

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Přírodovědecká fakulta

Katedra algebry a geometrie



## DIPLOMOVÁ PRÁCE

Zobrazení kvadrik v pravoúhlé axonometrii  
a kosoúhlém promítání

Vypracoval:  
Bc. Jiří Frnka  
M-DG

Vedoucí práce:  
RNDr. Lenka Juklová, Ph. D.  
Rok odevzdání: 2020

## Bibliografická identifikace

Autor: Bc. Jiří Frnka  
Název práce: Zobrazení kvadrik v pravoúhlé axonometrii  
a kosoúhlém promítání  
Typ práce: diplomová  
Katedra: Katedra algebry a geometrie  
Vedoucí práce: RNDr. Lenka Juklová, Ph. D.  
Rok obhajoby práce: 2020  
Počet stran: 61  
Počet příloh: 14  
Jazyk: čeština

## Bibliographical identification

Author: Bc. Jiří Frnka  
Title: Projection of quadrics in orthogonal axonometry  
and oblique projection  
Type of thesis: master  
Department: Department of Algebra and Geometry  
Supervisor: RNDr. Lenka Juklová, Ph. D.  
The year of presentation: 2020  
Number of pages: 61  
Number of appendices: 14  
Language: czech

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně pod vedením RNDr. Lenky Juklové, Ph. D. a že jsem uvedl v seznamu literatury všechny použité zdroje.

V Olomouci dne 31. 7. 2020

.....

### **Poděkování**

Rád bych poděkoval vedoucí mé práce, RNDr. Lence Juklové, Ph. D., za odborné rady, trpělivost a za její čas, který mi věnovala.



# Obsah

Úvod . . . . .	6
1 Definice kvadrik a jejich vlastnosti . . . . .	7
1.1 Rotační plochy . . . . .	7
1.2 Rotační kvadriky . . . . .	8
1.3 Kvadriky . . . . .	14
1.4 Projektivní vlastnosti kvadrik . . . . .	21
2 Osvětlení . . . . .	23
3 Pomocné konstrukce . . . . .	25
3.1 Pravoúhlá axonometrie . . . . .	25
3.2 Kosoúhlé promítání . . . . .	28
4 Zobrazení kvadrik v pravoúhlé axonometrii . . . . .	32
5 Zobrazení kvadrik v kosoúhlém promítání . . . . .	46
Závěr . . . . .	60
Použitá literatura . . . . .	61
Přílohy . . . . .	62

## Úvod

Tato diplomová práce se zabývá zobrazením kvadrik v pravoúhlé axonometrii a kosoúhlém promítání. Hlavním cílem práce je seznámit čtenáře se zobrazením kvadrik v pravoúhlé axonometrii a kosoúhlém promítání.

Od čtenáře se očekává znalost uvedených zobrazovacích metod a rovnoběžného osvětlení.

Tato práce je rozdělena na pět kapitol. V první kapitole definujeme kvadriky a seznámíme se s jejich základními vlastnostmi. Druhá kapitola se zaměřuje na shrnutí poznatků o osvětlení. Ve třetí kapitole uvedeme několik často používaných pomocných konstrukcí. Čtvrtá a pátá kapitola obsahuje řešené příklady zobrazení kvadrik v pravoúhlé axonometrii a kosoúhlém promítání.

Obrazový materiál je narýsován v programu AutoCAD a text je vysázen pomocí programu T<sub>E</sub>X.

# 1 Definice kvadrik a jejich vlastnosti

V první kapitole se zaměříme na základní poznatky z teorie rotačních ploch, definujeme rotační a obecné kvadriky a shrneme jejich základní vlastnosti.

## 1.1 Rotační plochy

- Necht' je dána prostorová křivka  $k$ , která není částí osy  $o$  ani žádné trajektorie při rotaci kolem  $o$ . Rotací křivky  $k$  kolem osy  $o$  vzniká *rotační plocha*  $\Phi(o, k)$ . Křivku  $k$  nazýváme *tvořící křivka*.
- Bod  $A$  křivky  $k$  opíše při rotaci kružnici, kterou nazýváme *rovnoběžka*.
- Rovnoběžku  $r$ , která vznikne rotací bodu  $R$  tvořící křivky  $k$ , jehož vzdálenost od osy je v jeho okolí největší, nazýváme *rovníková rovnoběžka (rovník)*.
- Rovnoběžku  $h$ , která vznikne rotací bodu  $H$  tvořící křivky  $k$ , jehož vzdálenost od osy je v jeho okolí nejmenší, nazýváme *hrdelní rovnoběžka (hrdlo)*.
- Krajní body křivky  $k$  vytvoří rotací rovnoběžky, které nazýváme *hraniční rovnoběžky*.
- Pro všechny křivky  $m$ , které protínají všechny rovnoběžky rotační plochy a obsahují všechny body plochy ležící na ose  $o$  platí, že při rotaci kolem osy  $o$  vytvoří tutéž rotační plochu. Rotační plochu lze tedy zadat i rovinnou křivkou. Nejčastěji určujeme rotační plochu rovinnou křivkou  $m$  ležící v rovině obsahující osu  $o$ .
- Tvořící křivka  $m$  rotační plochy ležící v rovině obsahující osu  $o$  se nazývá *meridián*.
- Rotací kuželosečky  $m$  kolem osy  $o$  vznikne rotační plocha  $\Phi$ , kterou nazýváme *rotační kvatika* a značíme ji  $\Phi(o, m)$ .

- Jeden meridián přechází při rotaci v druhý, jsou tedy souměrné podle osy. Rotační plochu lze zadat pomocí části meridiánu ležící v jedné polorovině, která se nazývá *polomeridián*.
- Tečna  $t$  v bodě  $A$  meridiánu  $m$  opíše při rotaci kolem osy  $o$  přímkovou rotační plochu  $\Omega$ . Plocha  $\Omega$  se dotýká rotační plochy  $\Phi$  podél rovnoběžky  $a$  bodu  $A$  a nazývá se *dotyková rotační kuželová plocha*.
- Normála  $n$  tečny  $t$  v bodě  $A$  meridiánu  $m$  opíše při rotaci kolem osy  $o$  přímkovou rotační plochu  $\Omega'$ , která se nazývá *normálová rotační kuželová plocha*.
- Na ploše mohou existovat tři typy bodů, body *eliptické (kruhové)*, *parabolické* a *hyperbolické*. Tečná rovina v eliptickém (kruhovém) bodě má s plochou společný pouze bod dotyku. Tečná rovina v parabolickém bodě se plochy dotýká podél celé přímky. Tečná rovina v hyperbolickém bodě protíná plochu v křivce.

## 1.2 Rotační kvadriky

Rotační kvadriky vznikají rotací kuželosečky kolem přímky, kterou ztotožníme s její osou, jsou tedy speciálním případem jak kvadrik, tak i rotačních ploch. Všechny kvadriky jsou plochy druhého stupně. Většinu kvadrik budeme uvažovat v rozšířeném Eukleidovském prostoru  $\overline{\mathcal{E}}_3$ . Typ kvadriky budeme určovat podle typu rotující kuželosečky. Je tedy zřejmé, že můžeme kvadriky, stejně jako kuželosečky, rozdělit na regulární a singulární. Necháme-li rotovat regulární kuželosečku kolem své osy, dostaneme regulární rotační kvadriku a rotací singulární kuželosečky kolem svojí osy vznikne singulární kvadrika. V této práci se budeme zabývat především regulárními kvadrikami.

Rotační kvadriky dále dělíme podle toho, která její osa je osou rotace. Průsečíky osy rotace s kvadrikou se nazývají vrcholy kvadriky.

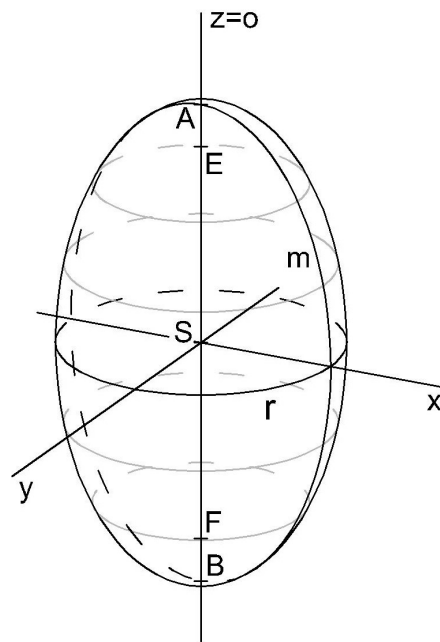
Je-li kuželosečka, která rotuje kolem své osy středová, je i rotační kvadrika středová a tento střed odpovídá středu dané kuželosečky.

Řezem rotační kvadriky  $\Phi$  rovinou  $\rho$  je kuželosečka  $q$ . Typ řezu  $q$  určíme podle polohy nevlastní přímky  $u^\infty$  roviny  $\rho$  s řezem  $l^\infty$  kvadriky  $\Phi$  nevlastní rovinou  $\omega^\infty$ . *Hlavním řezem* nazýváme řez kvadriky  $\Phi$  rovinou  $\sigma$  kolmou k její ose.

### Rotační elipsoid

Rotací elipsy, která je určena rovnicí  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , kolem své osy  $z$  vznikne rotační elipsoid. Takto vzniklý elipsoid je určen rovnicí

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



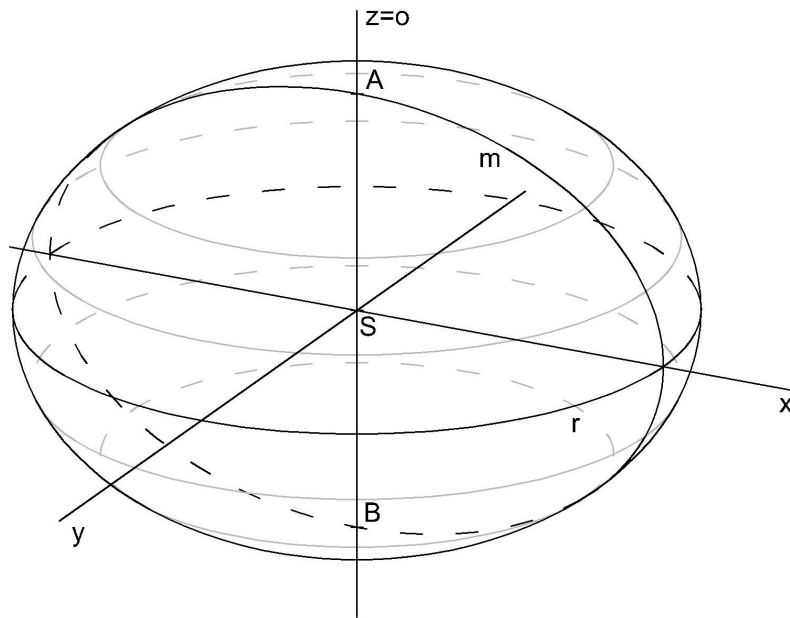
Obr. 1.1 Protáhlý rotační elipsoid

Je-li osou rotace hlavní osa elipsy, platí  $0 < a < c$  a takto vzniklý elipsoid nazýváme *protáhlý* (Obr. 1.1). Rotuje-li elipsa kolem své vedlejší osy, vznikne elipsoid *zploštělý* (Obr. 1.2) a platí  $0 < c < a$ . Oba typy rotačních elipsoidů patří mezi středové kvadriky.

Oba elipsoidy jsou bodové středové kvadriky, které mají dva vr-

choly. Jeho průnik s nevlastní rovinou  $\omega^\infty$  je prázdná množina. Řezem rotačního elipsoidu rovinou je kuželosečka typu elipsa.

Při rotaci tvořící elipsy kolem své hlavní osy leží její ohniska  $E, F$  na ose rotace a jsou společné pro všechny meridiány, tedy pro rotační protáhlý elipsoid platí, že je to množina všech bodů v prostoru, jejichž součet vzdáleností od dvou pevně daných různých bodů  $E, F$  je konstantní a je roven dvojnásobku velikosti hlavní poloosy. Pro zploštělý elipsoid tato vlastnost neplatí, protože ohniska při rotaci opíší kružnici.



Obr. 1.2 Zploštělý rotační elipsoid

### Rotační paraboloid

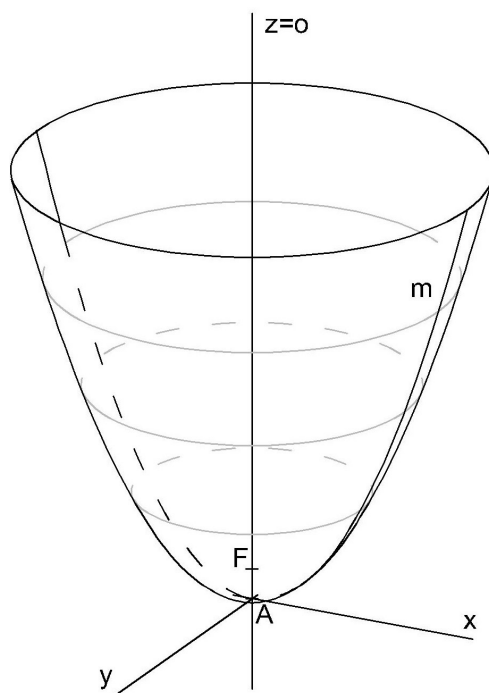
Rotuje-li kolem své osy  $z$  parabola, jejíž rovnice je  $y^2 = 2pz$ , vznikne paraboloid, který je určen rovnicí

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Rotační paraboloid (Obr. 1.3) je bodová nestředová kvadrika, má jeden vrchol. Paraboloid se dotýká nevlastní roviny  $\omega^\infty$  v nevlastním bodě  $O^\infty$  a tento bod je pólem nevlastní roviny. Řezem rotačního paraboloidu rovinou je parabola nebo kuželosečka typu elipsa. Parabola

vznikne řezem rotačního paraboloidu rovinou rovnoběžnou s osou  $o$ . Všechny paraboly, které vzniknou řezem rotačního paraboloidu jsou shodné.

Rotací řídicí přímky tvořící paraboly vznikne rovina  $\sigma$ . Ohnisko  $F$  tvořící paraboly je ohniskem všech meridiánů rotačního paraboloidu. Rotační paraboloid je tedy množinou všech bodů v prostoru, jejichž vzdálenost od daného bodu  $F$  a od dané roviny  $\sigma$  je konstantní.



Obr. 1.3 Rotační paraboloid

### Rotační hyperboloid

Rotuje-li hyperbola, která je určena rovnicí  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$ , kolem své osy  $z$ , vznikne rotační hyperboloid, jehož rovnice je dána

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1.$$

Oba hyperboloidy mají některé vlastnosti společné, jsou to středové kvadriky. Průnik hyperboloidu s nevlastní rovinou  $\omega^\infty$  je nevlastní kuželosečka  $l^\infty$ , která vznikne rotací bodů  $U^\infty, V^\infty$ .

Rotací asymptot hyperboly  $u, v$  vznikne asymptotická rotační kuželová plocha  $\Omega$ . Asymptoty  $u, v$  se dotýkají tvořící hyperboly v nevlastních bodech  $U^\infty, V^\infty$ . Pro asymptotickou kuželovou plochu platí, že je dotykovou plochou rotačního hyperboloidu opsanou z jeho středu podél nevlastní kuželosečky  $l^\infty$ . Každá rovina protíná hyperboloid a jeho asymptotickou rotační kuželovou plochu v homotetických kuželosečkách.

Řezem rotačního hyperboloidu rovinou  $\rho$  mohou být všechny tři typy kuželoseček. Rovina  $\rho$  protne nevlastní rovinu  $\omega^\infty$  v nevlastní přímce  $s^\infty$ . Řezem hyperboloidu rovinou  $\rho$  je kuželosečka typu elipsa, je-li průnik nevlastní kuželosečky  $l^\infty$  hyperboloidu s nevlastní přímkou  $s^\infty$  roviny  $\rho$  prázdná množina. Řezem hyperboloidu rovinou  $\rho$  je kuželosečka typu parabola, jestliže se nevlastní přímka  $s^\infty$  roviny  $\rho$  dotýká nevlastní kuželosečky  $l^\infty$  hyperboloidu v nevlastním bodě  $P^\infty$ . Řezem hyperboloidu rovinou  $\rho$  je kuželosečka typu hyperbola, je-li průnik nevlastní kuželosečky  $l^\infty$  hyperboloidu s nevlastní přímkou  $s^\infty$  roviny  $\rho$  dvoubodová množina  $P^\infty, Q^\infty$ .

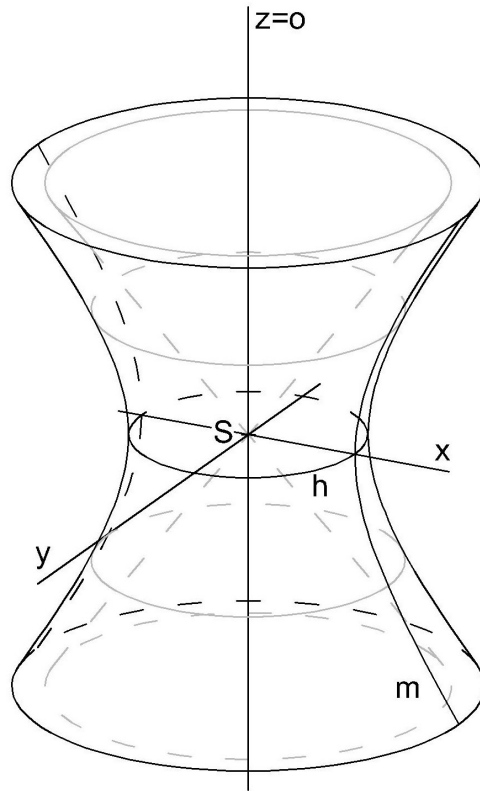
#### *Jednodílný rotační hyperboloid*

Rotací hyperboly kolem své vedlejší osy vznikne jednodílný rotační hyperboloid (Obr. 1.4), který je dán rovnicí

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Osa  $o$  rotace neprotíná jednodílný rotační hyperboloid v žádném bodě. Jednodílný rotační hyperboloid je přímkovou a zborcenou kvadrikou se dvěma soustavami přímek. Jednodílný rotační hyperboloid můžeme určit osou  $o$  a přímkou  $a$  s ní mimoběžnou. Rotací přímky  $a$  kolem osy  $o$  vznikne množina přímek rotačního jednodílného hyperboloidu, kterou nazýváme *regulus*. Přímka  $n$ , která je rovnoběžná s přímkou  $a$  a pro jejíž vzdálenost od osy platí  $|ao| = |no|$ , je také s osou  $o$  mimoběžná a je přímkou plochy. Množinu přímek, která vznikne rotací





Obr. 1.4 Jednodílný rotační hyperboloid

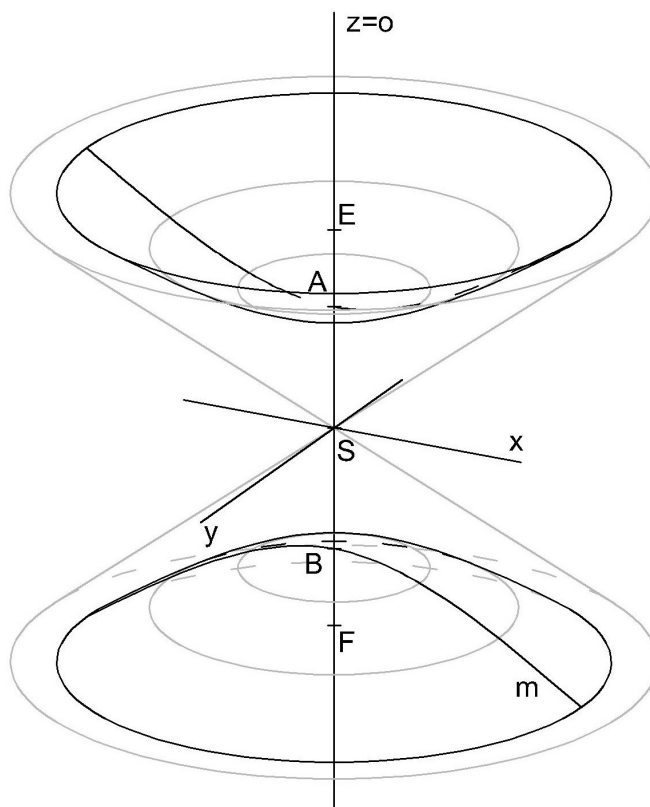
přímky  $n$  kolem osy  $o$ , nazýváme *druhý regulus*. Všechny přímky jednoho regulu jsou navzájem mimoběžné. Pro každé dvě přímky různých regulů platí, že se protnou v bodě plochy  $P$ . Pro všechny body  $P$  jednodílného rotačního hyperboloidu tedy platí, že jím prochází právě dvě přímky plochy. Tyto přímky tvoří tečnou rovinu  $\tau$  v bodě  $P$  a zároveň jsou řezem hyperboloidu rovinou  $\tau$ . Přímkami  $a, n$  je určena tečná rovina  $\alpha$  v nevlastním bodě  $A^\infty$ . Jednodílný hyperboloid a asymptotická kuželová plocha se dotýkají podél nevlastní kuželosečky  $l^\infty$ . V bodě  $A^\infty$  mají tedy společnou tečnou rovinu  $\alpha$ , která se dotýká asymptotické kuželové plochy podél přímky  $a'$  rovnoběžné s přímkami  $a, n$ . Rovinu  $\alpha$  nazýváme *asymptotická rovina*.

#### *Dvojdílný rotační hyperboloid*

Rotací hyperboly kolem své hlavní osy vznikne dvojdílný rotační

hyperboloid (Obr. 1.5), který je dán rovnicí

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



Obr. 1.5 Dvojdílný rotační hyperboloid

Dvojdílný rotační hyperboloid je bodovou kvadrikou. Má dva vrcholy. Při rotaci leží ohniska  $E, F$  tvořící hyperboly na ose, dvojdílný rotační hyperboloid je tedy množinou všech bodů v prostoru, které mají od dvou různých pevných bodů  $E, F$  konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností, která se rovná dvojnásobku velikosti hlavní poloosy tvořící hyperboly.

### 1.3 Kvadriky

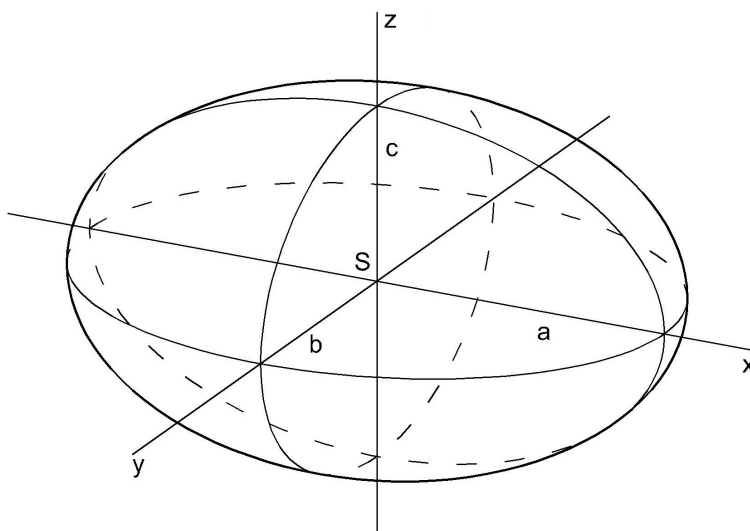
Ve většině případů můžeme kolmo afinní transformací přejít od rotačních kvadrik ke kvadrikám obecným. Afinní transformací se základní

vlastnosti nemění, proto budeme vycházet z vlastností rotačních kvadrik. Zabývat se budeme především kvadrikami regulárními, ale zmíníme se i o některých singulárních kvadrikách.

## Elipsoid

*Elipsoid* (Obr 1.6) s parametry  $a, b, c$  je dán obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



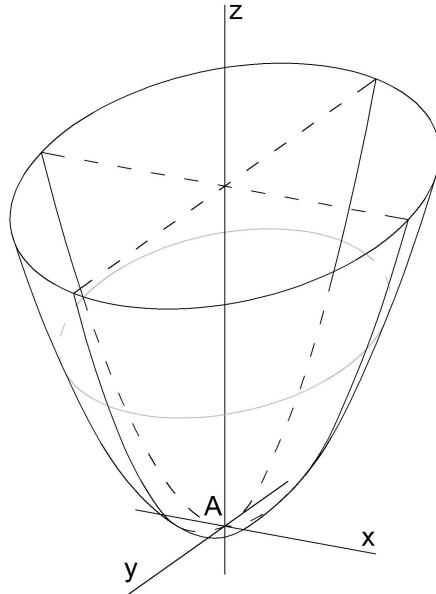
Obr. 1.6 Elipsoid

Středem takto zadaného elipsoidu je střed soustavy souřadné. Osy elipsoidu jsou osy soustavy souřadné. Jsou-li velikosti dvou os stejné, elipsoid je rotační. Jsou-li velikosti všech tří os stejné je takto určenou kvadrikou kulová plocha. Všechny řezy elipsoidu rovinou jsou kuželosečky typu elipsa, tedy i hlavními řezy budou kuželosečky typu elipsa. Elipsoid má s nevlastní rovinou  $\omega^\infty$  prázdný průnik.

## Eliptický paraboloid

*Eliptický paraboloid* (Obr 1.7) s parametry  $p, q$  je dán obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$



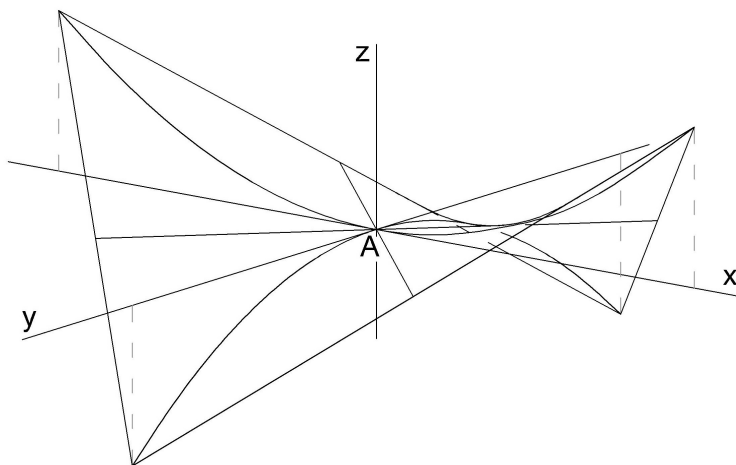
Obr. 1.7 Eliptický paraboloid

Eliptický paraboloid je nestředovou kvadrikou. Je-li  $p = q$ , jedná se o rotační paraboloid. Osou takto zadaného eliptického paraboloidu je souřadnicová osa  $z$  a jeho vrchol leží v počátku soustavy souřadné. Řezem eliptického paraboloidu rovinou může být buď kuželosečka typu elipsa, nebo typu parabola. Hlavním řezem rovinou kolmou k ose  $x$  nebo ose  $y$  je parabola s rovnicí  $x^2 = 2pz$ , resp.  $y^2 = 2qz$ . Hlavním řezem rovinou kolmou k ose  $z$  je kuželosečka typu elipsa. Eliptický paraboloid se dotýká nevlastní roviny  $\omega^\infty$  v nevlastním bodě  $O^\infty$ . Bod  $O^\infty$  je průsečík osy eliptického paraboloidu s nevlastní rovinou  $\omega^\infty$ .

### Hyperbolický paraboloid

*Hyperbolický paraboloid* (Obr 1.8) s parametry  $p, q$  je dán obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z.$$



Obr. 1.8 Hyperbolický paraboloid

Hyperbolický paraboloid je nestředovou kvadrikou. Osy daného hyperbolického paraboloidu jsou osy soustavy souřadné  $x, y, z$ . Vrchol takto zadaného hyperbolického paraboloidu je střed soustavy souřadné. Hyperbolický paraboloid je přímková a zborcená kvadrika. Má dva reguly přímek a každým jeho bodem prochází dvě přímky různých regulů. Hyperbolický paraboloid má dvojici řídicích rovin a s každou z nich jsou rovnoběžné přímky jednoho regulu.

Řezem hyperbolického paraboloidu rovinou je kuželosečka typu parabola nebo kuželosečka typu hyperbola. Hlavním řezem rovinou kolmou k ose  $x$  nebo ose  $y$  je parabola s rovnicí  $x^2 = 2pz$ , resp.  $y^2 = -2qz$ . Řezy hyperbolického paraboloidu rovinami kolnými k ose  $x$  resp. ose  $y$  jsou shodné paraboly. Hlavním řezem rovinou kolmou k ose  $z$  je kuželosečka typu hyperbola.

Je-li  $p = q$ , jsou řídicí roviny navzájem kolmé a takto daný hyperbolický paraboloid nazýváme *rovnoosý* nebo *ortogonální*.

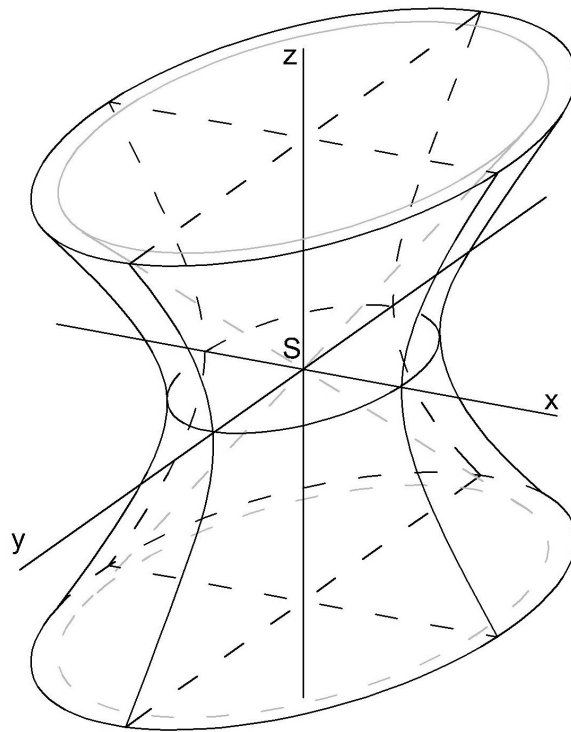
Hyperbolický paraboloid lze zadat také pomocí dvou parabol, které leží v navzájem kolmých rovinách. Průsečnice těchto rovin je osou obou parabol. Ohniska řídicích parabol leží v opačných polorovinách. Hyperbolický paraboloid vznikne pohybem jedné paraboly po druhé pevně

dané parabole tak, že vrchol jedné paraboly opisuje druhou parabolu a osy parabol zůstávají rovnoběžné.

### Jednodílný hyperboloid

*Jednodílný hyperboloid* (Obr 1.9) s parametry  $a, b, c$  je dán obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Obr. 1.9 Jednodílný hyperboloid

Jednodílný hyperboloid je středovou kvadrikou a střed takto zadaného hyperboloidu je střed soustavy souřadné. Osy daného hyperboloidu jsou osy soustavy souřadné  $x, y, z$ . Je-li  $a = b$ , jedná se o rotační jednodílný hyperboloid. Jednodílný hyperboloid je přímková a zborcená plocha. Má dva reguly přímek a každým jeho bodem prochází dvě přímky různých regulů. Průnik hyperboloidu s nevlastní rovinou  $\omega^\infty$  je nevlastní kuželosečka  $l^\infty$ , podél které se jednodílného hyperboloidu

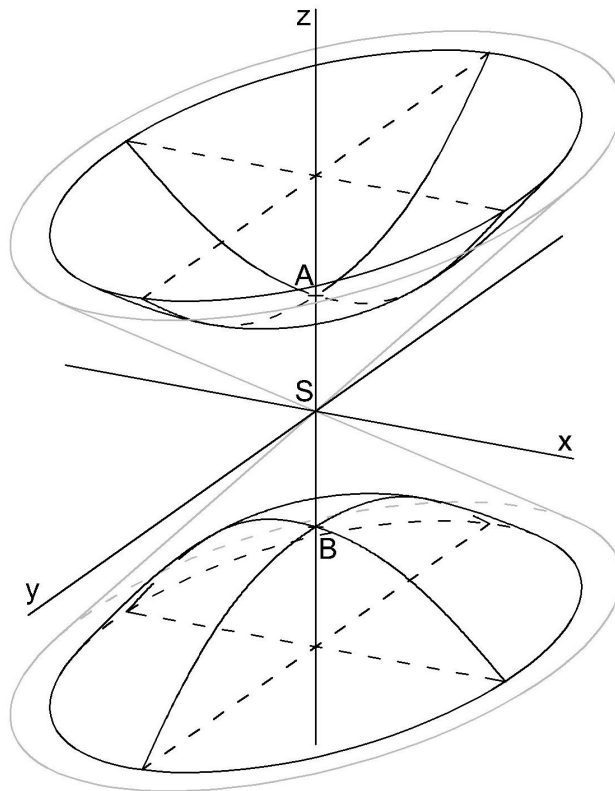
dotýká asymptotická kuželová plocha.

Řezem jednodílného hyperboloidu rovinou můžou být všechny tři typy kuželoseček. Hlavním řezem kolmým k ose  $z$  je elipsa, dalšími dvěma hlavními řezy jsou kuželosečky typu hyperbola. Řezem jednodílného hyperboloidu asymptotickou rovinou je dvojice rovnoběžných přímk.

### Dvojdílný hyperboloid

*Dvojdílný hyperboloid* (Obr 1.10) s parametry  $a, b, c$  je dán obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



Obr. 1.10 Dvojdílný hyperboloid

Dvojdílný hyperboloid je středovou kvadrikou a střed takto zada-

ného hyperboloidu je střed soustavy souřadné. Osy daného hyperboloidu jsou osy soustavy souřadné  $x, y, z$ . Je-li  $a = b$ , jedná se o rotační dvojdílný hyperboloid. Průnik hyperboloidu s nevlastní rovinou  $\omega^\infty$  je nevlastní kuželosečka  $l^\infty$ , podél které se dvojdílného hyperboloidu dotýká asymptotická kuželová plocha.

Řezem dvojdílného hyperboloidu rovinou můžou být všechny tři typy kuželoseček. Hlavním řezem kolmým k ose  $z$  je kuželosečka typu elipsa, dalšími dvěma hlavními řezy jsou hyperboly.

### Kuželová plocha

*Kuželová plocha* s parametry  $a, b, c$  je dána obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Kuželová plocha je singulární středovou kvadrikou a střed takto zadané kuželové plochy leží v počátku soustavy souřadné. Je-li  $a = b$ , jedná se o rotační kuželovou plochu. Střed kuželové plochy je zároveň její vrchol, který je její jediný singulární bod. Kuželová plocha je plocha přímková i rozvinutelná, tzn. že lze rozvinout do roviny. Řezem kuželové plochy rovinou můžou být všechny tři typy kuželoseček.

### Válcová plocha

Typ válcové plochy určíme podle řídící kuželosečky. Dělíme je tedy na *eliptickou, parabolickou a hyperbolickou*. Všechny tři typy válcových ploch jsou přímkové a rozvinutelné plochy. Řezem může být přímka, dvojice rovnoběžných přímek nebo kuželosečka stejného typu jako typ řídící kuželosečky příslušné válcové plochy. Eliptická válcová plocha protíná nevlastní rovinu  $\omega^\infty$  v jediném bodě. Parabolická válcová plocha protíná nevlastní rovinu  $\omega^\infty$  v nevlastní přímce. Hyperbolická válcová plocha protíná nevlastní rovinu  $\omega^\infty$  v singulární kuželosečce tvořené dvěma reálnými přímkami.

Další neprázdné singulární kvadriky jsou dvojice různoběžných ro-



vin, dvojice rovnoběžných rovin, rovina, přímka a jednobodová množina. Těmi se v tomto textu podrobněji zabývat nebudeme.

#### 1.4 Projektivní vlastnosti kvadrik

Uvažujeme rozšířený Eukleidovský prostor  $\overline{\mathcal{E}}_3$ . Nechť je dána regulární kvadrika  $\Phi$ .

- Mějme bod  $P \notin \Phi$ . Přímka procházející bodem  $P$  protne kvadriku  $\Phi$  v bodech  $X, Y$ . Bod  $P'$ , pro který platí, že  $(XYPP') = -1$  (tzn. že se dvojice bodů  $X, Y$  a  $P, P'$  harmonicky oddělují) je *polárně sdružený* s bodem  $P$  vzhledem ke kvadrice  $\Phi$ .
- Množina všech bodů polárně sdružených s bodem  $P$  vzhledem ke kvadrice  $\Phi$  leží v jedné rovině, kterou nazýváme *polární rovina*. Bod  $P$  je *pól* své polární roviny. Ke každé rovině existuje právě jeden pól.
- Leží-li bod  $P \in \Phi$ , je polární rovina bodu  $P$  tečnou rovinou kvadriky  $\Phi$  v bodě  $P$ .
- Leží-li bod  $Q$  v polární rovině bodu  $P$ , pak polární rovina bodu  $Q$  prochází bodem  $P$ . Body  $P, Q$  nazýváme *sdružené póly*.
- Prochází-li každá ze dvou rovin pólem druhé roviny, nazýváme je *polárně sdružené roviny*.
- Polární roviny všech bodů přímky  $p$  vzhledem ke kvadrice  $\Phi$  tvoří svazek rovin o ose  $q$  a naopak. Přímky  $p$  a  $q$  se nazývají *polárně sdružené* vzhledem ke kvadrice  $\Phi$ .
- Je-li pól nevlastní roviny  $\omega^\infty$  vzhledem ke kvadrice  $\Phi$  vlastní bod  $S$ , je bod  $S$  *středem* kvadriky  $\Phi$ .
- Kvadrika může mít jeden střed, přímku středů, rovinu středů nebo nemá žádný střed.

- Polární rovinu bodu  $P^\infty$  vzhledem ke kvadrice  $\Phi$  nazýváme *průměrová rovina*. Je-li kvadrika  $\Phi$  středová, pak průměrová rovina prochází jejím středem  $S$ .
- Existují-li tečny z bodu  $P \notin \Phi$  ke kvadrice  $\Phi$ , pak tyto tečny vyplňují kuželovou plochu se středem v bodě  $P$  a dotýkají se kvadriky  $\Phi$  podél kuželosečky ležící v polární rovině bodu  $P$ .
- Každá přímka, která prochází středem kvadriky, se nazývá *průměr*.
- Průměr, který je kolmý na svou sdruženou rovinu, je *osa* kvadriky.
- Průsečíky os kvadriky s kvadrikou nazýváme *vrcholy* kvadriky.
- Úsečka jejíž krajní body jsou vrchol a střed kvadriky se nazývá *poloosa*, délka této úsečky je *velikost poloosy*.
- Bod, v němž existuje právě jedna tečná rovina kvadriky, se nazývá *regulární bod*.
- Bod, v němž existuje nekonečně mnoho tečných rovin kvadriky, se nazývá *singulární bod*.
- Regulární kvadriky mají pouze regulární body.

## 2 Osvětlení

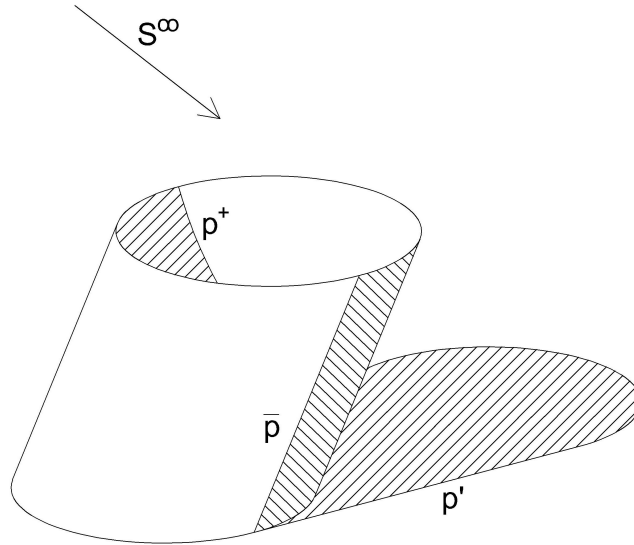
Významem pro osvětlování těles je, že zvyšuje názornost jejich průmětů. Osvětlení se často používá i jako zjednodušení zobrazení těles. Osvětlení je určeno středem  $S$ . Je-li střed osvětlení  $S$  vlastní resp. nevlastní, mluvíme o středovém, resp. rovnoběžném osvětlení. Nevlastní střed osvětlení  $S^\infty$  je dán směrem.

Každá přímka  $s$  procházející středem osvětlení  $S$  se nazývá *světelný paprsek*. Rovinu procházející středem  $S$  nazýváme *světelná rovina*. Část plochy, na kterou světelné paprsky dopadají, se nazývá *osvětlená část*. Část, která je neosvětlená, se nazývá *vlastní stín* plochy. Množina bodů  $\bar{p}$ , která tvoří hranici mezi osvětlenou částí a vlastním stínem, je *mez vlastního stínu (skutečný obrys)*. Pro mez vlastního stínu platí, že je to množina všech bodů dotyku světelných rovin plochy. Kuželová (resp. válcová) plocha  $\Omega$ , jejíž vrchol je střed osvětlení  $S$  a řídicí křivkou je mez vlastního stínu  $\bar{p}$  plochy se nazývá *světelná kuželová (válcová) plocha*. Řez  $p'$  světelné kuželové (válcové) plochy  $\Omega$  rovinou  $\rho$  se nazývá *mez stínu vrženého do roviny  $\rho$  (zdánlivý obrys)*. Vrženým stínem  $\bar{p}$  meze stínu vlastního je mez  $p'$  stínu vrženého. Průnik  $p^+$  světelné kuželové (válcové) plochy  $\Omega$  s plochou se nazývá *mez stínu vrženého plochou na sebe*.

Při rovnoběžném osvětlení existuje pro vržený stín duté válcové plochy na sebe afinita mezi podstavou a vrženým stínem této podstavy dovnitř plochy. Směr afinity je určen směrem povrchových přímek a osa je průsečnice roviny podstavy s rovinou vrženého stínu na plochu.

Pro vržený stín duté kuželové plochy na sebe existuje kolíneace mezi podstavou a vrženým stínem této podstavy dovnitř kužele. Střed této kolíneace je vrchol kužele a osa je průsečnice roviny podstavy s rovinou vrženého stínu dovnitř plochy.

Vlastním stínem kvadrik je obecně kuželosečka, která leží v polární



Obr. 2.1 Rovnoběžné osvětlení

rovině sdružené se středem osvětlení. Je-li kvadrika středová, pak při rovnoběžném osvětlení prochází polární rovina jejím středem.

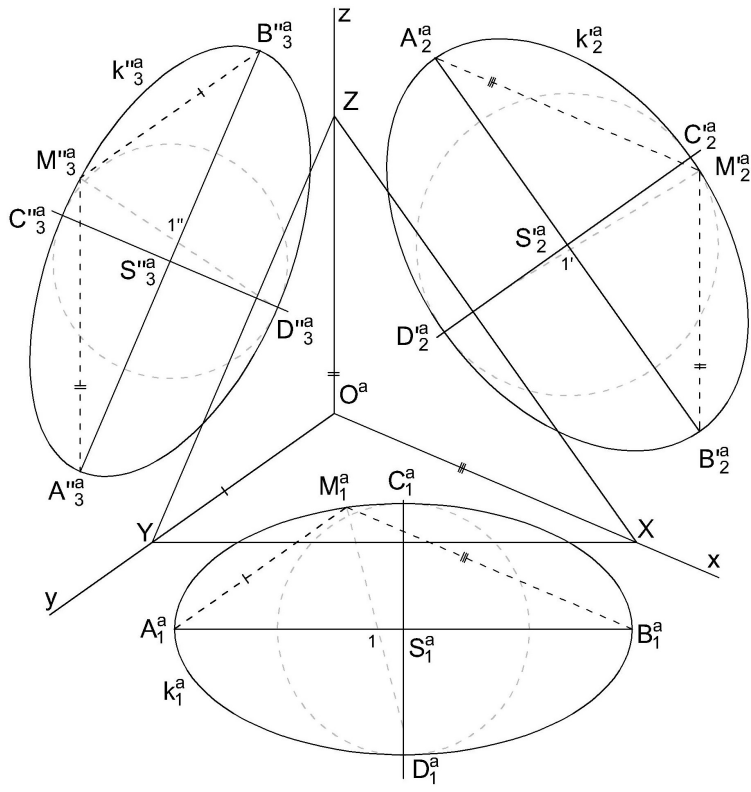
Při osvětlení kulové plochy je jejím vlastním stínem kružnice. Je-li osvětlení rovnoběžné, je vlastním stínem hlavní kružnice.

V praxi se často setkáváme s *technickým osvětlením*, které je speciálním typem rovnoběžného osvětlení. Směr osvětlení je dán tělesovou úhlopříčkou krychle, která má vrchol v počátku soustavy souřadné a hrany z něho vycházející leží na kladných poloosách. Směr osvětlení je dán tělesovou úhlopříčkou, která neprochází počátkem soustavy souřadné.

V této práci se budeme dále zabývat především rovnoběžným osvětlením a tělesa budeme považovat za neprůhledná a neodrážející žádné světlo.

Mez vlastního stínu rotačních ploch sestrojíme pomocí metod, podle kterých opíšeme rovnoběžce nebo meridiánu plochy rotační plochu, na které umíme jednoduše sestrojít mez vlastního stínu. Podle typu plochy, kterou budeme opisovat, rozdělíme metody na *kuželovou*, *kulovou* a *válcovou*. [7]





Obr. 3.2

nice. Protože jsou přímky  $x, y$  navzájem kolmé a leží v rovině kružnice, protnou se rovnoběžky s nimi vedené body  $A, B$  v bodě kružnice  $M$ . Když tedy vedeme hlavními vrcholy  $A_1^a, B_1^a$  rovnoběžky s osami  $x, y$ , získáme bod  $M_1^a$  elipsy  $k_1^a$ . Tím je elipsa jednoznačně určena. Velikost vedlejší poloosy můžeme sestrojít pomocí proužkové konstrukce. Podobným způsobem bychom sestrojili obrazy kružnic  $k_2^a, k_3^a$  v dalších dvou průmětnách. (Obr. 3.2)

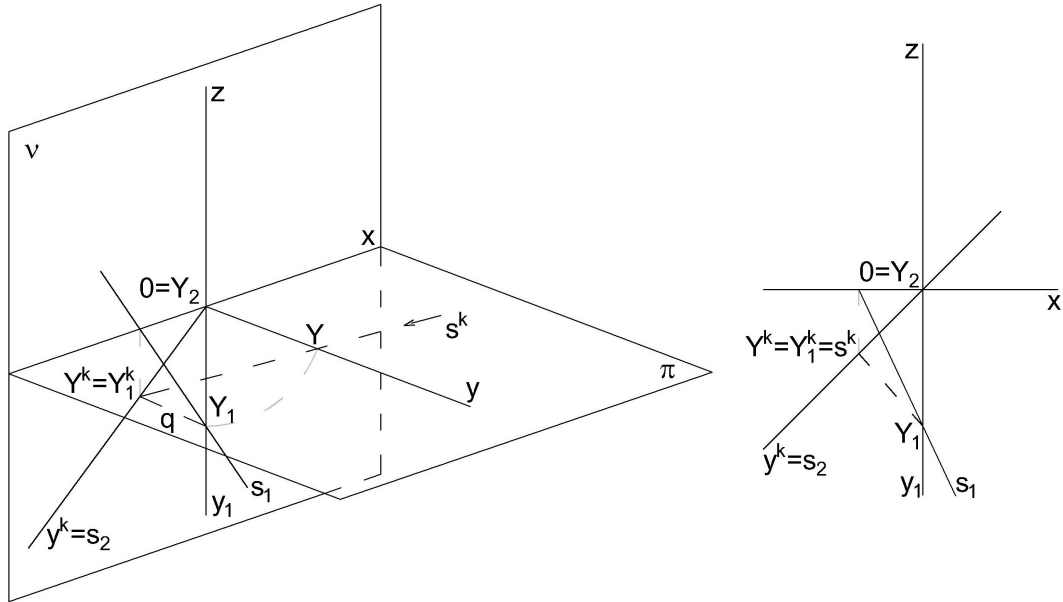
**Zobrazení kružnice v obecné rovině**

Axonometrickým průmětem kružnice  $k$  ležící v obecné rovině  $\alpha$  je znovu elipsa  $k^a$  se středem  $S^a$ . Hlavní osa je rovnoběžná s axonometrickou stopou  ${}^{\alpha}r^{ax}$  roviny kružnice  $\alpha$  a velikost hlavní poloosy je rovna poloměru kružnice  $k$ . Ke konstrukci potřebujeme dvojici přímek v rovině  $\alpha$ , které jsou na sebe kolmé. Sestrojíme rovinu  $\rho$ , která je kolmá na rovinu  $\alpha$  a zároveň prochází osou  $z$ . Půdorysnou stopu  $p^{\rho}$  roviny



### 3.2 Kosoúhlé promítání

#### Zobrazení směru promítání



Obr. 3.4

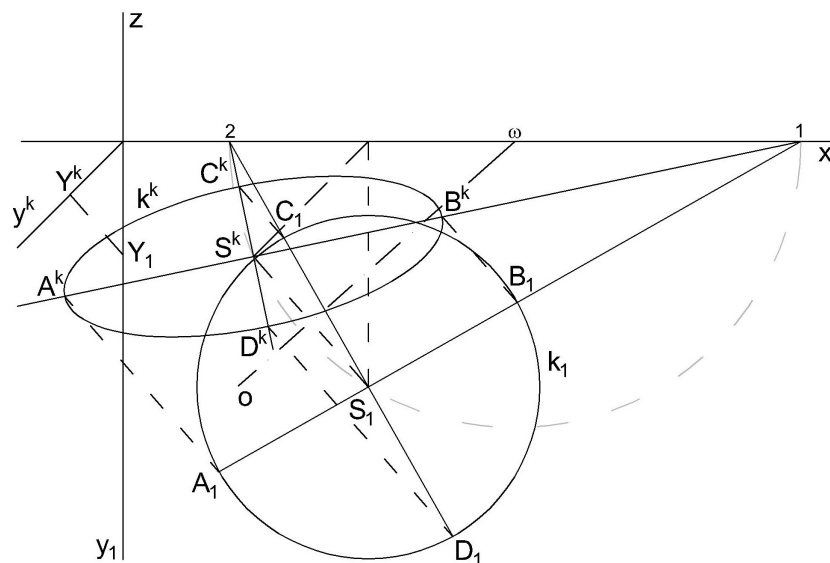
Kosoúhlé promítání je dáno kosoúhlým průmětem  $y^k$  osy  $y$  a kvoci-entem, který je dán přímkou  $q = Y_1Y^k$ . Směr promítání je dán přímkou  $s = YY^k$ . Nárys  $s_2$  přímky  $s$  splývá s  $y^k$ . Půdorys  $s_1$  je určený bodem  $Y_1$  a bodem na ose  $x$ , který leží na ordinále z bodu  $Y^k$ , tedy nárysem půdorysného stopníku přímky směru promítání. (Obr. 3.4)

#### Zobrazení kružnice v pomocných průmětnách

- Kružnice, která leží v nárysně nebo v rovině s ní rovnoběžné se zobrazí ve skutečné velikosti.
- Kružnice, která leží v půdorysně se zobrazí jako elipsa.

Kružnice  $k_1$  v půdoryse přiřazeného Mongeova promítání s kružnicí  $k^k$  si odpovídají v osové afinitě, která je dána osou  $x$  a směr afinity je určen body  $Y_1, Y^k$ . Abychom získali hlavní a vedlejší osu elipsy, potřebujeme určit na ose afinity jejich samodružné body 1 a 2. Zároveň musí osy v bodech  $S_1, S^k$  svírat pravý úhel, body  $S_1, S^k$  tedy musí ležet na





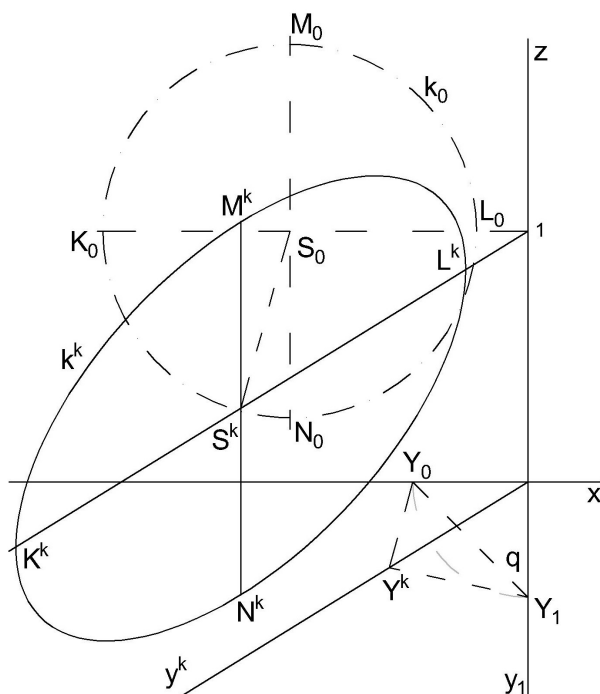
Obr. 3.5

Thaletově kružnici nad průměrem 12. Střed  $\omega$  Thaletovy kružnice je průsečík osy afinity s osou  $o$  úsečky  $S_1 S^k$ . Přímkou určené bodem  $S_1$  a jedním ze samodružných bodů 1 resp. 2 protínají kružnici  $k_1$  v bodech  $A_1, B_1$  resp.  $C_1, D_1$ . Průměry  $A^k B^k$  a  $C^k D^k$  jsou hlavní a vedlejší osou elipsy  $k^k$ . Není-li střed  $\omega$  Thaletovy kružnice dostupný, zvolíme libovolné dva na sebe kolmé průměry kružnice  $k_1$  a sestrojíme jejich obrazy v afinitě. Elipsu  $k^k$  pak sestrojíme pomocí Rytzovy konstrukce. (Obr. 3.5)

c) Kružnice, která leží v bokorysně se také zobrazí jako elipsa.

Bokorys otočíme kolem osy  $z$  do nárysny a v afinitě příslušné danému otočení zobrazíme kružnici. Afinita je určena osou  $z$  a směr afinity je dán dvojicí bodů  $Y_1, Y_0$ . Najdeme obraz  $S_0$  bodu  $S^k$  a obraz  $k_0$  elipsy  $k^k$  v osově afinitě. Osy můžeme určit podobně jako v předchozím případě pomocí Thaletovy kružnice, ale nyní použijeme druhý způsob konstrukce. Zvolíme libovolnou dvojici navzájem kolmých průměrů  $M_0 N_0$  a  $K_0 L_0$  kružnice  $k_0$  a zobrazíme je pomocí afinity. Získáme tak dvojici sdružených průměrů  $M^k N^k$  a  $K^k L^k$  elipsy  $k^k$ . Těmito průměry je elipsa  $k^k$  jednoznačně určena a můžeme ji tedy pomocí Rytzovy

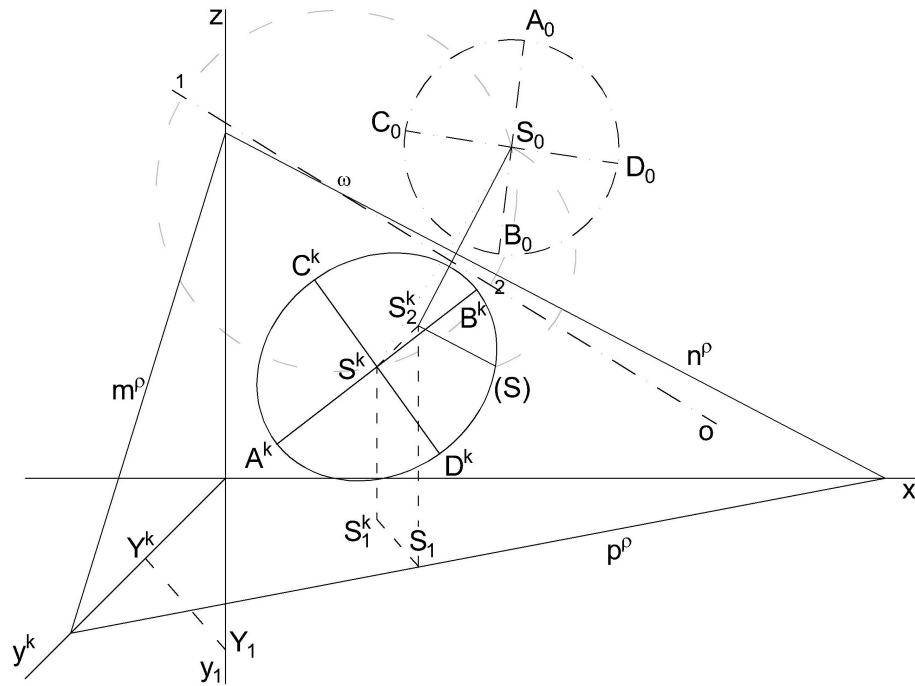
konstrukce sestrojít. (Obr. 3.6)



Obr. 3.6

### Zobrazení kružnice v obecné rovině

Kosoúhlým průmětem kružnice  $k$  ležící v obecné rovině  $\rho$  je opět elipsa  $k^k$  se středem  $S^k$ . Rovinu  $\rho$  otočíme kolem nárysné stopy  $n^\rho$  roviny  $\rho$  do náryсны. Elipsa  $k^k$  v rovině  $\rho$  s otočenou kružnicí  $k_0$  do náryсны si odpovídají v osové afinitě, která je dána nárysnou stopou  $n^\rho$  a směr afinity je určen body  $S^k, S_0$ . Abychom získali hlavní a vedlejší osu elipsy, potřebujeme určit na ose afinity jejich samodružné body 1 a 2. Zároveň musí osy v bodech  $S_0, S^k$  svírat pravý úhel, body  $S_0, S^k$  tedy musí ležet na Thaletově kružnici nad průměrem 12. Střed  $\omega$  Thaletovy kružnice je průsečík osy afinity s osou  $o$  úsečky  $S_0S^k$ . Přímky určené bodem  $S_0$  a jedním ze samodružných bodů 1 resp. 2 protínají kružnici  $k_0$  v bodech  $A_0, B_0$  resp.  $C_0, D_0$ . Průměry  $A^k B^k$  a  $C^k D^k$  jsou hlavní a vedlejší osou elipsy  $k^k$ . (Obr. 3.7)

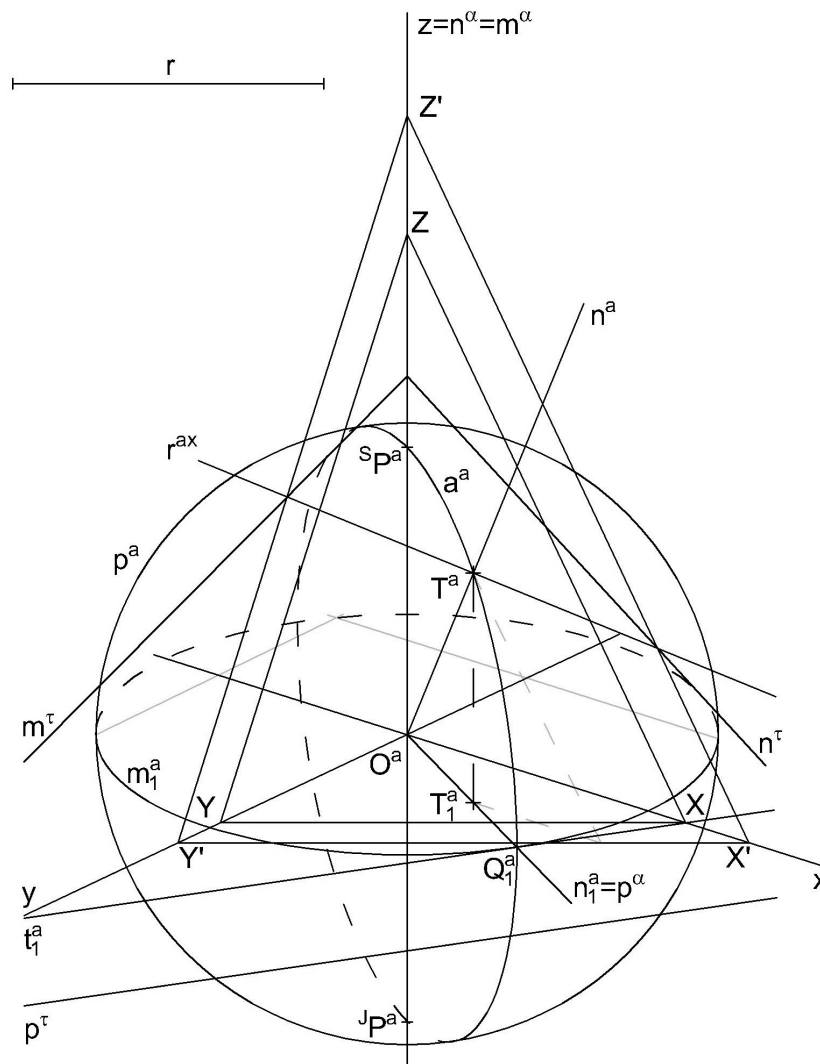


Obr. 3.7

## 4 Zobrazení kvadrik v pravoúhlé axonometrii

**Úloha 4.1:** V pravoúhlé axonometrii zobrazte kulovou plochu  $\kappa$ , je-li dán její střed  $O$  a poloměr  $r$ . V daném bodě  $T$  plochy  $\kappa$  sestrojte tečnou rovinu  $\tau$ . Bod  $T$  je dán svým průmětem  $T_1^a$  v půdorysně a platí,  $z_T > 0$ .

**Řešení:**



Obr. 4.1

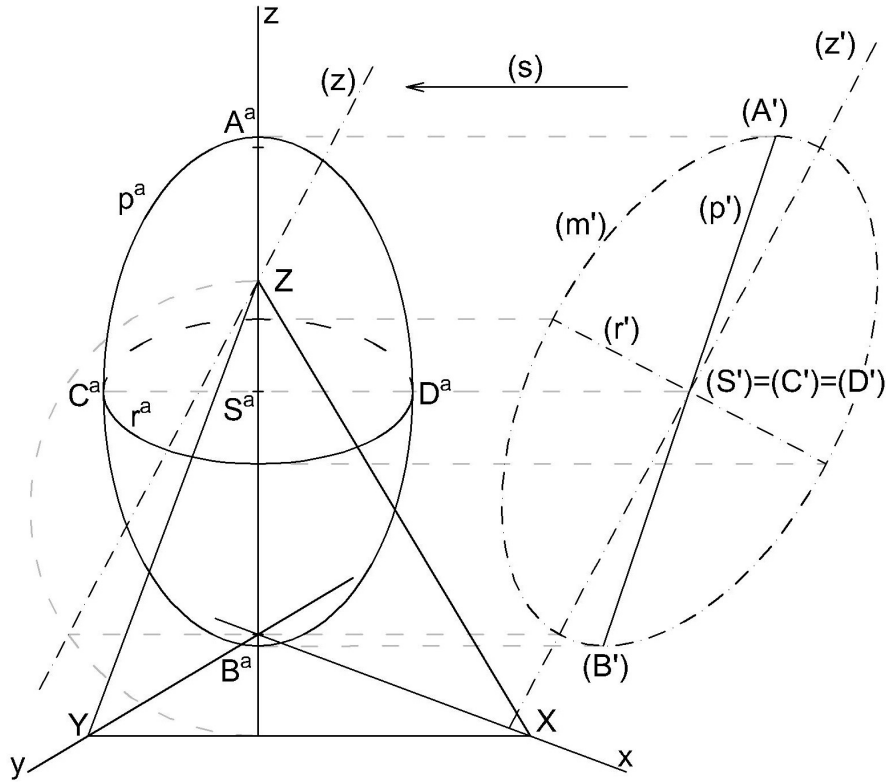
Pravoúhlým průmětem  $p^a$  kulové plochy  $\kappa$  je kružnice se středem

$O^a$  a poloměrem  $r$ . Průsečíky osy  $z$  s kulovou plochou  $\kappa$  označíme  $^JP, ^SP$ . Řezem kulové plochy rovinou  $\pi$  je hlavní kružnice  $m$ . Sestrojíme řez  $a^a$  kulové plochy rovinou  $\alpha = zT_1^a$ . Bod  $T^a$  leží na  $a^a$  a na ordinále  $z$  bodu  $T_1^a$ .

Přímka  $n = OT$  je normálou kulové plochy  $\kappa$  v bodě  $T$ . Tečnou rovinu  $\tau$  v bodě  $T$  sestrojíme jako rovinu kolmou k přímce  $n$ . Bodem  $T^a$  vedeme pomocný axonometrický trojúhelník  $X'Y'Z'$ . Axonometrická stopa  $r^{ax}$  roviny  $\tau$  je kolmá na  $n^a$  v bodě  $T^a$ . Půdorysná stopa  $p^\tau$  roviny  $\tau$  je rovnoběžná s tečnou  $t_1$  hlavní kružnice  $m_1$  v bodě  $Q_1^a = m_1 \cap n_1$  a je určena průsečíkem axonometrické stopy  $r^{ax}$  s přímkou strany  $X'Y'$  pomocného axonometrického trojúhelníku. Nárýsná a bokorysná stopa  $n^\tau, m^\tau$  roviny  $\tau$  jsou určeny jednoznačně průsečíky axonometrické stopy  $r^{ax}$  s axonometrickým trojúhelníkem  $X'Y'Z'$  a průsečíky půdorysné stopy  $p^\tau$  se souřadnicovými osami  $x, y$ . (Obr. 4.1)

**Úloha 4.2:** V pravouhlé axonometrii zobrazte průmět protáhlého rotačního elipsoidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ .

**Řešení:**



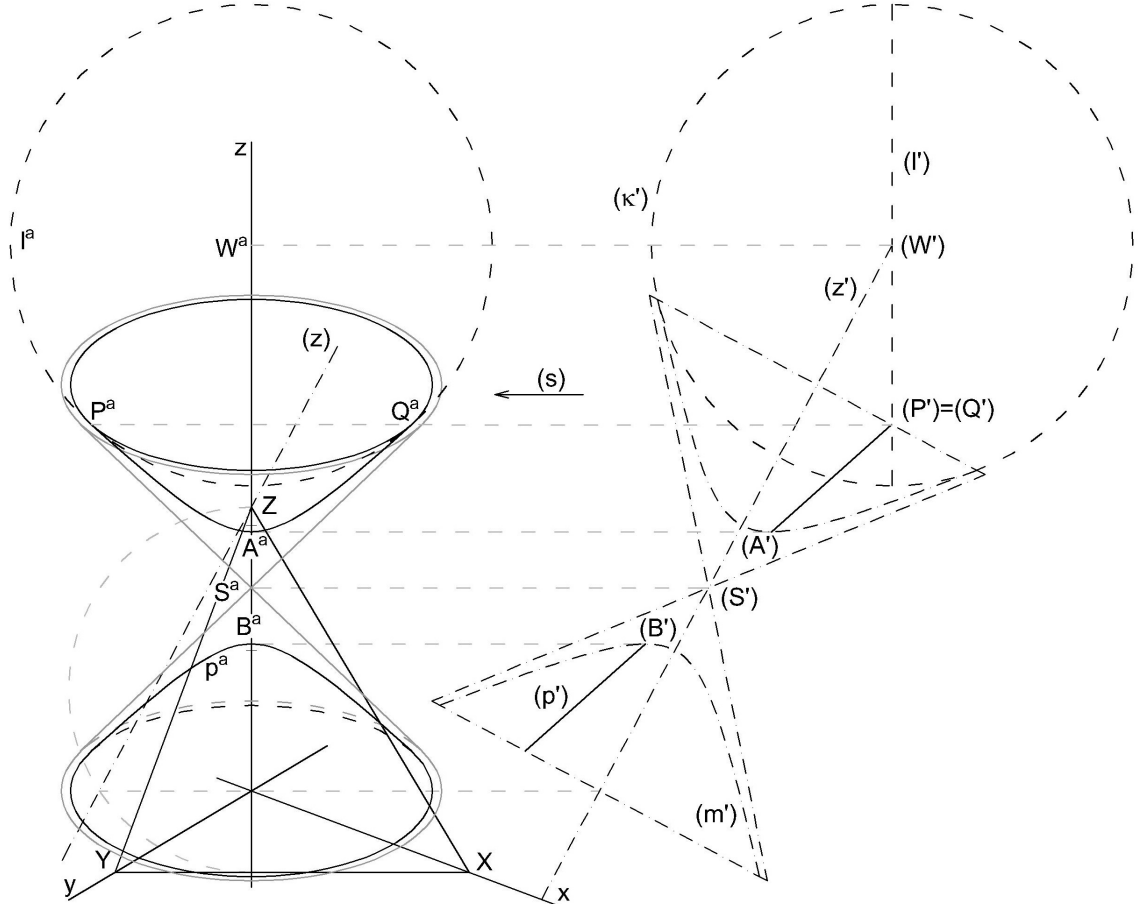
Obr. 4.2

Řídící elipsu  $m$  zadáme v promítací rovině  $\lambda$  osy  $z$ . Promítací rovinu  $\lambda$  sklopíme do axonometrické průmětny. Aby se nám sklopený meridián nepřekrýval s axonometrickým průmětem elipsoidu, sklopené útvary posuneme ve směru kolmém k ose  $z$  a označíme závorkami a čárkami. Směr promítání je kolmý k axonometrické průmětně, ve sklopení je tedy sklopený směr osvětlení kolmý k ose  $z$ . Sestrojíme mez  $p$  vlastního stínu. Mezi  $p$  vlastního stínu elipsoidu při osvětlení ve směru promítání je elipsa, jejíž střed splyne se středem elipsoidu. Průmětem elipsy  $p$  ve sklopení je úsečka  $(p')$ . Vrcholy  $A, B$  elipsy  $p$  určíme pomocí válcové metody. Ploše  $\Phi$  opíšeme válcovou plochu  $\Omega$ , jejíž povrchové přímky jsou kolmé k  $\lambda$ . Sestrojíme mez vlastního stínu  $\Omega$ . Určíme společné body

mezi vlastního stínu obou ploch. Hledané body jsou body meridiánu  $m$ , ve kterých se dotýkají přímky směru osvětlení. Body  $(A')$ ,  $(B')$  jsou tedy body dotyku tečen elipsy  $(m')$  rovnoběžných s  $(s)$ . Axonometrické průměty bodů  $A^a, B^a$  leží na  $z$ . Druhý průměr  $C^a, D^a$  elipsy  $p^a$  leží na přímce procházející středem  $S^a$  a kolmé k rovině  $\lambda$ . Ve sklopení splynou body  $(C')$ ,  $(D')$  s bodem  $S'$  a jsou to společné body rovníku a skutečného obrysu. Průměry  $A^aB^a$  a  $C^aD^a$  je elipsa  $p^a$  jednoznačně určena. Elipsy  $p^a$  a  $r^a$  se dotýkají v bodech  $C^a, D^a$ . (Obr. 4.2)

**Úloha 4.3:** V pravoúhlé axonometrii zobrazte průmět dvojdílného rotačního hyperboloidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ .

**Řešení:**



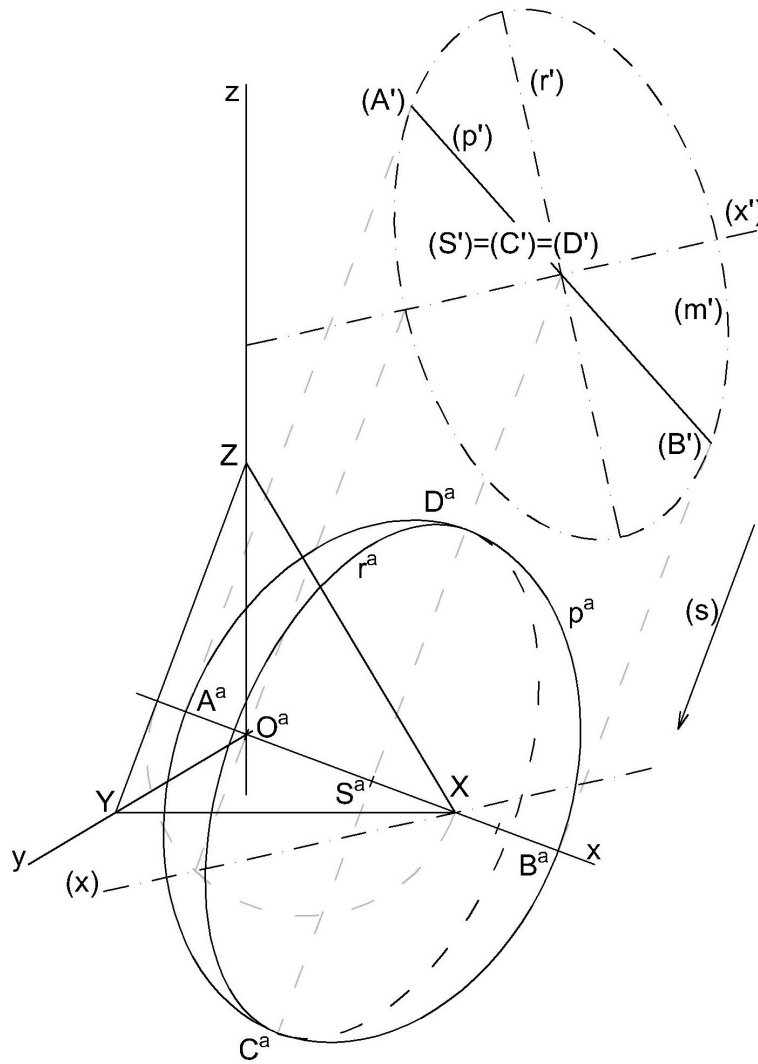
Obr. 4.3

Obrys hyperboloidu sestrojíme opět pomocí osvětlení. Řídící hyperbolu  $m$  zadáme v promítací rovině  $\lambda$  osy  $z$ . Promítací rovinu  $\lambda$  sklopíme a vysuneme ve směru promítání. Sklopené a posunuté útvary označíme závorkami a čárkami. Mez vlastního stínu, která vznikne osvětlením ve směru promítání, je hyperbola  $p$ . Průmětem hyperboly  $p$  do roviny  $\lambda$  je dvojice polopřímek  $(p')$ . Vrcholy  $A, B$  hyperboly  $p$  určíme pomocí válcové metody. Ploše  $\Phi$  opíšeme válcovou plochu  $\Omega'$ , jejíž povrchové přímky jsou kolmé k  $\lambda$ . Sestrojíme mez vlastního stínu  $\Omega'$ . Určíme společné body mezi vlastního stínu obou ploch. Hledané body jsou body



meridiánu  $m$ , ve kterých se dotýkají přímky směru osvětlení. Body  $(A'), (B')$  jsou tedy body dotyku tečen hyperboly  $(m')$  rovnoběžných s  $(s)$ . Axonometrické průměty bodů  $A^a, B^a$  leží na  $z$ . Body  $P, Q$  na hraniční rovnoběžce určíme pomocí kulové metody. Podél hraniční rovnoběžky opíšeme dotykovou kulovou plochu  $\kappa$  se středem  $W$ . Určíme mez  $l$  vlastního stínu kulové plochy  $\kappa$ . Průsečíky  $l$  s hraniční rovnoběžkou jsou body  $P, Q$ . Sestrojíme průmět asymptotické kuželové plochy  $\Omega$ . Máme její střed  $S$  a sestrojíme elipsu, která leží v půdorysně a je průmětem hraniční rovnoběžky asymptotické kuželové plochy  $\Omega$ . Obrysové přímky jsou tečny vedené z  $S^a$  k této elipse. Hyperbola  $p^a$  je určena středem  $S^a$ , vrcholy  $A^a, B^a$  a asymptotami. (Obr. 4.3)

**Úloha 4.4:** V pravouhlé axonometrii zobrazte průmět zploštělého rotačního elipsoidu  $\Phi(x, m)$ , jehož osa splyne s osou  $x$ .



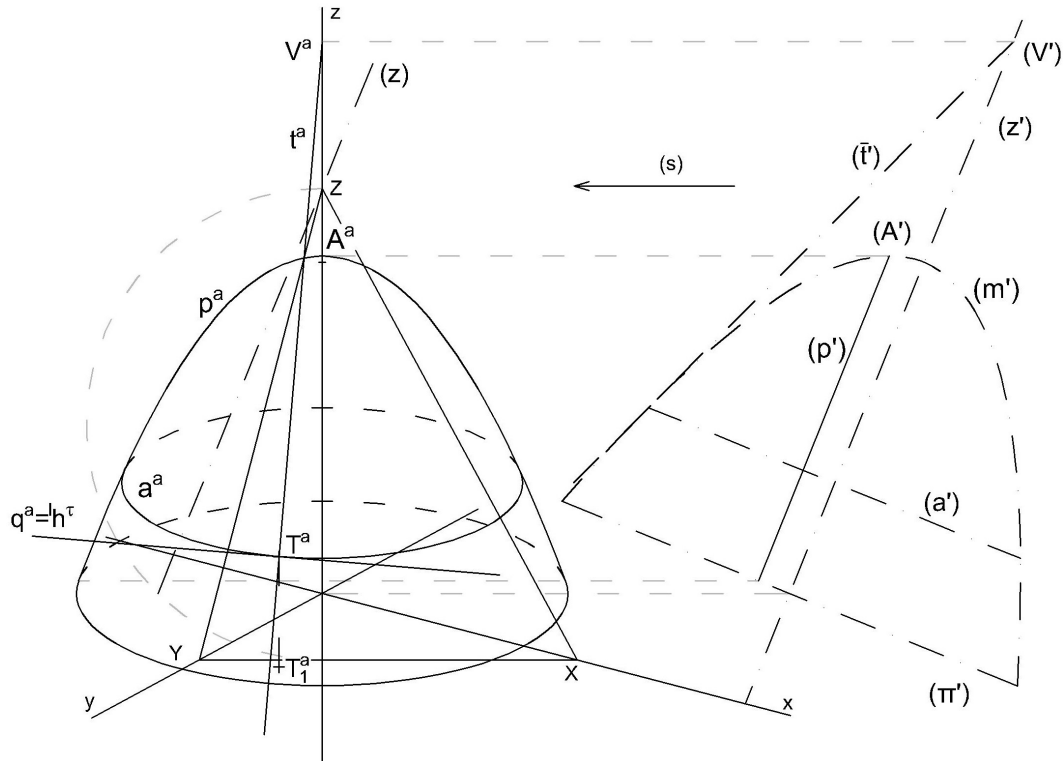
Obr. 4.4

Obrys elipsoidu sestrojíme podobně jako v předchozích příkladech pomocí osvětlení. Řídící elipsu  $m$  zadáme v promítací rovině  $\lambda$  osy  $x$ . Promítací rovinu  $\lambda$  sklopíme a vysuneme ve směru promítání. Sklopené a posunuté útvary označíme závorkami a čárkami. Směr promítání je kolmý k axonometrické průmětně, ve sklopení je tedy sklopený směr osvětlení kolmý k ose  $x$ . Sestrojíme mez  $p$  vlastního stínu. Mezi  $p$  vlastního stínu elipsoidu při osvětlení ve směru promítání je elipsa, jejíž střed splyne se středem elipsoidu. Průmětem elipsy  $p$  ve sklopení je úsečka

( $p'$ ). Vrcholy  $A, B$  elipsy  $p$  určíme pomocí válcové metody. Ploše  $\Phi$  opíšeme válcovou plochu  $\Omega$ , jejíž povrchové přímky jsou kolmé k  $\lambda$ . Se-strojíme mez vlastního stínu  $\Omega$ . Určíme společné body mezi vlastního stínu obou ploch. Hledané body jsou body meridiánu  $m$ , ve kterých se dotýkají přímky směru osvětlení. Body ( $A'$ ), ( $B'$ ) jsou tedy body dotyku tečen elipsy ( $m'$ ) rovnoběžných s ( $s$ ). Axonometrické průměty bodů  $A^a, B^a$  leží na  $x$ . Druhý průměr  $C^a, D^a$  elipsy  $p^a$  leží na přímce procházející středem  $S^a$  a kolmé k rovině  $\lambda$ . Ve sklopení splynou body ( $C'$ ), ( $D'$ ) s bodem  $S'$  a jsou to společné body rovníku a skutečného obrysu. Průměry  $A^aB^a$  a  $C^aD^a$  je elipsa  $p^a$  jednoznačně určena. Elipsy  $p^a$  a  $r^a$  se dotýkají v bodech  $C^a, D^a$ . (Obr. 4.4)

**Úloha 4.5:** V pravouhlé axonometrii zobrazte průmět rotačního paraboloidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ . V daném bodě  $T$  plochy sestrojte tečnou rovinu. Bod  $T$  je dán svým průmětem  $T_1^a$  v půdorysně.

**Řešení:**



Obr. 4.5

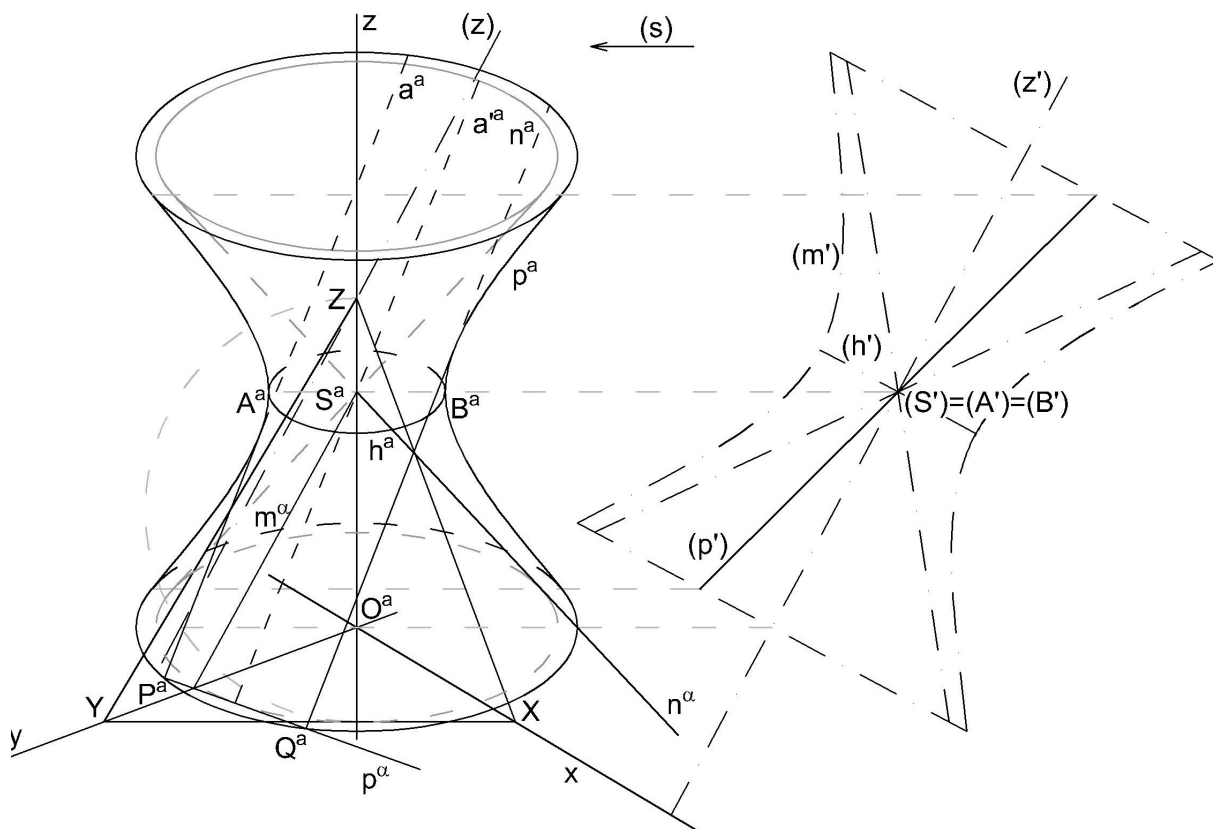
Obrys paraboloidu znovu sestrojíme pomocí osvětlení. V promítací rovině  $\lambda$  osy  $z$  leží meridián  $m$ . Sklopíme promítací rovinu a pro přehlednost ji vysuneme ve směru promítání. Sklopené a posunuté útvary označíme závorkami a čárkami. Mez vlastního stínu, která vznikne osvětlením ve směru promítání, je parabola  $p$ . Průmětem paraboly  $p$  do roviny  $\lambda$  je úsečka  $(p')$ . Vrchol  $A$  určíme pomocí válcové metody. Ploše  $\Phi$  opišeme válcovou plochu  $\Omega$ , jejíž povrchové přímky jsou kolmé k  $\lambda$ . Sestrojíme mez vlastního stínu  $\Omega$ . Určíme společný bod mezí vlastního stínu obou ploch. Bod dotyku tečny určné směrem  $(s)$  je bod meze vlastního stínu na meridiánu  $m$ . Body dotyku paraboly  $p^a$  s hraniční rovnoběžkou určíme pomocí kulové metody. Bod  $T^a$  leží na rovnoběžce

$a^a$  paraboloidu, jejíž poloměr je roven vzdálenosti průmětu bodu  $T_1^a$  od osy  $z$ .

Bodem  $T$  proložíme rovinu  $\sigma$  rovnoběžnou s  $\pi$ . Rovina  $\sigma$  protne rotační paraboloid v kružnici  $a$ . Přímka  $t$ , která se dotýká meridiánu procházejícího bodem  $T$ , opíše při rotaci rotační kuželovou plochu s vrcholem  $V$ . Ve sklopení zobrazíme kružnici ( $a'$ ) a sestrojíme bod ( $V'$ ). Bod  $V$  vrátíme zpět ze sklopení. Tečna  $t$  je určena body  $V, T$ . Přímka  $q$ , která leží v rovině  $\sigma$  a dotýká se kružnice  $a$  v bodě  $T$ , je hlavní přímka první osnovy hledané tečné roviny  $\tau$ . Tečná rovina  $\tau$  je jednoznačně určena přímkami  $t$  a  $q$ . (Obr. 4.5)

**Úloha 4.6:** V pravoúhlé axonometrii zobrazte průmět jednodílného rotačního hyperboloidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ . Sestrojte řez asymptotickou rovinou  $\alpha$ , která se dotýká asymptotické kuželové plochy podél libovolné přímky  $a'$ .

**Řešení:**



Obr. 4.6

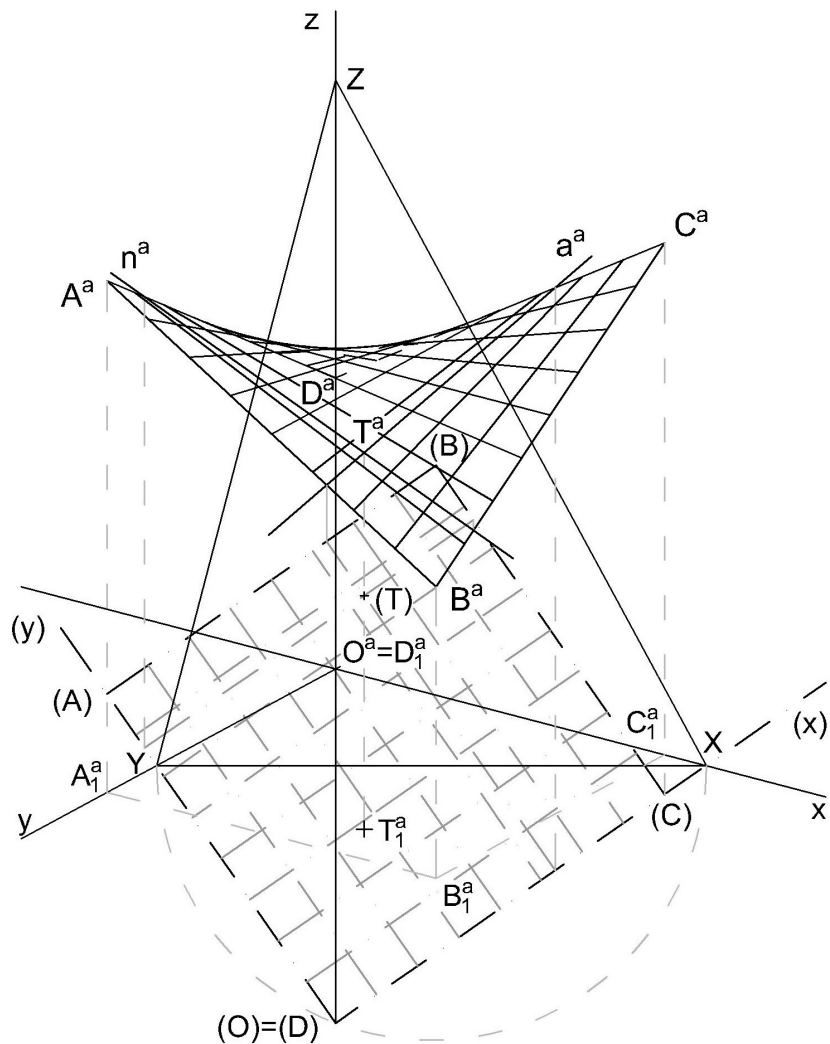
Obrys hyperboloidu sestrojíme opět pomocí osvětlení. Řídící hyperbolu  $m$  zadáme v promítací rovině  $\lambda$  osy  $z$ . Promítací rovinu  $\lambda$  sklopíme a vysuneme ve směru promítání. Sklopené a posunuté útvary označíme závorkami a čárkami. Mez vlastního stínu, která vznikne osvětlením ve směru promítání, je hyperbola  $p$ . Průmětem hyperboly  $p$  do roviny  $\lambda$  je úsečka  $(p')$ . Sestrojíme průmět asymptotické kuželové plochy  $\Omega$ . Máme její střed  $S$  a sestrojíme elipsu, která leží v půdorysně a je průmětem hraniční rovnoběžky asymptotické kuželové plochy  $\Omega$ . Obrysové přímky jsou tečny vedené z  $S^a$  k této elipse. Vrcholy  $A, B$  hyperboly

$p$  leží na přímce procházející středem  $S$ , která je kolmá k rovině  $\lambda$ . Ve sklopení splynou body  $(A')$ ,  $(D')$  s bodem  $S'$  a jsou to společné body hrdelní rovnoběžky a skutečného obrysu. Axonometrické průměty bodů  $A^a, B^a$  leží na kolmici vedené z bodu  $S^a$  k ose  $z$  a jejich vzdálenost od bodu  $S^a$  je rovna poloměru hrdelní rovnoběžky  $h$  hyperboloidu  $\Phi$ . Hyperbola  $p^a$  je určena středem  $S^a$ , vrcholy  $A^a, B^a$  a asymptotami.

Přímka  $a'$ , která leží na asymptotické kuželové ploše  $\Omega$ , prochází bodem  $S$  a zároveň prochází bodem hraniční rovnoběžky asymptotické kuželové plochy  $\Omega$ . Asymptotická rovina  $\alpha$  se dotýká asymptotické kuželové plochy  $\Omega$  podél přímky  $a'$ . Půdorysná stopa  $p^\alpha$  roviny  $\alpha$  protíná hraniční rovnoběžku hyperboloidu ve dvou bodech  $P, Q$ . Řezem hyperboloidu  $\Phi$  asymptotickou rovinou  $\alpha$  je dvojice přímek  $a, n$  různých regulů. Protože je rovina  $\alpha$  asymptotická, jsou přímky  $a, n$  rovnoběžné a zároveň jsou rovnoběžné s přímkou  $a'$ . (Obr. 4.6)

**Úloha 4.7:** V pravoúhlé axonometrii zobrazte část hyperbolického paraboloidu, který je určený zborceným čtyřúhelníkem  $ABCD$ . Sestrojte alespoň sedm přímek obou regulů a tečnou rovinu  $\tau$  v bodě  $T$ . Bod  $T$  je bodem plochy a je určený svým průmětem  $T_1^a$  v půdorysně.

**Řešení:**



Obr. 4.7

Sestrojíme pravoúhlý průmět hyperbolického paraboloidu do půdorysny  $\pi$ . Ten ohraničíme pravoúhlými průměty  $A_1^a B_1^a C_1^a D_1^a$  bodů zborceného čtyřúhelníku  $A^a B^a C^a D^a$ . Půdorysnu  $\pi$  otočíme do axonometrické průmětny. Přímky prvního regulu sestrojíme napřed v otočení. Strany  $(A)(B)$  a  $(C)(D)$  rozdělíme na osm stejných částí. Tím je určeno



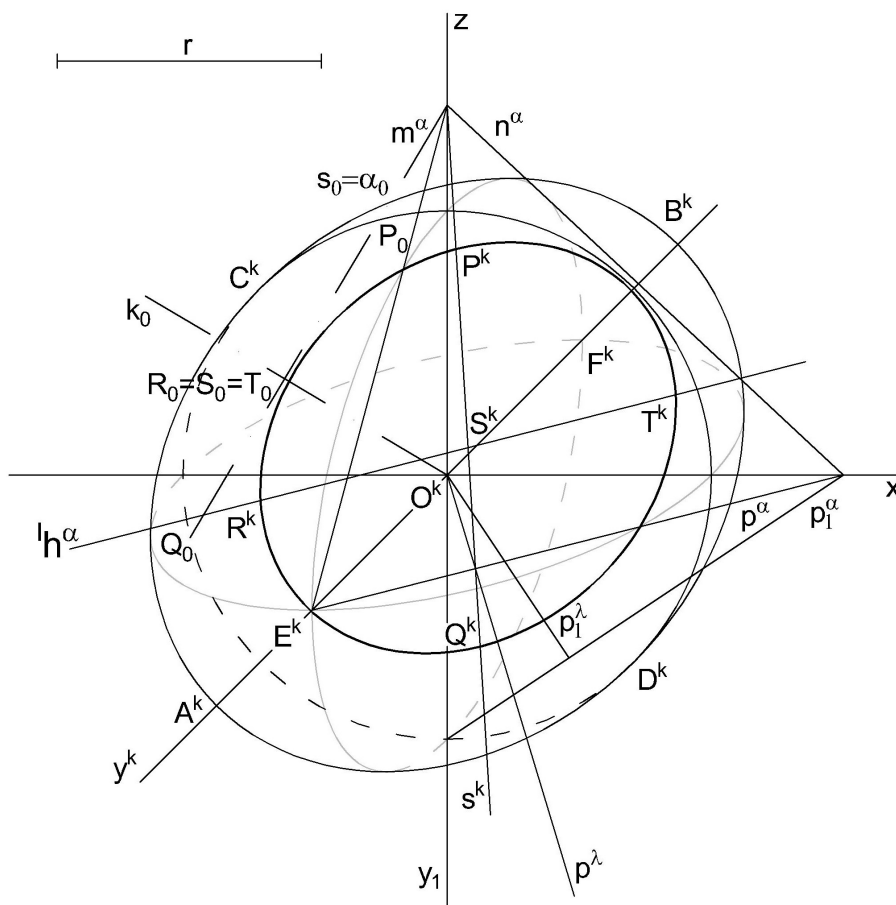
sedm přímek jednoho regulu v otočení. Stejným způsobem sestrojíme otočené průměty přímek druhého regulu. Strany  $(A)(D)$  a  $(B)(C)$  rozdělíme na osm stejných částí. Tím je určeno sedm přímek druhého regulu v otočení. Nyní sestrojíme jejich axonometrické průměty.

Tečná rovina  $\tau$  v bodě  $T$  protne hyperbolický paraboloid ve dvou přímkách  $a, n$  dvou různých regulů. Sestrojíme průmět  $(T)$  bodu  $T$  v otočení. Bodem  $(T)$  vedeme otočené průměty  $(a), (n)$  přímek  $a, n$  a sestrojíme jejich axonometrické průměty  $a^a n^a$ . Přímkami  $a^a n^a$  je tečná rovina  $\tau$  hyperbolického paraboloidu v bodě  $T$  jednoznačně určena. (Obr. 4.7)

## 5 Zobrazení kvadrik v kosoúhlém promítání

**Úloha 5.1:** V kosoúhlém promítání ( $\omega = 135^\circ, q = \frac{3}{4}$ ) zobrazte rotační kulovou plochu  $\kappa$ , je-li dán její střed  $O$  a poloměr  $r$ . Sestrojte řez kulové plochy  $\kappa$  rovinou  $\alpha$ .

**Řešení:**



Obr. 5.1

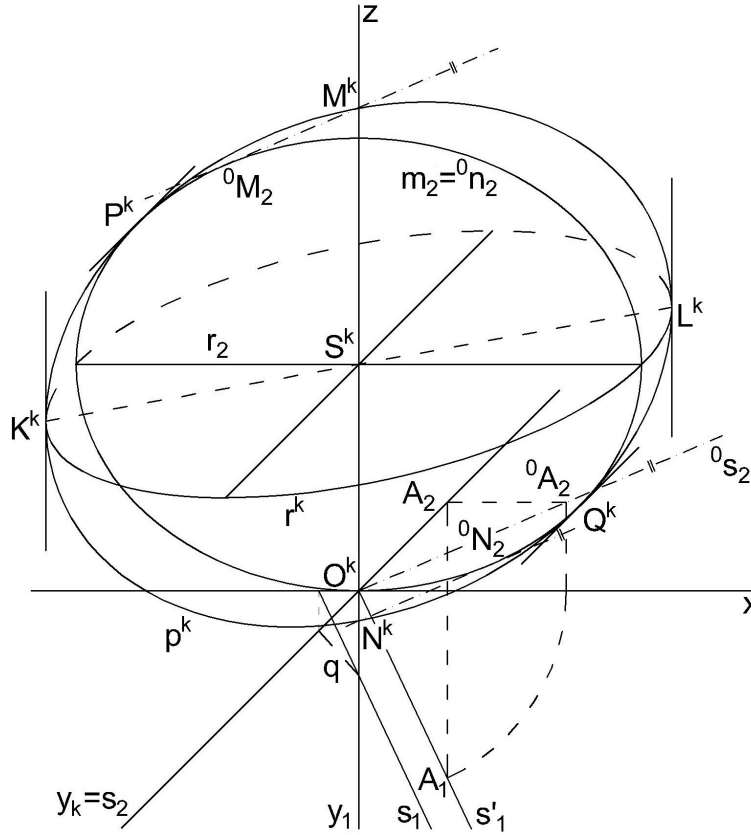
Podle Quételet-Dandelinovy věty je kosoúhlým průmětem kulové plochy elipsa. Jejím středem je průmět středu kulové plochy. Ohniska jsou průmětem krajních bodů průměru kulové plochy, který je kolmý k průmětně. Délka vedlejší poloosy je rovna poloměru kulové plochy.[3]

Řezem kulové plochy je kružnice. Řez kulové plochy rovinou  $\alpha$  se-

stojíme pomocí roviny  $\lambda$ , která je rovinou souměrnosti řezu. Rovina  $\lambda$  je kolmá k rovině  $\alpha$  a obsahuje osu  $z$ . Přímka  $s$  je průsečnice rovin  $\alpha$  a  $\lambda$ . Rovinu  $\lambda$  otočíme kolem osy  $z$  do nárýsny. Průsečíky  $P, Q$ , otočené přímky  $s$  s nárýsem kulové plochy, jsou průměrem hledaného řezu plochy. Průmětem kružnice, která je řezem kulové plochy rovinou  $\alpha$ , je elipsa. Průměr  $R, T$  sdružený k průměru  $P, Q$  leží na hlavní přínce první osnovy roviny  $\alpha$  a jeho velikost je určena v otočení. Řez je sdruženými průměry  $PQ$  a  $RT$  jednoznačně určený. (Obr. 5.1)

**Úloha 5.2:** V kosoúhlém promítání zobrazte průmět zploštělého rotačního elipsoidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ .

**Řešení**



Obr. 5.2

Osa zploštělého rotačního elipsoidu leží v nárysně, jejím druhým průmětem v přidružené Mongeově projekci je řídicí elipsa  $m_2$ . Obrys  $p$  elipsoidu sestrojíme pomocí osvětlení daného směrem promítání. Sestrojíme půdorys  $s_1$  a nárys  $s_2$  osvětlení podle Obr. 3.4.

Body  $P, Q$  meze  $p$  na hlavním meridiánu  $m$  určíme pomocí válcové metody. Body  $P, Q$  meridiánu  $m$  leží v nárysně, proto jejich nárysy  $P_2, Q_2$  splynou s jejich kosoúhlými průměty a v těchto bodech se dotýkají elipsy  $m_2$  a  $p^k$ . Body  $P, Q$  jsou body dotyku tečen  $m_2$  rovnoběžných s  $s_2$ .

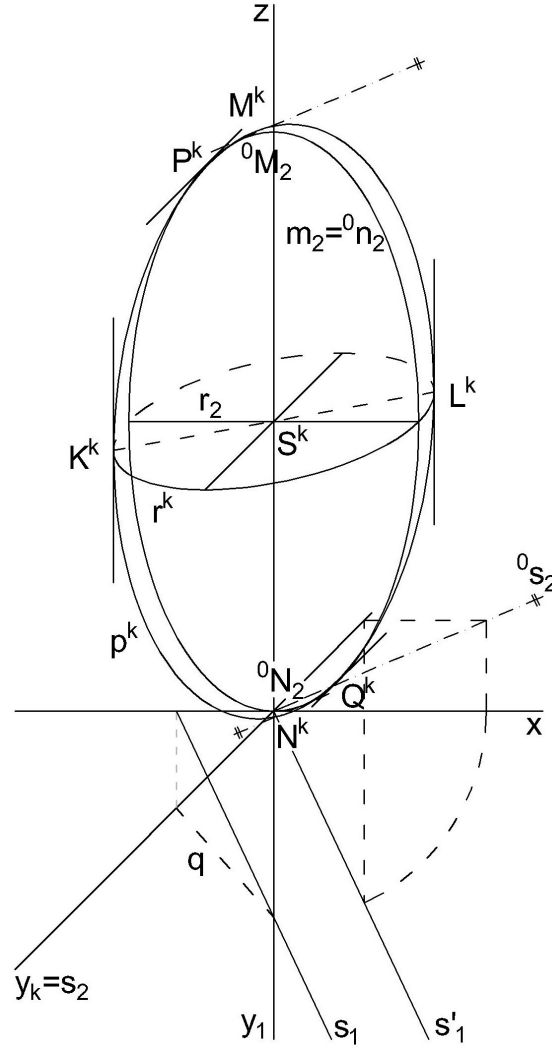
Vedeme-li počátkem  $O^k$  soustavy souřadné přímku  $s' \parallel s$ , pak ro-

vina  $\lambda = zs'$  protíná elipsoid ve světelném meridiánu  $n$ . Rovinu  $\lambda$  otočíme kolem stopy  $z$  do nárysny. Světelný meridián  $n$  se otočí do meridiánu  $m$ . Body  $M, N$  meze vlastního stínu na světelném meridiánu určíme pomocí válcové metody. K meridiánu  ${}^0n_2 = m_2^k$  sestrojíme tečny rovnoběžné s  ${}^0s_2$ , najdeme body  ${}^0M_2, {}^0N_2$  dotyku a otočíme je zpět. Kosoúhlé průměty  $M^k, N^k$  leží na ose  $z$ .

Body  $K, L$  na rovníku  $r$  určíme pomocí kuželové metody. Rovníku  $r$  opíšeme rotační dotykovou válcovou plochu. Její obrys tvoří tečny elipsy  $r^k$  rovnoběžné s osou  $z$ , které jsou zároveň tečnami elipsy  $p^k$ . Body dotyku označíme  $K^k, L^k$ . Protože průměr  $M^kN^k$  leží na  $z$ , jsou průměry  $M^kN^k$  a  $K^kL^k$  sdružené a jednoznačně určují elipsu  $p^k$ . (Obr. 5.2)

**Úloha 5.3:** V kosoúhlém promítání zobrazte průmět protáhlého rotačního elipsoidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$

**Řešení**



Obr. 5.3

Osa protáhlého rotačního elipsoidu leží v nárysně, jejím druhým průmětem v přidružené Mongeově projekci je řídicí elipsa  $m_2$ . Obrys  $p$  elipsoidu sestrojíme pomocí osvětlení daného směrem promítání. Sestrojíme půdorys  $s_1$  a nárys  $s_2$  osvětlení podle Obr. 3.4.

Body  $P, Q$  meze  $p$  na hlavním meridiánu  $m$  určíme pomocí válcové metody. Body  $P, Q$  meridiánu  $m$  leží v nárysně, proto jejich nárysy

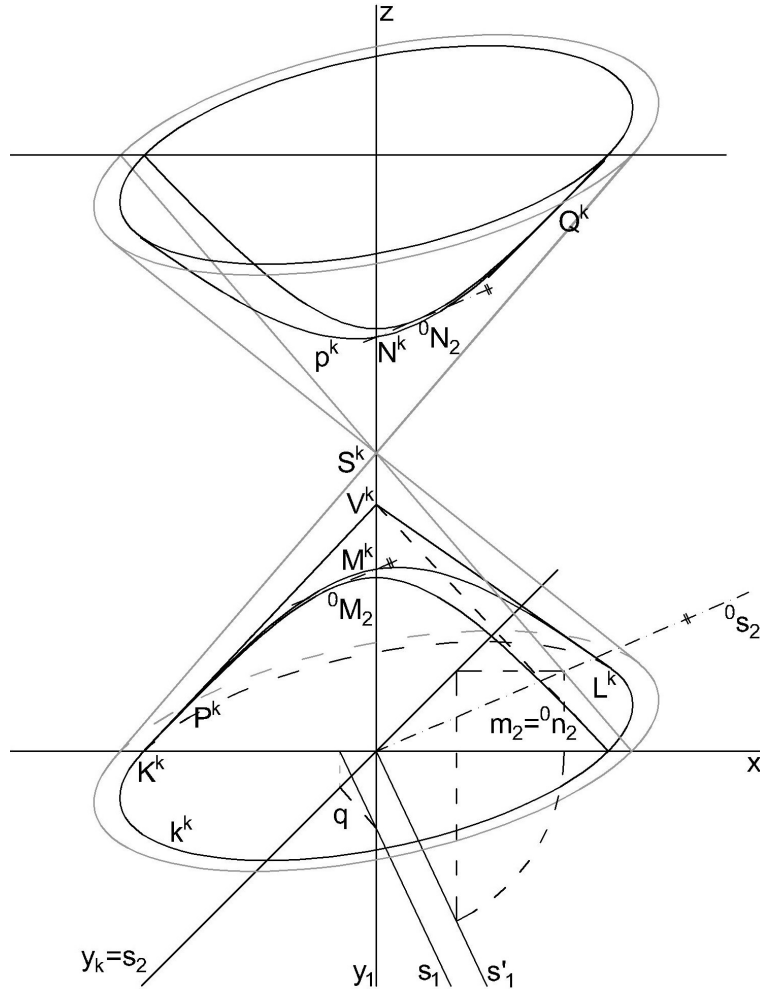
$P_2, Q_2$  splynou s jejich kosoúhlými průměty a v těchto bodech se dotýkají elipsy  $m_2$  a  $p^k$ . Body  $P, Q$  jsou body dotyku tečen  $m_2$  rovnoběžných s  $s_2$ .

Vedeme-li počátkem  $O^k$  soustavy souřadné přímkou  $s' \parallel s$ , pak rovina  $\lambda = zs'$  protíná elipsoid ve světelném meridiánu  $n$ . Rovinu  $\lambda$  otočíme kolem stopy  $z$  do náryсны. Světelný meridián  $n$  se otočí do meridiánu  $m$ . Body  $M, N$  meze vlastního stínu na světelném meridiánu určíme pomocí válcové metody. K meridiánu  ${}^0n_2 = m_2^k$  sestrojíme tečny rovnoběžné s  ${}^0s_2$ , najdeme body  ${}^0M_2, {}^0N_2$  dotyku a otočíme je zpět. Kosoúhlé průměty  $M^k, N^k$  leží na ose  $z$ .

Body  $K, L$  na rovníku  $r$  určíme pomocí kuželové metody. Rovníku  $r$  opíšeme rotační dotykovou válcovou plochu. Její obrys tvoří tečny elipsy  $r^k$  rovnoběžné s osou  $z$ , které jsou zároveň tečnami elipsy  $p^k$ . Body dotyku označíme  $K^k, L^k$ . Protože průměr  $M^kN^k$  leží na  $z$ , jsou průměry  $M^kN^k$  a  $K^kL^k$  sdružené a jednoznačně určují elipsu  $p^k$ . (Obr. 5.3)

**Úloha 5.4:** V kosoúhlém promítání zobrazte průmět dvojdílného rotačního hyperboloidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ .

**Řešení**



Obr. 5.4

Osa dvojdílného rotačního hyperboloidu leží v narysně, jejím druhým průmětem v přidružené Mongeově projekci je řídicí hyperbola  $m_2$ . Obrys  $p$  hyperboloidu sestrojíme pomocí osvětlení daného směrem promítání. Sestrojíme půdorys  $s_1$  a narys  $s_2$  osvětlení podle Obr. 3.4.

Zobrazíme průmět asymptotické kuželové plochy  $\Omega$ . Máme její střed  $S$  a sestrojíme elipsu  $k^k$ , která je její hraniční rovnoběžkou v půdorysně. Obrysové přímky jsou tečny vedené z  $S^k$  k elipse  $k^k$ .



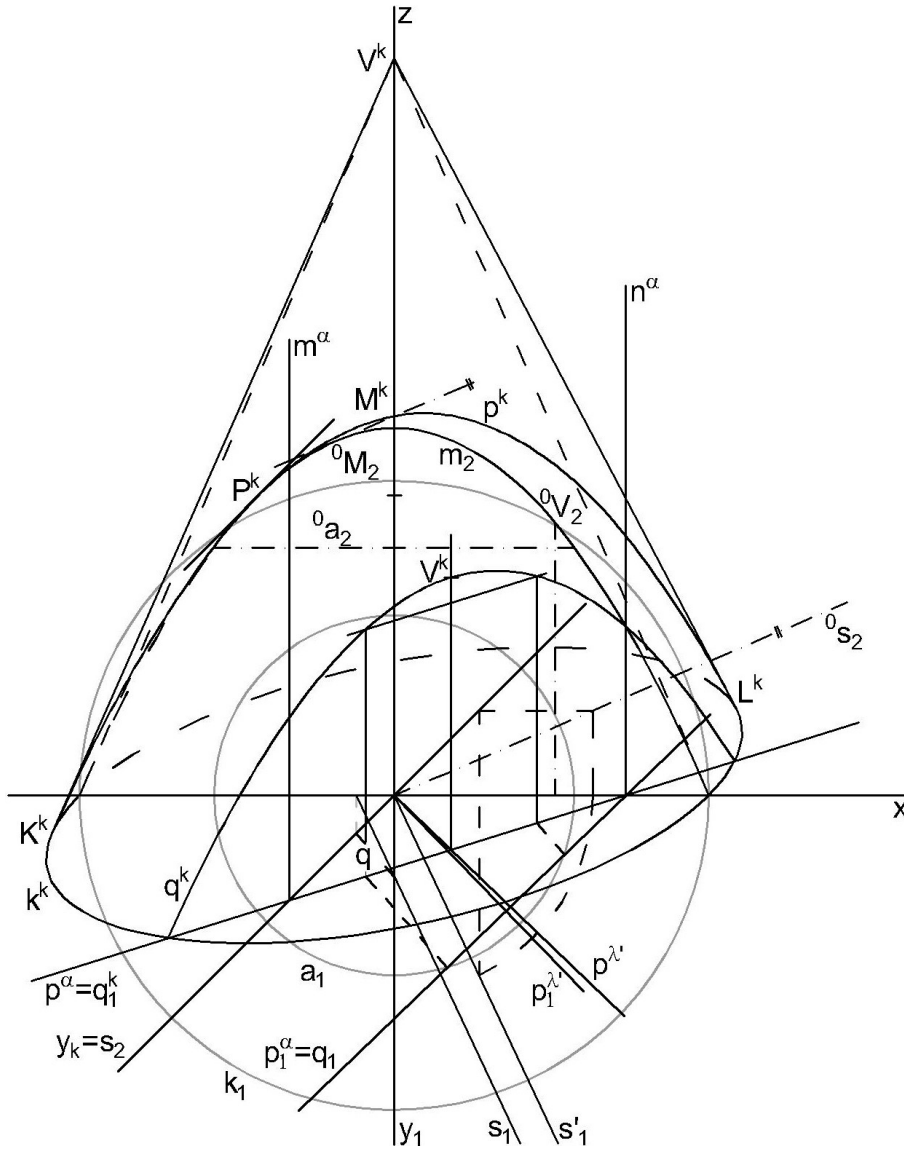
Body  $P, Q$  meze  $p$  na hlavním meridiánu  $m$  určíme pomocí válcové metody. Body  $P, Q$  meridiánu  $m$  leží v nárýsně, proto jejich nárýsy  $P_2, Q_2$  splynou s jejich kosoúhlými průměty a v těchto bodech se dotýkají hyperboly  $m_2$  a  $p^k$ . Body  $P^k, Q^k$  jsou body dotyku tečen  $m_2$  rovnoběžných s  $s_2$ .

Vedeme-li počátkem  $O^k$  soustavy souřadné přímku  $s' \parallel s$ , pak rovina  $\lambda = zs'$  protíná hyperboloid ve světelném meridiánu  $n$ . Rovinu  $\lambda$  otočíme kolem stopy  $z$  do nárýsny. Světelný meridián  $n$  se otočí do meridiánu  $m$ . Body  $M, N$  meze vlastního stínu na světelném meridiánu určíme pomocí válcové metody. K meridiánu  ${}^0n_2 = m_2^k$  sestrojíme tečny rovnoběžné s  ${}^0s_2$ , najdeme body  ${}^0M_2, {}^0N_2$  dotyku a otočíme je zpět. Kosoúhlé průměty  $M^k, N^k$  leží na ose  $z$ .

Body  $K, L$  na hraniční rovnoběžce  $k$  určíme pomocí dotykové kuželové plochy  $\Omega'$ . Rovnoběžce  $k$  opíšeme rotační dotykovou kuželovou plochu  $\Omega'$ . Tečny meridiánu  $m$  v krajních bodech jsou povrchové přímky rotační dotykové kuželové plochy  $\Omega'$  ležící v nárýsně. Vrchol  $V^k$  leží tedy na ose  $z$ . Obrys rotační dotykové kuželové plochy  $\Omega'$  tvoří tečny elipsy  $k^k$  z vrcholu  $V^k$ , které jsou zároveň tečnami hyperboly  $p^k$ . Body dotyku označíme  $K^k, L^k$ . Hyperbola  $p^k$  je středem  $S^k$ , asymptotami a sestrojenými body jednoznačně určená. (Obr. 5.4)

**Úloha 5.5:** V kosoúhlém promítání zobrazte průmět rotačního paraboloidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ . Sestrojte řez rotačního paraboloidu  $\Phi(z, m)$  rovinou  $\rho$ .

**Řešení**



Obr. 5.5

Osa rotačního paraboloidu leží v nárysně, jejím druhým průmětem v přidružené Mongeově projekci je řídicí parabola  $m_2$ . Obrys  $p$  paraboloidu sestrojíme pomocí osvětlení daného směrem promítání. Sestrojíme půdorys  $s_1$  a nárys  $s_2$  osvětlení podle Obr. 3.4.

Bod  $P$  meze  $p$  na hlavním meridiánu  $m$  určíme pomocí válcové metody. Bod  $P$  meridiánu  $m$  leží v nárysně, proto jeho nárys  $P_2$  splyne s jeho kosoúhlým průmětem a v tomto bodě se dotýká paraboly  $m_2$  a  $p^k$ . Bod  $P$  je bod dotyku tečny  $m_2$  rovnoběžné s  $s_2$ .

Vedeme-li počátkem  $O^k$  soustavy souřadné přímku  $s' \parallel s$ , pak rovina  $\lambda = zs'$  protíná paraboloid ve světelném meridiánu  $n$ . Rovinu  $\lambda$  otočíme kolem stopy  $z$  do náryсны. Světelný meridián  $n$  se otočí do meridiánu  $m$ . Bod  $M$  meze vlastního stínu na světelném meridiánu určíme pomocí válcové metody. K meridiánu  ${}^0n_2 = m_2$  sestrojíme tečnu rovnoběžnou s  ${}^0s_2$ , najdeme bod  ${}^0M_2$  dotyku a otočíme ho zpět. Kosoúhlý průmět  $M^k$  leží na ose  $z$ .

Body  $K, L$  na hraniční rovnoběžce  $k$  určíme pomocí dotykové kuželové plochy  $\Omega'$ . Rovnoběžce  $k$  opišeme rotační dotykovou kuželovou plochu  $\Omega'$ . Tečny meridiánu  $m$  v krajních bodech jsou povrchové přímky rotační dotykové kuželové plochy  $\Omega'$  ležící v nárysně. Vrchol  $V^k$  leží tedy na ose  $z$ . Obrys rotační dotykové kuželové plochy  $\Omega'$  tvoří tečny elipsy  $k^k$  z vrcholu  $V^k$ , které jsou zároveň tečnami paraboly  $p^k$ . Body dotyku označíme  $K^k, L^k$ . Body  $K^k, L^k, M^k$  a tečnami v bodech  $K^k, L^k$  je parabola  $p^k$  jednoznačně určená.

Rovina  $\rho$  je kolmá k půdorysně, řezem  $q$  paraboloidu rovinou  $\rho$  bude parabola. Rovina  $\lambda'$  je rovina souměrnosti řezu. Bod  $V$  určíme otočením roviny  $\lambda'$  do náryсны. Body na libovolné rovnoběžce  $a$  určíme v půdoryse přidružené Mongeovy projekce. Určíme průsečíky  $a_1$  a  $q_1$  a sestrojíme jejich kosoúhlé průměty. Určíme dostačný počet bodů řezu  $q^k$  a parabolu  $p^k$  sestrojíme. (Obr. 5.5)



$S$  a sestrojíme elipsu  $k^k$ , která je její hraniční rovnoběžkou v půdorysně. Obrysové přímky jsou tečny vedené z  $S^k$  k elipse  $k^k$ .

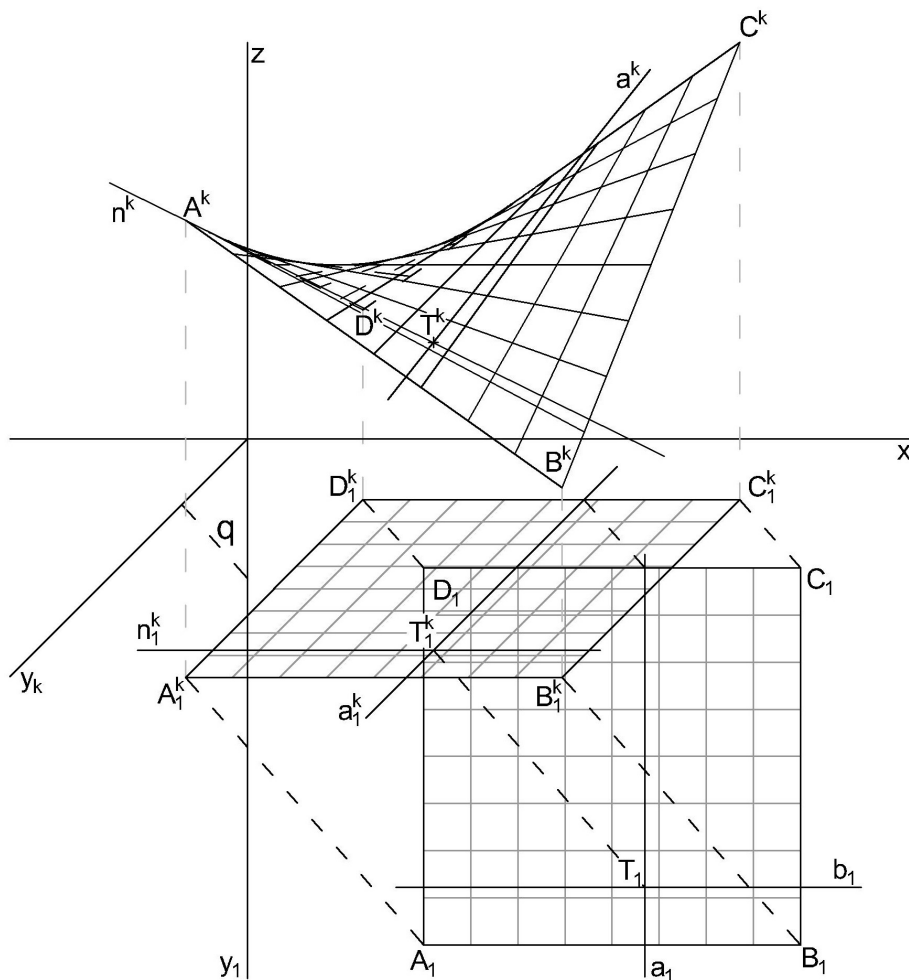
Body  $M, N$  na hrdelní rovnoběžce  $h$  určíme pomocí kuželové metody. Hrdlu  $h$  opíšeme rotační dotykovou válcovou plochu. Její obrys tvoří tečny elipsy  $h^k$  rovnoběžné s osou  $z$ , které jsou zároveň tečnami hyperboly  $p^k$ .

Body  $K, L$  na hraniční rovnoběžce  $k$  určíme pomocí dotykové kuželové plochy  $\Omega'$ . Rovnoběžce  $k$  opíšeme rotační dotykovou kuželovou plochu  $\Omega'$ . Tečny meridiánu  $m$  v krajních bodech jsou povrchové přímky rotační dotykové kuželové plochy  $\Omega'$  ležící v nárýsně. Vrchol  $V^k$  leží tedy na ose  $z$ . Obrys rotační dotykové kuželové plochy  $\Omega'$  tvoří tečny elipsy  $k^k$  z vrcholu  $V^k$ , které jsou zároveň tečnami hyperboly  $p^k$ . Body dotyku označíme  $K^k, L^k$ . Hyperbola  $p^k$  je středem  $S^k$ , asymptotami, body  $K^k, L^k, M^k, N^k$  a tečnami v těchto bodech jednoznačně určená.

Tečnou rovinu  $\tau$  jednodílného rotačního hyperboloidu v bodě  $T$  sestrojíme v otočení. Do nárýsny otočíme rovinu  $\lambda'$  meridiánu  $n$ , ve kterém leží bod  $T$ . V otočení se tečná rovina  $\tau$  zobrazí jako tečna  ${}^0\tau$  hlavního meridiánu  $m_2$  v bodě  ${}^0T_2$ . Rovinu  $\tau$  otočíme zpět. Rovina  $\tau$  protne hyperboloid ve dvojici přímek  $a, n$  různých regulů. Přímky  $a^k, n^k$  prochází bodem  $T^k$  a průsečíky půdorysné stopy  $p^\tau$  roviny  $\tau$  s hraniční rovnoběžkou  $k^k$  hyperboloidu. (Obr. 5.6)

**Úloha 5.7:** V kosoúhlém promítání zobrazte část hyperbolického paraboloidu  $\Phi$ , který je určený zborceným čtyřúhelníkem  $ABCD$ . Sestrojte alespoň sedm přímek každého regulu a tečnou rovinu  $\tau$  v bodě  $T$ . Bod  $T$  je bodem plochy a je určený svým průmětem  $T_1^k$  v půdorysně. (Obr. 5.7)

### Řešení



Obr. 5.7

Sestrojíme pravoúhlý průmět hyperbolického paraboloidu do půdorysny  $\pi$ . Ten ohraničíme pravoúhlými průměty  $A_1^k B_1^k C_1^k D_1^k$  bodů zborceného čtyřúhelníku  $A^k B^k C^k D^k$ . Sestrojíme průměty  $A_1 B_1 C_1 D_1$  bodů  $A_1^k B_1^k C_1^k D_1^k$  v půdorysně přidruženého Mongeova promítání. Přímky prvního i druhého regulu sestrojíme napřed v přidruženém Mongeově promítání. Strany  $A_1 B_1$  a  $C_1 D_1$  rozdělíme na osm stejných částí. Tím je

určeno sedm přímků jednoho regulu v půdorysně přidruženého Mongeova promítání. Stejným způsobem sestrojíme průměty přímků druhého regulu. Strany  $A_1D_1$  a  $B_1C_1$  rozdělíme na osm stejných částí. Tím je určeno sedm přímků druhého regulu. Nyní sestrojíme jejich kosoúhlé průměty.

Tečná rovina  $\tau$  v bodě  $T$  protne hyperbolický paraboloid ve dvou přímkách  $a, n$  dvou různých regulů. Sestrojíme průmět  $T_1$  bodu  $T$  v půdorysně přidruženého Mongeova promítání. Bodem  $t_1$  vedeme průměty  $a_1, n_1$  přímků  $a, n$  a sestrojíme jejich kosoúhlé průměty  $a^k n^k$ . Přímkami  $a^k n^k$  je tečná rovina  $\tau$  hyperbolického paraboloidu v bodě  $T$  jednoznačně určena. (Obr. 5.7)

## Závěr

Cílem této diplomové práce bylo seznámit čtenáře se zobrazení kvadrik v pravoúhlé axonometrii a kosoúhlém promítání. Tyto cíle byly splněny především pomocí řešených úloh a jejich vhodně zvoleným zadáním.

Teorie nutná pro řešení úloh je uvedena v prvních třech kapitolách. Stežejní části této práce byly čtvrtá a pátá kapitola, které obsahují řešené příklady. Všechny úlohy v těchto kapitolách obsahují stručný popis řešení a řešení všech úloh jsou zde narýsovaná. Některé běžně používané konstrukce nejsou v řešení pro přehlednost zobrazeny. Zadání jednotlivých úloh jsou přiložena v příloze.

Toto téma se objevuje v dostupné literatuře jen jako okrajová oblast, proto by tato práce mohla sloužit jako rozšiřující studijní materiál k prohloubení znalostí o pravoúhlé axonometrii a kosoúhlém promítání.

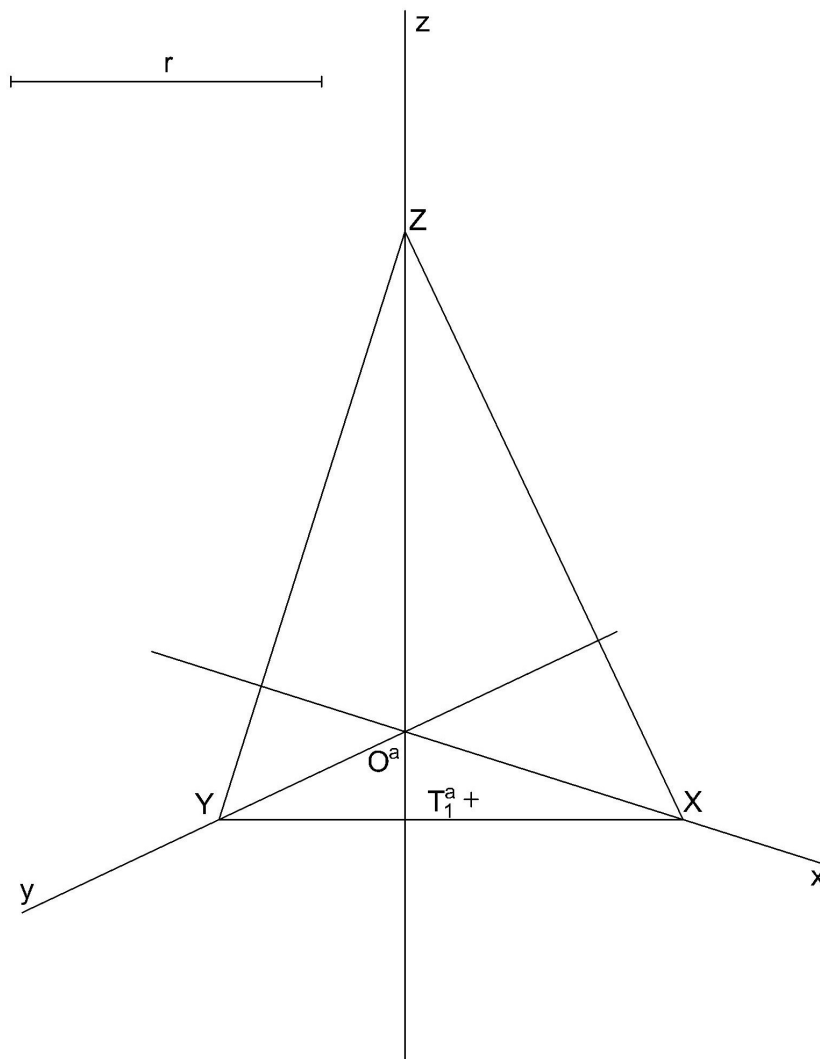


## Použitá literatura

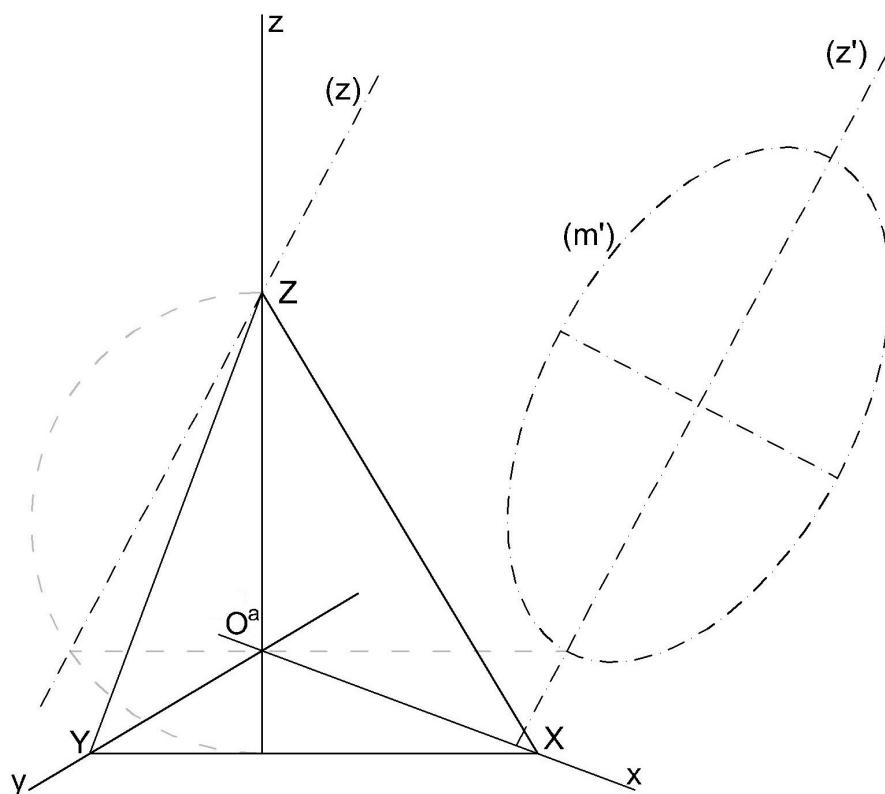
1. Kadeřávek, F., Klíma, J., Kounovský, J., *Deskriptivní geometrie I*, ČSAV Praha 1954
2. Kadeřávek, F., Klíma, J., Kounovský, J., *Deskriptivní geometrie II*, ČSAV Praha 1954
3. Urban, A., *Deskriptivní geometrie I*, SNTL/SVTL Praha 1965
4. Piska, R., Medek, V., *Deskriptivní geometrie I*, SNTL/SVTL Praha 1966
5. Piska, R., Medek, V., *Deskriptivní geometrie II*, SNTL/SVTL Praha 1966
6. Machala, F., *Rotační plochy*, skriptum UP 1992
7. Juklová, L., *Rotační plochy*, skriptum UP 2013
8. Jukl, M., *Analytická geometrie*, skriptum UP 2014

## Přílohy

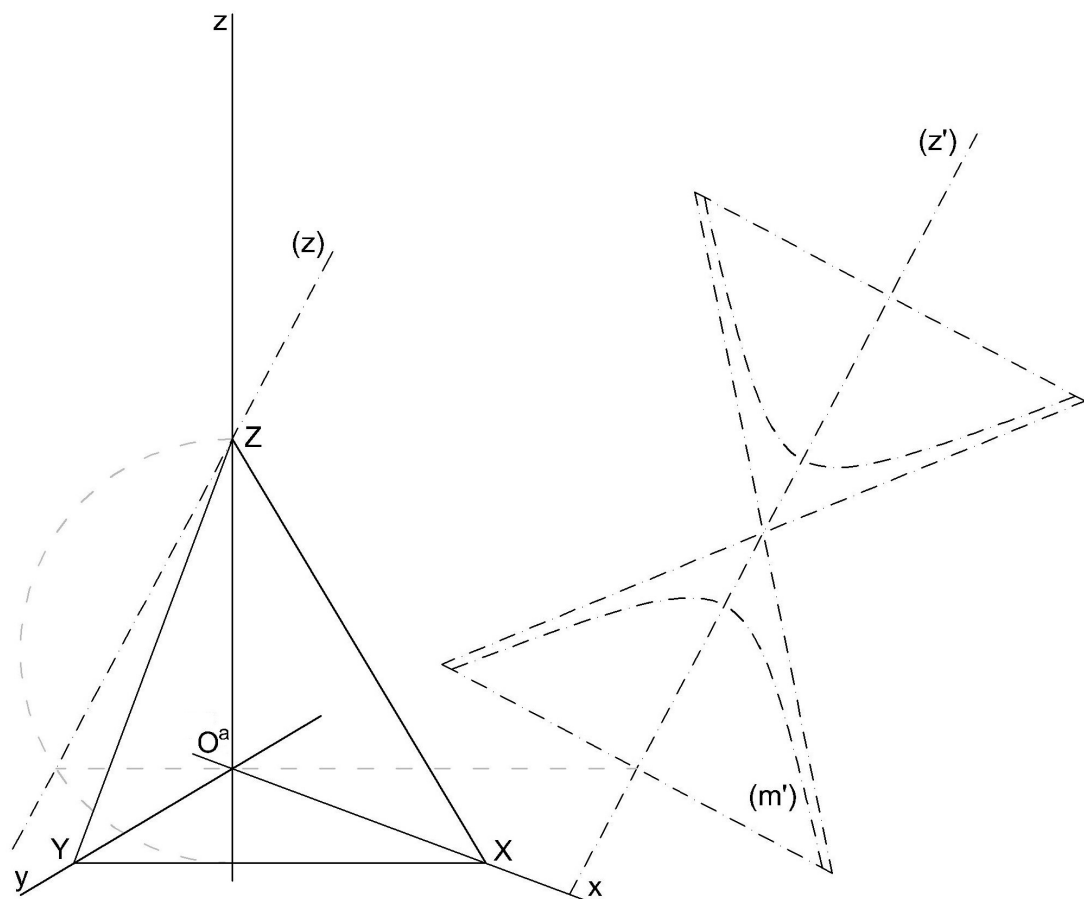
**Úloha 4.1:** V pravoúhlé axonometrii zobrazte kulovou plochu  $\kappa$ , je-li dán její střed  $O$  a poloměr  $r$ . V daném bodě  $T$  plochy sestrojte tečnou rovinu  $\tau$ . Bod  $T$  je dán svým průmětem  $T_1^a$  v půdorysně a platí,  $z_T > 0$ .



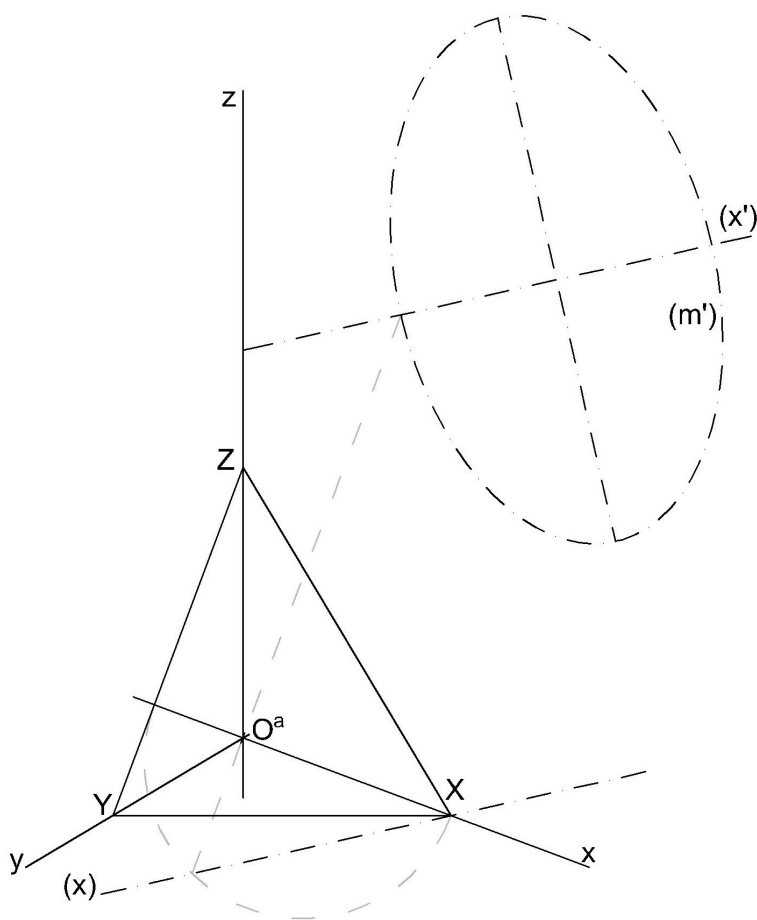
**Úloha 4.2:** V pravouhlé axonometrii zobrazte průmět protáhlého rotačního elipsoidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ .



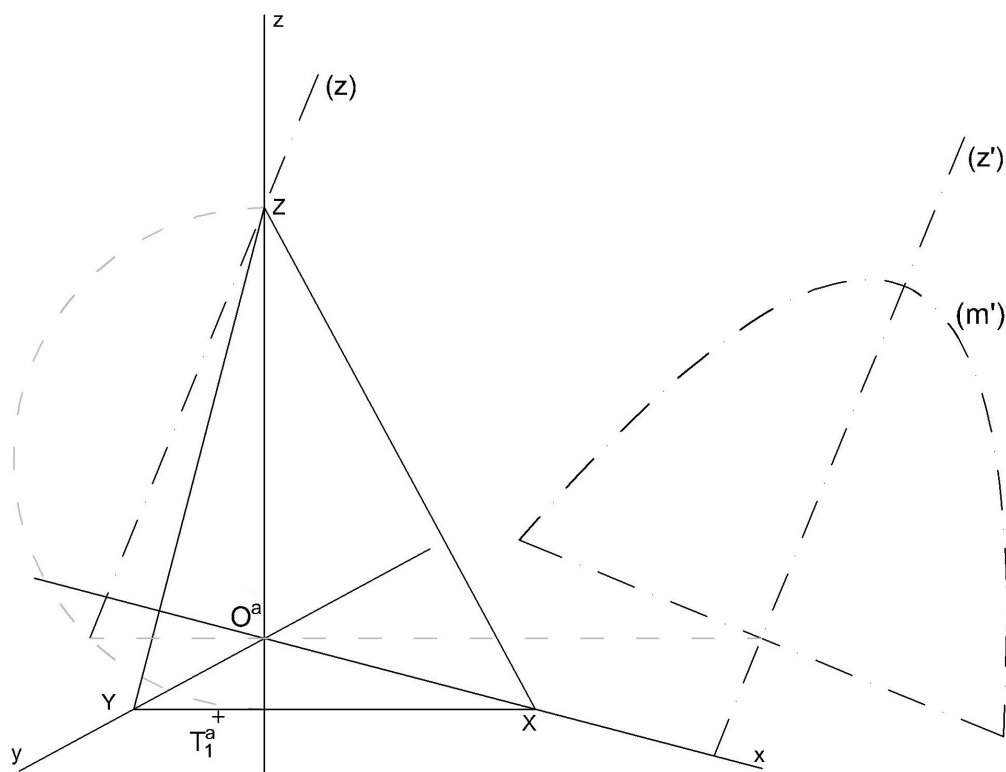
**Úloha 4.3:** V pravouhlé axonometrii zobrazte průmět dvojdielného rotačního hyperboloidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ .



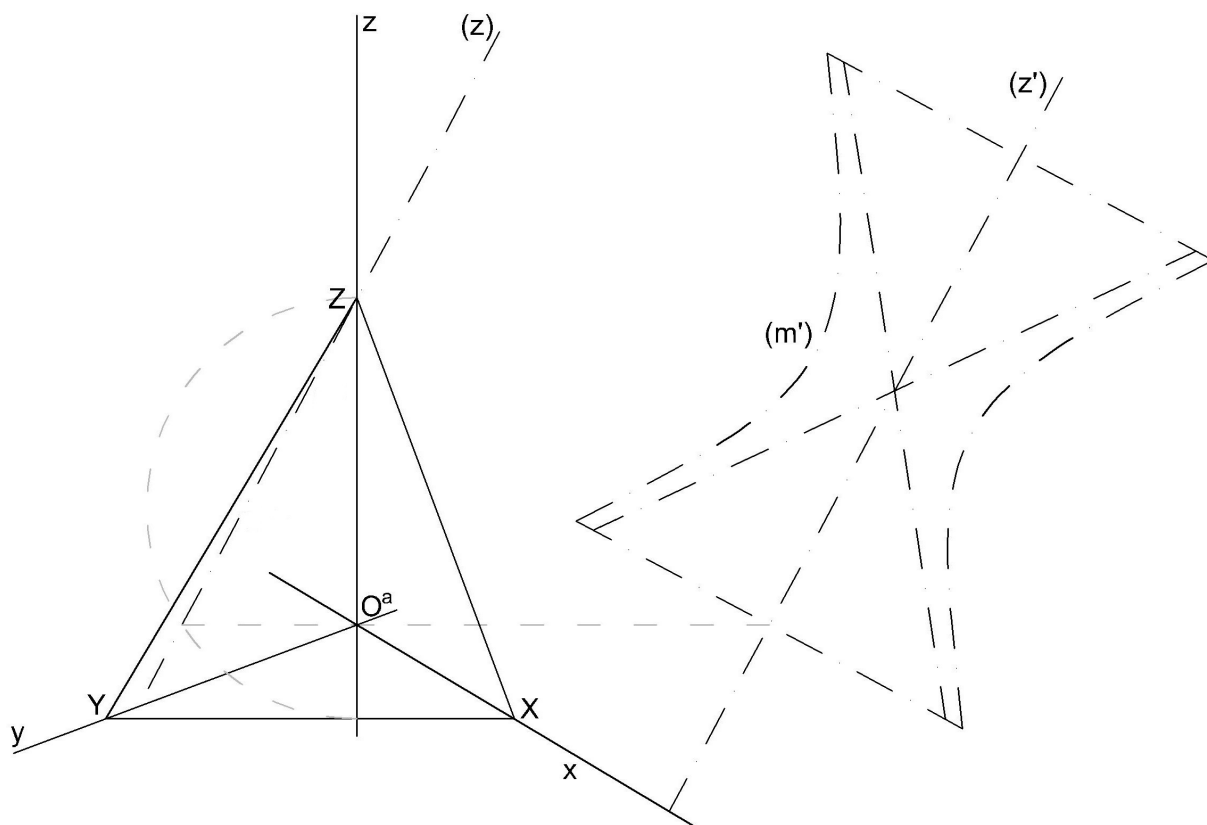
**Úloha 4.4:** V pravouhlé axonometrii zobrazte průmět zploštělého rotačního elipsoidu  $\Phi(x, m)$ , jehož osa splyne s osou  $x$ .



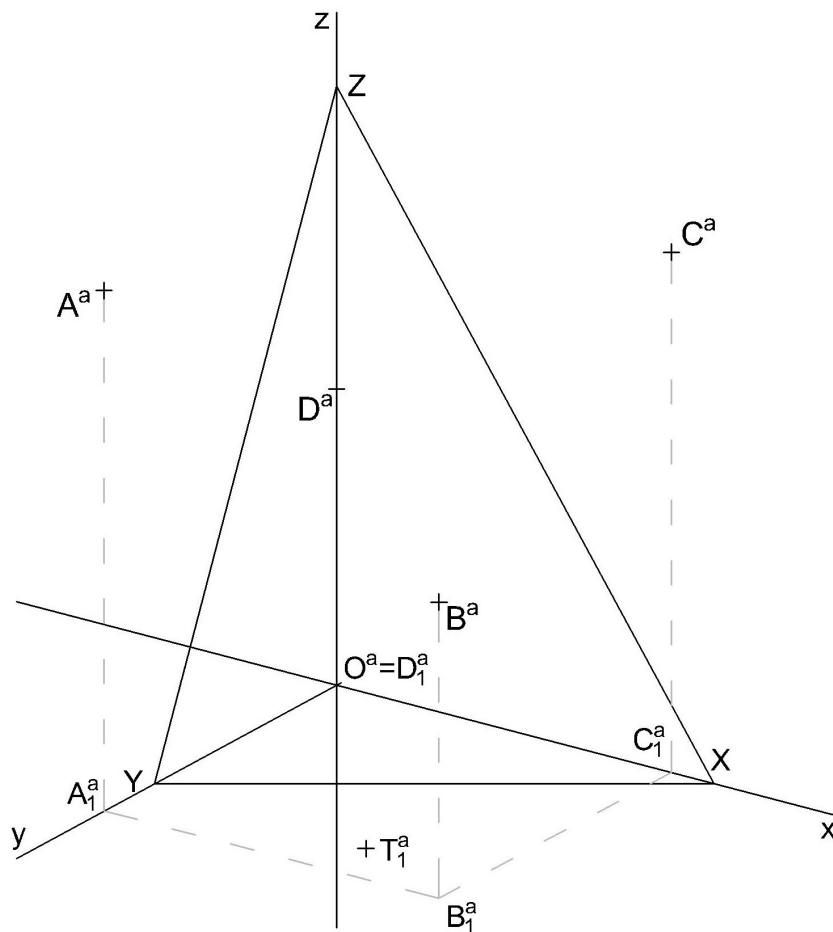
**Úloha 4.5:** V pravoúhlé axonometrii zobrazte průmět rotačního paraboloidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ . V daném bodě  $T$  plochy sestrojte tečnou rovinu. Bod  $T$  je dán svým průmětem  $T_1^a$  v půdorysně.



**Úloha 4.6:** V pravoúhlé axonometrii zobrazte průmět jednodílného rotačního hyperboloidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ . Sestrojte řez asymptotickou rovinou  $\alpha$ , která se dotýká asymptotické kuželové plochy podél libovolné přímky  $a'$ .

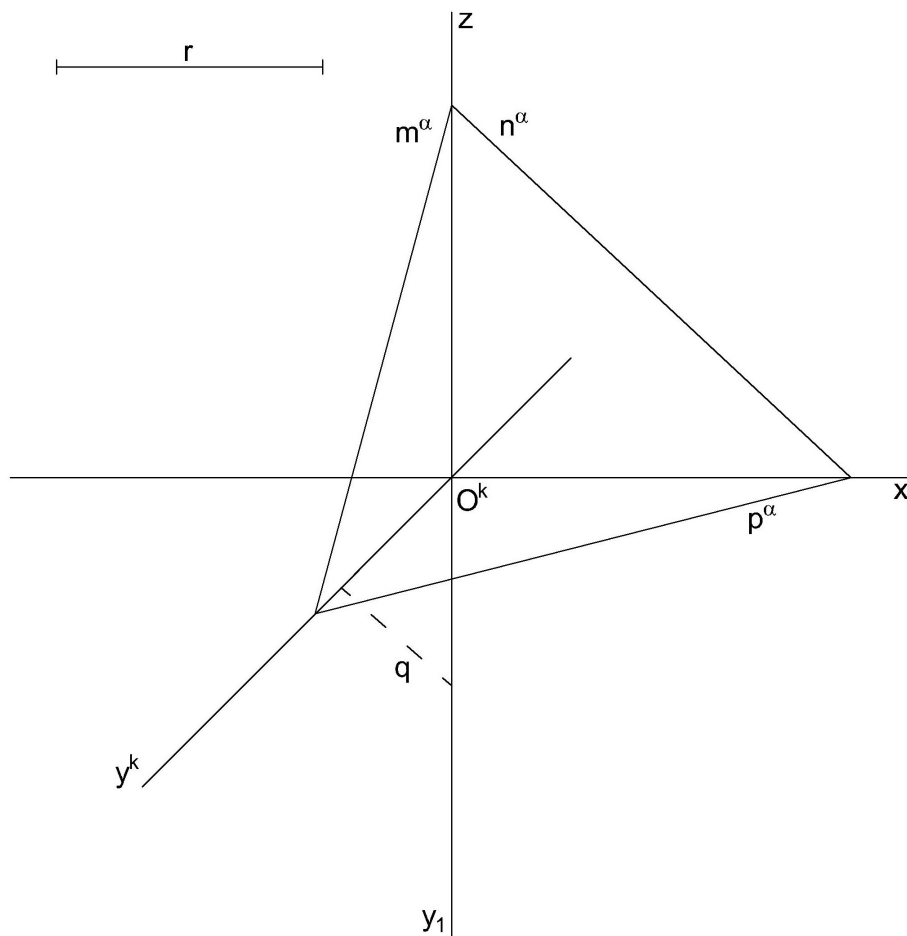


**Úloha 4.7:** V pravouhlé axonometrii zobrazte část hyperbolického paraboloidu, který je určený zborceným čtyřúhelníkem  $ABCD$ . Sestrojte alespoň sedm přímek každého regulu a tečnou rovinu  $\tau$  v bodě  $T$ . Bod  $T$  je bodem plochy a je určený svým průmětem  $T_1^a$  v půdorysně.

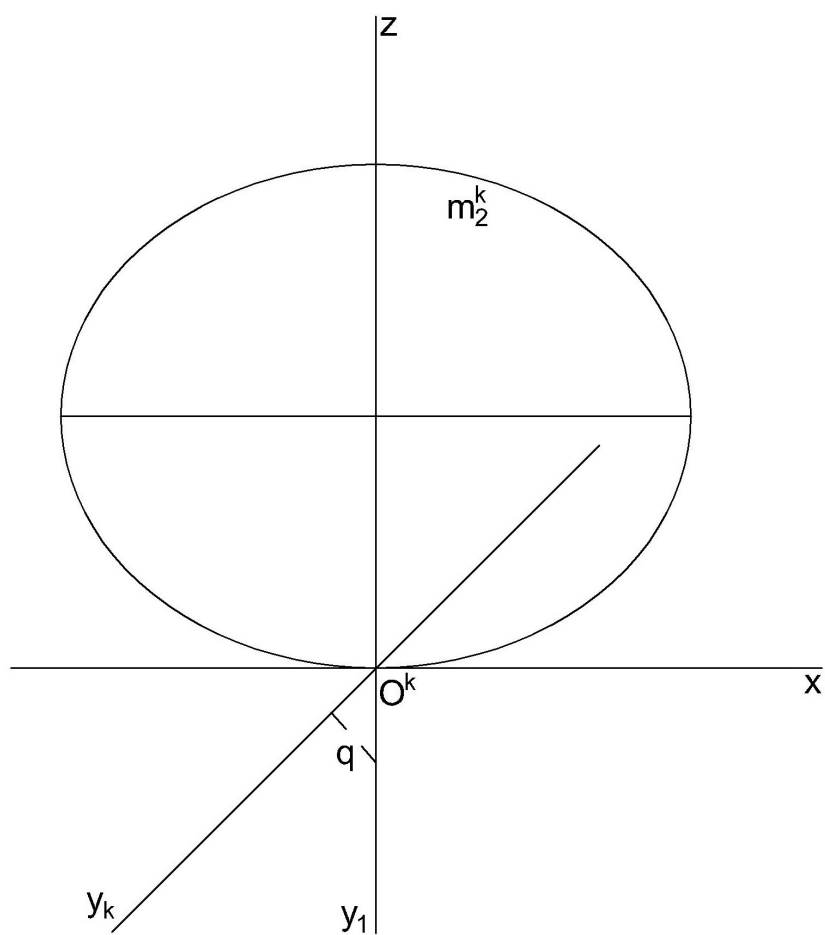




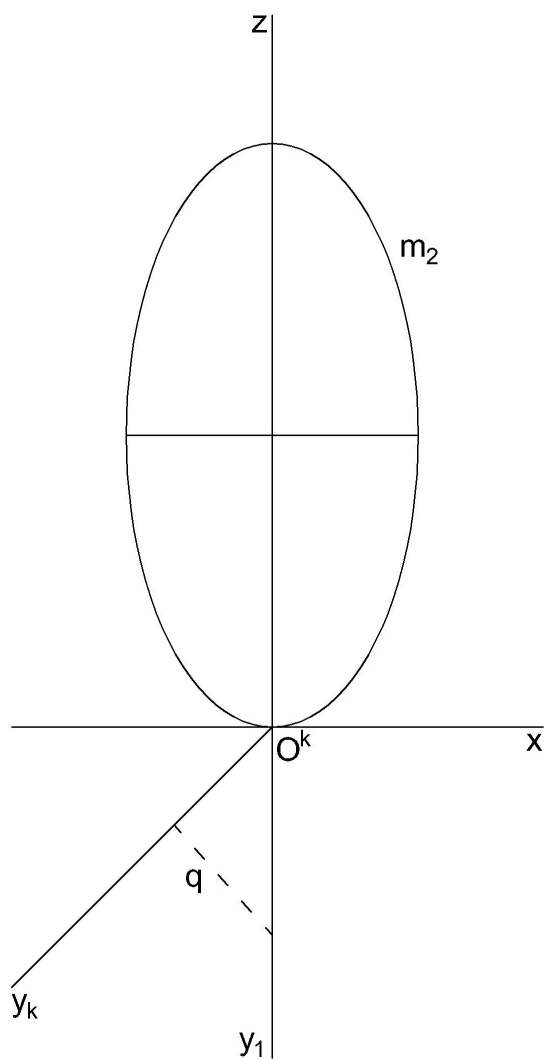
**Úloha 5.1:** V kosoúhlém promítání ( $\omega = 135^\circ, q = \frac{3}{4}$ ) zobrazte rotační kulovou plochu  $\kappa$ , je-li dán její střed  $O$  a poloměr  $r$ . Se-strojte řez kulové plochy  $\kappa$  rovinou  $\alpha$ .



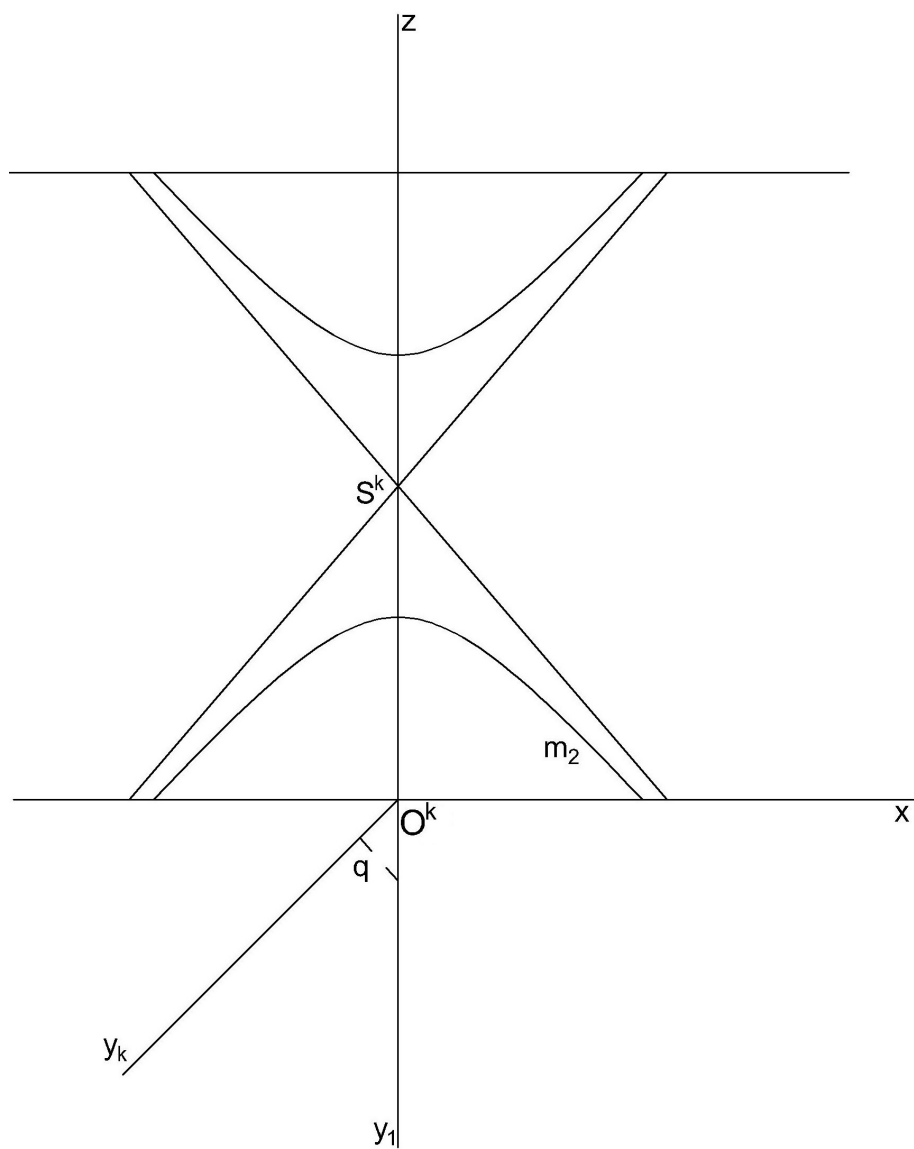
**Úloha 5.2:** V kosoúhlém promítání zobrazte průmět zploštělého rotačního elipsoidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ .



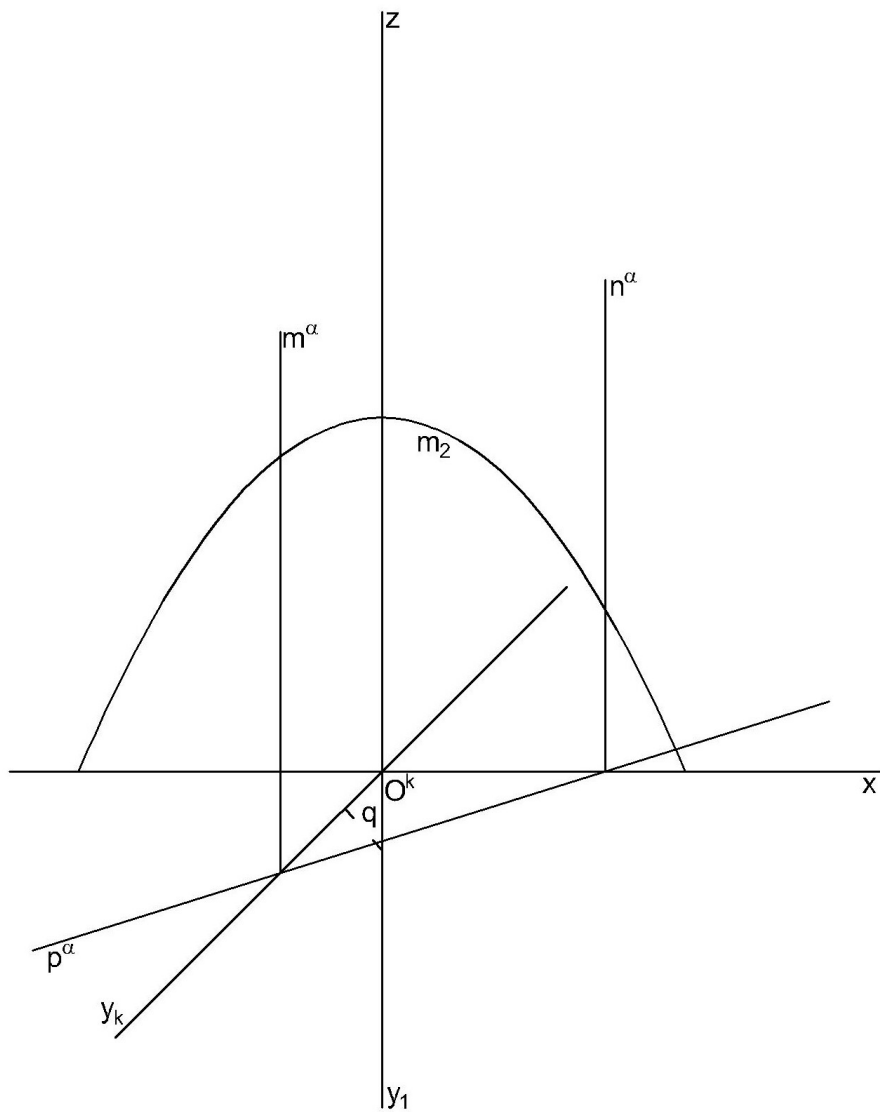
**Úloha 5.3:** V kosoúhlém promítání zobrazte průmět protáhlého rotačního elipsoidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ .



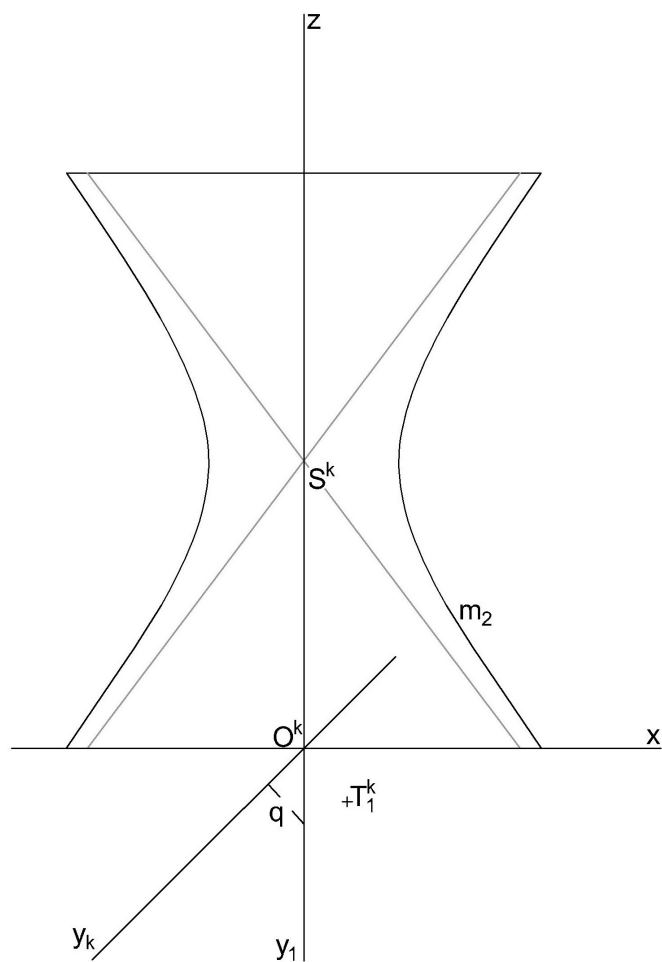
**Úloha 5.4:** V kosoháhlém promítání zobrazte průmět dvojdielného rotačního hyperboloidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ .



**Úloha 5.5:** V kosoúhlém promítání zobrazte průmět rotačního paraboloidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ . Sestrojte řez rotačního paraboloidu  $\Phi(z, m)$  rovinou  $\rho$ .



**Úloha 5.6:** V kosoúhlém promítání zobrazte průmět jednoduchého rotačního hyperboloidu  $\Phi(z, m)$ , jehož osa splyne s osou  $z$ . Sestrojte tečnou rovinu  $\tau$  v bodě  $T$ . Bod  $T$  je bodem plochy a je určený svým průmětem  $T_1^k$  v půdorysně a platí,  $z_T < z_S$ .



**Úloha 5.7:** V kosoúhlém promítání zobrazte průmět hyperbolického paraboloidu  $\Phi$ , který je určený zborceným čtyřúhelníkem  $ABCD$ . Sestrojte alespoň sedm přímek každého regulu a tečnou rovinu  $\tau$  v bodě  $T$ . Bod  $T$  je bodem plochy a je určený svým průmětem  $T_1^k$  v půdorysně.

