadrik

Nechť jsou dány dvě rotační kvadriky  ${}^1\Phi, {}^2\Phi$ . Každá rovina  $\rho$  protíná plochy  ${}^1\Phi, {}^2\Phi$  v kuželosečkách  ${}^1k, {}^2k$ . Kuželosečky  ${}^1k, {}^2k$  se protínají obecně ve 4 bodech, které patří průnikové křivce  $k$ , která je čtvrtého stupně (tzv. kvartika). Jestliže se kvadriky  ${}^1\Phi, {}^2\Phi$  dotýkají ve dvou bodech, jsou tyto body dvojnásobné a průniková křivka se rozpadá na dvě kuželosečky. Jestliže se kvadriky  ${}^1\Phi, {}^2\Phi$  dotýkají též kulové plochy podél kružnice, rozpadá se průnik na dvě kuželosečky. Pravoúhlým průmětem průnikové křivky  $k$  je v obecném případě rovinná kvartika. Leží-li osy daných kvadrik v jedné rovině  $\lambda$ , potom jsou obě plochy souměrné podle roviny  $\lambda$  a také průniková křivka  $k$  je podle roviny  $\lambda$  souměrná. Každé dva body křivky  $k$  souměrné podle roviny  $\lambda$  se pravoúhle promítají do jednoho bodu roviny  $\lambda$ , proto je pravoúhlým průmětem  $k_2$  křivky  $k$  do roviny  $\lambda$  kuželosečka nebo její část.

Platí věta:

**Věta:** Mějme dvě rotační kvadriky  ${}^1\Phi, {}^2\Phi$  s osami  ${}^1o, {}^2o$  ležícími v rovině  $\lambda$ . Jsou-li  ${}^1o, {}^2o$  různoběžné, pak je pravoúhlým průmětem  $k_2$  průnikové křivky  $k$  do roviny  $\lambda$  část kuželosečky typu hyperbola (elipsa), jestliže právě jedna z kvadrik není rotační zploštělý elipsoid (jestliže právě jedna z kvadrik je rotační zploštělý elipsoid). Jsou-li  ${}^1o, {}^2o$  rovnoběžné, pak je pravoúhlým průmětem  $k_2$  průnikové křivky  $k$  do roviny  $\lambda$  část kuželosečky typu parabola.

Tato věta platí pro všechny rotační kvadriky, tedy i pro rotační válcové a kuželové plochy a kulovou plochu. Za osu kulové plochy můžeme vždy zvolit přímku, která prochází středem a je rovnoběžná s osou druhé kvadriky. Důkaz věty lze nalézt např. v [10, s. 134-135] nebo [6].

Příklad 14, Příklad 15, Příklad 16



V případě, že jsou osy  ${}^1o, {}^2o$  kvadrik mimoběžné, volíme pomocné roviny tak, aby konstrukce bodů průnikové křivky byla co nejjednodušší. Podle zadání se snažíme sestrojít homotetické kvadriky  ${}^1\Phi', {}^2\Phi'$  a najít roviny, které je protínají v kuželosečkách  $u, v$ . Hledáme pak povrchové přímky válcových ploch, na kterých leží například kuželosečka  $u$  a některá rovnoběžka plochy (rovník, hrdlo). Tyto povrchové přímky udávají směr, ve kterém se  $u$  promítne do roviny kolmé k ose jako kružnice. Takový směr najdeme i pro kuželosečku  $v$  a v rovině kolmé k ose pak body průniku určujeme jako průsečíky dvou kružnic. [6]

### 3.6 Osvětlení rotačních kvadrik

Rotační kvadriky budeme osvětlovat ze středu  $S$ , který může být vlastní (středové osvětlení) nebo nevlastní (rovnoběžné osvětlení). Sestrojujeme mez vlastního stínu a stín vržený na průmětnu. Mez vlastního stínu plochy  $\Phi$  je množina bodů dotyku  $T$  jejich tečných světelných rovin. Světelná rovina je rovina, která prochází středem osvětlení  $S$ . Přímky  $ST$  jsou tečnami plochy a vyplní dotykovou kuželovou (resp. válcovou) světelnou plochu  $\Omega$  opsanou ploše ze středu osvětlení  $S$ . Rotační kvadrika  $\Phi$  a světelná kuželová (válcová) plocha  $\Omega$  se dotýkají podél meze  $q$  vlastního stínu plochy  $\Phi$ . Řez světelné kuželové (válcové) plochy  $\Omega$  rovinou  $\rho$  je mez stínu vrženého do roviny  $\rho$ . Jestliže se tento řez rozpadá na dvě části, uvažujeme jen část kuželové plochy, uvnitř které leží  $\Phi$ . Odtud je pak odvozena bodová konstrukce meze vlastního stínu:

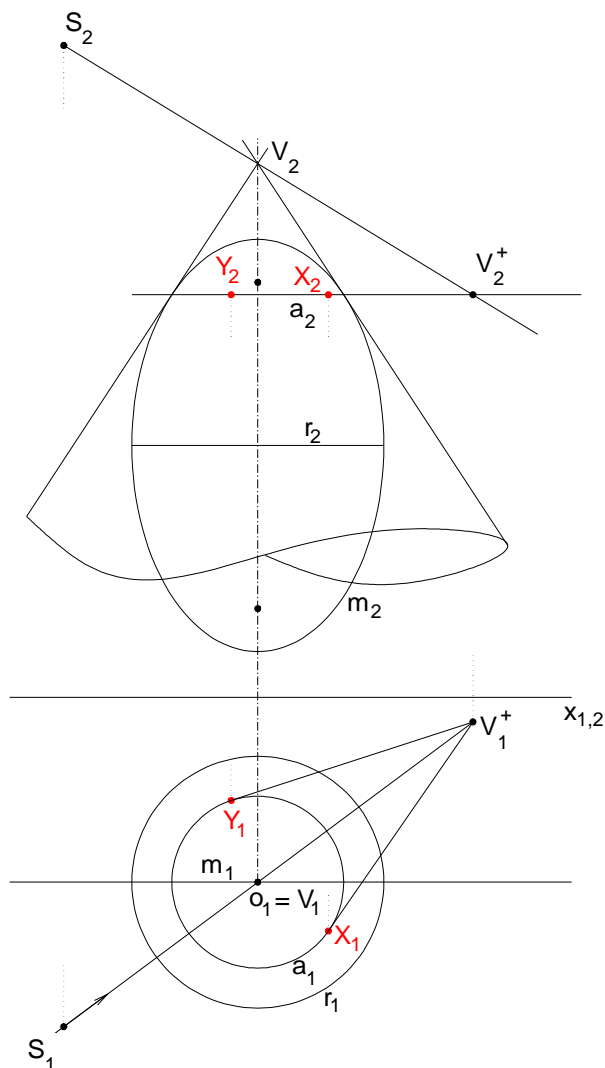
Jestliže se dvě rotační plochy  ${}^1\Phi$  a  ${}^2\Phi$  dotýkají podél křivky  $k$ , tedy mají podél křivky  $k$  společné tečné roviny, pak při daném osvětlení mají na křivce  $k$  stejné body meze vlastního stínu. Plocha  ${}^1\Phi$  je zadaná rotační plocha, plochu  ${}^2\Phi$  volíme co nejjednodušší. Podle druhu pomocné plochy  ${}^2\Phi$  rozlišujeme tři metody pro konstrukci bodů meze vlastního stínu: kuželová, kulová a válcová metoda. Tyto metody používáme při sestrovování meze vlastního stínu na obecných rotačních plochách (tedy i na rotačních kvadrikách) a podle potřeby je kombinujeme. [5]

#### 1. Kuželová metoda

Na rotační ploše  $\Phi$  zvolíme rovnoběžku  $a$ , která leží v rovině  $\alpha$ . Podél rovnoběžky  $a$  opíšeme ploše  $\Phi$  dotykovou rotační kuželovou plochu  $\Omega$  s vrcholem  $V$ . Na ploše  $\Omega$  určíme mez vlastního stínu. Konstrukci meze vlastního stínu na ploše  $\Omega$  si můžeme zjednodušit a sestrojít vržený stín  $V^+$  bodu  $V$  do  $\alpha$ . Tečny z bodu  $V^+$  k rovnoběžce  $a$  se rovnoběžky  $a$

dotýkají v bodech  $X, Y$ . Body  $X, Y$  prochází mez vlastního stínu plochy  $\Omega$  a jsou tedy body meze vlastního stínu na rovnoběžce  $a$ .

Tato metoda se používá především na hrdla a rovníky rotační plochy, v těchto případech přejde dotyková kuželová plocha  $\Omega$  do rotační válcové plochy a body  $X, Y$  pak při rovnoběžném osvětlení leží v rovině, která prochází osou  $o$  a je kolmá k rovině  $(So)$ . I v tomto případě se jedná o kuželovou metodu. [10, s. 55], [5]

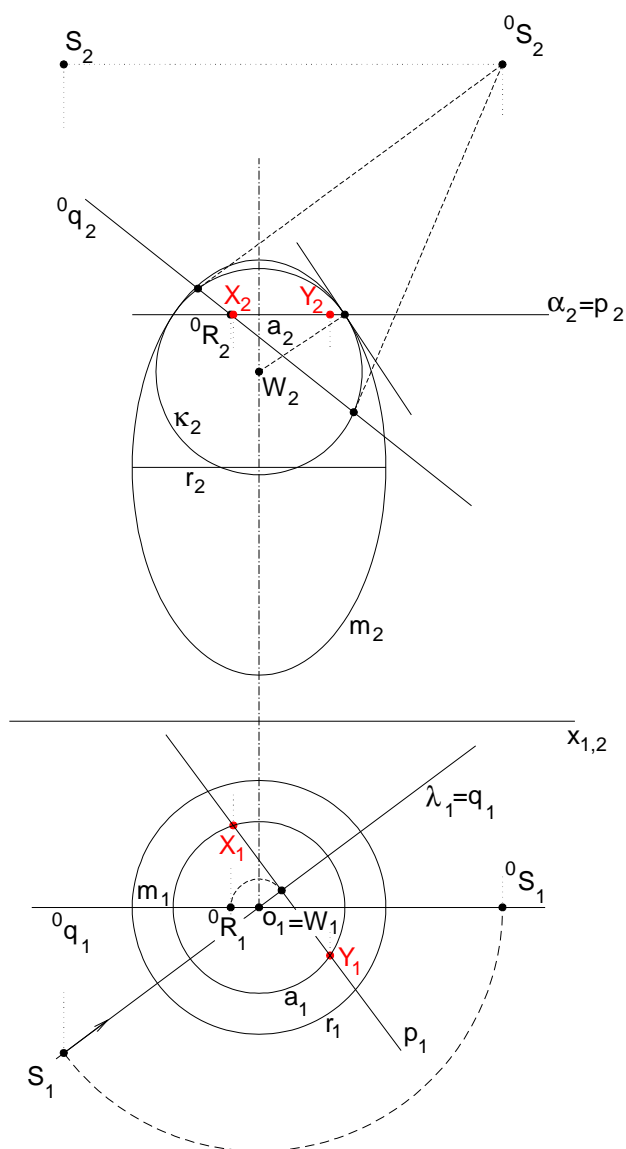


## 2. Kulová metoda

Na rotační ploše  $\Phi$  zvolíme rovnoběžku  $a$ , která leží v rovině  $\alpha$ . Sestrojíme kulovou plochu  $\kappa$ , která se plochy  $\Phi$  dotýká podél rovnoběžky  $a$ . Střed  $W$  kulové plochy  $\kappa$  je vrcholem normálové kuželové plochy příslušné k rovnoběžce  $a$ . Mez  $d$  vlastního stínu kulové plochy  $\kappa$  leží v polární rovině  $\rho$  bodu  $S$  vzhledem ke  $\kappa$ . Označíme  $p$  průsečnicí rovin  $\rho$  a  $\alpha$ ,

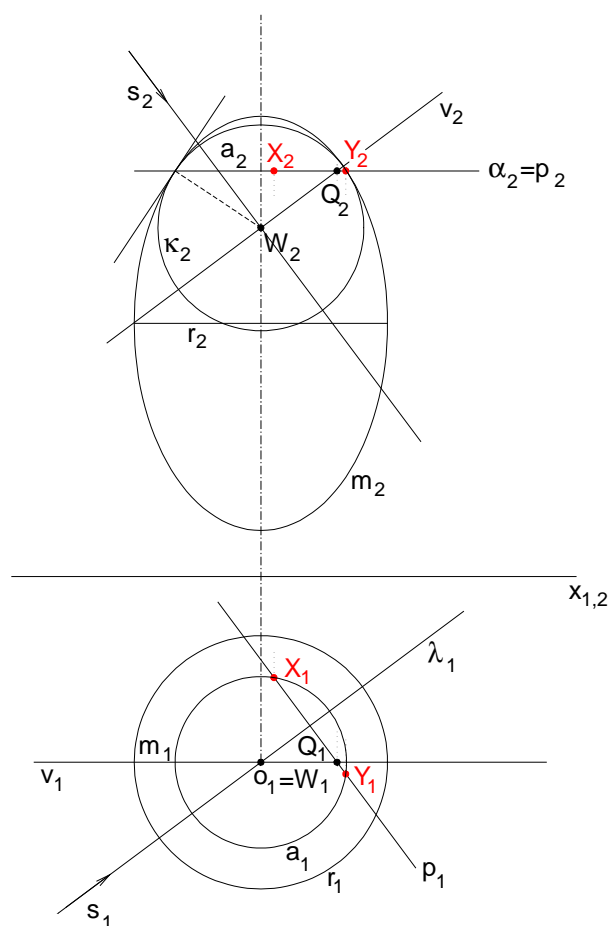
## Rotační kvadriky v příkladech

společné body přímky  $p$  a rovnoběžky  $a$  jsou body  $X, Y$  meze vlastního stínu na rovnoběžce  $a$ . Průmětem  $d$  je obecně elipsa. Rovina  $\lambda=(So)$  protíná kulovou plochu  $\kappa$  v hlavní kružnici  $l$  a rovinu  $\rho$  v poláře  $q$  bodu  $S$  vzhledem k  $\lambda$ . Přímku  $q$  určíme pomocí otočené roviny  $\lambda$  do roviny  $\mu$  rovnoběžné s nárysnou, pak  ${}^0q_2$  je polára  ${}^0S_2$  vzhledem ke  $\kappa_2$ . Sestrojíme průsečík  $R$  přímky  $q$  s rovinou  $\alpha$ . Rovina  $\alpha$  protíná rovinu  $\rho$  v hlavní přímce  $p$  první osnovy a prochází bodem  $R$ . Rovina  $\rho$  je polární rovinou  $S$  vzhledem ke  $\kappa$ , proto je  $\rho$  kolmá k přímce  $SW$ , tedy i přímka  $p$  roviny  $\rho$  je kolmá k  $SW$ . Protože  $p$  je hlavní přímkou první osnovy, tedy je rovnoběžná s  $\pi$ , platí že  $S_1W_1$  je kolmá k přímce  $p_1$ . Přímka  $p$  leží zároveň i v rovině  $\alpha$ , proto průsečíky  $X, Y$  přímky  $p$  s rovnoběžkou  $a$  jsou body meze vlastního stínu.



Jestliže máme zadáno rovnoběžné osvětlení  $s$  rotační plochy  $\Phi$ , konstrukce se zjednoduší. Polární rovina  $\rho$  středu osvětlení vzhledem ke  $\kappa$  protne  $\kappa$  v hlavní kružnici. Sestrojíme hlavní přímkou  $v$  druhé osnovy roviny  $\rho$ , která prochází středem  $W$  kulové plochy  $\kappa$  a přímkou  $p$  první osnovy roviny  $\rho$ , která je průsečnicí rovin  $\rho$  a  $\alpha$ . Přímkou  $v$  a  $p$  se protínají v bodě  $Q$ . Protože  $\rho$  je kolmá na  $s$ , platí  $v_2$  je kolmá na  $s_2$  a  $p_1$  je kolmá na  $s_1$ . Konstrukce bodů  $X, Y$  meze vlastního stínu na rovnoběžce  $a$  při rovnoběžném osvětlení je odtud zřejmá. Sestrojíme  $v_2$  procházející bodem  $W_2$ , určíme průsečík  $Q$  přímkou  $v$  a  $p$  ( $p_2 = \alpha_2$ ) a půdorysem  $Q_1$  bodu  $Q$  vedeme k  $s_1$  kolmici  $p_1$ . Přímka  $p_1$  protíná první průmět  $a_1$  rovnoběžky  $a$  v půdorysech hledaných bodů.

Tuto metodu používáme při sestřování bodů meze vlastního stínu na obecných rovnoběžkách rotační plochy včetně hraničních. [10, s. 56-58], [5]



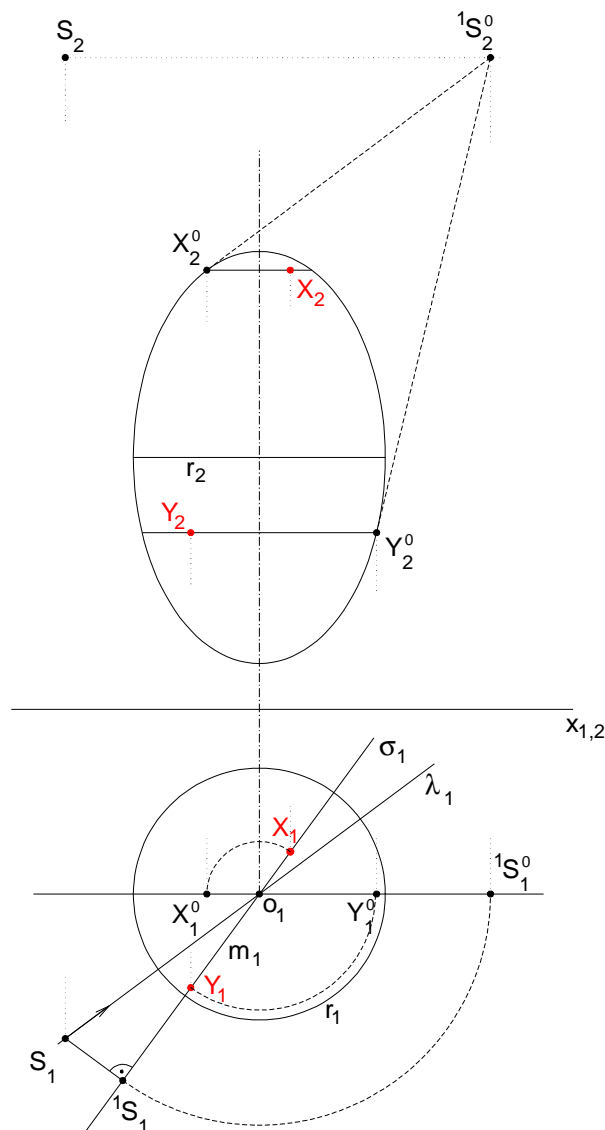
### 3. Válcová metoda

Na rotační ploše  $\Phi$  zvolíme meridián  $m$  ležící v rovině  $\sigma$ . Podél meridiánu  $m$  opíšeme ploše  $\Phi$  dotykovou válcovou plochu  $\Omega$ . Površky dotykové válcové plochy  $\Omega$  jsou kolmé k rovině

$\sigma$  meridiánu  $m$ . Plochu  $\Omega$  osvětlíme a sestrojíme mez vlastního stínu plochy  $\Omega$  a určíme společné body této meze a meridiánu  $m$ . Mez vlastního stínu na válcové ploše s řídicí křivkou  $m$  ležící v rovině  $\sigma$  sestrojíme tak, že bod  $S$  (resp. směr  $s$  v případě rovnoběžného osvětlení) promítneme pravouhle do roviny  $\sigma$ , pravouhlý průmět bodu  $S$  (směru  $s$ ) označíme  ${}^1S$  ( ${}^1s$ ). V rovině  $\sigma$  sestrojíme tečny k meridiánu  $m$  jdoucí bodem  ${}^1S$  (rovnoběžné s  ${}^1s$ ). Body  $X, Y$  dotyku tečen na meridiánu  $m$  prochází povrchové přímky válcové plochy  $\Omega$ , které tvoří mez vlastního stínu. Body dotyku  $X, Y$  leží na meridiánu  $m$ , podél kterého jsme opsali dotkovou válcovou plochu, patří tedy mezi vlastního stínu na  $\Phi$ . Body  $X, Y$  hledáme pomocí otočení roviny  $\sigma$  do roviny  $\mu$  rovnoběžné s nárysnou.

Tuto metodu používáme k sestrojení bodů meze vlastního stínu na světelném meridiánu (v tomto případě rovina  $\lambda$  světelného meridiánu obsahuje  $S$ , odpadá tedy sestrojení pravouhlého průmětu) a k sestrojení bodů meze vlastního stínu na druhém obryse, tedy na hlavním meridiánu (pro tento případ nárys pravouhlého průmětu  $S$  do roviny hlavního meridiánu splyne s  $S_2$ ). [10, s. 58-59], [5]

## Rotační kvadriky v příkladech



Rovnoběžné osvětlení rotační kvadriky je dáno nevlastním středem  $S^\infty$  osvětlení. Mez  $p$  vlastního stínu kvadriky  $\Phi$  je množina bodů dotyku tečen ke kvadrice  $\Phi$  procházejících středem  $S^\infty$  osvětlení, tj. dotyková křivka světelné kuželové plochy  $\Omega$  s vrcholem  $S^\infty$ , která je opsaná kvadrice  $\Phi$ . Mez  $p$  vlastního stínu je řezem kvadriky  $\Phi$  polární rovinou  $\rho$  bodu  $S^\infty$  vzhledem ke kvadrice  $\Phi$ ,  $p$  je tedy kuželosečka. Pro středovou kvadriku platí, že střed  $O$  kvadriky  $\Phi$  leží v rovině  $\rho$ , tedy bod  $O$  je také středem kuželosečky  $p$ .

U nestředové kvadriky platí, že  $O^\infty$  musí ležet v rovině  $\rho$ . Světelná rovina  $\lambda$  procházející osou  $o$  rotační kvadriky  $\Phi$  protíná plochu  $\Phi$  ve světelném meridiánu. Podle roviny  $\lambda$  je souměrná rotační kvadrika i dotyková světelná kuželová plocha  $\Omega$ , takže podle  $\lambda$  je souměrná i mez  $p$  vlastního stínu. Na průsečnici  $q$  roviny  $\rho$  a  $\lambda$  pak leží osa kuželosečky  $p$ , průsečíky přímky  $q$  a kvadriky  $\Phi$  jsou vrcholy kuželosečky  $p$ . Jestliže osvětlujeme část

kvadriky ohraničenou kružnicí  $k$  plochy, pak  $k$  vrhá stín  $k^+$  na plochu  $\Phi$ . Jestliže libovolným bodem  $A$  kružnice  $k$  vedeme přímkou  $AS^\infty$ , pak její průsečík  $A^+$  s kvadrikou  $\Phi$  je bodem křivky  $k^+$ . Křivka  $k^+$  je množina všech takto sestrojených bodů  $A^+$ .

Vylučujeme pouze případ, kdy přímkou  $AS^\infty$  je rovnoběžná s přímkou plochy  $\Phi$  a tedy  $A^+$  je nevlastní. Křivka  $k^+$  tedy patří průniku rotační kvadriky  $\Phi$  a světelné kuželové plochy  $\Omega$  s vrcholem  $S^\infty$ , která prochází kružnicí  $k$ .

Protože plochy  $\Omega$  a  $\Phi$  (obě jsou kvadriky,  $\Omega$  je vlastně kruhová válcová plocha) obsahují kružnici  $k$ , rozpadá se jejich průnik na dvě křivky  $k$ ,  $k^+$  druhého stupně. Obě křivky  $k$ ,  $k^+$  leží na kruhové válcové ploše  $\Omega$ , křivka  $k^+$  je tedy elipsa příp. kružnice. [6]

Pro rotační kvadriky platí:

**Věta:** Necht'  $k$  je kružnice rotační kvadriky  $\Phi$  ležící v rovině  $\alpha$ , která je kolmá k ose  $o$ , a necht'  $\rho$  je rovina meze  $p$  vlastního stínu kvadriky  $\Phi$  v osvětlení dané středem  $S^\infty$ . Pak rovina  $\zeta$  vrženého stínu  $k^+$  kružnice  $k$  na plochu  $\Phi$  prochází průsečnicí  $c$  rovin  $\alpha$  a  $\rho$ .

Kuželosečky  $k$  a  $k^+$  leží na téže kruhové válcové ploše a proto si odpovídají v prostorové afinitě určené osou  $c$ , jejíž směr je dán bodem  $S^\infty$ .

Podrobný důkaz věty lze nalézt např. v [6].

### 3.6.1 Osvětlení rotačního elipsoidu

Mez vlastního stínu rotačního elipsoidu je vždy elipsa. Rovina  $\rho$  meze vlastního stínu obsahuje střed  $O$  elipsoidu a proto jej vždy protíná v elipse. [6]

Příklad 18

### 3.6.2 Osvětlení rotačního paraboloidu

Při určení meze vlastního stínu u rotačního paraboloidu rozlišujeme dva případy.

1. Střed  $S^\infty$  osvětlení je různý od bodu  $O^\infty$  paraboloidu (směr osvětlení  $s$  není rovnoběžný s osou rotačního paraboloidu). Potom rovina  $\rho$ , která je polární rovinou bodu  $S^\infty$  prochází bodem  $O^\infty$ , tedy je rovnoběžná s osou  $o$  paraboloidu a protíná paraboloid v parabole. Mezí vlastního stínu je parabola.

Příklad 17, Příklad 19

2. Střed  $S^\infty$  splyne s bodem  $O^\infty$  paraboloidu (směr osvětlení  $s$  je rovnoběžný s osou rotačního paraboloidu). Potom je polární rovina bodu  $S^\infty$  nevlastní a mez vlastního

stínu neexistuje, protože jedna strana plochy je celá osvětlená a druhá je ve stínu.  
[10, s. 147], [6]

### 3.6.3 Osvětlení rotačního hyperboloidu

#### Rotační dvojdílný hyperboloid

Rotační dvojdílný hyperboloid protíná nevlastní rovinu v regulární kuželosečce  $l^\infty$ .

Nevlastní přímka  $u^\infty$  roviny  $\rho$  meze vlastního stínu je polárou bodu  $S^\infty$  vzhledem k  $l^\infty$ .

1. Střed  $S^\infty$  leží vně kuželosečky  $l^\infty$  (přímka  $s$  směru osvětlení, která prochází středem  $O$  hyperboloidu, leží vně asymptotické kuželové plochy). Pak polára  $u^\infty$  protíná kuželosečku  $l^\infty$  ve dvou různých bodech  $U^\infty, V^\infty$ . Body  $U^\infty, V^\infty$  patří mezi vlastního stínu  $p$ . Mezi vlastního stínu  $p$  je hyperbola.
2. Střed  $S^\infty$  leží uvnitř kuželosečky  $l^\infty$  (přímka  $s$  směru osvětlení procházejícím středem  $O$  hyperboloidu leží uvnitř asymptotické kuželové plochy). Polára  $u^\infty$  kuželosečku  $l^\infty$  neprotíná. Řez rovinou  $\rho$  neobsahuje nevlastní body. Protože  $\rho$  obsahuje střed dvojdílného hyperboloidu, je průnik  $\rho$  s kvadrikou prázdná množina. Mez vlastního stínu neexistuje.
3. Střed  $S^\infty$  leží na kuželosečce  $l^\infty$ , rovina  $\rho$  obsahuje jeden nevlastní bod řezu a prochází  $O$ , tedy průnikem je jednobodová množina ( $\rho$  je tečná rovina v nevlastním bodě). Mez vlastního stínu v tomto případě neexistuje. [10, s. 147], [6]

#### Rotační jednodílný hyperboloid

Rotační jednodílný hyperboloid protíná také nevlastní rovinu v regulární kuželosečce  $l^\infty$ .

Nevlastní přímka  $u^\infty$  roviny  $\rho$  meze vlastního stínu je polárou bodu  $S^\infty$  vzhledem k  $l^\infty$ .

1. Střed  $S^\infty$  leží vně kuželosečky  $l^\infty$ , (přímka  $s$  směru osvětlení, která prochází středem  $O$  hyperboloidu, leží vně asymptotické kuželové plochy). Polára  $u^\infty$  protíná kuželosečku  $l^\infty$  ve dvou různých bodech  $U^\infty, V^\infty$ . Body  $U^\infty, V^\infty$  patří mezi vlastního stínu  $p$ . Mezi vlastního stínu  $p$  je kuželosečka typu hyperbola. Protože střed  $O$  hyperboloidu leží v  $\rho$ , je mezi vlastního stínu hyperbola.
2. Střed  $S^\infty$  leží uvnitř kuželosečky  $l^\infty$ , (přímka  $s$  směru osvětlení procházejícím středem  $O$  hyperboloidu leží uvnitř asymptotické kuželové plochy). Polára  $u^\infty$



kuželosečku  $l^\infty$  neprotíná. Řez rovinou  $\rho$  je typu elipsa. Protože rovina  $\rho$  obsahuje střed  $O$  hyperboloidu, je mezí vlastního stínu elipsa, (případně kružnice, pokud je rovina  $\rho$  kolmá k ose  $o$ ).

Příklad 20

3. Střed  $S^\infty$  leží na kuželosečce  $l^\infty$ . Polára  $u^\infty$  je tečna kuželosečky  $l^\infty$  v bodě  $U^\infty$ .  
Rovina  $\rho$  je tečnou rovinou v nevlastním bodě (tzn. asymptotickou rovinou). Mezí vlastního stínu je dvojice rovnoběžek. [10, s. 147-148], [6]

### 3.7 Zobrazení rotačních kvadrik v různých projekcích

Ke konstrukci obrysů rotačních ploch v různých projekcích se využívá osvětlení. Směr (střed) promítání považujeme za směr (střed) osvětlení a průmětna je rovinou, do které sestrojujeme vržený stín. Skutečným obrysem plochy je mez vlastního stínu v daném osvětlení. Zdánlivým obrysem plochy je mez stínu vrženého do průmětny. [5]

#### 3.7.1 Obrys rotační kvadriky v Mongeově projekci

V Mongeově projekci rozlišujeme první a druhý skutečný obrys a první a druhý zdánlivý obrys. Při sestrování sdružených průmětů kvadriky  $\Phi$ , jejíž osa  $o$  je v obecné poloze, vedeme osou  $o$  třetí průmětnu  $\mu$  kolmou k jedné z průměten, např. k  $\pi$  a tuto pomocnou průmětnu  $\mu$  sklopíme. V rovině  $\mu$  leží meridián  $m$  kvadriky  $\Phi$ . Třetím obrysem plochy je tedy hlavní meridián  $m$ . Určíme první obrys  $p$  plochy  $\Phi$ ,  $p$  je mezí vlastního stínu při osvětlení ve směru kolmém k  $\pi$ .

Třetím průmětem meze  $p$  je úsečka, její krajní body  $C_3, D_3$  jsou třetí průměty vrcholů elipsy  $p$  a jsou body dotyku tečen meridiánu  $m$  rovnoběžných s  $s_3$ .

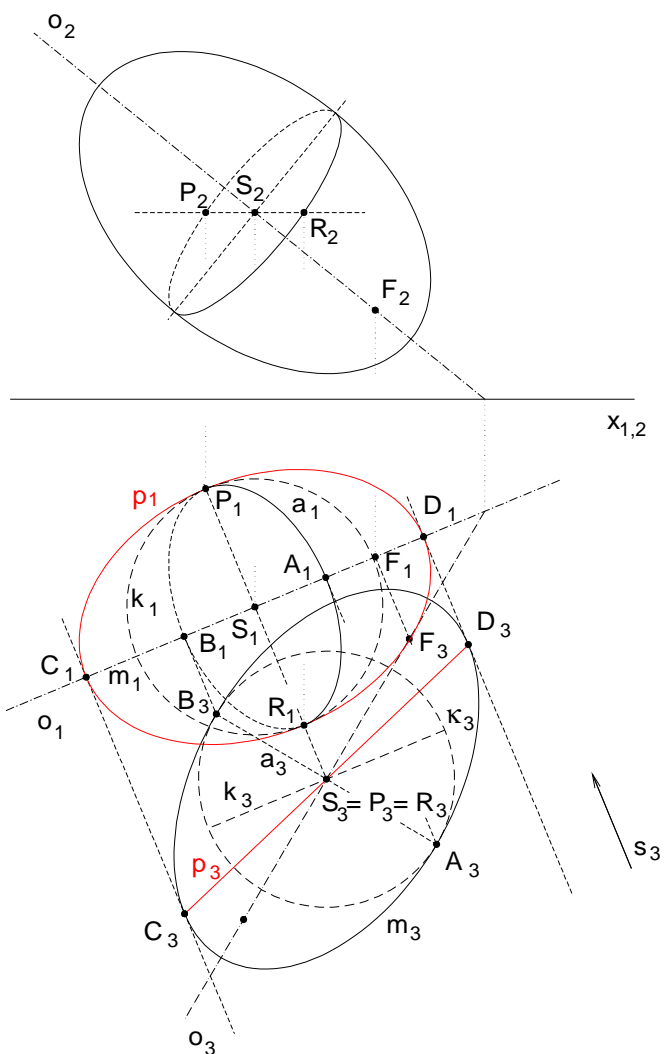
Na obecné rovnoběžky použijeme kulovou metodu osvětlení, podél rovnoběžky  $a$  vepíšeme kulovou plochu  $\kappa$ , mez vlastního stínu  $k$  této kulové plochy leží v rovině kolmé ke směru osvětlení  $s$  (tedy v rovině rovnoběžné s  $\pi$ ). Prvním průmětem meze  $k$  je kružnice  $k_1$ . Průsečíky  $P, R$  kružnic  $a, k$  jsou body meze vlastního stínu  $p$  plochy, jejich půdorysy patří prvnímu obrysu.

Půdorysy  $A_1B_1$  leží na  $o_1$ , hlavní vrcholy  $P_1, R_1$  elipsy  $p_1$  leží na přímce kolmé k  $\mu$  a procházející středem  $O_1$  hyperboloidu. Osami  $A_1B_1$  a  $P_1R_1$  je určena elipsa  $p$ , která určuje půdorys plochy  $\Phi$ . [5], [6]

Nárys plochy můžeme sestrojít dvěma způsoby, můžeme užít podobnou konstrukci jako v půdoryse, zvolíme čtvrtou průmětnu, kterou sklopíme a sestrojíme mez vlastního stínu při osvětlení ve směru kolmém k nárysně. Nebo můžeme nárys plochy sestrojít jako obálku průmětů rovnoběžek plochy. Protože rovnoběžky rotační kvadriky leží ve vzájemně rovnoběžných rovinách, jsou jejich nárysy homotetické elipsy (tzn. elipsy, jejichž spojnice hlavního a vedlejšího vrcholu jsou rovnoběžné).

Sestrojíme například nárys rovnoběžky  $a$ . Rovnoběžka  $a$  leží v rovině  $\alpha$  kolmé k  $o$ , středem rovnoběžky  $a$  je bod  $O$ , jejím půdorysem je elipsa  $a_1$ , jejíž hlavní osa má velikost rovnou poloměru rovnoběžky  $a$  a je kolmá na  $o_1$ . Hlavní osa elipsy  $a_1$  je půdorys průměru  $SP$  kružnice  $a$  rovnoběžného s  $\pi$ , tj. leží na hlavní přímce první osnovy roviny  $\alpha$ . Nárys průměru  $SP$  je rovnoběžný se základnicí. V náryse se kružnice  $a$  rovněž zobrazí jako elipsa. Protože  $a$  leží v rovině  $\alpha$  kolmé k  $o$ , je hlavní osa elipsy  $a_2$  kolmá na  $o_2$  a její velikost je rovna poloměru kružnice  $a$ . Elipsa  $a_2$  pak je určena hlavními vrcholy a krajními body průměru  $SP$ ,  $a_2$  můžeme sestrojít proužkovou konstrukcí. Pro další rovnoběžky stačí, když najdeme jejich střed, hlavní osy jsou kolmé na  $o_2$  a jejich velikost je rovna poloměru rovnoběžky. Vedlejší vrcholy pak sestrojíme pomocí rovnoběžných přímek spojujících hlavní a vedlejší vrcholy. [5]

Příklad 6



### 3.7.2 Obrys rotační kvadriky v kótovaném promítání

Při sestřování obrysu rotační kvadriky v kótovaném promítání používáme podobnou konstrukci jako při sestřování půdorysu plochy v Mongeově promítání. Tedy zvolíme pomocnou druhou průmětnu  $\mu$  kolmou k průmětně  $\pi$  a procházející osou rotace plochy a tuto pomocnou rovinu  $\mu$  sklopíme.

V rovině  $\mu$  leží meridián  $m$  kvadriky  $\Phi$ . Druhým obrysem plochy je hlavní meridián  $m$ . První obrys  $p$  plochy  $\Phi$  je mezí vlastního stínu při osvětlení ve směru kolmém k  $\pi$ .

Příklad 3

### 3.7.3 Obrys rotační kvadriky v pravoúhlé axonometrii

Pravoúhlá axonometrie je dána axonometrickým trojúhelníkem, osu rotační kvadriky ztotožníme s osou  $z$  souřadnicového systému. Obrysem rotační plochy je mez  $p$  vlastního stínu v rovnoběžném osvětlení se směrem  $s$  osvětlení kolmým k axonometrické průmětně. Osou  $z$  proložíme promítací rovinu  $\lambda$  a považujeme ji za pomocnou průmětnu. Situaci v prostoru pravoúhle promítneme do  $\lambda$  a rovinu  $\lambda$  sklopíme do průmětny (sklopené útvary označíme např. indexem 3). V rovině  $\lambda$  leží meridián rotační kvadriky. Z důvodu přehlednosti řešení, aby se nám nepřekrýval sklopený meridián s axonometrickým průmětem, většinou posunujeme sklopenou rovinu  $\lambda$  ve směru  $s$  kolmém k průmětu osy  $z$ . Osa  $z$  je také axonometrickým průmětem roviny  $\lambda$ . Směr  $s$  je kolmý k axonometrické průmětně, je tedy také směrem osvětlení.

Sestrojíme mez  $p$  vlastního stínu při osvětlení ve směru  $s$ . Průmět  $p_3$  meze  $p$  do roviny  $\lambda$  je úsečka. Zvolíme libovolnou rovnoběžku  $a$  plochy a zobrazíme její průmět  $a_3$  do roviny  $\lambda$ . Průsečík  $k_3$  a  $p_3$  je průmět bodů  $A, B$  meze  $p$  vlastního stínu ležících na kružnici  $a$ . Křivky  $k^a$  a  $p^a$  se v bodech  $A^a, B^a$  dotýkají. Analogicky sestrojíme dostatečný počet bodů k sestrojení meze  $p$  vlastního stínu.

Bod meze vlastního stínu ležícího na meridiánu v rovině  $\lambda$  určíme pomocí válcové metody, je to bod dotyku tečny meridiánu rovnoběžné s průmětem  $s_3$  směru osvětlení  $s$  do roviny  $\lambda$ .

[10, s. 68], [5], [6]

Příklad 5, Příklad 10, Příklad 15, Příklad 16, Příklad 19

## 4 Řešené příklady

### 4.1 Konstrukce rotačních kvadrik ze zadaných podmínek

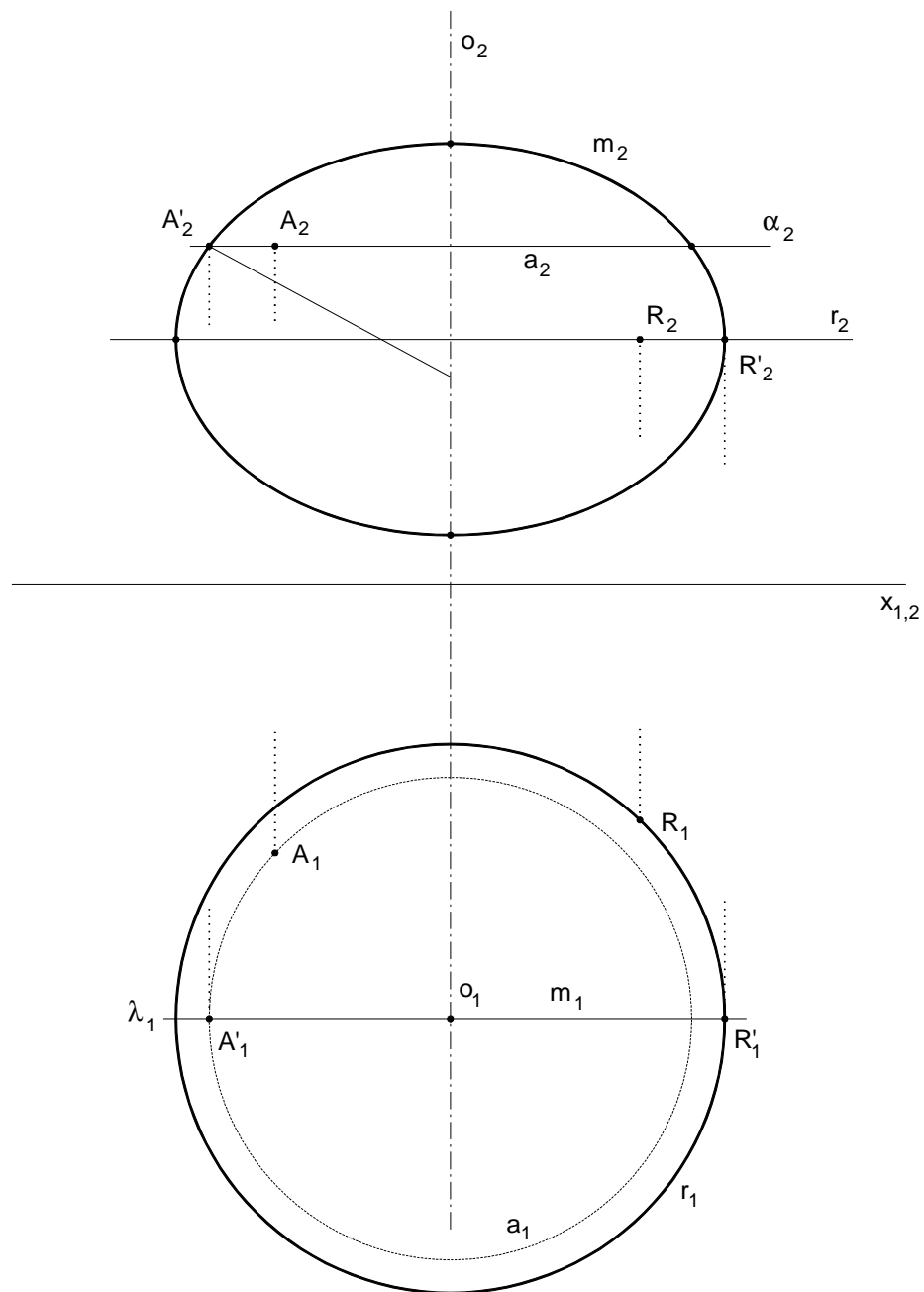
#### Příklad 1 – Konstrukce rotačního elipsoidu v Mongeově promítání

V Mongeově promítání sestrojte rotační elipsoid, který je zadán osou rotace, bodem rovniku  $R$  a obecným bodem  $A$  plochy.

#### Příklad 1 (postup)

1. Protože je osa rotace elipsoidu kolmá k půdorysně, leží rovnoběžky plochy v rovinách rovnoběžných s půdorysnou. Prvním skutečným obrysem plochy je proto rovník  $r$ , druhým skutečným obrysem je elipsa, která je hlavním meridiánem  $m$  ležícím v rovině  $I$ , která je rovnoběžná s nárysnou a zároveň prochází osou rotace  $o$ . Půdorysem rovniku je kružnice  $r_1$  se středem  $o_1$  a poloměrem  $|o_1R_1|$ , která je zároveň půdorysem rotačního elipsoidu.
2. Bod  $A$  elipsoidu leží na rovnoběžce  $a$  v rovině  $a$  rovnoběžné s půdorysnou. Prvním průmětem rovnoběžky  $a$  je kružnice  $a_1$  se středem  $o_1$  a poloměrem  $|o_1A_1|$ . Sestrojíme body  $R'$  rovniku  $r$  a  $A'$  náležící rovnoběžce  $a$ , které leží v rovině  $I$  a jsou body hlavního meridiánu  $m$ . Bod  $R'$  je hlavním vrcholem elipsy  $m$ .
3. Druhým zdánlivým obrysem elipsoidu je nárys elipsy  $m_2$ . Elipsa  $m_2$  je určena hlavní osou  $r_2$  s hlavním vrcholem  $R'_2$  a bodem elipsy  $A'_2$ . Elipsu  $m_2$  sestrojíme z těchto prvků pomocí proužkové konstrukce.

**Příklad 1 (řešení)**



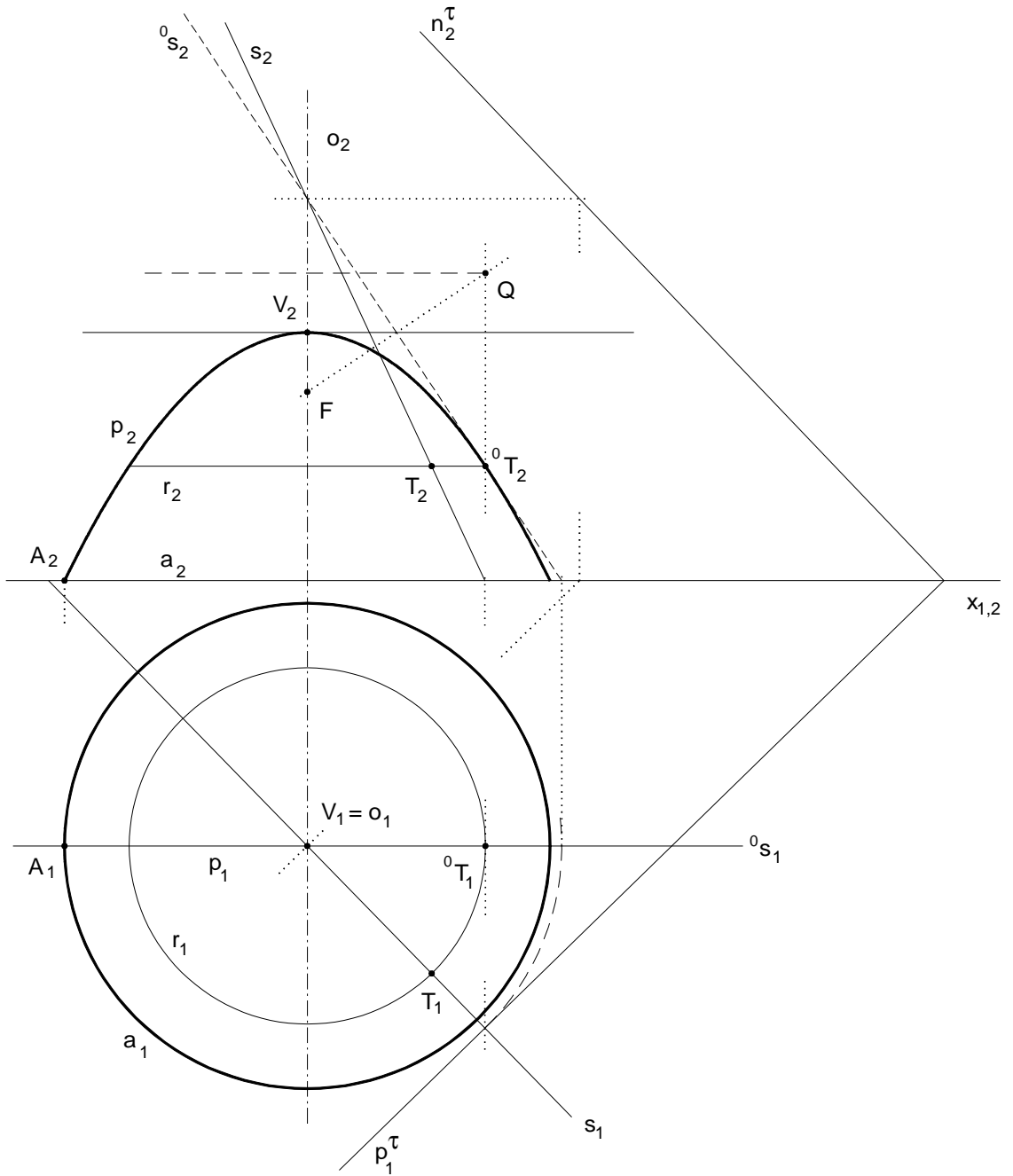
## Příklad 2 – Konstrukce rotačního paraboloidu v Mongeově promítání

V Mongeově promítání sestrojte rotační paraboloid, který je zadán osou rotace, tečnou rovinou  $t$  a vrcholem  $V$  paraboloidu. Určete bod dotyku plochy s rovinou  $t$  a paraboloid omezte půdorysnou.

### Příklad 2 (postup)

1. Osa paraboloidu je kolmá k půdorysně, rovnoběžky plochy tedy leží v rovinách rovnoběžných s půdorysnou. Prvním skutečným obrysem paraboloidu je rovnoběžka  $a$  plochy, která leží v půdorysně a která plochu paraboloidu omezuje. Druhým skutečným obrysem je část paraboly  $p$  (hlavní meridián) a sečna  $a_2$ , které leží v rovině  $I$ , rovnoběžné s nárysnou a procházející osou rotace  $o$ .
2. Tečnou rovinu  $t$  otočíme kolem osy paraboloidu  $o$  tak, aby po otočení byla kolmá k nárysně. Ke konstrukci využijeme spádovou přímku  $s$  roviny  $t$ , jejíž půdorys prochází bodem  $V_1$  a která v daném otočení přejde do přímky  ${}^0s$  ležící v rovině  $I$  hlavního meridiánu. Nárys přímky  ${}^0s_2$  je pak tečnou k hlavnímu meridiánu  $p$ .
3. Obrysem plochy v náryse je část paraboly, která je určena vrcholem  $V_2$ , osou  $o_2$  a tečnou  ${}^0s_2$ , (parabolu sestrojíme s využitím ohniskových vlastností a určíme bod dotyku  ${}^0T_2$  paraboly a tečny  ${}^0s_2$ ).
4. Bod dotyku  $T$  paraboloidu a tečné roviny  $t$  leží na rovnoběžce procházející bodem  ${}^0T$  a na spádové přímce  $s$  roviny  $t$  procházející středem  $V$ .
5. Půdorysem rovnoběžky  $a$  je kružnice  $a_1$  se středem  $o_1$  a poloměrem  $|A_2o_2|$ , prvním průmětem paraboloidu je kruh ohraničený kružnicí  $a_1$ .

Příklad 2 (řešení)





### Příklad 3 – Konstrukce rotačního paraboloidu v kótovaném promítání

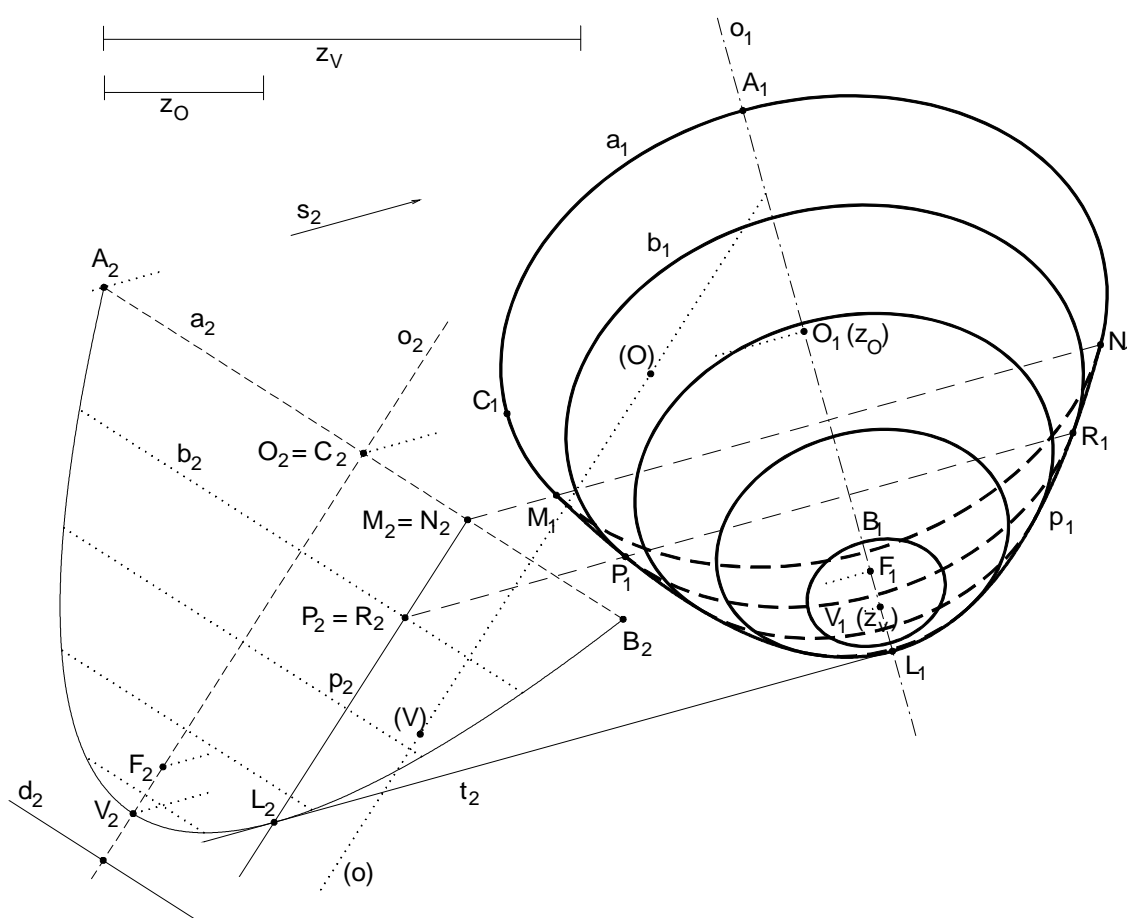
V kótovaném promítání sestrojte rotační paraboloid, jestliže je zadán jeho vrchol  $V$ , ohnisko  $F$ . Paraboloid ohraničte rovinou kolmou k ose  $o$  paraboloidu a procházející daným bodem  $O$ , který leží na ose paraboloidu.

#### Příklad 3 (postup)

1. Protože osa  $o$  paraboloidu není rovnoběžná s průmětnou  $\pi$ , sestrojíme první průmět paraboloidu pomocí rovnoběžného osvětlení, jehož směr  $s$  je kolmý na průmětnu  $\pi$ . Prvním obrysem plochy pak bude mez  $p$  vlastního stínu při osvětlení ve směru promítání.  
Zvolíme pomocnou průmětnu  $m$ , která je kolmá k průmětně  $\pi$  a prochází osou  $o$  paraboloidu. V rovině  $m$  leží meridián  $m$  paraboloidu. Rovinu  $m$  sklopíme (pro lepší přehlednost řešení sklopenou rovinu  $m$  posuneme ve směru  $s_2$  kolmém na osu  $o_1$ ), sklopené útvary označíme indexem 2 a ve sklopení sestrojíme meridián  $m$ , kterým je část paraboly ohraničená rovnoběžkou  $a$  ležící v rovině kolmé k ose  $o$  paraboloidu a procházející bodem  $O$ . Ke konstrukci části paraboly využijeme ohniskové vlastnosti této kuželosečky.
2. Druhý průmět  $a_2$  rovnoběžky  $a$  paraboloidu se zobrazí jako úsečka. Její krajní body  $A_2, B_2$  promítneme ve směru osvětlení  $s_2$ , bod  $A_2$  se zobrazí na bod  $A_1$ , který sestrojíme jako průsečík přímky směru osvětlení procházející bodem  $A_2$  s osou  $o$ , stejným způsobem zkonstruujeme i bod  $B_1$ . Bod  $C$  rovnoběžky  $a$  leží na sdruženém průměru k  $AB$ . Jeho druhý průmět  $C_2$  splývá s druhým průmětem  $O_2$  bodu  $O$ . Jeho první průmět  $C_1$  leží na přímce směru osvětlení procházející bodem  $C_2$  a vzdálenost  $|C_1O_1|$  je rovna poloměru  $r$  rovnoběžky  $a$ , tzn.  $r = |A_2C_2|$ . Prvním průmětem rovnoběžky  $a$  je elipsa  $a_1$ , jejíž vedlejší osa je určena body  $A_1, B_1$ , hlavní poloosa je určena body  $C_1, O_1$ . Podobným způsobem sestrojíme průměty dalších rovnoběžek paraboloidu.
3. Mez  $p$  vlastního stínu (při osvětlení ve směru promítání) je část paraboly. Její druhý průmět  $p_2$  je úsečka  $L_2M_2$ , kde bod  $L_2$  je dotykový bod paraboly a tečny  $t_2$  rovnoběžné se směrem osvětlení  $s_2$ . Sestrojíme body meze vlastního stínu  $P, R$  jako průsečíky paraboly  $p$  s rovnoběžkou  $b$  paraboloidu; v sestrojených bodech  $P_1, R_1$  se mění viditelnost rovnoběžky  $b_1$ . Pro přesnější vykreslení paraboly  $p_1$  můžeme

sestrojit stejným způsobem průsečíky s dalšími libovolnými rovnoběžkami paraboloidu.

**Příklad 3 (řešení)**



## Příklad 4 – Konstrukce dvojdílného rotačního hyperboloidu v Mongeově promítání

V Mongeově promítání sestrojíte dvojdílný rotační hyperboloid, jestliže je dána osa rotace  $o$ , přímka asymptotické kuželové plochy  $p$  a bod  $A$  hyperboloidu. Plochu omezte půdorysnou a rovinou s ní souměrnou podle středu plochy.

### Příklad 4 (postup)

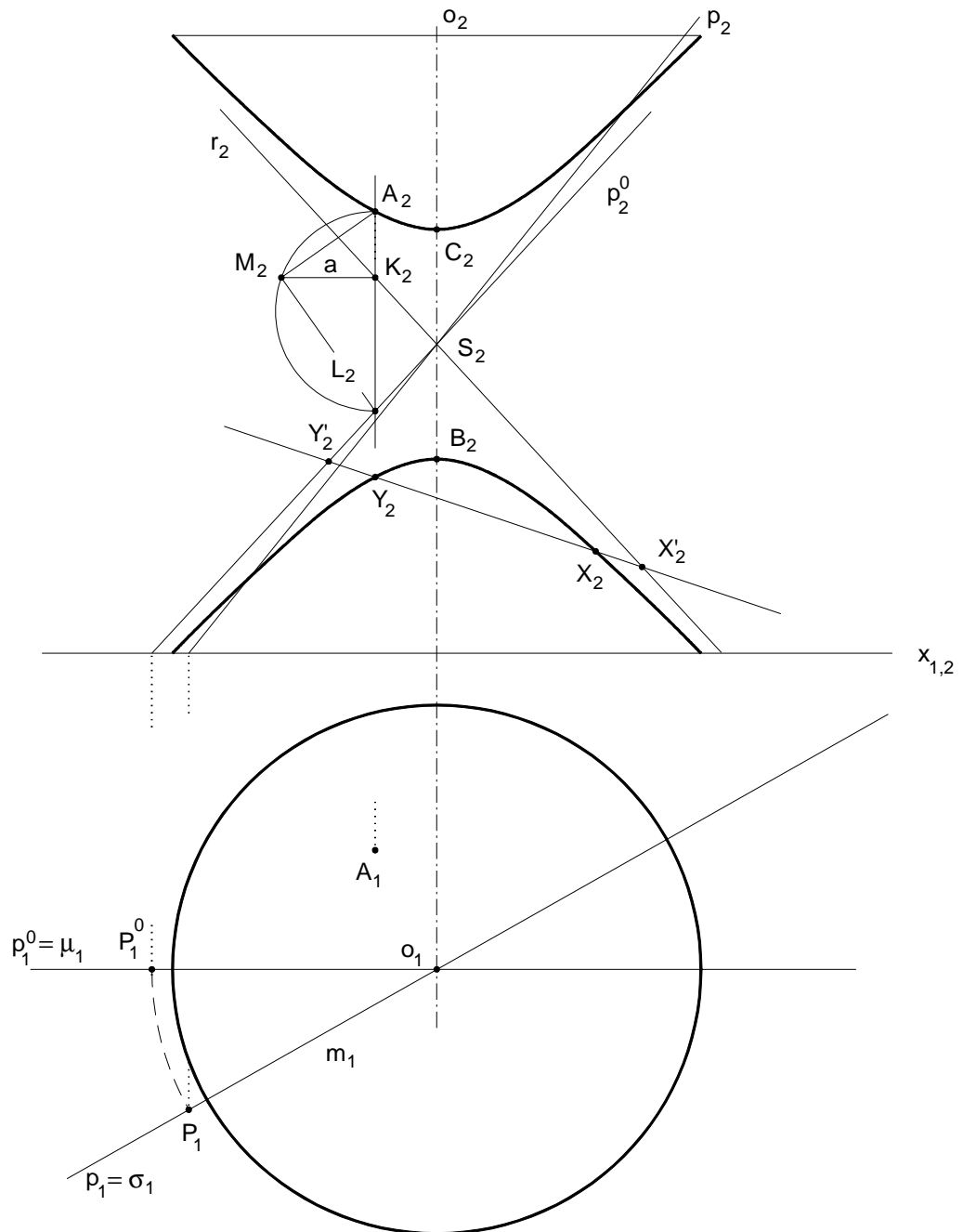
1. Protože je osa  $o$  plochy kolmá k průmětně  $\pi$ , půdorysem plochy je kruh, jehož hraniční kružnice je prvním průmětem rovnoběžky plochy ležící v půdorysně (případně v rovině rovnoběžné s půdorysnou a souměrné podle středu  $S$  plochy). Nárysem plochy bude část hyperboly (omezená půdorysnou a rovinou s ní souměrnou podle  $S$ ) ležící v rovině hlavního meridiánu. Přímka  $p$  leží v rovině  $S$  meridiánu  $m$ , rovina  $S$  je určena osou  $o$  a přímkou  $p$ . Rotací kolem osy  $o$  přejde rovina  $S$  do roviny  $m$  hlavního meridiánu. Přímkou  $p$  ležící v rovině  $S$  otočíme kolem osy rotace  $o$  do roviny  $m$ , tedy otočená přímka  $p^0$  je rovnoběžná s nárysnou.
2. Plocha se v náryse zobrazí jako část hyperboly. Otočená přímka  $p_2^0$  v náryse je asymptotou této hyperboly, druhou asymptotu  $r_2$  sestrojíme podle  $p_2^0$  pomocí osové souměrnosti s osou  $o$ .
3. Průsečík  $S_2$  asymptot  $r_2$  a  $p_2^0$  je středem hyperboly. Přímka rovnoběžná s hlavní osou  $o_2$  a procházející bodem  $A_2$  protíná asymptoty  $r_2$  a  $p_2^0$  po řadě v bodech  $K_2$ ,  $L_2$ . Dá se ukázat, že pro bod  $A_2$  hyperboly a takto sestrojené body  $K_2$ ,  $L_2$  platí:  $|KM| \cdot |LM| = a^2$ , kde  $a$  je délka hlavní poloosy hyperboly<sup>2</sup>. Délku  $a$  můžeme pak konstruktivně zjistit pomocí Eukleidovy věty o odvěsně. (Sestrojíme Thaletovu kružnici nad průměrem  $A_2L_2$ , v ní sestrojíme pravoúhlý trojúhelník  $A_2L_2M_2$ , kde bod  $M_2$  leží na kolmici k přímkce  $A_2L_2$  vedené z bodu  $K_2$  a zároveň náleží Thaletově kružnici; potom vzdálenost  $|AM|$  je rovna velikosti hlavní poloosy a hledané hyperboly).
4. Sestrojíme hlavní vrcholy  $B_2$ ,  $C_2$  hyperboly, můžeme sestroit i další body hyperboly pro její přesnější vyrýsování.

---

<sup>2</sup> Odvození a podrobný popis konstrukce lze nalézt v [14, s.104-105]

5. Půdorysem plochy je kruh se středem v bodě  $o_1$  a poloměrem odpovídajícím vzdálenosti krajních bodů rovnoběžky plochy ležící v půdorysně od osy  $o$ .

**Příklad 4 (řešení)**



## Příklad 5 – Konstrukce jednodílného rotačního hyperboloidu v pravouhlé axonometrii

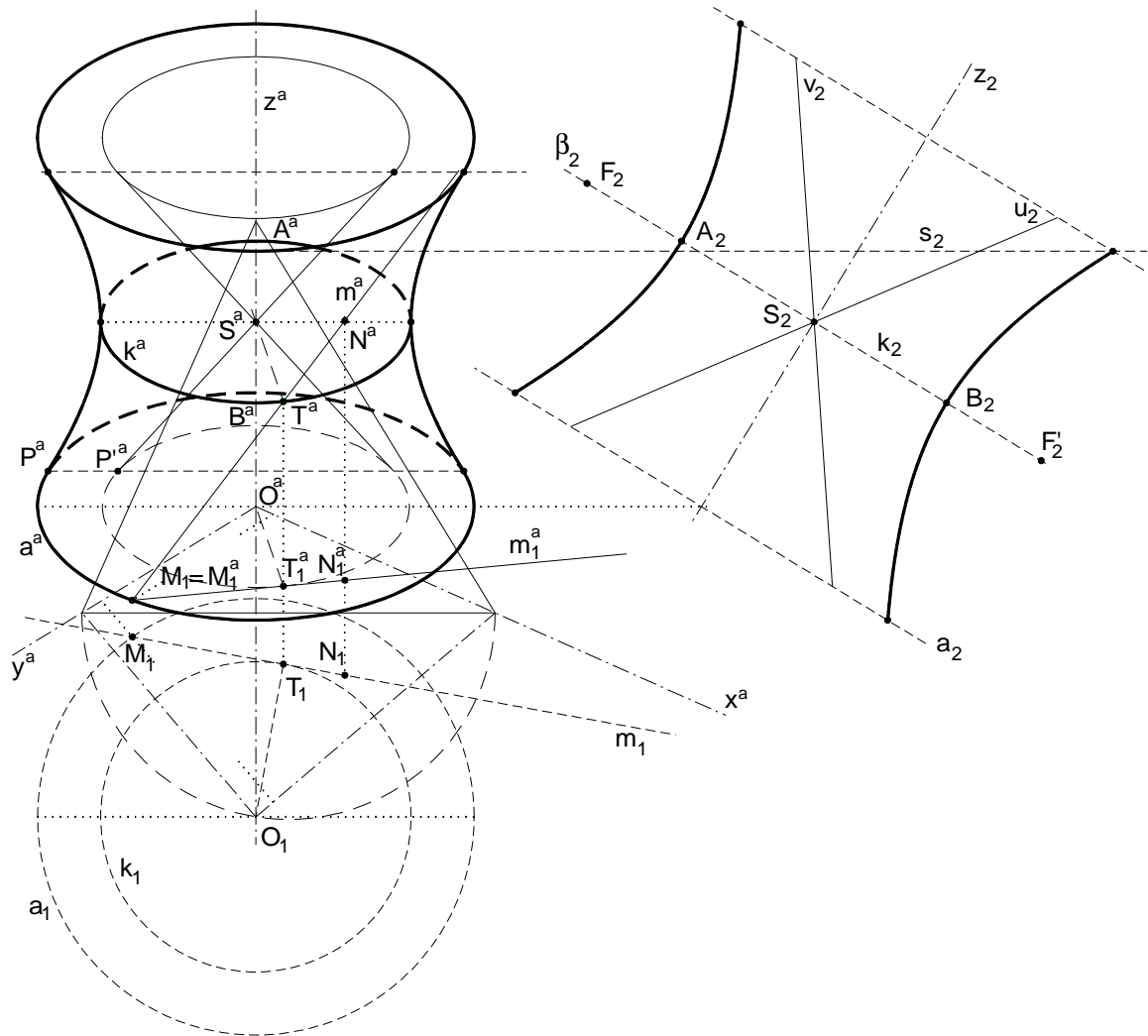
V pravouhlé axonometrii zadané axonometrickým trojúhelníkem sestrojte obrys rotačního jednodílného hyperboloidu vytvořeného rotací přímky  $m = MN$  kolem osy  $z$ . Plochu omezte rovinou danou osami  $x, y$  a rovinou s ní rovnoběžnou a souměrnou podle středu hyperboloidu.

### Příklad 5 (postup)

1. Bod  $T$  přímky  $MN$ , který leží nejbližší k ose rotace, vytvoří rotací hrdelní kružnici  $k$  jednodílného hyperboloidu, jejíž střed  $S$  je zároveň středem plochy. Kružnice  $k$  leží v rovině rovnoběžné s průmětnou  $\pi = (x, y)$ . Situaci v prostoru promítneme do průmětny  $\pi$  a otočíme ji. V otočení se přímka  $m$  zobrazí na přímku  $m_1 = M_1N_1$ , osa  $z$  hyperboloidu se v otočení zobrazí do bodu  $O_1$ . Na přímce  $m$  hledáme bod, který leží nejbližší k ose rotace, tedy v otočení řešíme planimetrickou úlohu – k dané přímce  $m_1$  sestrojíme kružnici  $k_1$  se středem  $O_1$  tak, aby přímka  $m_1$  byla tečnou hledané kružnice  $k_1$ . Bod dotyku kružnice  $k_1$  a přímky  $m_1$  označíme  $T_1$  a určíme jeho axonometrický průmět  $T^a$  na přímce  $m^a$ . Protože rovnoběžka  $k$  leží v rovině rovnoběžné s první průmětnou, můžeme sestrojit střed  $S^a$  elipsy  $k^a$  tak, že v první průmětně určíme spojnicí  $T_1^a$  prvního axonometrického průmětu bodu  $T$  s bodem  $O^a$ . S touto spojnici vedeme rovnoběžku bodem  $T^a$ , její průsečík s osou  $z$  je hledaný střed  $S^a$  rovnoběžky  $k^a$  a zároveň i střed hyperboloidu.
2. Bod  $M$  leží v první průmětně, jeho rotací kolem osy  $z$  vznikne rovnoběžka  $a$  ležící v první průmětně, kterou je plocha omezena. Konstrukci rovnoběžky a provedeme nejprve v otočení, tedy sestrojíme kružnici  $a_1$  se středem v bodě  $O_1$  a poloměrem  $|O_1M_1|$ . Axonometrickým průmětem rovnoběžky  $a$  je elipsa  $a^a$  se středem  $O^a$ , její hlavní osa leží na kolmici k ose  $z$  vedené bodem  $O^a$  a poloměr hlavní osy je  $|O_1M_1|$ . Vedlejší osu elipsy  $a^a$  sestrojíme s využitím rovnoběžek s osami  $x^a, y^a$  vedenými krajními body hlavní osy elipsy  $a^a$  (průsečík těchto rovnoběžek je bodem elipsy  $a^a$ ) a proužkové konstrukce elipsy (konstrukce kružnice v pravouhlé axonometrii viz např. [12, s. 320]). Stejným způsobem sestrojíme i axonometrický průmět  $k^a$  kružnice  $k$ .

3. Osou  $z$  proložíme promítací rovinu  $\lambda$  a sklopíme ji do průmětny. Pro větší přehlednost řešení posuneme sklopenou rovinu  $\lambda$  ve směru  $s$  kolmém na osu  $z$ . Ve sklopené rovině sestrojíme rovnoběžky  $k$ ,  $a$  a meridián (hyperbolu), ve kterém rovina  $\lambda$  protíná rotační hyperboloid. Tuto hyperbolu sestrojujeme s využitím jejích ohniskových vlastností.
4. Směr  $s$  kolmý na osu  $z$  je sklopeným směrem osvětlení. Zvolíme libovolnou rovinu  $b$ , která je kolmá k ose  $z$  (zde např. procházející středem  $S$ ). Tato rovina protne plochu v rovnoběžce  $k$ , která se ve sklopení zobrazí jako úsečka. Krajiní body a střed této úsečky promítneme ve směru osvětlení  $s$  na osu  $z$  a získáme tak vedlejší osu a střed axonometrického průmětu rovnoběžky, kterým je elipsa. Vzdálenost středu úsečky a jejího krajiního bodu udává velikost hlavní osy axonometrického průmětu rovnoběžky  $k$  (lze využít i průměr otočené rovnoběžky v prvním průmětu).
5. Podobně sestrojíme i axonometrický průmět asymptotické kuželové plochy. Bod  $P^a$  na obryse kuželové plochy sestrojíme s využitím polárních vlastností. Bod  $P^a$  tedy bude ležet na tečně vedené z bodu  $S^a$  k elipse  $a^a$ . Bod  $P^a$  na obryse hyperboloidu leží na kolmici k ose  $z$  procházející bodem  $P^a$ . Tímto způsobem sestrojíme dostatečný počet obrysových bodů rotačního hyperboloidu a sestrojíme obrysovou křivku. Body ležící na obrysové křivce jsou zároveň body, ve kterých se mění viditelnost axonometrického průmětu.

Příklad 5 (řešení)



## Příklad 6 – Konstrukce dvojdílného rotačního hyperboloidu v Mongeově promítání

V Mongeově promítání zobrazte rotační dvojdílný hyperboloid s osou  $o$  v obecné poloze vzhledem k průmětnám, který je daný osou  $o$ , velikostí hlavní poloosy  $a$  a excentricitou  $e$ . Plochu omezte rovinou kolmou k ose  $o$  a procházející bodem  $M$ . Zobrazte řez plochy rovinou  $\rho$ .

### Příklad 6 (postup)

1. Zvolíme třetí průmětnu  $\gamma$ , která prochází osou  $o$  kolmo k průmětně  $\pi$ , průmětnu  $\gamma$  sklopíme do  $\pi$ .
2. Průmětna  $\gamma$  protíná hyperboloid v tvořící hyperbole. Ze zadaných prvků sestrojíme ve sklopení hyperbolu (využijeme ohniskových vlastností hyperboly).
3. První průmět hyperboloidu sestrojíme pomocí rovnoběžného osvětlení, jehož směr  $s$  je kolmý na  $\pi$ ; první obrys hyperboloidu je mezí vlastního stínu při osvětlení ve směru  $s$  kolmém k  $\pi$ . Třetím průmětem kružnice  $k(M, r)$  hyperboloidu je úsečka, kterou promítneme ve směru osvětlení  $s$  do  $\pi$  a dostaneme půdorys hraniční kružnice plochy (podobně jako v příkladu č.3). Podobným způsobem sestrojíme další rovnoběžky hyperboloidu. Mez  $p$  vlastního stínu (při osvětlení ve směru promítání) leží mimo ohraničenou oblast, proto není třeba ho v tomto případě sestrojovat, můžeme ale sestrojit viditelnost plochy.
4. Nárys plochy můžeme sestrojit dvěma způsoby, můžeme použít podobnou konstrukci jako pro sestrojení půdorysu, tzn. sestrojením čtvrté průmětny, kterou sklopíme a sestrojíme mez vlastního stínu při osvětlení ve směru kolmém k  $v$ . Nebo můžeme druhý obrys plochy sestrojit jako obálku nárysů rovnoběžek plochy (při řešení jsem použila tohoto druhého způsobu). Rovnoběžky hyperboloidu leží ve vzájemně rovnoběžných rovinách, z toho důvodu jsou jejich nárysy homotetické elipsy, takže jejich odpovídající si spojnice vrcholů hlavních a vedlejších os jsou rovnoběžné. Sestrojíme například nárys hraniční rovnoběžky  $k$  tak, že nejprve sestrojíme nárys jejího středu  $M$ . Rovnoběžka  $k$  leží v rovině  $\alpha$  kolmé k ose  $o$ , jejím půdorysem je elipsa  $k_1$ , jejíž hlavní osa má velikost poloměru rovnoběžky a leží na hlavní přímce  $h$  první osy roviny  $\alpha$ . Sestrojíme nárys  $h_2$  hlavní přímky, který bude rovnoběžný se základnicí. Nárysem rovnoběžky  $k$  bude opět elipsa, jejíž

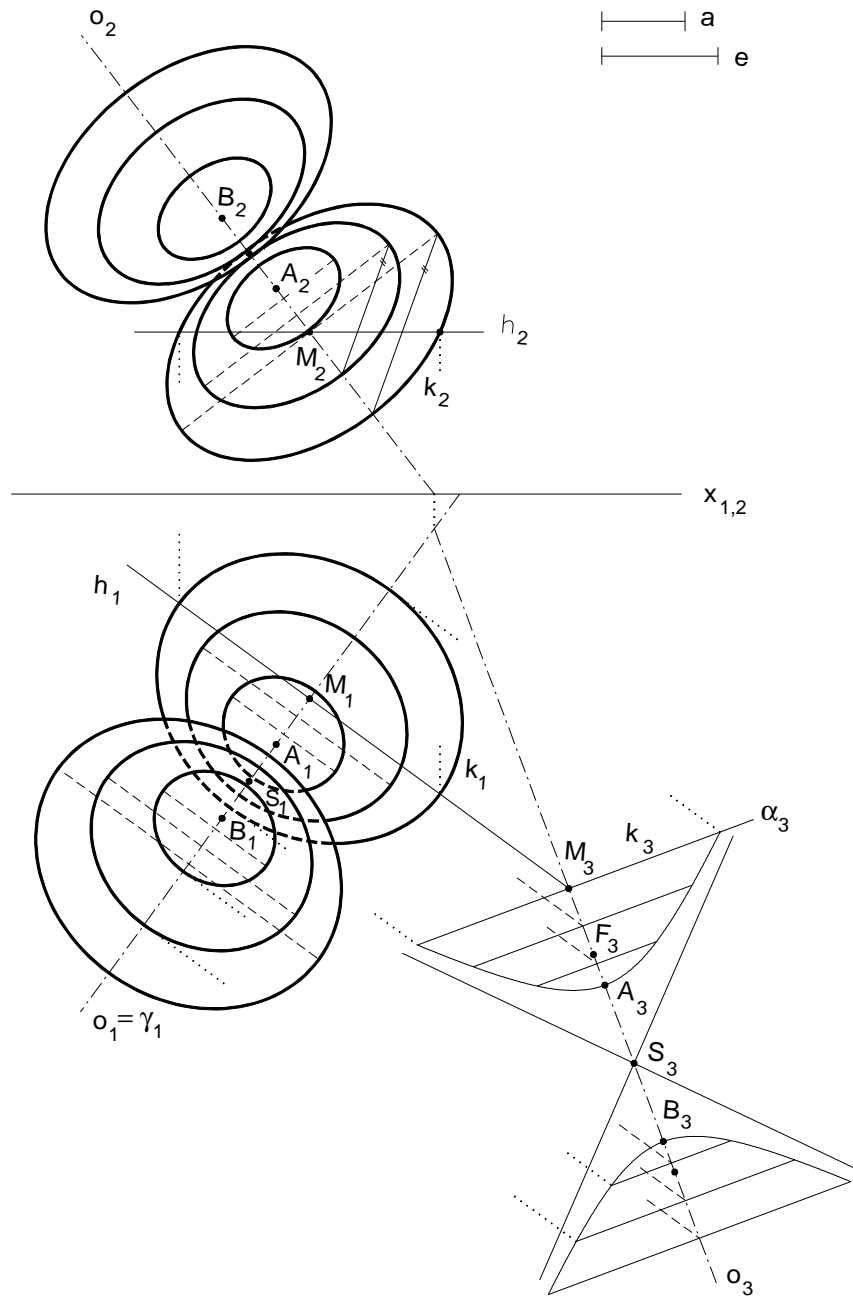


## Rotační kvadriky v příkladech

hlavní osa je kolmá k ose  $o$  a její velikostí je poloměr kružnice  $k$  a je dále určena krajními body průměru rovnoběžky, kterým prochází přímka  $h$ . Elipsu můžeme sestrojít pomocí proužkové konstrukce.

5. Další rovnoběžky již lze sestrojovat jednodušeji. Najdeme střed sestrojované rovnoběžky, hlavní osa je kolmá na osu  $o$  a její velikost je rovna poloměru rovnoběžky. Vedlejší vrcholy sestrojíme pomocí rovnoběžek spojujících hlavní a vedlejší vrcholy elips.

**Příklad 6 (řešení)**



## 4.2 Řezy rotačních kvadrik

### Příklad 7 – Řez rotačního elipsoidu v Mongeově promítání

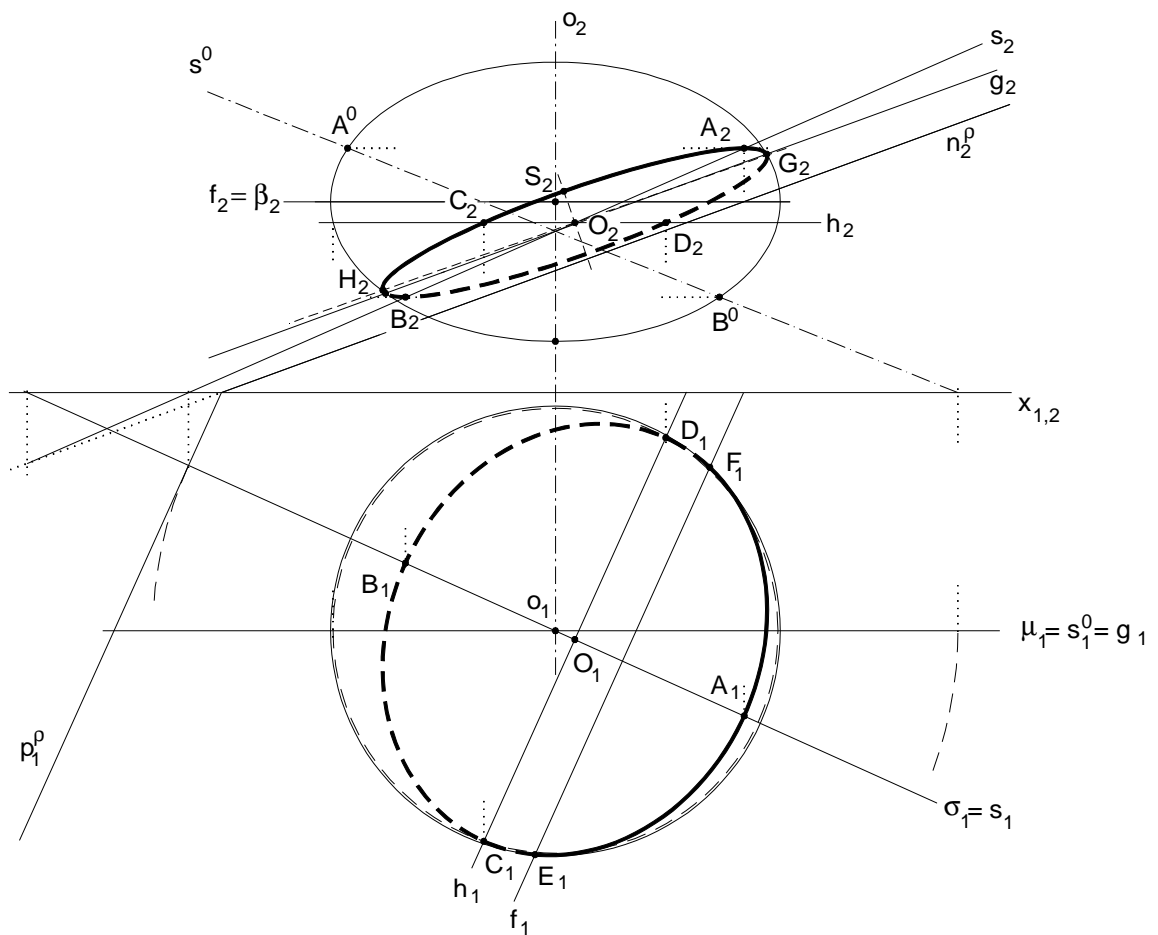
V Mongeově promítání sestrojte řez rotačního elipsoidu, jehož osa je kolmá k půdorysně a je zadán meridiánem, rovinou  $r$ .

#### Příklad 7 (postup)

1. Řezem rotačního elipsoidu je elipsa, která je souměrná podle roviny  $S$  procházející osou  $o$  kolmo k rovině  $r$ . Sestrojíme osu  $s$  této elipsy řezu,  $s = S \perp r$ . V rovině  $S$  leží meridián  $n$  rotační kvadriky, rovinu  $S$  otočíme kolem osy  $o$  roviny  $\mu$  rovnoběžné s nárysnou, v otočení určíme průsečky  $A, B$  přímky  $s$  a meridiánu  $n$ . Průsečky otočené přímky  $s^0$  s meridiánem jsou body  $A^0, B^0$ , jejichž zpětným otočením získáme body  $A, B$ .
2. Sestrojíme bod  $O$  jako střed úsečky  $AB$ . Bod  $O$  je zároveň středem řezu. Druhá osa  $h$  elipsy řezu prochází bodem  $O$ , je kolmá k přímce  $s$  a leží v rovině řezu  $r$ . Osa kvadriky  $o$  je kolmá k  $\pi$ , půdorys řezu je tedy souměrný podle roviny  $S_1$ , přímka  $A_1B_1$  je osou elipsy řezu. Rovina  $S$  je rovinou souměrnosti, proto půdorysy tečen řezu v bodech  $A, B$  jsou kolmé k  $S_1$  a nárysy jsou rovnoběžné se základnicí. Druhá osa elipsy řezu prochází bodem  $O$  a leží na přímce  $h$  kolmé k  $s$  (tedy na hlavní přímce I. osnovy roviny  $\rho$ ).
3. Vrcholy  $C, D$  řezu sestrojíme jako průsečky hlavní přímky  $h$  a elipsoidu (resp. jeho rovnoběžky, která leží v rovině procházející bodem  $O$ ).
4. Nárysem řezu elipsoidu rovinou  $r$  je elipsa určená sdruženými průměry  $A_2B_2, C_2D_2$ , půdorysem řezu je elipsa s osami  $A_1B_1, C_1D_1$ . Ke konstrukci elipsy řezu v náryse můžeme využít Rytzovu konstrukci.
5. Určíme body na obrysech, ve kterých se mění viditelnost řezu. Druhý obrys leží v rovině  $\mu$ , rovina  $\mu$  protíná rovinu řezu v hlavní přímce  $g$  druhé osnovy. Přímka  $g$  protne hlavní meridián v bodech  $G, H$ . V bodech  $G_2, H_2$  se mění viditelnost řezu v náryse (nárys elipsy řezu se v těchto bodech dotýká nárysného obrysu elipsoidu).
6. V půdoryse je obrysem plochy rovník. Rovníkem proložíme rovinu  $b$ , rovina  $b$  protíná rovinu  $r$  v hlavní přímce  $f$ . Společné body  $E, F$  přímky  $f$  a rovniku patří

řezu. V bodech  $E_1, F_1$  se mění viditelnost řezu v půdoryse (půdorys elipsy řezu se v těchto bodech dotýká zdánlivého půdorysného obrysu elipsoidu).

**Příklad 7 (řešení)**



## Příklad 8 – Řez rotačního paraboloidu v kótovaném promítání

V kótovaném promítání sestrojte rotační paraboloid, jestliže je zadán jeho vrchol  $V$ , ohnisko  $F$ . Paraboloid ohraničte rovinou kolmou k ose  $o$  paraboloidu a procházející daným bodem  $O$ , který leží na ose paraboloidu. Sestrojte řez paraboloidu rovinou  $\rho$ , která je zadaná stopou a hlavní přímkou.

### Příklad 8 (postup)

1. Sestrojení paraboloidu – viz příklad č. 3.
2. Protože osa  $o$  paraboloidu je různoběžná s průmětnou  $\pi$ , zjednodušíme si konstrukci řezu paraboloidu danou rovinou  $\rho$  tím, že osou  $o$  proložíme pomocnou průmětnu  $\alpha$ , která je kolmá k rovině řezu  $\rho$ . Takto zvolenou rovinu  $\alpha$  následně otočíme do průmětny  $\pi$ . Protože rovina řezu  $\rho$  je k rovině  $\alpha$  kolmá, v otočení se rovina řezu  $\rho$  zobrazí jako přímka, což nám usnadní konstrukci řezu.
3. Sestrojíme průsečík  $R$  osy  $o$  s rovinou řezu  $\rho$ . Konstrukci provedeme např. pomocí krycí přímky  $m$ , která náleží rovině  $\rho$  a jejíž první průmět splývá s osou  $o$ . Sklopením přímek  $o$ ,  $m$  získáme jejich sklopený průsečík  $[R]$ , z něhož odvodíme první průmět  $R_1$ .
4. Průsečíkem  $R$  osy  $o$  s rovinou řezu  $\rho$  proložíme přímku  $k$ , která je kolmá k rovině  $\rho$ . Průmět  $k_1$  přímky  $k$  je kolmý na stopu roviny  $\rho$  a zároveň splývá s průmětem  $s_1$  spádové přímky  $s$  roviny  $\rho$ . Sestrojíme tedy spádovou přímku  $s$  roviny  $\rho$  vedenou bodem  $R_1$  a kolmou ke stopě roviny  $\rho$ . Přímku  $s$  sklopíme a sklopeným bodem  $(R)$  přímky  $(s)$  vedeme sklopenou přímku  $(k)$  kolmou na  $(s)$ . Na přímce  $k_1$  určíme stopník  $P_1^k$  a přímka  $k$  je tak určena svým stopníkem a bodem  $R$ .  
Pomocná rovina  $\alpha$  kolmá k rovině řezu  $\rho$  je určena osou  $o$  a přímkou  $k$ . Pomocí stopníků přímek  $o$  a  $k$  sestrojíme stopu roviny  $\rho$ .
5. Rovinu  $\alpha$  otočíme do průmětny (osou otáčení je stopa roviny  $\alpha$ ). V otočení sestrojíme meridián paraboloidu, ve kterém rovina  $\alpha$  plochu protíná. K sestrojení meridiánu využijeme např. otočený vrchol  $V_0$ , ohnisko  $F_0$ , osu  $o_0$  a bod  $O_0$  a z těchto prvků sestrojíme parabolu meridiánu pomocí ohniskových vlastností paraboly.  
Rovina řezu  $\rho$  se v otočení zobrazí jako přímka  $p_0^\rho$ , protože je kolmá k rovině  $\alpha$ .

Přímku  $p_0^\rho$  sestrojíme jako spojnicí průsečíku stop  $p_1^\rho$  a  $p_1^\alpha$  rovin  $\rho$  a  $\alpha$  s bodem  $R_0$ .<sup>3</sup>

6. Plochou paraboloidu prokládáme roviny kolmé k ose  $o$  plochy. Každá taková rovina protíná plochu paraboloidu v rovnoběžce a rovinu řezu  $\rho$  v přímce. Body řezu sestrojíme jako průsečíky rovnoběžky paraboloidu a průsečnice roviny, ve které daná rovnoběžka leží s rovinou řezu  $\rho$ .

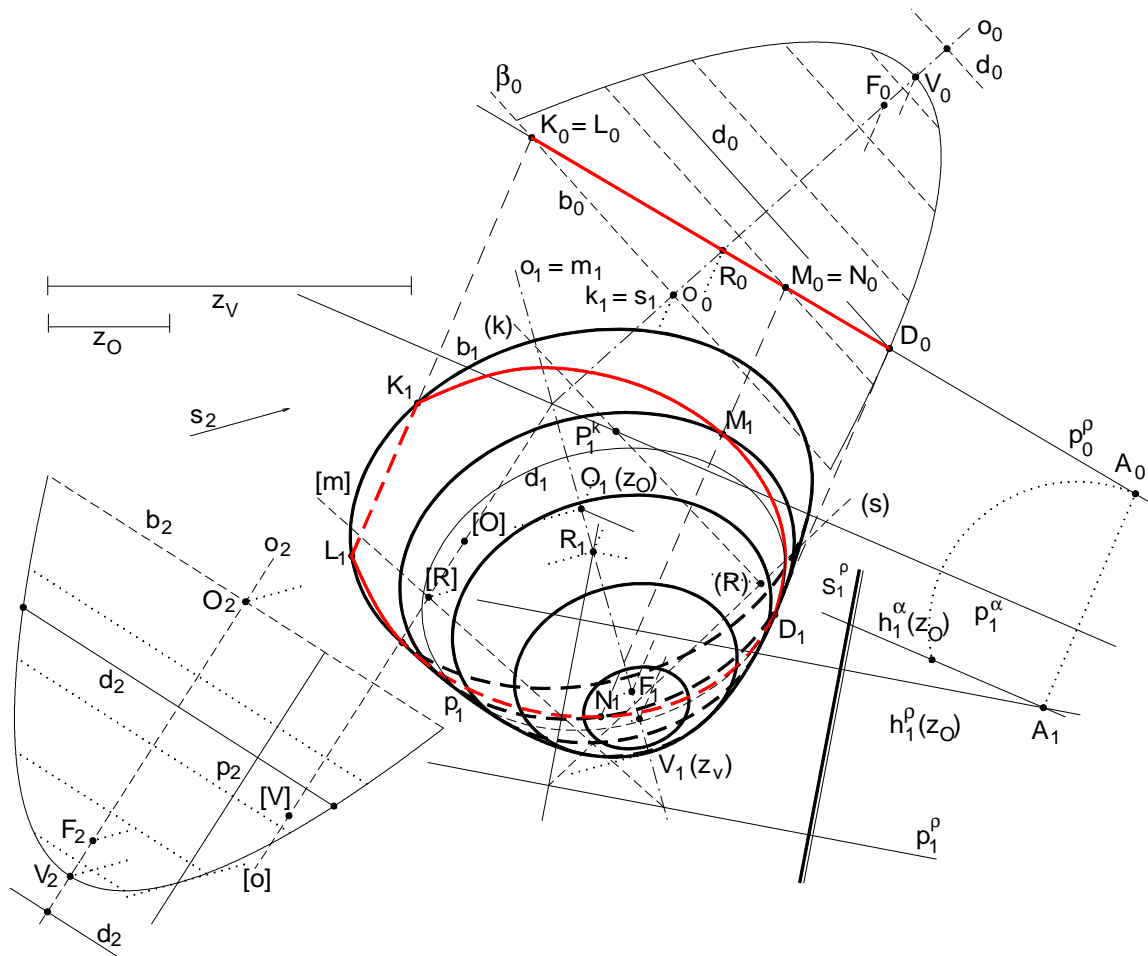
Sestrojíme body  $K, L$  řezu ležící v rovině  $b$  kolmé k ose  $o$  paraboloidu a procházející bodem  $O$ . V otočení do průmětny sestrojíme body  $K_0, L_0$  jako průsečíky přímky  $p_0^\rho$  s rovnoběžkou  $b_0$  ležící v rovině  $B$ . První průměty bodů  $K, L$  sestrojíme jako průsečíky přímky kolmé ke stopě otáčení  $p_1^\alpha$  a procházející bodem  $K_0 = L_0$  s rovnoběžkou  $b_1$  paraboloidu. Protože je paraboloid omezený rovinou  $b$ , jsou body  $K, L$  krajními body řezu.

7. Další body řezu sestrojíme analogickým způsobem jako body  $K, L$ , zde jsou sestrojeny např. body  $M, N$ . Řezem paraboloidu rovinou  $\rho$  je část elipsy ohraničená úsečkou  $KL$ . Body řezu, ve kterých se mění viditelnost, sestrojíme jako body dotyku křivky řezu a obrysové křivky  $p_1$  paraboloidu.

---

<sup>3</sup> Protože v tomto případě není průsečík stop rovin  $\rho$  a  $\alpha$  dostupný na nákresně, je ke konstrukci je využito průsečíku  $A$  hlavních přímek rovin  $\rho$  a  $\alpha$  o stejné kótě a následného otočení bodu  $A$  do průmětny.

**Příklad 8 (řešení)**



### 4.3 Průsečíky přímky s rotační kvadrikou

#### Příklad 9 – Průsečíky přímky s jednodílným rotačním hyperboloidem, tečná rovina hyperboloidu v Mongeově promítání

V Mongeově promítání sestrojte průsečíky přímky  $m$  s jednodílným rotačním hyperboloidem, jehož osa je kolmá k půdorysně a je zadán meridiánem. V jednom z průsečíků přímky s hyperboloidem sestrojte tečnou rovinu.

#### Příklad 9 (postup)

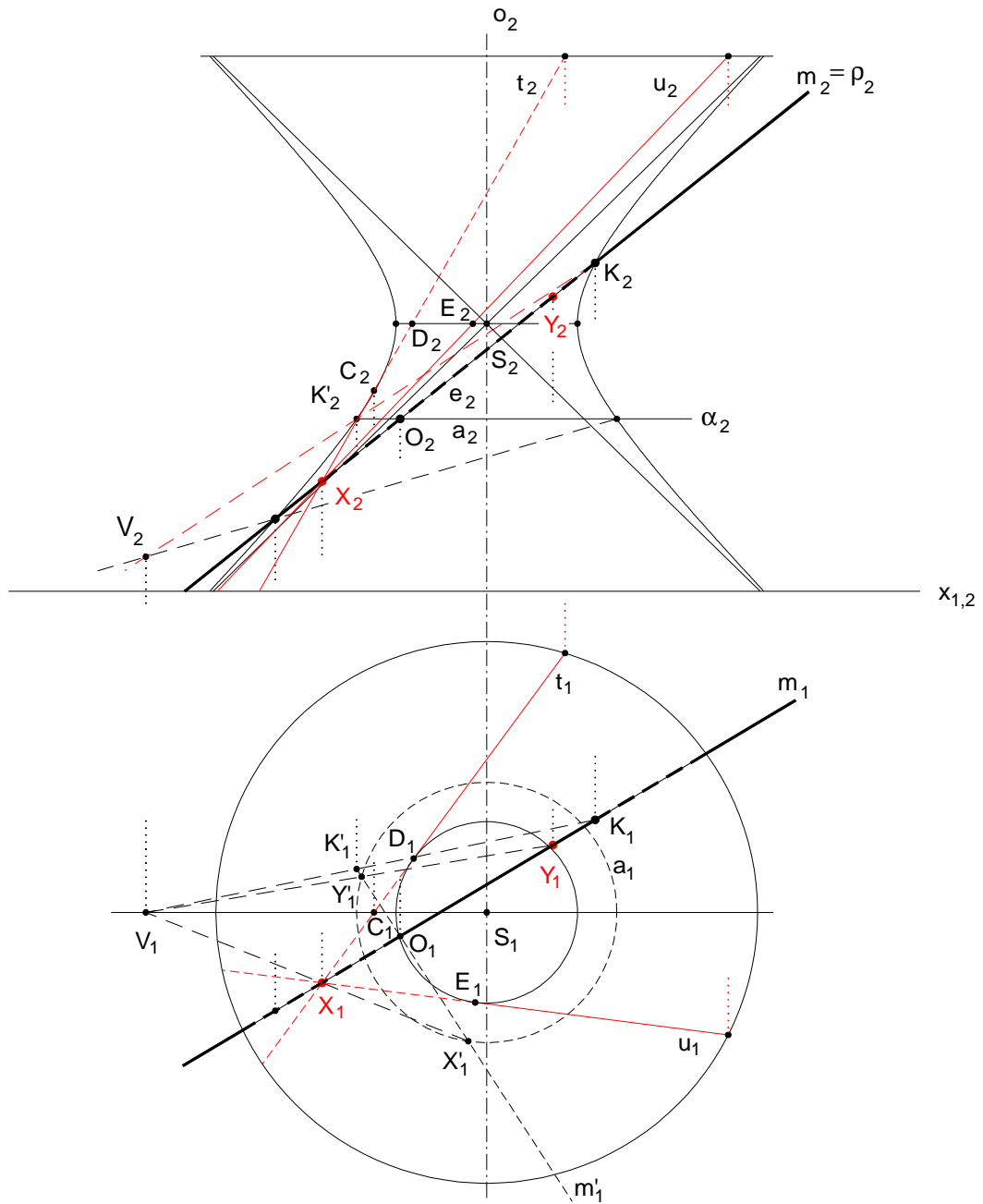
1. Narys přímky  $m$  protne druhý zdánlivý obrys plochy. K řešení využijeme prostorové kolineace (viz kapitola 3.3.1. odstavec 2). Přímku  $m$  proložíme rovinu  $\rho$  kolmou k narysně. Tato rovina protíná hyperboloid v elipse  $e$ . Na hyperboloidu zvolíme rovinu  $\alpha$  rovnoběžnou s půdorysnou, která protíná hyperboloid v rovnoběžce  $a$ . Kružnice  $a$  a elipsa  $e$  jsou kuželosečky, které leží na dvou kuželových plochách s vrcholy  $V$  a  $W$ . Vzhledem k tomu, že roviny  $\rho$  a  $\alpha$  jsou kolmé k narysně, leží body  $V$ ,  $W$  v rovině hlavního meridiánu. Vybereme si jednu z kuželových ploch, např. s vrcholem  $V$ .
2. V prostorové kolineaci se středem  $V$  odpovídá elipse  $e$  kružnice  $a$ . V této kolineaci sestrojíme obraz  $m'$  přímky  $m$ . Na přímce  $m$  zvolíme bod  $K$  (např. bod, jehož narys  $K_2$  je průsečíkem narysu přímky  $m$  a narysu hlavního meridiánu) a určíme jeho obraz  $K'$ , který leží v rovině  $\alpha$  a na přímce  $VK$ . Bod  $O$  přímky  $m$  leží na průsečnici rovin  $\rho$  a  $\alpha$ , což je osa dané kolineace, takže je v této kolineaci samodružným bodem.
3. Sestrojíme průsečíky  $X'$ ,  $Y'$  přímky  $m'$  a kružnice  $a$  a v prostorové kolineaci určíme jejich obrazy  $X$  a  $Y$  na přímce  $m$ . Body  $X$  a  $Y$  jsou průsečíky přímky  $m$  s hyperboloidem. Podle polohy přímky  $m$  vzhledem k průmětnám a ploše hyperboloidu určíme viditelnost přímky  $m$ .
4. Každá tečná rovina jednodílného rotačního hyperboloidu je určena dvojicí přímek různých regulů, které se protínají v dotykovém bodě. Tedy tečná rovina plochy v bodě  $X$  je určena tvořícími přímkami  $t$ ,  $u$  různých regulů hyperboloidu, které bodem  $X$  procházejí. Půdorysy přímek  $t$ ,  $u$  sestrojíme jako tečny z půdorysu  $X_1$  bodu  $X$  k půdorysu  $h_1$  hrdelní rovnoběžky  $h$ . Narysy přímek sestrojíme např. jako



## Rotační kvadriky v příkladech

spojnice bodu  $X_2$  a bodů, ve kterých přímky  $t$ ,  $u$  protínají rovnoběžku, kterou je hyperboloid ohraničen. Můžeme také určit viditelnost přímek  $t$ ,  $u$ , v náryse se viditelnost na přímce  $t_2$  mění v bodě  $C_2$ , který leží v rovině hlavního meridiánu, přímka  $u_2$  je v náryse vidět celá, protože hlavní meridián plochy neprotíná. V půdoryse se viditelnost přímky  $t_1$  mění v bodě  $D_1$ , ve kterém se přímka  $t_1$  dotýká hrdelní rovnoběžky hyperboloidu, analogicky sestrojíme bod dotyku  $E$  pro přímku  $u$ .

Příklad 9 (řešení)



### Příklad 10 – Průsečíky přímky s rotačním elipsoidem v axonometrii

V pravouhlé axonometrii dané axonometrickým trojúhelníkem sestrojte průsečíky přímky  $m$  s protáhlým rotačním elipsoidem, který je zadán středem  $S$  a velikostí hlavní osy  $a$  a vedlejší poloosy  $b$ .

#### Příklad 10 (postup)

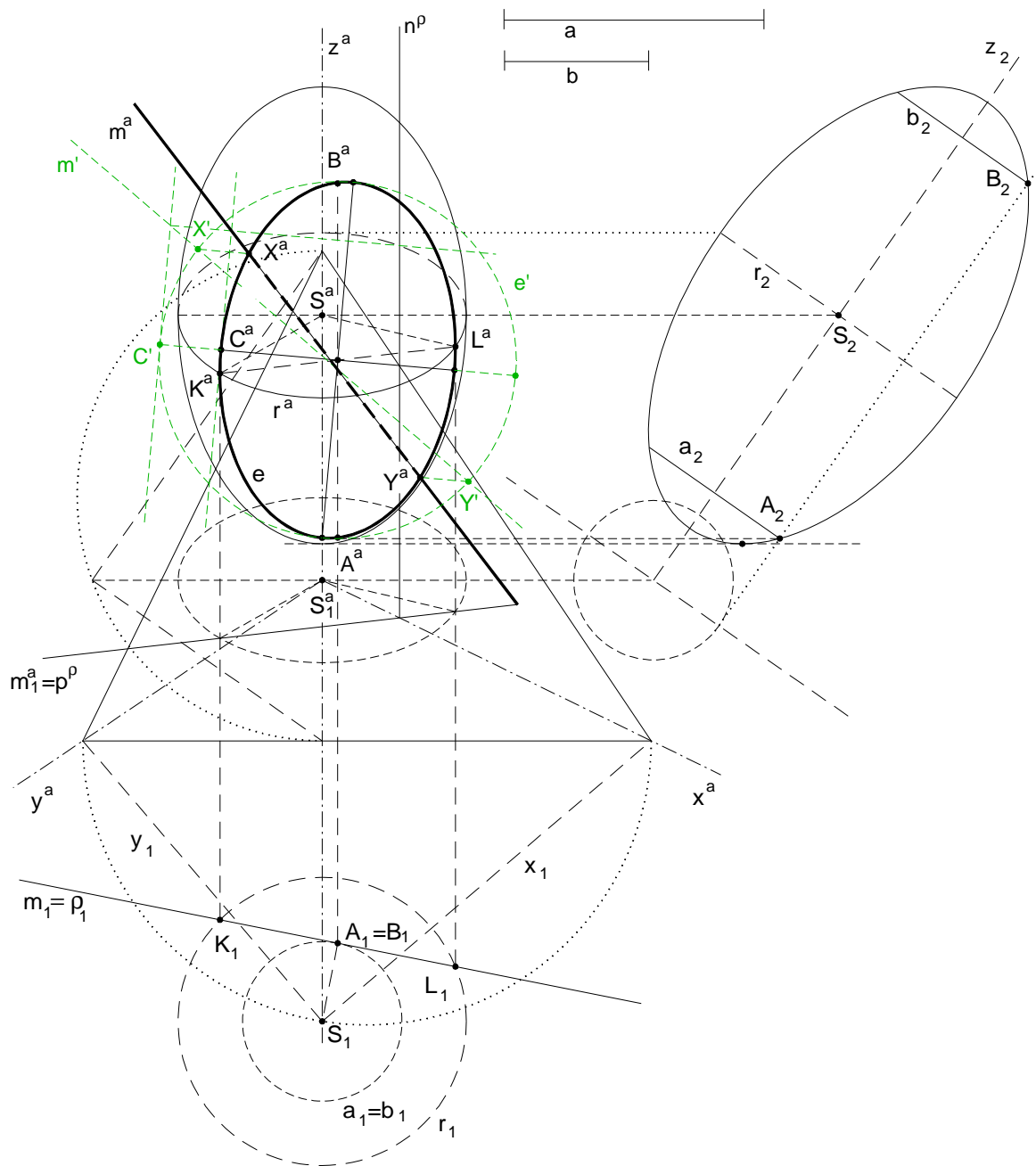
1. Konstrukci rotačního protáhlého elipsoidu v axonometrii provedeme podobně jako v příkladu č. 5.
2. Přímkou  $m$  proložíme rovinu  $\rho$ , která je kolmá k průmětně  $\pi = (x, y)$ . Rovina  $\rho$  protíná plochu elipsoidu v elipse  $e$ . K sestrojení elipsy využijeme průmětu elipsoidu do první průmětny  $\pi$  a otočení průmětny  $\pi$  kolem její axonometrické stopy do axonometrické průmětny, otočené útvary označíme indexem 1.
3. Průsečíky  $K, L$  roviny  $\rho$  a rovníku elipsoidu jsou body, ve kterých má elipsa řezu  $e$  tečny rovnoběžné s osou  $z$ . První průmět roviny  $\rho$  splývá s přímkou  $m_1$ , prvním průmětem rovníku elipsoidu je kružnice  $r_1$ . První průměty  $K_1, L_1$  bodů  $K, L$  sestrojíme jako průsečíky přímky  $m_1$  a kružnice  $r_1$ . Určíme axonometrické průměty  $K^a, L^a$  bodů  $K, L$  ležící na axonometrickém průmětu rovníku  $r$  a na přímkách směru otočení.
4. Další body řezu  $A, B$  sestrojíme jako průsečíky roviny  $\rho$  s rovnoběžkami  $a, b$  elipsoidu, pro které platí, že rovina  $\rho$  má s danou rovnoběžkou společný pouze jeden bod, tedy rovina  $\rho$  je tečná k rovnoběžkám  $a, b$ . K sestrojení bodů  $A, B$  použijeme průměty rovnoběžek  $a, b$  do otočené roviny  $\pi$ . Využijeme také promítací rovinu  $\lambda$  procházející osou  $z$ , kterou sklopíme do průmětny (pro větší přehlednost řešení posuneme sklopenou rovinu  $\lambda$  ve směru  $s$  kolmém na osu  $z$ ), v tomto sklopení sestrojíme rovnoběžky  $a_2, b_2$  a na nich druhé průměty bodů  $A, B$ . Elipsa řezu  $e$  je určena sdruženými průměry  $AB, KL$ , hlavní a vedlejší osu elipsy  $e$  sestrojíme např. pomocí Rytzovy konstrukce.
5. Sestrojíme průsečíky  $X, Y$  přímky  $m$  s elipsou řezu  $e$ . K přesnému sestrojení průsečíků elipsy  $e$  a přímky  $m$  můžeme využít osovou afinitu mezi kružnicí a elipsou. Jako osu afinity zvolíme hlavní osu elipsy  $e$ , sestrojíme kružnici  $e'$  ze středu elipsy  $e$  o poloměru rovném délce hlavní osy elipsy  $e$ . Dvojice odpovídajících si bodů v afinitě je vedlejší vrchol elipsy  $C^a$  a jeho obraz  $C'^a$  ležící

## Rotační kvadriky v příkladech

na kružnici  $e'$  a na přímce vedlejší osy elipsy  $e$ . V dané afinitě sestrojíme obraz  $m'$  přímky  $m$  a určíme jeho průsečíky  $X', Y'$  s kružnicí  $e'$ . Na přímce  $m$  určíme body  $X, Y$ , které v dané afinitě odpovídají obrazům  $X', Y'$ .

6. Určíme viditelnost přímky  $m$  vzhledem k poloze elipsoidu. Elipsa  $e$  řezu leží celá ve viditelné části elipsoidu. Body, ve kterých se mění viditelnost axonometrického průmětu přímky  $m$ , jsou průsečíky  $X, Y$  elipsy  $e$  a přímky  $m$ . Neviditelná část přímky (procházející elipsoidem) je určena úsečkou  $X^a Y^a$ , ostatní části přímky  $m$  jsou viditelné.

**Příklad 10 (řešení)**



## Příklad 11 – Průsečík přímky s dvojdílným hyperboloidem, tečná rovina

V Mongeově promítání sestrojte průsečíky přímky  $m$  s rotačním dvojdílným hyperboloidem, jehož osa  $o$  je kolmá k půdorysně a je zadán hlavním meridiánem.

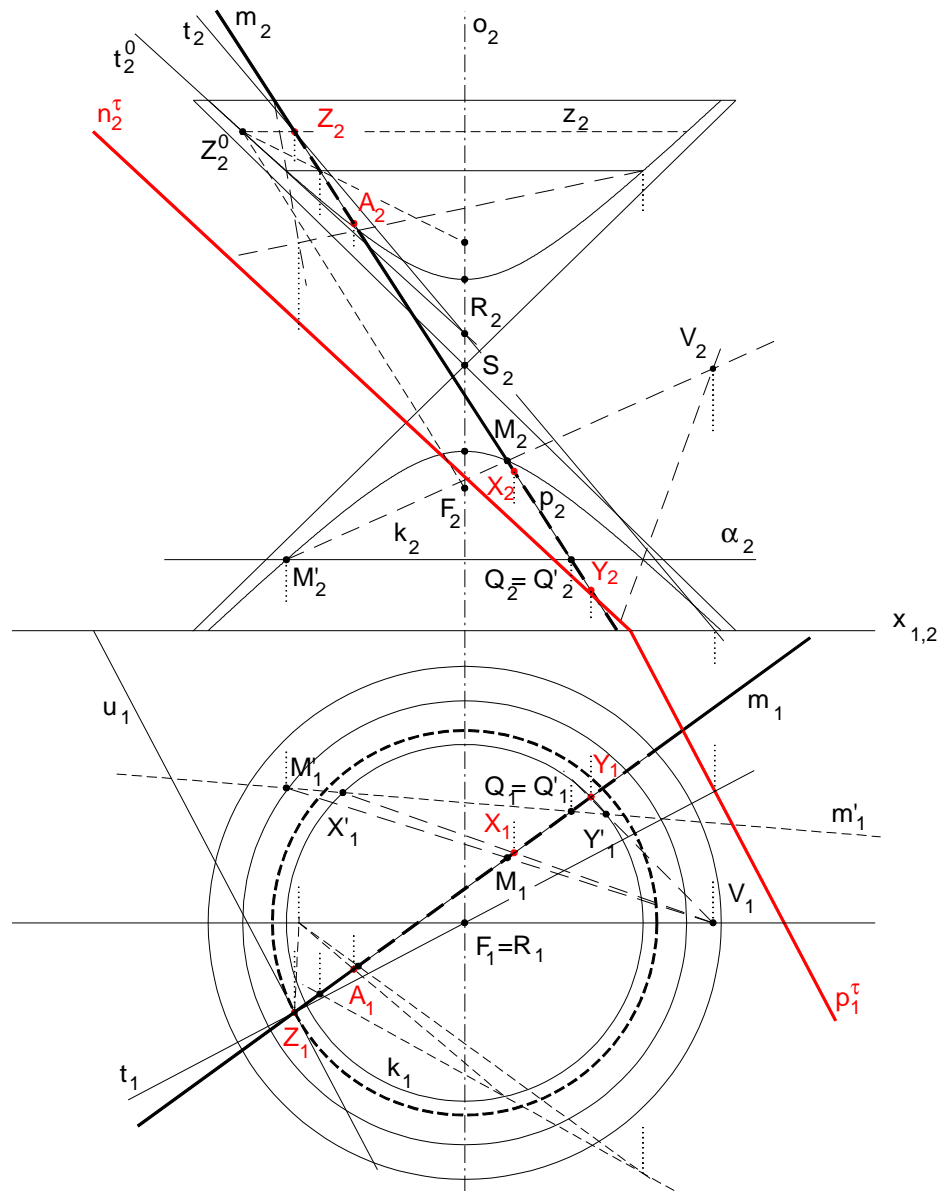
V jednom průsečíku sestrojte tečnou rovinu plochy.

### Příklad 11 (postup)

1. Přímkou  $m$  proložíme rovinu  $\rho$  kolmou k nárysně. Tato rovina protne hyperboloid v hyperbole  $p$ .
2. Zvolíme libovolnou rovinu  $\alpha$  kolmou k ose  $o$ , tato rovina protíná hyperboloid v kružnici  $k$ . Kružnice  $k$  a hyperbola  $p$  jsou kuželosečky, které leží na dvou kuželových plochách s vrcholy  $V$  a  $W$ . Kružnice  $k$  a hyperbola  $p$  jsou souměrné podle roviny  $\mu$  (rovina hlavního meridiánu), z toho vyplývá, že vrcholy  $V$  a  $W$  kuželových ploch leží v rovině  $\mu$ .
3. Vybereme si jednu z kuželových ploch (např. s vrcholem  $V$ ). V prostorové kolineaci se středem  $V$  pak hyperbola  $p$  odpovídá kružnici  $k$ . V takto určené kolineaci sestrojíme obraz přímky  $m$ , který bude ležet v rovině  $\alpha$  a označíme ho  $m'$ . Na přímce  $m$  zvolíme bod  $M$  a v kolineaci určíme obraz  $M'$  (bod  $M$  zvolíme např. tak, že jeho nárys bude ležet na průsečíku nárysu hlavního meridiánu plochy a na nárysu přímky  $m$ , takto zvolený bod ale není bodem hyperboly  $p$ ). Bod  $M'$  leží na přímce  $MV$  a v rovině  $\alpha$ . Bod  $Q$  ležící na přímce  $m$  a v rovině  $\alpha$  je v dané kolineaci samodružný, tzn.  $Q = Q'$ . Obraz  $m'$  přímky  $m$  sestrojíme jako spojnici bodů  $M'$  a  $Q'$ .
4. Určíme průsečíky  $X', Y'$  kružnice  $k$  a přímky  $m'$ . V prostorové kolineaci se středem  $V$  sestrojíme jejich obrazy  $X, Y$ , které leží na přímce  $m$  (protože prostorová kolineace zachovává incidenci přímek a bodů). Body  $X, Y$  jsou průsečíky přímky  $m$  s hyperboloidem.
5. Stejný postup (jako v bodě 3. a 4.) použijeme i při hledání průsečíků  $Z, A$  přímky  $m$  s druhou částí hyperboloidu (z důvodu přehlednosti jsem pro druhou část hyperboloidu konstrukci naznačila a vynechala jsem popisky).
6. Tečnou rovinu  $\tau$  zkonstruujeme např. v průsečíku  $Z$  přímky  $m$  s hyperboloidem.. Tečná  $\tau$  rovina je určena dvěma přímkami  $u, t$ . Přímka  $u$  je tečnou vedenou bodem

$Z$  k rovnoběžce  $z$ , na které bod  $Z$  leží. Přímka  $t$  je spojnice bodu  $Z$  s vrcholem  $R$  kuželové plochy opsané hyperboloidu, která se ho dotýká podél rovnoběžky  $z$  (viz kapitola 3.4). Nárýs bodu  $Z$  otočíme kolem osy  $o$  do bodu  $Z^0$  hlavního meridiánu a v bodě  $Z^0$  sestrojíme tečnu  $t^0$  k hlavnímu meridiánu hyperboloidu. Tečna  $t^0$  protíná osu  $o$  v bodě  $R$ , který je vrcholem dotykové kuželové plochy. Přímka  $RZ$  této kuželové plochy je tečnou  $t$  k hyperboloidu v bodě  $Z$ . Dále sestrojíme tečnu  $u$  k rovnoběžce  $z$ , která prochází bodem  $Z$ . Nárýs tečny  $u$  splývá s nárýsem rovnoběžky  $z$ , půdorysem  $u_I$  tečny  $u$  je tečna kružnice  $z_I$  v bodě  $Z_I$ . Půdorys přímky  $u$  je zároveň hlavní přímkou tečné roviny  $\tau$  (protože její nárýs je rovnoběžný s půdorysnou), stopy tečné roviny  $\tau$  určené tečnami  $t$ ,  $u$  sestrojíme pomocí stopníků těchto přímek.

Příklad 11 (řešení)





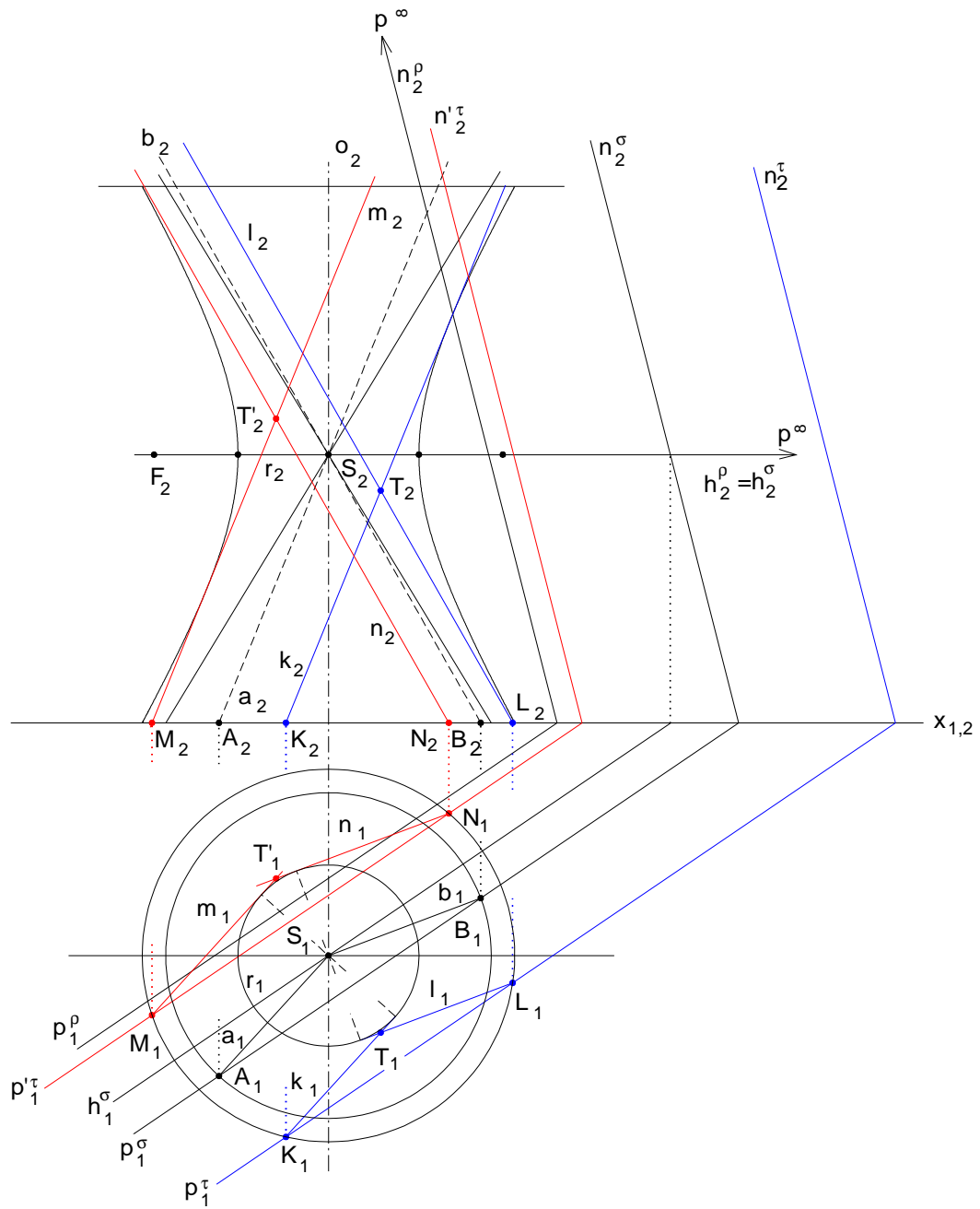
## Příklad 12 – Tečné roviny k jednodílnému hyperboloidu procházející nevlastní přímkou

V Mongeově promítání veďte tečné roviny procházející nevlastní přímkou  $p^{\Psi}$ ,  $p^{\Psi}\hat{I}\rho$  k rotačnímu jednodílnému hyperboloidu, který má osu  $o$  kolmou k půdorysně a je zadán meridiánem.

### Příklad 12 (postup)

1. Tečnou rovinu  $\tau$  procházející nevlastní přímkou  $p^{\Psi}$ , kde  $p^{\Psi}\hat{I}\rho$  (tzn. tečná rovina  $\tau$  je rovnoběžná s rovinou  $\rho$ ) sestrojíme tak, že určíme přímky  $k, l$  patřící hyperboloidu, které jsou s rovinou  $\rho$  rovnoběžné.  
Vrcholem  $S$  asymptotické kuželové plochy hyperboloidu proložíme rovinu  $s$  rovnoběžnou s rovinou  $\rho$ . Půdorysnou stopu roviny  $s$  sestojíme pomocí hlavní přímky  $h^S$  první osnovy vedené bodem  $S$ . Půdorysná stopa  $p^S$  protíná rovnoběžku asymptotického kužele ležící v půdorysně v bodech  $A, B$  a rovina  $s$  protíná asymptotický kužel hyperboloidu v přímkách  $a, b$ , kde  $a = AS$ ,  $b = BS$ .
2. Určíme půdorysy přímek  $k, l$  hyperboloidu, jejich první průměty jsou tečnami ke kružnici  $r_1$  a jsou rovnoběžné s půdorysy přímek  $a, b$ . Přímky  $k, l$  protínají rovnoběžku hyperboloidu ležící v půdorysně v bodech  $K, L$ . Nárysy přímek  $k, l$  sestrojíme jako přímky procházející nárysy  $K_2, L_2$  bodů  $K, L$  a rovnoběžné s přímkami  $a_2, b_2$ . Půdorysná stopa tečné roviny  $\tau$  prochází průsečíky  $K, L$  přímek  $k, l$  s půdorysnou, nárysná stopa roviny  $\tau$  je rovnoběžná s nárysnou stopou roviny  $\rho$ . Dotykový bod  $T$  tečné roviny  $\tau$  a hyperboloidu sestrojíme jako průsečík přímek  $k$  a  $l$ .
3. Druhou tečnou rovinu  $\tau'$  určenou přímkami  $m, n$  sestrojíme analogicky jako tečnou rovinu  $\tau$ .

**Příklad 12 (řešení)**



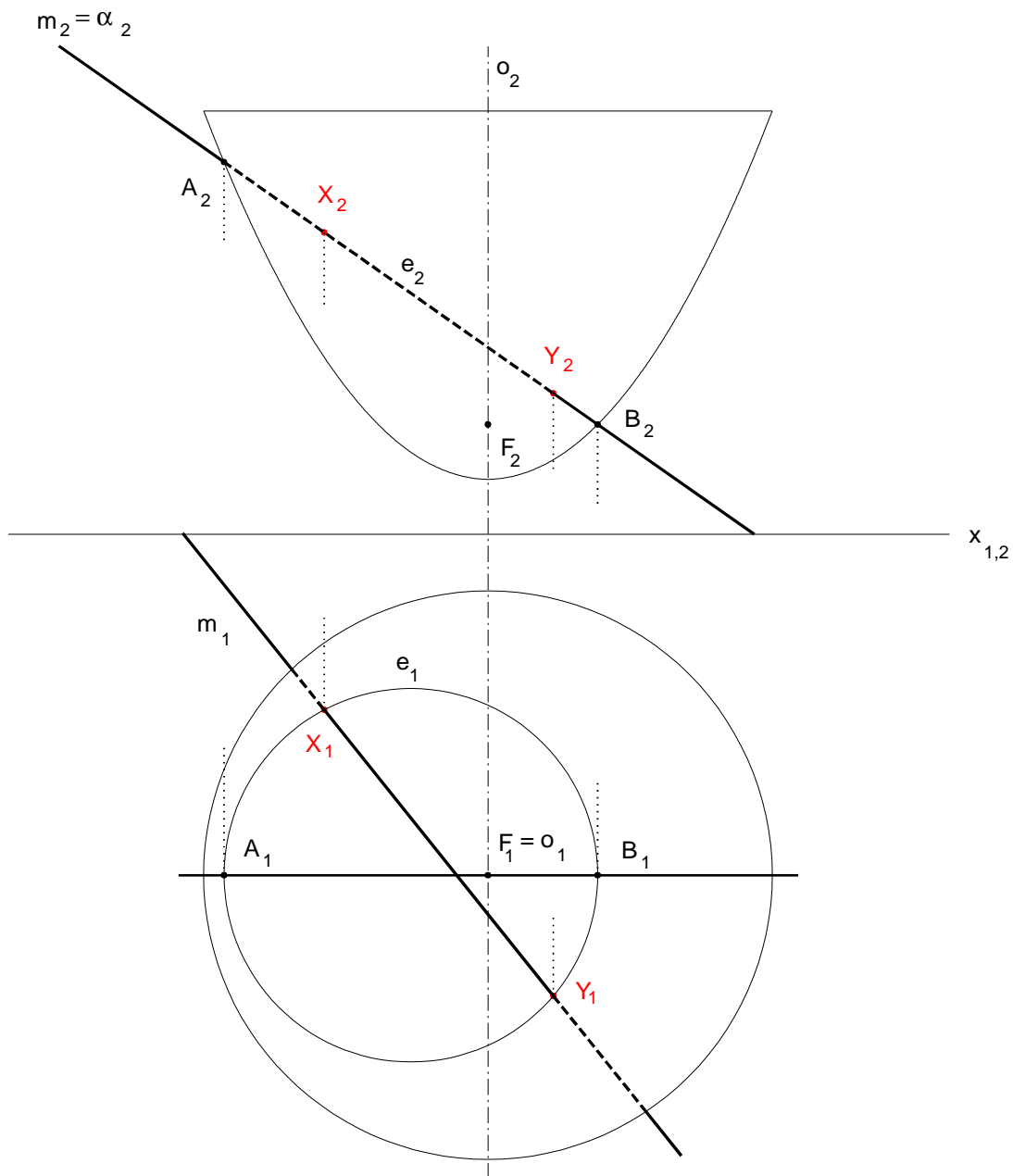
### Příklad 13 – Průsečík přímky s rotačním paraboloidem

V Mongeově promítání sestrojte na přímce  $m$  body, které mají od daného bodu  $F$  a od první průmětny stejnou vzdálenost.

#### Příklad 13 (postup)

1. Množinou všech bodů v prostoru, které mají stejnou vzdálenost od pevného bodu  $F$  a roviny (zde půdorysny), je rotační paraboloid. Bod  $F$  je ohniskem tohoto paraboloidu a rovina  $\pi$  je řídicí rovinou. Sestrojíme tedy paraboloid určený ohniskem  $F$  a řídicí rovinou  $\pi$ . Pro větší názornost omezíme plochu paraboloidu libovolnou rovinou kolmou k ose  $o$ . Půdorysem plochy je kruh, nárysem je část paraboly, kterou sestrojíme s využitím ohniskových vlastností paraboly.
2. Hledanými body  $X, Y$  jsou průsečíky přímky  $m$  s paraboloidem. Přímku  $m$  proložíme rovinou  $\alpha$  kolmou k nárysně. Body  $X, Y$  jsou společné body přímky  $m$  a elipsy  $e$ , ve které protíná rovina  $\alpha$  paraboloid. Nárysem elipsy  $e$  je úsečka  $A_2B_2$ , kde  $A, B$  jsou průsečíky roviny  $\alpha$  a hlavního meridiánu paraboloidu. Půdorysem řezu je kružnice nad průměrem  $A_1B_1$ . Sestrojíme průsečíky  $X, Y$  přímky  $m$  a elipsy  $e$  nejdříve v půdoryse a pak odvodíme průměty bodů v náryse.
3. Určíme viditelnost přímky  $m$  vzhledem k paraboloidu.

**Příklad 13 (řešení)**



## 4.4 Průniky rotačních kvadrik

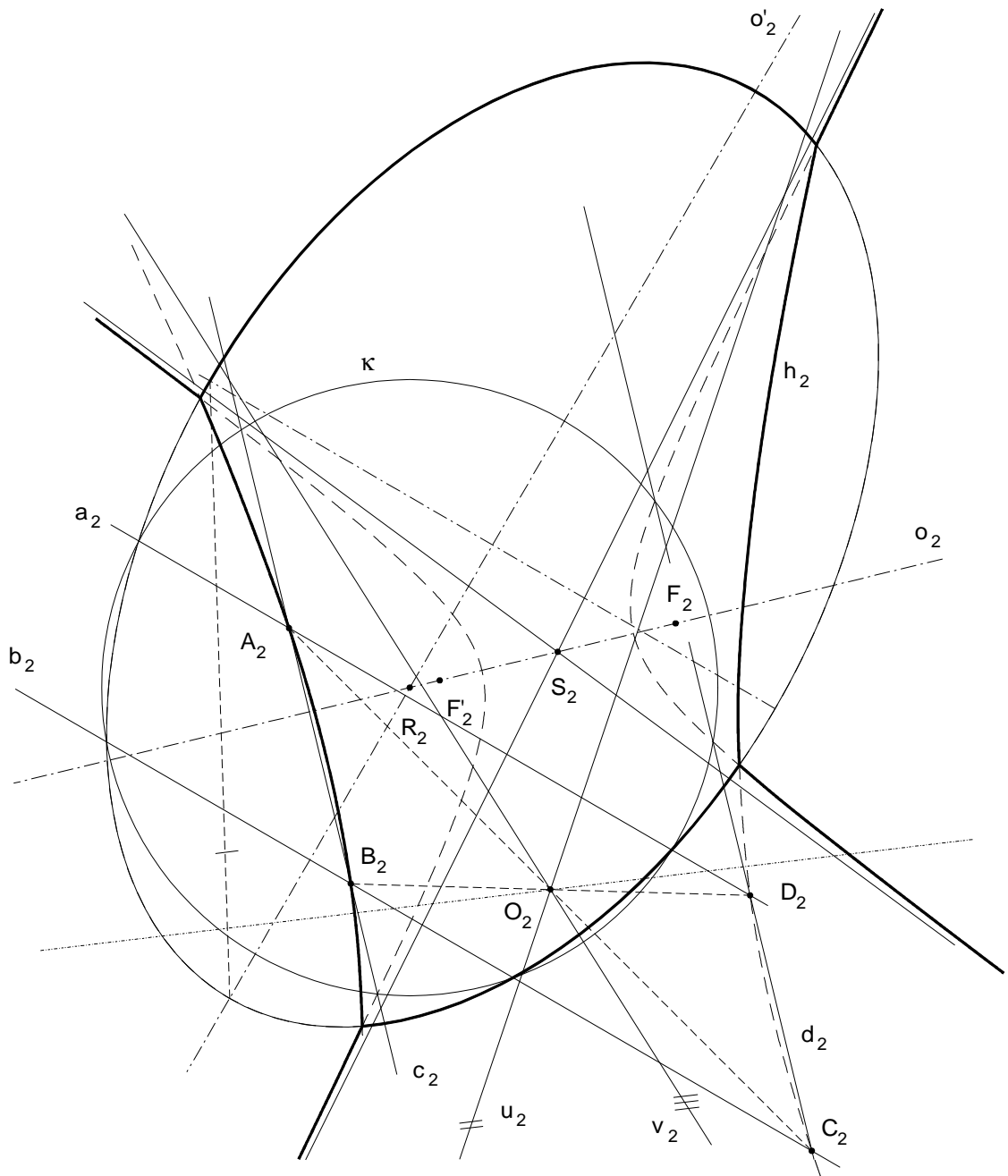
### Příklad 14 – Průnik dvojdílného hyperboloidu a elipsoidu

V Mongeově promítání sestrojte průnik rotačního dvojdílného hyperboloidu a rotačního protáhlého elipsoidu s různoběžnými osami ležícími v nárysně.

#### Příklad 14 (postup)

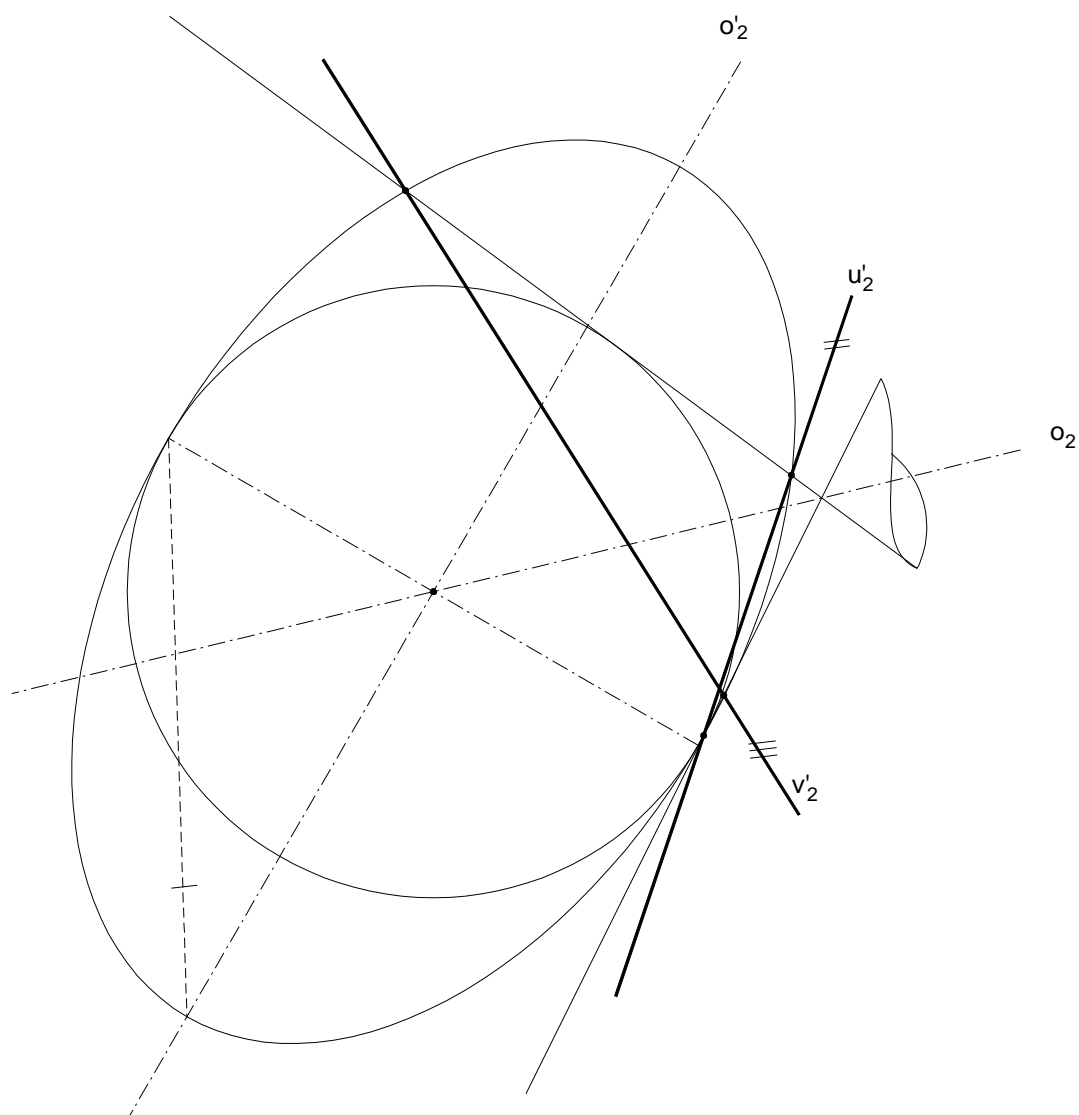
1. Pro konstrukci obecných bodů průnikové křivky volíme pomocné kulové plochy, které mají střed v průsečíku  $R$  os obou kvadrik. Tyto pomocné kulové plochy protínají obě kvadriky současně v kružnicích (rovnoběžkách), které se v náryse zobrazí jako úsečky. Zvolíme si pomocnou kulovou plochu  $\kappa$ . Tato kulová plocha protne elipsoid v rovnoběžkách  $a, b$  a hyperboloid v rovnoběžkách  $c, d$ . Nárysy rovnoběžek  $a, b, c, d$  jsou úsečky ležící na přímkách  $a_2, b_2, c_2, d_2$ . Průnikem rovnoběžek  $a$  a  $c$  jsou dva body  $A, A'$ , které patří průnikové křivce  $h$  obou ploch. Jejich nárysy se zobrazí do bodu  $A_2$  (analogicky platí i pro body  $B_2, C_2, D_2$ ).
2. Postupně volíme další kulové plochy se středem v bodě  $R$  a stejnou konstrukcí jako v bodě 1. sestrojíme dostatečný počet bodů průnikové křivky (z důvodu větší přehlednosti jsem v řešení vyrýsovala jen jednu kulovou plochu).
3. Průnikovou křivkou je křivka  $h$  čtvrtého stupně, jejím nárysem  $h_2$  je část hyperboly, jejíž střed  $O_2$  je středem rovnoběžníku  $A_2B_2C_2D_2$ , který je vepsán hyperbole  $h_2$ . Aby byla hyperbola  $h_2$  jednoznačně určena, sestrojíme její asymptoty, při jejich konstrukci využijeme homotetických kvadrik. Některé kulové plochy opíšeme homotetické kvadriky (homotetickou kvadrikou pro elipsoid je opět rotační elipsoid, který vzniká rotací homotetické elipsy, tzn. spojnice hlavního a vedlejšího vrcholu tvořících elips obou elipsoidů jsou rovnoběžné; homotetickou kvadrikou pro hyperboloid je rotační kuželová plocha, která vzniká rotací přímek, které jsou rovnoběžné s asymptotami tvořící hyperboly hyperboloidu). Určíme společné body průmětů kuželové plochy a elipsoidu, spojnice těchto bodů určují směry  $u', v'$  asymptot  $u, v$  průnikové křivky (hyperboly) elipsoidu a dvojdílného hyperboloidu. Hyperbola  $h_2$  je tedy určena asymptotami  $u_2, v_2$  a body  $A_2, B_2, C_2, D_2$ , sestrojíme ji s využitím jejich ohniskových vlastností. Body  $C_2, D_2$  patří tzv. parazitní části křivky.

**Příklad 14 (řešení)**



**Příklad 14 (řešení) - pokračování**

Homotetické kvadriky



### Příklad 15 – Průnik paraboloidu a protáhlého elipsoidu v axonometrii

V pravouhlé axonometrii dané axonometrickým trojúhelníkem sestrojíte průnik paraboloidu a protáhlého elipsoidu, jejichž osy jsou vzájemně rovnoběžné a leží v bokorysně.

#### Příklad 15 (postup)

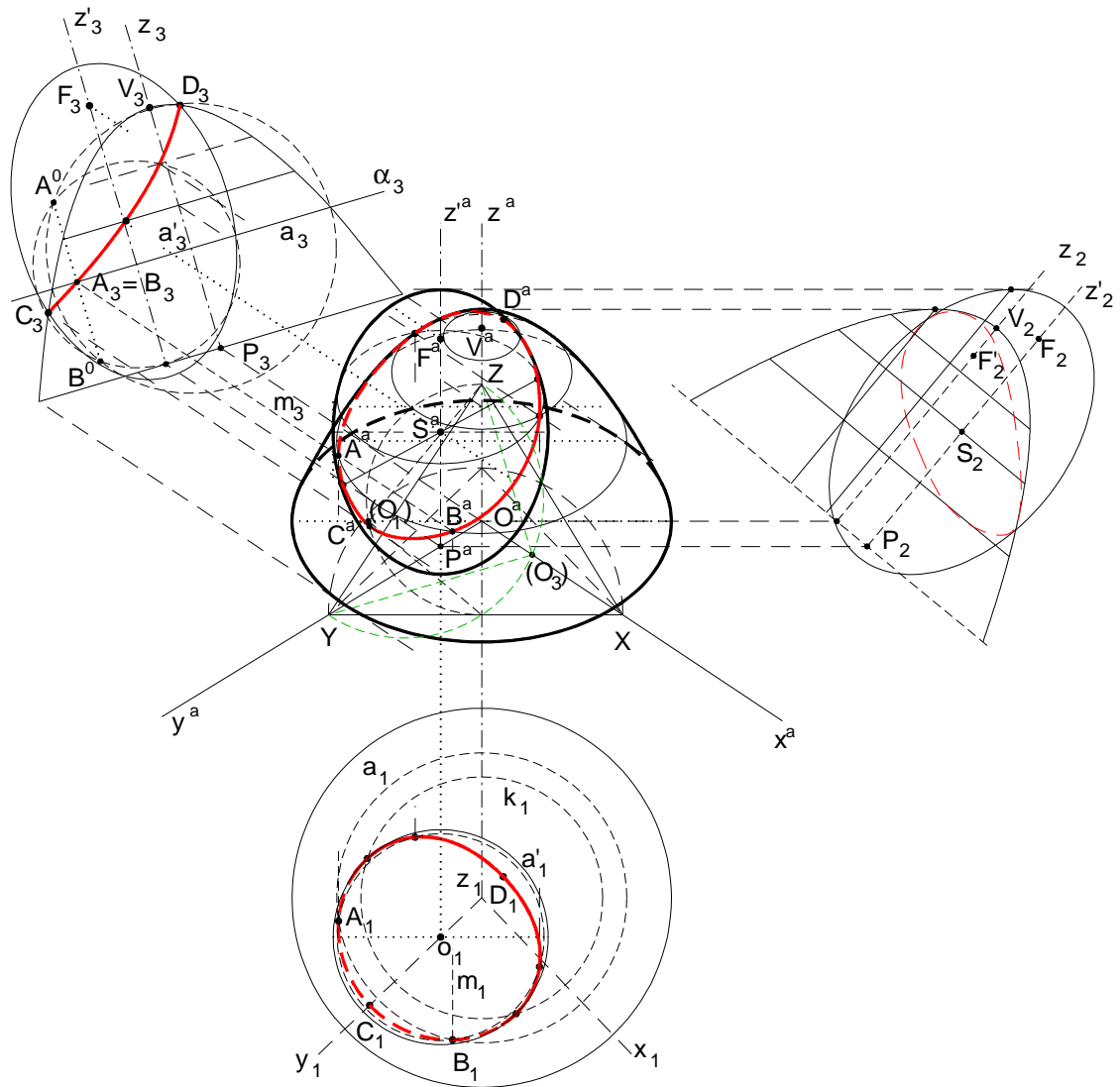
1. Axonometrický průmět plochy sestrojíme podobně jako v příkladu č.5.
2. Situaci v prostoru pravouhle promítneme do průmětny  $\mu$  (bokorysy), ve které leží osy obou ploch, tuto pomocnou průmětnu  $\mu$  otočíme kolem její axonometrické stopy do axonometrické průmětny. Pro lepší přehlednost řešení posuneme otočené útvary ve směru kolmém k axonometrické stopě roviny  $\mu$ . Otočené útvary označíme indexem 3. V otočení sestrojíme třetí průměty ploch – třetím průmětem elipsoidu je jeho tvořící elipsa, třetím průmětem paraboloidu je jeho tvořící parabola.
3. V otočení sestrojíme třetí průmět průnikové křivky ploch. Osy obou ploch jsou rovnoběžné a leží v bokorysně  $\mu$ , zvolíme libovolnou rovinu  $\alpha$ , která je kolmá k osám obou ploch. Rovina  $\alpha$  protíná plochy v rovnoběžkách  $a, a'$ , jejichž společné body  $A, B$  náležejí průnikové křivce.  
Rovina  $\alpha$  se v otočení zobrazí jako přímka kolmá ke sklopeným osám ploch, rovnoběžky  $a, a'$  se v otočení zobrazí jako úsečky  $a_3, a'_3$ . Jejich společné body  $A, B$  sestrojíme pomocí sklopení roviny  $\alpha$ , tedy úsečkám  $a_3, a'_3$  opíšeme kružnice, jejichž střed leží na průsečíku úsečky  $a$  a osy dané plochy. Průnikové body  $A^0, B^0$  kružnic vrátíme ze sklopení zpátky, tedy průsečík úsečky  $A^0B^0$  s  $a_3$  je třetím průmětem bodů  $A, B$ . Axonometrické průměty bodů  $A, B$  sestrojíme jako průsečíky rovnoběžky  $a^a$  s přímkou  $m_3$  směru otočení vedenou bodem  $A_3$ .
4. Postupně volíme další roviny rovnoběžné kolmé k osám obou ploch a sestrojíme tak dostatečný počet bodů průnikové křivky. Pro snadnější konstrukci bodů průnikové křivky ploch můžeme otočit půdorysnu  $\pi$  do axonometrické průmětny a otočené útvary posuneme ve směru kolmém na osu  $z$  a označíme je indexem 1. V tomto otočení se rovnoběžky  $a, a'$ , ve kterých protíná rovina  $\alpha$  (nebo roviny s ní rovnoběžné) obě plochy zobrazí jako kružnice  $a_1, a'_1$ . První průměty bodů  $A, B$  průnikové křivky jsou pak průsečíky kružnic  $a_1, a'_1$ . Jejich axonometrické průměty leží na rovnoběžce  $a^a$  a přímce  $m_1$  směru otočení vedenou bodem  $A_1$ . Bod  $A^a$  tedy



nemusíme sestrojovat jako průsečík přímky  $m_3$  elipsou  $a^a$ , ale jako průsečík přímek  $m_3$  a  $m_1$ .

5. Průniková křivka ploch je souměrná podle roviny  $\mu$ , ve které leží jejich osy  $z$  a  $z'$ . Rovina  $\mu$  protíná elipsoid v tvořící elipse a paraboloid v tvořící parabole, společné body této elipsy  $C, D$  a paraboloidu náležejí průnikové křivce a zároveň jsou lokálně nejvyšší a nejnižší body průnikové křivky.

**Příklad 15 (řešení)**



### Příklad 16 – Vivianiho křivka

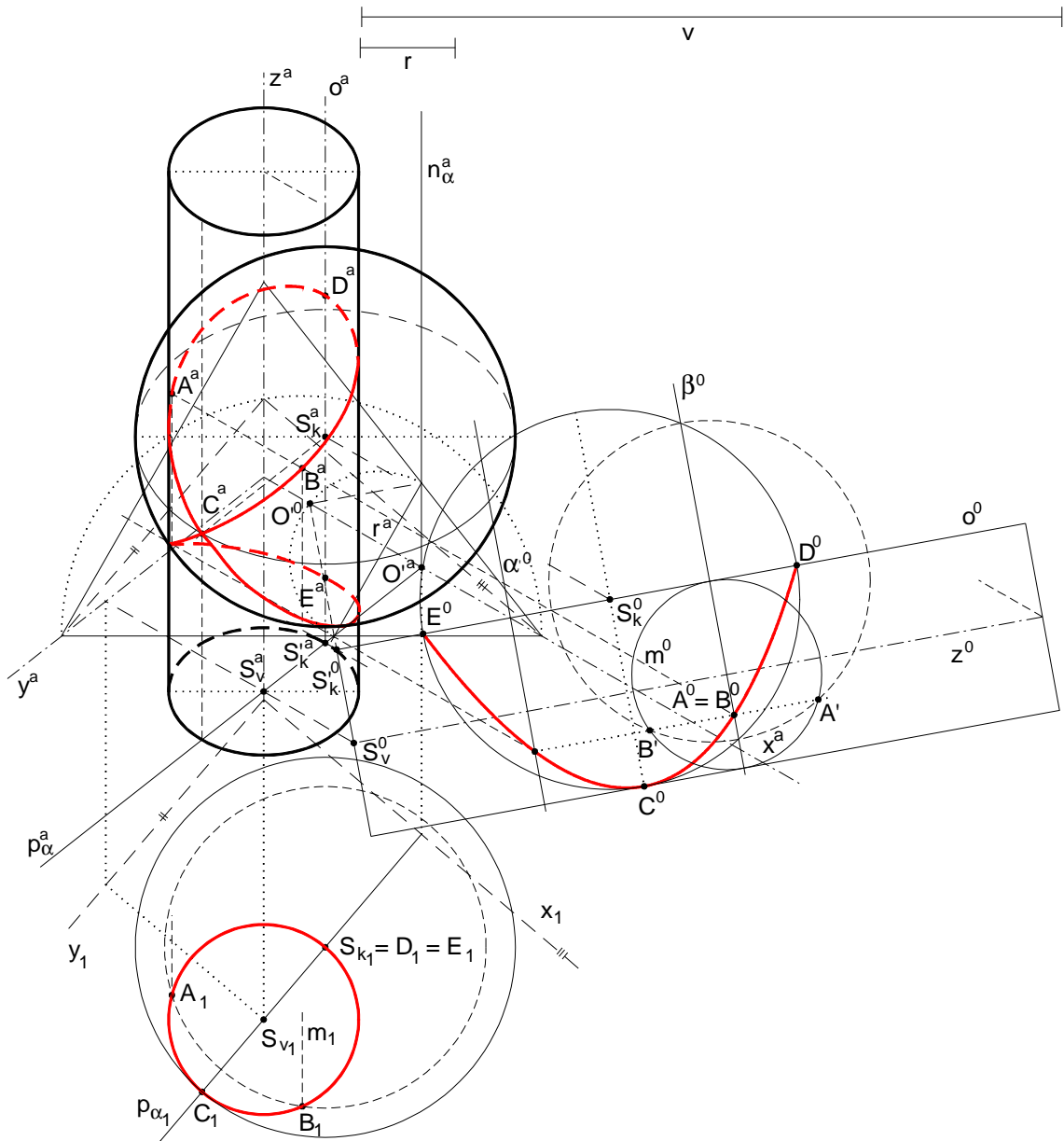
V pravouhlé axonometrii dané axonometrickým trojúhelníkem sestrojíte průnikovou křivku rotačního válce se středem podstavy  $S_v$  v půdorysně, výškou  $v$  a poloměrem podstavy  $r$  a kulové plochy se středem  $S_k$  a poloměrem  $2r$ , osa rotačního válce je v ose  $z$  a jedna z povrchových přímek rotačního válce prochází středem  $S_k$  dané kulové plochy. (Průnikovou křivkou je tzv. Vivianiho křivka).

### Příklad 16 (postup)

1. Plochy sestrojíme podobně jako v příkladě č. 5 pomocí otočení roviny obsahující osu rotačního válce a střed kuželové plochy.
2. Osou rotačního válce  $z$  a osou kulové plochy  $o$  je určena rovina  $\alpha$ . Tato rovina je kolmá k rovině  $\pi$  určené osami  $x, y$  a protíná válec v obdélníku a kulovou plochu v kružnici. Situaci v prostoru pravouhle promítneme do roviny  $\alpha$  a otočíme ji kolem její axonometrické stopy  $r$  do axonometrické průmětny, otočené útvary označíme indexem  $0$ .
3. V otočení sestrojíme průmět průnikové křivky daného rotačního válce a kulové plochy. Plochy protneme rovinou  $b$ , která je rovnoběžná s rovinou  $\pi$ . Pravoúhlý průmět pomocné roviny  $b$  do roviny  $\alpha$  se v otočení zobrazí jako přímka kolmá ke sklopeným osám obou ploch. Rovina  $b$  protíná plochy v rovnoběžkách  $a, b$ , jejichž průsečíky  $A, B$  náležejí průnikové křivce ploch. Body  $A^0, B^0$  sestrojíme pomocí sklopení roviny  $b$ , tedy úsečkám  $a^0, b^0$  opíšeme kružnice, jejichž střed leží na průsečíku úsečky  $a^0$  (resp.  $b^0$ ) a osy  $z^0$  (resp.  $o^0$ ) dané plochy. Průnikové body  $A', B'$  kružnic vrátíme ze sklopení zpátky, tedy průsečík úsečky  $A'B'$  s  $b_3$  je průmětem bodů  $A, B$ . Pro snadnější konstrukci bodů  $A, B$  průnikové křivky daných ploch otočíme půdorysnu  $\pi$  do axonometrické průmětny a otočené útvary posuneme ve směru kolmém na osu  $z$  a označíme je indexem 1. V tomto otočení se rovnoběžky  $a, b$ , ve kterých protíná rovina  $b$  (nebo roviny rovnoběžné s rovinou  $b$ ) obě plochy, zobrazí jako kružnice  $a_1, b_1$ . První průměty bodů  $A, B$  průnikové křivky jsou průsečíky kružnic  $a_1, b_1$ . Axonometrický průmět bodů  $A$  leží průsečíku přímky  $m^0$  směru otočení roviny  $\alpha$ ,  $A^0\hat{I} m^0$  a na přímce  $m_1$  směru otočení roviny  $\pi$ ,  $A_1\hat{I} m_1$  bodem  $A_1$ . Analogicky sestrojíme axonometrický průmět bodu  $B$ .

4. Plochami prokládáme další roviny rovnoběžné s rovinou  $\pi$  a sestrojíme tak dostatečný počet bodů průnikové křivky. Pro lepší přehlednost jsem v řešení příkladu uvedla jen konstrukci bodů  $A$  a  $B$  průnikové křivky. Další body průnikové křivky se sestrojují analogicky.
5. Průniková křivka ploch je souměrná podle roviny  $\alpha$ , ve které leží jejich osy  $z$  a  $o$  a také podle roviny rovnoběžné s rovinou  $\pi$ , která prochází středem kulové plochy. Rovina  $\alpha$  protíná rotační válec v obdélníku a kulovou plochu v kružnici, společné body  $C, D$  tohoto obdélníku a kružnice náleží průnikové křivce a zároveň jsou lokálně nejvyšší a nejnižší body průnikové křivky. Průniková křivka ploch se nazývá Vivianiho křivka.
6. Body  $K, L, M, N$ , ve kterých se mění viditelnost axonometrického průmětu průnikové křivky, sestrojujeme jako průsečíky průmětu průnikové křivky a řezu axonometrickou průmětnou. Axonometrické průměty obrysových přímek rotačního válce prochází krajními body průměru podstavy rovnoběžného s  $XY$ . Proto první průměty bodů  $K, L, M, N$ , ve kterých se mění viditelnost průnikové křivky, jsou po dvou krajními body průměru kružnice  $k_I$  rovnoběžném s  $XY$ . Bodem  $K_I$  prochází rovnoběžka  $k_I$  válce a rovnoběžka  $k'_I$  kulové plochy,  $K_I$  je jejich společný bod. Sestrojíme obraz bodu  $K$  v otočení podobně jako obecný bod v odstavci 3. a odvodíme jeho axonometrický průmět  $K^a$ . Analogicky sestrojíme i další body  $L, M, N$ , ve kterých se bude měnit viditelnost průnikové křivky.

**Příklad 16 (řešení)**



## 4.5 Osvětlení rotačních kvadrik

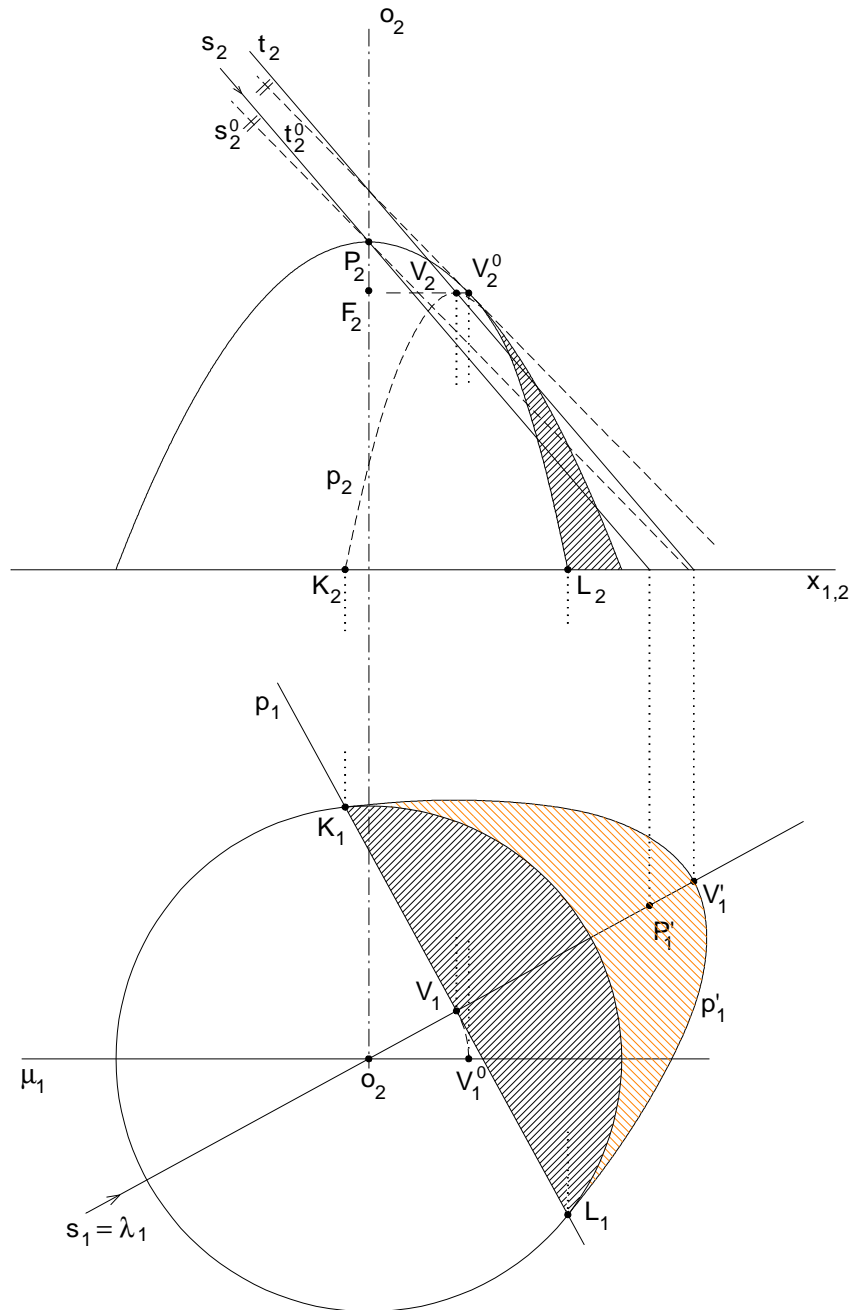
### Příklad 17 – Rovnoběžné osvětlení rotačního paraboloidu

V Mongeově promítání zobrazte rovnoběžné osvětlení rotačního paraboloidu, jehož osa je kolmá k půdorysně. Sestrojte stín vržený do půdorysny.

#### Příklad 17 (postup)

- Mezi vlastního stínu paraboloidu bude parabola  $p$ , protože směr osvětlení není rovnoběžný s osou paraboloidu. Vrchol  $V$  paraboly  $p$  je bodem dotyku tečny rovnoběžné se směrem osvětlení a světelného meridiánu. Bod  $V$  sestrojíme pomocí válcové metody, tedy rovinu  $\lambda$  světelného meridiánu otočíme do roviny  $m$  rovnoběžné s nárysnou a procházející osou paraboloidu. Meridián v rovině  $\lambda$  se otočí do hlavního meridiánu a přímka  $s$  směru osvětlení, která prochází vrcholem paraboloidu na ose  $o$ , se otočí do přímky  $^0s$ . Sestrojíme tečnu  $^0t_2$  rovnoběžnou s  $^0s_2$ , v bodě dotyku dostaneme nárys otočeného vrcholu  $^0V$  paraboly  $p$ . Zpětným otočením bodu  $^0V$  do roviny  $\lambda$  sestrojíme půdorys i nárys bodu  $V$ .
- Půdorysem paraboly  $p$  meze vlastního stínu je přímka  $p_1$ , která je kolmá k prvnímu průmětu přímky  $s$  a prochází půdorysem bodu  $V$ .  
V náryse je parabola určena svým vrcholem  $V$ , osou procházející vrcholem rovnoběžnou s  $o_2$  a nárysy bodů  $K, L$ , ve kterých parabola  $p$  protíná rovnoběžku paraboloidu ležící v půdorysně. Pro přesnější vyrýsování nárysu paraboly  $p$  můžeme sestrojit její další body jako průsečíky roviny, ve které leží parabola  $p$ , s rovnoběžkami paraboloidu.
- Stín vržený na půdorysnu určíme jako množinu vržených stínů bodů paraboly  $p$  meze vlastního stínu. Mezi vrženého stínu do průmětny  $\pi$  je parabola  $p'$ .  
Sestrojíme nejprve vržený stín vrcholu  $V$  paraboly  $p$  do průmětny  $\pi$  a označíme ho  $V'$ . Dále sestrojíme vržený stín  $P'$  vrcholu  $P$  paraboloidu do průmětny, sestrojenný bod  $P'$  je ohniskem paraboly  $p'$ . Parabola  $p'$  meze vrženého stínu na  $\pi$  je určena vrcholem  $V'_1$ , ohniskem  $P'_1$  a body  $K_1, L_1$ .

Příklad 17 (řešení)



### Příklad 18 – Středové osvětlení protáhlého elipsoidu

V Mongeově promítání zobrazte středové osvětlení rotačního protáhlého elipsoidu s osou kolmou k  $\pi$  ze středu  $S$ . Sestrojte stín vržený do půdorysny.

#### Příklad 18 (postup)

1. Z bodu  $S$  sestrojíme k elipsoidu tečnou kuželovou plochu, dotyková elipsa  $e$  bude mezi vlastního stínu. Jedna osa elipsy  $e$  leží v rovině  $\rho$ , která je určena bodem  $S$  a osou  $o$  elipsoidu. Rovina  $\rho$  je také rovinou souměrnosti meze vlastního stínu. Rovina  $\rho$  protne plochu elipsoidu v meridiánu  $m$ , z bodu  $S$  sestrojíme tečny k tomuto meridiánu  $m$  s dotykovými body  $A, B$ . Body  $A, B$  sestrojíme užitím válcové metody, tedy pomocí otočení útvarů ležících v rovině meridiánu  $m$  kolem osy  $o$  do roviny rovnoběžné s nárysou. Sestrojíme otočený bod  $S^0$ , kterým vedeme tečny k hlavnímu meridiánu elipsoidu a sestrojíme dotykové body  $A^0, B^0$ , které otočíme zpět do roviny  $\rho$  a získáme body  $A, B$ , které omezují jednu z os elipsy  $e$  meze vlastního stínu. Sestrojíme střed  $O$  úsečky  $AB$ , který je středem elipsy  $e$ . Druhá osa elipsy  $e$  je v půdoryse kolmá na osu  $A_1B_1$  elipsy  $e$ , v náryse je rovnoběžná se základnicí. Body  $C, D$ , kterými je druhá osa elipsy  $e$  omezena, leží v rovině rovnoběžky  $d$  elipsoidu a sestrojíme je v půdorysu jako průnik kolmice k  $A_1B_1$  vedenou bodem  $O_1$  s půdorysem rovnoběžky  $d_1$ . Sestrojíme elipsu  $e$ , v půdorysu je určena hlavní osou  $C_1D_1$  a vedlejší osou  $A_1B_1$ . V nárysu je elipsa  $e$  určena sdruženými průměry  $A_2B_2, C_2D_2$ , její hlavní a vedlejší osu sestrojíme např. pomocí Rytzovy konstrukce. Body na elipse  $e$ , ve kterých se mění její viditelnost, sestrojíme pomocí válcové metody pro hlavní meridián  $m$ , tedy jako body dotyku  $K_2, L_2$  tečen k  $m_2$  vedených z  $S_2$ .
2. Mezi stínu vrženého na půdorysnu bude část elipsy  $g$ . Jejími hlavními vrcholy  $A', B'$  budou průsečíky přímk  $SA, SB$  s půdorysnou. Sestrojíme střed úsečky  $A'B'$  a vedlejší osu elipsy  $g$ , která bude tímto středem procházet a bude kolmá k  $A'B'$ . Sestrojíme ohniska elipsy  $g$  meze stínu vrženého do  $\pi$ . Využijeme větu Quételet –



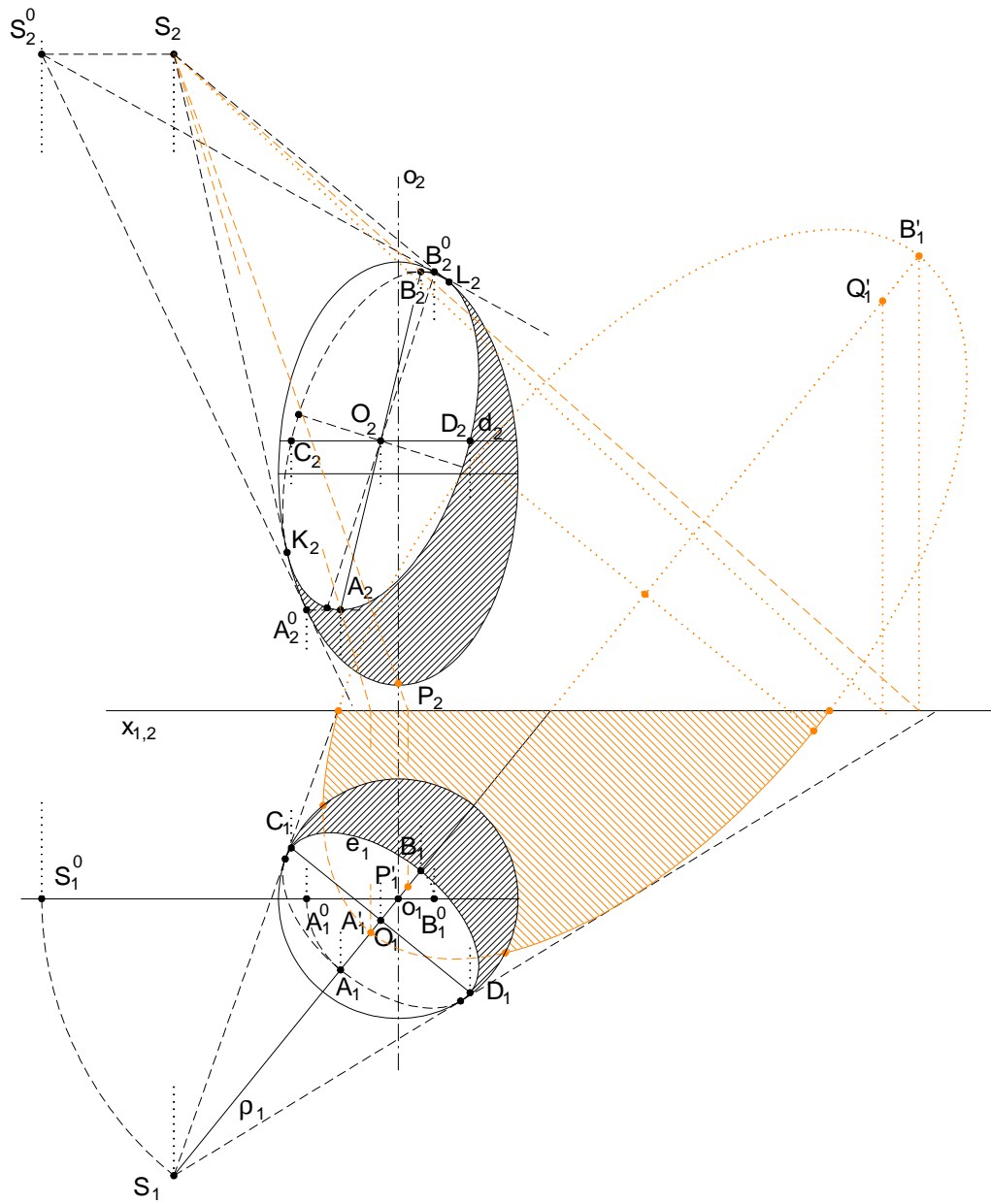
Dandelinovu<sup>4</sup> pro konstrukci ohnisek meze vrženého stínu kulové plochy do průmětny  $\pi$  při rovnoběžném osvětlení. Tato věta platí obdobně i pro středové osvětlení v případě, že osa rotační kvadriky je kolmá k průmětně  $\pi$ . Využijeme afinity mezi kulovou plochou a elipsoidem a sestrojíme vržené stíny  $P'$ ,  $Q'$  vrcholů rotačního elipsoidu do průmětny  $\pi$ , která je kolmá k ose  $o$  elipsoidu. Body  $P'$ ,  $Q'$  jsou ohniska elipsy  $g$  meze stínu vrženého do půdorysny.

---

<sup>4</sup> Quételet – Dandelinova věta pro středový průmět kulové plochy: Středový průmět kulové plochy na rovinu, která neprochází středem promítání, je kuželosečka. Její ohniska jsou (vlastní) průměty krajních bodů průměru kulové plochy kolmého k průmětně.

Důkaz věty lze nalézt např. v [12].

**Příklad 18 (řešení)**



## Příklad 19 – Rovnoběžné osvětlení rotačního paraboloidu v axonometrii

V pravoúhlé axonometrii zadané axonometrickým trojúhelníkem sestrojte rovnoběžné osvětlení rotačního paraboloidu, jehož osa je rovnoběžná s axonometrickou osou  $z$ . Rotační paraboloid je zadán meridiánem ležícím v promítací rovině  $s$ . Sestrojte stín paraboloidu vržený do průmětny  $\pi$ .

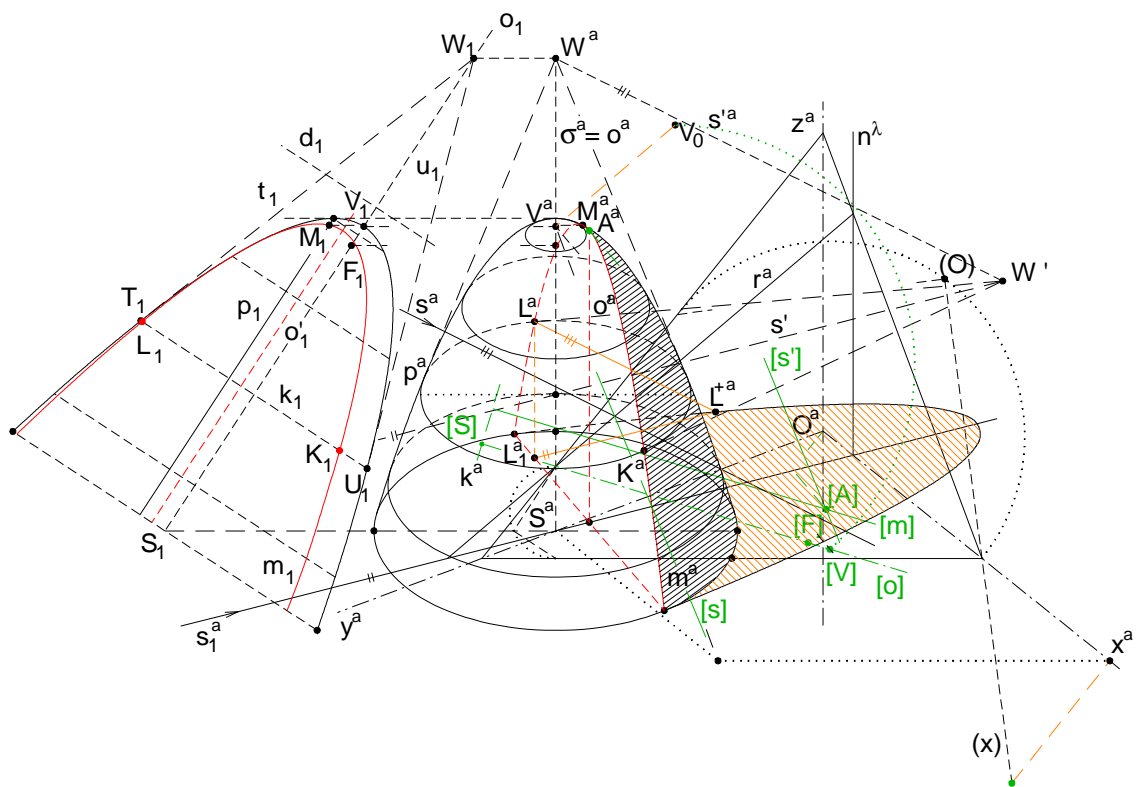
### Příklad 19 (postup)

1. Axonometrický průmět plochy sestrojíme analogicky jako v příkladě č.5.
2. (Kuželová metoda osvětlení – viz teorie) Sestrojíme mez  $m$  vlastního stínu paraboloidu, kterou je část paraboly. Na libovolně zvolených rovnoběžkách paraboloidu sestrojíme body meze vlastního stínu pomocí kuželové metody osvětlení. Například rovnoběžce  $k$  opíšeme kuželovou plochu. Nejprve sestrojíme průmět kuželové plochy do promítací roviny  $s$ , ve sklopení roviny  $s$  do průmětny se obrysové površky  $t_1, u_1$  kuželové plochy zobrazí jako tečny k meridiánu paraboloidu v bodech  $T_1, U_1$  rovnoběžky  $k_1$ . Vrchol kuželové plochy ležící v průsečíku přímek  $t_1, u_1$  a na ose paraboloidu označíme  $W_1$  a sestrojíme jeho axonometrický průmět  $W^a$ . Vrchol  $W^a$  paraboloidu promítneme ve směru promítání  $s$  do roviny  $\alpha$  rovnoběžky  $k$ , získáme tak bod  $W'$ , ze kterého sestrojíme tečny k rovnoběžce  $k$ . Dotykové body  $K^a, L^a$  tečen vedených z bodu  $W'$  k rovnoběžce  $k^a$  jsou hledanými body, které patří mezi vlastního stínu paraboloidu. Podobným způsobem sestrojíme body meze vlastního stínu i na dalších libovolných rovnoběžkách plochy a zkonstruujeme bodově parabolou  $m$  meze vlastního stínu.
3. Sestrojíme bod  $M$ , ve kterém se mění viditelnost křivky  $m$  meze vlastního stínu. Rovinu meze vlastního stínu promítneme do promítací roviny  $s$  a ve sklopení do průmětny sestrojíme první průmět  $m_1$  meze vlastního stínu. První průmět bodu  $M$  určíme jako průsečík paraboly  $m_1$  s úsečkou  $p_1$ , která je prvním průmětem obrysové paraboly  $p$  v axonometrické rovině. Axonometrický průmět  $M^a$  bodu  $M$  leží na obrysové parabole  $p^a$  paraboloidu v axonometrické rovině a na přímce vedené z bodu  $M_1$  a kolmé k ose paraboloidu.
4. Vrchol  $A$  paraboly  $m$  meze vlastního stínu sestrojíme pomocí válcové metody osvětlení. Do průmětny otočíme světelnou rovinu  $\lambda$ , která prochází osou rotace a je

kolmá k rovině meze vlastního stínu, tedy v otočení se mez  $m$  vlastního stínu paraboloidu zobrazí jako přímka. V otočené světelné rovině sestrojíme osu  $[o]$ , vrchol  $[V]$  a ohnisko  $[F]$  světelného meridiánu. Těmito prvky je světelný meridián jednoznačně určen (pro další řešení není nutné křivku světelného meridiánu v otočení vykreslovat). V otočení sestrojíme průmět roviny meze  $m$  vlastního stínu, který se v otočení zobrazí jako přímka  $[m]$ . Sestrojíme také otočený směr  $[s]$  osvětlení. Ke konstrukci otočených prvků využijeme afinity, jejíž osou je axonometrická stopa  $r^a$  světelné roviny, směr odpovídajících si bodů je dán např. dvojicí  $V^a$  a  $[V]$ , jejichž spojnice je kolmá na osu afinity  $r^a$ . K nenarýsované parabole meridiánu  $[m]$  vedeme tečnu  $[s']$  rovnoběžnou s otočeným směrem otočení  $[s]$  a sestrojíme její dotkový bod  $[A]$ . S využitím zmíněné afinity sestrojíme axonometrický průmět  $A^a$ , který je vrcholem paraboly  $m$  meze vlastního stínu.

5. Vržený stín do průmětny  $\pi$  sestrojíme bodově. Body meze hlavního stínu promítáme na průmětnu  $\pi$ . Tedy např. bodem  $L^a$  vedeme rovnoběžku s axonometrickým průmětem směru osvětlení  $s^a$ , půdorysným průmětem  $L_l^a$  bodu  $L$  vedeme rovnoběžku s půdorysným průmětem  $s_l^a$  směru osvětlení. Průsečík  $L^{+a}$  takto vedených rovnoběžek je bodem meze stínu vrženého do průmětny. Z důvodu přehlednosti řešení jsem uvedla konstrukci vrženého stínu jen pro bod  $L$ , ostatní body se sestrojí analogicky.

**Příklad 19 (řešení)**



## Příklad 20 – Rovnoběžné osvětlení jednodílného hyperboloidu

V Mongeově promítání sestrojte rovnoběžné osvětlení rotačního jednodílného hyperboloidu, jehož osa je kolmá k  $\pi$ . Sestrojte stín vržený na průmětny.

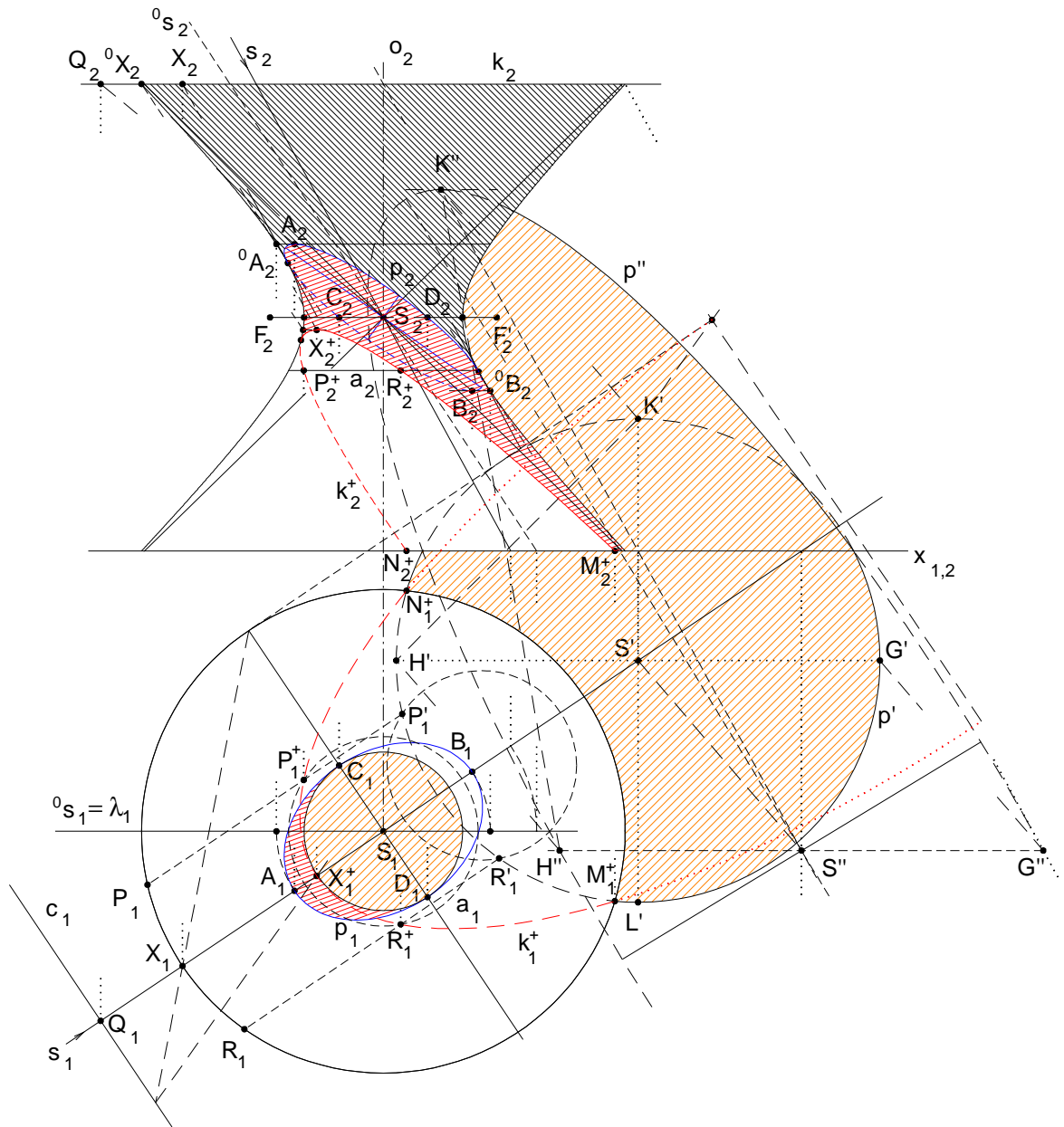
### Příklad 20 (postup)

1. Sestrojíme mez vlastního stínu  $p$ . Protože přímka  $s$  směru osvětlení procházející středem hyperboloidu  $S$  leží uvnitř asymptotické kuželové plochy hyperboloidu, je mezi vlastního stínu  $p$  elipsa. Osa elipsy  $p$  leží v rovině  $\lambda$  světelného meridiánu. Konstrukci provedeme pomocí válcové metody pro světelný meridián, tedy rovinu  $\lambda$  otočíme do roviny hlavního meridiánu, přímka  $s$  směru osvětlení se otočí do přímky  ${}^0s$ . V náryse sestrojíme tečny k hlavnímu meridiánu hyperboloidu, které jsou rovnoběžné s přímkou  ${}^0s_2$ , body dotyku tečen a hyperboloidu označíme  ${}^0A_2$ ,  ${}^0B_2$  a jejich zpětným otočením do roviny  $\lambda$  určíme nárysy i půdorysy bodů  $A$ ,  $B$ . Přímka  $AB$  je průsečnicí světelné roviny  $\lambda$  a roviny  $\rho$  meze vlastního stínu. Druhá osa elipsy  $p$  leží na přímce, která je kolmá k přímce  $AB$  (tzn. na hlavní přímce první osnovy roviny  $\rho$ ). Střed elipsy  $p$  leží ve středu  $S$  hyperboloidu, proto body  $A$ ,  $B$  leží na rovníku hyperboloidu. V půdoryse je elipsa  $p_1$  určena hlavní osou  $A_1B_1$  a vedlejší osou  $C_1D_1$ , v bodech  $C_1$ ,  $D_1$  se mění viditelnost meze vlastního stínu  $p_1$ . V náryse je elipsa  $p_2$  určena sdruženými průměry  $A_2B_2$  a  $C_2D_2$ , hlavní a vedlejší osu elipsy  $p_2$  můžeme zkonstruovat např. pomocí Rytzovy konstrukce. Body ve kterých se mění viditelnost meze vlastního stínu v náryse sestrojíme jako body dotyku hlavního meridiánu hyperboloidu a tečen rovnoběžných s přímkou  $s_2$ .
2. Vržený stín  $p'$  do půdorysny je omezen kružnicí, kterou získáme osvětlením kružnice  $k$ , kterou je hyperboloid ohraničen. Průsečíky průmětny  $\pi$  s přímkami směru osvětlení procházející kružnicí  $k$  určují hranici vrženého stínu kružnice  $k$  do půdorysny. Střed  $S'$  kružnice  $p'$  vrženého stínu do půdorysny sestrojíme promítnutím středu kružnice  $k$  ve směru osvětlení do půdorysny  $\pi$ .
3. Vržený stín  $p''$  kružnice  $k$  do náryсны sestrojíme s využitím kolineace mezi kružnicí  $p'$  stínu vrženého na půdorysnu a elipsou  $p''$  stínu vrženého do náryсны. Nejprve sestrojíme střed  $S''$  elipsy  $p''$  jako průsečík přímky vedené středem kružnice  $k$  a rovnoběžné se směrem osvětlení a náryсны. Spojnice středů  $S'$  a  $S''$  určuje dvojici odpovídajících si bodů v kolineaci, osou kolineace je základnice.

Sestrojíme průměry  $G'H'$  a  $K'L'$  kružnice  $k'$ , průměr  $G'H'$  je rovnoběžný s nárysnou, průměr  $K'L'$  je k nárysně kolmý. V kolineaci sestrojíme obrazy těchto průměrů  $G''H''$ ,  $K''L''$ , které jsou sdruženými průměry elipsy  $p''$  vrženého stínu do náryсны. Hlavní a vedlejší osu elipsy  $p''$  můžeme zkonstruovat např. pomocí Rytzovy konstrukce. Vržený stín do náryсны je omezen základnicí a hlavním meridiánem hyperboloidu.

4. Kružnice  $k$  vrhá stín  $k^+$  i na plochu hyperboloidu. Vrženým stínem  $k^+$  je elipsa, která odpovídá kružnici  $k$  v prostorové afinitě s osou  $c = \rho \cap \pi'$ , kde  $\rho$  je rovina meze vlastního stínu  $p$  a  $\pi'$  je rovina, v níž leží kružnice  $k$ . Směr afinity určuje přímka osvětlení  $s$ . Při pravouhlém promítnutí této afinity do průmětny  $\pi$  dostáváme osovou afinitu v rovině, jejíž osou je přímka  $c_1$ . Určíme průsečík  $Q$  některé z přímek roviny  $\rho$  (můžeme použít např. přímku  $AB$ ) s rovinou  $\pi'$ . Bodem  $Q$  pak prochází přímka  $c$ , která je kolmá ke světelné rovině  $\lambda$ . Sestrojíme bod  $X$  kružnice  $k$ , který leží ve světelné rovině  $\lambda$ , vedeme jím přímku rovnoběžnou s přímkou  $s$  a určíme průsečík  $X^+$  této přímky a světelného meridiánu. Konstrukci bodu  $X^+$ , který je bodem vrženého stínu  $k^+$ , provedeme pomocí otočení roviny  $\lambda$  do  $m$ . Dvojice bodů  $X_1$  a  $X_1^+$  je dvojicí odpovídajících si bodů v osové afinitě určené osou  $c_1$ . V této afinitě sestrojíme ke kružnici  $k_1$  odpovídající elipsu  $k_1^+$ . Nárys  $k_2^+$  sestrojíme např. metodou zpětných paprsků: Zvolíme libovolnou rovnoběžku  $a$  hyperboloidu, sestrojíme její vržený stín  $a'$  na průmětnu  $\pi$  a určíme společné body  $P', R'$  kružnic  $k'$  a  $a'$ . Zpětnými paprsky sestrojíme body  $P^+, R^+$  křivky  $k^+$ , které leží na rovnoběžce  $a$  a které jsou vrženými stíny bodů  $P, R$  ležících na kružnici  $k$ . Tento postup opakujeme pro další rovnoběžky hyperboloidu a sestrojíme dostatečný počet bodů meze vrženého stínu  $k^+$ . Sestrojíme také body  $M^+, N^+$ , ve kterých mez vrženého stínu  $k^+$  protíná půdorysnu, jako průsečíky meze vrženého stínu  $p'$  a  $k'$ . Stín vržený na hyperboloid je ohraničen křivkou  $k^+$  a mezí vlastního stínu  $p$ .

**Příklad 20 (řešení)**

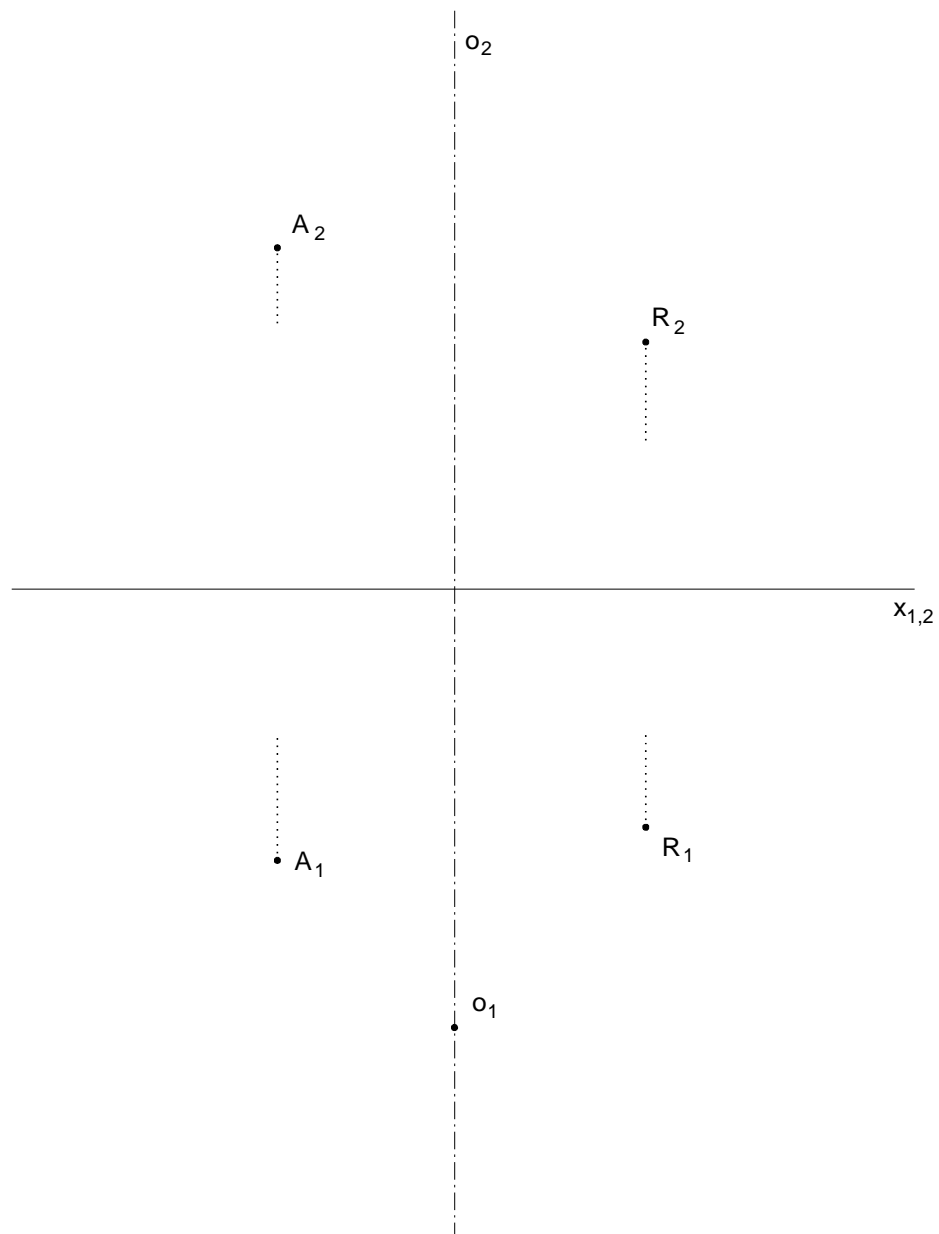




## 5 Zadání příkladů

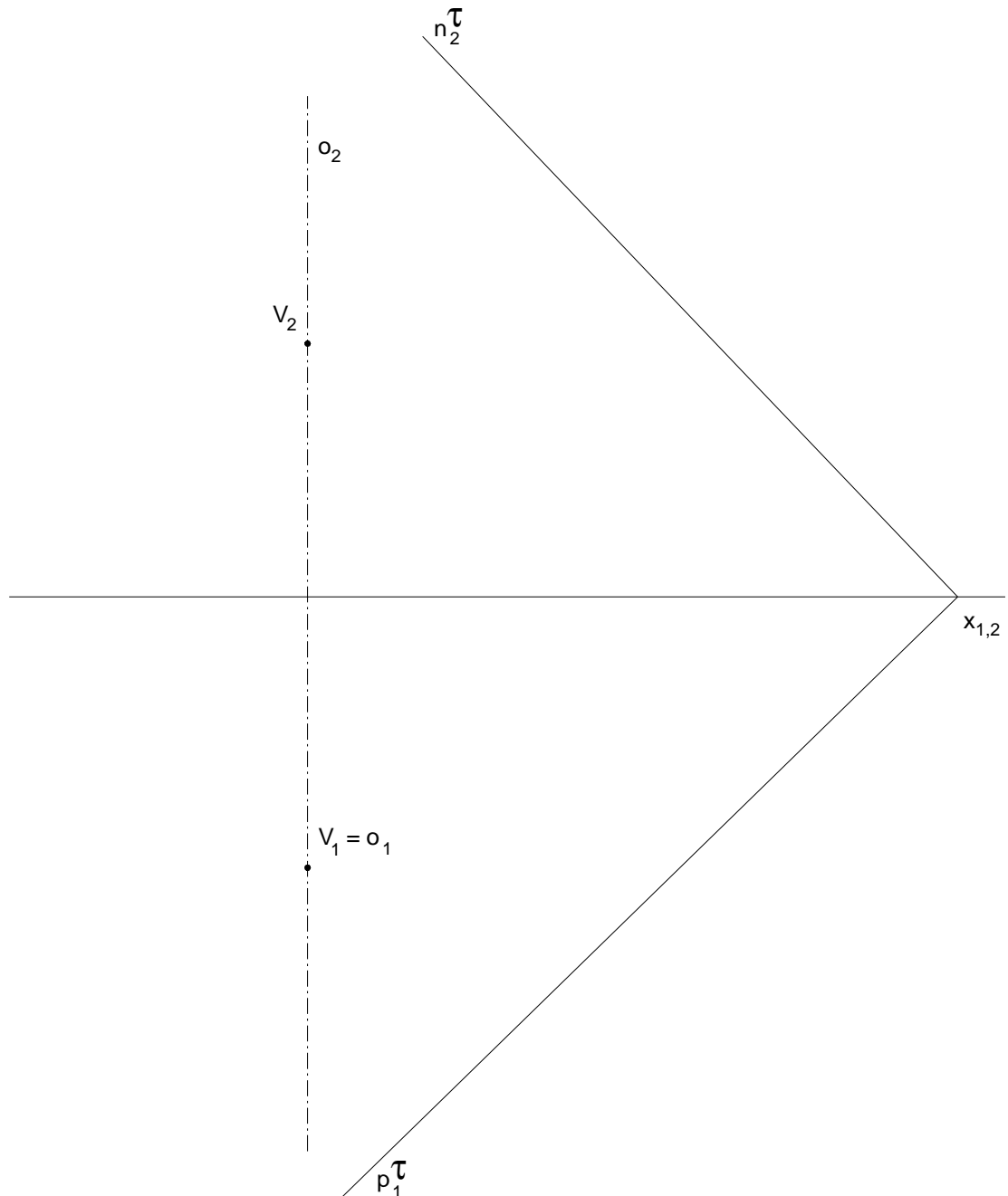
### Příklad 1 – Konstrukce rotačního elipsoidu v Mongeově promítání

V Mongeově promítání sestrojte rotační elipsoid, který je zadán osou rotace, bodem rovníku  $R$  a obecným bodem  $A$  plochy.



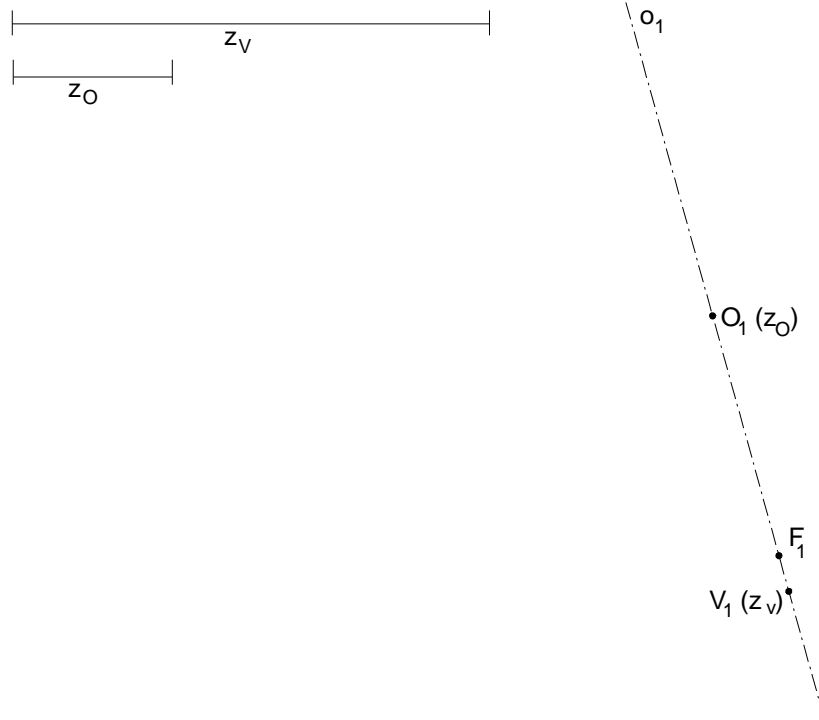
**Příklad 2 – Konstrukce rotačního paraboloidu v Mongeově promítání**

V Mongeově promítání sestrojte rotační paraboloid, který je zadán osou rotace, tečnou rovinou  $t$  a vrcholem  $V$  paraboloidu. Určete bod dotyku plochy s rovinou  $t$  a paraboloid omezte půdorysnou.



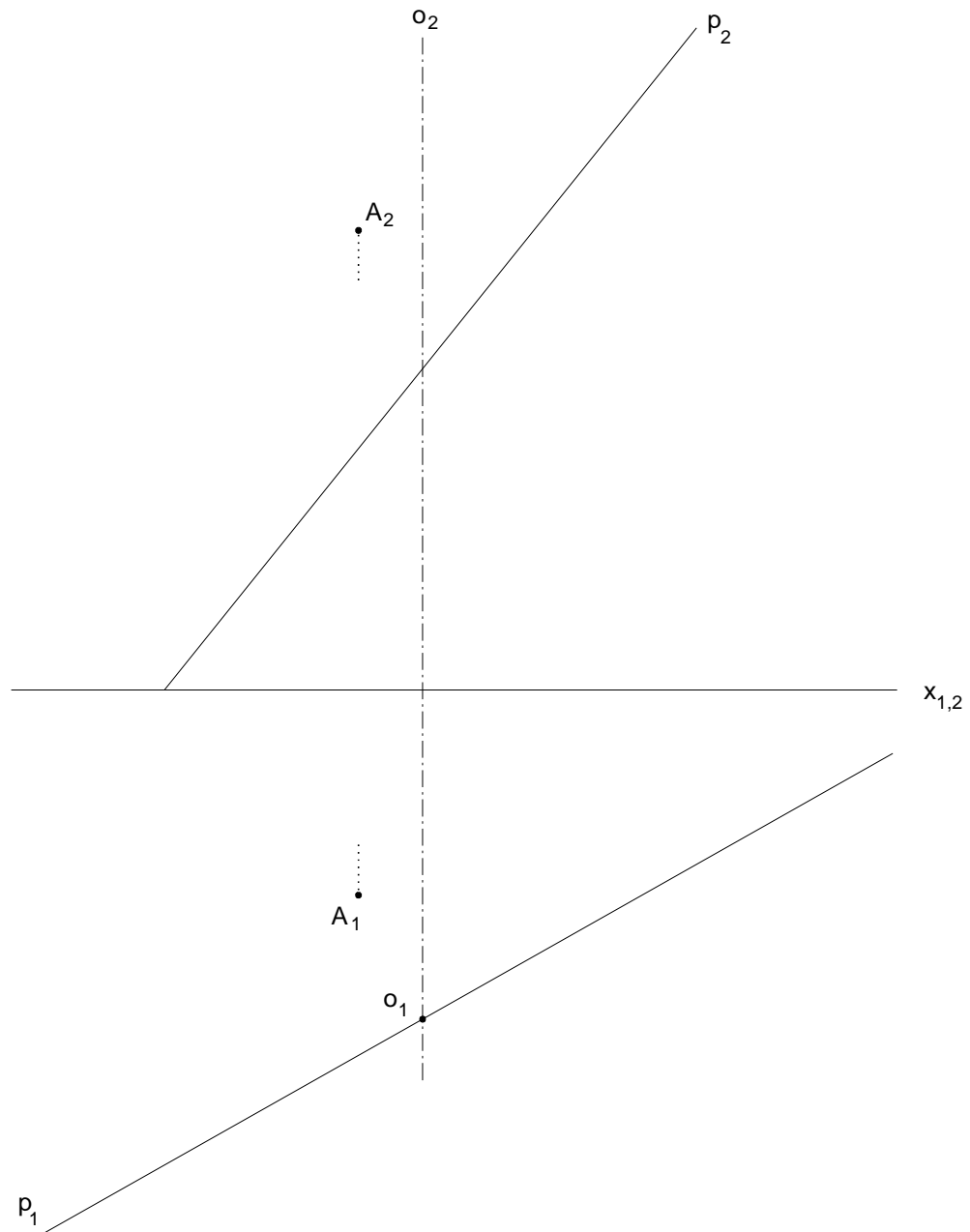
**Příklad 3 – Konstrukce rotačního paraboloidu v kótovaném promítání**

V kótovaném promítání sestrojte rotační paraboloid, jestliže je zadán jeho vrchol  $V$ , ohnisko  $F$ . Paraboloid ohraničte rovinou kolmou k ose  $o$  paraboloidu a procházející daným bodem  $O$ , který leží na ose paraboloidu.



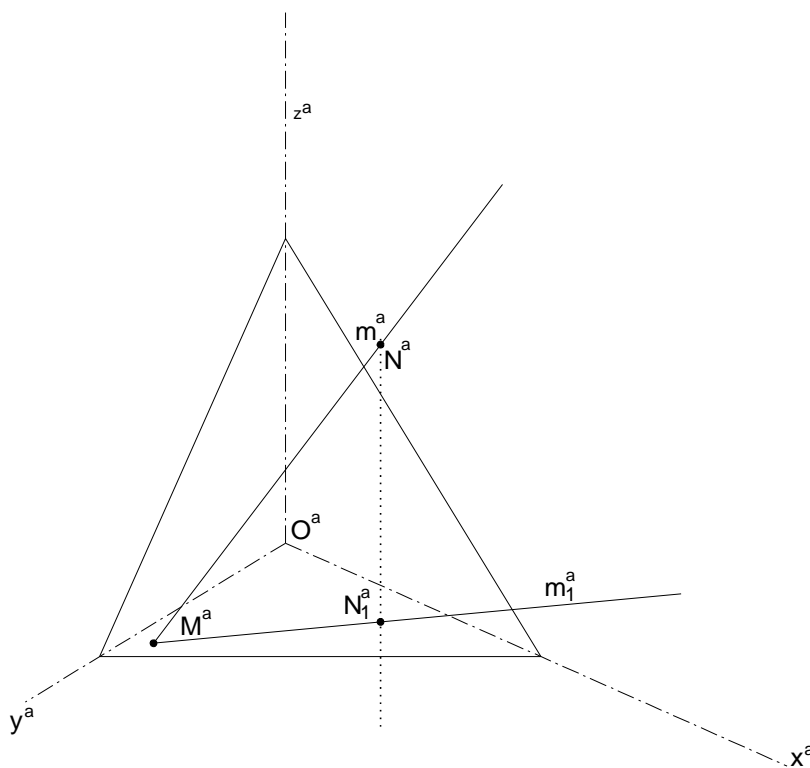
### Příklad 4 – Konstrukce dvojdílného rotačního hyperboloidu v Mongeově promítání

V Mongeově promítání sestrojte dvojdílný rotační hyperboloid, jestliže je dána osa rotace  $o$ , přímka asymptotické kuželové plochy  $p$  a bod  $A$  hyperboloidu. Plochu omezte půdorysnou a rovinou s ní souměrnou podle středu plochy.



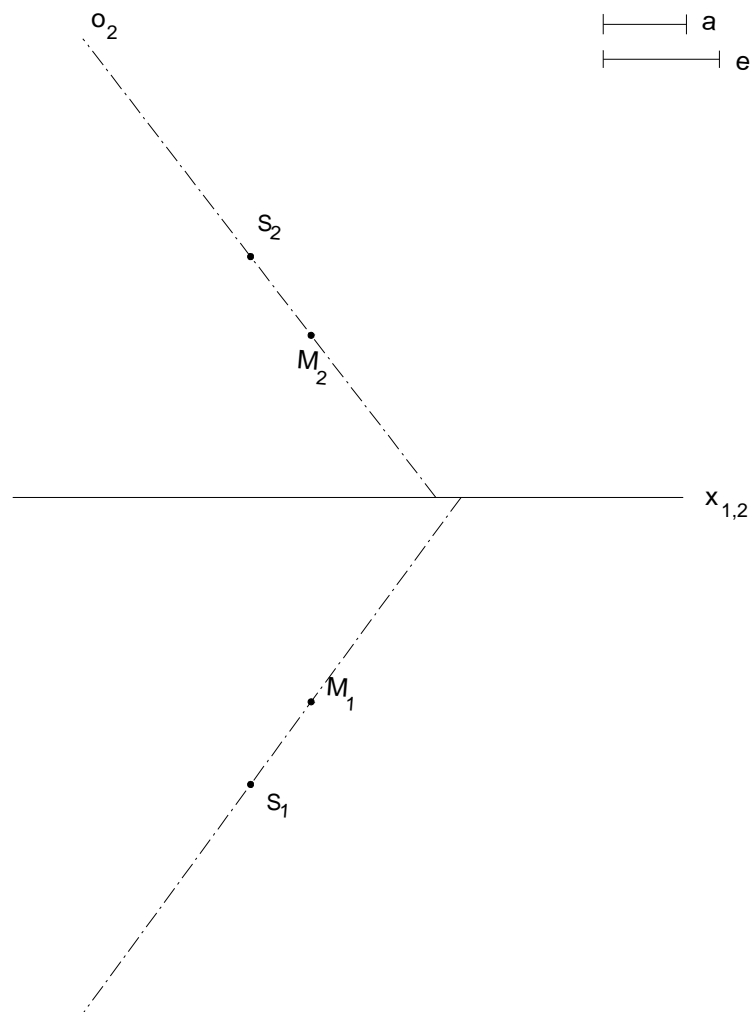
### Příklad 5 – Konstrukce jednodílného rotačního hyperboloidu v pravouhlé axonometrii

V pravouhlé axonometrii zadané axonometrickým trojúhelníkem sestrojte obrys rotačního jednodílného hyperboloidu vytvořeného rotací přímky  $m = MN$  kolem osy  $z$ . Plochu omezte rovinou danou osami  $x, y$  a rovinou s ní rovnoběžnou a souměrnou podle středu hyperboloidu.



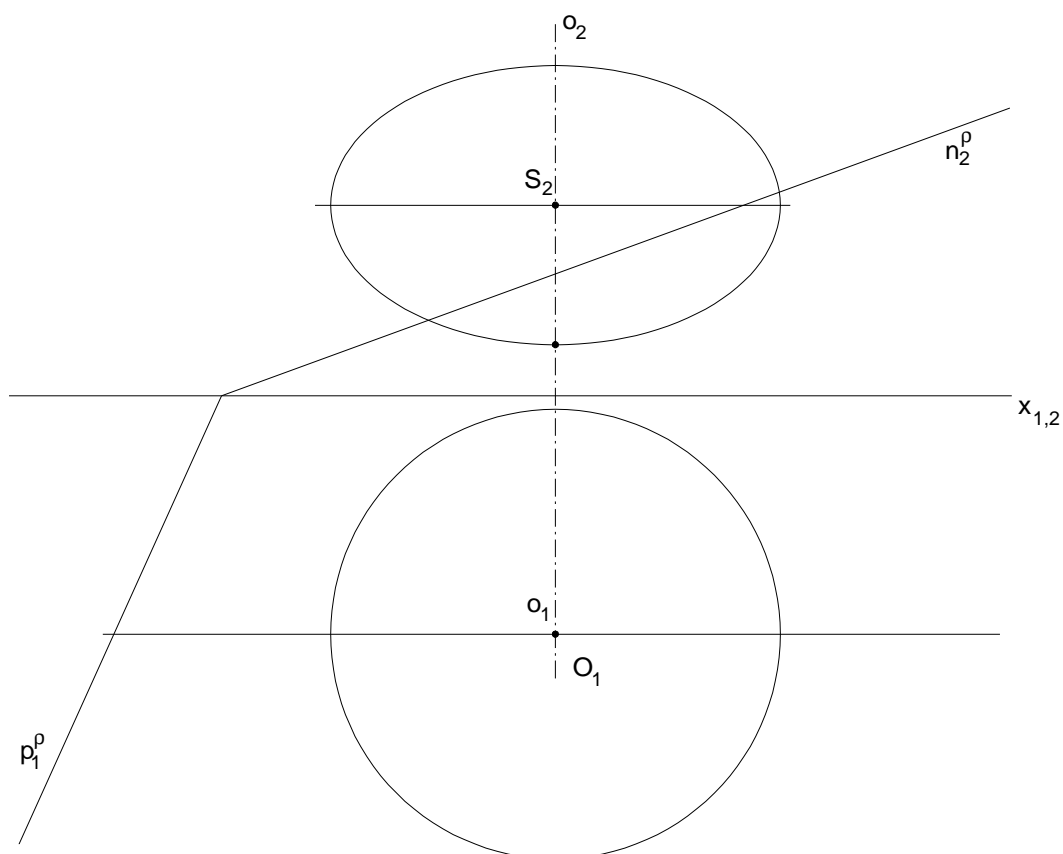
### Příklad 6 – Konstrukce dvojdílného rotačního hyperboloidu v Mongeově promítání

V Mongeově promítání zobrazte rotační dvojdílný hyperboloid s osou  $o$  v obecné poloze vzhledem k průmětnám, který je daný osou  $o$ , velikostí hlavní osy  $a$  a excentricitou  $e$ . Plochu omezte rovinou kolmou k ose  $o$  a procházející bodem  $M$ . Zobrazte řez plochy rovinou  $\rho$ .



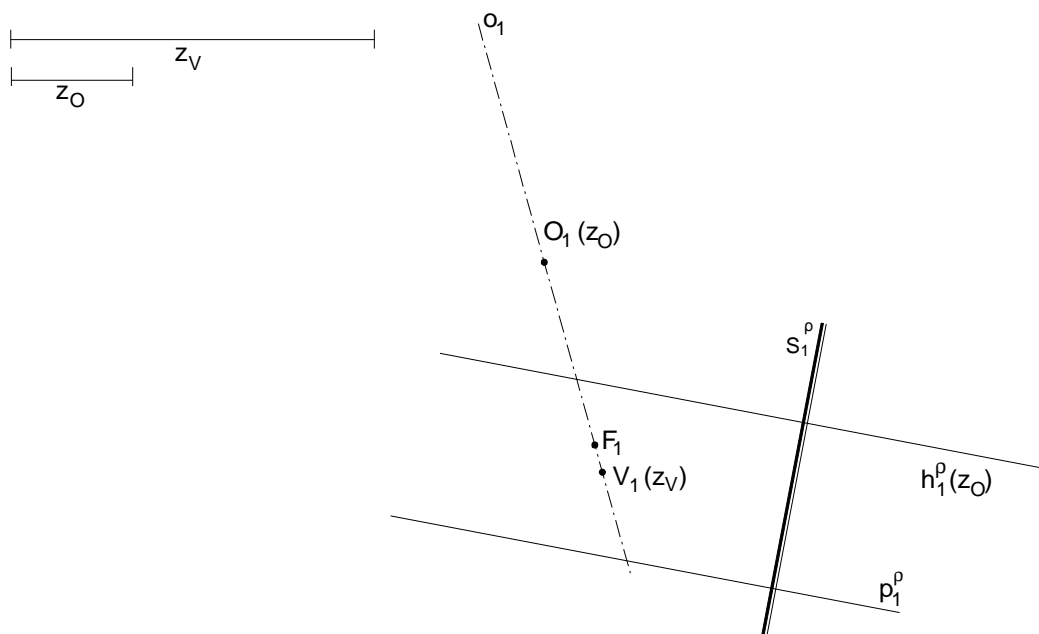
### Příklad 7 – Řez rotačního elipsoidu v Mongeově promítání

V Mongeově promítání sestrojte řez rotačního elipsoidu, jehož osa je kolmá k půdorysně a je zadán meridiánem, rovinou  $r$ .



### Příklad 8 – Řez rotačního paraboloidu v kótovaném promítání

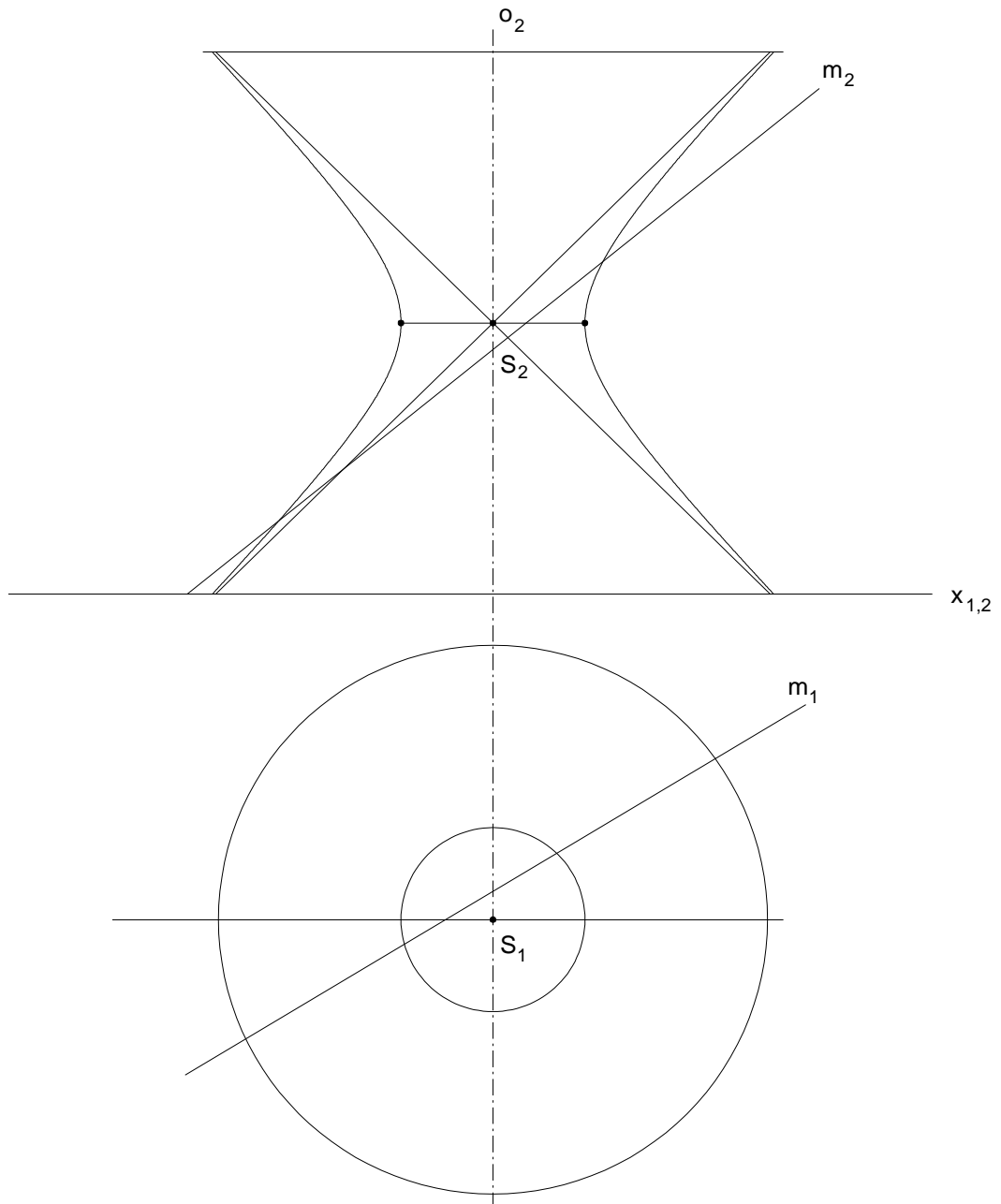
V kótovaném promítání sestrojte rotační paraboloid, jestliže je zadán jeho vrchol  $V$ , ohnisko  $F$ . Paraboloid ohraničte rovinou kolmou k ose  $o$  paraboloidu a procházející daným bodem  $O$ , který leží na ose paraboloidu. Sestrojte řez paraboloidu rovinou  $\rho$ , která je zadaná stopou a hlavní přímkou.





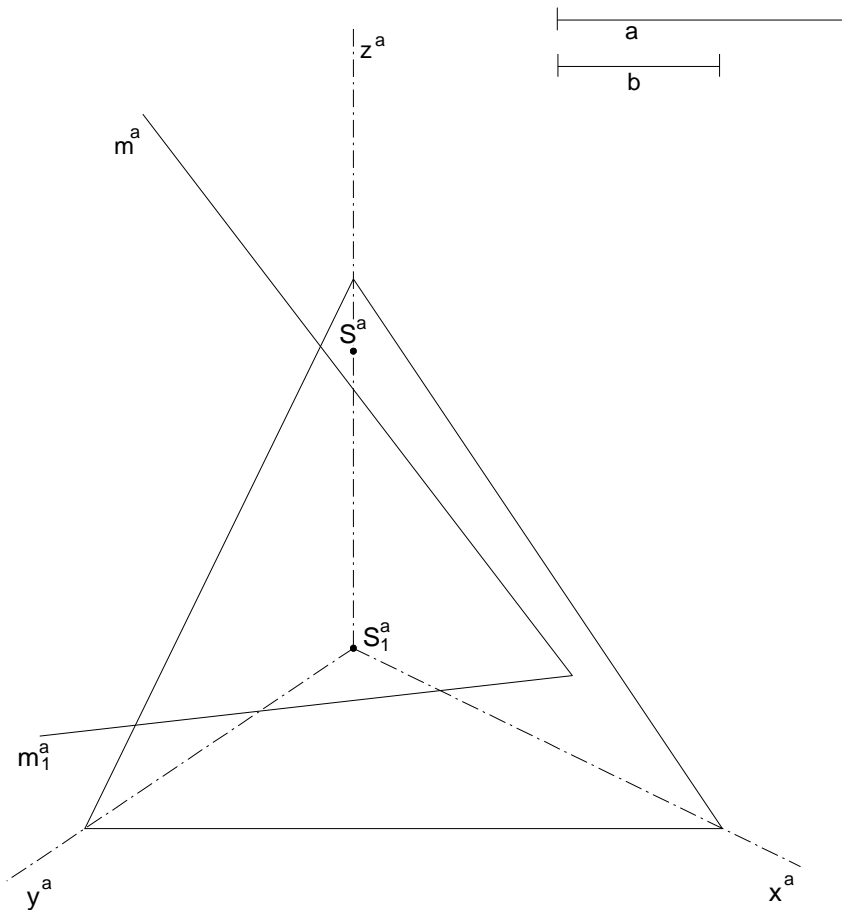
**Příklad 9 – Průsečíky přímky s jednodílným rotačním hyperboloidem, tečná rovina hyperboloidu v Mongeově promítání**

V Mongeově promítání sestrojte průsečíky přímky  $m$  s jednodílným rotačním hyperboloidem, jehož osa je kolmá k půdorysně a je zadán meridiánem. V jednom z průsečíků přímky s hyperboloidem sestrojte tečnou rovinu.



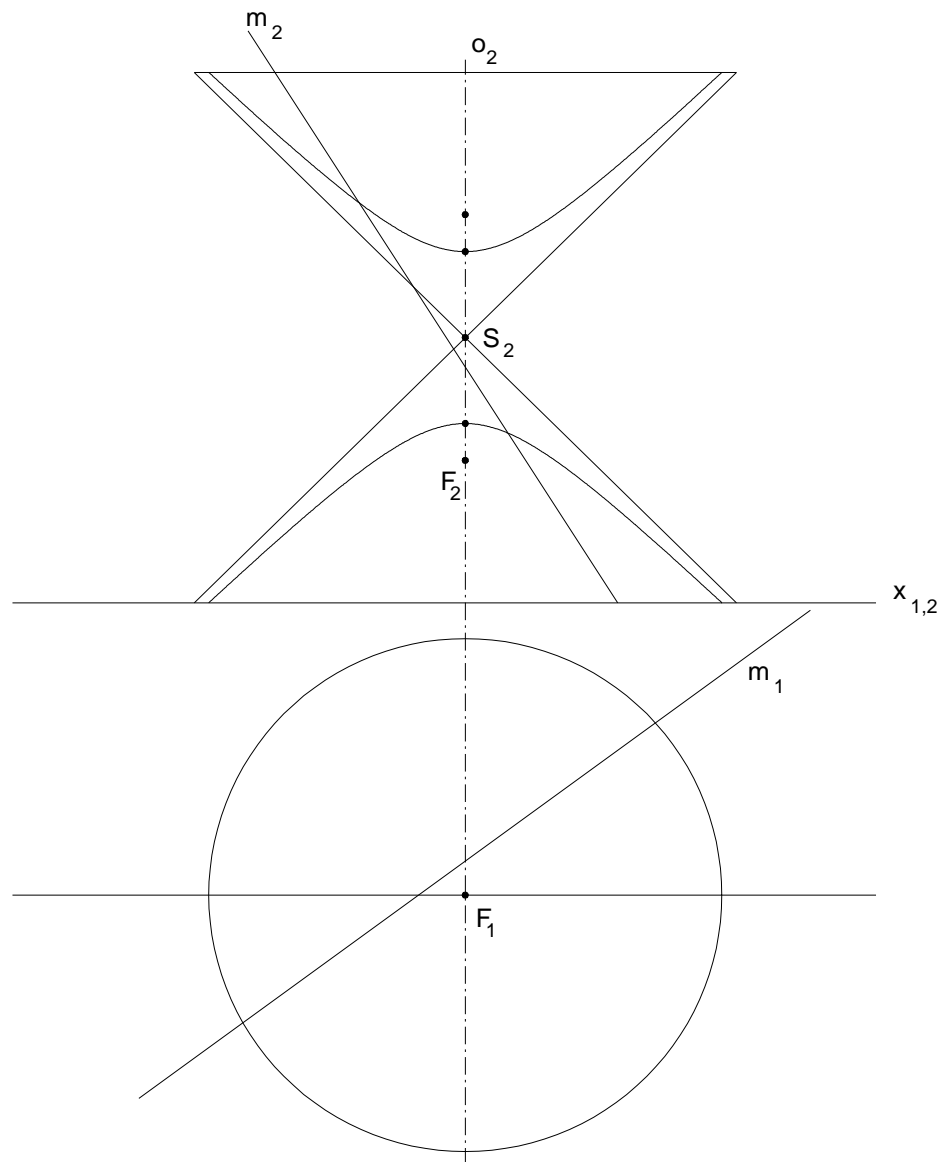
### Příklad 10 – Průsečíky přímky s rotačním elipsoidem v axonometrii

V pravouhlé axonometrii dané axonometrickým trojúhelníkem sestrojte průsečíky přímky  $m$  s protáhlým rotačním elipsoidem, který je zadán středem  $S$  a velikostí hlavní osy  $a$  a vedlejší poloosy  $b$ .



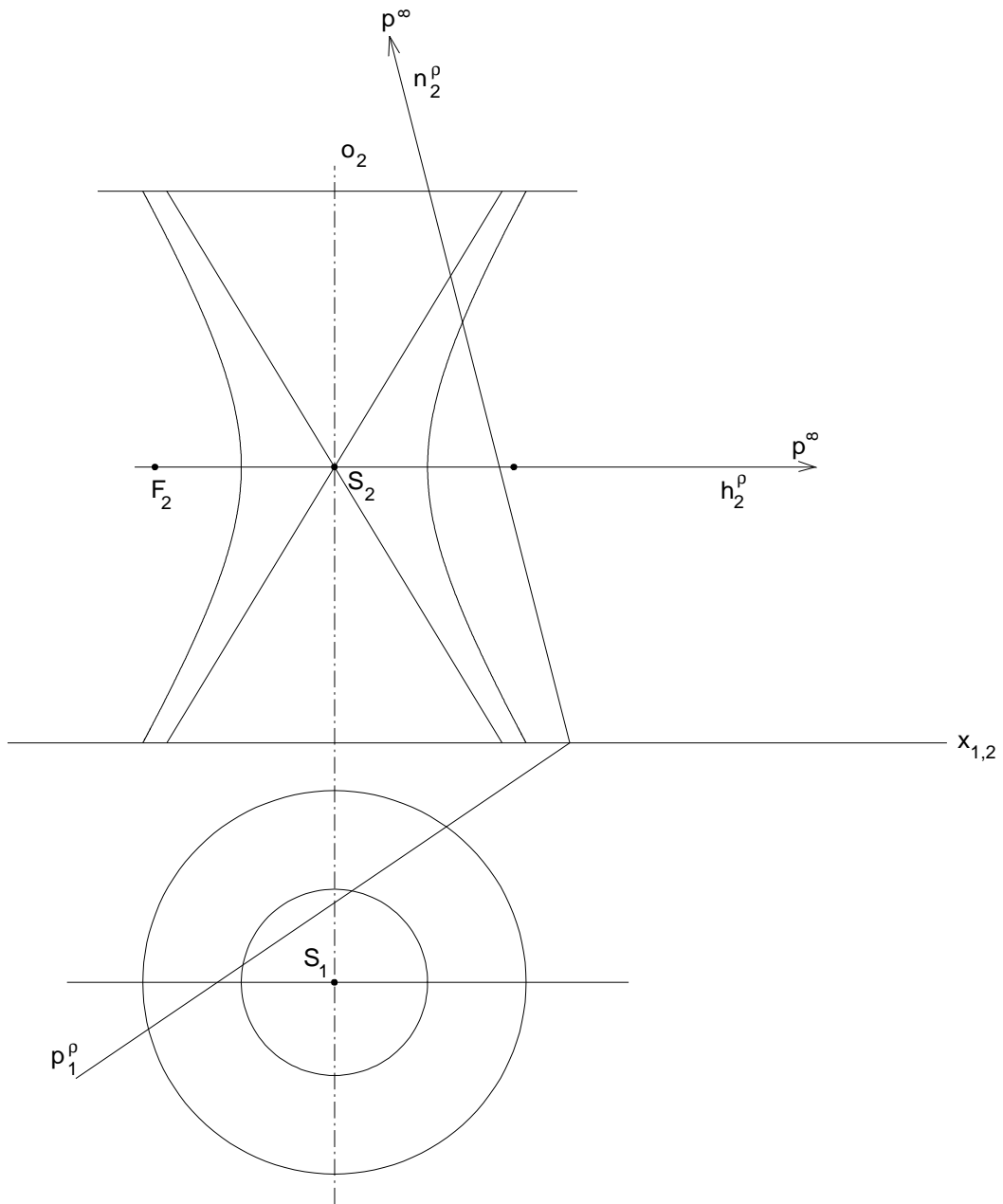
**Příklad 11 – Průsečík přímky s dvojdílným hyperboloidem, tečná rovina**

V Mongeově promítání sestrojte průsečíky přímky  $m$  s rotačním dvojdílným hyperboloidem, jehož osa  $o$  je kolmá k půdorysně a je zadán hlavním meridiánem. V jednom průsečíku sestrojte tečnou rovinu plochy.



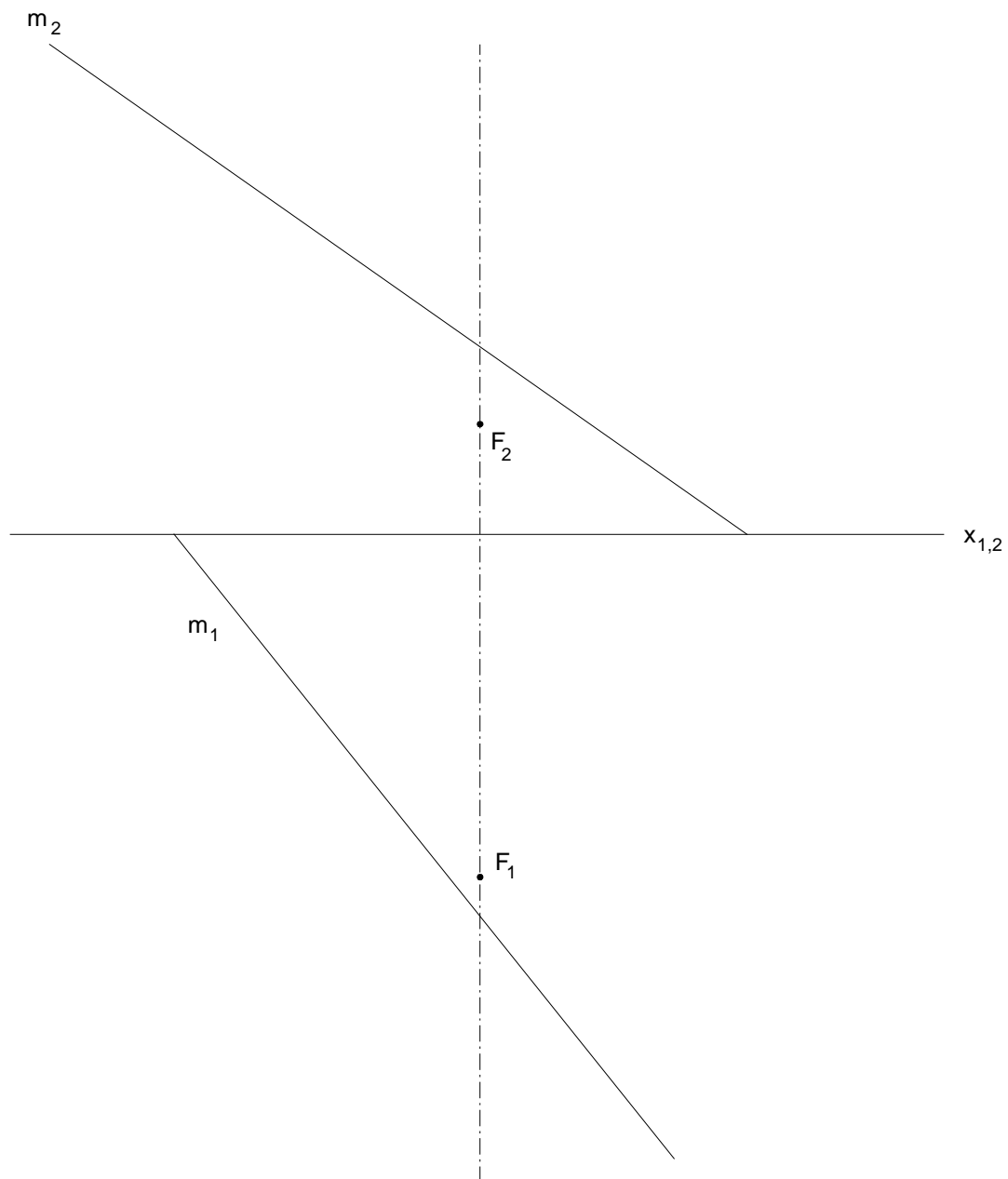
**Příklad 12 – Tečné roviny k jednodílnému hyperboloidu procházející nevlastní přímkou**

V Mongeově promítání ved'te tečné roviny procházející nevlastní přímkou  $p^\infty$ ,  $p^\infty \hat{I} \rho$  k rotačnímu jednodílnému hyperboloidu, který má osu  $o$  kolmou k půdorysně a je zadán meridiánem.



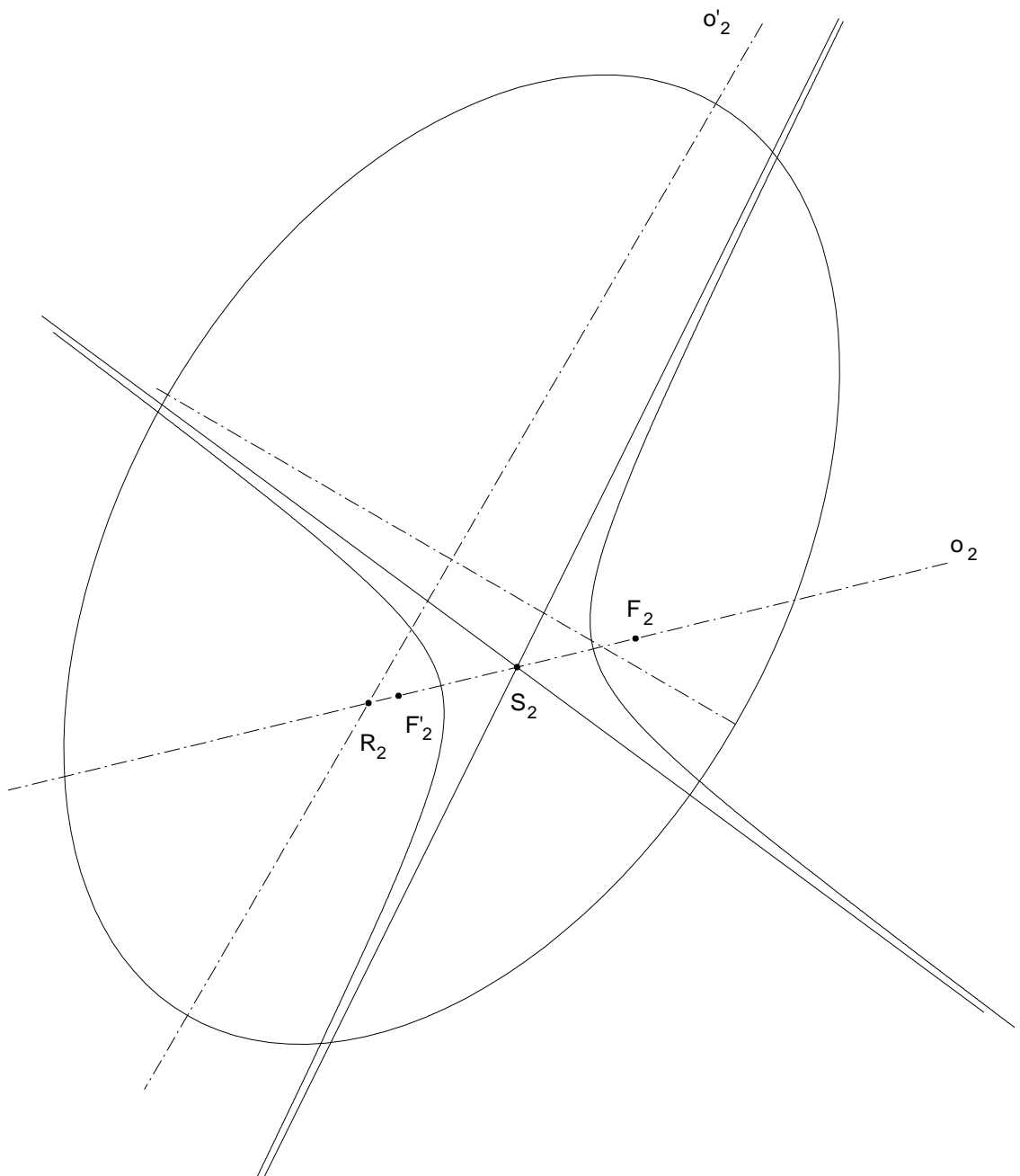
### Příklad 13 – Průsečík přímky s rotačním paraboloidem

V Mongeově promítání sestrojte na přímce  $m$  body, které mají od daného bodu  $F$  a od první průmětny stejnou vzdálenost.



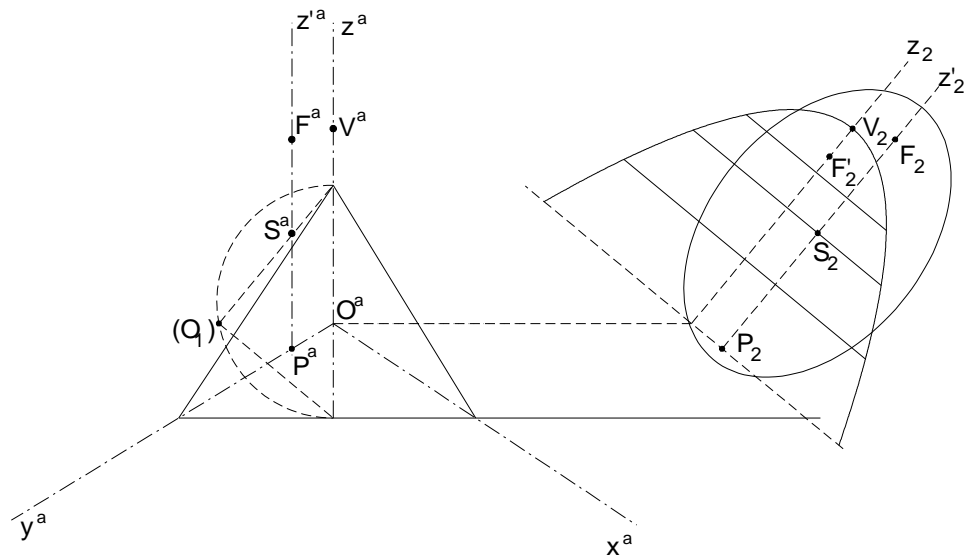
**Příklad 14 – Průnik dvojdílného hyperboloidu a elipsoidu**

V Mongeově promítání sestrojte průnik rotačního dvojdílného hyperboloidu a rotačního protáhlého elipsoidu s různoběžnými osami ležícími v nárysně.



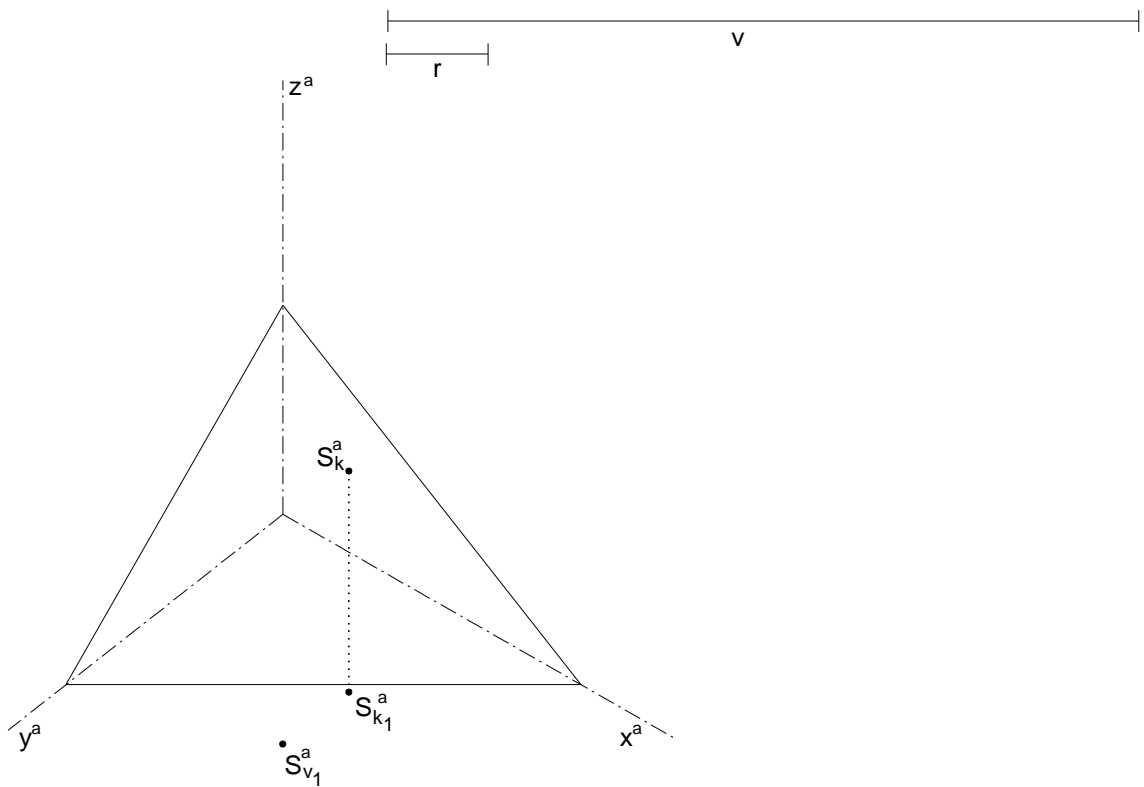
**Příklad 15 – Průnik paraboloidu a protáhlého elipsoidu v axonometrii**

V pravouhlé axonometrii dané axonometrickým trojúhelníkem sestrojte průnik paraboloidu a protáhlého elipsoidu, jejichž osy jsou vzájemně rovnoběžné a leží v bokorysně.



### Příklad 16 – Vivianiho křivka

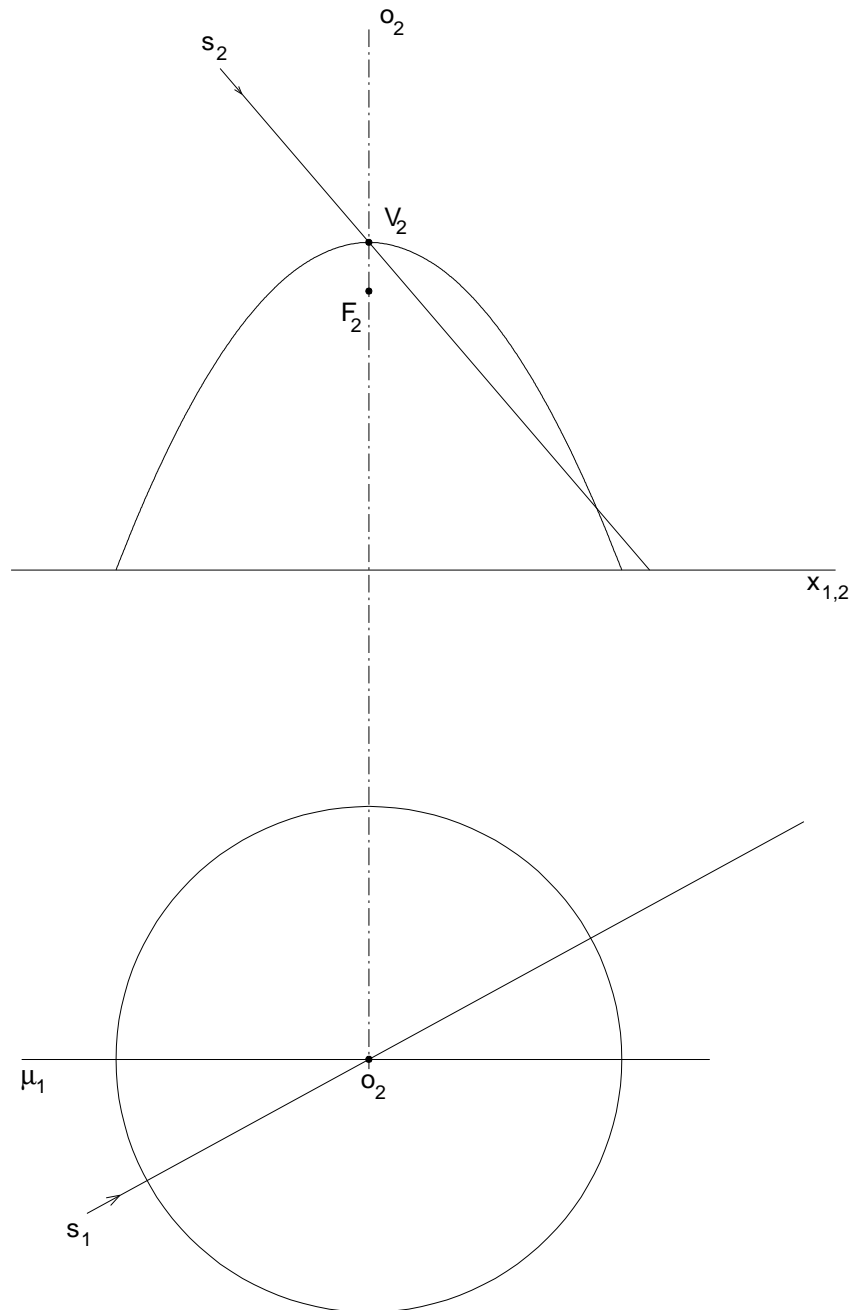
V pravoúhlé axonometrii dané axonometrickým trojúhelníkem sestrojte průnikovou křivku rotačního válce se středem podstavy  $S_v$  v půdorysně, výškou  $v$  a poloměrem podstavy  $r$  a kulové plochy se středem  $S_k$  a poloměrem  $2r$ , osa rotačního válce je v ose  $z$  a jedna z povrchových přímek rotačního válce prochází středem  $S_k$  dané kulové plochy. (Průnikovou křivkou je tzv. Vivianiho křivka).





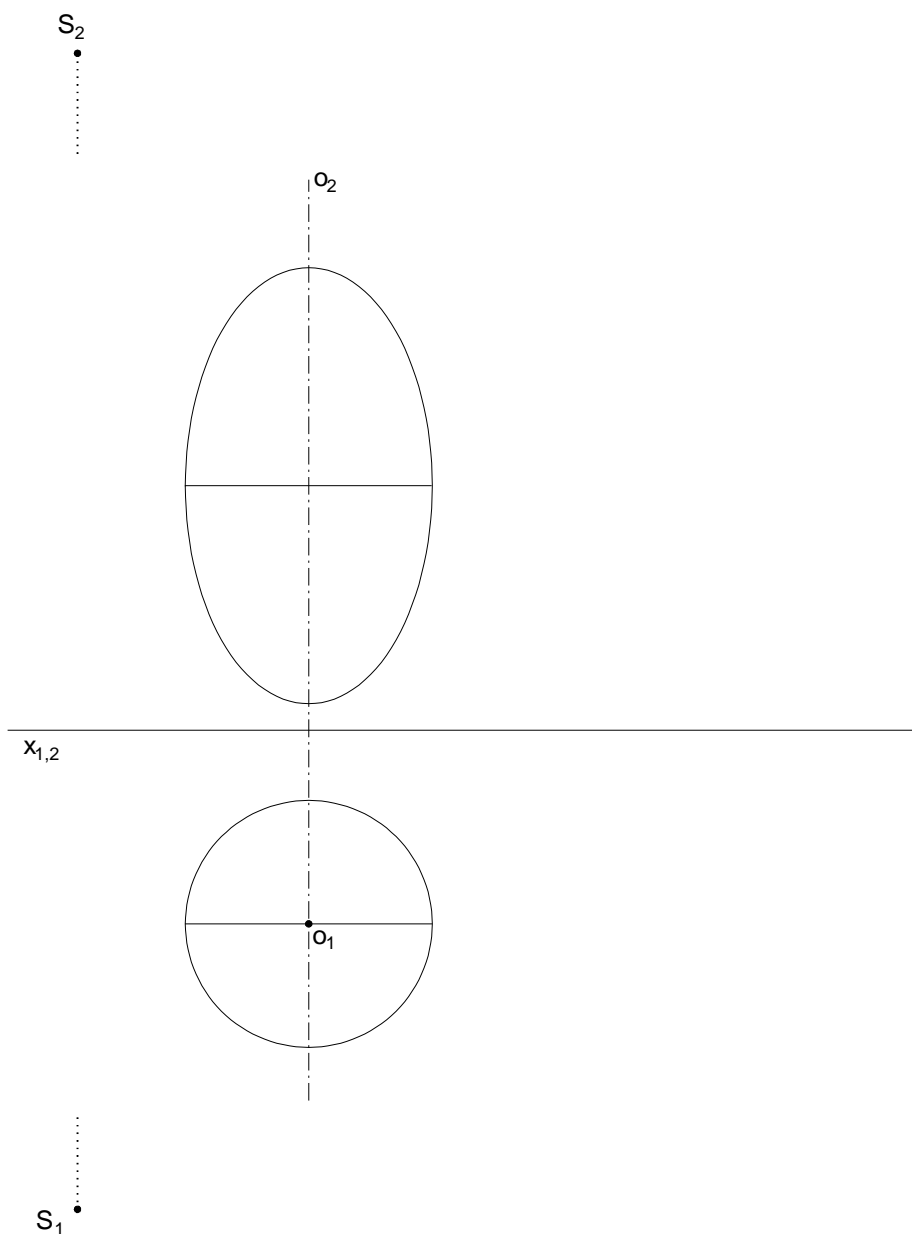
**Příklad 17 – Rovnoběžné osvětlení rotačního paraboloidu**

V Mongeově promítání zobrazte rovnoběžné osvětlení rotačního paraboloidu, jehož osa je kolmá k půdorysně. Sestrojte stín vržený do půdorysny.



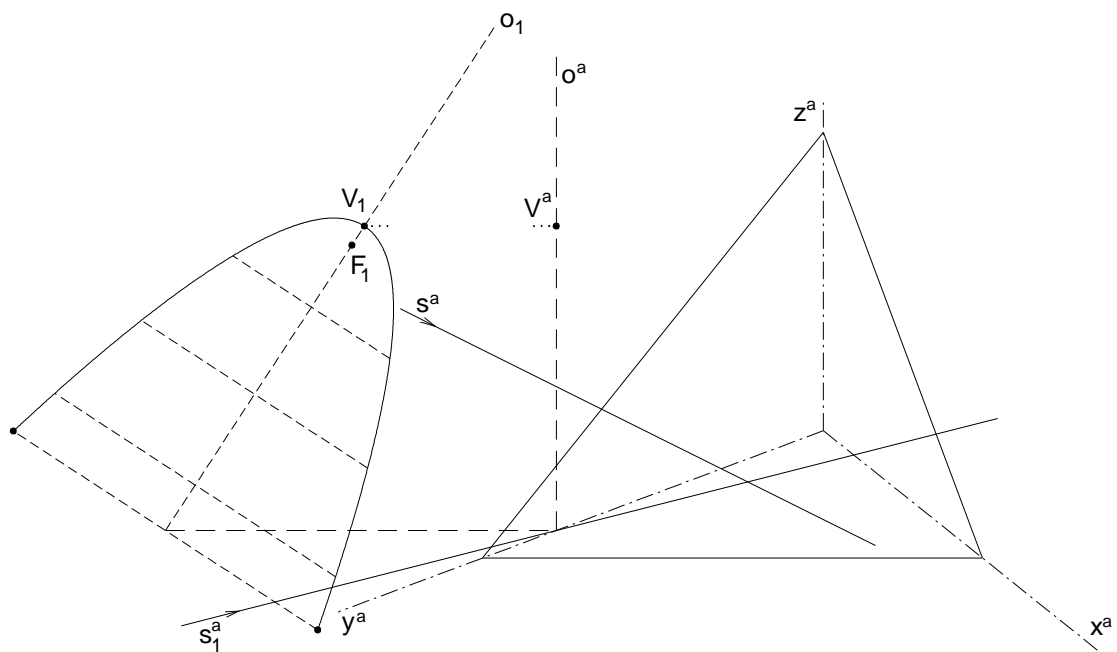
**Příklad 18 – Středové osvětlení protáhlého elipsoidu**

V Mongeově promítání zobrazte středové osvětlení rotačního protáhlého elipsoidu s osou kolmou k  $\pi$  ze středu  $S$ . Sestrojte stín vržený do půdorysny.



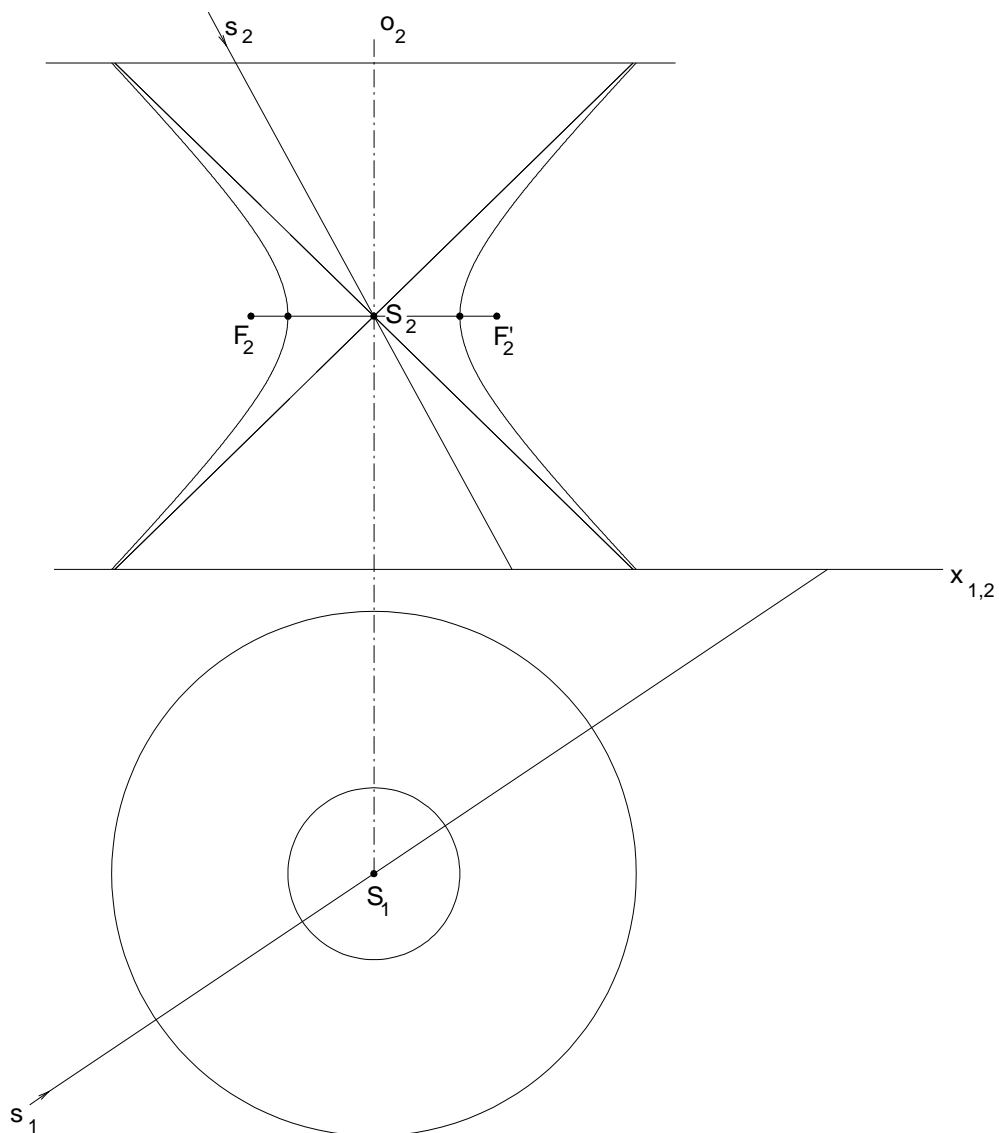
**Příklad 19 – Rovnoběžné osvětlení rotačního paraboloidu  
v axonometrii**

V pravouhlé axonometrii zadané axonometrickým trojúhelníkem sestrojte rovnoběžné osvětlení rotačního paraboloidu, jehož osa je rovnoběžná s axonometrickou osou  $z$ . Rotační paraboloid je zadán meridiánem ležícím v promítací rovině  $s$ . Sestrojte stín paraboloidu vržený do průmětny  $\pi$ .



**Příklad 20 – Rovnoběžné osvětlení jednodílného hyperboloidu**

V Mongeově promítání sestrojte rovnoběžné osvětlení rotačního jednodílného hyperboloidu, jehož osa je kolmá k  $\pi$ . Sestrojte stín vržený na průmětny.



## 6 Závěr

Cílem mé práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů na rotačních kvadrikách. V první teoretické části uvedla definice rotačních kvadrik, základní pojmy a vlastnosti. Popsala jsem základní konstrukce na rotačních kvadrikách, které jsem pak využívala při řešení příkladů.

Při studiu deskriptivní geometrie se studenti setkají většinou se základními příklady na rotačních kvadrikách, které jsou řešeny především v Mongeově promítání. Příklady v jiných projekcích nebo komplexnějšího charakteru nejsou v literatuře příliš běžné, případně je u nich jen zkrácený postup řešení a studenti nemají možnost si ověřit správnost svého řešení. Ve své diplomové práci bych proto ráda studentům nabídla možnost si prověřit své znalosti nejen na základních úlohách, ale vyzkoušet si řešení složitějších úloh nebo řešení příkladů na rotačních plochách v různých projekcích. Každý příklad obsahuje podrobně popsany postup řešení, proto je možné zadání příkladů použít jako pracovní listy k samostatnému procvičení dané problematiky a správnost řešení si ověřit v popisu konstrukce. Studenti tak mohou získat okamžitou zpětnou vazbu o správnosti svého řešení, případně snadno najít chyby, kterých se při řešení úlohy dopustili.

Řešené příklady mohou také být vhodnou pomůckou pro učitele deskriptivní geometrie. Příklady jsou rozvrženy tak, že zadání příkladů je uvedeno na samostatném listu, aby bylo možné zadání příkladů kopírovat a zadat žákům k vyřešení. Zadání příkladů lze použít k zadání domácí práce, případně písemné práce nebo ke společnému řešení úlohy.

## 7 Literatura

- [1] DOLEŽAL, M., POLÁČEK, J., TŮMA, M., *Sbírka řešených příkladů z deskriptivní a konstruktivní geometrie. Díl 5. Rotační a šroubové plochy*. 2. vyd. Ostrava: VŠB – Technická univerzita, 2003. ISBN 80-248-0408-5.
- [2] DOLEŽAL, M., POLÁČEK, J., *Základy deskriptivní a konstruktivní geometrie. Díl 5: Křivky a plochy technické praxe*. 2. vyd. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2008. ISBN 978-80-248-1803-0.
- [3] HORÁK, S., *Sbírka řešených úloh z deskriptivní geometrie, 2.díl*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966.
- [4] JAROLÍMEK, Č., PROCHÁZKA, B., *Deskriptivní geometrie pro vysoké školy technické*. 2. nezměněné vyd. Praha: Česká matice technická, 1919.
- [5] JUKLOVÁ, L., *Obecné rotační plochy*. [online]. [cit. 2012-05-01]. Dostupné z: <http://kag.upol.cz/juklova/4rocnik/ORP1.html>
- [6] JUKLOVÁ, L., *Rotační kvadriky*. [online]. [cit. 2012-05-01]. Dostupné z: <http://kag.upol.cz/juklova/4rocnik/RK1.html>
- [7] KADERÁVEK, F., KOUNOVSKÝ, J., KLÍMA, J., *Deskriptivní geometrie, díl 1*. Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1929.
- [8] KOPŘIVOVÁ, H., *Deskriptivní geometrie II*. 1. vyd. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1997. ISBN 80-01-01594-7.
- [9] MACKOVÁ, B., a kol., *Deskriptivní geometria v príkladoch*. 2.vyd. Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatury, 1964. 63-104-64.
- [10] MACHALA, F., *Rotační plochy*. 2. vyd. Olomouc: Rektorát Univerzity Palackého v Olomouci, 1992. ISBN 80-7067-169-6.
- [11] PISKA, R., MEDEK, V., *Deskriptivní geometrie II, vysokoškolská učebnice*. Praha: SNTL, 1966.
- [12] URBAN, A., *Deskriptivní geometrie I*. 3. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1982.
- [13] URBAN, A., *Deskriptivní geometrie II*. 3. vyd. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1984.
- [14] VALA, J., *Deskriptivní geometrie, část 1*. 7. vyd. Brno: Nakladatelství Vysokého učení technického, 1992. ISBN 80-214-0376-4.
- [15] VESELÝ, F., FILIP, J., *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie*. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952.

Poznámka: Literaturu, na kterou se výslovně neodkazuji v textu práce, jsem používala k popisu řešení příkladů, postupu konstrukcí a ke studiu teorie a typově podobných úloh.