

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA OPTIKY



Detekce mikrovlnného reliktního záření

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Vávra

2014

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA OPTIKY



Detekce mikrovlnného reliktního záření

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval:	Jan Vávra
Studijní program:	B1701 Fyzika
Forma studia:	Prezenční
Studijní obor:	Optika a optoelektronika
Vedoucí bakalářské práce:	prof. RNDr. Zdenek Hradil, CSc.
Práce odevzdána dne:

Olomouc 2014

PALACKY UNIVERSITY IN OLOMOUC
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF OPTICS



Detection of Cosmic microwave background

BACHELOR THESIS

Author

Jan Vávra

Thesis supervisor:

prof. RNDr. Zdenek Hradil, CSc.

Field of study

Optics and optoelectronics

Olomouc 2014

Abstrakt

Práce podává stručnou rešerši metody detekce použité u sondy Planck, která patří mezi nejnovější projekty z kategorie zkoumání CMB (Cosmic Microwave Background) záření. Ústředním tématem práce je aplikace statistických metod při zpracovávání dat získaných při detekci a podání argumentů pro proč se v souvislosti s detekcí záření zabývat možnostmi využití netradičních metod, kterými se klasická optika nezabývá.

Klíčová slova

Mise Planck, kvantová tomografie, Fisherova informace, Rao-Cramerova mez, úhlové rozlišení, reliktní záření.

Abstract

In this thesis we present a brief review of detection method used by a newest project on field of CMB (Cosmic Microwave Background) - the Planck project. The main topic of thesis is the application of statistical methods to data acquired by Planck probe. We provide arguments for using methods beyond classical optics in context of radiation detection.

Keywords

Mission Planck, quantum tomography, Fisher information, Cramér–Rao bound, angular resolution, Cosmic microwave background.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci „Detekce reliktního záření“ napsal samostatně s použitím uvedené literatury. Souhlasím, aby byla práce použita pro potřeby výuky a prezentována internetových stránkách katedry optiky.

V Olomouci dne

Podpis autora

Poděkování

Rád bych na tomto místě velmi moc poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce prof. RNDr. Zdeňku Hradilovi, CSc. za důležité podněty a rady k samotnému vypracování této práce a především za nezměrnou trpělivost. Mé velké díky patří i mým přátelům a rodině za morální podporu.

Obsah

Úvod	2
1 Mise Planck	5
2 Úhlové rozlišení optické detekce	11
2.1 Difrakční funkce	11
2.2 Úhlové rozlišení	12
3 Statistický odhad parametrů a úhlového rozlišení	16
3.1 Odhad parametru a Fisherova informace	16
3.2 Rao-Cramerova mez	17
3.3 Analýza úhlového rozlišení z pohledu Fisherovy informace	18
3.4 Fisherova informace pro neúplná měření	19
3.5 Interference	26
Závěr	32
Přílohy	34
A Odvození difrakční funkce	34
B Výpočet Fisherovy informace	40
Reference	42

Úvod

Pro standardní kosmologický model začíná vesmír v době 10^{-44} s, kdy se od prapůvodní interakce odpojila první ze čtyř základních sil, síla gravitační. Tato doba se označuje jako Planckův čas ¹a je to doba za níž již standardní kosmologický model nedohlédne, resp. předpovídá infinitezimální hodnoty fyzikálních veličin (Velký třesk), a kde se již musí uplatňovat nové modely sjednocující všechny čtyři interakce jako je například strunová kosmologie.[2, str.532]

Krátce po svém vzniku prodělal vesmír inflační fázi (tj. fázi zrychlené expanze), která proběhla v časovém rozmezí 10^{-35} s– 10^{-30} s. V průběhu raného vývoje vesmíru se od prapůvodní interakce oddělily čtyři nezávislé základní interakce tak jak je známe dnes (gravitační - 10^{-44} s, silná - 10^{-35} s, a naposled oddělení slabé a elektromagnetické interakce - 10^{-10} s).[3]

V časovém rozmezí zhruba 10s až tři minut po Velkém třesku se již formovalo ${}^4\text{He}$ a v menší míře i ostatní lehké prvky jako Li , ${}^3\text{He}$, D . Dalším důležitým bodem vývoje vesmíru je doba přibližně 380 000 let po Velkém třesku. V této době klesla teplota vesmíru vlivem jeho expanze na hodnotu 3000 K a fotony, které do té doby tvořili převážnou část energie vesmíru, již neměly dostatečnou energii na ionizaci atomů vodíku. Díky tomu začala být hmota pro záření průhledná a došlo tak k separaci hmoty a záření. To dalo vzniknout prvním atomárním obalům a radikálnímu snížení volných elektronů. Pozdější vývoj vesmíru lze vyčíst z obr. 1, kde je vyobrazena stručná historie vesmíru.

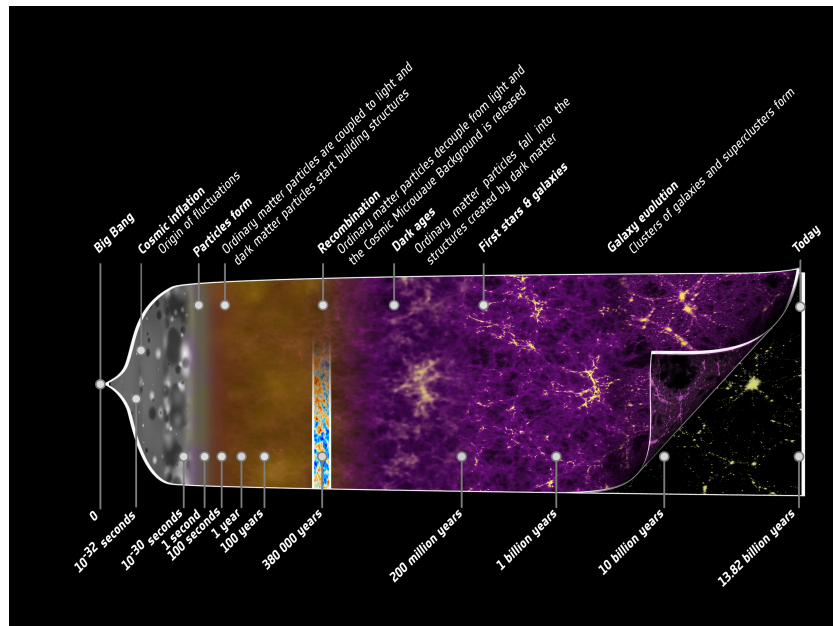
Reliktní záření - Cosmic microwave background (dále jen CMB) má pro kosmologii velký význam z toho důvodu, že v sobě nese informace o vesmíru z doby svého vzniku. Tyto informace se získávají harmonickou analýzou jeho teplotních fluktuací, které se objevují až na pátém desetinném místě naměřených hodnot. Pomocí kosmologických modelů se pak dají odvozovat parametry našeho vesmíru jako jsou např. hodnota kosmologické konstanty nebo procentuální zastoupení temné energie či temné hmoty.

Studium reliktního záření má tedy velký význam pro pochopení základních zákonitostí přírody, a to také opodstatňuje řadu finančně náročných výzkumných programů, které se tímto tématem zabývají.

Předložená bakalářská práce má cíle podstatně skromnější. Jak se ukáže dále, při detekci se využívají postupy zcela analogické optickým detekčním metodám, například fokusace záření nebo jeho přeměna na tepelnou energii. Na rozdíl od klasické optiky se jedná o signály s nepatrnou intenzitou a z tohoto hlediska je podstatné využívat metody, které pokud možno kompletně využijí informaci obsaženou v signálu. Takové metody

¹Planckův čas patří mezi tzv. Planckovy jednotky, které jsou nedefinovány za pomoci tří základních konstant (rychlost světla ve vakuu, redukovaná Planckova konstanta a gravitační konstanta):

$$l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.616199 \cdot 10^{-35} \text{m}; m_p = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2.17651 \cdot 10^{-8} \text{kg}; t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5.39106 \cdot 10^{-44} \text{s}$$
$$T_p = \frac{E_p}{k_B} = \frac{1}{k_B} \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \approx 1.416833 \cdot 10^{32} \text{K} \quad \text{hodnoty konstant jsou získány z [1]}$$



Obrázek 1: Stručná historie vesmíru, převzato z [4]

existují a jsou hojně využívány v kvantové informatice. V této souvislosti se často mluví o kvantové tomografii, která se snaží úplným způsobem popsat kvantový signál na základě provedených měření. Bakalářská práce se zaměří na problém, jak s využitím statistických metod detekovat přesněji optické veličiny charakterizující přicházející vlny.

Součástí práce bude i hrubá analýza detekčních technik používaných pro detekci mikrovlnného záření. Ta by měla napovědět, zda taková detekce je v mezích současných možností. Přestože bakalářská práce nemůže dát konečnou a vyčerpávající odpověď na všechny položené otázky, bude se snažit formulovat otázky, které běžná optika neuvažuje.

Závěrem uvedme stručný přehled projektů zabývajících se detekcí CMB, širší přehled je možno získat z [5]. Projekty jsou rozříděny dle charakteru pracovního umístění experimentu na balónové sondy, vesmírné sondy a pozemní pozorování.

- **Balónové sondy**

Jedním z možných způsobů zkoumání CMB je vypuštění balónové sondy. Mezi výhody balónových sond patří jednoznačně vysoké úhlové rozlišení, zároveň však skýtají značnou nevýhodu v pokrytí (tj. balónové sondy měří jen úzce vymezenou část oblohy).

Balónové sondy			
Název projektu	rok zahájení/ukončení	úhlové rozlišení	více informací
BOOMERanG	1997/2003	0.17°-0.30°	[6]
MAXIMA	1998/1999	0.2°	[7]

- **Pozemní pozorování**

Pozemní pozorování			
Název projektu	rok zahájení/ukončení	úhlové rozlišení	více informací
DASI	1999/2000	0.42°-2.6°	[8]
CBI	2002/2008	4,5-8	[9]
QUaD	2005/2010	4,6	[10]

- **Vesmírné sondy**

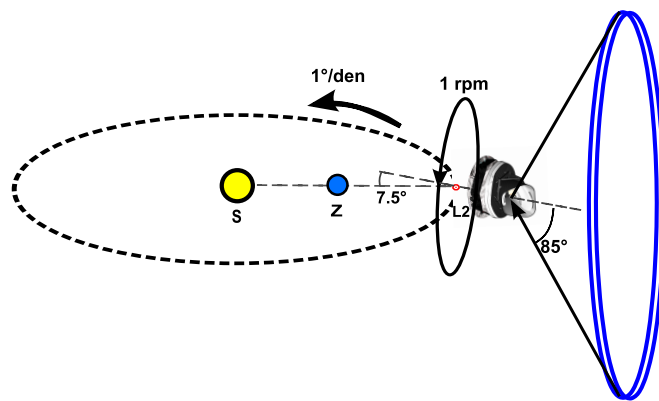
Oproti předešlým dvěma typům umístění mají vesmírné sondy tu velmi dobrou vlastnost, že jsou schopny kompletní přehlídky oblohy.

Vesmírné sondy			
Název projektu	rok zahájení/ukončení	úhlové rozlišení	více informací
COBE	1989/1993	7°	[11]
WMAP	2001/2010	0.25°	[12]
PLANCK ²	2010/2013	0.08°	[13]

²Různé části detektoru (citlivé na různé frekvence) mají různé rozlišení. Zde uvedené rozlišení je to nejlepší. Vesmírné sondě Planck bude věnována větší pozornost v následující kapitole.

1 Mise Planck

Jedním z aktuálních projektů zkoumajících CMB je mise Planck. Vedle vedlejších cílů jako je hledání polarizace reliktního záření způsobeného gravitačními vlnami z inflační fáze, nebo měření Sunajev-Zeldovičova jevu¹, jež však nejsou pro tuto kvalifikační práci důležité, je primárním cílem sondy Planck, zkoumání anizotropie CMB. Jedná se o vesmírnou sondu vypuštěnou v květnu roku 2009 pod záštitou Evropské kosmické agentury ESA (European space agency). Sonda byla umístěna na orbitu Lagrangeova bodu L_2 Země-Slunce. Tento bod je jeden ze čtyř Lagrangeových bodů, ve kterých se gravitační působení Země a Slunce navzájem ruší a tělesa (mající vzhledem k Zemi a Slunci malou hmotnost) umístěná v takových bodech zůstávají v soustavě Země, Slunce nehybná. Lagrangeův bod L_2 je pro umístění sond poměrně hojně využíván (sondy tedy pochopitelně nejsou umístěny přímo v daném bodě ale vykonávají kolem něj orbitální pohyb). V bodě L_2 se sonda otáčí okolo vlastní osy s frekvencí jedné otáčky za minutu. Okolo Slunce sonda Planck obíhá spolu se Zemí rychlostí 1° za den. Základní strukturu sondy je možné shlédnout na obr. 3.

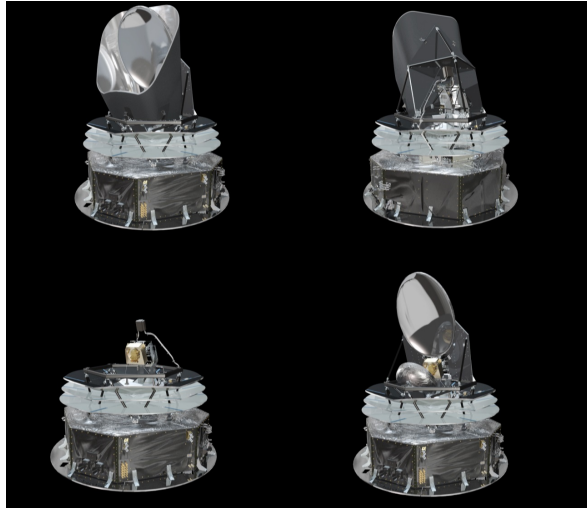


Obrázek 2: Průběh skenování - Sonda obíhá okolo Slunce stejnou rychlostí jako Země tedy jeden úhlový stupeň za den, zároveň se v Lagrangeově bodě otáčí okolo vlastní osy s frekvencí jedné otáčky za minutu. Záření dopadající do ohniska optické soustavy sondy dopadá pod úhlem 85° od hlavní osy sondy. Osa sondy svírá s osou Země-Slunce úhel 7.5° [14, str. 14]

Hlavní část sondy tvoří detektory (obr. 4) umístěné v ohniskové rovině optického systému. Jsou jimi zařízení HFI (The High Frequency Instrument) a LFI (The Low Frequency Instrument) představující soustavu bolometrů pracujících na různých frekvencích, jejichž rozmístění a pracovní frekvence lze vidět na obr. 5, kde si lze povšimnout systematického rozmístění.

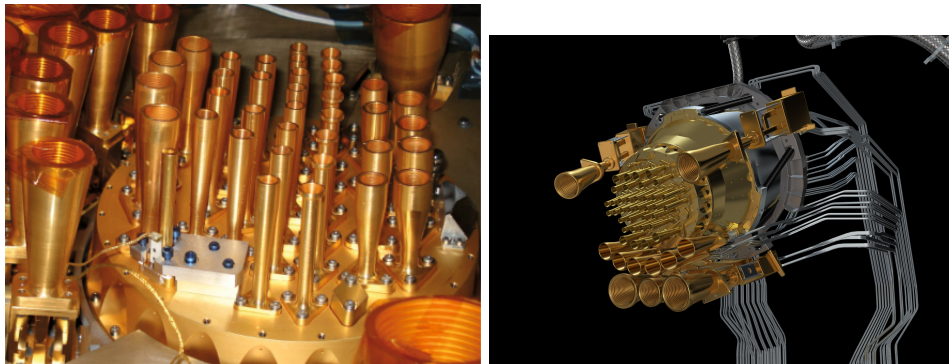
Detekční prvky se stejnou pracovní vlnovou délkou jsou umístěny v jedné rovině. Větší pracovní délky jsou umístěny dále od středu, menší naopak blíže. Detektory fun-

¹Výsledek vzájemného ovlivnění vysoce energetických elektronů s fotony reliktního záření prostřednictvím inverzního Comptonova rozptylu. Nízkoenergetické mikrovlnné fotony reliktního záření získávají energii při průletu horkým mezigalaktickým plynem v kupě galaxií a ta se projevuje změnou spektra.



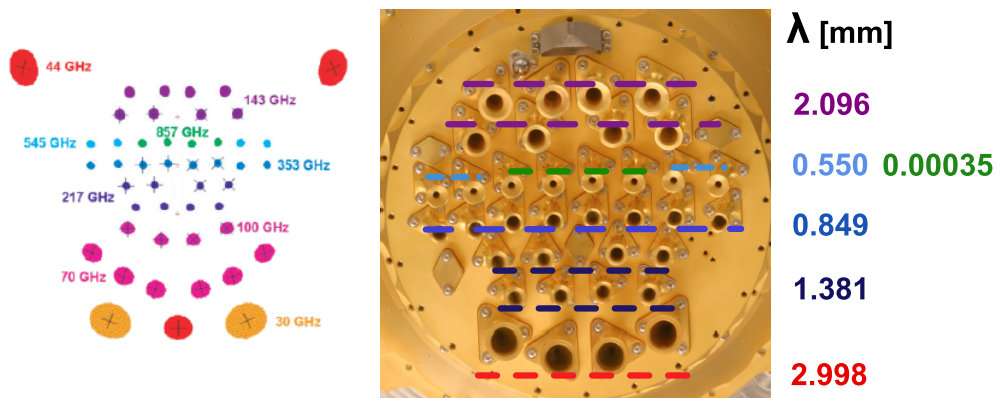
Obrázek 3: Struktura sondy Planck (převzato z [15])

gují na principu detekce velmi malých změn odporu čidla, které jsou vyvolány absorpcí detekujícího záření. Na obr. 6 můžeme vidět fotografii jednoho „typického“ bolometru s měřítkem, kde je možno odhadnout průměr vstupního otvoru na přibližně 1 cm. Z uvedeného zdroje však není známa pracovní frekvence této detekční části. Pro naše účely si tedy hodnotu pracovní vlnové délky dovolíme odhadnout, a to s přihlédnutím k obr.5 a obr.4 na hodnotu 2.096 mm.

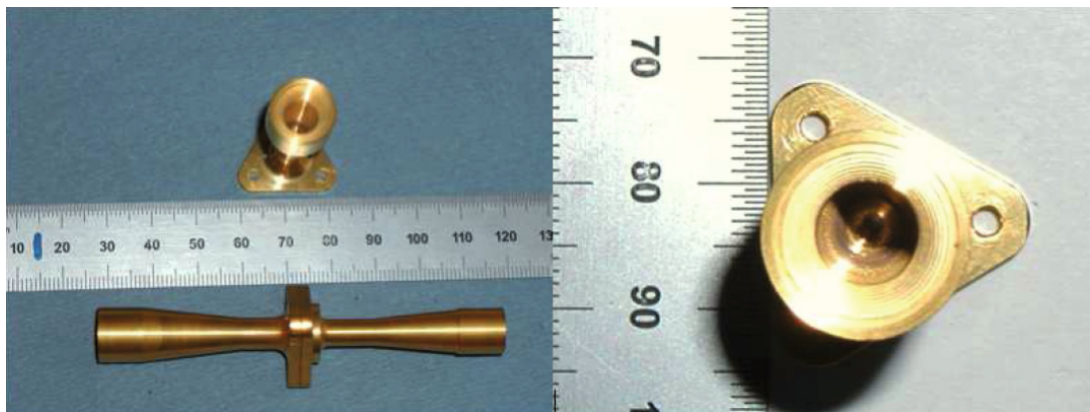


Obrázek 4: Vlevo: detailní fotografie HFI (převzato z [16]), Vpravo: Počítačový model zařízení LFI (již zkompletované s HFI); (převzato z [17])

Z tabulky 1 lze vyčíst, že pracovní frekvence se u detektoru LFI pohybuje v rozmezí 30 až 70 GHz s rozlišením 33 až 14 arcmin, naproti tomu u detektoru HFI (viz tab. 2) jsou pracovní frekvence v rozmezí 100 až 857 GHz s úhlovým rozlišením 10 až 5 arcmin. U detekčních vstupů pracujících na frekvencích 217 až 857 GHz je v tabulce uvedeno totožné úhlové rozlišení 5 arcmin. To však odporuje klasické optice, kde úhlové rozlišení je přímo úměrné vlnové délce. Tento fakt se můžeme pokusit vysvětlit poznámkou, uvedenou v [13], že hodnoty v tabulce označují cílenou citlivost, a jednotlivé elementy jsou navrženy tak, aby ji dosáhli, nebo překročili. Je tedy možno uvažovat tak, že úhlové rozlišení je pro menší vlnové délky ve skutečnosti lepší než minimální požadované.



Obrázek 5: Vlevo: Plošné rozmístění jednotlivých bolometrů (převzato z [13]). Vpravo: Skutečná podoba detektoru HFI s popisem jednotlivých pracovních vlnových délek. Detekční prvky se stejnou pracovní vlnovou délkou jsou umístěny v jedné rovině. Větší pracovní délky jsou umístěny dále od středu, menší naopak blíže. (fotografie převzata z [18])



Obrázek 6: Typický vstup detektoru HFI s měřítkem (převzato z [16])

	LFI		
Pracovní frekvence [GHz]	30	44	70
Pracovní vlnová délka [mm]	9.993	6.813	4.283
² Úhlové rozlišení [FWHM arcminutes]	33	24	14

Tabulka 1: Charakteristika LFI detektoru

	HFI					
Pracovní frekvence [GHz]	100	143	217	353	545	857
Pracovní vlnová délka [mm]	2.998	2.096	1.381	0.849	0.550	0.00035
² Úhlové rozlišení [FWHM arcminutes]	9.5	7.1	5.0	5.0	5.0	5.0

Tabulka 2: Charakteristika HFI detektoru

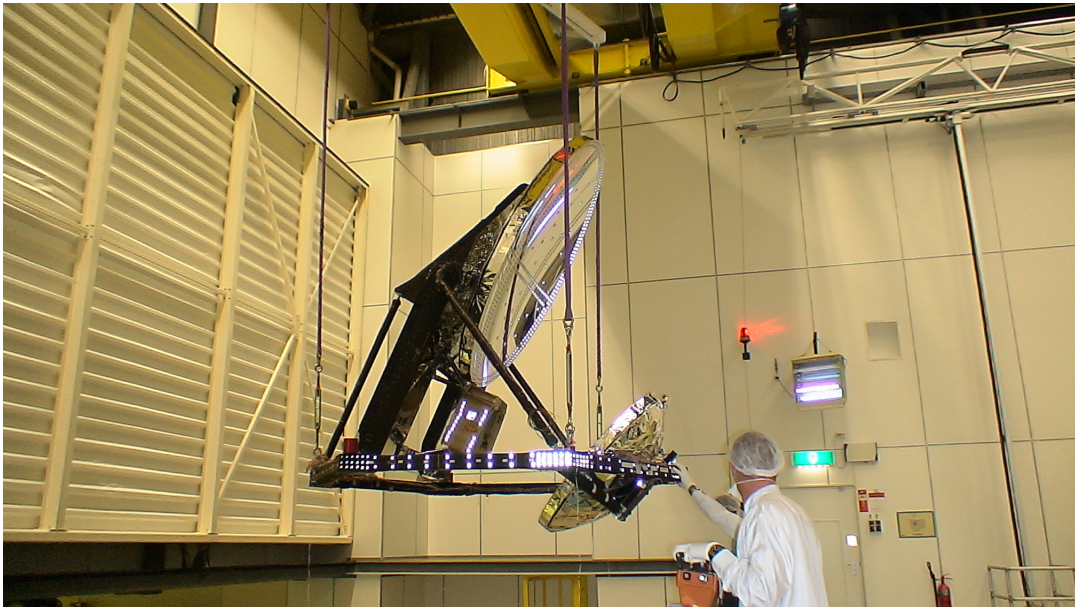
Optický systém sondy je tvořen dvěma eliptickými zrcadli uskupených do konfigurace Gregorihova dalekohledu (viz [13, str. 12]), jež soustředí příchozí záření do ohniska, kde jsou umístěny detektory HFI a LFI. Obě zrcadla jsou vybroušena s povrchovými

²Cílená citlivost. Všechny subsystémy byly navrženy tak, aby dosáhly nebo překročily výkony v této tabulce, o kterých se očekává, že budou dosaženy na oběžné dráze.

nerovnosti minimalizovanými na úroveň od $50\mu\text{m}$ u krajů až po $7.5\mu\text{m}$ u centra a proti nežádoucímu záření, jakým je například sluneční svit, jsou chráněna krytem. Sekundární zrcadlo má řádově průměr jeden metr a vzdálenost od ohniskové roviny též 1 m (1026.83 mm viz [19, str.20]). Základní charakteristika obou optických členů je uvedena v tabulce 3. Obr. 7 zobrazuje fotografii na níž je dobře viditelná konstrukce optické soustavy primárního a sekundárního zrcadla, a to včetně poměru ku lidské bytosti.

	Primární zrcadlo	Sekundární zrcadlo
Poloměr křivosti [mm]	1440.000	-643.972
Rozměr [mm]	1886.79 x 1555.98	1104.39 x 1050.96
Konická konstanta	-0.86940	-0.215424

Tabulka 3: Parametry zrcadel optického systému. Data převzata z [13]

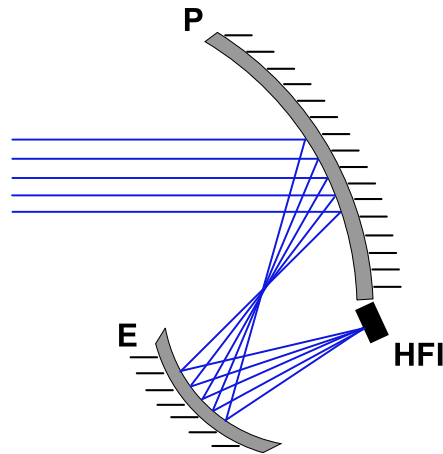


Obrázek 7: Optická soustava sondy Planck. (Převzato z [20])

Provedením hrubé aproximace sondy, můžeme na místo dvojice eliptických zrcadel uvažovat difrakčně limitovanou optickou soustavu tvořenou primárním parabolickým a sekundárním eliptickým zrcadlem (viz obr.8. Zkoumané reliktní záření je touto soustavou soustředěno do ohniskové roviny, kde je umístěno detekční zařízení. V aproximované soustavě se budeme přibližně držet rozměrové analýzy skutečné sondy Planck, tj. sekundární zrcadlo uvažujeme o průměru 1 m a to ve vzdálenosti 1 m od ohniskové roviny. Za těchto podmínek se nyní pokusme řádově poměřit velikost detekční oblasti a difrakčního obrazce. Uvážením difrakční limity, o níž bude blíže pojednáno v kapitole 2, tvaru

$$\Delta\theta \geq 1.22 \frac{\lambda}{a},$$

kde a je průměr apertury a r je vzdálenost prvního minima od středu obrazce, můžeme pro skutečnou vzdálenost prvních minim difrakčního obrazce, při ohniskové vzdálenosti



Obrázek 8: Schéma optické soustavy zjednodušené vesmírné sondy pro detekci reliktního záření. Soustava je tvořena primárním parabolickým zrcadlem, v obrázku označeném písmenem P, a sekundárním eliptickým zrcadlem označeným písmenem E. Myšlená difrakčně limitovaná optická soustava soustřeďuje příchozí reliktní záření do ohniskové roviny, kde je umístěno detekční zařízení. Všechny komponenty této soustavy uvažujeme tak, aby řádově splňovaly rozměrovou analýzu skutečné sondy Planck. Vzdálenost ohniskové roviny sekundárního zrcadla tedy vzhledem k [20] uvažujeme přibližně 1m, jeho průměr pak vzhledem k tabulce 3 také přibližně jeden metr.

f , psát

$$r = 2.44 \frac{\lambda}{a} f.$$

Dosazením z výše uvedených údajů ($a = 1m$; $\lambda = 0.849mm$; $f = 1m$) získáme pro vzájemnou vzdálenost r prvních minim difrakčního obrazce hodnotu přibližně 2.1 mm. Pro vlnovou délku 0.849mm lze ukázat, že na jeden detekční celek o přibližném průměru 1 cm (odhad rozměru prvku detekčního zařízení uvedeného na obr.6) připadne difrakční vzorek v rozsahu prvních pěti minim. Při detekci velmi slabého záření, jakým je právě CMB, za daných podmínek (tj. uvažujeme optickou soustavu difrakčně omezenou), se mohou s výhodou aplikovat metody kvantové tomografie, o kterých jsme se krátce zmínily v předěšlé kapitole a které budou dále podrobněji rozebrány na jednoduchých modelech, kde ukážeme, že je teoreticky možné vytěžit z naznačeného průběhu detekce více informace, než v rámci klasické optiky.

Poznamenejme, že dvojice eliptických zrcadel tvoří aplanatický systém, který podává v ohniskové rovině rozostřený obraz. Použití takovéto optické soustavy je rozporuplné, avšak není v možnostech ani cílem této bakalářské práce hodnotit strukturu sondy, napaak je zde snaha o podání uceleného popisu sondy. Výše byly popsány cíle sondy Planck, její hlavní komponenty a také byl načrtnut proces detekce. Je však na místě zdůraznit, že mise Planck je vysoce sofistikovaný projekt, na kterém se podílí velmi velká skupina odborníků a není v síle této práce jej kompletně popsat. Do procesu skutečné detekce zasahuje mnoho vedlejších faktorů, jako je pohyb sluneční soustavy a vzhledem k souřadné soustavě spojené s galaxií a také pohyb samotné galaxie vůči okolí. Dalším vedlejším faktorem je detekce záření, jehož původ není CMB ale například naše a i ostatní galaxie,

různé bodové a kompaktní zdroje apod. Díky současnému měření na vícero frekvencí se tyto zdroje dají dodatečně od sebe oddělit. V současné době již sonda Planck není v provozu. Celkem vykonala 4 celoplošné prohlídky oblohy a byly zatím zveřejněny dvě sady výsledků a třetí se očekává v polovině roku 2014 [21].

2 Úhlové rozlišení optické detekce

Detekce optického signálu pomocí apertury představuje klasický optický problém, který je popsán v mnoha učebnicích optiky. Vlna reprezentovaná rovnoběžnými paprsky dopadá na aperturu optického přístroje. V důsledku difrakce dochází k tomu, že světlo dopadá i do geometrického stínu a vytváří tak difrakční obrazec, který je popsán difrakční funkcí.

2.1 Difrakční funkce

Odvození difrakční funkce (jak pro jednodimenzionální aperturu, tak i pro dvoudimenzionální) vychází z difrakčního integrálu.

$$U(P) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{i\lambda z} \iint_{S_A} U(\xi, \eta) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta \quad (1)$$

Po provedení integrace naznačené v (1) lze získat hodnotu $U(P)$. Intenzita I je pak dána jako absolutní hodnota jejího kvadrátu $I = |U(P)|^2$.

V případě dlouhé úzké štěrby, kdy je možno jeden z rozměrů zanedbat, pak pro intenzitu vychází vztah

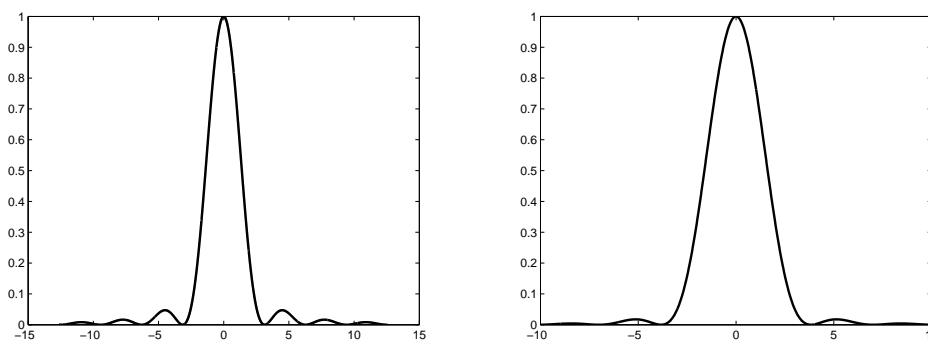
$$I(P) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2, \quad (2)$$

kde $I_0 = |U(0,0)|^2$ a $\alpha = \frac{1}{2}akx/z$, přičemž a představuje rozměr štěrby, k vlnové číslo, z vzdálenost roviny (rovnoběžné s rovinou apertury) na níž leží zkoumaný bod P od roviny apertury, x průmět vzdálenosti bodu P od středu apertury do zmíněné roviny procházející bodem P . Pro dvoudimenzionální kruhovou aperturu pak platí

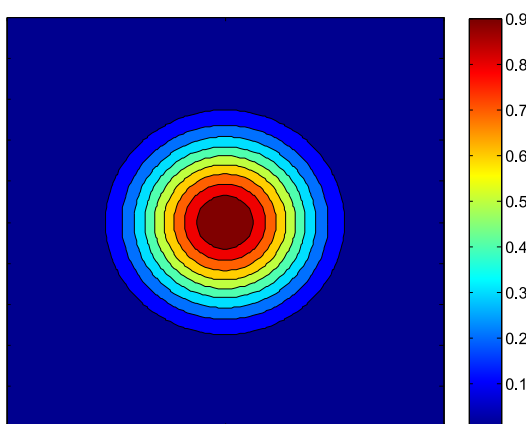
$$I = I_0 \left[\frac{2J_1(\beta)}{\beta} \right]^2, \quad (3)$$

kde $\beta = \frac{1}{2}akR/z$. Význam a, k a z je stejný jako v předchozím, R je poloměr x . Podrobné odvození difrakčního integrálu (1) a difrakčních funkcí je obsahem přílohy A.

Jak je z obr. 9 vidět, průběhy obou difrakčních funkcí si jsou velmi podobné. Rozdíl spočívá v hodnotách nabývání vlastních minim zmíněných funkcí. Difrakční funkce úzké štěrby nabývá svá první minima při hodnotách $\alpha = \pm\pi$. Naproti tomu difrakční funkce pro kruhovou štěrbinu má svá první minima při hodnotách $\beta = \pm 1.22\pi$. Z obr. 10 prostorově znázorňujícího difrakční funkci na kruhové štěrbině je vidět, že většina intenzity je soustředěna ve středovém kroužku mezi prvními minimy. U jednodimenzionální apertury se jedná o přibližně 90% a u kruhové dvoudimenzionální apertury o přibližně 97% intenzity. Zmíněný středový kroužek se nazývá Airyho disk a je důležitý zejména pro optiku, kde nám dává informaci o kvalitě optické soustavy. Obecně lze říci, že u optické soustavy je obrazem bodu difrakční obrazec. Ten závisí na parametrech soustavy tj. na aberacích, tvaru a poloze zobrazovacího bodu v rovině.



Obrázek 9: Průběhy difrakčních funkcí pro aperturu - vlevo: jednodimenzionální s prvními minimy v bodech $\pm\pi$ a s 90% intenzity soustředěné mezi prvními minimy; vpravo: kruhovou s prvními minimy v bodech $\pm 1.22\pi$ a 97% intenzity soustředěné mezi prvními minimy



Obrázek 10: Simulace Airyho disku v programu Matlab

2.2 Úhlové rozlišení

Skutečnost, že bod se po zobrazení optickou soustavou nezobrazí jako bod, ale jako difrakční obrazec má pro optiku závažný důsledek v podobě konečného úhlového rozlišení. Dva body zobrazené optickou soustavou pak od určité úhlové vzdálenosti splynou do jednoho. Úhlové rozlišení tedy dává informaci, jakou mohou mít dva body úhlovou vzdálenost, aby byly po zobrazení optickou soustavou rozeznatelné.

V klasické optice je běžné setkat se s odvozováním úhlového rozlišení založeného na úhlové šířce prvních minim difrakční funkce (viz obr. 11 vlevo). Krátkým výpočtem se dá zjistit, že první minima funkce $\text{sinc}^2(\alpha)$ odpovídají hodnotám $\pm\pi$.

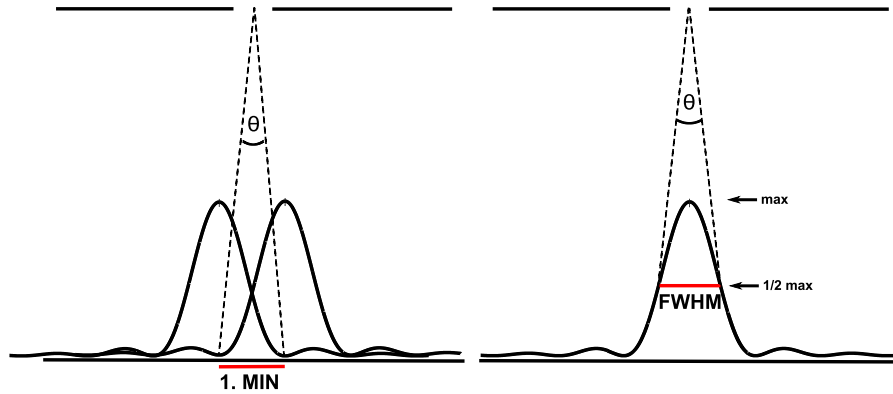
$$\frac{\partial \text{sinc}^2(\alpha)}{\partial \alpha} = 0 \xrightarrow{\alpha \neq 0} \sin(\alpha)(\alpha \cos(\alpha) - \sin(\alpha)) = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin(\alpha) = 0 \rightarrow \alpha = \pm n\pi & \text{minima} \\ \tan(\alpha) = \alpha & \text{maxima} \end{cases}$$

Pro argument funkce sinc^2 tedy platí nerovnost

$$\left| \frac{1}{2} ka\Delta\theta \right| \geq \pi,$$

z níž plyne hledané úhlové rozlišení ve tvaru

$$\Delta\theta \geq \frac{\lambda}{a}. \quad (4)$$



Obrázek 11: Geometrie úhlového rozlišení: vlevo úhlová šířka prvního minima; vpravo úhlová šířka FWHM

Naprostoj stejným způsobem je možno získat úhlové rozlišení pro kruhovou aperturu, které se bude lišit pouze o koeficient 1.22.

$$\Delta\theta \geq 1.22 \frac{\lambda}{a}. \quad (5)$$

Kromě úhlové šířky prvních minim se v literatuře objevuje též i úhlová šířka FWHM (Full width at half maximum). FWHM označuje rozsah funkce daný rozdílem dvou krajních hodnot, při kterých nabývá funkce polovinu své maximální hodnoty, tak jak je znázorněno na obr. 11 vpravo. Pro difrakční funkce $\text{sinc}^2(\alpha)$ (1D) a $\left[\frac{2J_1(\beta)}{\beta}\right]^2$ (2D) byly numerickou analýzou nalezeny vztahy mezi úhlovým rozlišením daným úhlovou šířkou prvního minima a úhlovou šířkou FWHM.

$$1D: \quad \Delta\theta_{FWHM} \approx 0.8859\Delta\theta_{klas} \quad (6)$$

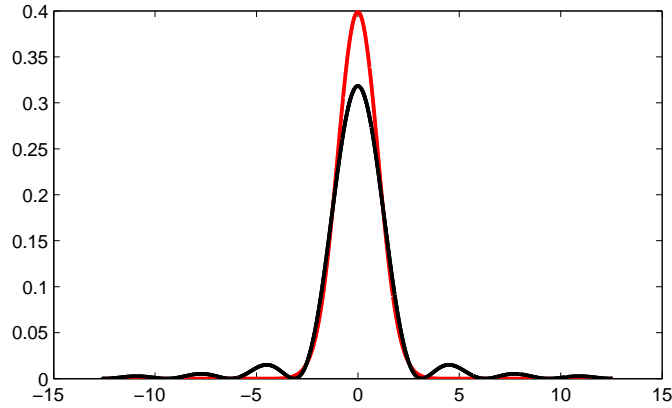
$$2D: \quad \Delta\theta_{FWHM} \approx 0.8434\Delta\theta_{klas}$$

Oba výše uvedené postupy určení difrakční limity však mohou být diskutabilní v případě difrakčních funkcí, jež mají nekonečný rozptyl. Snadno se dá ověřit, že takovou funkcí je i funkce¹ $\text{sinc}^2(x)$, která odpovídá difrakční funkci.

Druhý centrální moment náhodné veličiny, zvaný rozptyl, je definován jako střední hodnota kvadrátu odchylky od střední hodnoty tj. $\text{Var}(x) = E[X - E(X)]^2$, častěji se však užívá tvaru $\text{Var}(x) = E(X^2) - (E(X))^2$, který lze pro spojitě náhodné veličiny veličiny přepsat na

$$\text{Var}(x) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx \right) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \right)^2,$$

¹Další ve fyzice se vyskytující funkce s nekonečným rozptylem je $p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$, která představuje tzv. Standardní Cauchyho pravděpodobnostní rozdělení



Obrázek 12: Názorné porovnání gaussovské funkce s konečným rozptylem s funkcí $\text{sinc}(x)$ s nekonečným rozptylem. Z obrázku je zřejmé, že ramena gaussovská funkce klesají mnohem rychleji než u funkce $\text{sinc}^2(x)$.

kde $f(x)$ je hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X . Druhý člen pravé strany rovnice odpovídá kvadrátu střední hodnoty, která je pro naši difrakční funkci rovna nule. Výpočet prvního integrálu na pravé straně vypadá pro funkci $\text{sinc}^2(x)$ následovně.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \text{sinc}^2(x) dx &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_{-a}^a \sin^2(x) dx \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_{-a}^a \frac{1}{2} (1 - \cos(2x)) dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_{-a}^a 1 dx - \int_{-a}^a \cos(2x) dx \right) = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} (2a - \sin(2a)) = \infty \end{aligned}$$

Rozptyl difrakční funkce je tedy opravdu nekonečný.

Pro porozumění problému, bude již na tomto místě naznačen způsob aplikace statistických metod a jejich souvislost s již zmíněnou kvantovou tomografií. V kvantové fyzice má úloha spočívající v určení pravděpodobnosti určitého jevu (či obecně určení pravděpodobnostního rozdělení souboru jevů) na základě znalosti kvantového stavu triviální řešení. Je-li třeba řešit problém inverzní, tj. ze znalosti naměřených dat určit kvantový stav popisující daný systém, jedná se o úlohu poměrně netriviální. Právě tímto inverzním problémem se zabývá kvantová tomografie. Jednou z mnoha metod kvantové tomografie je metoda založená na teorii informace odkazující se konkrétně na Bayesovu větu a maximální věrohodnostní funkci[23]. Bayesova věta

$$p(A|S) = \frac{p(S|A)p(A)}{p(S)}$$

představuje v matematické statistice vztah mezi tzv. apriorní $p(S|A)$ a posteriorní $p(A|S)$ pravděpodobností. Z hlediska kvantového měření může být jejich interpretace následující: apriorní pravděpodobnost vyjadřuje znalost systému před měřením a posteriorní po měření. Na první pohled se může zdát, že u naměřených dat, jež jsou závislá na nějakém parametru, je chyba učiněná při odhadu (v terminologii kvantové tomografie se pak pro odhad stavu na základě naměřených dat užívá pojmu estimátor) tohoto parametru závislá na šířce rozdělení odpovídajícímu danému měření. Zde je jádro problému, protože

zmíněná šířka rozdělení je charakterizována právě rozptylem, který jak bylo již výše uká-
záno může být nekonečný. Z teorie pravděpodobnosti však vyplývá, že chyba odhadu je
zdola omezená, tj. jistou přesnost odhadu již nemůžeme překročit. Následující kapitola
se tímto spodním omezením odhadu bude zabývat a snažit se jej aplikovat na úhlové
rozlišení v jednoduchých případech detekce.

3 Statistický odhad parametrů a úhlového rozlišení

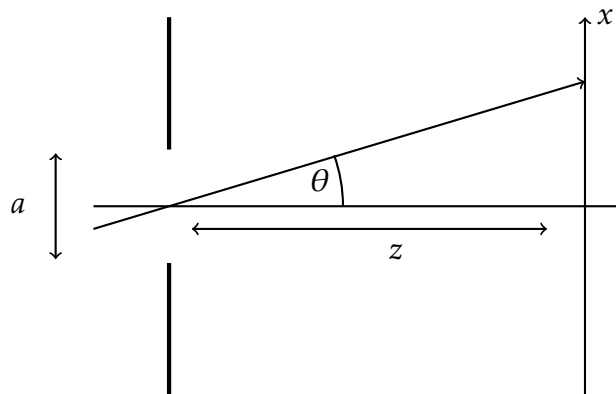
Pro jednoduchost se bude výklad držet zpočátku 1D modelu difrakce na štěrbině. Na proces detekce lze pohlížet i z pohledu matematické statistiky a to tím způsobem, že detekované záření se bere jako statistický vzorek.

Aby bylo i nadále možno pracovat s difrakční funkcí (2), je nutno požadovat, aby byla vyjádřením hustoty pravděpodobnosti náhodné proměnné tj. její hodnota pro dané x bude vyjadřovat pravděpodobnost uskutečnění se hodnoty x . Jediná obecná podmínka kladená na hustotu pravděpodobnosti je, že součet pravděpodobností všech možných jevů je roven jedné. Pro spojitou funkci se tedy klade požadavek, aby integrace přes obor hodnot byla rovna jedné. Toho lze docílit tak, že se difrakční funkci doplní koeficientem, který splnění této podmínky zajistí, přičemž počáteční intenzita I_0 je považována za jednotkovou. Zmíněný koeficient má pro jednodimenzionální difrakční funkci s jednotkovou počáteční intenzitou tvar $\frac{1}{\pi}$. Odvození této hodnoty je k nalezení v příloze A. Pro potřeby dalších výpočtů se bude hustotu pravděpodobnosti uvažovat ve tvaru

$$p(\mu|\nu) = \frac{1}{\pi} \text{sinc}^2(\mu - \nu), \quad (7)$$

, kde byla užita substituce $\mu = akx\frac{1}{z}$ a $\nu = \frac{1}{2}ak \sin \theta$.

Z provedených substitucí a geometrie detekce (obr. 13) je vidět, že parametr μ obsahuje informace o souřadnici x a parametr ν informaci o směru přichozího záření (o úhlu θ). Dále je třeba zdůraznit fakt, že pro každou pevně stanovenou hodnotu parametru ν je hodnota parametru μ daná pouze s určitým rozptylem. Nebo-li parametr μ není znám jako konkrétní bod na stínítku, ale pouze jako jistá úzká oblast stínítka.



Obrázek 13: geometrie difrakce na 1D štěrbině

3.1 Odhad parametru a Fisherova informace

Pro další výpočty je důležité uvědomění si, že parametr ν má neznámou avšak pevně danou jedinou hodnotu, tj. pozorujeme záření přicházející pouze z jednoho směru.

Rozebráním následující situace je možné ukázat spojitost mezi odhadem parametru a Fisherovou informací. Na stínítku je registrováno celkem N (nerozlišitelných) částic a N_μ částic v konkrétním místě stínítku (tj. při dané hodnotě x), jež představují naměřená data. Tato naměřená data v sobě vedle známé hodnoty μ (přímo úměrné x) skrývají i informaci o parametru ν . Výsledná hustota pravděpodobnosti (7) tedy tvoří tzv. podmíněnou pravděpodobnost. Tím je myšleno to, že pravděpodobnost registrace μ je podmíněná parametrem ν , přičemž ν , jak už bylo výše zdůrazněno, je neznámý, avšak pevně daný parametr, který se odhaduje. V dalším výkladu bude skutečná hodnota neznámého parametru označována ν a jeho odhad ν' .

Pravděpodobnost odhadnutého parametru ν' podmíněná hodnotou μ je dána vztahem [25]

$$p(\nu'|\mu) = \prod_{\mu} p(\mu|\nu')^{N_\mu} = \exp \left[\sum_{\mu} N_\mu \ln p(\mu|\nu') \right] \quad (8)$$

je-li celkový počet N velmi vysoký, pak hodnoty N_μ lze aproximovat vztahem $N_\mu = Np(\mu|\nu)$. Řadu v exponentu je tedy možno po rozvinutí do Taylorovy řady psát ve tvaru

$$\begin{aligned} & N \left(\sum_{\mu} p(\mu|\nu) \ln p(\mu|\nu) \right) \\ & + N(\nu' - \nu) \left(\sum_{\mu} p(\mu|\nu) \partial_{\nu} [\ln p(\mu|\nu)] \right) \\ & - \frac{N}{2} (\nu' - \nu)^2 \left(\sum_{\mu} p(\mu|\nu) \partial_{\nu}^2 [\ln p(\mu|\nu)] \right). \end{aligned}$$

První člen nově získaného exponentu odpovídá entropii S a druhý je roven nule. Třetí lze po krátké úpravě zapsat ve tvaru

$$-\frac{N}{2} (\nu' - \nu)^2 \left(\sum_{\mu} p(\mu|\nu)^{-1} [\partial_{\nu} p(\mu|\nu)]^2 \right) = -\frac{1}{2} J_{\nu} (\nu' - \nu)^2,$$

Celkově tedy

$$p(\nu'|\mu) = \exp[S] \exp \left[-\frac{1}{2} J_{\nu} (\nu' - \nu)^2 \right],$$

kde

$$J_{\nu} = N \sum_{\mu} p(\mu|\nu)^{-1} [\partial_{\nu} p(\mu|\nu)]^2 \quad (9)$$

je Fisherova informace. Ta obecně poskytuje hodnotu rozptylu odhadu hledaného parametru jímž je hustota pravděpodobnosti podmíněná.

3.2 Rao-Cramerova mez

Pojem Rao Cramerova mez úzce souvisí s Fisherovou informací. Je určena její převrácenou hodnotou $\frac{1}{J_{\nu}}$ a tvoří dolní hranici rozptylu odhadu hledaného parametru.

V následující části bude ukázán význam Rao-Cramerovy meze pro úhlové rozlišení. Uvážením normovací podmínky a skutečnosti, že střední hodnota jakéhokoliv nestranného odhadu je rovna skutečné hodnotě tj.

$$\sum_{\mu} v' p(\mu|v) = v \quad (10)$$

$$\sum_{\mu} p(\mu|v) = 1 \quad (11)$$

lze po derivaci (10) a (11) podle v , následně vynásobením (11) v a vzájemným odečtením dojít k rovnici

$$\sum_{\mu} (v' - v) \frac{\partial p(\mu|v)}{\partial v} = 1,$$

kde je možno uplatnit Cauchy-Schwarzovu nerovnost

$$1 \leq \left[\sum_{\mu} (v' - v)^2 p(\mu|v) \right] \left[\sum_{\mu} p(\mu|v)^{-1} \frac{\partial p(\mu|v)}{\partial v} \right] = (\Delta v)^2 J_v.$$

a po krátké úpravě vzniká nerovnost

$$(\Delta v)^2 \geq \frac{1}{J_v}. \quad (12)$$

Nerovnost (12) dává nový pohled na úhlové rozlišení. Říká, že přesnost s jakou lze odhadnout směr přichozího záření je omezena převrácenou hodnotou Fisherovy informace.

3.3 Analýza úhlového rozlišení z pohledu Fisherovy informace

V následujících výpočtech bude uvažována hodnota $N = 1$. To však v žádném případě neimplikuje průběh registraci pouze jedné jediné částice, ale pouze to, že bude proveden výpočet průměrné hodnoty Fisherovy informace pro jednu částici, přičemž je stále kladena podmínka na vysokou hodnotu celkového počtu N . Výpočet úhlového rozlišení na jednodimenzionálním modelu difrakce na štěrbině vypadá z pohledu Fisherovy informace a Rao-Cramerovy meze následovně.

Po dosazení difrakční funkce (7) do Fisherovy informace (9)

$$J_v = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi(\mu - v)^2}{\sin^2(\mu - v)} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\sin^2(\mu - v)}{\pi(\mu - v)^2} \right) \right]^2 d\mu$$

a následně úpravě výrazu na pravé straně

$$J_v = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sinc}^{-2}(\mu - v) \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{i(\mu - v)t} dt \right) \right]^2 d\mu,$$

lze dospět k výsledku

$$J_v = \frac{4}{3}. \quad (13)$$

Podrobný popis výpočtu této hodnoty je k dispozici v příloze B. Ze znalosti Fisherovy informace je možno dle (12) stanovit hodnotu Rao-Cramerovy meze

$$(\Delta v)^2 \geq \frac{3}{4}$$

a z ní, užitím zpětné substituce $v = \frac{1}{2}ak\theta$ (s aproximací $\sin \theta \approx \theta$), odvodit „statistickou“ difrakční limitu.

$$\Delta\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{ak} = \frac{\lambda \sqrt{3}}{a 2\pi}. \quad (14)$$

Podílem úhlového rozlišení (4) odvozeného klasickým způsobem a výsledku (14), představující úhlové rozlišení z pohledu matematické statistiky, bude zaveden *koeficient zlepšení P*.

$$P = \frac{\frac{\lambda}{a}}{\frac{\lambda}{a} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1}{J_v}}} = \pi \sqrt{J_v} \quad (15)$$

Ten lze interpretovat jako míru maximálního možného zlepšení používaného úhlového rozlišení vzhledem k teoreticky vymezené hranici. Pro případ jednodimenzionální difrakce na štěrbině vychází tento koeficient roven

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \approx 3.628 \quad (16)$$

Tato hodnota vypovídá o tom, že používané klasické úhlové rozlišení je možno více než třiapůlkrát zlepšit. Nic však nezaručuje, že je takovéto zlepšení reálně dosažitelné. Na tomto místě je třeba poukázat na to, že výše uvedená hodnota Fisherovy informace byla odvozena pro hustotu pravděpodobnosti normovanou na celý prostor (tj. v intervalu od $-\infty$ do ∞), to by však v praxi vyžadovalo mít k dispozici nekonečnou detekční plochu. Zdůrazněme také, že hodnota Fisherovy informace difrakční funkce normované na celý prostor je konstanta nezávislá na parametru v . Lze však očekávat, že omezením se na difrakční funkci normovanou na určitou oblast se tato skutečnost změní.

3.4 Fisherova informace pro neúplná měření

Pro neúplná měření je třeba upravit výraz pro Fisherovu informaci následujícím způsobem tak, aby všechny výrazy byly vzájemně normalizované. V původní formulaci proto proběhne záměna

$$p(\mu|v') \rightarrow \frac{p(\mu|v')}{\sum_{\mu'} p(\mu'|v')}.$$

a rovnost (8) pak přechází v

$$P(v'|\mu) = \prod_{\mu} [p(\mu|v')/G]^{N_{\mu}} = \exp \left[\sum_{\mu} N_{\mu} (\ln p(\mu|v') - \ln G(v')) \right],$$

kde byla pro zjednodušení výrazů zavedena funkce

$$G(\nu) = \sum_{\mu'} p(\mu'|\nu)$$

tj. součet všech pravděpodobností pro detekovaná data. S přihlédnutím k podmínce na vysokou hodnotu celkového počtu N , lze hodnoty N_μ aproximovat vztahem $N_\mu = Np(\mu|\nu)$. Řadu v exponentu tedy lze po rozvinutí do Taylorovy řady psát ve tvaru

$$\begin{aligned} & N \left(\sum_{\mu} p(\mu|\nu) \ln p(\mu|\nu) - \ln G(\nu) \right) \\ & + N(\nu' - \nu) \left(\sum_{\mu} p(\mu|\nu) \partial_{\nu} [\ln p(\mu|\nu) - \ln G(\nu)] \right) \\ & - \frac{N}{2} (\nu' - \nu)^2 \left(\sum_{\mu} p(\mu|\nu) \partial_{\nu}^2 [\ln p(\mu|\nu) - \ln G(\nu)] \right). \end{aligned}$$

Pozornost výkladu je věnována jen třetímu členu, který lze po krátké úpravě zapsat ve tvaru

$$\frac{N}{2} (\nu' - \nu)^2 \left(\sum_{\mu} p(\mu|\nu)^{-1} [\partial_{\nu} p(\mu|\nu)]^2 - G(\nu)^{-1} [\partial_{\nu} G(\nu)]^2 \right) = -\frac{1}{2} J_{\nu} (\nu' - \nu)^2,$$

Fisherova informace pro neúplná měření je proto rovna

$$J_{\nu} = \sum_{\mu} \frac{[\partial_{\nu} p(\mu|\nu)]^2}{p(\mu|\nu)} - \frac{[\partial_{\nu} G(\nu)]^2}{G(\nu)}. \quad (17)$$

Tento tvar Fisherovy informace lze uplatnit při výpočtu rozptylu odhadu parametru při měření uskutečněném pouze na vybraných oblastech. Takovým případem může být například výše uvedený model detekce při difrakci, kdy detekce probíhá na omezeném intervalu $(-\pi, \pi)$. Jedná se o oblast prvních minim, kde se soustředí více jak 90% intenzity záření. Takovíto model neúplné detekce se již reálně přibližuje metodám detekce klasické optiky. Po dosazení difrakční funkce (7) do 17 dostává výpočet Fisherovy informace podobu

$$J_{\nu} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\mu - \nu)^2}{\sin^2(\mu - \nu)} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\sin^2(\mu - \nu)}{(\mu - \nu)^2} \right) \right]^2 d\mu - \frac{[\partial G(\nu)]^2}{G(\nu)}, \quad (18)$$

kde

$$G(\nu) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(\mu - \nu)}{(\mu - \nu)^2} d\mu \right)$$

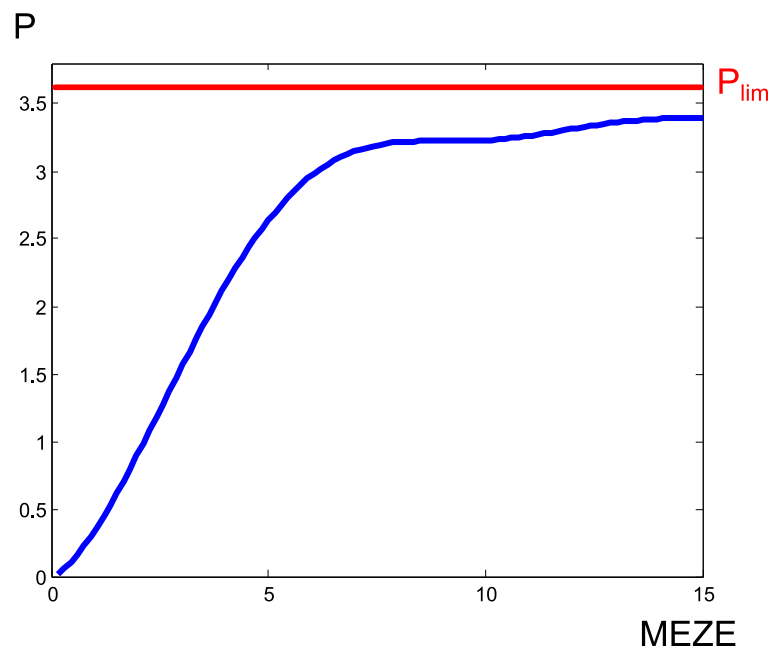
je zavedený korekční člen.

Vzhledem k nemožnosti analytického řešení je nutno přistoupit k numerickému výpočtu, který se provádí pomocí matematického softwaru. Pro snazší výpočet je vhodné

provést naznačenou derivaci symbolicky a rovnici (18) pro výpočet Fisherovy informace upravit na tvar

$$\frac{(\mu - \nu)^2}{\sin^2(\mu - \nu)} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{\sin^2(\mu - \nu)}{(\mu - \nu)^2} \right) \right]^2 = \frac{4}{(\mu - \nu)^4} [(\mu - \nu) \cos(\mu - \nu) - \sin(\mu - \nu)]^2,$$

který je pro numerický výpočet výhodnější. Jako výstup numerických výpočtů byl zvolen graf znázorňující vztah koeficientu zlepšení $P = \pi * \sqrt{J_\nu}$ k rozsahu detekční oblasti (tj. k mezím). Je logické očekávat, že s růstem detekční oblasti (v podobě jednoho celistvého intervalu umístěného symetricky kolem počátku souřadnic) budou růst i hodnoty Fisherovy informace. Jak lze vidět na obr. 14, kde je vyobrazena závislost koeficientu zlepšení P , zavedeném rovnicí (15), na šířce detekční oblasti, tato očekávání se ukázala být správná. Graf ukazuje zpočátku prudší nárůst hodnoty koeficientu zlepšení a následně mírný vzestup směřující k limitní hodnotě (16), která byla odvozena pro případ ideální detekce představující nekonečný detekční interval.



Obrázek 14: Vyobrazení závislosti koeficientu P na hodnotě rozměru detekční oblasti. Z obrázku je zřejmé, že pro délku intervalu přesahující hodnotu přibližně 2π (tj. oblast prvních minim) se koeficient P přibližuje k hodnotě dané vztahem(?) vypočtené pro ideální případ nekonečné detekující plochy.

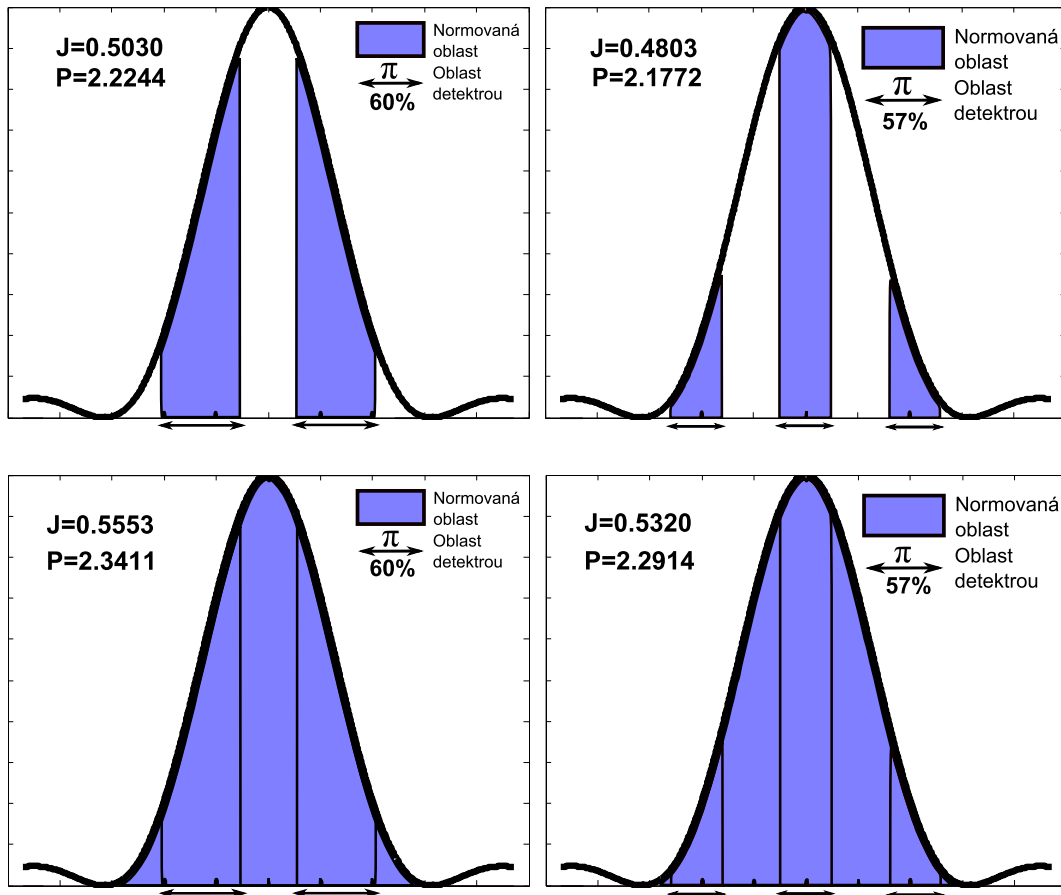
Doposud byla pozornost zaměřena na detekci v jednom daném intervalu představující šířku spojitěho detekujícího zařízení. Další možný způsob měření je detekce diskrétního charakteru, kdy se detektor skládá z více, od sebe oddělených, částí (detekčních intervalů). V následujícím budou uvažovány dva jednoduché modely, a to centrální a necentrální umístění detekčního zařízení (viz obr. 15). Pro zajímavost se výpočty provedeme dvěma různými způsoby normování, normování pouze na intervaly představující detekující oblasti, tedy za použití korekčního členu $G(\nu)$ a dále normování na celý inter-

val prvních minim. Druhý z naznačených způsobů normování (obr. 15dole) představuje pouze alternativu která je uvedena pouze pro srovnání.

Pro případ jednodimenzionálního problému je možné Fisherovu informaci pro měření diskretního charakteru zapsat podle (18) ve tvaru

$$J_v = \frac{1}{\pi} \sum_{\Delta k} \left(\int_{\Delta k} \frac{[\partial_v \text{sinc}(\mu - \nu)]^2}{\text{sinc}(\mu - \nu)^2} d\mu \right) - \frac{\left[\sum_{\Delta k} \left(\int_{\Delta k} \partial_v \text{sinc}(\mu - \nu) \right) \right]^2}{\sum_{\Delta k} \left(\int_{\Delta k} \text{sinc}(\mu - \nu) \right)^2},$$

kde Δk je k-tý interval diskretní detekce.



Obrázek 15: Znárodnění detekce diskretního charakteru pro centrální a necentrální umístění detektorů o celkové délce π . VLEVO: detekční zařízení skládající se ze dvou stejně velkých částí symetricky rozložených okolo středu (necentrální umístění). VPRAVO: detekční zařízení skládající se ze tří stejně velkých částí symetricky rozdělených okolo středu (centrální umístění); V obou případech jsou naznačeny oba zmíněné způsoby normování. NAHOŘE: normování na intervaly představující detekující oblast. DOLE: normování na celý interval prvních minim. V případě necentrálního umístění pak naznačený detektor absorbuje přibližně 60% dopadajícího záření a v případě centrálního umístění přibližně 57%; Celková šířka obou detekčních zařízení (tj. zařízení skládajících se jak ze dvou tak ze tří částí) je stejná.

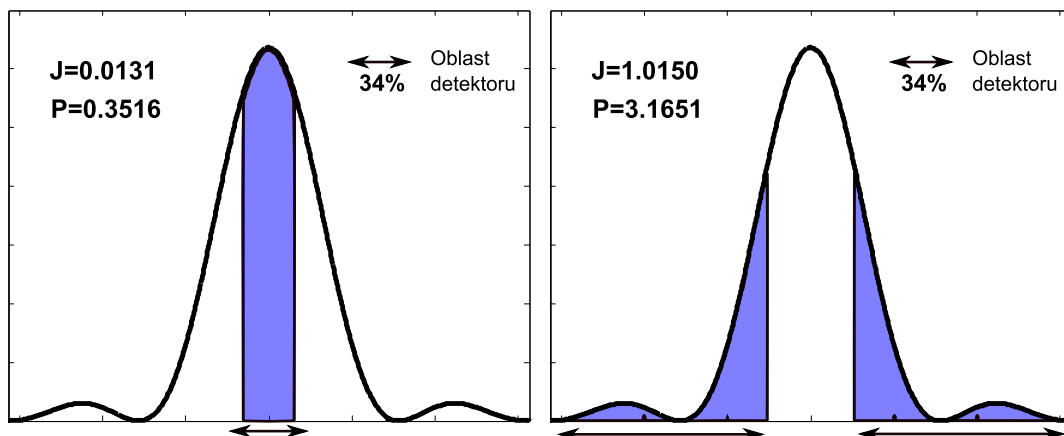
Jako centrálně umístěný detektor byl zvolen detektor rozdělený na tři stejně velké části symetricky rozmístěné okolo maxima difrakční funkce. Umístění jednotlivých částí

byli voleny v intervalech $(-\frac{9}{12}\pi, -\frac{5}{12}\pi)$, $(-\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{6}\pi)$ a $(\frac{5}{12}\pi, \frac{9}{12}\pi)$. Celková šířka detektoru je tedy π , plocha pod křivkou v naznačených intervalech zabírá v porovnání s plochou prvních minim přibližně 57,3%. Fisherova informace pak vychází v případě normování na dané intervaly $J_0 = 0.4803$ a pro případ normování na interval prvních minim vychází $J_0 = 0.5320$. Přepočet na koeficient zlepšení P dává hodnoty $P = 2.1772$ a $P = 2.2915$.

Pro druhý model popisující necentrální umístění byla zvolena podoba detektoru rozděleného na dvě stejně velké části umístěné v intervalech $(-\frac{2}{3}\pi, -\frac{1}{6}\pi)$ a $(\frac{1}{6}\pi, \frac{2}{3}\pi)$. Celková šířka detektoru je opět rovna π , poměr plochy pod křivkou v daných intervalech a plochy prvních minim je přibližně 60%. Fisherova informace pak vychází v případě normování na dané intervaly $J_0 = 0.5030$ ($P = 2,2244$) a pro případ normování na interval prvních minim vychází $J_0 = 0.5553$ ($P = 2.3411$). Z obr. (15), kde byly porovnány dvě sady detekčních intervalů o stejné celkové délce, ale s různým umístěním a různým procentuálním pojmutí dopadajícího záření, lze vyčíst, že hodnota Fisherovy informace je pro případ centrálního umístění, které pokrývá pouze 57% dopadajícího záření, řádově o 2 setiny menší než pro zvolené necentrální umístění intervalů s pokrýtím 60%. Tento pokles by se mohl na první pohled přiřadit poklesu procentuálního pokrytí, to by však bylo příliš unáhlené, protože zvolená ukázka nikterak nevyklučuje závislost na umístění intervalů při stejném pokrytí.

V následujícím bude ukázáno, že i v situaci kdy dvě zkoumané sady detekčních intervalů pojmu stejné množství dopadajícího záření, mohou vést k různým hodnotám Fisherovy informace.

Na obrázku (16) jsou porovnány dvě detekční oblasti. Opět se jedná o jedno centrální a



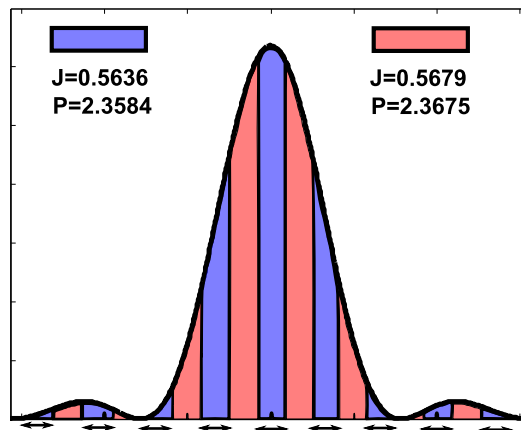
Obrázek 16: Porovnání dvou detekčních oblastí se stejným procentuálním pojmutím (34%) dopadajícího záření. Nalevo: Sada dvou detekčních intervalů umístěných při krajích zkoumané oblasti; Napravo: centrálně umístěný detekční interval. I přes fakt, že obě myšlené detekční oblasti pojmu stejné množství světla se ukazuje, že Fisherova informace je pro případ krajního umístění detekčních oblastí mnohem větší.

jedno necentrální umístění. V případě necentrálního umístění se jedná o detekční intervaly $(-2\pi, -0.3593\pi)$ a $(0.3593\pi, 2\pi)$. Centrální umístění je tvořeno jedním intervalem $(-\pi/6, \pi/6)$. Obě detekční oblasti pojmu 34.03% dopadajícího záření (v tomto případě se

omezujeme na situaci, kdy veškeré záření dopadá do oblasti prvních dvou minim). Pro centrální umístění vychází hodnota Fisherovy informace $J_0 = 0.0131$, pro necentrální pak $J_0 = 1.0150$.

Na zmíněném obrázku je tedy jasně vidět, že při stejném množství detekovaného záření nemusí být obsažená informace nutně stejná. Pokus o vysvětlení tohoto faktu vypadá následovně. V obou výrazech v rovnici 18 pro Fisherovu informaci se vyskytuje jako dominantní člen kvadrát derivace, která jako taková je citlivá na změny funkce. Tyto změny v podání drobných fluktuací, které jsou u difrakční funkce dobře pozorovatelné v místech při krajích od hlavního maxima. Zároveň však je třeba si uvědomit, že tatáž místa jsou u difrakční funkce charakterizována nižší pravděpodobností detekce. Podle výše zmíněných výsledků se tedy, v případě slabých signálů, zdá být výhodnější soustředit se na pozorování fluktuací slabších signálů.

Posledním zkoumaným případem u jednodimenzionální difrakce je porovnání dvou navzájem se doplňujících sad detekčních oblastí. Situace je znázorněna na obrázku 17. Interval $(-2\pi, 2\pi)$ je rozdělen na 2 detekční oblasti, které jsou tvořeny osmi (červená výplň) a devíti (modrá výplň) detekčními intervaly. Z obrázku lze vyčíst, že si jsou hodnoty Fisherovy informace pro obě situace téměř rovny.



Obrázek 17: Znázornění porovnání dvou navzájem se doplňujících (inverzních) sad detekčních oblastí.

Analýza úhlového rozlišení pro dvoudimenzionální aperturu

Závěr této části se bude věnovat výpočtům Fisherovy informace pro případ difrakce na kruhovém otvoru. Z vlnové funkce tvaru

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp(i(k_x x + k_y y))}{\sqrt{\pi(\frac{a}{2})^2}} & \sqrt{x^2 + y^2} \leq a/2 \\ 0 & \sqrt{x^2 + y^2} > a/2 \end{cases}$$

lze kvadrátem Fourierovy transformace vypočíst hustotu pravděpodobnosti, která po znormování a uplatnění aproximace $\sin \theta \approx \tan \theta$ nabývá tvaru

$$p(\mu|\nu) = \frac{3}{8} \pi \left(\frac{J_1(\mu - \nu)}{\mu - \nu} \right)^2, \quad (19)$$

kde $k_R = k \sin \theta$ a obdobně jako v předchozí části $\mu = r \frac{a\pi}{\lambda d}$ a $\nu = \frac{ak \sin \theta}{2}$. Níže bude stručně odvozena limitní hodnota Fisherovy informace pro ideální detekci (tj. detekce na nekonečném intervalu). Nejprve je nutno dosadit nově vypočtenou hustotu pravděpodobnosti (19) do vztahu (9) pro Fisherovu informaci.

$$J_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{J_1^2(\mu - \nu) 3}{(\mu - \nu)^2 8 \pi} \right)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{J_1^2(\mu - \nu) 3}{(\mu - \nu)^2 8 \pi} \right) \right]^2 d\mu$$

Tento integrál lze použitím známého vztahu

$$\left(\frac{J_n(x)}{x^n} \right)' = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^n}$$

upravit na tvar

$$J_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{2} \pi \left(\frac{J_2(\mu - \nu)}{(\mu - \nu)} \right)^2 d\mu \quad (20)$$

hodnota posledního výrazu činí $J_\nu = 4/5$. Podrobnější postup výpočtu je součástí přílohy B. Podle rovnice (12) je nyní možno vyjádřit Rao-cramerovu mez jako převrácenou hodnotu Fisherovy informace a určit tak úhlové rozlišení $\Delta \nu$.

$$(\Delta \nu)^2 \geq \frac{5}{4} \Rightarrow \Delta \theta \geq \frac{2\lambda}{a} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{5}{4}} \quad (21)$$

Podobně jako při jednodimenzionální analýze, bude i zde zaveden podílem „klasické“ a „statistické“ difrakční limity koeficient zlepšení P'

$$P' = \frac{1.22 \frac{\lambda}{a}}{\frac{2\lambda}{a} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{J_\nu}}} = 1.22 \pi \sqrt{J_\nu}, \quad (22)$$

který pro $J = \frac{4}{5}$ nabývá hodnoty přibližně

$$P' = 1.22 \pi \sqrt{\frac{4}{5}} \approx 3.4280. \quad (23)$$

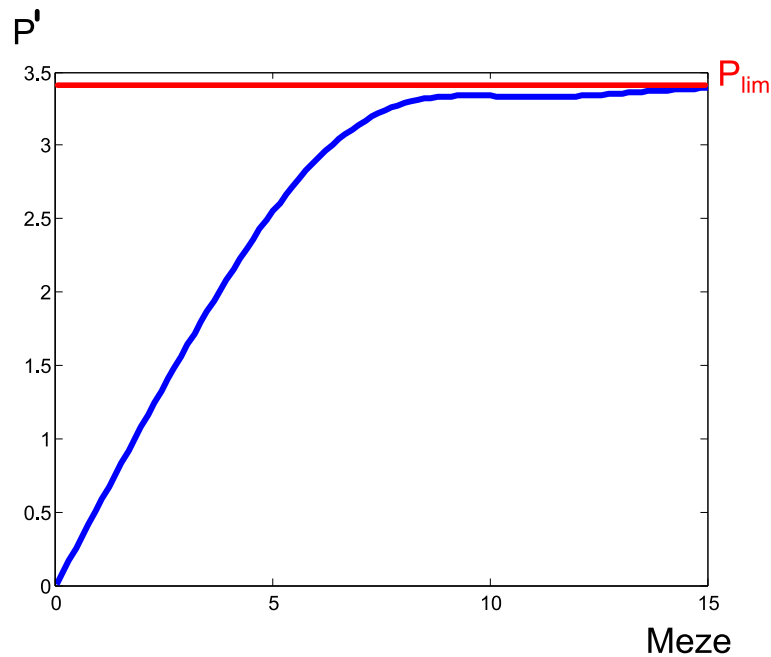
Teoreticky je tedy možno pomocí detektoru s nekonečnou detekující plochou dosáhnout úhlového rozlišení až 3.43 krát většího oproti klasickému.

Podobně jako u jednodimenzionálních úvah, bude i zde učiněn krok směrem k metodám klasické optiky, a to výpočtem Fisherovy informace (resp. koeficientu zlepšení) pro neúplná měření. Opět je však nutno přistoupit k numerickému řešení pomocí matematického softwaru. Prostým dosazením

$$p(\mu|\nu) = \frac{3}{32} \pi \left(\frac{2J_1(\mu - \nu)}{\mu - \nu} \right)^2 \quad (24)$$

$$G(\nu) = \sum_{\mu'} \left(\frac{2J_1(\mu - \nu)}{\mu - \nu} \right)^2 \quad (25)$$

do rovnice (17), odvozené pro případ neúplného měření, lze získat vztah pro výpočet Fisherovy informace, který je před samotným výpočtem upraven do podoby pro numerický výpočet výhodnější. Tj. naznačené derivace v (17) jsou provedeny symbolicky. Výsledky v podobě grafu závislosti koeficientu P' na průměru detekující plochy je zobrazen na obrázku 18. Z něj jsou patrné stejné závěry jako u případu jednodimenzionální difrakce. Hodnota koeficientu zlepšení P' zaznamenává nejprve prudší nárůst následující pozvolným přibližováním se k limitní hodnotě (23) odvozené pro případ ideální detekce.



Obrázek 18: Vyobrazení závislosti koeficientu P' na hodnotě rozměru detekční oblasti v případě difrakce nad dvoudimenzionální apertuře.

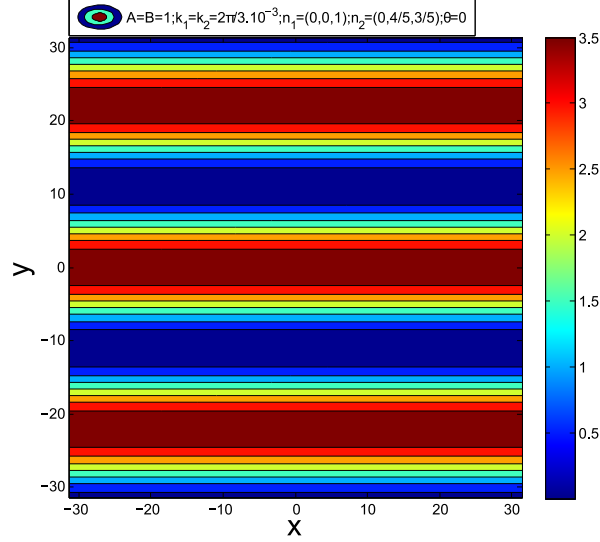
3.5 Interference

Jedním z důležitých optických jevů, kterého se v praxi hojně využívá, je interference. Je-li při měření detekováno světelné záření z vícero směrů, pak se toto záření, jakožto elektromagnetické vlnění, může skládat a vytvářet tak interferenční obrazce. Elementárním příkladem tohoto jevu je interference dvou rovinných vln v rovině $z = 0$. Celková intenzita \tilde{I} je dána součtem jednotlivých intenzit a interferenčního členu a možno ji zapsat ve tvaru

$$\tilde{I} = (I_1 + I_2) \left(1 + \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \cos(\mathbf{r}\Delta\mathbf{k} - \varphi) \right),$$

kde konstantu $\frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$ nazýváme vizibilita a značíme V . Vektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor zkoumaného bodu a $\Delta\mathbf{k}$ rozdíl vlnových vektorů interferujících vln. Rozložení intenzity v rovině $z = 0$ je vyobrazeno na obrázku 20.

Jak již bylo v předešlých částech této kvalifikační práce uvedeno, Fisherova informace poskytuje hodnotu rozptylu odhadu parametru, kterým je zkoumané pravděpo-



Obrázek 19: Rozložení intenzity záření při interferenci dvou rovinných vln s elektrickými intenzitami $U_1 = A \exp[-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}]$; $U_2 = B \exp[-i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \theta)]$ s hodnotami $A = B = 1$, $\mathbf{k}_1 = \frac{2\pi}{3e-3}(0, 0, 1)$, $\mathbf{k}_2 = \frac{2\pi}{3e-3}(0, \frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, $\theta = 0$

dobnostní rozdělení podmíněno. Nabízí se možnost zkoumat hodnotu φ fázového posunu jako parametr hustoty pravděpodobnosti detekce částice na zkoumané oblasti. Je-li v rámci zjednodušení položen předpoklad spočívající v úměrnosti pravděpodobnosti detekce a rozložení intenzity, pak je možno pro hustotu pravděpodobnosti psát

$$p \propto I(1 + V \cos(\mathbf{r}\Delta\mathbf{k} - \varphi)), \quad (26)$$

kde I značí součet $I_1 + I_2$. Je vhodné, aby, obdobně jako v případě difrakce, byla k dispozici referenční hodnota Fisherovy informace, s níž by bylo možné porovnávat výsledky numerických simulací. Protože referenční hodnota Fisherovy informace je uvažována ve smyslu limitní hodnoty, zdá se být přijatelné počítat referenční hodnotu pro rozdělení celkové intenzity \tilde{I} s limitní vizibilitou $V = 1$, která představuje koherentní záření. Dosažením do výrazu pro Fisherovu informaci (9) za hustotu pravděpodobnosti hustotu (26) s hodnotou vizibility $V = 1$, se výpočet zjednoduší na

$$J_{\varphi ref} = \int_S I(1 - \cos(\mathbf{r}\Delta\mathbf{k} - \varphi)) dx dy. \quad (27)$$

S přihlédnutím k periodicitě funkce \cos , je zřejmé, že, při dostatečně velké detekční ploše (tj. plocha je řádově větší než vlnová délka), je \cos integrací vystředován na nulovou hodnotu a výpočet referenční hodnoty se tak redukuje na

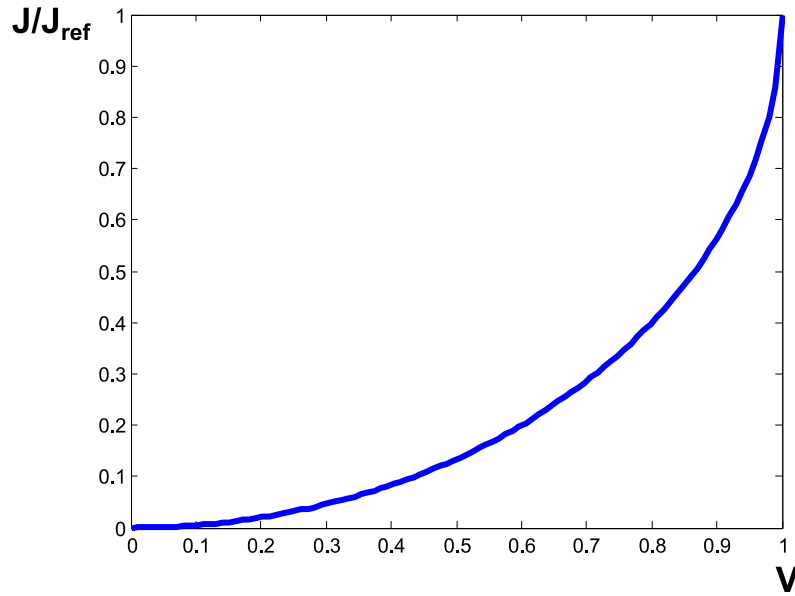
$$J_{\varphi ref} = IS. \quad (28)$$

Po stanovení referenční hodnoty je možno přistoupit ke zkoumání jejího poměru s Fisherovou informací vypočtenou pro reálnou hodnoty vizibility. Při obecné hodnotě vizibility V nelze provést zjednodušení v podobě faktorizace, tak jak tomu bylo v případě referenční hodnoty. Pro obecnou vizibilitu je po dosazení do (17) získána hodnota Fisherovy

informace

$$J_\varphi = I \int_S \frac{V^2 (\sin(\mathbf{r}\Delta\mathbf{k} - \varphi))^2}{1 + V \cos(\mathbf{r}\Delta\mathbf{k} - \varphi)} dx dy. \quad (29)$$

Přičemž korekční člen v (17) je možno pro jeho velmi malou hodnotu zanedbat. Dále zmiňme, že samotný výpočet je diskrétního charakteru a to v tom smyslu, že výpočet probíhá na matici 1024x1024 detekčních jednotek. Tento přístup k výpočtu byl zvolen jednak pro přiblížení reálným měřením a také pro svou menší výpočetní náročnost. Výsledná závislost poměru $J_\varphi/J_{\varphi ref}$ je ke shlédnutí na obr.20. Z obrázku je zřejmé, že s rostoucí vizibilitou V se rozdíl mezi hodnotou referenční a hodnotou vypočtenou pro danou vizibilitu V zmenšuje.



Obrázek 20: Závislost poměru Fisherovy informace J ku referenční hodnotě J_{ref} na hodnotě vizibility V při interferenci dvou rovinných vln s elektrickými intenzitami $U_1 = A \exp[-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}]; U_2 = B \exp[-i(\mathbf{k}_2 \mathbf{r} - \theta)]$ s hodnotami $\mathbf{k}_1 = \frac{2\pi}{0.84910^{-3}}(0, 0, 1)$, $\mathbf{k}_2 = \frac{2\pi}{0.84910^{-3}}(0, -\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, $\theta = 0$

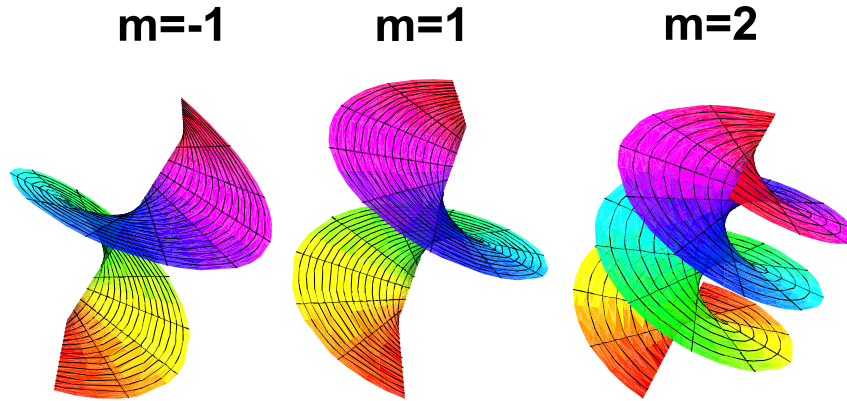
Interference vortexových vln

Dalších oblastí optiky, kde je zajímavé se zabývat aplikací Fisherovy informace je singulární optika. Singulární optika je poměrně nová oblast moderní optiky a fotoniky, která se zabývá studiem fázových singularit optického záření a jejich topologií. V zásadě lze optické singularity rozdělit do tří kategorií [26]: Paprskové, fázové a polarizační singularity, z nichž je největší pozornost věnována právě fázovým singularitám. Samotné fázové singularity jsou trojího druhu[26]: zlomové, vírové a kombinované. Následující text se omezí jen na vírové singularity fáze.

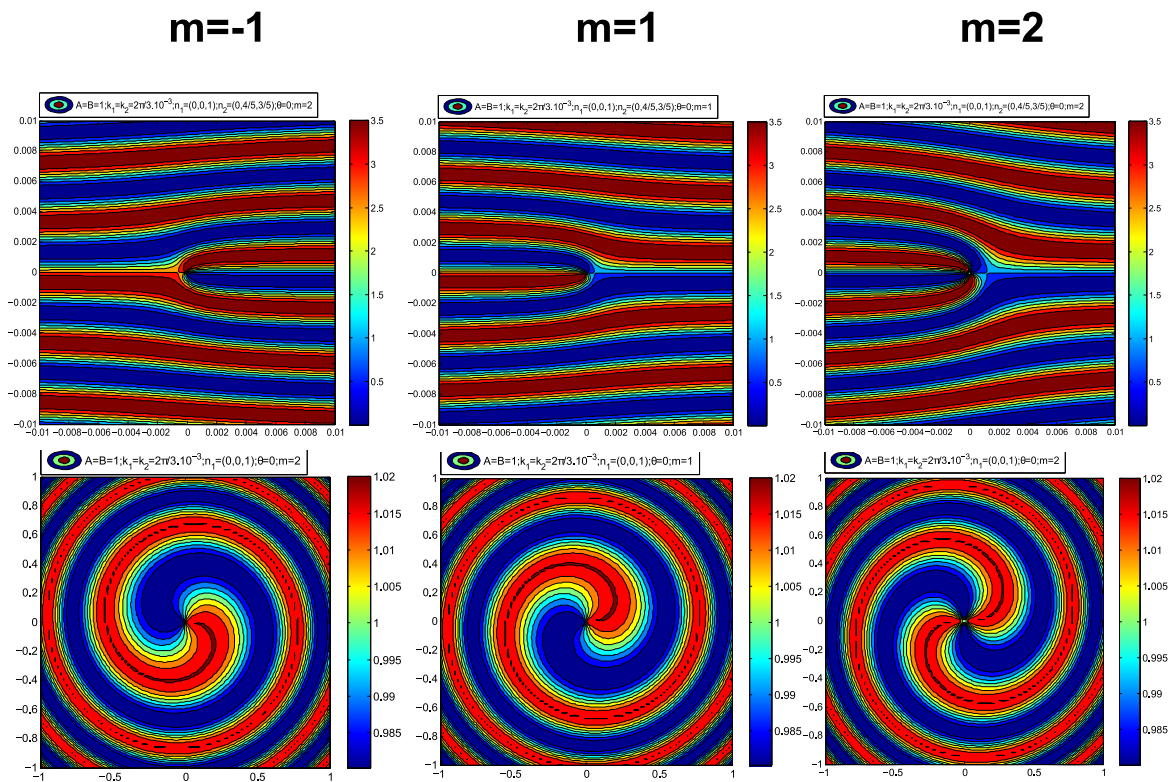
Komplexní amplitudu singulární vlny šířící se ve směru osy z se obvykle udává ve válcových souřadnicích (r, φ) ve tvaru

$$U(r, \varphi) = r^m \exp[i m \varphi] \exp[-i k z], \quad (30)$$

kde r^m je amplituda a m označuje číselnou hodnotu tzv. topologického náboje, který lze interpretovat jako počet listů šroubovice představující vlnoplochu (viz obr. 21). Tento náboj se uvažuje pouze v celočíselných hodnotách $m = \pm 1, 2, \dots$. Výpočty níže uvedené se však omezují na konstantní amplitudu A .



Obrázek 21: Vlnoplocha paprsku s fázovou singularitou pro různé hodnoty topologického náboje m .



Obrázek 22: Interferenční obrazce vortexové vlny s vlnou rovinnou (Nahoře) a sférickou (Dole) pro topologické náboje (zleva) $m=-1, 1, 2$. Interferenční obrazec vzniklý interferencí rovinné a vortexové vlny vykazuje násobné štěpení interferenčních proužků a to s násobností závislou na absolutní hodnotě topologického náboje m . Interferencí sférické a vortexové vlny vzniká interferenční obrazec tvaru spirály a to opět s násobností závislou na absolutní hodnotě topologického náboje m . Znaménko náboje m určuje orientaci štěpení popřípadě směru stáčení spirál.

Vírová struktura fáze pak může být zviditelněna interferencí takového paprsku s

rovinnou popřípadě sférickou vlnou. Interferenční obrazce vortexové vlny jsou zobrazeny na obr. 22, je vidět, že při interferenci rovinné a vortexové vlny dochází ke štěpení proužků a při interferenci sférické a vortexové vlny vznikají spirály. Počet spirál resp. násobnost štěpení je závislý na absolutní hodnotě topologického náboje. Znaménko topologického náboje pak určuje orientaci štěpení popřípadě směru stáčení spirál.

Výpočet Fisherovy informace probíhá ve stejném duchu, jako u interference dvou rovinných vln. Se stejným předpokladem, týkajícího se úměrnosti pravděpodobnosti intenzitě záření, má hustota pravděpodobnosti podobu

$$p \propto I(1 + V \cos(\mathbf{r}\Delta\mathbf{k} + m\varphi)), \quad (31)$$

kde $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ je polohový vektor. Dosazením hustoty (31) do rovnice (17), představující Fisherovu informaci pro neúplná měření, je po zanedbání korekčního členu, který nabývá zanedbatelné hodnoty, a provedení naznačené derivace podle fáze φ získán získán výraz použitý pro numerické výpočty.

$$J_\varphi = I \iint_{S(x,y)} \frac{m^2 V^2 \sin^2(r\Delta k - m\varphi)}{1 + V \cos(r\Delta k - m\varphi)} dx dy, \quad (32)$$

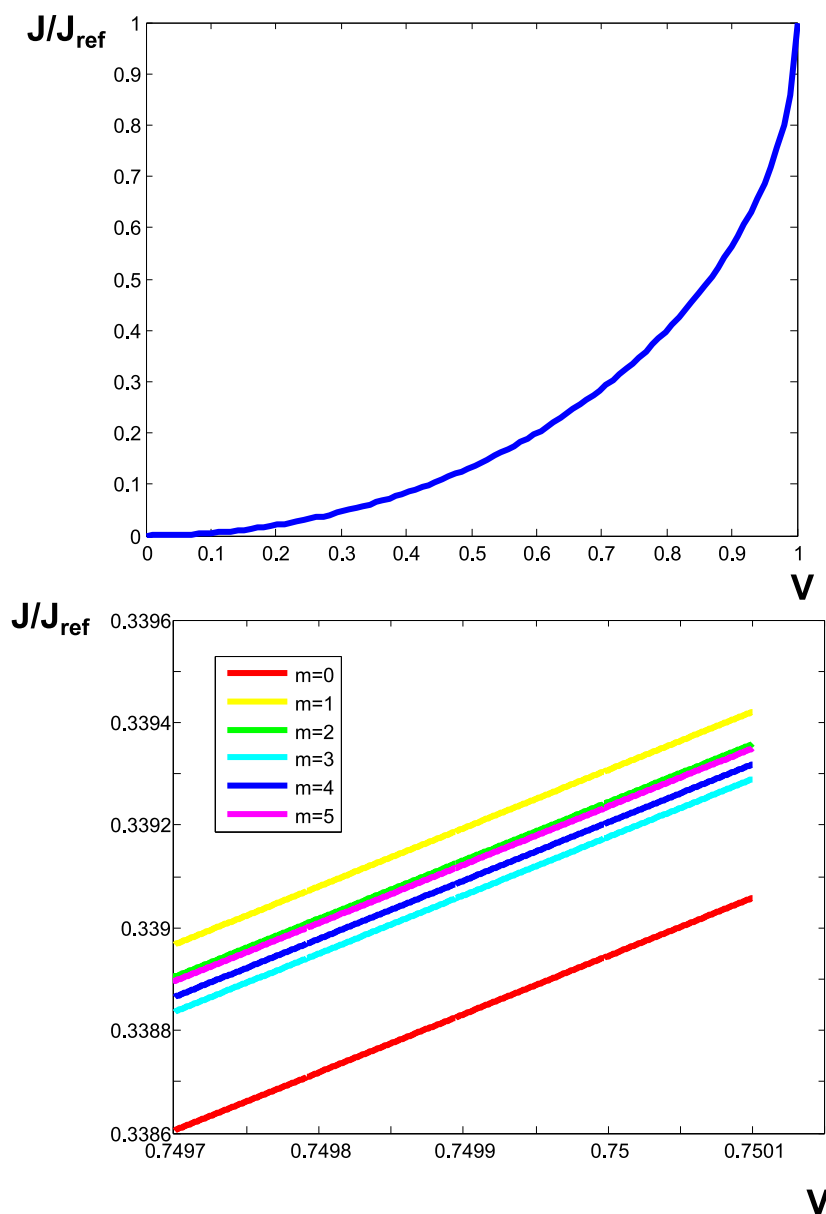
kde $\varphi = \text{atan2}(y, x)^2$ Referenční hodnota pro daný topologický náboj m nyní představuje Fisherovu informaci při hodnotě vizibility $V = 1$, která se při rozměru detekční plochy S řádově větší jak vlnová délka zkoumaného záření zjednoduší na hodnotu

$$J_{ref} = m^2 IS. \quad (33)$$

Výpočty Fisherovi informace pro hodnoty vizibility menší jedné byly podobně jako v předchozí části věnující se interferenci rovinných vln diskrétního charakteru (tj byla uvažována matice 1024x1024 detekčních jednotek). Průběhy závislosti poměru obecně vypočtené Fisherovy informace a referenční hodnotě na vizibilitě V pro různé hodnoty topologického náboje m jsou téměř stejné jako u interference dvou rovinných vln. Situaci znázorňují následující dva grafy kde je průběh závislosti ukázán. V prvním grafu je zviditelněn průběh pro hodnoty vizibility V v intervalu 0 až 1. Druhý graf vyobrazuje na malém intervalu detailní pohled na rozdíly mezi průběhy závislosti pro různé hodnoty topologického náboje m . Jak jest z druhého grafu vidět, hodnoty se v závislosti na topologickém náboji různí až na třetí platné číslici.

2

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & y \geq 0, x < 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & y < 0, x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0, x = 0 \\ \text{nedefinovno} & y = 0, x = 0 \end{cases}$$



Obrázek 23: Závislost poměru Fisherovy informace J ku referenční hodnotě J_{ref} na hodnotě vizibility V při interferenci vortexové a rovinné vlny. Nahoře: průběh závislosti pro hodnoty V v intervalu $(0, 1)$ a hodnotu topologického náboje $m=1$. Dole: průběh závislosti pro různé hodnoty topologického náboje m pro hodnoty V v intervalu $(0.7497, 0.7501)$

Závěr

Bakalářská práce si kladla za cíl poukázat na možnosti aplikace vybraných metod matematické statistiky, sloužících ke stanovení rozptylu odhadovaného parametru a stanovení jeho spodní meze, na problémy známé z klasické optiky a to v kontextu s problematikou detekce reliktního záření.

První kapitola zahrnuje stručnou rešerši mise Planck, jež představuje projekt Evropské kosmické agentury ESA, mezi jejíž hlavní cíle patří detekce anizotropie kosmického reliktního záření. Rešerše obsahuje krom samotného popisu sondy také rozměrovou analýzu, která vedla k závěru, že se při detekci pravděpodobně nevyužívá difrakčně omezené optické soustavy, jak by se mohlo zprvu očekávat. Pro účely prezentace zmíněných metod matematické statistiky se navrhla možná podoba difrakčně omezené optické soustavy, držící se řádově rozměrů skutečné sondy.

Ve druhé kapitole byla představena problematika detekce optického záření z pohledu klasické optiky. Byly zde nastíněny postupy odvození difrakčních funkcí spolu s limity úhlového rozlišení (Podrobné odvození jak difrakčního integrálu, tak difrakčních funkcí je obsahem přílohy A). Závěrem kapitoly byly naznačeny spojitosti mezi metodami kvantové tomografie a problematikou optické detekce. Text práce se omezuje na jednu konkrétní metodu a tou je metoda maximální věrohodnosti, založená na Bayseově větě. Hlavní argumente pro možné výhodné využití zmíněné metody kvantové tomografie je založen na skutečnost, že difrakční funkce (jednodimenzionální i dvoudimenzionální) představují hustoty pravděpodobnosti s nekonečným rozptylem.

Třetí a zároveň poslední kapitola předložené bakalářské práce je podává alternativní pohled na difrakci a ukázána souvislost s Fisherovou informací a s ní související Rao-Cramerovou mezí, která vyjadřuje dolní mez rozptylu odhadu jako převrácenou hodnotu Fisherovy informace. Text se zpočátku omezuje na jednoduchý model jednodimenzionální difrakce na štěrbině, nejprve je vypočtena hodnota Fisherovy informace pro hustotu pravděpodobnosti tvaru difrakční funkce pro úzkou dlouhou štěrbinu. Výpočet je pro zachování přehlednosti zapsán velmi stručně, jeho úplná forma je součástí přílohy B. Na základě vypočtené hodnoty Fisherovy informace byla za použití Rao-Cramerovy meze stanovena horní mez úhlového rozlišení, která je následně porovnána s úhlovým rozlišením používaným v klasické optice. Porovnáním byl zaveden koeficient zlepšení P , ten pro zmíněnou jednodimenzionální difrakci na štěrbině vyšel roven $P = 3.628$. Tato hodnota stanovuje maximální možné zlepšení oproti rozlišení získaným metodami klasické optiky. Jak se však v další části práce ukázalo, takovýto výsledek nikterak nezaručuje, že se této limitní hodnoty dá v praxi dosáhnout.

Zmíněné zlepšení je však uvažováno pouze pro ideální podmínky, které v sobě za-

hrnují nekonečnou detekční plochu. V další části se tedy provedla korekce výpočtů pro omezenou detekci a bylo zkoumáno, jak se zlepšení odvíjí od velikosti detekční plochy (intervalu). Ukázalo se, že s růstem detekční plochy se hodnota koeficientu P přibližuje ke krajní mezi. Dále se zkoumá jak se koeficient zlepšení mění při detekci diskrétního charakteru. Nejprve bylo provedeno srovnání centrálního umístění detekčních oblastí s umístěním necentrálním, přičemž celková délka detekční oblasti byla v obou případech stejná. Stejně tak se provedlo srovnání pro případ, kdy detekční oblasti nebyly stejně velké, avšak celkový obsah plochy pod difrakční křivkou v oblastech detekčních intervalů byl stejný. Srovnání ukázalo, že i při stejném množství pojmutého dopadajícího záření se hodnota Fisherovy informace (resp. koeficientu zlepšení) celkem výrazně liší. Pro vysvětlení této skutečnosti bylo poukázáno na citlivost Fisherovy informace na fluktuační, které se vyskytují právě při okrajích difrakční funkce.

V dalším textu se přechází ke zkoumání dvoudimenzionálních problémů. Pozornost se zaměřuje na difrakci na kruhové apertuře. Stejně jako v předchozím, byla odvozena hodnota Fisherovy informace a z ní Rao-Cramerova mez spolu s koeficientem zlepšení $P' = 3.428$. Po korekci na neúplná měření se přešlo ke zkoumání závislosti koeficientu P' na velikosti detekční oblasti.

Poslední část práce se věnuje aplikaci Fisherovy informace na interferenci dvou rovinných vln a interferenci rovinné a vortexové vlny. Nejprve byly odvozeny referenční hodnoty vůči nimž bylo možné výsledky vztahovat. Referenční hodnoty představovali aproximovanou Fisherovu informaci pro hodnotu vizibility $V = 1$. V obou případech byl zkoumán průběh závislosti vizibility na poměru referenční a skutečné hodnoty Fisherovy informace. Samotný výpočet Fisherovy informace byl diskrétního charakteru, kdy se uvažovala matice 1024×1024 detekčních ploch. Tento postup byl zvolen jednak s ohledem na přiblížení se reálným měřením, a jednak nižší výpočetní nároky. Výstupem jsou grafy odhalující způsob, jakým se hodnota Fisherova informace s rostoucí vizibilitou blíží k hodnotě referenční.

Přílohy

A Odvození difrakční funkce

Difrakční integrál

Odvození difrakční funkce (jak pro jednodimenzionální aperturu, tak i pro dvou-dimenzionální) vychází z difrakčního integrálu, který zde pro svou důležitost bude ve stručnosti odvozen.

Pro odvození difrakčního integrálu je třeba nejprve zavést funkce U a G , které budou představovat vlnu dopadající na aperturu a vlnu šířící se za aperturou. Funkce U i G vyhovují Helmholtzově nečasové rovnici a platí tedy

$$\begin{aligned}\Delta U + k^2 U &= 0 \\ \Delta G + k^2 G &= 0.\end{aligned}$$

, odkud po krátké úpravě

$$U\Delta G - G\Delta U = 0$$

Užitím předchozí rovnice lze zjednodušit Greenovu integrální větu¹ pro funkce U a G do tvaru:

$$\iint_S (U\nabla G - G\nabla U) d\mathbf{S} = 0. \quad (34)$$

,kde \mathbf{n} je vnější normála k ploše S . Pro funkci G tvaru $G = \frac{\exp(ikr)}{r}$ a $\frac{\partial G}{\partial n} = \left(-\frac{1}{r} + ik\right)e^{ikr}\frac{\mathbf{r}}{r}$ (splnění podmínky kladené na funkci G lze snadno ověřit jejím dosazením do Helmholtzovy rovnice), je pak výraz (34) platný v celé integrační oblasti vymezené plochou S vyjma bodu, kde má funkce G nespojitost ($r = 0$). Jeho vyloučení se zajistí obklopením tohoto bodu kulovou plochou S_1 o poloměru r_1 . Rovnici (34) je tedy nutno psát jako součet dvou integrálů přes plochy S_1 a S .

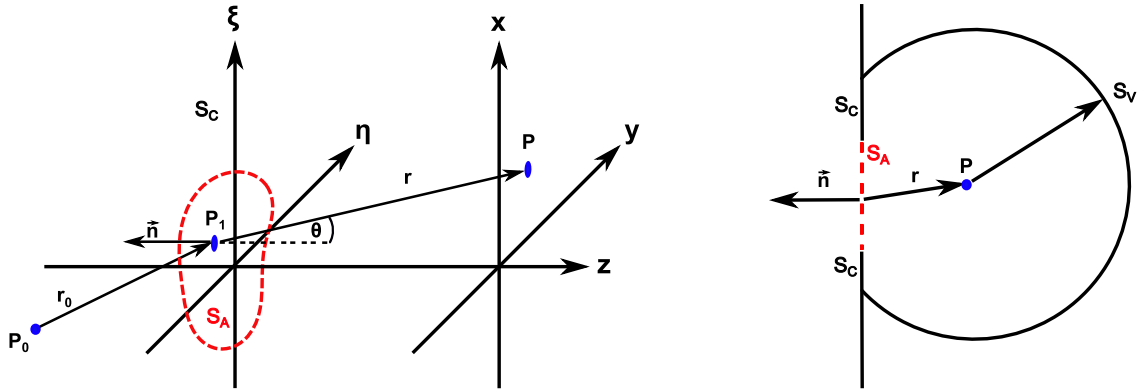
$$K + K_1 = \iint_{S+S_1} (U\nabla G - G\nabla U) d\mathbf{S} = 0. \quad (35)$$

Uvážením skutečnosti, že integrál K_1 přes plochu S_1 je při r_1 jdoucím k nule roven $4\pi U(P)$, lze předchozí rovnici upravit do tvaru

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S (U\nabla G - G\nabla U) d\mathbf{S}, \quad (36)$$

Rovnice (36) představuje tzv. Kirchhoffův integrální vzorec. Ten je možno uplatnit na aperturu v nepropustném stínítku dle obr.24, na níž dopadá vlna ze zdroje P_0 určeným polohovým vektorem \mathbf{r}_0 . V oblastech S_C a S_V jsou hodnoty grad U a U rovny nule. V

¹ $\iint_S (U\nabla G - G\nabla U) d\mathbf{S} = -\iiint_V (U\nabla^2 G - G\nabla^2 U) dV$ [22, str.142]



Obrázek 24: grafické schéma

rovině S_A (tedy plocha apertury) je kladen předpoklad, že se záření chová jakoby stínítko neexistovalo. Dosazením

$$U = \frac{e^{ikr_0}}{r_0}; \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \left(-\frac{1}{r_0} + ik\right) e^{ikr_0} \frac{\mathbf{r}_0}{r_0}$$

přechází (36) v rovnost

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_A} \frac{e^{ik(r+r_0)}}{rr_0} \left[\left(-\frac{1}{r_0} + ik\right) \frac{\mathbf{r}_0}{r_0} - \left(-\frac{1}{r} + ik\right) \frac{\mathbf{r}}{r} \right] d\mathbf{S}, \quad (37)$$

,kde

$$\frac{\mathbf{r}_0}{r_0} d\mathbf{S} = dS \cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}); \quad \frac{\mathbf{r}}{r} d\mathbf{S} = dS \cos(\mathbf{r}, \mathbf{n});$$

Pro optické záření vlnové délky λ se dá předpokládat

$$r_0 \gg \lambda; r \gg \lambda \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r_0} \gg k; \frac{1}{r} \gg k \quad (38)$$

a tím se (37) zjednodušuje na

$$U(P) = \frac{1}{i2\lambda} \iint_{S_A} \frac{e^{ik(r+r_0)}}{rr_0} [\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) - \cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})] dS \quad (39)$$

Člen $[\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) - \cos(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})]$ se v rozměrech otvoru velmi málo mění a je možné jej nahradit činitelem $2 \cos(\theta)$, kde θ je úhel mezi normálou \mathbf{n} a vektorem \mathbf{r} . Ve finále tedy lze psát

$$U(P) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{S_A} U(P_1) \frac{e^{ik(r)}}{r} \cos(\theta) dS. \quad (40)$$

Rovnost (40) se nazývá Rayleighův integrál. S uvážením $\cos \theta = z/r$ jej lze přepsat do tvaru v pravouhlých souřadnicích

$$U(x, y) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{S_A} U(\xi, \eta) \frac{\exp(ikr)}{r^2} d\xi d\eta \quad (41)$$

,kde $r = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$.

Nyní bude situace zjednodušena rozvinutím r do řady podle vzoru $\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 \dots$

$$r \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \xi}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - \eta}{z} \right)^2 \right]$$

, přičemž počet členů řady bude záležet na umístění r .

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{S_A} U(\xi, \eta) \exp\left[i\frac{k}{2z}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]\right] d\xi d\eta \quad (42)$$

Toto zjednodušení je nazýváno Fresnelova aproximace difrakčního integrálu a omezuje se na úzkou oblast okolo optické osy (v tomto případě osa z). Omezením se zároveň na vzdálené oblasti, kde platí

$$z \gg \frac{k}{2}(\xi^2 + \eta^2),$$

se pak po rozepsání exponenciály v integrandu (42) na $e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} e^{i\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)}$ přechází k Franhoferově aproximaci difrakčního integrálu

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{i\lambda z} \iint_{S_A} U(\xi, \eta) e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta. \quad (43)$$

Difrakce na pravoúhlé apertuře

Franhoferova difrakčního integrálu lze využít k řešení difrakce na pravoúhlé apertuře. Úkol spočívá ve výpočtu intenzity záření I na stínítku ve vzdálené oblasti z , přitom pro intenzitu záření platí $I \equiv |U(x, y)|^2$. Integrál (43) se dá považovat za Fourierovu transformaci funkce propustnosti $t(\xi, \eta)$ (při fourierovských proměnných $f_x = x/\lambda z; f_y = y/\lambda z$)[28]. Ta má pro jednodimenzionální aperturu šířky a tvar

$$t(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & |\xi| \leq \frac{a}{2} |\eta| \geq \frac{a}{2} \\ 0 & |\xi| \geq \frac{a}{2} |\eta| \geq \frac{a}{2} \end{cases} \quad (44)$$

Jak již bylo zmíněno, na ploše apertury S_A se záření chová jakoby clona nebyla a proto se funkce propustnosti pokládá v rovnost s $U(\xi, \eta)$. Nejprve tedy nutno vypočíst $U(x, y)$.

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{i\lambda z} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta \quad (45)$$

integrál se faktorizuje

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{i\lambda z} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}x\xi} d\xi \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}y\eta} d\eta \quad (46)$$

a jednoduchou integrací se dostává

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{i\lambda z} \left[\frac{e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}x\xi}}{-\frac{i2\pi x}{\lambda z}} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}y\eta}}{-\frac{i2\pi y}{\lambda z}} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \quad (47)$$

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{i\lambda z} A \frac{\sin\left(\frac{1}{2}kxa/z\right)}{\frac{1}{2}kxa/z} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}kxb/z\right)}{\frac{1}{2}kxb/z} \quad (48)$$

,kde $A = ab$ je plocha apertury. Pro intenzitu I platí

$$I(x, y) = |U(x, y)|^2 = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}kxa/z\right)}{\frac{1}{2}kxa/z} \right)^2 \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}kxb/z\right)}{\frac{1}{2}kxb/z} \right)^2 \quad (49)$$

,kde $I_0 = |U(0,0)|^2$. U velmi úzké apertury je možno zanedbat jeden z rozměrů a a b . Protože platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \stackrel{2x \text{Hosp.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1, \quad (50)$$

je výsledný tvar pro jednodimenzionální aperturu

$$I(x, y) = |U(x, y)|^2 = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}kxa/z\right)}{\frac{1}{2}kxa/z} \right)^2 \quad (51)$$

Difrakce na kruhové apertuře

Stejně jako v předchozím případě se využije Franhoferůva integrálu a dále i předpokladů difrakčního integrálu tj. $t(\xi, \eta)$ bude položeno v rovnost s $U(\xi, \eta)$. Pro kruhovou aperturu o poloměru $a/2$ se středem totožným s počátkem souřadnic ξ, η má funkce propustnosti $t(\xi, \eta)$ tvar

$$t(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \xi^2 + \eta^2 \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ 0 & \xi^2 + \eta^2 \geq \left(\frac{a}{2}\right)^2 \end{cases} \quad (52)$$

Franhoferův integrál (43) tedy nabývá tvaru

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{i\lambda z} \iint_{\xi^2+\eta^2 \leq \left(\frac{a}{2}\right)^2} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta \quad (53)$$

V polárních souřadnicích

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \varphi & x &= R \cos \phi \\ \eta &= r \sin \varphi & y &= R \sin \phi \end{aligned}$$

je $x\xi + y\eta = Rr(\cos \phi \cos \varphi + \sin \phi \sin \varphi) = Rr \cos(\phi - \varphi)$ a tedy ($R = x^2 + y^2$)

$$U(R, \varphi) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}R^2}}{i\lambda z} \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}Rr \cos(\phi-\varphi)} r d\varphi dr \quad (54)$$

Využitím integrální representace Besselovy funkce řádu n (viz např. [27, B.13 (6)])

$$J_n(x) = \frac{(\pm i)^n}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \exp[\pm i(n\vartheta - x \sin \vartheta)] d\vartheta \quad (55)$$

je možno vnitřní integrál výrazu (54) upravit do podoby

$$\int_0^{2\pi} e^{-\frac{i2\pi}{\lambda z}Rr \cos(\phi-\varphi)} d\varphi dr = 2\pi J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda z}Rr\right) \quad (56)$$

Zbývá spočíst vnější integrál.

$$\int_0^{\frac{a}{2}} J_0\left(i\frac{2\pi}{\lambda}Rr\right) r dr = a^2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda z}Ra\right)}{\frac{2\pi}{\lambda z}Ra} \quad (57)$$

Při výpočtu bylo využito obecně známého vztahu

$$\int_0^a x J_0(x) dx = a J_1(a) \quad (58)$$

Celkově tedy pro $U(x, y)$ platí

$$U(x, y) = 2 \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)}}{i\lambda z} A \frac{J_1\left(\frac{1}{2}kRa/z\right)}{\frac{1}{2}kRa/z} \quad (59)$$

,kde obdobně jako v předchozím je $A = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ plocha apertury. Hledaná intenzita má tvar

$$I(x, y) = I_0 \left(2 \frac{J_1\left(\frac{1}{2}kRa/z\right)}{\frac{1}{2}kRa/z} \right)^2 \quad (60)$$

,kde $I_0 = |U(0, 0)|^2$.

Norma difrakční funkce

Požadujeme-li, aby difrakční funkce byla zároveň hustotou pravděpodobnosti, musí být splněna následující podmínka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (61)$$

,kde $f(x)$ je hustota pravděpodobnosti. Je potřeba najít pro difrakční funkci koeficient N takový, že podmínka (61) bude splněna. Řeší se tedy rovnice

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 dx = 1, \quad (62)$$

protože platí

$$\text{Sinc}(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{ixt} dt = \left[\frac{e^{ixt}}{2ix} \right]_{-1}^1 = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} = \frac{\sin(x)}{x}, \quad (63)$$

je možno psát

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{ixt} dt \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-1}^1 e^{ixt_1} dt_1 \right) \left(\int_{-1}^1 e^{-ixt_2} dt_2 \right) dx = \quad (64)$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{ix(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(t_1-t_2)} dx dt_1 dt_2 = \quad (65)$$

$$= \frac{2\pi}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dt_1 dt_2 \delta(t_1 - t_2) = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 dt = \pi \quad (66)$$

Normovací koeficient pro difrakční funkci jednorozměrné apertury tedy bude $\frac{1}{\pi}$.

Obdobně pro difrakční funkci kruhové apertury se řeší rovnice

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2 dx = 1 \quad (67)$$

Pro Besselovu funkci prvního řádu bude využita Poissonova integrální reprezentace (viz např. [27, B14,(4)])

$$J_1(x) = \frac{2x}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cos(xt) dt. \quad (68)$$

Výpočet pak probíhá následovně

$$N = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cos(xt) dt \right)^2 dx = \quad (69)$$

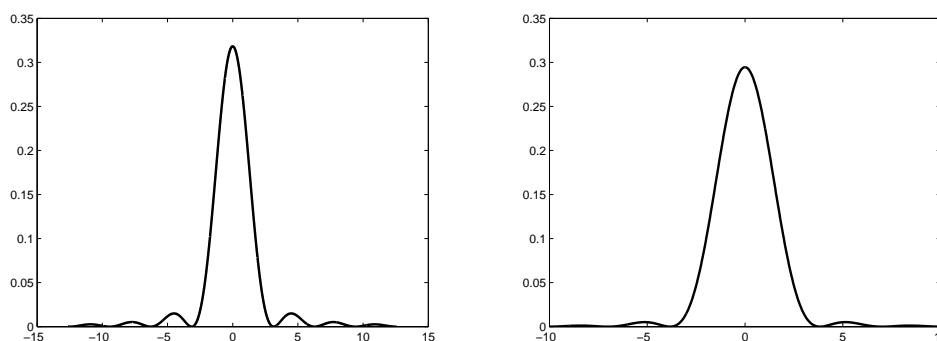
$$= \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 \sqrt{1-t_1^2} \frac{e^{ixt_1} - e^{-ixt_1}}{2} dt_1 \right) \left(\int_0^1 \sqrt{1-t_2^2} \frac{e^{ixt_2} - e^{-ixt_2}}{2} dt_2 \right) dx = \quad (70)$$

$$= \frac{8}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)} dt_1 dt_2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ix(t_1+t_2)} + e^{ix(t_1-t_2)} + e^{ix(t_2-t_1)} + e^{ix(-t_1-t_2)}) dx = \quad (71)$$

$$= \frac{16}{\pi} \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)} dt_1 dt_2 (\delta(t_1+t_2) + \delta(t_1-t_2)) = \quad (72)$$

$$\frac{16}{\pi} \int_0^1 (1-t^2) dt = \frac{32}{3} \frac{1}{\pi}, \quad (73)$$

kde $\delta(t)$ je Diracova delta funkce (viz příloha B (82)). Normovací koeficient N pro difrakční funkci kruhové apertury je tedy $\frac{3}{32}\pi^2$



Obrázek 25: Průběhy již normovaných difrakčních funkcí pro aperturu - vlevo: velmi úzkou pravoúhlou; vpravo: kruhovou

²V ostatním textu této práce se pracuje s tvarem difrakční funkce bez dvojky pod druhou mocninou a koeficient má pak tvar $\frac{3}{8}\pi$.

B Výpočet Fisherovy informace

Fisherova informace pro normovanou difrakční funkci jednodimenzionální apertury

Fisherovy informace je pro normovanou difrakční funkci (7) jednodimenzionální apertury dána

$$J(\nu) = N \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \text{Sinc}^2(\mu - \nu) \right)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{\pi} \text{Sinc}^2(\mu - \nu) \right) \right]^2 d\mu \quad (74)$$

Uvážením rovnosti (63)

$$\text{Sinc}(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{ixt} dt = \left[\frac{e^{ixt} - e^{-ixt}}{2ix} \right]_{-1}^1 = \frac{\sin(x)}{x}$$

je možno integrál na pravé straně (74) přepsat jako

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sinc}^{-2}(\mu - \nu) \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{i(\mu-\nu)t} dt \right) \right]^2 d\mu \quad (75)$$

Výpočet pokračuje následovně: nejprve se provede naznačená derivace, přičemž se využije možnosti záměny integrálu s derivací, protože funkce $e^{i(\mu-\nu)t}$ splňuje dané podmínky.

$$J(\nu) = N \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Sinc}^{-2}(\mu - \nu) \left[2 \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{i(\mu-\nu)t} dt \right) \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 -ite^{i(\mu-\nu)t} dt \right) \right]^2 d\mu \quad (76)$$

výraz $\frac{1}{\pi} \text{Sinc}^{-2}(\mu - \nu)$ se vykrátí a zbývá

$$J(\nu) = N \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-1}^1 ite^{i(\mu-\nu)t} dt \right)^2 d\mu \quad (77)$$

Nyní s ohledem na to, že vnitřní integrál je vlastní a vyjadřuje velikost, lze jeho druhou mocninu psát jako kvadrát velikosti obecně komplexního čísla $|z|^2 = zz^*$, tedy

$$J(\nu) = N \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 it_1 e^{i(\mu-\nu)t_1} dt_1 \int_{-1}^1 -it_2 e^{-i(\mu-\nu)t_2} dt_2 d\mu = \quad (78)$$

$$= N \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t_1 t_2 \exp^{i(\mu-\nu)(t_1-t_2)} dt_1 dt_2 d\mu. \quad (79)$$

Provedením záměny integrálů

$$J(\nu) = N \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t_1 t_2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{i(\mu-\nu)(t_1-t_2)} d\mu dt_1 dt_2. \quad (80)$$

a s přihlédnutím k definici a vlastnostem Diracovy delta funkce $\delta(x)$ (viz např. [27, A.1 (1)])

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx \quad (81)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{iax} da \quad (82)$$

lze psát

$$J(\nu) = 2N \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t_1 t_2 dt_1 dt_2 \delta(t_1 - t_2) = 2N \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{4}{3}N \quad (83)$$

Hodnota Fisherovy informace pro normovanou difrakční funkci jednodimenzionální apertury tedy vychází $\frac{4}{3}$.

Fisherova informace pro normovanou difrakční funkci kruhové apertury

Z definice (9) je Fisherovy informace pro normovanou difrakční funkci (19) kruhové apertury

$$J(\nu) = N \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{8} \pi \left(\frac{J_1(\mu - \nu)}{\mu - \nu} \right)^2 \right)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{3}{8} \pi \left(\frac{J_1(\mu - \nu)}{\mu - \nu} \right)^2 \right) \right]^2 d\mu \quad (84)$$

Po provedení formální derivace

$$J(\nu) = \frac{3}{8} \pi N \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{8} \pi \left(\frac{J_1(\mu - \nu)}{\mu - \nu} \right)^2 \right)^{-1} \left[2 \frac{J_1(\mu - \nu)}{(\mu - \nu)} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{J_1(\mu - \nu)}{(\mu - \nu)} \right) \right]^2 d\mu = \quad (85)$$

$$= \frac{3}{2} \pi N \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{J_1(\mu - \nu)}{(\mu - \nu)} \right) \right]^2 d\mu \quad (86)$$

se pro Besselovu funkci užije rovnost (68)

$$J_1(x) = \frac{2x}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \cos(xt) dt$$

a (84) přechází v rovnost

$$J(\nu) = \frac{3}{2} \pi N \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{2(\mu - \nu) \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cos((\mu - \nu)t) dt}{\pi(\mu - \nu)} \right) \right]^2 d\mu. \quad (87)$$

Za využití možnosti záměny integrálu a derivace, se derivuje vnitřní integrand.

$$J(\nu) = \frac{6}{\pi} N \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^1 t \sqrt{1-t^2} \sin((\mu - \nu)t) dt \right]^2 d\mu \quad (88)$$

Funkci sinus lze vyjádřit pomocí exponenciál a kvadrát jako součin.

$$J(\nu) = \frac{6}{\pi} N \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 t_1 \sqrt{1-t_1^2} \frac{e^{i(\mu-\nu)t_1} - e^{-i(\mu-\nu)t_1}}{2i} dt_1 \right) \left(\int_0^1 t_2 \sqrt{1-t_2^2} \frac{e^{i(\mu-\nu)t_2} - e^{-i(\mu-\nu)t_2}}{2i} dt_2 \right) d\mu \quad (89)$$

Záměnou integrálů a využitím vztahu (82) a sudosti Diracovy delta funkce, lze psát

$$J(\nu) = 6N \int_0^1 \int_0^1 t_1 t_2 \sqrt{(1-t_1^2)(1-t_2^2)} dt_1 dt_2 (\delta(t_1 - t_2) - \delta(t_1 + t_2)) \quad (90)$$

z čehož plyne

$$J(\nu) = 6N \int_0^1 t^2 (1-t^2) dt = \frac{4}{5}N \quad (91)$$

Fisherova informace pro normovanou difrakční funkci kruhové apertury činí $\frac{4}{5}N$.

Reference

- [1] The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty [online]. Aktualizováno 2012. [cit. 4.3.2013]. dostupné z <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html>
- [2] Kleczek J. *Velká encyklopedie vesmíru*, Academia, nakladatelství Akademie věd České republiky 2002.
- [3] AstroNuklFyzika: Gravitace, černé díry a fyzika prostoročasu [online]. Aktualizováno 3.5.2002. [cit. 1.3.2013]. Dostupné z <http://astronuklfyzika.cz/Gravitace5-4.htm>
- [4] European space Agency: Space in Images - Planck history of Universe zoom [online]. Aktualizováno 21.3.2013. [cit. 22.3.2013]. Dostupné z http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2013/03/Planck_history_of_Universe_zoom
- [5] National Aeronautics and Space Administration: Lambda-Links. [online]. Aktualizováno 12.1.2011. [cit. 2.4.2013]. Dostupné z http://lambda.gsfc.nasa.gov/links/experimental_sites.cfm
- [6] BOOMERANG: Balloon Observations Of Milimetric Extragalactic Radiation and Geophysics. [online]. Aktualizováno 29.1.2008. [cit. 4.12.2012]. Dostupné z <http://cmb.phys.cwru.edu/boomerang/index.html>
- [7] MAXIMA Millimeter Anisotropy eXperiment IMaging Array. [online]. Aktualizováno 4.5.2001. [cit. 1.2. 2013]. Dostupné z <http://cosmology.berkeley.edu/group/cmb/>
- [8] DASI Degree angular scale Interferometer. [online]. Aktualizováno 22.9.2004. [cit. 1.2.2013]. Dostupné z <http://astro.uchicago.edu/dasi/>
- [9] CBI Cosmic Background Imager. [online]. Aktualizováno 2.8.2009. [cit. 1.2.2013]. Dostupné z <http://www.astro.caltech.edu/tjp/CBI/>
- [10] The QUaD Experiment. [online]. Aktualizováno 13.5.2008. [cit. 1.2.2013] Dostupné z <http://www.stanford.edu/schurch/quad.html>
- [11] National Aeronautics and Space Administration: Cosmic Background Explorer. [online]. Aktualizováno 26.06.2008. [cit. 1.2.2013]. Dostupné z <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/>
- [12] National Aeronautics and Space Administration: Wilkinson Microwave Anisotropy Probe. [online]. Aktualizováno 7.1.2013. [cit. 1.2.2013]. Dostupné z <http://map.gsfc.nasa.gov/>

- [13] European space Agency: Planck The Scientific Programme. [online]. Aktualizováno nevim. [cit. 2.3.2013] , dostupné z URL: [http://www.rssd.esa.int/SA/PLANCK/docs/Bluebook-ESA-SCI\(2005\)1_V2.pdf](http://www.rssd.esa.int/SA/PLANCK/docs/Bluebook-ESA-SCI(2005)1_V2.pdf)
- [14] Astronomy&Astrophysics: Planck pre-launch status: The Planck mission. [online]. Aktualizováno 15.9.2010. [cit. 3.3.2013]. Dostupné z <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/200912983>
- [15] European space Agency: Space in Images - Planck's cooling system Composite. [online]. Aktualizováno 27.2.2009. [cit. 3.3.2013]. Dostupné z http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2009/02/Planck_s_cooling_system_composite
- [16] Astronomy&Astrophysics: Planck pre-launch status: The HFI instrument, from specification to actual performance. [online]. Aktualizováno 15.9.2010. [cit. 12.10.2013]. Dostupné z http://www.aanda.org/articles/aa/full_html/2010/12/aa12975-09/img18.png
- [17] European space Agency: Space in Images - Planck's instruments [online]. Aktualizováno 13.5.2009. [cit. 22.3.2013]. Dostupné z <http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2009/05>
- [18] Astronomy&Astrophysics: Planck pre-launch status: HFI beam expectations from the optical optimisation of the focal plane. [online]. Aktualizováno 2010. [cit. 22.3.2014]. Dostupné z <http://www.aanda.org/articles/aa/full_html/2010/12/aa12999-09/img23.png>
- [19] Astronomy&Astrophysics: Planck pre-launch status: The optical system. [online]. Aktualizováno 15.9.2010 [cit. 7.5.2014]. Dostupné z <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/200912911>
- [20] European space Agency: Space in Images - Planck's mirrors are tested in the Large Space Simulator [online]. Aktualizováno 21.8.2006. [cit. 22.3.2013]. Dostupné z <<http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2006/08>>
- [21] Aldebaran Group for Astrophysics: Fenomenální sonda Planck. [online]. Aktualizováno 27.12.2013 [cit. 8.5.2014]. Dostupné z http://www.aldebaran.cz/bulletin/2013_41_pla.php
- [22] Malý P., *Optika*, Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum 2008
- [23] J. Řeháček, *Habilitační práce: Měření a informace v kvantové teorii*, Univerzita Palackého, PŘF Katedra optiky, 2004
- [24] H.J.Bartsch, *Matematické vzorce*, Nakladatelství Academia, Praha 2006
- [25] J. Řeháček, Z. Hradil, *Uncertainty relations on the slit and Fisher information*, 2003

- [26] Z. Bouchal, *Optické víry - nový směr rozvoje singulární optiky* Čs. čas. fyz. str. 11 číslo 1 svazek 53 ročník 2003
- [27] *Fourierovské metody v teorii difrakce a ve strukturní analýze*, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Akademické nakladatelství CERM, vydáno v Brně 2007
- [28] Materiály k předmětu Optické zpracování informace OPT/OZI Přf. UP Olomouc. [online]. Aktualizováno 24.09.2013. Dostupné z <<http://muj.optol.cz/rehacek/OZI>>