Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Číselné soustavy

Bakalářská práce

Autor: Jana Rémišová

Studijní program: B1101 Matematika

Studijní obor: Historie se zaměřením na vzdělávání

Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: RNDr. Ladislava Francová, Ph.D.

Hradec Králové květen 2015

Univerzita Hrade Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání bakalářské práce

Autor:	**Jana Rémišová**
Studijní program:	B1101 Matematika
Studijní obor:	Historie se zaměřením na vzdělávání Matematika se zaměřením na vzdělávání
Název práce:	Číselné soustavy
Název práce v AJ:	Number Systems
Cíl a metody práce:	Cílem této bakalářské práce je podat základní poznatky o číselných soustavách. Okrajově budou zmíněny nepoziční číselné soustavy. Hlavní kapitola se bude týkat soustav pozičních. Na závěr sestavím sbírku řešených i neřešených příkladů.
Garantující pracoviště:	Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Vedoucí práce:	RNDr. Ladislava Francová, Ph.D.
Konzultant:	
Oponent:	RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.
Datum zadání práce:	20.2.2013
Datum odevzdání práce:	

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci na téma Číselné soustavy vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne 4.5.2015

……………………………………………

Jméno a příjmení

Poděkování

Ráda bych poděkovala RNDr. Ladislavě Francové, Ph.D, vedoucí mé bakalářské práce za zájem, vedení, cenné rady a čas, který mi věnovala. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům za podporu a pomoc během studia.

Anotace

RÉMIŠOVÁ, J. *Číselné soustavy*. Hradec Králové, 2015. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí bakalářské práce Ladislava Francová. 41 s.

Bakalářská práce je zaměřena na osvojení a upevnění základních poznatků o číselných soustavách. Hlavní kapitola je věnována pozičním číselným soustavám. Pro lepší pochopení teorie je zde sestavena sbírka řešených i neřešených příkladů. Celá práce by měla sloužit k lepšímu pochopení této problematiky.

Klíčová slova

matematika, číselné soustavy, poziční, rozvoj, příklady

Annotation

RÉMIŠOVÁ, J. *Number Systems.* Hradec Králové, 2015. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Ladislava Francová. 41 p.

Bachelor thesis is focused on the acquisition and consolidation of basic knowledge of number systems. The main chapter is devoted to the numerical positional systems. For a better understanding of the theory, there is prepared a collection of solved and unsolved examples. The entire work should serve to better understand the issue.

Keywords

mathematics, number systems, positional, development, examples

OBSAH

Úvod

Číselné soustavy jsou součástí nejen matematiky ale také informatiky. Tato bakalářská práce bude na číselné soustavy pohlížet především z pohledu matematiky.

Každá číselná soustava má své určené znaky, které vyjadřují potřebné hodnoty. V dnešní době se jedná především o arabské číslice. U soustav o větším základu než deset se dále ještě používají velká písmena abecedy. Samozřejmě to není pravidlem pro všechny číselné soustavy. Dobrým příkladem je římská numerace, ve které se používá pouze sedm daných písmen a jejich kombinace.

Objevení poziční desítkové soustavy nám dnes umožňuje snazší zápis vysokých čísel. Ve dvojkové soustavě by byl zápis těchto čísel příliš dlouhý. Dnes se dvojková soustava využívá především v počítačové technologii a logice. Dřívější matematici však uvažovali o svých deseti prstech, které jim plnily úlohu „počítacího stroje". Už ve starověku vznikaly další soustavy o jiných základech, ale tento argument je jediný, jenž nám může vysvětlovat prvotní vznik desítkové soustavy.

Číselné soustavy můžeme rozdělit na poziční a nepoziční. V nepozičních číselných soustavách nezáleží na pořadí, v pozičních na pořadí záleží.

Přirozených čísel je nekonečně mnoho, proto nemůžeme mít pro každé z nich zvláštní symbol. Kdybychom chtěli každé přirozené číslo pojmenovat nějakým specifickým názvem nebo ho zapsat zvláštním znakem, nedokázali bychom vytvořit takto širokou škálu názvů ani znaků.

1 Nepoziční číselné soustavy

Nepoziční číselná soustava je reprezentace čísel, ve které je hodnota číslice dána pouze vlastní číslicí. Obvykle pro každou mocninu základu existuje zvláštní znak. Také v nich neexistuje znak pro nulu. Dnes už se tyto způsoby zápisu čísel téměř nepoužívají.

Za nejstarší nepoziční číselnou soustavu můžeme považovat numeraci jeskynního člověka, který zjišťoval počet věcí pomocí zářezů do hole nebo kosti. Užíval jeden číselný znak – čárka, zářez, který značil číslo jedna. Opakováním čárky mohl zapsat číslo větší než jedna. Při větších číslech se čárky sdružovaly do skupin po pěti pro lepší přehled. Dobrým příkladem tohoto sdružování je egyptská numerace.

1.1 Egyptská numerace

Tento způsob zapisování čísel byl užíván již před 5 000 lety. Vyvinul se z jednoduchého zápisu jeskynního člověka. Také staří Egypťané zapisovali čísla pomocí čárek, ale tvořili skupiny po deseti.

Pro představu by zápis čísla 24 pomocí čárek vypadal následovně:

|||||||||| |||||||||| ||||

Při zápisech vyšších čísel docházelo k velké nepřehlednosti, proto Egypťané zaved-li pro skupinu deseti čárek nový číselný znak:

|||||||||| = ∩

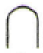
Po tomto zjednodušení by zápis čísla 24 vypadal takto:

∩∩||||

Následně došlo k dalšímu sdružování do skupin po deseti a tuto novou větší skupi-nu označili novým znakem:

∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩ = 

Díky opakovanému sdružování po deseti dostávali Egypťané stále větší skupiny, pro něž zaváděli nové číselné znaky, jak ukazuje následující obrázek.

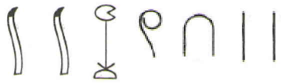
	1		10 000
	10		100 000
	100		1 000 000
	1 000		

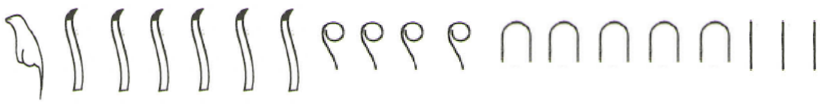
Příklad 1.:. *Zapište čísla 5, 14, 351, 21 112, 160 453 pomocí egyptské numerace*

5 - 

14 - 

351 - 

21 112 – 

160 453 - 

1.2 Řecká numerace

Po počátečních úpravách užívali Řekové složité soustavy s 27 písmeny řecké abecedy. Tato písmena měla význam číselných znaků. Užití písmen ukazuje následující tabulka:

α´	1	ι´	10	ϱ´	100
β´	2	ϰ´	20	σ´	200
γ´	3	λ´	30	τ´	300
δ´	4	μ´	40	υ´	400
ε´	5	ν´	50	φ´	500
ς´	6	ξ´	60	χ´	600
ζ´	7	ο´	70	ψ´	700
η´	8	π´	80	ω´	800
ϑ´	9	q´	90	ϡ´	900

Znaky pro 90 a 900 jsou stará řecká písmena, která už se v dnešní době nepoužívají. Aby Řekové odlišili číslice od písmen, psali nad číslicemi svislé čárky nebo vodorovné pruhy: α', $\bar{\alpha}$. Tisíce se vyjadřovaly pomocí čárky před písmeny: $,\alpha$, $,\beta$, $,\gamma$, $,\delta$, … . Takto upravené znaky značily tisíce

,α = 1000

,β = 2000

⋮

,ϑ = 9000 .

Velké písmeno M poté označovalo desetitisíce:

$$\overset{\beta}{M} = 20\,000 \ .$$

Příklad 1.: *Zapište čísla 14, 351, 2 112, 16 453 pomocí řecké numerace.*

14 - ι´ δ´

351 - τ´ ν´ α´

2 112 - , β ϱ΄ ι΄ β΄

α

16 453 - M ,ς υ΄ ν΄ γ΄

Z nepozičních soustav je zřejmě nejznámější římská numerace. Tato číselná soustava užívá 7 velkých písmen (I, V, X, L, C, D, M), která představují číselné znaky. Podobně jako v egyptské numeraci se mohou číselné znaky v zápise opakovat. Jestliže jsou číslice seřazeny od nejvyšších zleva doprava, pak se jednotlivé cifry sčítají. Pokud se nižší číslice zapsala před vyšší, potom dochází k odčítání.

2 Poziční číselné soustavy

Vytvoření pozičních číselných soustav patří v historii k nejvýznamnějším objevům. V pozičních soustavách je zápis čísel charakteristický tím, že *význam téhož znaku (číslice) závisí na jeho umístění (pozici)* v příslušném zápise. Na rozdíl od nepozičních soustav si v pozičních soustavách vystačíme s předem známým počtem znaků pro zápis libovolně velkých čísel.

Vznik číselných pozičních soustav o základech 5, 7, 9, 10, 12, 20 a 60 je historicky doložen. Zbytky některých výše zmíněných soustav se udržely ve speciálních případech dodnes. Například:

- soustava o základu 60 – měření úhlů ve stupních, minutách a sekundách,…
- soustava o základu 12 – pojmy tucet, veletucet,… .

Desítková poziční soustava byla vytvořena v Indii asi v 7. století. Pokusy o vytvoření byly však mnohem dříve. Novou soustavu však nejvíce docenili Arabové. Díky arabskému dílu, které se zabývalo aritmetikou, se tato soustava rozšířila i do Evropy. První zmínka byla zaznamenána v 10. století ve Španělsku. V Čechách se dekadický systém objevuje v matematických a astronomických textech.

2.1 Vyjádření přirozeného čísla v pozičních číselných soustavách

Vytvoření každé poziční soustavy souvisí s mocninami přirozených čísel. Nyní budeme považovat i číslo 0 za přirozené, potřebujeme upravit definici mocniny.

Definice 1. *Pro libovolné nenulové přirozené číslo x definujeme:*

(a) $x^0 = 1$

(b) je-li pro nějaké přirozené číslo n definováno x^n, pak $x^{n+1} = x^n \cdot x$.

Lemma 1.

(1) Pro každé $x \in \mathbb{N}$ *a každé* $z \in \mathbb{N}, z > 1$ *, platí:* $x < z^x$

(2) Ke každému $x \in \mathbb{N}, x \geq 1,$ *a ke každému* $z \in \mathbb{N}, z > 1,$ *existuje* $n \in \mathbb{N}. n \geq 1$ *tak, že* $z^{n-1} \leq x < z^n$

(3) Pro každé $x \in \mathbb{N}$ *je množina* $L_x = \{y \in \mathbb{N}; y < x\}$ *konečná množina.*

Důkaz: (1) Zvolme přirozené číslo $z > 1$ a označme $\varphi(x) \sim x < z^x$. Z formulí $0 < 1 = z^0$, $1 < z = z^1$ plyne, že platí $\varphi(0)$, $\varphi(1)$. Dále zvolme libovolné $x \neq 0$, pro něž bude platit φ, tj. $x < z^x$. Pak z tvrzení:

$$(\forall x)(\forall y)[x < y \Rightarrow (x+1 < y \ \vee \ x+1 = y)]$$

plyne: $xz < z^x z = z^{x+1}$,

$$1 < z \Rightarrow x < xz \Rightarrow x + 1 \leq xz.$$

Dohromady: $x + 1 < z^{x+1}$, což znamená, že φ platí také pro $x + 1$. Podle axiomu matematické indukce je tvrzení (1) dokázáno.

Axiom matematické indukce: Nechť $\varphi(x)$ je libovolná formule Peanovy aritmetiky, přičemž x je jedinou proměnnou, pak je formule

$$[\varphi(0) \wedge (\forall x)\big(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x+1)\big)] \Rightarrow (\forall x)\varphi(x) \quad \text{axiom.}$$

(2)Zvolme $x \neq 0, z > 1$ a označme $\mu(n) \sim x < z^n$. Podle předchozího důkazu (1) platí μ pro $n = x$. Podle tvrzení: *V Peanově aritmetice lze pro libovolnou formuli $\varphi(x)$ dokázat:* $(\exists z)\varphi(z) \Rightarrow (\exists!\, y)[\varphi(y) \wedge (\forall x)(\varphi(x) \Rightarrow y \leq x)$, existuje nejmenší n takové, že splňuje μ. Protože $x \geq 1$, pak nemůže být $n = 0$, takže $n - 1 \in \mathbb{N}$. Z minimálnosti n a z věty: $(\forall x)(\forall y)(x < y \vee y < x \vee x = y)$, *přičemž nastane právě jedna z těchto možností,* je dokázána (2).

(3) Pro konečnou množinu musí platit:

a)každá jednoprvková množina je konečná,

b)je-li M konečná, je i $M \cup \{x\}$ konečná množina,

což potřebujeme k tomuto důkazu. Pro $x = 1$ je $L_1 = \{y; y < 1\} = \{0\}$ konečná množina podle tvrzení, že každá jednoprvková množina je konečná.

Předpokládejme, že pro nějaké $x \in \mathbb{N}$ je L_x konečnou množinou. Jelikož podle následujících vět: $(\forall x)(x < x + 1)$

$$(\forall x)(\forall y)[x < y \Rightarrow (x+1 < y \ \vee \ x+1 = y)]$$

neexistuje žádné $z \in \mathbb{N}$ tak, aby $x < z < x + 1$, je množina

$$L_{x+1} = \{y; y < x+1\} = L_x \cup \{x\}$$

konečná podle tvrzení (3)a). Tedy podle axiomu matematické indukce je dokázána (3).

Věta 2.1. *(<u>Věta o dělení se zbytkem</u>)*

Nechť x, y jsou libovolná přirozená čísla taková, že $y \neq 0$. Pak existují jednoznačně určená přirozená čísla q, r tak, že

$$x = yq + r \ \ \wedge \ \ r < y$$

($Tj.\,(\forall x, y \in N, y \neq 0)(\exists!\, q, r \in N)(x = yq + r \ \wedge r < y)$). <1>

Důkaz: Zvolme libovolná přirozená čísla x a y, $y \neq 0$. Nejprve ukážeme existenci čísel q, r. Označme $\varphi(z) \sim x < yz$. Podle věty:

$$(\forall x)(\forall y)(y \neq 0 \Rightarrow (\exists z)x < yz)$$

existuje alespoň jedno přirozené číslo $z, x < yz$, takže platí $(\exists z)\varphi(z)$. Podle tvrzení:

$$(\exists z)\varphi(z) \Rightarrow (\exists!\, y)[\varphi(y) \wedge (\forall x)(\varphi(x) \Rightarrow y \leq x)]$$

existuje nejmenší z přirozených čísel, která splňují $\varphi(z)$, toto číslo označíme t. Z vět:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(x < y \wedge y < z) \Rightarrow (x < z)]\,,$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)x \cdot (y + z) = xy + xz$$

a z $x < yt$ plyne $t \neq 0$, takže existuje přirozené číslo q takové, že $q' = t$. Podle věty:

$$(x)(x < x')$$

víme, že $q < t$, proto z definice t plyne vztah $yq \leq x$. Jestliže $yq = x$, můžeme položit $r = 0$, $r < y$. Jestliže $yq < x$, existuje podle definice „<" číslo r tak, že $yq + r = x$. Kdyby bylo $y \leq r$, pak by existovalo v takové, že $y + v = r$. Potom

$$x = yq + r = yq + y + v = yq' + v = yt + v,$$

odkud plyne vztah $yt \leq x$, což je spor s $x < yt$. Tedy musí být i v tomto případě $r < y$. Existence čísel q, r je dokázána.

Nyní dokážeme, že tato dvojice existuje jediná. Dále předpokládejme, že existují dvě navzájem různé takovéto dvojice q_1, r_1 a q_2, r_2 pro které platí:

$$x = yq_1 + r_1 \quad \wedge \quad r_1 < y \qquad \text{<2>}$$
$$x = yq_2 + r_2 \quad \wedge \quad r_2 < y\,.$$

Tyto vztahy neztratí na všeobecnosti, když budeme předpokládat, že $r_1 \geq r_2$. Poté dostaneme:

$$yq_1 + r_1 = yq_2 + r_2$$
$$y(q_2 - q_1) = r_1 - r_2. \qquad \text{<3>}$$

Z toho vyplývá, že $y|(r_1 - r_2)$. Jestliže $r_1 - r_2 > 0$, potom platí $y \leq r_1 - r_2$, a to je spor s rovnostmi <2>. Proto musí být $r_1 - r_2 = 0$, tedy $r_1 = r_2$. Potom z rovnosti <3> vyplývá $q_1 - q_2 = 0$, tedy $q_1 = q_2$. To je spor s předpokladem, že dvojice q_1, r_1 a q_2, r_2jsou navzájem různé. Dokázali jsme tedy, že existuje jediná takováto dvojice.

Věta 2.2. *Nechť $x \neq 0$ a $z > 1$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ a posloupnost přirozených čísel*

$$x_0, x_1, \dots, x_n, \qquad a_0, a_1, \dots, a_n$$

tak, že platí: $z^n \leq x < z^{n+1}$ <4>

a

$$\begin{array}{llll}
x = zx_0 + a_0 & \wedge\ a_0 < z & \wedge\ z^{n-1} \leq x_0 < z^n, & \\
x_0 = zx_1 + a_1 & \wedge\ a_1 < z & \wedge\ z^{n-2} \leq x_1 < z^{n-1}, & \\
\vdots & & & \text{<5>} \\
x_{n-2} = zx_{n-1} + a_{n-1} & \wedge\, a_{n-1} < z & \wedge\, z^0 \leq x_{n-1} < z, & \\
x_{n-1} = zx_n + a_n & \wedge\, a_n < z & \wedge\, x_n = 0. &
\end{array}$$

Důkaz: Nechť jsou dána libovolná čísla $x, z \in \mathbb{N}, x > 0, z > 1$. Existence čísla n takového, aby platilo tvrzení <4> zaručuje lemma 1. a existenci čísel $x_0, x_1, \dots, x_n$ a $a_0, a_1, \dots, a_n$ takových, že platí vztahy v prvních dvou sloupcích formulí <5> zaručuje věta o dělení se zbytkem. Zbývá tedy ověřit vztahy v posledním sloupci v <5>.

Z nerovností <4> psaných ve tvaru

$$z^n \leq zx_0 + a_0 < z^{n+1}$$

plyne:

$$z^n \leq zx_0 + a_0 < zx_0 + z = z(x_0 + 1),$$

odtud $z^{n-1} < x_0 + 1$, a tedy $z^{n-1} \leq x_0$, potom

$$zx_0 \leq zx_0 + a_0 < z^{n+1},$$

dostáváme $x_0 < z^n$.

Analogicky lze ukázat pro $k = 1,2, \dots, n-1$ platnost nerovnosti

$$z^{n-k-1} \leq x_k < z^{n-k}.$$

Pro $k = n - 1$ tedy je

$$z^0 \leq x_{n-1} < z^1,$$

takže ze vztahu

$$x_{n-1} = zx_n + a_n$$

podle věty o dělení se zbytkem plyne $x_n = 0, a_n = x_{n-1}$ čímž je věta dokázána.

Poznámka:

Pro daná přirozená čísla $x, z, z > 1, x \geq 1$ lze čísla $x_i, a_i, i = 0,1, \dots, n$ získat tímto způsobem:

- aplikujeme větu o dělení se zbytkem na čísla x a z; získáme neúplný podíl x_0 a zbytek a_0
- na čísla x_0 a z opět aplikujeme větu o dělení se zbytkem a vyjde nám částečný podíl x_1 a zbytek a_1 atd.
- pokračujeme tak dlouho, dokud je neplný podíl $x_k \neq 0$.

Věta 2.2. říká, že právě po n krocích se postup zastaví, neboť $x_n = 0$. Tomuto procesu se říká postup opakovaného dělení číslem z.

Věta 2.3. *(Věta o rozvoji přirozeného čísla podle mocnin o základu z)*

Nechť $z > 1$. Potom každé přirozené číslo $x \geq 1$ lze vyjádřit právě jedním způsobem ve tvaru

$$x = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, \qquad \text{<6>}$$

přičemž

$$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \qquad \text{<7>}$$

jsou přirozená čísla menší než z a $a_n \neq 0$.

Důkaz: Nechť je x libovolné nenulové přirozené číslo.

a)Dokážeme existenci <6>. Podle věty 2.2. existuje číslo n a také posloupnost přirozených čísel $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ tak, že platí rovnosti <5>. Dále ukážeme, že za čísla <7> můžeme vzít posloupnost přirozených čísel z věty 2.2. . Rovnosti v prvním sloupci formulí <5> postupně násobme čísly $1, z, z^2, \dots, z^n$ a sečteme. Po úpravě dostaneme <6>.

b)Nyní dokážeme jednoznačnost rozkladu <6>. Nechť vedle rozkladu <6>, lze číslo x vyjádřit ještě ve tvaru

$$x = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0, \qquad \text{<8>}$$

kde jsou přirozená čísla $b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0$ menší než za $b_m \neq 0$.
Podle věty o dělení se zbytkem existují jednoznačně určená přirozená čísla u_0, v_0 tak, že platí:

$$x = zu_0 + v_0 \wedge v_0 < z.$$

Protože také platí:

$$x = z(b_m z^{m-1} + b_{m-1} z^{m-2} + \cdots + b_1) + b_0 \ \wedge \ b_0 < z,$$

$$x = zx_0 + a_0 \ \wedge \ a_0 < z,$$

potom musí být $a_0 = v_0 = b_0$ a $x_0 = b_m z^{m-1} + \cdots + b_1$. Obdobně bude platit $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots$. Tedy musí být $m = n$ a vyjádření čísla x ve tvaru <6> a <8> jsou totožná.

Definice 2. *Pro přirozená čísla $a, z, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ platí $z > 1, 0 \leq a_i < z$, pro $i = 0,1,2, \dots, n, a_n > 0$,*

$$a = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,,$$

Pak říkáme, že jsme přirozené číslo a vyjádřili v číselné soustavě o základu z, nebo též v z-adické soustavě. Budeme psát:

$$a = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z$$

<u>*Poznámka:*</u>

(1) Přirozené číslo z užité ve větě 2.3. nazýváme základ číselné soustavy
(2) Symboly $a_0, a_1, \dots, a_n$ se nazývají číslice nebo cifry
(3) Index i u číslice a_i se nazývá řád číslice a_i
(4) Mnohočlen <6> nazýváme z-adický mnohočlen
(5) O přirozeném čísle a zapsaném ve tvaru z-adického mnohočlenu <6> říkáme, že je n-tého řádu, pokud $a_n \neq 0$
(6) Pro $z = 10$ dostáváme desítkovou soustavu a mnohočlen

$$a = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0\,,$$

z je přirozené číslo, $z > 1, n$ je přirozené číslo, nebo nula, koeficienty $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ jsou nezáporná celá čísla menší než z, má tvar

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0 10^0;\ a_n \neq 0..$$

(7) Je-li $z = 2$ mluvíme o dvojkové soustavě

<u>*Poznámka:*</u>

(1)Každé přirozené číslo můžeme zapsat pomocí deseti základních znaků (číslic, cifer):0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Pokud přidáme ještě znaky: „ - “ (znaménko minus), „-“ (zlomková čára), „ , “ (desetinná čárka), „ i “ (imaginární jednotka), můžeme díky nim zapsat i každé číslo celé, racionální, reálné a komplexní. Právě tomuto způsobu zápisu čísel říkáme desítková (dekadická) soustava.
(2) Protože číslice v zápise libovolného přirozeného čísla v poziční soustavě o základu z jsou menší z , je jich podle Lemmatu 1.3. konečně mnoho. Stačí tedy vymyslet konečně mnoho znaků pro číslice $0,1,2, \dots, z-1$ k tomu, abychom pomocí nich mohli vyjádřit libovolné číslo.

(3) Zpravidla budeme pro číslice $0,1,2,\dots,z-1$ užívat znaků obvyklých pro označování (malých) přirozených čísel $0,1,2,\dots$ atd. Pokud je ovšem $z > 10$, musíme pro číslice větší nebo rovné deseti, vymyslet označení nová „jednomístným“ znakem.

(4) Tedy:

- je-li $z \leq 10$, pro vyjádření libovolného čísla nám stačí číslice $1,2,\dots,9$
  (pro $z = 2$ jsou to pouze číslice 0,1)
- je-li $z > 10$, pak musíme přidat nové znaky, například: $A, B, C, \dots$atd.
  (pro $z = 12$ použijeme 10 číslic a 2 znaky: $0,1,2,\dots,9, A, B$)

2.2. Převody mezi různými číselnými soustavami

Pracujeme-li s různými pozičními soustavami, nejčastěji se setkáme se dvěma typy úloh:

1. Převést číslo zapsané v desítkové soustavě do jiné poziční soustavy o základu $z > 1, z \neq 10$.
2. Převést číslo zapsané v poziční soustavě o základu $z > 1, z \neq 1$, do desítkové soustavy.

2.2.1 Převod z desítkové soustavy do soustavy o základu z $> 1, z \neq 10$

Chceme-li zapsat přirozené číslo a v číselné soustavě o základu $\bar{z}, \bar{z} \neq z, \bar{z} \geq 2$, vyjádříme nejprve přirozené číslo a v desítkové soustavě. Pak převedeme zápis čísla a z desítkové soustavy do číselné soustavy o základu $\bar{z}$. Budeme se řídit postupem naznačeným v důkazu věty 2.3. .

Příklad 1.: *Převeďte číslo 287 z desítkové soustavy do dvojkové soustavy.*

Užijeme postup opakovaného dělení číslem 2, budeme používat číslice 0,1.

$$
\begin{aligned}
287 &= 2 \cdot 143 + 1, & 8 &= 2 \cdot 4 + 0,\\
143 &= 2 \cdot 71 + 1, & 4 &= 2 \cdot 2 + 0,\\
71 &= 2 \cdot 35 + 1, & 2 &= 2 \cdot 1 + 0,\\
35 &= 2 \cdot 17 + 1, & 1 &= 2 \cdot 0 + 1.\\
17 &= 2 \cdot 8 + 1, & &
\end{aligned}
$$

Podle věty 2.3. je tedy $(287)_{10} = (100011111)_2$.

Příklad2.:*Vyjádřete číslo 2172 v poziční soustavě o základu 7.*

Užijeme postup opakovaného dělení číslem 7, budeme používat číslice $0,1,\dots,6$.

$$
\begin{aligned}
2172 &= 7 \cdot 310 + 2, & 44 &= 7 \cdot 6 + 2,\\
310 &= 7 \cdot 44 + 2, & 6 &= 7 \cdot 0 + 6.
\end{aligned}
$$

Takže nám vyšlo $(2172)_{10} = (6222)_7$

$$(6222)_7 = (6 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 2).$$

Příklad 3.: *Vyjádřete číslo 3169 v poziční soustavě o základu 12.*

Užijeme postup opakovaného dělení číslem 12 , budeme používat ce$0,1,\dots,9,A,B$.

$$3169 = 12 \cdot 264 + 1, \qquad 22 = 12 \cdot 1 + 10,$$
$$264 = 12 \cdot 22 + 0, \qquad 1 = 12 \cdot 0 + 1.$$

Dostaneme zápis $(3169)_{10} = (1A01)_{12}$

$$(1A01)_{12} = (1 \cdot 12^3 + A \cdot 12^2 + 1)$$

2.2.2 Převod ze soustavy o základu z > 1 do desítkové soustavy

Příklad 1.: *Převeďte číslo (1348)₅ do desítkové soustavy.*

$$(1348)_5 = 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 8 =$$
$$= 1 \cdot 125 + 3 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 8 =$$
$$= 125 + 75 + 20 + 8 = (228)_{10}$$

Příklad 2.: *Převeďte číslo $(5847)_{16}$ do desítkové soustavy.*

$$(58427)_{16} = 5 \cdot 16^4 + 8 \cdot 16^3 + 4 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16^1 + 7 =$$
$$= 5 \cdot 65536 + 8 \cdot 4096 + 4 \cdot 256 + 2 \cdot 16 + 7 =$$
$$= (361511)_{10}$$

Příklad 3.: *Převeďte číslo $(2187)_8$ do šestkové soustavy.*

$$(2187)_8 = 2 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 8 \cdot 8^1 + 7 =$$
$$= 2 \cdot 512 + 1 \cdot 64 + 8 \cdot 8 + 7 =$$
$$= (1159)_{10}$$
$$(1159)_{10} = 1159 = 6 \cdot 193 + 1$$
$$193 = 6 \cdot 32 + 1$$
$$32 = 6 \cdot 5 + 2$$
$$5 = 6 \cdot 0 + 5$$
$$= (5211)_6$$

2.2.3 Přímé převody mezi číselnými soustavami

Tento způsob převodů můžeme použít u číselných soustav, kde je základ jedné soustavy mocninou základu jiné soustavy. Přímé převody tedy můžeme využít mezi těmito soustavami: dvojkové a čtyřkové, dvojkové a osmičkové, dvojkové a šestnáctkové, čtyřkové a šestnáctkové, trojkové a devítkové.

Příklad 1.: *Převeďte číslo* $(1001101)_2$ *do čtyřkové soustavy.*

$4 = 2^2$ (číslo 4 představuje základ soustavy, do které budeme převádět)

Nejprve musíme číslo $(1001101)_2$ rozšířit tak, aby mělo počet cifer dělitelný dvěma.

Před číslo $(1001101)_2$ tedy doplníme 0 a rozdělíme ho zprava do leva po dvojicích:

$$(01|00|11|01)_2 .$$

Nyní převedeme jednotlivé dvojčíslí z dvojkové soustavy do čtyřkové:

$$(01)_2 = 0 \cdot 2^1 + 1 = (1)_4$$

$(11)_2 = 1 \cdot 2 + 1 = (3)_4$

$(00)_2 = 0 \cdot 2 + 0 = (0)_4$

$(1001101)_2 = (1031)_4$

Příklad 2.: *Převeďte číslo* $(12300010032)_4$ *do šestnáctkové soustavy.*

$16 = 4^2$

$(01|23|00|01|00|32)_4 = (1B010E)_{16}$

$(32)_4 = 3 \cdot 4 + 2 = (E)_{16}$

$(00)_4 = 0 \cdot 4 + 0 = (0)_{16}$

$(01)_4 = 0 \cdot 4 + 1 = (1)_{16}$

$(23)_4 = 2 \cdot 4 + 3 = (B)_{16}$

2.2.4 Převody pomocí grafického seskupování

Principem je kreslení vhodných čar, pomocí kterých seskupujeme prvky tak, aby

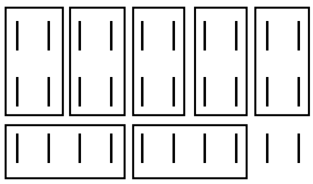
-každé seskupení obsahovalo právě tolik prvků, jako je základ číselné soustavy, do které dané číslo chceme převádět

- různá seskupení neobsahovala společné prvky.

Příklad 1.: *Zapište číslo 30 ve čtyřkové soustavě.*

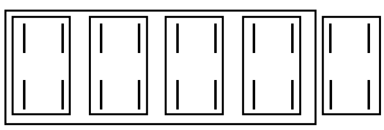
Nejprve nakreslíme 30 prvků (čárek, křížků,…).

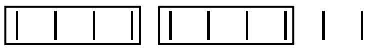
Poté budeme seskupovat prvky do skupin po čtyřech prvcích. Různá seskupení nesmí obsahovat společné prvky.



Seskupování provádíme pouze do té doby, dokud to bude možné (tj. dokud budou neseskupeny čtyři, nebo více prvků). Seskupování skončíme, až zůstanou neseskupeny pouze méně než čtyři prvky. Tato seskupení, která jsme vytvořili, nazýváme seskupení prvního řádu. Dva prvky, které nám zůstaly, budeme nazývat seskupení nultého řádu.

Dále budeme seskupovat již vytvořená seskupení, nikoli samotné prvky. To znamená, že již vytvořená seskupení, znovu seskupíme do nových skupin po čtyřech. Tato nová seskupení budeme nazývat seskupení druhého řádu.





V tomto případě dostaneme pouze jedno seskupení druhého řádu. K dalšímu seskupení bychom potřebovali další čtyři seskupení prvního řádu, ale my máme pouze tři.

Naše výsledky zapíšeme do následující tabulky:

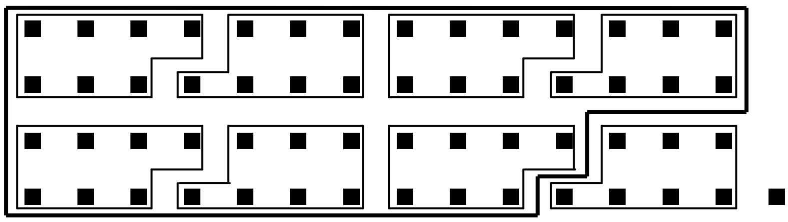
počet seskupení 2.řádu	počet sekupení 1.řádu	počet neseskupených prvků
1	3	2

Nyní zapíšeme číslice z tabulky v tomto pořadí. Základ číselné soustavy připojíme za závorku jako index:

$$30 = (132)_4$$

číslice	význam číslice v zápise $(132)_4$
1	jedno seskupení třetího řádu
3	tři seskupení prvního řádu
2	dvě seskupení nultého řádu

Příklad 2.: *Zapište číslo 57 v sedmičkové soustavě.*



počet seskupení 2.řádu	počet sekupení 1.řádu	počet neseskupených prvků
1	1	1

$$57 = (111)_7$$

Poznámka:

(1) Předností poziční soustavy je jednak úsporný zápis přirozených čísel, ale hlavní výhoda spočívá v jednoduchosti algoritmů pro sčítání a násobení přirozených čísel zapsaných v poziční soustavě.

(2) Máme-li číslo x zapsané ve tvaru $x = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z$, tak toto číslo můžeme zapisovat také ve tvaru $x = (00 \dots 0 a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z$. To znamená, že můžeme připsat libovolně „levých" nul. To nám umožňuje zapsat dvě libovolná přirozená čísla x, y pomocí stejného počtu číslic.

Věta 2.4. *Nechť jsou dána dvě přirozená čísla* $x = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z$, $y = (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_z$.

a) Je-li číslo x $(n+1)$-ciferné, číslo y $(m+1)$-ciferné, $n > m$, pak $x > y$.
b) Jsou-li obě přirozená čísla v z-adické soustavě $(n+1)$-ciferná $(n = m)$ a mají-li číslice nejvyššího řádu a_n , b_m a je-li $a_n > b_m$, pak $x > y$.
c) Jsou-li obě čísla v z-adické soustavě $(n+1)$-ciferná $(m = n)$ a platí-li rovnost $a_n = b_m, a_{n-1} = b_{m-1}, \dots, a_{k+1} = b_{k+1}$, ale $a_k > b_k$, pak $x > y$ (k je nezáporné celé číslo, pro které platí $0 \leq k < n$).
d) Jsou-li obě čísla v z-adické soustavě $(n+1)$-ciferná $(n = m)$ a platí-li rovnosti $a_i = b_i$ pro každé $i = 0,1,\dots,n-1,n$, pak $x = y$

2.3 Početní operace s přirozenými čísly v z-adických číselných soustavách

Z-adické soustavy umožňují provádět početní výkony s přirozenými čísly (po malých úpravách i s čísly celými, racionálními a reálnými) podle jednoduchých pravidel. Tato pravidla udávají určitý postup, podle kterého se dostaneme k výsledku početního výkonu. Takovým předpisům říkáme v matematice algoritmy.

Musíme tedy nalézt algoritmy, které nám umožní sčítat, odčítat, násobit a dělit libovolná přirozená čísla zapsaná v z-adických soustavách.

2.3.1 Sčítání

Věta 2.5. *Nechť* $x = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z$, $y = (b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0)_z$.
Pak $x + y = (d_{n+1} c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0)_z$, *kde číslice* $d_{n+1}, c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ *tohoto součtu získáme následujícím způsobem:*

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 &= d_1 z + c_o \,, \\ (d_1 + a_1) + b_1 &= d_2 z + c_1 \,, \\ &\vdots \\ (d_n + a_n) + b_n &= d_{n+1} z + c_n \,. \end{aligned}$$

Důkaz: Tyto rovnosti po řadě vynásobíme čísly $1, \mathrm{z}, \dots, \mathrm{z}^{\mathrm{n}}$:

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 &= d_1 z + c_0 \,, \\ d_1 z + a_1 z + b_1 z &= d_2 z + c_1 z \,, \\ &\vdots \\ d_n z^n + a_n z^n + b_n z^n &= d_{n+1} z^{n+1} + c_n z^n. \end{aligned}$$

Sečteme a upravíme, poté dostaneme:

$$(A_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n) + (b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n) =$$
$$= c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + d_{n+1} z^{n+1},$$

tedy $(a_n \dots a_1 a_0)_z + (b_n \dots b_1 b_0)_z = (d_{n+1} c_n \dots c_1 c_0)_z$.

Příklad 1.: *Sečtěte čísla* $(6432)_7$ *a* $(1326)_7$.

$(6432)_7$	$6+2=8,\ 8 \div 7 = 1\ zb\ 1$
$\underline{(1326)_7}$	$3+2+1=6,\ 6 \div 7 = 0\ zb\ 6$
$(11061)_7$	$4+3=7,\ 7 \div 7 = 1\ zb\ 0$
	$6+1+1=8,\ 8 \div 7 = 1\ zb\ 1$

2.3.2 Odčítání

Definice 3. *Nechť je v poziční soustavě o základu z , $z>1$, dáno přirozené číslo*

$$x = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z\,.$$

Potom $(n+1)$*-ciferným* $(z-1)$*-doplňkem čísla x rozumíme číslo*

$$\bar{x} = (\bar{a}_n \bar{a}_{n-1} \dots \bar{a}_1 \bar{a}_0)_z\,,$$

kde

$$a_i + \bar{a}_i = z-1\,, \qquad i = 0, 1, \dots, n\,.$$

Věta 2.6. *Nechť* $x = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z$, $y = (b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0)_z$ *jsou dvě přirozená čísla řádu nejvýše n, pro která platí* $x > y$. *Nechť* $\bar{y}$ *je* $(n+1)$*-ciferný* $(z-1)$*-doplněk čísla y a*

$$x + \bar{y} = (c_{n+1} c_n \dots c_1 c_0)_z\,.$$

Potom

$$x - y = (c_n \dots c_1 c_0)_z + (1)_z\,.$$

Důkaz: $(n+1)$-ciferný $(z-1)$-doplněk k číslu y můžeme zapsat ve tvaru

$$\bar{y} = (z^{n+1} - 1) - y\,.$$

Odtud plyne

$$x - y = x + (z^{n+1} - 1 - y) - z^{n+1} + 1 = x + \bar{y} - z^{n+1} + 1\,.$$

Tím je věta dokázána.

Příklad 1.: *Odečtěte čísla* $(23412)_5$ *a* $(14221)_5$.

$(23412)_5$	$2-1=1$
$\underline{-\ \ (14221)_5}$	$1-2=-1$, po odečtení potřebujeme kladné číslo,
$(4141)_5$	proto k 1 přičteme základ soustavy $1+\underline{5}-2=4$
	$4-(2+\underline{1})=1$
	$3+5-4=4$
	$2-2=0$

2.3.3 Násobení

Násobení v pozičních soustavách bychom mohli rozdělit do tří samostatných skupin, a to podle toho, kolikaciferní jsou činitelé.

a) Oba činitelé jsou jednociferní.

Věta 2.7. *Nechť* $x = (a_0)_z$, $(b_0)_z$ *, potom* $xy = (c_1 c_0)_z$ *, kde* $a_0 b_0 = zc_1 + c_0$.

b)Právě jeden činitel je jednociferný.

Věta 2.8. *Nechť* $x = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z$, $y = (b_0)_z$ *, pak*

$$x \cdot y = (d_{n+1} c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0)_z .$$

Číslice součinu získáme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= z d_1 + c_0 \\ a_1 b_0 + d_1 &= z d_2 + c_1 \\ &\vdots \\ a_{n-1} b_0 + d_{n-1} &= z d_n + c_{n-1} \\ a_n b_0 + d_n &= z d_{n+1} + c_n . \end{aligned}$$

Tyto rovnosti vynásobíme po řadě čísly $1, z, z^2, \dots, z^{n-1}, z^n$ *a dostaneme:*

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 &= z d_1 + c_0 \\ a_1 b_0 z + d_1 z &= z^2 d_2 + c_1 z \\ &\vdots \\ a_{n-1} b_0 z^{n-1} + d_{n-1} z^{n-1} &= z^n d_n + c_{n-1} z^{n-1} \\ a_n b_0 z^n + d_n z^n &= z^{n+1} d_{n+1} + c_n z^n . \end{aligned}$$

Sečteme strany těchto rovností a upravíme:

$$(a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n) b_0 = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + d_{n+1} z^{n+1} ,$$

tedy $x \cdot y = (d_{n+1} c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0)_z$.

Věta 2.9. *Nechť* $x = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z$, $y = z^k = (1\underbrace{00 \dots 0}_{k-krát})_z$ *, potom*

$$x \cdot y = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \underbrace{00 \dots 0}_{k-krát})_z .$$

c) Oba činitelé jsou víceciferní.

Věta 2.10. *Nechť* $x = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_z$, $y = (b_m b_{m-1} \dots b_1 b_0)_z$ *, potom*

$$x \cdot y = x(b_0)_z + x(b_1 0)_z + x(b_2 00)_z + \dots + x(b_m \underbrace{000 \dots 0}_{m-krát})_z .$$

Příklad 1.: *Vynásobte čísla* $(3412)_6$ *a* $(32)_6$ *.*

$$\begin{array}{r} (3412)_6 \\ \cdot \quad (32)_6 \\ \hline 11224 \\ +\ 15040 \\ \hline (202024)_6 \end{array}$$

$2 \cdot 2 = 4, 4 \div 6 = 0\ zb\ 4$
$2 \cdot 1 = 2, 2 \div 6 = 0\ zb\ 2$
$2 \cdot 4 = 8, 8 \div 6 = 1\ zb\ 2$
$2 \cdot 3 + 1 = 7, 7 \div 6 = 1\ zb\ 1$
$3 \cdot 2 = 6, 6 \div 6 = 1\ zb\ 0$
$3 \cdot 1 + 1 = 4, 4 \div 6 = 0\ zb\ 4$
$3 \cdot 4 = 12, 12 \div 6 = 2\ zb\ 0$
$3 \cdot 3 + 2 = 11, 11 \div 6 = 1\ zb\ 5$

2.3.4. Dělení

Existují dva typy dělení: dělení beze zbytku a dělení se zbytkem, při kterém dostáváme neúplný podíl. Pro zbytek při dělení vždy požadujeme, aby byl menší než dělitel a nebyl záporným číslem. Pro oba typy můžeme použít jednu definici, protože pro dělení beze zbytku můžeme zbytek položit rovný nule.

Úmluva: Číslo 0 nebude nikdy dělitelem.

Definice 4. *Platí–li pro nezáporná celá čísla* x, y, q, r $(y \neq 0)$ *vztah* $x = y \cdot q + r$, *kde* $0 \leq r < y$, *pak číslo x nazýváme dělenec, číslo y dělitel, číslo q podíl nebo neúplný podíl a číslo r zbytek. Početní výkon, při kterém z daných čísel* x, y *určujeme čísla* q, r, *nazýváme dělení, a to pro* $r = 0$ *dělení beze zbytku a pro* $r > 0$ *dělení se zbytkem.*

Příklad 1.: *Vydělte čísla* $(8456)_9$, $(28)_9$ *. Proveďte zkoušku.*

$(8456)_9 \div (28)_9 = (284)_9\ zb\ (21)_9$

$-(57)_9$

$(265)_9$ podíl je 26, poté opíšeme 5

$-(251)_9$

$(146)_9$ podíl je 14, poté opíšeme 6

$-(125)_9$

$(21)_9$

Zkouška: $(284)_9$

$\cdot\ (28)_9$

2545

578

8435

$+\quad 21$

$(8456)_9$

1. odhad: $84 \div 28$, místo čísla 84 si představíme číslo 8 a místo čísla 28 číslo 9 (můžeme použít metodu zaokrouhlování na desítky), potom tedy:
   $8 \div 3 = 2\ zb\ 2$, zkusíme tedy násobek 2
   $28 \cdot 2 = 57 \quad (2 \cdot 8 = 16,\ 16 \div 9 = 1\ zb\ 7, 2 \cdot 2 + 1 = 5)$

2. odhad: $265 \div 28$, to je asi jako $27 \div 3 = 9$, protože jsme v soustavě o základu 9 a ta má pouze číslice 0,1,2,3,4,5,6,7,8 , vezmeme nejvyšší číslo této soustavy
   $28 \cdot 8 = 251 \quad (8 \cdot 8 = 64,\ 64 \div 9 = 7\ zb\ 1, 8 \cdot 2 + 7 = 23,\ 23 \div 9 = 2\ zb\ 5$

3. odhad: $146 \div 28$, to je asi jako $15 \div 3 = 5$
   $28 \cdot 5 = 154 \quad (5 \cdot 8 = 40,\ 40 \div 9 = 4\ zb\ 4, 5 \cdot 2 + 4 = 14,\ 14 \div 9 = 1\ zb\ 5)$
   tento výsledek nám nevyhovuje $154 > 146$, proto zkusíme násobek 4
   $28 \cdot 4 = 125 \quad (4 \cdot 8 = 32,\ 32 \div 9 = 3\ zb\ 5, 4 \cdot 2 + 3 = 11,\ 11 \div 9 = 1\ zb\ 2$

2.4 Rozvoj racionálního čísla v pozičních soustavách

Zápis racionálního čísla ve tvaru podílu $\frac{p}{q}$ není vždy vhodný pro konkrétní počítání s racionálními čísly. Ukážeme, že postup pro vyjádření přirozených čísel v pozičních číselných soustavách lze zobecnit i pro čísla racionální. Východiskem bude následující tvrzení.

Věta 2.11. *Každé racionální číslo* $\frac{p}{q}$ *je součtem celého čísla c a takového racionálního čísla* $\frac{p_0}{q}$*, pro něž platí* $0 \leq \frac{p_0}{q} < 1$ *(čísla c a* p_0 *jsou jednoznačně určena).*

Důkaz: Nechť jsou p a q libovolná celá čísla, $q > 0$. Pak podle věty o dělení se zbytkem (věta 2.1.) platí:

$$p = qc + p_0\,, \qquad c, p \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \leq p_0 < q.$$

Tedy platí:

$$\frac{p}{q} = c + \frac{p_0}{q}\,, \qquad 0 \leq \frac{p_0}{q} < 1\,.$$

Je-li $z \in \mathbb{Z}^+$ a $z > 1$, potom můžeme každé celé číslo x vyjádřit v poziční číselné soustavě o základu z:

$$x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

$$x \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow -x \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow -x = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n)$$

Jelikož umíme celé číslo vyjádřit v poziční číselné soustavě o libovolném základu z (> 1), umožňuje nám tato věta zaměřit se pouze na nezáporná racionální čísla menší než 1.

Věta 2.12. *Nechť* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *je racionální číslo takové, že*

$$0 \leq \frac{p}{q} < 1\,,$$

a nechť $z \in \mathbb{N},\ z > 1$. *Potom existují jednoznačně určená přirozená čísla* r, s *, kde* r *je zbytek a s neúplný podíl tak, že platí:*

$$pz = sq + r \ \wedge 0 \leq r < q \ \wedge 0 \leq s < z. \qquad \text{<9>}$$

Důkaz: Nechť jsou p, q a z čísla, která splňují předpoklady věty. Protože $p, q, z \in \mathbb{N}$ a $q \neq 0$, existují podle věty o dělení se zbytkem (Věta 2.1.) jednoznačně určená přirozená čísla $s, r \in \mathbb{N}$ tak, že platí:

$$pz = sq + r \ \wedge \ r < q.$$

Dále musíme ověřit, že $s < z$. Předpokládejme, že $s \geq z$. Protože $0 \leq \frac{p}{q} < 1$, pak je $q > p$, a tedy $sq > pz$. To je ve sporu se vztahem $sq \leq pz$, který vyplývá z rovnosti $pz = sq + r$. Musí tedy platit $s < z$. Tím je tato věta dokázána.

Nyní si ukážeme, jak můžeme Větu 2.12. využít k zápisu racionálních čísel v poziční číselné soustavě o základu z.

Uvažujme tedy $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ takové, že platí $0 \leq \frac{p}{q} < 1$, a $z \in \mathbb{N}, z > 1$. Opakovaným užitím věty 2.12. získáme dvě nekonečné posloupnosti přirozených čísel

$$c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots \qquad \text{<10>}$$

$p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots$ <11>

takových, že platí

$$
\begin{aligned}
p_0 z &= c_1 q + p_1 && 0 \leq p_1 < q && 0 \leq c_1 < z \\
p_1 z &= c_2 q + p_2 && 0 \leq p_2 < q && 0 \leq c_2 < z \\
&\vdots \\
p_{n-1} z &= c_n q + p_n && 0 \leq p_n < q && 0 \leq c_n < z \\
&\vdots
\end{aligned}
$$ <12>

Protože pro každé číslo p_i posloupnosti <11> platí $0 \leq p_i < q$, musí se pro každé i zbytek p_i rovnat některému z konečně mnoha čísel $0,1,2,\dots,q-1$.

Tedy v nekonečné posloupnosti <11> se musí některá čísla opakovat po konečném počtu kroků. Označme m nejmenší index takový, že $p_m$se rovná některému zbytku z posloupnosti <11>, tj. některému z čísel

$p_{m+1}, p_{m+2}, p_{m+3}, \cdots$.

To znamená, že existuje přirozené číslo l, $l \neq 0$ tak, že $p_m = p_{m+l}$.

Čísla m a l představují neúplný podíl a zbytek. Obě tato čísla jsou určena jednoznačně, proto musí také být

$$
\begin{aligned}
&c_{m+1} = c_{m+l+1} \wedge p_{m+1} = p_{m+l+1}, \\
&c_{m+2} = c_{m+l+2} \wedge p_{m+2} = p_{m+l+2}, \\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

Tedy posloupnost <10> má tvar

$c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, c_m, c_{m+1}, \dots, c_{m+l}, c_{m+l+1}, \cdots,$ <13>

kde se konečná posloupnost čísel $c_{m+1}, \dots, c_{m+l}$ opakuje.

K určení celé nekonečné posloupnosti <10> stačí konečně mnohokrát aplikovat větu 2.12, nejvýše q-krát.

Musíme ještě ověřit, že způsob, kterým náš algoritmus přiřazuje racionálním číslům posloupnost

$c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots$

nezávisí na způsobu vyjádření daného racionálního čísla.

(tzn. jestliže platí $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, potom dostaneme stejnou posloupnost <10>)

Vztah mezi číslem $\frac{p}{q}$ a jemu přiřazenou posloupností $c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots$ si nyní ukážeme. Rovnost <12> vynásobíme číslem $\frac{1}{qz}$.

Dostáváme:

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= \frac{c_1}{z} + \frac{p_1}{q^z} \\
\frac{p_1}{q} &= \frac{c_2}{z} + \frac{p_2}{q^z} \\
&\vdots \\
\frac{p_{n-1}}{q} &= \frac{c_n}{z} + \frac{p_n}{q^z} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

po dosazení získáme:

$$\frac{p}{q} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{p_2}{qz^2}$$
$$\frac{p}{q} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \frac{p_3}{qz^3}$$
$$\vdots$$
$$\frac{p}{q} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{z^{n-1}} + \frac{c_n}{z^n} + \cdots .$$

Ve vyjádření čísla $\frac{p}{q}$ hrají číslice c_i (v soustavě o základu z) obdobnou roli jako při rozvoji celých čísel, a proto přijmeme i podobný zápis:

$$\frac{p}{q} = (0, c_1c_2c_3 \dots)_z .$$

Symbol $(0, c_1c_2c_3 \dots)_z$ budeme nazývat <u>rozvojem racionálního čísla</u> $\frac{p}{q}$ v soustavě o základu z.

Má-li posloupnost $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ přiřazená číslu $\frac{p}{q}$ tvar <13>, potom se posloupnost $c_{m+1}, \dots, c_{m+l}$ nazývá perioda čísla $\frac{p}{q}$. Číslo l je délkou této periody. Posloupnost $c_1, c_2, \dots, c_m$ se nazývá předperioda čísla $\frac{p}{q}$. Číslo m je délkou této předperiody. Jestliže je číslo $m = 0$, pak dané racionální číslo nemá předperiodu.

Jestliže má číslo $\frac{p}{q}$ předperiodu $c_1, c_2, \dots, c_m$ a periodu $c_{m+1}, \dots, c_{m+l}$ potom píšeme:

$$\frac{p}{q} = (0, c_1 \dots c_m\overline{c_{m+1} \dots c_{m+l}})_z . \qquad \text{<14>}$$

Bude-li $\frac{p}{q}$ libovolné kladné racionální číslo, pak podle věty 2.12. píšeme

$$\frac{p}{q} = c + \frac{p_0}{q}, c \in \mathbb{Z}^+, 0 < \frac{p}{q} < 1.$$

Je-li dán základ číselné soustavy z, potom můžeme nalézt rozvoj čísla c

$$c = (d_nd_{n-1} \dots d_0)_z.$$

Podle rozvoje <14>, můžeme číslo $\frac{p}{q}$ zapsat takto:

$$\frac{p}{q} = (d_nd_{n-1} \dots d_0, c_1c_2 \dots c_m\overline{c_{m+1} \dots c_{m+l}})_z .$$

Bude-li $-\frac{p}{q}$ libovolné záporné racionální číslo, potom má v soustavě o základu z rozvoj tvar:

$$-\frac{p}{q} = -(d_nd_{n-1} \dots d_0, c_1c_2 \dots c_m\overline{c_{m+1} \dots c_{m+l}})_z .$$

Jestliže získáme při vytváření posloupnosti zbytků $p = p_0, p_1, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots$ pro některý index i zbytek $p_i = 0$, je zřejmě $c_{i+1} = p_{i+1} = 0$, $c_{i+2} = p_{i+2} = 0$ atd.. Příslušný rozvoj tedy bude mít periodu 0. Tedy místo $(0, c_1c_2 \dots c_i\overline{0})_z$ píšeme pouze $(0, c_1c_2 \dots c_i)_z$. Můžeme použít i zápis $(0, c_1c_2 \dots c_i00)_z$ apod. s konečným počtem číslic 0.

Z dosavadního výkladu je zřejmé, že ke každému racionálnímu číslu $\frac{p}{q}$ zapsanému v tomto tvaru a při daném základu z, lze sestrojit rozvoj tvaru

$$\frac{p}{q} = (d_n d_{n-1} \dots d_0, c_1 c_2 \dots c_m \overline{c_{m+1} \dots c_{m+l}})_z \qquad \text{<15>}$$

nebo

$$\frac{p}{q} = -(d_n d_{n-1} \dots d_0, c_1 c_2 \dots c_m \overline{c_{m+1} \dots c_{m+l}})_z\,. \qquad \text{<15´>}$$

Nyní vyšetříme, zda ke každému rozvoji v soustavě o základu z tvaru <15> nebo <15´> existuje racionální číslo $\frac{p}{q}$, jemuž odpovídá daný rozvoj. Opět se můžeme omezit na rozvoje tvaru

$$\frac{p}{q} = (0, c_1 c_2 \dots c_m \overline{c_{m+1} \dots c_{m+l}})_z\,.$$

Máme tedy dán rozvoj <14> a dva rozvoje příslušných celých čísel v soustavě o základu z $A = (c_1 c_2 \dots c_m)_z, B = (c_{m+1} \dots c_{m+l})_z$.
Můžeme tedy psát:

$$(0, c_1 c_2 \dots c_m \overline{c_{m+1} \dots c_{m+l}})_z = \frac{(c_1 \dots c_m)_z}{z^m} + \frac{(c_{m+1} \dots c_{m+l})_z}{z^{m+l}} + \frac{(c_{m+1} \dots c_{m+l})_z}{z^{m+2l}} + \cdots =$$
$$= \frac{(c_1 \dots c_m)_z}{z^m} + \frac{(c_{m+1} \dots c_{m+l})_z}{z^{m+l}} \cdot \left(1 + \frac{1}{z^l} + \frac{1}{z^{2l}} + \frac{1}{z^{3l}} + \cdots\right) =$$
$$= \frac{(c_1 .. c_m)_z}{z^m} + \frac{(c_{m+1} \dots c_{m+l})_z}{z^{m+l}} \cdot \frac{z^l}{z^l - 1} = \frac{(c_1 \dots c_m)_z (z^l - 1) + (c_{m+1} \dots c_{m+l})_z}{z^m (z^l - 1)} =$$
$$= \frac{A(z^l - 1) + B}{z^m (z^l - 1)}$$

Jestli-že

$$p = A(z^l - 1) + B = (c_1 z^{m-1} + c_2 z^{m-2} + \cdots + c_{m-1} z + c_m)(z^l - 1) +$$
$$+ (c_{m+1} z^{l-1} + \cdots + c_{m+l})\,,$$
$$q = z^m (z^l - 1)\,,$$

potom můžeme vidět, že racionální číslo $\frac{p}{q}$ má skutečně rozvoj <14>.
Pokud ovšem bude $l = 1$ a $c_{m+1} = z - 1$, potom má číslo $\frac{p}{q}$ tvar

$$\frac{p}{q} = \frac{(c_1 \dots c_m)_z (z-1) + (z-1)}{z^m (z-1)} = \frac{(c_1 \dots c_m)_z + 1}{z^m}\,.$$

Označíme-li $(c_1' c_2' \dots c_m')_z = (c_1 c_2 \dots c_m)_z + (1)_z$ přísluší také číslu $\frac{p}{q}$ rozvoj tvaru:

$$(0, c_1' c_2' \dots c_m')_z\,.$$

Jestli-že bude $m = 0$, pak číslu $\frac{p}{q}$ přísluší rozvoj $(1)_z$.
Z našich úvah tedy vyloučíme rozvoje tvaru $(0, c_1 c_2 c_3 \dots c_n \dots)_z$, pro něž existuje n tak, že pro všechna $k, k > n$ je $c_n = z - 1$. Přijmeme tedy úmluvu o vyloučení rozvojů s periodou $z - 1$. Nyní můžeme tvrdit, že každé racionální číslo $\frac{p}{q}$ má (při daném základu $z, z > 1$) jednoznačně určený rozvoj tvaru <15> nebo <15´>.

Obráceně platí, že každý rozvoj tvaru $(0, c_1 c_2 \dots c_m \overline{c_{m+1} \dots c_{m+l}})_z$ je rozvojem jediného racionálního čísla.

Předpokládejme, že má racionální číslo $\frac{p}{q}$ z-adický rozvoj tvaru

$$\frac{p}{q} = (d_n d_{n-1} \dots d_0, c_1 c_2 \dots c_m \overline{c_{m+1} \dots c_{m+l}})_z,$$

to znamená, že má předperiodu délky m a periodu délky l.
Potom lze i pro každé číslo $k, k > m$, skupinu k číslic rozvoje čísla $\frac{p}{q}$ za řádovou čárkou chápat také jako předperiodu. Tuto skupinu číslic nazýváme zobecněná předperioda. Každý nenulový přirozený násobek s čísla l následujících s číslic tohoto rozvoje chápeme jako periodu. Nazýváme ji zobecněná perioda.

Zavedení těchto dvou pojmů (zobecněná předperioda a zobecněná perioda) nám umožňuje zapsat libovolné dva z-adické rozvoje racionálních čísel, tak že oba rozvoje budou mít stejnou délku zobecněné předperiody a také stejnou délku zobecněné periody. Stačí vzít za délku:

1) zobecněné předperiody větší z délek předperiod
2) zobecněné periody nejmenší společný násobek délek period daných rozvojů.

Poznámka: Jestli-že bude z kontextu zřejmé o jakou předperiodu a periodu se jedná, potom můžeme pojem „zobecněná" vynechat.

2.4.1 Operace s z-adickými rozvoji

2.4.1.1 Rovnost a nerovnost

Mějme dva libovolné z-adické rozvoje racionálních čísel a, b zapsané tak, aby měly stejné délky předperiod a stejné délky period

$$a = (c_0, c_1 \dots c_m \overline{c_{m+1} \dots c_{m+l}})_z, \quad b = (d_0, d_1 \dots d_m \overline{d_{m+1} \dots d_{m+l}})_z . \qquad \text{<16>}$$

Řekneme, že:

1) $a = b$, právě když $c_0 = d_0 \wedge c_1 = d_1 \wedge \dots \wedge c_{m+l} = d_{m+l}$
2) $a < b$, právě když existuje index $k, 0 \leq k \leq m + l$, takový, že platí
   $c_0 = d_0 \wedge c_1 = d_1 \wedge \dots \wedge c_{k-1} = d_{k-1} \wedge c_k < d_k$

2.4.1.2 Součet

Jsou dány dva rozvoje <16>. Součtem těchto rozvojů rozumíme rozvoj

$$a + b = (x_0, x_1 \dots x_m \overline{x_{m+1} \dots x_{m+l}})_z .$$

Číslice $x_1, x_2, \dots, x_{m+l}$ získáme pomocí algoritmu pro sčítání přirozených čísel v z-adické soustavě aplikovaného na čísla

$$(c_1 c_2 \dots c_{m+l})_z \quad \text{a} \quad (d_1 d_2 \dots d_{m+l})_z .$$

S tím, že

$$x_{m+l} = c_{m+l} + d_{m+l} + 1,$$

pokud při přechodu z místa $(m + 1)$-ního na m-té se přičítala 1 a x_0 je součet (v

z-adické soustavě) celých čísel c_0 a d_0, případně zvětšený o 1, pokud číslo 1 přebývalo při dřívějším součtu.

Příklad 1.: *Sečtěte rozvoje* $x = (0{,}5\overline{13})_6$ *a* $y = (0,\overline{101})_6$.

Zapíšeme rozvoje ve tvaru se stejnými délkami předperiod a period.

$$x = (0{,}5\overline{131313})_6$$
$$y = (0{,}1\overline{011011})_6$$

Předperioda má délku 1, perioda délku 6 (nejmenší společný násobek period).

Takto upravené rozvoje sečteme pod sebou.

$$\begin{array}{l} (0{,}5\overline{131313})_6 \\ \underline{(0{,}1\overline{011011})_6} \\ (1{,}0\overline{142324})_6 \end{array}$$

Příklad 2.: *Sečtěte rozvoje* $x = (1,\overline{6324})_8$ *a* $y = (5{,}45\overline{6})_8$.

$$\begin{array}{r} x = (1{,}63\overline{2463})_8 \\ \underline{y = (5{,}45\overline{6666})_8} \\ (7{,}31\overline{1351})_8 \end{array}$$

Při přechodu z periody na předperiodu jsme museli přičíst 1, proto ji nyní přičteme k výsledku znovu.

$$\begin{array}{r} (7{,}31\overline{1351})_8 \\ + \quad \underline{\qquad\qquad 1} \\ (7{,}31\overline{1352})_8 \end{array}$$

2.4.1.3 Odčítání

Rozdílem rozvojů <16> rozumíme rozvoj

$$a + b = (y_0, y_1 \dots y_m \overline{y_{m+1} \dots y_{m+l}})_z \, .$$

Číslice $y_1, y_2, \dots, y_{m+l}$ získáme pomocí algoritmu pro odčítání přirozených čísel v z-adické soustavě aplikovaného na čísla

$$(c_1 c_2 \dots c_{m+l})_z \qquad \text{a} \qquad (d_1 d_2 \dots d_{m+l})_z \, .$$

S tím, že

$$y_{m+l} = c_{m+l} - d_{m+l} - 1 \, ,$$

Pokud se při přechodu z $(k+1)$-ního místa na k-té přičítala 1. y_0 je rozdíl (v z-adické soustavě) celých čísel c_0 a d_0, případně zmenšený o 1, pokud číslo 1 přebývalo při dřívějším rozdílu.

Příklad 3.: *Odečtěte tyto rozvoje* $x = (11{,}31\overline{243})_9$ *a* $y = (7{,}6\overline{25})_9$.

$$x = (11{,}31\overline{243243})_9$$
$$y = (7{,}62\overline{525252})_9$$

$$
\begin{array}{rr}
 & (11{,}31\overline{243243})_9 \\
- & (\ 7{,}62\overline{525252})_9 \\
\hline
 & (\ 3{,}57\overline{616881})_9 \\
- & 1 \\
\hline
 & (\ 3{,}57\overline{616880})_9
\end{array}
$$

2.4.1.4 Násobení

Nejprve musíme definovat násobení jednociferným rozvojem tvaru

$$(0{,}0 \dots 0c_k 0 \dots)_z \,,$$

Potom se vhodný počet těchto dílčích výsledků sečte. Abychom mohli určit tento vhodný počet, je třeba znát odhad pro délku periody součinu obou rozvojů. K tomu nám pomůže následující věta.

Věta 2.13. *Nechť jsou dány dva rozvoje racionálních čísel v z-adické soustavě a nechť jejich periody mají délky r a s. Pak délka (nezobecněné) periody součinu těchto dvou rozvojů dělí číslo*

$$h = (z^d - 1)n\,,$$

kde d je největší společný dělitel délek p, q a n je jejich nejmenší společný násobek. Přitom existují pro libovolná p, q rozvoje o periodách těchto délek a to takové, že jejich součin má (nezobecněnou) periodu délky h.

V druhé části této věty se vlastně říká, že v obecném případě nelze číslo h zmenšit, což ovšem neznamená, že v některých konkrétních případech nemůže být délka periody součinu menší než h.

Rozvoje racionálních čísel v z-adické soustavě můžeme také násobit tak, že k daným rozvojům najdeme jejich odpovídající racionální čísla, ta vynásobíme a poté nalezneme rozvoj tohoto součinu v z-adické soustavě.

Příklad 4.: *Najděte k periodickému číslu* $a = 0{,}14\overline{25}$ *odpovídající zlomek.*

$$a = 0{,}14\overline{25} \quad /\cdot 10^{2\ (délka\ předperiody)}$$

$$10^2 a = 14{,}\overline{25} \quad /\cdot 10^{2\ (délka\ periody)}$$

$$\underline{10^4 a = 1425{,}\overline{25}}$$

$$10^4 a - 10^2 a = 1425{,}\overline{25} - 14{,}\overline{25}$$

$$9900a = 1411$$

$$a = \frac{1411}{9900}$$

Příklad 5.: *Vynásobte rozvoje $a = 0,5\overline{8}, b = 0,6\overline{27}$.*

$$a = 0,5\overline{8} \quad /\cdot 10 \qquad\qquad b = 0,6\overline{27} \quad /\cdot 10$$
$$10a = 5,\overline{8} \quad /\cdot 10 \qquad\qquad 10b = 6,\overline{27} \quad /\cdot 10^2$$
$$\underline{10^2a = 58,\overline{8}} \qquad\qquad \underline{10^3b = 627,\overline{27}}$$
$$10^2a - 10a = 58,\overline{8} - 5,\overline{8} \qquad\qquad 10^3b - 10b = 627,\overline{27} - 6,\overline{27}$$
$$90a = 53 \qquad\qquad 990b = 621$$
$$a = \tfrac{53}{90} \qquad\qquad b = \tfrac{621}{990}$$

$$a \cdot b = \frac{53}{90} \cdot \frac{621}{990} = \frac{32913}{89100} = \frac{1219}{3300}$$

$1219 \div 3300 = 0,36\overline{93}$
12190
 22900
  31000
   13000
    31000

$a \cdot b = 0,36\overline{93}$

2.5 Dělitelnost v pozičních číselných soustavách

Lemma 2. *Pro libovolná přirozená čísla n a l platí:*

$$n|[(n+1)^l - 1]$$

Věta 2.14. *Nechť m je přirozené číslo tvaru:*

$$m = (a_s \dots a_1 a_0)_g \qquad (g > 1).$$

Číslo m je dělitelné číslem $g - 1$ právě tehdy když je jeho ciferný součet, to je číslo

$$n = a_s + \cdots + a_1 + a_0$$

dělitelný číslem $g - 1$.

Důkaz: Pro všechna $i = 1, 2, \dots, s$ na základě lemmy 2 platí:

$g - 1|g^i - 1$, tedy $g^i = 1 + x_i(g - 1)$.

x_i jsou přirozená čísla, proto můžeme psát:

$$m = a_s \cdot g^s + \cdots + a_1 \cdot g + a_0 =$$
$$= a_s[1 + x_s(g-1)] + \cdots + a_1[1 + x_1(g-1)] + a_0 =$$
$$= (g-1)(a_s x_s + \cdots + a_1 x_1) + a_s + \cdots + a_1 + a_0 =$$
$$= L(g-1) + n$$
$$m = L(g-1) + n$$

Z této rovnosti na základě tvrzení:

$a|bx + cy$ (kde x, y jsou celá čísla a zároveň $a|b, a|c$)

vyplývá:

jestliže $g-1|n$ pak $g-1|m$.

Podobně bychom dokázali

Jestliže $g-1|m$ pak $g-1|n$.

Příklad 1.: *Zjistěte, zda je číslo* $(54063)_7$ *dělitelné šesti.*

Podle věty 2.14. je toto číslo dělitelné šesti právě tehdy, když je jeho ciferný součet dělitelný šesti ($dělitelné\ číslem\ g-1$).

$$5_7+4_7+0_7+6_7+3_7=(24)_7$$

Znovu aplikujeme větu 2.14.

$$2_7+4_7=6_7$$

Číslo $(54063)_7$ je tedy dělitelné šesti.

Věta 2.15. *Nechť m je přirozené číslo tvaru:*

$$m=a_s\dots a_1 a_{0g}.$$

Řekneme, že číslo m je dělitelné číslem $g+1$ *právě tehdy, když je číslo*

$$n=(a_0+a_2+\cdots)-(a_1+a_3+\cdots)$$

Dělitelné číslem $g+1$.

V praxi se nejčastěji setkáváme s přirozenými čísly v desítkové soustavě. Pravidla pro jejich dělitelnost se učí již žáci na Základních školách.

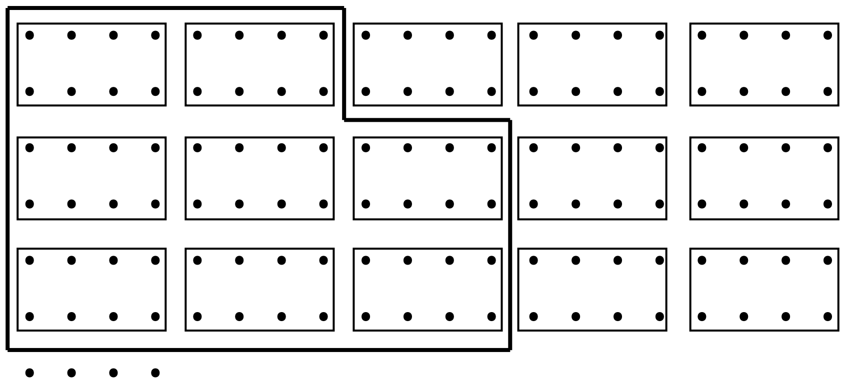
Znaky dělitelnosti pro přirozená čísla v desítkové soustavě:

- číslo je dělitelné 2, je-li jeho poslední cifra sudá
- číslo je dělitelné 3, je-li jeho ciferný součet dělitelný třemi
- číslo je dělitelné 4, je-li čtyřmi dělitelné jeho poslední dvojčíslí
- číslo je dělitelné 5, je-li jeho poslední cifrou nula nebo pětka
- číslo je dělitelné 6, je-li sudé a zároveň dělitelné třemi
- číslo je dělitelné 7, je-li sedmi dělitelný součet vypočtený následujícím způsobem:
  první až n-tou číslici odzadu vynásobíme postupně čísly 1,3,2,6,4,5 (periodicky opakující se)
- číslo je dělitelné 8, je-li jeho poslední trojčíslí dělitelné osmi
- číslo je dělitelné 9, je-li jeho ciferný součet dělitelný devíti
- číslo je dělitelné 10, je-li jeho poslední cifra nula

3 Sbírka příkladů

3.1 Řešené příklady

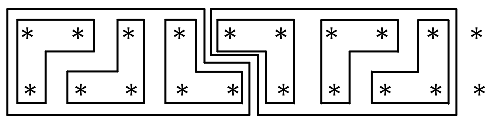
Příklad 1.: *Zapište číslo 124 v osmičkové soustavě pomocí grafického seskupování,*



počet seskupení 2.řádu	počet sekupení 1.řádu	počet neseskupených prvků
1	7	4

$$(124)_{10} = (174)_8$$

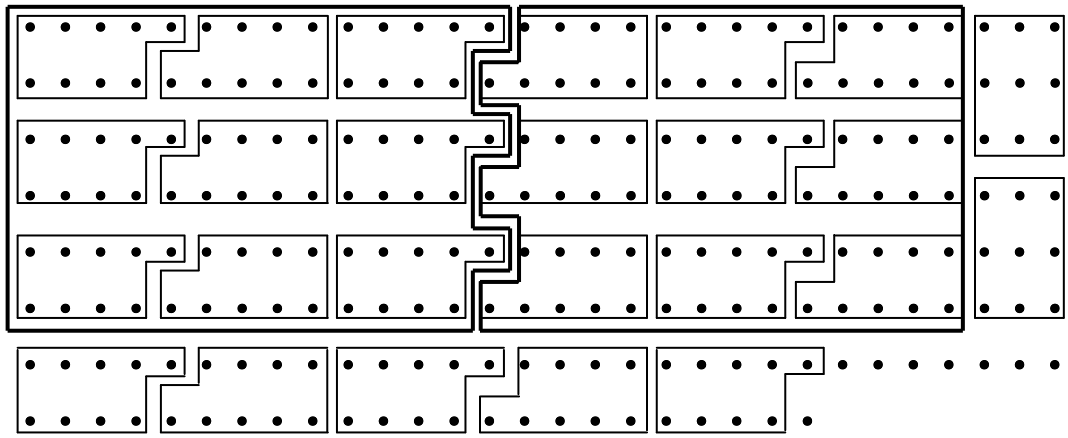
Příklad 2.: *Nakreslete 20 prvků a pomocí grafického seskupování zapište jejich počet ve trojkové soustavě.*



počet seskupení 2.řádu	počet sekupení 1.řádu	počet neseskupených prvků
2	0	2

$$(20)_{10} = (202)_3$$

Příklad 3.: *Zapište číslo 233 v devítkové soustavě.*



počet seskupení 2.řádu	počet sekupení 1.řádu	počet neseskupených prvků
2	7	8

$(233)_{10} = (278)_9$

Příklad 4.: *Zapište číslo* $(1891)_{10}$ *v sedmičkové soustavě.*

$$
\begin{aligned}
1891 &= 7 \cdot 270 + 1 \\
270 &= 7 \cdot 38 \quad + 4 \\
38 &= 7 \cdot 5 \quad + 3 \\
5 &= 7 \cdot 0 \quad + 5
\end{aligned}
$$

$(1891)_{10} = (5341)_7$

Příklad 5.: *Vyjádřete číslo* $(5678)_{10}$ *v poziční soustavě o základu* 16.

$$
\begin{aligned}
5678 &= 16 \cdot 354 + 14 \\
354 &= 16 \cdot 22 \quad + 2 \\
22 &= 16 \cdot 1 \quad + 6 \\
1 &= 16 \cdot 0 \quad + 1
\end{aligned}
$$

$(5678)_{10} = (162E)_{16}$

Příklad 6.: *Číslo* $(36841)_9$ *převeďte do desítkové soustavy.*

$$
\begin{aligned}
(36841)_9 &= 3 \cdot 9^4 + 6 \cdot 9^3 + 8 \cdot 9^2 + 4 \cdot 9^1 + 1 \cdot 9^0 = \\
&= 19683 + 4374 + 648 + 36 + 1 = \\
&= (24742)_{10}
\end{aligned}
$$

Příklad 7.: *Převeďte číslo* $(2413)_5$ *do sedmičkové soustavy.*

$$
\begin{aligned}
(2413)_5 &= 2 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 3 = \\
&= (358)_{10} \\
(358)_{10} &= 358 = 7 \cdot 51 + 1 \\
&\quad 51 = 7 \cdot 7 \quad + 2 \\
&\quad 7 = 7 \cdot 1 \quad + 0 \\
&\quad 1 = 7 \cdot 0 \quad + 1 \\
&= (1021)_7
\end{aligned}
$$

Příklad 8.: *Převeďte číslo* $(9A47C)_{13}$ *do soustavy o základu* $z = 6$

$$
\begin{aligned}
(9A47C)_{13} &= 9 \cdot 13^4 + A \cdot 13^3 + 4 \cdot 13^2 + 7 \cdot 13 + C = \\
&= (279798)_{10} \\
(279798)_{10} &= 279798 = 6 \cdot 46633 + 0 \\
&\quad 46633 = 6 \cdot 7772 \quad + 1 \\
&\quad 7772 = 6 \cdot 1295 \quad + 2 \\
&\quad 1295 = 6 \cdot 215 \quad + 5 \\
&\quad 215 = 6 \cdot 35 \quad + 5 \\
&\quad 35 = 6 \cdot 5 \quad + 5 \\
&\quad 5 = 6 \cdot 0 \quad + 5
\end{aligned}
$$

$$= (5555210)_6$$

Příklad 9.: *Proveďte přímý převod čísla* $(10012022)_3$ *do soustavy o základu 9.*

$$9 = 3^2$$
$$(10|01|20|22)_3 = (3168)_9$$
$$(10)_3 = 1 \cdot 3 + 0 = (3)_9$$
$$(01)_3 = 0 \cdot 3 + 1 = (1)_9$$
$$(20)_3 = 2 \cdot 3 + 0 = (6)_9$$
$$(22)_3 = 2 \cdot 3 + 2 = (8)_9$$

Příklad 10.: *Převeďte číslo* $(1011010110)_2$ *do soustavy o základu* $z = 8$ *bez použití desítkové soustavy.*

$$8 = 2^3$$
$$(001|011|010|110)_2 = (1326)_8$$
$$(001)_2 = 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = (1)_8$$
$$(011)_2 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = (3)_8$$
$$(010)_2 = 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = (2)_8$$
$$(110)_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0 = (6)_8$$

Příklad 11.: *Vypočítejte neznámou číslici x, pro kterou platí následující rovnost:*

$$(3xx44)_7 = (55x5x)_6\,.$$
$$3 \cdot 7^4 + x \cdot 7^3 + x \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 4 = 5 \cdot 6^4 + 5 \cdot 6^3 + x \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + x$$
$$7203 + 343x + 49x + 28 + 4 = 6480 + 1080 + 36x + 30 + x$$
$$355x = 355$$
$$x = 1$$

Zkouška: $(31144)_7 = 3 \cdot 7^4 + 1 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 4 = 7627$

$(55151)_6 = 5 \cdot 6^4 + 5 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 1 = 7627$

Příklad 12.: *Vypočítejte neznámou číslici x, pro kterou platí následující rovnost:*

$$(7x1Fx)_{16} = (82xx33)_9\,.$$
$$7 \cdot 16^4 + x \cdot 16^3 + 1 \cdot 16^2 + F \cdot 16 + x = 8 \cdot 9^5 + 2 \cdot 9^4 + x \cdot 9^3 + x \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 + 3$$
$$458752 + 4096x + 256 + 240 + x = 472392 + 13122 + 729x + 81x + 27 + 3$$
$$3287x = 26296$$
$$x = 8$$

Zkouška: $(781F8)_{16} = 7 \cdot 16^4 + 8 \cdot 16^3 + 1 \cdot 16^2 + F \cdot 16 + 8 = 492024$

$(828833)_9 = 8 \cdot 9^5 + 2 \cdot 9^4 + 8 \cdot 9^3 + 8 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 + 3 = 492024$

Příklad 13.: *Vypočítejte číslo z, pro které platí rovnost:*

$$(201)_z = (113)_{z+1}$$
$$2 \cdot z^2 + 0 \cdot z + 1 = 1 \cdot (z+1)^2 + 1 \cdot (z+1) + 3$$
$$2z^2 + 1 = z^2 + 2z + 1 + z + 1 + 3$$

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

$$z_1, z_2 = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$z_1 = 4, z_2 = -1$$

z_2 nám nevyhovuje, protože hledáme z > 3

Zkouška: $z = 4$

$$(201)_4 = 2 \cdot 4^2 + 1 = 33$$

$$(113)_{4+1} = (113)_5 = 1 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5 + 3 = 33$$

Příklad 14.: *Ověřte, zda platí rovnost*

a) $(211201021)_z = (10002232)_{z+1}$ *pro* $z = 3$

b) $(A93D8)_z = (64022)_{z+2}$ *pro* $z = 14$

a) $(211201021)_3 = (10002232)_4$

$$(211201021)_3 = 2 \cdot 3^8 + 1 \cdot 3^7 + 1 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 + 1 = \\ = (16558)_{10}$$

$$(10002232)_4 = 1 \cdot 4^7 + 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 2 = \\ = (16558)_{10}$$

$$(211201021)_3 = (10002232)_4 = (16558)_{10}$$

b) $(A93D8)_{14} = (64022)_{16}$

$$(A93D8)_{14} = A \cdot 14^4 + 9 \cdot 14^3 + 3 \cdot 14^2 + D \cdot 14 + 8 = \\ = (409634)_{10}$$

$$\begin{aligned} (409634)_{10} = 409634 &= 16 \cdot 25602 + 2 \\ 25602 &= 16 \cdot 1600 \quad + 2 \\ 1600 &= 16 \cdot 100 \quad + 0 \\ 100 &= 16 \cdot 6 \quad + 4 \\ 6 &= 16 \cdot 0 \quad + 6 \\ &= (64022)_{16} \end{aligned}$$

$$(A93D8)_{14} = (64022)_{16}$$

Příklad 15.: *Určete základy* z, u *číselných soustav, jestliže platí:*

$$(23)_z = (31)_u, (31)_z = (41)_u$$

podmínka: $z \geq 4, u \geq 5$

$$2 \cdot z + 3 = 3 \cdot u + 1 \quad \wedge \quad 3 \cdot z + 1 = 4 \cdot u + 1$$

$$2z + 2 = 3u \qquad 3z = 4u$$

$$2 \cdot \frac{4}{3} u + 2 = 3u \qquad z = \frac{4}{3} u$$

$$2 = 3u - \frac{8}{3}u$$
$$2 = \frac{1}{3}u$$
$$u = 6$$

$$z = \frac{4}{3} \cdot 6$$
$$z = 8$$

Zkouška: $(23)_8 = 2 \cdot 8 + 3 = 19$ $\qquad$ $(31)_8 = 3 \cdot 8 + 1 = 25$

$(31)_6 = 3 \cdot 6 + 1 = 19$ $\qquad$ $(41)_6 = 4 \cdot 6 + 1 = 25$

$L = P$ $\qquad$ $L = P$

Příklad 16.: *Zjistěte, pro jaké základy z platí:*

a) $(16)_z^2 = (256)_z$

b) $(11)_z^3 = (1331)_z$

a) $16_z^2 = (256)_z \quad \wedge \quad z \geq 7$

$$(z+6)^2 = 2z^2 + 5z + 6$$
$$z^2 + 12z + 36 = 2z^2 + 5z + 6$$
$$z^2 - 7z - 30 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{2}$$
$$z_1 = 10, z_2 = -3$$
$$16_{10}^2 = (256)_{10}$$

b) $(11)_z^3 = (1331)_z \quad \wedge \quad z \geq 4$

$(z+1)^3 = z^3 + 3z^2 + 3z + 1$

Této rovnosti vyhovuje každé přirozené číslo $z \geq 4$. Například:

$z = 5 \Rightarrow (5+1)^3 = 6^3 = 216$

$(1331)_5 = 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = 216$

$z = 12 \Rightarrow (12+1)^3 = 13^3 = 2197$

$(1331)_{12} = 12^3 + 3 \cdot 12^2 + 3 \cdot 12 + 1 = 2197$

Příklad 17.: *Sečtěte přirozená čísla pomocí grafického seskupování:*

a) $(2)_4$, $(3)_4$

b) $(25)_6$, $(4)_6$.

a) $(2)_4 + (3)_4 = (11)_4$

$\blacksquare\blacksquare + \blacksquare\blacksquare\blacksquare = \boxed{\blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare}\blacksquare$

b) $(25)_6 + (4)_6 = (33)_6$

množina	počet prvků
■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■	$(25)_6 = (17)_{10}$
■ ■ ■ ■	$(4)_6 = (4)_{10}$
■ ■	$(21)_{10} = (33)_{10}$

Příklad 18.: *Sečtěte:*

a)
$$\begin{array}{r} (34056)_7 \\ \underline{(15230)_7} \\ (52316)_7 \end{array}$$

$0 + 6 = 6,\ 6 \div 7 = 0 + 6$

$3 + 5 = 8,\ 8 \div 7 = 1 + 1$

$2 + 1 + 0 = 3,\ 3 \div 7 = 0 + 3$

$5 + 4 = 9,\ 9 \div 7 = 1 + 2$

$1 + 1 + 3 = 5,\ 5 \div 7 = 0 + 5$

b)
$$\begin{array}{r} (B29A1)_{12} \\ \underline{(8049A)_{12}} \\ (17327B)_{12} \end{array}$$

$A + 1 = 10 + 1 = 11,\ 11 \div 12 = 0 + B$

$9 + A = 9 + 10 = 19,\ 19 \div 12 = 1 + 7$

$5 + 9 = 14,\ 14 \div 12 = 1 + 2$

$1 + 2 = 3,\ 3 \div 12 = 0 + 3$

$8 + B = 8 + 11 = 19,\ 19 \div 12 = 1 + 7$

Příklad 19.: *Sečtěte v číselné soustavě s nejmenším možným základem:*

$$\begin{array}{r} (35612)_z \\ \underline{(40553)_z} \\ (106465)_z \end{array} \qquad z = 7\ (nejmenší\ možný\ základ)$$

Příklad 20.: *Odečtěte:*

a)
$$\begin{array}{r} (31021)_4 \\ -\underline{(1310)_4} \\ (23111)_4 \end{array}$$

$1 - 0 = 1$ $1 + 4 - 2 = 3$

$2 - 1 = 1$ $3 - 1 = 2$

$0 + 4 - 3 = 1$

b)
$$\begin{array}{r} (835721)_9 \\ -\underline{(64730)_9} \\ (760881)_9 \end{array}$$

$1 - 0 = 1$ $5 - 5 = 0$

$2 + 9 - 3 = 8$ $3 + 9 - 6 = 6$

$7 + 9 - 8 = 8$ $8 - 1 = 7$

Příklad 21.: *Odečtěte v číselné soustavě s nejmenším možným základem:*

$$\begin{array}{r} (4085A4)_z \\ \underline{-(2B7391)_z} \\ (111213)_z \end{array} \qquad z = 12\ (nejmenší\ možný\ základ)$$

Příklad 22.: *Vynásobte:*

a) $(20112)_3$ | $1 \cdot 2 = 2, 2 \div 3 = 0\ zb\ 2$ | $2 \cdot 2 = 4, 4 \div 3 = 1\ zb\ 1$

$$\begin{array}{r} 20112 \\ 21 \\ \hline 20112 \\ 111001 \\ \hline 1200122 \end{array}$$

$(21)_3$

$1 \cdot 1 = 1, 1 \div 3 = 0\ zb\ 1 \qquad 2 \cdot 1 + 1 = 3, 3 \div 3 = 1\ zb\ 0$

$20112 \qquad 1 \cdot 1 = 1, 1 \div 3 = 0\ zb\ 1 \qquad 2 \cdot 1 + 1 = 3, 3 \div 3 = 1\ zb\ 0$

$111001 \qquad 1 \cdot 0 = 0 \qquad 2 \cdot 0 + 1 = 1, 1 \div 3 = 0\ zb\ 1$

$(1200122)_3 \qquad 1 \cdot 2 = 2, 2 \div 3 = 0\ zb\ 2 \qquad 2 \cdot 2 = 4, 4 \div 3 = 1\ zb\ 1$

b) $(4321)_5 \qquad 3 \cdot 1 = 3, 3 \div 5 = 0\ zb\ 3 \qquad 1 \cdot 1 = 1, 1 \div 5 = 0\ zb\ 1$

$(213)_5 \qquad 3 \cdot 2 = 6, 6 \div 5 = 1\ zb\ 1 \qquad 1 \cdot 2 = 2, 2 \div 5 = 0\ zb\ 2$

$24013 \qquad 3 \cdot 3 + 1 = 10{,}10 \div 5 = 2\ zb\ 0 \qquad 1 \cdot 3 = 3, 3 \div 5 = 0\ zb\ 3$

$4321 \qquad 3 \cdot 4 + 2 = 14, 14 \div 5 = 2\ zb\ 4 \qquad 1 \cdot 4 = 4, 4 \div 5 = 0\ zb\ 4$

$14142 \qquad 2 \cdot 1 = 2, 2 \div 5 = 0\ zb\ 2$

$(2041423)_5 \qquad 2 \cdot 2 = 4, 4 \div 5 = 0\ zb\ 4$

$2 \cdot 3 = 6, 6 \div 5 = 1\ zb\ 1$

$2 \cdot 4 + 1 = 9, 9 \div 5 = 1\ zb\ 4$

Příklad 23.: *Vyděľte a proveďte zkoušku:*

a) $(654241)_7 \div (46)_7 = (12543)_7\ zb\ (4)_7$

$-(46)_7$

$(164)_7$ připíšeme 4

$-(125)_7$

$(362)_7$ připíšeme 2

$-(332)_7$

$(304)_7$ připíšeme 4

$-(253)_7$

$(211)_7$ připíšeme 1

$-(204)_7$

$(4)_7$

Zkouška: $(12543)_7$

$\cdot \quad (46)_7$

112554

54135

$(654234)_7$

$+ \quad (4)_7$

$(654241)_7$

1. odhad: $65 \div 46$, asi jako $7 \div 5 = 1$

$46 \cdot 1 = 46$

2. odhad: $164 \div 46$, asi jako $16 \div 5 = 3$

$46 \cdot 3 = 204 \quad (3 \cdot 6 = 18, 18 \div 7 = 2\ zb\ 4, 3 \cdot 4 + 2 = 14, 14 \div 7 = 2\ zb\ 0)$

$46 \cdot 2 = 125 \quad (2 \cdot 6 = 12{,}12 \div 7 = 1\ zb\ 5, 2 \cdot 4 + 1 = 9{,}9 \div 7 = 1\ zb\ 2)$

3. odhad: $362 \div 46$, asi jako $36 \div 5 = 7$, vezmeme násobek 6 $(z = 7)$

$46 \cdot 6 = 411 \quad (6 \cdot 6 = 36{,}36 \div 7 = 5\ zb\ 1, 6 \cdot 4 + 5 = 29{,}29 \div 7 = 4\ zb\ 1)$

$46 \cdot 5 = 332 \quad (5 \cdot 6 = 30{,}30 \div 7 = 4\ zb\ 2, 5 \cdot 4 + 4 = 24{,}24 \div 7 = 3\ zb\ 3)$

4. odhad: $304 \div 46$, asi jako $30 \div 5 = 6$, vidíme, že násobky 5 a 6 je moc, proto zkusíme násobek 4

$46 \cdot 4 = 253 \quad (4 \cdot 6 = 24{,}24 \div 7 = 3\ zb\ 3, 4 \cdot 4 + 3 = 19{,}19 \div 7 = 2\ zb\ 5)$

5. odhad: z předchozích výpočtů vidíme, že $46 \cdot 3 = 204$

b) $(32231)_4 \div (33)_4 = (332)_4\ zb\ (23)_4$

$-(231)_4$

$(313)_4$ přípíšeme 3

$-(231)_4$

$(221)_4$ připíšeme 1

$-(132)_4$

$(23)_4$

Zkouška: $(332)_4$

$\cdot\ (33)_4$

2322

2322

$(32202)_4$

$+\ (23)_4$

$(32231)_4$

Tato soustava je nízkého základu, proto si pro zjednodušení vytvoříme násobky čísla $(33)_4$.

$33 \cdot 1 = 33$

$33 \cdot 2 = 132\ \ (2 \cdot 3 = 6, 6 \div 4 = 1\ zb\ 2, 2 \cdot 3 + 1 = 7, 7 \div 4 = 1\ zb\ 3)$

$33 \cdot 3 = 231\ \ (3 \cdot 3 = 9, 9 \div 4 = 2\ zb\ 1, 3 \cdot 3 + 2 = 11, 11 \div 4 = 2\ zb\ 3)$

Příklad 24.: *Určete základ z číselné soustavy, jestliže platí:*

a) $(43)_z + (67)_z = (121)_z$

$z \geq 8$

$4z + 3 + 6z + 7 = 1z^2 + 2z + 1$

$z^2 - 8z - 9 = 0$

$$\mathrm{z}_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$z_1 = 9, z_2 = -1$

$z \geq 8, z_1 = 9 = z$

b) $(54)_z - (25)_z = (25)_z$

$z \geq 6$

$5z + 4 - (2z + 5) = 2z + 5$

$z = 6$

c) $(32)_z \cdot (12)_z = (434)_z$

$z \geq 5$

$(3z + 2) \cdot (z + 2) = 4z^2 + 3z + 4$

$3z^2 + 8z + 4 = 4z^2 + 3z + 4$

$z^2 - 5z = 0$

$z \cdot (z - 5) = 0$

$z_1 = 0, z_2 = 5$

$z \geq 5, z_2 = 5 = z$

Příklad 25.: *Sečtěte:*

a) $x = (1{,}07\overline{613})_8$, $y = (0{,}45\overline{71})_8$

$$
\begin{array}{r}
(1{,}07\overline{613613})_8 \\
(0{,}45\overline{717171})_8 \\
\hline
(1{,}55\overline{533004})_8 \\
+ \qquad\qquad 1 \\
\hline
(1{,}55\overline{533005})_8
\end{array}
$$

b) $x = \left(3{,}8A4\overline{0C1}\right)_{13}$, $y = \left(8{,}75\overline{1B}\right)_{13}$

$$
\begin{array}{r}
\left(3{,}8A4\overline{0C10C1}\right)_{13} \\
\left(8{,}751\overline{B1B1B1}\right)_{13} \\
\hline
(C, 325\overline{C0C2A2})_{13}
\end{array}
$$

Příklad 26.: *Odečtěte:*

a) $x = \left(1{,}203\overline{12}\right)_4$, $y = \left(0{,}312\overline{1}\right)_4$

$$
\begin{array}{r}
\left(1{,}203\overline{12}\right)_4 \\
- \quad \left(0{,}212\overline{11}\right)_4 \\
\hline
(0{,}331\overline{01})_4
\end{array}
$$

b) $x = \left(B, 745\overline{D8}\right)_{14}$, $y = \left(8{,}3C\overline{17}\right)_{14}$

$$
\begin{array}{r}
\left(B, 745\overline{D8}\right)_{14} \\
- \quad \left(8, 3C1\,\overline{71}\right)_{14} \\
\hline
(3{,}364\,\overline{67})_{14}
\end{array}
$$

Příklad 27.: *Nalezněte k periodickému číslu* $a = 0{,}26\overline{123}$ *odpovídající zlomek:*

$$
\begin{aligned}
a &= 0{,}26\overline{123} \quad /\cdot 10^2 \\
10^2 a &= 26, \overline{123} \quad /\cdot 10^3 \\
10^5 a &= 26123, \overline{123} \\
\hline
10^5 a - 10^2 a &= 26123, \overline{123} - 26, \overline{123} \\
99900a &= 26097 \\
a &= \frac{26097}{99900} = \frac{8699}{33300}
\end{aligned}
$$

Příklad 28.: *Vynásobte* $a = 0{,}5\overline{8}$, $b = 0{,}6\overline{27}$.

$$a = 0{,}5\overline{8} \quad /\cdot 10 \qquad\qquad b = 0{,}6\overline{27} \quad /\cdot 10$$

$$10a = 5,\overline{8} \quad /\cdot 10 \qquad\qquad 10b = 6,\overline{27} \quad /\cdot 10^2$$

$$\underline{10^2 a = 58,\overline{8}} \qquad\qquad \underline{10^3 b = 627,\overline{27}}$$

$$10^2 a - 10a = 58,\overline{8} - 5,\overline{8} \qquad\qquad 10^3 b - 10b = 627,\overline{27} - 6,\overline{27}$$

$$90a = 53 \qquad\qquad 990b = 621$$

$$a = \tfrac{53}{90} \qquad\qquad b = \tfrac{621}{990}$$

$$a \cdot b = \frac{53}{90} \cdot \frac{621}{990} = \frac{32913}{89100} = \frac{1219}{3300}$$

$1219 \div 3300 = 0{,}36\overline{93}$
12190
 22900
  31000
   13000
    31000

$a \cdot b = 0{,}36\overline{93}$

3.2. Neřešené příklady

Příklad 1.: *Máme dáno 13, 47, 6, 27 a 30 prvků. Postupně zapište jejich počet ve trojkové, pětkové a sedmičkové soustavě.*

$$[(13)_{10} = (111)_3 = (23)_5 = (16)_7$$
$$(47)_{10} = (1202)_3 = (142)_5 = (65)_7$$
$$(6)_{10} = (20)_3 = (11)_5 = (6)_7$$
$$(27)_{10} = (1000)_3 = (102)_5 = (36)_7$$
$$(30)_{10} = (1010)_3 = (105)_5 = (42)_7]$$

Příklad 2.: *Pomocí grafického seskupování zapište čísla v desítkové soustavě:*

a) $(121)_3$
b) $(1072)_9$
c) $(235)_6$

$[a)(121)_3 = (16)_{10}$ $b)(1072)_9 = (794)_{10}$
$c)(235)_6 = (95)_{10}]$

Příklad 3.: *Zapište číslo* $(76142)_{10}$ *v soustavě o základu tři.*

$[(10212110002)_3]$

Příklad 4.: *Zapište číslo* $(4357)_{10}$ *v soustavách o základech 4, 7, 9, 12 a 15.*

$[(4357)_{10} = (1010011)_4 = (15463)_7 =$
$= (2631)_{12} = (1457)_{15}]$

Příklad 5.: *Převeďte čísla a)* $(5AD49)_{16}$ *b)* $(101101)_2$ *do desítkové soustavy.*

$[a)(5AD49)_{16} = (372041)_{10}$
$b)(101101)_2 = (45)_{10}]$

Příklad 6.: *Přímým převodem převeďte číslo* $(3012031)_4$ *do šestnáctkové soustavy.*

$[(318D)_{16}]$

Příklad 7.: *Vypočítejte neznámou x, pro kterou platí následující rovnost:*

$$(x31x2)_4 = (5x42)_6$$

$[x = 4]$

Příklad 8.: *Vypočítejte neznámou x, pro kterou platí následující rovnost:*

$$(3x2x)_7 = (5xx3)_6$$

$[x = 5]$

Příklad 9.: *Ověřte, zda platí rovnost* $(133)_z = (111)_{z+1}$ *pro* $z = 4$.

$[(133)_4 = (111)_5 = (31)_{10}]$

Příklad 10.: *Určete základy* u, v *číselných soustav, jestliže platí:*

$$(21)_u = (23)_v\,, (35)_u = (41)_v$$

$[\mathrm{u} = 8, \mathrm{v} = 7]$

Příklad 11.: *Zjistěte, pro jaké základy z platí vztah:*

$(13)_z^2 = (169)_z$

$[pro\ každé\ z \geq 9]$

Příklad 12.: *Sečtěte:*

a) $(9F278D)_{16} + (A16C70)_{16}$

b) $(10010110)_2 + (11010011)_2$

c) $(7247)_8 + (3641)_8$

d) $(92465)_{10} + (52043)_6 + (20431)_6$

e) $(1011)_2 + (3210)_4 + (1312)_4$

$[a)(14093FD)_{16}\ b)(101101001)_2\ c)(13110)_8$
$d)(2104543)_6\ e)(11211)_4\ ]$

Příklad 13.: *Sečtěte v číselné soustavě s nejmenším možným základem:*

a) $(128403)_z + (401162)_z + (273316)_z$

b) $(2A4651)_z + (B18426)_z + (7710D4)_z$

$[a)\ z = 9, (813882)_z$
$b)\ z = 14, (174DB6B)_z]$

Příklad 14.: *Odečtěte:*

a) $(A7254304)_{11} - (6973482)_{11}$

b) $(34526)_7 - (1643)_7$

c) $(92D7A3)_{14} - (B9726)_{14}$

d) $[(40213)_5 - (2331)_5] - (4011)_5$

e) $[(5671)_9 - (834)_9] - (752)_9$

$[a)(A0390932)_{11}\ b)(32553)_7\ c)(85407B)_{14}$
$d)(23321)_5\ e)(3874)_9\ ]$

Příklad 15.: *Odečtěte v číselné soustavě s nejmenším možným základem:*

a) $(43012)_z - (34431)_z$

b) $(7B4406)_z - (24A841)_z$

$[a)\ z = 5, (3031)_z$
$b)\ z = 12, (565785)_z]$

Příklad 16.: *Vynásobte:*

a) $(821A4)_{11} \cdot (37)_{11}$

b) $(6408)_9 \cdot (25)_9$

c) $(3052)_6 \cdot (143)_6$

d) $(101101)_2 \cdot (111)_2$

e) $(9D73F4)_{16} \cdot (75A)_{16}$

$[a)(278A076)_{11}\ b)(174424)_9\ c)(530200)_6$
$d)(100111011)_2\ e)(485866FC8)_{16}\ ]$

Příklad 17.: *Vydělte a proveďte zkoušku:*

a) $(7682)_{10} \div (55)_{10}$

b) $(23452)_6 \div (21)_6$

c) $(37564)_8 \div (47)_8$

d) $(21012)_3 \div (20)_3$

e) $(234124)_5 \div (34)_5$

[$a)(139)_{10}\ zb\ (37)_{10}\ b)(1114)_6\ zb\ (14)_6\ c)(640)_8\ zb\ (24)_8$
$d)(1012)_3\ zb\ (2)_3\ e)(3311)_5$]

Příklad 18.: *Sečtěte tyto rozvoje:*

a) $x = (2{,}50\overline{143})_6\ , y = \left(4{,}113\overline{520}\right)_6$

b) $x = \left(0, D477\overline{F3}\right)_{16}, y = \left(A, 92\overline{4C}\right)_{16}$

c) $x = \left(0{,}100\overline{01}\right)_2, y = \left(1{,}0111\overline{1010}\right)_2$

d) $x = (6{,}43\overline{025})_9\ , y = (1{,}82\overline{4})_9$

e) $x = (4{,}9A\overline{706})_{11}, y = (2{,}4\overline{19A})_{11}$

[$a)\left(11{,}015\overline{352}\right)_6\ b)\left(B, 68C4\overline{40}\right)_{16}\ c)\left(10{,}0000\overline{1111}\right)_2$
$d)(8{,}35\overline{470})_9\ e)(7{,}31\overline{5A8})_{11}$]

Příklad 19.: *Určete základ z číselné soustavy, jestliže platí:*

a) $(56)_z + (46)_z = (A1)_z$

b) $(126)_z + (25)_z = (153)_z$

c) $(854)_z - (3B1)_z = (493)_z$

d) $(513)_z - (145)_z = (346)_z$

e) $(54)_z \cdot (14)_z = (777)_z$

[$a)\ z = 11, b)\ z = 8, c)\ z = 15, d)\ z = 8, e)\ z = 9$]

Příklad 20.: *Odečtěte tyto rozvoje:*

a) $x = \left(5{,}46\overline{031}\right)_7, y = \left(4{,}642\overline{05}\right)_7$

b) $x = \left(7{,}94\overline{36}\right)_{10}, y = \left(2{,}185\overline{9481}\right)_{10}$

c) $x = \left(2{,}340\overline{211}\right)_5, y = \left(0{,}4432\overline{02}\right)_5$

d) $x = \left(B, 74\overline{A916}\right)_{12}, y = \left(7, A59\overline{28}\right)_{12}$

e) $x = (5{,}46\overline{132})_8\ , y = (3{,}4\overline{75})_8$

[$a)\left(0{,}515\overline{226501}\right)_7\ b)\left(5{,}757\overline{6881}\right)_{10}\ c)\left(1{,}3420\overline{041410}\right)_5$
$d)(3{,}8B\overline{16542})_{12}\ e)(1{,}76\overline{334152})_8$]

Příklad 21.: *Nalezněte k periodickému číslu odpovídající zlomek:*

a) $x = 1{,}28\overline{64}$

b) $x = 0{,}71\overline{584}$

c) $x = 4{,}1\overline{5682}$

[$a)\ \frac{3184}{2475}, b)\ \frac{71513}{99900}, c)\ \frac{415641}{99990}$]

Příklad 22.: *Vynásobte:*

a) $x = 0{,}7\overline{5}, y = 0{,}6\overline{18}$

b) $x = 2{,}5\overline{9}, y = 0{,}2\overline{76}$

c) $x = 0{,}6\overline{90}, y = 0{,}1\overline{6}$

[$a)$ $0{,}46\overline{70}$, $b)0{,}71\overline{95}$, $c)0{,}11\overline{51}$]

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo podat základní poznatky o číselných soustavách a následně sestavit sbírku příkladů.

První kapitola se zabývá historií. Konkrétně nepozičními soustavami Egypťanů a Řeků. Tyto numerace nám bohužel nejsou moc známé, proto jsem zde velmi okrajově zmínila i numeraci Římskou. S tímto typem zápisu se setkávají již děti na základních školách. Dále jsem téma nepozičních soustav nerozvíjela, jelikož by se tato práce měla zabývat především soustavami pozičními.

Následující kapitola obsahuje téma pozičních soustav. V běžném životě využíváme především soustavu o základu deset – pro zápis množství, běžné početní výkony, počítání ploch a objemů, apod. Šedesátková soustava se tváří jako nepotřebná věc, ale člověk se na hodiny podívá i několikrát za den. Kdo se ovšem pohybuje ve světě počítačů, není mu cizí ani soustava dvojková. V této kapitole jsem se nejprve zaměřila na vyjádření přirozeného čísla v pozičních soustavách. To nám dalo základ pro vytvoření jednotlivých početních algoritmů. Nejprve jsem ukázala převody čísel v z-adických soustavách. Schopnost převádět čísla z různých číselných soustav nám může pomoci při řešení některých úloh. Další část se zabývá především klasickými početními výkony – sčítání, odčítání, násobení a dělení. Teorie je vždy aplikována na příklad, kde je i uveden podrobnější postup výpočtu. Celá tato kapitola je ukončena rozvojem racionálního čísla v pozičních číselných soustavách. Ani zde nejsou opomenuty početní výkony – sčítání, odčítání a násobení. Opět je postup výpočtu názorně ukázán na příkladech.

Tato bakalářská práce je zakončena sbírkou úloh. První část je věnována řešeným úlohám. Snažila jsem se zde ještě jednou názorně ukázat jednotlivé postupy u výpočtů. Jsou zde navíc zařazeny i úlohy na výpočet základu soustavy. Tyto řešené příklady by měly sloužit především k osvojení dovedností počítat s čísly v různých číselných soustavách. Pro další procvičování je připravena část neřešených úloh s výsledky.

Doufám, že tato práce poskytne ucelený pohled na poziční číselné soustavy a pomůže k lepšímu pochopení této problematiky.

Seznam použité literatury

1. ANDRONOV, Ivan Kuz'mič. *Aritmetika přirozených čísel*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1957. 196 s. Pomocné knihy pro všeobecně vzdělávací školy.
2. BĚLÍK, Miroslav. *Poziční číselné soustavy*. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Pedagogická fakulta, 1999. 60 s. Skripta. ISBN 80-7044-260-3.
3. BLAŽEK, Jaroslav. *Algebra a teoretická aritmetika 1*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983, 278 s.
4. DRÁBEK, Jaroslav. *Základy elementární aritmetiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985, 223 s.
5. HRUŠA, Karel. *Elementární aritmetika*. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1953, 297 s. Knihovna, sv. 49.
6. JELÍNEK, Miloš. *Množiny*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1974, 127 s.
7. KOLMAN, Arnošt. *Dějiny matematiky ve starověku*. Praha: Academia, 1968, 221 s.
8. KOPKA, Jan. *Kapitoly o přirozených číslech*. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, 2003, 88 s. ISBN 80-7044-472-X.
9. MAČÁT, Miloslav. *Číselné soustavy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1971, 142 s. Knižnice všeobecného vzdělání. Maják.
10. PERNÝ, Jaroslav. *Kapitoly z elementární aritmetiky II*. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2009, 89 s. ISBN 978-80-7372-572-3.
11. ŠALÁT, Tibor. *Algebra a teoretická aritmetika 2*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1986, 215 s.
12. ZNÁM, Štefan. *Teória čísel*. Bratislava: Alfa, 1977, 205 s.