UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

# DIPLOMOVÁ PRÁCE

## Fuzzy modely založené na bázích pravidel a jejich aplikace

Vedoucí bakalářské práce:
**doc. RNDr. Jana Talašová, CSc.**

Vypracoval:
**Bc. Tomáš Talášek**
AME, II. ročník

Rok odevzdání: 2012

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem vytvořil tuto diplomovou práci samostatně za vedení doc. RNDr. Jany Talašové, CSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 15. března 2012

**Poděkování**

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucí diplomové práce doc. RNDr. Janě Talašové, CSc. za vedení a spolupráci při tvorbě této diplomové práce i za čas, který mi věnovala při konzultacích. Zároveň ji děkuji za předané zkušenosti a návrhy.

# Obsah

# Úvod

V této diplomové práci jsem se zaměřil převážně na fuzzy modely, které využívají bázi pravidel. Protože diplomovou práci chápu jako přípravu na své doktorské studium, které bude po stránce výzkumu zaměřené na tuto oblast, věnoval jsem velkou pozornost vyhledávání a studiu originálních literárních zdrojů (L.A. Zadeh [27, 28], E. H. Mamdani [12, 13], M. Sugeno [23], M. Sugeno a T. Takagi [24], M. Sugeno a T. Yasukawa [22] a P. M. Larsen [11]). Současně mne zajímal vývoj této relativně mladé matematické teorie (viz pojetí jazykové proměnné, kterou se zabývá V. Novák [18, 17]). Ve shodě se zadáním jsem se v rámci diplomové práce zabýval také aplikacemi, tématicky jsem zvolil prostředí vysokých škol.

První část diplomové práce se zaměřuje na základní pojmy teorie fuzzy množin. Cílem bylo prohloubení mých teoretických znalostí a shrnutí nejdůležitějších pojmů, které se v teorii fuzzy množin používají, přičemž jsem se zvlášť zaměřil na problematiku fuzzy čísel. Navíc se zde zabývám problematikou defuzzifikace.

Druhá kapitola zkoumá původní i modifikovanou verzi definice jazykové proměnné, popisuje různé způsoby tvorby jazykových škál, definuje pojem báze pravidel a představuje nejpoužívanější fuzzy inferenční algoritmy.

Další kapitola se zaměřuje na software, který se používá pro práci s fuzzy množinami. Konkrétně jsou zde popsány dva různé softwary: FuzzME, který má uplatnění převážně v oblasti vícekriteriálního hodnocení a Fuzzy Logic Toolbox pro Matlab, který je zaměřen spíše na fuzzy regulaci.

Závěrečné kapitola se věnuje aplikacím získaných znalostí. Nejprve zde představím dva modely popsané v literatuře, které se používají ke klasifikaci a provedu kritickou analýzu, přičemž u jednoho navrhnu vlastní modifikaci. Poté představím vlastní model pro přijímací řízení na VŠ.

# 1 Základní pojmy fuzzy množin

V této kapitole si zavedeme základní pojmy z teorie *fuzzy množin*, které budeme dále v práci používat. Fuzzy množiny byly vytvořeny jako nástroj pro modelování neurčitosti a vágnosti, umožňující matematicky modelovat to, s čím běžně pracuje přirozený jazyk. Umožňují nám přirozeným způsobem popsat problémy, se kterými se denně setkáváme.

Pakliže nebude řečeno jinak, jsou definice a tvrzení v této kapitole převzaty z [25, 18, 4].

## 1.1 Fuzzy množiny

Fuzzy množiny byly poprvé představeny v roce 1965 L. A. Zadehem v [27] jako nástroj pro reprezentaci a manipulaci s nepřesnými daty.

V klasické teorii množin definujeme množinu $A$ výčtem jejich prvků, popisem vlastností které musí její prvky splňovat, nebo pomocí charakteristické funkce.

**Definice 1.1.** *Charakteristická funkce $\chi_A$ množiny $A \subseteq U$, kde $U$ je neprázdná množina, je dána vztahem*

$$\forall x \in U : \ \chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ jestliže } x \in A \\ 0 \text{ jinak} \end{cases} . \tag{1}$$

Jinými slovy, jestliže prvek $x \in U$ patří do množiny $A$, je mu přiřazena jednička, v opačném případě mu přiřadíme nulu. Takovouto množinu budeme v dalším textu značit pojmem *ostrá množina*. Fuzzy množiny lze považovat za zobecnění ostrých množin v tom smyslu, že zobrazení $\mu_A$ přiřazuje prvkům hodnoty z *intervalu* $\langle 0, 1\rangle$.

**Definice 1.2.** *Nechť je dána neprázdná množina $U$, tzv. univerzum. Pak* fuzzy množina *$A$ na univerzu $U$ je definována zobrazením*

$$\mu_A : U \to \langle 0, 1\rangle. \tag{2}$$

*Funkci $\mu_A$ nazýváme funkcí příslušnosti fuzzy množiny $A$. Pro každé $x \in U$ nazveme hodnotu $\mu_A(x)$ stupněm příslušnosti prvku $x$ k fuzzy množině $A$.*

V novější literatuře (např. [20]) je možné narazit na alternativní verzi této definice:

**Definice 1.3.** Fuzzy množina $A$ *na univerzu* $U$ *je definována jako systém množin* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in <0,1>}$*, který splňuje následující vlastnosti:*

1. $A_0 = U$
2. $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$*, pak* $A_\beta \subseteq A_\alpha$
3. $A_\beta = \bigcap_{0 \leq \alpha < \beta} A_\alpha, \forall \beta \in (0, 1\rangle$

**Poznámka 1.1.** *Obě dvě definice fuzzy množin jsou vzájemně ekvivalentní (systém dále definovaných* $\alpha$*-řezů Zadehem definovaných fuzzy množin odpovídá systému indexovaných množin této alternativní definice), přesto má každá své opodstatnění. První definuje fuzzy množiny přirozeným způsobem jako zobecnění ostrých množin. Druhá definice je na první pohled komplikovanější, nicméně se ukazuje jako vhodnější při dokazování matematických vět.*

*V dalším textu budeme vycházet z původní Zadehovi definice fuzzy množiny.*

Každá fuzzy množina na $U$ je tedy jednoznačně určena svou funkcí příslušnosti. Pro zjednodušení zápisu budeme používat totéž označení (např. $A$) jak pro fuzzy množinu, tak pro její funkci příslušnosti ($A(.)$). Potom stupeň příslušnosti prvku $x \in U$ k fuzzy množině $A$ budeme zapisovat ve tvaru $A(x)$.

Explicitně se konečné fuzzy množiny zapisují takto:

$$A = \{a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n\}, \tag{3}$$

kde $x_1, \ldots, x_n$ jsou prvky z univerza $U$, kterým jsou přiřazeny stupně příslušnosti $a_1, \ldots, a_n \in (0, 1\rangle$. Prvky se stupněm příslušnosti 0 nejsou zahrnuty.

**Příklad 1.1.** *Nechť* $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$*, pak*

$$A = \{0,7/1,\ 0,3/2,\ 1/3,\ 0,2/5\} \tag{4}$$

*je fuzzy množina na univerzu* $U$*, do níž číslo 1 spadá se stupněm příslušnosti 0,7, číslo 2 se stupněm příslušnosti 0,3 atd.*

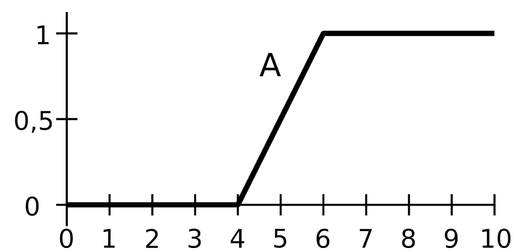
Pokud by univerzem $U$ fuzzy množiny $A$ byla například množina reálných čísel a funkce příslušnosti fuzzy množiny $A$ by byla dána funkcí $f(x)$, můžeme fuzzy množinu $A$ zapsat takto:

$$A = \{f(x)/x \mid x \in \mathbb{R}\}. \tag{5}$$

**Příklad 1.2.** *Nechť* $U = \langle 0, 10\rangle$, *pak*

$$A(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{x-4}{2} & 4 < x \leq 6 \\ 1 & 6 < x \leq 10 \end{cases} \tag{6}$$

*je fuzzy množina na univerzu* $U$, *do níž prvky z intervalu* $\langle 0, 4\rangle$ *spadají se stupněm příslušnosti 0, prvky z intervalu* $(4, 6\rangle$ *se stupněm příslušnosti* $\frac{x-4}{2}$ *a prvky z intervalu* $(6, 10\rangle$ *se stupněm příslušnosti 1.*




Obrázek 1: Fuzzy množina $A$ z příkladu 1.2.

**Poznámka 1.2.** *Symbolem* $\mathcal{F}(U)$ *budeme značit systém všech fuzzy množin definovaných na univerzu* $U$. *Potom skutečnost, že* $A$ *je fuzzy množina definovaná na univerzu* $U$, *zapíšeme jako* $A \in \mathcal{F}(U)$.

**Definice 1.4.** *Nechť* $A, B \in \mathcal{F}(U)$. *Řekneme, že* $A$ *a* $B$ *jsou si* rovny *(značíme* $A = B$*), jestliže*

$$A(x) = B(x), \ \forall x \in U. \tag{7}$$

**Definice 1.5.** *Nechť* $A, B \in \mathcal{F}(U)$. *Řekneme, že* $A$ *je* podmnožinou $B$ *(značíme* $A \subseteq B$*), jestliže*

$$A(x) \leq B(x), \ \forall x \in U. \tag{8}$$

**Definice 1.6.** *Nechť* $A \in \mathcal{F}(U)$*.* Nosičem *fuzzy množiny* $A$ *(značíme Supp* $A$*) je ostrá podmnožina univerza* $U$*, jejíž prvky mají nenulový stupeň příslušnosti k* $A$*:*

$$Supp\ A = \{x \in U | A(x) > 0\}. \tag{9}$$

**Definice 1.7.** *Nechť* $A \in \mathcal{F}(U)$*.* Jádro *fuzzy množiny* $A$ *(značíme Ker* $A$*) je ostrá podmnožina univerza* $U$*, jejíž prvky mají stupeň příslušnosti k* $A$ *roven jedné:*

$$Ker\ A = \{x \in U | A(x) = 1\}. \tag{10}$$

**Definice 1.8.** *Nechť* $A \in \mathcal{F}(U)$*.* Výška *fuzzy množiny* $A$ *(značíme hgt* $A$*) je definována jako:*

$$hgt\ A = \sup_{x \in U} A(x). \tag{11}$$

**Definice 1.9.** *Nechť* $A \in \mathcal{F}(U)$*,* $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$*.* $\alpha$-řezem *fuzzy množiny* $A$ *(značíme* $A_\alpha$*) je ostrá podmnožina univerza* $U$*, jejíž prvky mají stupeň příslušnosti k* $A$ *větší nebo roven* $\alpha$*:*

$$A_\alpha = \{x \in U | A(x) \geq \alpha\}. \tag{12}$$

**Definice 1.10.** *Nechť* $A \in \mathcal{F}(U)$*.* $A$ *se nazývá* normální*, jestliže má neprázdné jádro, tj.:*

$$Ker\ A \neq \emptyset. \tag{13}$$

*V opačném případě se* $A$ *nazývá subnormální.*

**Definice 1.11.** *Nechť* $U$ *je lineární prostor,* $A \in \mathcal{F}(U)$*.* $A$ *se nazývá* konvexní*, jestliže* $\forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ *je* $A_\alpha$ *konvexní podmnožina* $U$*.*

**Definice 1.12.** *Nechť* $A \in \mathcal{F}(U)$*. Fuzzy množinu* $A$ *nazveme* obecná fuzzy jednotka (fuzzy jednoprvková množina, fuzzy singleton)*, jestliže má pouze v jednom bodě nenulový stupeň příslušnosti, tj.*

$$Supp(A) = \{x_0\}. \tag{14}$$

*Pokud navíc platí*

$$A(x_0) = 1, \tag{15}$$

*nazveme* $A$ fuzzy jednotka.

**Poznámka 1.3.** *Je vhodné poznamenat, že fuzzy jednotka odpovídá ostré jednoprvkové množině.*

## 1.2 Operace s fuzzy množinami

Ukázali jsme, že fuzzy množiny jsou zobecněním ostrých množin. V této podkapitole si ukážeme, jak lze množinové operace, které používáme pro práci s ostrými množinami, zobecnit pro práci s fuzzy množinami. Značení takto zobecněných operací zůstává pro větší přehlednost stejné.

**Definice 1.13.** *Nechť $A \in \mathcal{F}(U)$.* Doplňkem *fuzzy množiny $A$ rozumíme fuzzy množinu $\overline{A}$ s funkcí příslušnosti:*

$$\forall x \in U: \ \overline{A}(x) = 1 - A(x). \tag{16}$$

**Definice 1.14.** *Nechť $A, B \in \mathcal{F}(U)$.* Průnikem *fuzzy množin $A$ a $B$ rozumíme fuzzy množinu $A \cap B \in U$ s funkcí příslušnosti:*

$$\forall x \in U: \ (A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}. \tag{17}$$

**Definice 1.15.** *Nechť $A, B \in \mathcal{F}(U)$.* Sjednocením *fuzzy množin $A$ a $B$ rozumíme fuzzy množinu $A \cup B \in U$ s funkcí příslušnosti:*

$$\forall x \in U: \ (A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}. \tag{18}$$

Je snadno ověřitelné, že operace průniku a sjednocení fuzzy množin jsou:

1. komutativní
$$A \cap B = B \cap A, \ A \cup B = B \cup A, \tag{19}$$

2. asociativní
$$A \cap (B \cap C) = A \cap (B \cap C), \ A \cup (B \cup C) = A \cup (B \cup C), \tag{20}$$

3. idempotentní
$$A \cap A = A, \ A \cup A = A, \tag{21}$$

4. vzájemně distributivní

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \;\; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad (22)$$

5. splňují De Morganovi zákony

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \;\; \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad (23)$$

kde $A, B \in \mathcal{F}(U)$.

Na druhou stranu existují i vlastnosti, které pro operace průniku a sjednocení fuzzy množin na rozdíl od ostrých množin neplatí, např. neplatí *zákon kontradikce*

$$A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad (24)$$

a *zákon vyloučeného třetího*

$$A \cup \overline{A} = U, \quad (25)$$

kde $A \in \mathcal{F}(U)$.

**Příklad 1.3.** *Nechť $A \in \mathcal{F}(U)$ a nechť $A(x) = 0,2 \; \forall x \in U$. Potom*

$$\forall x \in U : \;\; (A \cap \overline{A})(x) = \min\{A(x), \overline{A}(x)\} = \min\{0,2; 0,8\} = 0,2. \quad (26)$$

$$\forall x \in U : \;\; (A \cup \overline{A})(x) = \max\{A(x), \overline{A}(x)\} = \max\{0,2; 0,8\} = 0,8\,, \quad (27)$$

*Z (26) a (27) je vidět, že pro fuzzy množiny tyto zákony u těchto operací neplatí.*

Ukazuje se, že průnik a sjednocení fuzzy množin lze zadefinovat i jiným způsobem, přičemž pro ostré množiny by takto definované operace splývaly s původními definicemi průniku a sjednocení. Abychom tyto operace mohli zavést, musíme nejprve zadefinovat dvě významné operace se stupni příslušnosti zvané *t-norma* a *t-konorma.*

**Definice 1.16.** *Binární operaci $T : \langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ nazveme* t-normou *(z anglického triangular norm), jestliže pro libovolné $a, b, c \in \langle 0, 1\rangle$ splňuje následující vlastnosti:*

1. *komutativitu*

$$T(a,b) = T(b,a) \tag{28}$$

2. *asociativitu*

$$T(a, T(b,c)) = T(T(a,b), c) \tag{29}$$

3. *monotonost*

$$a \leq b \Rightarrow (T(a,c) \leq T(b,c)) \tag{30}$$

4. *ohraničenost*

$$T(1,a) = a. \tag{31}$$

**Příklady nejvýznamnějších t-norem**[1]**:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| minimum | $T_{\text{MIN}}(a,b)$ | $=$ | $\min\{a,b\}$, |
| součin | $T_{\text{PAND}}(a,b)$ | $=$ | $ab$, |
| drastický součin | $T_{\text{WEAK}}(a,b)$ | $=$ | $\begin{cases} \min\{a,b\} & \text{jestliže } \max\{a,b\} = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$, |
| Łukasiewiczova konjunkce | $T_{\text{LAND}}(a,b)$ | $=$ | $\max\{0, a+b-1\}$. |

**Věta 1.1.** *Nechť $T$ je libovolná t-norma. Pak pro libovolné $a,b \in \langle 0,1 \rangle$ platí:*

$$T_{WEAK}(a,b) \leq T(a,b) \leq T_{MIN}(a,b). \tag{32}$$

**Důkaz:** $T_{\text{WEAK}}(a,b) = 0$ kromě případu, kdy $\max\{a,b\} = 1$. Z ohraničenosti t-normy plyne, že $T(a,b) = T_{\text{MIN}}(a,b)$, jestliže $\max\{a,b\} = 1$. Odtud dostáváme $T_{\text{WEAK}}(a,b) \leq T(a,b)$.

Z monotónnosti a ohraničenosti t-normy dále plyne, že $T(a,b) \leq T(a,1) = a$ a zároveň $T(a,b) \leq T(1,b) = b$. Odtud dostáváme $T(a,b) \leq T_{\text{MIN}}(a,b)$.

Důkaz byl převzat z [14]. ■

**Definice 1.17.** *Binární operaci $S : \langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle \to \langle 0,1 \rangle$ nazveme* t-konormou *(z anglického triangular conorm), jestliže pro libovolné $a,b,c \in \langle 0,1 \rangle$ splňuje následující vlastnosti:*

1. *komutativitu*

$$S(a,b) = S(b,a) \tag{33}$$

[1]Označení jednotlivých t-norem je převzato z [4].

2. *asociativitu*

$$S(a, S(b,c)) = S(S(a,b), c) \tag{34}$$

3. *monotonost*

$$a \leq b \Rightarrow (S(a,c) \leq S(b,c)) \tag{35}$$

4. *ohraničenost*

$$S(0,a) = a. \tag{36}$$

**Poznámka 1.4.** *Je vhodné poznamenat, že definice t-normy a t-konormy se liší pouze v bodě 4 – v ohraničenosti. Jinak jsou definice totožné.*

**Definice 1.18.** *T-konormu $S$ nazveme* duální *k t-normě $T$, jestliže pro libovolná $a, b \in \langle 0, 1\rangle$ platí:*

$$S(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b). \tag{37}$$

**Příklady nejvýznamnějších t-konorem[2]:**

$$\begin{array}{llcl}
\text{maximum} & S_{\mathrm{MAX}}(a,b) & = & \max\{a,b\}, \\
\text{pravděpodobnostní součet} & S_{\mathrm{POR}}(a,b) & = & a+b-ab, \\
\text{drastický součet} & S_{\mathrm{STRONG}}(a,b) & = & \begin{cases} \max\{a,b\} & \text{jestliže } \min\{a,b\}=0 \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}, \\
\text{Łukasiewiczova disjunkce} & S_{\mathrm{LOR}} & = & \min\{1, a+b\}.
\end{array}$$

**Věta 1.2.** *Nechť $S$ je libovolná t-konorma. Pak pro libovolné $a, b \in \langle 0, 1\rangle$ platí:*

$$S_{MAX}(a,b) \leq S(a,b) \leq S_{STRONG}(a,b). \tag{38}$$

**Důkaz:** Z monotónnosti a ohraničenosti t-normy plyne, že $a = S(a,0) \leq S(a,b)$ a zároveň $b = S(0,b) \leq S(a,b)$. Odtud dostáváme $S_{\mathrm{MAX}}(a,b) \leq S(a,b)$.

$S_{\mathrm{STRONG}}(a,b) = 1$ kromě případu, kdy $\min\{a,b\} = 0$. Z ohraničenosti t-konormy plyne, že $S(a,b) = S_{\mathrm{MAX}}(a,b)$, jestliže $\max\{a,b\} = 0$. Odtud dostáváme $S(a,b) \leq S_{\mathrm{STRONG}}(a,b)$. ■

**Poznámka 1.5.** *V dalším textu budeme Łukasiewiczovu konjunkci (disjunkci) místo $T_{LAND}$ ($S_{LOR}$) značit symbolem $\otimes$ ($\oplus$).*

[2] Označení jednotlivých t-konorem je opět převzato z [4].

V příkladě 1.3 jsme si ukázali, že pro operaci průniku (sjednocení) fuzzy množin neplatí zákon kontradikce (zákon vyloučeného třetího). Ukazuje se, že tento zákon platí, pokud místo operace minima (maxima) použijeme Łukasiewiczovu konjunkci (disjunkci), neboť $\forall x \in U$:

$$\begin{aligned} A(x) \otimes \overline{A}(x) &= \max\{0, A(x) + \overline{A}(x) - 1\} = \max\{0, A(x) + (1 - A(x)) - 1\} = \\ &= \max\{0, 0\} = 0, \qquad (39) \\ A(x) \oplus \overline{A}(x) &= \min\{1, A(x) + \overline{A}(x)\} = \min\{1, A(x) + (1 - A(x))\} = \\ &= \min\{1, 1\} = 1. \qquad (40) \end{aligned}$$

**Definice 1.19.** *Nechť $A, B \in \mathcal{F}(U)$ a nechť $T$ je libovolná t-norma.* Průnikem *fuzzy množin $A$ a $B$* založeným na t-normě $T$ *rozumíme fuzzy množinu $A \cap_T B \in \mathcal{F}(U)$ s funkcí příslušnosti:*

$$\forall x \in U : \ (A \cap_T B)(x) = T(A(x), B(x)). \qquad (41)$$

**Definice 1.20.** *Nechť $A, B \in \mathcal{F}(U)$ a nechť $S$ je libovolná t-konorma.* Sjednocením *fuzzy množin $A$ a $B$* založeným na t-konormě $S$ *rozumíme fuzzy množinu $A \cap_S B \in \mathcal{F}(U)$ s funkcí příslušnosti:*

$$\forall x \in U : \ (A \cup_T B)(x) = S(A(x), B(x)). \qquad (42)$$

**Poznámka 1.6.** *Vždy používáme průnik (sjednocení) fuzzy množin založený na duální t-normě (t-konormě). Velmi často se používá průnik (sjednocení) fuzzy množin založený na Łukasiewiczově konjunkci (disjunkci). Tuto operaci budeme značit symbolem $\cap_L$ ($\cup_L$).*

## 1.3 Věta o reprezentaci, princip rozšíření

V teorii fuzzy množin hrají významnou roli $\alpha$-řezy, poněvadž každá fuzzy množina je jednoznačně dána pomocí systému svých $\alpha$-řezů. Tento poznatek je shrnut v následující větě.

**Věta 1.3** (O reprezentaci)**.** *Nechť $A \in \mathcal{F}(U)$. Potom platí:*

$$\forall x \in U : \ A(x) = \sup\{\alpha \in \langle 0, 1\rangle | x \in A_\alpha\}. \qquad (43)$$

**Důkaz:** Nechť $A(x) = \alpha_0$, $\alpha_0 \in \langle 0, 1\rangle$. Pro každé $\alpha$, které splňuje podmínku $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ platí $x \in A_\alpha$. Odtud dostáváme

$$\sup\{\alpha \mid \alpha \leq \alpha_0\} \leq A(x). \tag{44}$$

Poněvadž $x \in A_{\alpha_0}$, dostáváme z vlastnosti suprema

$$\sup\{\alpha \mid \alpha \leq \alpha_0\} \geq A(x), \tag{45}$$

čímž je věta dokázána. ■

Důležitým matematickým pojmem je zobrazení (funkce). Nyní si takovéto bodové zobrazení $f : U \to V$ zobecníme na zobrazení $f_F : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, které je definované pro fuzzy množiny. Následující zobecnění hraje významnou roli při rozšiřování bodových aritmetických operací na aritmetické operace s fuzzy množinami (viz kapitola 1.5.1). Poprvé byl princip rozšíření zaveden L. A. Zadehem v [28].

**Definice 1.21** (Princip rozšíření)**.** *Fuzzifikací zobrazení $f : U \to V$ rozumíme zobrazení $f_F : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, které každé fuzzy množině $A \in \mathcal{F}(U)$ přiřazuje fuzzy množinu $f_F(A) \in \mathcal{F}(V)$ s funkcí příslušnosti definovanou pro každé $y \in V$ vztahem*

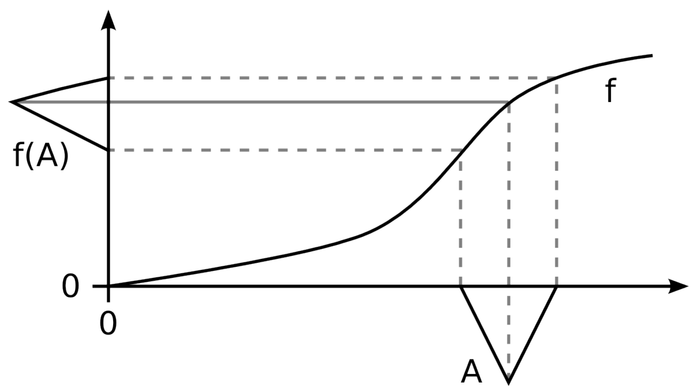
$$f_F(A)(y) = \begin{cases} \sup\{A(x) \mid f(x) = y,\, x \in U\}, \\ 0, \ \textit{neexistuje–li žádné } x \in U \textit{ takové, že } f(x) = y. \end{cases} \tag{46}$$

## 1.4 Fuzzy relace

Relace slouží v matematice k popisu vzájemných vztahů mezi prvky jedné nebo více množin.

**Definice 1.22.** *Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou ostré množiny a nechť $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Potom $n$–*ární relací *rozumíme libovolnou množinu $R$ definovanou na $X$.*

Nyní si pojem relace zobecníme zavedením pojmu *fuzzy relace*, který nám umožní popsat neurčitý vztah mezi prvky univerz.




Obrázek 2: Příklad principu rozšíření pro funkci $f$ a fuzzy množinu $A$.

**Definice 1.23.** *Nechť* $U_1, U_2, \ldots, U_n$ *jsou ostré množiny a nechť* $U = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$. *Potom* $n$–ární fuzzy relací *rozumíme libovolnou fuzzy množinu* $R$ *definovanou na univerzu* $U$.

**Poznámka 1.7.** *$n$–ární fuzzy relaci, kde $n = 2$ budeme nazývat* binární fuzzy relace.

**Příklad 1.4.** *Nechť* $U = \{a, b, c\}$. *Potom binární fuzzy relací* $R \in \mathcal{F}(U \times U)$ *je například:*

$R(a, a) = R(b, b) = R(c, c) = 1$; $R(a, b) = R(b, c) = R(c, a) = 0,5$;

$R(a, c) = R(c, b) = R(b, a) = 0,2$

*což lze úsporněji zapsat v maticové podobě ve tvaru:*

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Definice 1.24.** Kartézským součinem *fuzzy množin* $A_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i = 1, \ldots, n$ *rozumíme fuzzy množinu*

$$A_1 \times \ldots \times A_n \in \mathcal{F}(U_1 \times \ldots \times U_n) \tag{47}$$

*jejíž funkce příslušnosti je pro každé* $(x_1, \ldots, x_n) \in (U_1 \times \ldots \times U_n)$ *rovna*

$$(A_1 \times \ldots \times A_n)(x_1, \ldots, x_n) = \min\{A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n)\}. \tag{48}$$

**Poznámka 1.8.** *V definici kartézského součinu lze ve vzorci (48) použít i jinou T-normu než minimum. Poměrně často se používá například součin.*

**Definice 1.25.** *Nechť $R$ je fuzzy relace na $U_1 \times \ldots \times U_n$ a $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_j \leq n$.* Projekce *fuzzy relace $R$ na $U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_j}$ je fuzzy množina $Proj(R, U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_j}) \in \mathcal{F}(U_{i_1}, \ldots, U_{i_j})$, jejíž funkce příslušnosti je pro každé $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_j}) \in (U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_j})$ dána vztahem*

$$Proj(R, U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_j})(x_{i_1}, \ldots, x_{i_j}) = \sup\{R(y_1, \ldots, y_n) \,|\, y_{i_k} = x_{i_k},\, k = 1, \ldots, j\}. \tag{49}$$

**Definice 1.26.** *Nechť $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_j \leq n$ a $R \in \mathcal{F}(U_{i_1} \times \ldots \times U_{i_j})$.* Cylindrickým rozšířením *$R$ na $U_1 \times \ldots U_n$ je fuzzy množina $Cyl(R, U_1 \times \ldots U_n) \in \mathcal{F}(U_1 \times \ldots U_n)$ jejíž funkce příslušnosti je pro každé $(x_1, \ldots, x_n) \in (U_1 \times \ldots \times U_n)$ dána vztahem*

$$Cyl(R, U_1 \times \ldots \times U_n)(x_1, \ldots, x_n) = R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_j}). \tag{50}$$

## 1.5 Fuzzy čísla

V této podkapitole si ukážeme, jak lze pomocí fuzzy množin popsat neurčité, nepřesné nebo verbálně popsané (např. vysoký člověk) hodnoty. To se nám může hodit například při odhadu nějaké hodnoty nebo v situaci, kdy naměříme nějakou fyzikální veličinu a chceme do ní zahrnout i chybu měření. Pro tyto případy zavádíme speciální druh fuzzy množin – *fuzzy čísla*.

**Definice 1.27.** *Fuzzy množinu $A$ definovanou na množině reálných čísel, pro kterou platí:*

1. $\exists x \in \mathbb{R} : \; A(x) = 1$
2. $\forall \alpha \in (0, 1\rangle : \; A_\alpha$ *jsou uzavřené intervaly*
3. *Supp $A$ je omezený*

*nazveme* fuzzy číslem *(značíme $A \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$).*

**Poznámka 1.9.** *Někteří autoři (např. [14]) pomocí předchozí definice nedefinují fuzzy číslo, ale* fuzzy interval. *Fuzzy číslo poté definují jako speciální případ fuzzy intervalu, pro který je první podmínka splněna právě v jednom bodě, tj.:*

$$\exists!\, x \in \mathbb{R} : \; A(x) = 1. \tag{51}$$

**Poznámka 1.10.** *Symbolem $\mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ budeme, jak bylo zmíněno, značit systém všech fuzzy čísel definovaných na $\mathbb{R}$. Taktéž budeme často používat symbol $\mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$, který nám bude označovat systém fuzzy čísel na intervalu $\langle a, b\rangle$, tj. systém fuzzy čísel, jejichž funkce příslušnosti je mimo interval $\langle a, b\rangle$ nulová.*

**Poznámka 1.11.** *Reálná čísla lze zapsat jako fuzzy jednotky a nahlížet na ně jako na fuzzy čísla. V dalším textu, pokud to bude užitečné z hlediska jednoduchosti zápisu, budeme takové fuzzy číslo někdy značit stejně jako reálné číslo.*

**Poznámka 1.12.** *Fuzzy číslo $A$ je možné zapisovat pomocí dvojice funkcí $\underline{a} : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ a $\overline{a} : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$, jejichž hodnoty představují dolní a horní meze $\alpha$-řezů tohoto fuzzy čísla a pro $\alpha = 0$ uzávěr nosiče, tj.*

$$A = \{\langle \underline{a}(\alpha), \, \overline{a}(\alpha)\rangle \,|\, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}, \;\; kde \; \begin{cases} \langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\rangle = A_\alpha \; pro \; \alpha \in (0, 1\rangle \\ \langle \underline{a}(0), \overline{a}(0)\rangle = Cl(Supp\, A) \end{cases}. \tag{52}$$

*Tento popis vychází z věty o reprezentaci aplikované na případ fuzzy čísel a koresponduje také se zmíněnou alternativní definicí fuzzy množiny.*

*Takovýto zápis budeme zkráceně psát ve tvaru:*

$$A = (\underline{a}, \overline{a}). \tag{53}$$

**Definice 1.28.** *Nechť $A \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$. Potom hodnoty $x_1, \ldots, x_4 \in \langle a, b\rangle$ takové, že $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ nazveme* významné hodnoty *fuzzy čísla, jestliže splňují následující podmínky:*

$$Cl(SuppA) = \langle x_1, x_4\rangle, \tag{54}$$

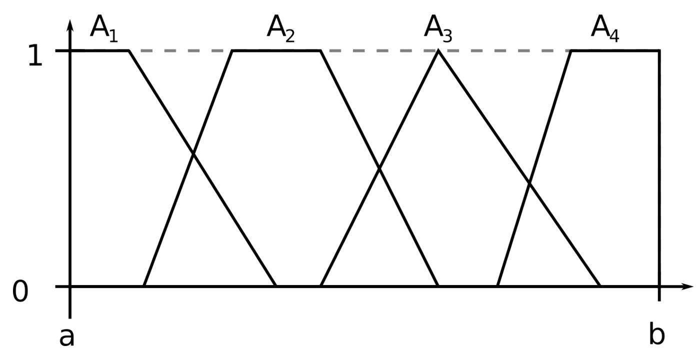
$$Ker(A) = \langle x_2, x_3\rangle. \tag{55}$$

Nyní si ukážeme několik speciálních typů fuzzy čísel, která se v praxi používají nejčastěji.

**Poznámka 1.13.** *Na základě vztahů mezi význačnými hodnotami $x_1, \ldots, x_4 \in \langle a, b\rangle$ rozlišujeme několik základních typů fuzzy čísel na $\langle a, b\rangle$. Řekneme, že fuzzy číslo je:*

$$\begin{array}{lll} \textit{typu } Z & \textit{pokud} & a = x_1 = x_2 < x_3 < x_4 \leq b, \\ \textit{typu } \Pi & \textit{pokud} & a \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq b, \\ \textit{typu } \Lambda & \textit{pokud} & a \leq x_1 < x_2 = x_3 < x_4 \leq b, \\ \textit{typu } S & \textit{pokud} & a \leq x_1 < x_2 < x_3 = x_4 = b. \end{array}$$

*Příklady těchto fuzzy čísel jsou na obrázku 3.*




Obrázek 3: Příklady různých typů lineárních fuzzy čísel: $A_1$ – fuzzy číslo typu Z, $A_2$ – fuzzy číslo typu Π, $A_3$ – fuzzy číslo typu Λ, $A_4$ – fuzzy číslo typu S.

**Definice 1.29.** *Nechť $A \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$ a $x_1, \ldots, x_4$ jsou jeho význačné hodnoty. Fuzzy číslo $A$ je* lineární*, jestliže jeho funkci příslušnosti lze zapsat ve tvaru*

$$A(x; x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} & \textit{pro} \quad x_1 \leq x < x_2 \\ 1 & \textit{pro} \quad x_2 \leq x \leq x_3 \\ \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3} & \textit{pro} \quad x_3 < x \leq x_4 \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}, \tag{56}$$

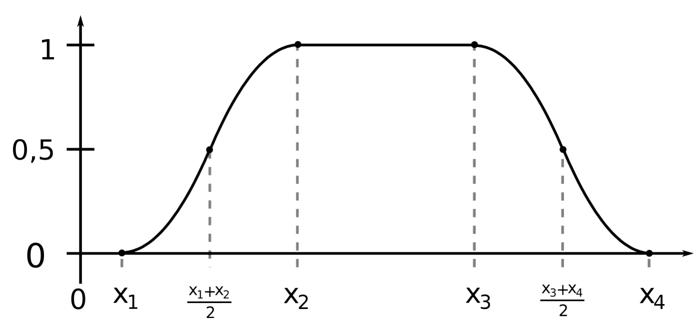
*pro $x_1 \neq x_2$ a $x_3 \neq x_4$. Pokud by platilo $x_1 = x_2$ ($x_3 = x_4$), byla by funkce příslušnosti fuzzy čísla $A$ v bodě $x_1$ ($x_3$) rovna 1.*

**Poznámka 1.14.** *Lineární fuzzy čísla typu* $\Pi$ *budeme nazývat lichoběžníkové a lineární fuzzy číslo typu* $\Lambda$ *budeme nazývat trojúhelníkové.*

**Definice 1.30.** *Nechť* $A \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$ *a* $x_1, \ldots, x_4$ *jsou jeho význačné hodnoty. Fuzzy číslo* $A$ *je* kvadratické, *jestliže jeho funkci příslušnosti lze zapsat ve tvaru*

$$A(x; x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} \frac{2(x-x_1)^2}{(x_2-x_1)^2} & pro \quad x_1 \leq x < \frac{x_1+x_2}{2} \\ 1 - \frac{2(x_2-x)^2}{(x_2-x_1)^2} & pro \quad \frac{x_1+x_2}{2} \leq x < x_2 \\ 1 & pro \quad x_2 \leq x \leq x_3 \\ 1 - \frac{2(x-x_3)^2}{(x_4-x_3)^2} & pro \quad x_3 < x \leq \frac{x_3+x_4}{2} \\ \frac{2(x_4-x)^2}{(x_4-x_3)^2} & pro \quad \frac{x_3+x_4}{2} < x \leq x_4 \\ 0 & jinak \end{cases}, \tag{57}$$

*pro* $x_1 \neq x_2$ *a* $x_3 \neq x_4$. *Pokud by platilo* $x_1 = x_2$ $(x_3 = x_4)$, *byla by funkce příslušnosti fuzzy čísla* $A$ *v bodě* $x_1$ $(x_3)$ *rovna 1.*




Obrázek 4: Příklad kvadratického fuzzy čísla.

**Poznámka 1.15.** *Lineární a kvadratická fuzzy čísla lze s využitím význačných hodnot zapisovat ve tvaru*

$$A = (x_1, x_2, x_3, x_4). \tag{58}$$

*Pokud by navíc* $x_2 = x_3$, *potom zápis zkracujeme na*

$$A = (x_1, x_2, x_4). \tag{59}$$

### 1.5.1 Aritmetické operace s fuzzy čísly

V této podkapitole si zadefinujeme základní aritmetické operace s fuzzy čísly.

**Definice 1.31.** *Nechť $A \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$. Potom fuzzy číslo $A$ nazveme:*

*a)* kladné*, jestliže $Supp\, A \subseteq (0, \infty)$,*

*b)* záporné*, jestliže $Supp\, A \subseteq (-\infty, 0)$,*

*c)* nulové*, jestliže $0 \in Supp\, A$.*

**Definice 1.32.** *Nechť $A \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$. Potom fuzzy číslo $-A$ nazveme* opačné *k fuzzy číslu $A$, jestliže $\forall x \in \mathbb{R} : -A(x) = A(-x)$,*

**Definice 1.33.** *Nechť $A \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$, $A$ je nenulové. Potom fuzzy číslo $A^{-1}$ nazveme* inverzní *k fuzzy číslu $A$, jestliže $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0 : A^{-1}(x) = A(\frac{1}{x})$ a $A^{-1}(0) = 0$.*

Pro zavedení aritmetických operací s fuzzy čísla využijeme principu rozšíření (viz definice 1.21). Sčítání fuzzy čísel se definuje takto:

$$(A +_F B)(z) = \max\{\min\{A(x), B(x)\} \mid x + y = z,\ x, y \in \mathbb{R}\}, \tag{60}$$

kde $A, B \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$. Písmeno $F$ u znaménka plus značí, že se jedná o součet fuzzy množin. V dalším textu ho budeme vynechávat, poněvadž to, o kterou operaci sčítání se jedná, bude zřejmé z kontextu. Operace odčítání, násobení a dělení se zavedou zcela analogicky, pouze u dělení musí být fuzzy číslo kterým dělíme nenulové.

**Definice 1.34.** *Fuzzy číslo nazveme spojité, jestliže má spojitou funkci příslušnosti.*

**Věta 1.4.** *Nechť $A, B \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R})$ jsou spojitá fuzzy čísla a nechť $\Box \in \{+, -, \cdot, /\}$. Potom fuzzy množina*

$$(A \Box B)(z) = \max\{\min\{A(x), B(x)\} \mid x \Box y = z,\ x, y \in \mathbb{R}\} \tag{61}$$

*je taktéž spojité fuzzy číslo, přičemž při operaci dělení musí být fuzzy číslo $B$ nenulové.*

**Důkaz:** Lze nalézt např. v [9, str. 106]. ■

**Poznámka 1.16.** *Součtem a rozdílem dvou lineárních fuzzy čísel je opět lineární fuzzy číslo.*

Na základě definic nelze prakticky provádět aritmetické operace. Je dokázáno (např. v [9]), že při zápisu fuzzy čísel pomocí systému uzavřených intervalů platí následující tvrzení:

Nechť $A = \{\langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}, B = \{\langle \underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$. Potom jednotlivé aritmetické operace s fuzzy čísly počítáme takto (v případě operace dělení předpokládáme, že $B$ je nenulové fuzzy číslo):

$$A + B = \{\langle \underline{a}(\alpha) + \underline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) + \overline{b}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}, \tag{62}$$

$$A - B = \{\langle \underline{a}(\alpha) - \overline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) - \underline{b}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}, \tag{63}$$

$$\begin{aligned} A \cdot B = \Big\{\big\langle &\min\{\underline{a}(\alpha) \cdot \underline{b}(\alpha),\, \underline{a}(\alpha) \cdot \overline{b}(\alpha),\, \overline{a}(\alpha) \cdot \underline{b}(\alpha),\, \overline{a}(\alpha) \cdot \overline{b}(\alpha)\}\ , \\ &\max\{\underline{a}(\alpha) \cdot \underline{b}(\alpha),\, \underline{a}(\alpha) \cdot \overline{b}(\alpha),\, \overline{a}(\alpha) \cdot \underline{b}(\alpha),\, \overline{a}(\alpha) \cdot \overline{b}(\alpha)\}\big\rangle \mid \alpha \in \langle 0, 1\rangle\Big\}, \end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} A/B = \Bigg\{\Bigg\langle &\min\left\{\frac{\underline{a}(\alpha)}{\underline{b}(\alpha)}, \frac{\underline{a}(\alpha)}{\overline{b}(\alpha)}, \frac{\overline{a}(\alpha)}{\underline{b}(\alpha)}, \frac{\overline{a}(\alpha)}{\overline{b}(\alpha)}\right\}\ , \\ &\max\left\{\frac{\underline{a}(\alpha)}{\underline{b}(\alpha)}, \frac{\underline{a}(\alpha)}{\overline{b}(\alpha)}, \frac{\overline{a}(\alpha)}{\underline{b}(\alpha)}, \frac{\overline{a}(\alpha)}{\overline{b}(\alpha)}\right\}\Bigg\rangle \mid \alpha \in \langle 0, 1\rangle\Bigg\}. \end{aligned} \tag{65}$$

**Poznámka 1.17.** *Jestliže násobíme dvě* kladná *fuzzy čísla, lze předpis (64) zjednodušit na tvar*

$$A \cdot B = \big\{\langle \underline{a}(\alpha) \cdot \underline{b}(\alpha), \overline{a}(\alpha) \cdot \overline{b}(\alpha)\rangle \mid \alpha \in \langle 0, 1\rangle\big\}\,. \tag{66}$$

Na principu rozšíření je založen i fuzzy vážený průměr, který má velké uplatnění ve vícekriteriálním hodnocení.

**Definice 1.35.** *Nechť $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$, kde $a, b \geq 0$, $a \leq b$ a nechť $v_i \in \mathbb{R} :\ v_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^n v_i = 1$. Potom* váženým průměrem fuzzy čísel *$A_1, \ldots, A_n$ s váhami $v_1, \ldots, v_n$ je fuzzy číslo*

$$A = \sum_{i=1}^{n} v_i A_i, \tag{67}$$

*kde* $\forall x \in \langle a, b\rangle$ *platí:*

$$A(x) = \max\{\min\{A_1(x_1), \ldots, A_n(x_n)\} \mid x = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i,\ x_i \in \langle a, b\rangle,\ i = 1, \ldots, n\}. \tag{68}$$

### 1.5.2 Metrika fuzzy čísel

Při práci s fuzzy čísly občas potřebujeme být schopni určit, jak moc „blízko“ nebo „daleko“ od sebe daná fuzzy čísla jsou. V této kapitole si ukážeme některé metrik, pomocí kterých jsme schopni určovat vzdálenost fuzzy čísel.

**Definice 1.36.** *Nechť* $A, B \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$. *Potom* vzdálenost *fuzzy čísel* $A = (\underline{a}, \overline{a}), B = (\underline{b}, \overline{b})$ *je definována vztahem*

$$d(A, B) = \int_0^1 |\underline{a}(\alpha) - \underline{b}(\alpha)| + |\overline{a}(\alpha) - \overline{b}(\alpha)|\, d\alpha. \tag{69}$$

**Poznámka 1.18.** *Normovaná vzdálenost fuzzy čísel z předchozí definice je definována vztahem*

$$d^*(A, B) = \frac{d(A, B)}{d(a, b)} = \frac{\int_0^1 |\underline{a}(\alpha) - \underline{b}(\alpha)| + |\overline{a}(\alpha) - \overline{b}(\alpha)|\, d\alpha}{2(b - a)}. \tag{70}$$

**Věta 1.5.** *Funkce* $d^*$ *z předchozí poznámky je pro všechna fuzzy čísla z intervalu* $\langle a, b\rangle$ *normovanou metrikou, tj. pro libovolná fuzzy čísla* $A, B, C \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$ *platí:*

1. $d^*(A, B) \in \langle 0, 1\rangle$,
2. $d^*(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$, $d^*(A, B) = 1 \Leftrightarrow (A = a \wedge B = b)$,
3. $d^*(A, B) = d(B, A)$,
4. $d^*(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

**Důkaz:** Lze nalézt např. v [25, str. 40]. ■

Pro fuzzy čísla $A$ a $B$ z definice 1.36 lze analogicky zavést i jiné metriky, například pomocí:

- Hausdorffovy vzdálenosti (viz [4, str. 55])

$$d_H(A,B) = \sup_{\alpha\in\langle 0,1\rangle} \max\left\{|\underline{a}(\alpha)-\underline{b}(\alpha)|, |\overline{a}(\alpha)-\overline{b}(\alpha)|\right\}, \qquad (71)$$

- Vzdálenosti $C_\infty$ (viz [4, str. 55])

$$C_\infty(A,B) = \sup\left\{|A(x)-B(x)| \,|\, x\in\langle a,b\rangle\right\}. \qquad (72)$$

### 1.5.3 Uspořádání fuzzy čísel

V předchozí podkapitole jsme si ukázali, jak určit vzdálenost dvou fuzzy čísel, Nyní si ukážeme, jak fuzzy čísla uspořádat.

Vzhledem k tomu, že existuje více způsobů na uspořádání fuzzy čísel, je zřejmé, že žádný z nich není zcela optimální. Proto si ukážeme několik metod, které se pro porovnávání fuzzy čísel používají. Kterou z těchto metodu v praxi zvolit, to záleží na konkrétní aplikaci.

Nejčastější metoda porovnávání fuzzy čísel je zobecněním relace pro uspořádání reálných čísel. Abychom ji mohli zavést, musíme si nejprve zadefinovat *supremum* a *infimum* fuzzy čísel.

**Definice 1.37.** *Nechť $A,B\in\mathcal{F}_N(\mathbb{R})$.* Infimem *těchto fuzzy čísel rozumíme fuzzy číslo $A\wedge B$, jehož funkce příslušnosti je pro všechna $z\in\mathbb{R}$ definována pomocí vztahu*

$$(A\wedge B)(z) = \sup\{\min\{A(x),B(y)\} \,|\, z=\min\{x,y\},\ x,y\in\mathbb{R}\}. \qquad (73)$$

Supremem *těchto fuzzy čísel rozumíme fuzzy číslo $A\vee B$, jehož funkce příslušnosti je pro všechna $z\in\mathbb{R}$ definována pomocí vztahu*

$$(A\vee B)(z) = \sup\{\min\{A(x),B(y)\} \,|\, z=\max\{x,y\},\ x,y\in\mathbb{R}\}. \qquad (74)$$

**Definice 1.38.** *Relaci uspořádání fuzzy čísel $\geq$ zavedeme vztahem*

$$\forall A,B\in\mathcal{F}_N(\mathbb{R}):\ A\geq B \Leftrightarrow A=A\vee B, \textit{resp. } B=A\wedge B. \qquad (75)$$

*Relaci rovnosti* $=$ *pro fuzzy čísla zavedeme ve shodě s definicí rovnosti fuzzy množin (viz definice 1.4).*

*Relaci ostrého uspořádání* $>$ *zavedeme takto*

$$\forall A, B \in \mathcal{F}_N(\mathbb{R}) :\ A > B \Leftrightarrow A \geq B \ \text{ a zároveň } \ A \neq B. \tag{76}$$

*Řekneme, že fuzzy čísla* $A$ *a* $B$ *jsou* nesrovnatelná, *jestliže nenastává ani jedna z možností*

$$A > B,\ B > A,\ A = B. \tag{77}$$

**Poznámka 1.19.** *Inverzní relace k relacím* $\geq, >$ *budeme v dalším textu značit* $\leq, <$.

**Věta 1.6.** *Nechť* $A, B \in \mathcal{F}_N$. *Potom platí:*

$$A \geq B \Leftrightarrow \forall \alpha \in (0, 1\rangle :\ A_\alpha \geq B_\alpha, \tag{78}$$

*kde*

$$A_\alpha \geq B_\alpha \Leftrightarrow (\underline{a}(\alpha) \geq \underline{b}(\alpha)) \ \text{ a zároveň } (\overline{a}(\alpha) \geq \overline{b}(\alpha)). \tag{79}$$

**Důkaz:** Lze nalézt např. v [9]. ■

Bohužel takto zobecněné uspořádání fuzzy čísel je pouze částečné uspořádání (relace je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní, ale není úplná), což znamená, že některá fuzzy čísla jsou neporovnatelná.

Fuzzy čísla na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ můžeme uspořádat například pomocí vzdálenosti fuzzy čísel (viz definice 1.36) nebo s využitím těžiště fuzzy čísel (viz definice 1.40).

**Definice 1.39.** *Nechť* $A, B \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$. *Potom relaci* $\geq_d$ *(*větší nebo rovno vzhledem k metrice $d$*) mezi fuzzy čísly* $A$ *a* $B$ *zavedeme vztahem*

$$A \geq_d B \Leftrightarrow d(a, A) \geq d(a, B), \ \text{ resp. } d(b, A) \leq d(b, B). \tag{80}$$

**Poznámka 1.20.** *Analogicky lze zadefinovat, že* $A =_d B \Leftrightarrow d(a, A) = d(a, B)$ *a* $A >_d B \Leftrightarrow d(a, A) > d(a, B), \ \text{resp. } d(b, A) < d(b, B)$.

Takovéto uspořádání fuzzy čísel už je kvaziuspořádání (relace je reflexivní, tranzitivní a úplná).

Předtím, než si ukážeme jiný způsob uspořádání fuzzy čísel, si zavedeme pojem těžiště fuzzy čísla.

**Definice 1.40.** *Nechť $A \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$, které není fuzzy jednotka. Potom* těžiště *fuzzy čísla A je dáno vztahem*

$$t_A = \frac{\int_a^b A(x)x\,dx}{\int_a^b A(x)\,dx}. \tag{81}$$

Zobecněné těžiště *fuzzy množiny A definujeme vztahem*

$$t_A^k = \frac{\int_a^b A(x)^{k+1}x\,dx}{\int_a^b A(x)^{k+1}\,dx}, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{82}$$

**Poznámka 1.21.** *Zobecněné těžiště použijeme v případě, kdy upřednostňujeme hodnoty s vyšším stupněm příslušnosti. S rostoucí hodnotou k se hodnota zobecněného těžiště blíží středu jádra fuzzy čísla.*

**Věta 1.7.** *Nechť $A \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$, které je lineární a je určeno čtveřicí význačných hodnot $x_1, \ldots, x_4 \in \mathbb{R}$. Potom pro těžiště fuzzy čísla A platí:*

$$t_A = \frac{1}{3} \cdot \frac{x_4^2 + x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 + x_4x_3 - x_2x_1}{x_4 + x_3 - x_2 - x_1}. \tag{83}$$

**Důkaz:** Lze nalézt např. v [19, str. 20]. ■

**Definice 1.41.** *Nechť $A, B \in \mathcal{F}(\langle a, b\rangle)$. Potom relaci $\geq_t$ (*větší nebo rovno vzhledem k těžišti*) mezi fuzzy čísly A a B zavedeme vztahem*

$$A \geq_t B \Leftrightarrow t_A \geq t_B. \tag{84}$$

**Poznámka 1.22.** *Analogicky lze zadefinovat, že $A =_t B \Leftrightarrow t_A = t_B$ a $A >_d B \Leftrightarrow t_A > t_B$.*

Takovéto uspořádání fuzzy čísel je také kvaziuspořádání.

Z předchozí definice je vidět, že pro zavedení jisté třídy relací uspořádání fuzzy čísel lze postupovat tak, že zvolíme vhodný způsob reprezentace fuzzy čísel čísly reálnými a pak je kvaziuspořádání fuzzy čísel indukováno uspořádáním čísel reálných. Reprezentace fuzzy čísel pomocí čísel reálných se nazývá *defuzzifikace* a budeme se jí zabývat v kapitole 1.6.

### 1.5.4 Fuzzy škála

V této podkapitole si zadefinujeme významnou strukturu fuzzy čísel – *fuzzy škálu*. Ukazuje se, že tato struktura je velmi vhodná jak pro jazykovou proměnnou samotnou, tak při jejím použití ve fuzzy regulátorech.

**Definice 1.42.** *Nechť $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$. Řekneme, že tato fuzzy čísla tvoří* fuzzy rozklad *intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže*

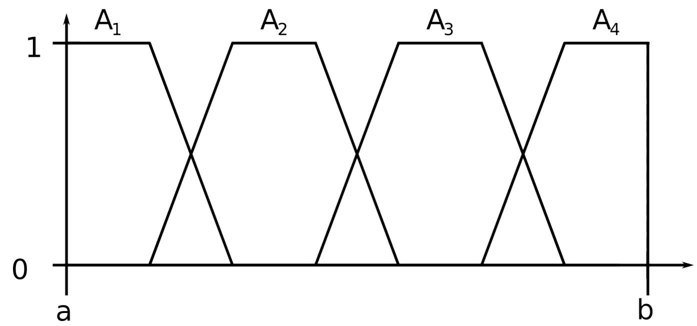
$$\forall x \in \langle a, b\rangle : \sum_{i=1}^{n} A_i(x) = 1. \tag{85}$$

**Věta 1.8.** *Nechť $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$ tvoří fuzzy rozklad intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom platí:*

1. *fuzzy čísla $A_1, \ldots, A_n$ lze* lineárně *uspořádat,*
2. *každé $x \in \langle a, b\rangle$ buď náleží právě jednomu z fuzzy čísel $A_1, \ldots, A_n$ nebo náležení dvěma sousedním fuzzy číslům,*
3. *funkce příslušnosti $A_1(.), \ldots A_n(.)$ jsou spojité.*

**Důkaz:** Lze nalézt např. v [25, str. 56-58]. ■

**Definice 1.43.** *Nechť $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$ tvoří fuzzy rozklad intervalu $\langle a, b\rangle$ a jsou číslována ve shodě se svým lineárním uspořádáním ($A_1 < A_2 < \ldots < A_n$). Potom říkáme, že fuzzy čísla $A_1, \ldots, A_n$ tvoří na intervalu $\langle a, b\rangle$* fuzzy škálu.




Obrázek 5: Příklad fuzzy škály tvořené lineárními fuzzy čísly.

Fuzzy škály nejčastěji zadáváme pomocí lineárních fuzzy čísel. Z tohoto důvodu je dobré znát snadný způsob, jak identifikovat fuzzy škálu tvořenou lineárními fuzzy čísly.

**Věta 1.9.** *Nechť $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$ jsou lineární a jejich funkce příslušnosti (s využitím význačných hodnot) jsou tvaru $A_i = (x_i^1, x_i^2, x_i^3, x_i^4)$. Navíc ať platí,*

$$a = x_1^1 = x_1^2,\ b = x_n^3 = x_n^4, \tag{86}$$

$$\forall i = 2, \ldots, n-1 :\ x_{i-1}^3 = x_i^1,\ x_{i-1}^4 = x_i^2,\ x_i^3 = x_{i+1}^1,\ x_i^4 = x_{i+1}^2. \tag{87}$$

*Potom fuzzy čísla $A_1, \ldots, A_n$ tvoří fuzzy škálu na $\langle a, b\rangle$.*

**Důkaz:** Lze nalézt např. v [25, str. 55]. ■

**Poznámka 1.23.** *Analogickou větu lze dokázat i pro kvadratická fuzzy čísla.*

## 1.6 Defuzzifikace fuzzy množin na $\mathbb{R}$

Fuzzy množiny se ukázaly jako velmi vhodný nástroj pro reprezentaci neurčitých pojmů. Občas ovšem nastane situace, kdy potřebujeme fuzzy množinu na $\mathbb{R}$ reprezentovat pomocí reálného čísla. Takováto reprezentace by měla pokud možno co *nejlépe charakterizovat danou fuzzy množinu.* Tomuto procesu se říká *defuzzifikace.*

Protože pro různé typy fuzzy množin jsou vhodné různé metody defuzzifikace, existuje velké množství defuzzifikačních metod a je jen na rozhodovateli, aby v konkrétní situaci vybral tu nejvhodnější. Nyní si představíme několik nejpoužívanějších defuzzifikačních metod.

- **Metoda těžiště (COG – Center of Gravity).**

  Metoda těžiště je velmi známa a často používaná metoda defuzzifikace, která vychází přímo z definice těžiště fuzzy čísla.

  Nechť $A \in \mathcal{F}(U)$, kde univerzum $U = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je konečná množina reálných čísel. Potom výsledek defuzzifikace fuzzy množiny $A$ metodou COG je roven

$$COG(A) = \frac{\sum_{i=1}^{n} A(x_i)x_i}{\sum_{i=1}^{n} A(x_i)}. \tag{88}$$

  Nechť $A \in \mathcal{F}(\langle a, b\rangle)$ s borelovsky měřitelnou funkcí příslušnosti a navíc $\int_a^b A(x)dx \neq 0$. Potom výsledek defuzzifikace fuzzy množiny $A$ metodou COG je roven

$$COG(A) = \frac{\int_a^b A(x)xdx}{\int_a^b A(x)dx}. \tag{89}$$

  **Poznámka 1.24.** *Tak jako jsme pro zavedení defuzzifikace použili těžiště fuzzy čísla, můžeme zcela analogicky použít zobecněné těžiště fuzzy čísla (viz 82).*

  *Další možností je vybrat jen ty prvky univerza, které dosáhly určitého stupně příslušnosti $\alpha \leq hgt(A)$, a na ně použít metodu těžiště:*

$$COG_\alpha(A) = \frac{\int_{A_\alpha} A(x)xdx}{\int_{A_\alpha} A(x)dx}. \tag{90}$$

- **Střed maxima (MAX – Mean of Maxima, Middle of Maxima).**

  Nechť $A \in \mathcal{F}(U)$, kde univerzum $U = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je konečná množina a $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots n$. Potom výsledek defuzzifikace fuzzy množiny $A$ metodou MAX je roven

$$MAX(A) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_k, \tag{91}$$

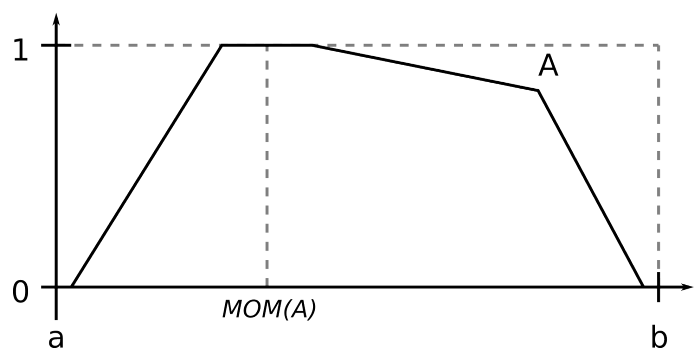
kde $x_1, \ldots, x_k \in hgt(A)$.

Nechť $A \in \mathcal{F}(\langle a, b\rangle)$, kde $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$. Potom výsledek defuzzifikace fuzzy množiny $A$ metodou MAX je roven

$$MAX(A) = \frac{\int_H x dx}{\int_H dx}, \tag{92}$$

kde $H = \{x | A(x) = hgt(A)\}$.

Nevýhodou tohoto přístupu je, že v potaz bereme pouze ty prvky, ve kterých má fuzzy množina maximální stupeň příslušnosti. Příklad fuzzy množiny pro kterou je použití metody MAX pro defuzzifikaci nevhodné, je na obrázku 6.




Obrázek 6: Příklad nevhodného použití defuzzifikace metodou MOM.

Následující dvě metody jsou modifikací metody středu maxim.

- **Levá mez maxima (LMAX – Left of Maxima).**

  Nechť $A \in \mathcal{F}(U)$, kde $U$ je uzavřený reálný interval nebo konečná podmnožina reálných čísel. Potom výsledek defuzzifikace fuzzy množiny $A$ metodou LMAX je roven

$$LMAX(A) = \min\{x \in U | A(x) = hgt(A)\}. \tag{93}$$

- **Pravá mez maxima (RMAX – Right of Maxima).**

  Nechť $A \in \mathcal{F}(U)$, kde $U$ je uzavřený reálný interval nebo konečná podmnožina reálných čísel. Potom výsledek defuzzifikace fuzzy množiny $A$ metodou RMAX je roven

$$RMAX(A) = \max\{x | A(x) = hgt(A)\}. \tag{94}$$

- **Střed průměrného intervalu (MOM – Middle Point of the Mean Interval).**

  Nechť $A \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$, kde $\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}$ a $A = \{\langle \underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)\rangle \,|\, \alpha \in \langle 0, 1\rangle\}$. Potom výsledek defuzzifikace fuzzy množiny $A$ metodou MOM je roven

$$MOM(A) = \int_0^1 \frac{\underline{a}(\alpha) + \overline{a}(\alpha)}{2}. \tag{95}$$

**Poznámka 1.25.** *Je třeba dát si velký pozor na označení defuzzifikačních metod, poněvadž ve starší literatuře (např. [1]) se defuzzifikační metody označují jinými zkratkami než dnes. Například zkratka MOM se často používala pro metodu středu maxim. Navíc lze občas narazit na různé metody označované stejnými názvy.*

# 2 Jazykově orientované fuzzy modelování

## 2.1 Jazyková proměnná

Je zřejmé, že lidé spíš než v číslech vyjadřují svou znalost o světě slovním vyjádřením a proto s oblibou využívají nepřesné pojmy, jako je *málo, rychlý, velký, atd.* . Takovéto pojmy bohužel s využitím klasické matematiky nelze dobře popsat. Z tohoto důvodu se zde s výhodou používá fuzzy množin a zvláště pak fuzzy čísel, které s takovouto jazykovou vágnosti umí velmi dobře pracovat. Pokud navíc chceme při sestavování modelu využívat expertně definovaných vstupů a znalostí a chceme výstupy poskytovat ve formě srozumitelné pro uživatele, je vhodné použít jazykově orientované fuzzy modelování. Abychom toto mohli použít, musíme si nejprve zavést pojem *jazyková proměnná*.

Pokud nebude řečeno jinak, jsou definice a tvrzení v této kapitole převzaty z [25, 18, 28, 1].

### 2.1.1 Původní definice jazykové proměnné

Poprvé byla jazyková proměnná zadefinována v roce 1975 L. A. Zadehem v trojdílném článků [28]. Dnes již existuje i preciznější definice jazykové proměnné (viz kapitola 2.1.2), nicméně původní koncept se stále používá a pro velkou část praktických aplikací je plně dostačující.

**Definice 2.1.** Jazyková proměnná *je určena uspořádanou pěticí*

$$(\mathcal{V}, \mathcal{T}(\mathcal{V}), X, G, M), \tag{96}$$

*kde $\mathcal{V}$ je název jazykové proměnné, $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ označuje množinu termů jazykové proměnné $\mathcal{V}$, $X$ je univerzum, na kterém definujeme významy jednotlivých jazykových termů pomocí fuzzy množin, $G$ je* syntaktické pravidlo *(gramatika), pomocí kterého definujeme jazykové termy z $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ a $M$ je* sémantické pravidlo*, které jazykovému termu $\mathcal{T} \in \mathcal{T}(\mathcal{V})$ určí význam $T = M(\mathcal{T}) \in \mathcal{F}(X)$.*

**Poznámka 2.1.** *V dalším textu budeme u jazykové proměnné předpokládat, že univerzum je uzavřený reálný interval, tj. $X = \langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$. Navíc významy jednot-*

*livých termů budeme modelovat fuzzy čísly na* $\langle a, b\rangle$, *tj.* $M(\mathcal{T}) = T \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$. *Takto pojatá jazyková proměnná je velmi úzce spjata s pojmem* bazická reálná proměnná..

**Definice 2.2.** Bazická reálná proměnná*, přidružená k jazykové proměnné* $(\mathcal{V}, \mathcal{T}(\mathcal{V}), \langle a, b\rangle, G, M)$, *je uspořádaná dvojice*

$$(v, \langle a, b\rangle), \tag{97}$$

*kde* $v$ *je název bazické proměnné a* $\langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$ *je obor hodnot bazické proměnné (obor hodnot* $v$ *musí být shodný s univerzem* $\mathcal{V}$*).*

Jazyková proměnná nám pomocí konečného (často velmi malého) počtu jazykových termů, jejichž významy modelujeme pomocí fuzzy čísel, reprezentuje přidruženou bazickou proměnnou, která má nespočetně mnoho hodnot (spojitý interval). Navíc jednotlivé jazykové termy jsou jazykově pojmenovány, což usnadňuje orientaci a práci s jazykovou proměnnou.

Naše definice jazykové proměnné je ovšem velmi obecná a neříká nám, jak jazykové proměnné konstruovat.

První postup pro konstrukci jazykové proměnné navrhl L. A. Zadeh v [28, část II, str. 323]. Tento postup se nazývá *Booleova jazyková proměnná*[3]. Takováto jazyková proměnná se zpravidla generuje pomocí malého množství elementárních termů (např. malý, střední, velký), jazykových operátorů (např. více méně, spíše, určitě,... ) a logických spojek (ne, a, nebo).

Generování probíhá pomocí *množiny přepisovacích pravidel*, kdy se jednotlivé části (elementární prvky, jazykové operátory a logické spojky) vzájemně kombinují a vytvářejí jednotlivé termy jazykové proměnné. Celý proces lze podrobně prostudovat na příkladě v [28, část II, str. 326]. V současnosti a hlavně v praktických aplikacích se už tento postup pro konstrukci jazykové proměnné nepoužívá a proto se jím nebudeme hlouběji zabývat.

Novější přístup k tvorbě jazykové proměnné využívá tzv. *jazykové škály*. Tento přístup se liší v tom, že fuzzy čísla, která reprezentují významy jednotlivých

[3] Z anglického boolean linguistic variable.

jazykových termů, tvoří na svém definičním oboru fuzzy škálu.

**Poznámka 2.2.** *Syntaktické pravidlo $G$ můžeme v označení jazykové proměnné vynechat, pakliže je celá množina jazykových termů dána explicitně, tj.*

$$\mathcal{T}(\mathcal{V}) = \{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n\}. \tag{98}$$

*Stejně tak můžeme z označení jazykové proměnné vynechat sémantické pravidlo $M$, jestliže významy všech termů jsou explicitně dané a budeme je značit odpovídajícími tiskacími písmeny, $T_1, \ldots, T_n$, tj.*

$$\forall i,\ i = 1, ..., n : T_i = M(\mathcal{T}_i). \tag{99}$$

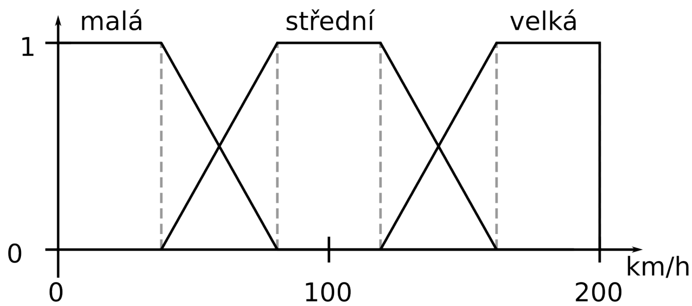
**Definice 2.3.** *Jazyková proměnná $(\mathcal{V}, \mathcal{T}(\mathcal{V}), \langle a, b\rangle)$, kde $\mathcal{T}(\mathcal{V}) = \{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n\}$, tvoří na $\langle a, b\rangle$* jazykovou škálu, *jestliže fuzzy čísla $T_1, \ldots, T_n$, pro která platí $T_1 < T_2 < \ldots < T_n$, tvoří na $\langle a, b\rangle$ fuzzy škálu.*

**Poznámka 2.3.** *Množina hodnot jazykové škály je tvořena pouze* elementárními termy, *tedy jazykovými hodnotami, jejich významy jsou definovány přímo, expertně.*

**Poznámka 2.4.** *Je vhodné poznamenat, že uspořádání fuzzy čísel $T_1, \ldots, T_n$ z předchozí definice musí odpovídat uspořádání jazykových termů $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$ v běžném jazyce.*

**Příklad 2.1.** *Jazyková proměnná* rychlost auta, *jejíž hodnoty tvoří jazykovou škálu, je tvořena množinou jazykových termů {malá, střední, velká}, definovaných na intervalu $\langle 0, 200\rangle_{km/h}$. Významy jednotlivých termů, které modelujeme pomocí fuzzy množin, jsou znázorněny na obrázku 7.*

**Poznámka 2.5.** *Zpravidla je jazyková škála dána pomocí lichého počtu jazykových termů. Nejčastěji lze narazit na škály, obsahující 3, 5 nebo 7 jazykových termů, což odpovídá situaci v přirozeném jazyce, poněvadž tolik úrovní je obvykle člověk schopen rozlišit.*




Obrázek 7: Jazyková proměnná tvořící jazykovou škálu z příkladu 2.1.

U fuzzy regulátorů se používá velmi formalizovaný jazyk, např. pro proměnnou, která představuje odchylku od požadované hodnoty, použijeme následující jazykové termy:

- Záporná Velká (ZV), Záporná Střední (ZS),
- Záporná Malá (ZM), Přibližně Nulová (PN), Kladná Malá (KM),
- Kladná Střední (KS), Kladná Velká (KV).

V aplikacích se občas stává, že množina elementárních termů zadaná explicitně je nedostačující a musíme proto použít nějakou bohatší jazykovou strukturu. My si takovéto jazykové proměnné ukážeme tři – *obohacenou jazykovou škálu*, *rozšířenou jazykovou škálu* a *jazykovou škálu s mezihodnotami.*

**Definice 2.4.** *Jazyková proměnná* $(\mathcal{V}, \mathcal{T}(\mathcal{V}), \langle a, b\rangle, M, G)$ *představuje* obohacenou jazykovou škálu *na* $\langle a, b\rangle$*, pokud se množina jazykových termů* $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ *skládá z množiny elementárních termů*

$$\mathcal{T}_0(\mathcal{V}) = \{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n\}, \ \textit{kde } M(\mathcal{T}_i) = T_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{100}$$

*která tvoří na* $\langle a, b\rangle$ *jazykovou škálu a z množiny odvozených termů*

$$\mathcal{T}(\mathcal{V})\backslash\mathcal{T}_0(\mathcal{V}) = \{\textit{určitě } \mathcal{T}_1,\ \textit{víceméně } \mathcal{T}_1, \ldots, \textit{určitě } \mathcal{T}_n,\ \textit{víceméně } \mathcal{T}_n\}, \tag{101}$$

*kde pro fuzzy čísla*

$$\left.\begin{aligned} T_i^- &= (\underline{t}_i^-, \overline{t}_i^-) = M(\textit{určitě } \mathcal{T}_i) \\ T_i^+ &= (\underline{t}_i^+, \overline{t}_i^+) = M(\textit{víceméně } \mathcal{T}_i) \end{aligned}\right\} \ i = 1, \ldots, n \tag{102}$$

*platí*

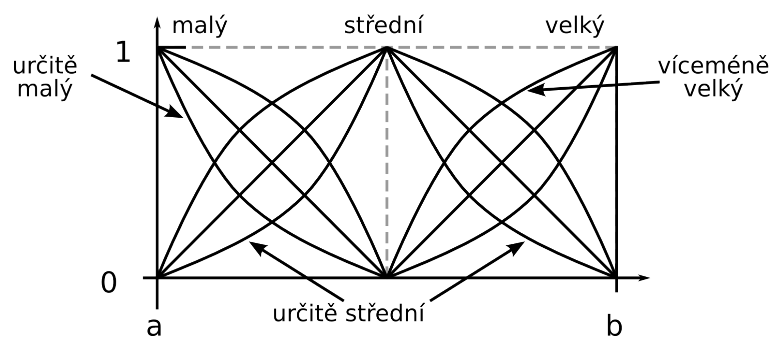
$$\forall\alpha \in \langle 0,1\rangle : \underline{t}_i^+(\alpha) \leq \underline{t}_i(\alpha) \leq \underline{t}_i^-(\alpha) \leq \overline{t}_i^-(\alpha) \leq \overline{t}_i(\alpha) \leq \overline{t}_i^+(\alpha),\ i = 1,\ldots,n \tag{103}$$

*a zároveň posloupnosti fuzzy čísel*

$$T_1^-, T_2^+, \ldots, T_n^0,\ \textit{kde } T_n^0 = \begin{cases} T_n^- & \textit{pro s liché} \\ T_n^+ & \textit{pro s sudé} \end{cases}, \tag{104}$$

$$T_1^+, T_2^-, \ldots, T_n^0,\ \textit{kde } T_n^0 = \begin{cases} T_n^+ & \textit{pro s liché} \\ T_n^- & \textit{pro s sudé} \end{cases}, \tag{105}$$

*tvoří fuzzy škálu na intervalu $\langle a, b\rangle$.*




Obrázek 8: Příklad obohacené jazykové škály.

**Poznámka 2.6.** *Jazykové operátory* určitě *a* víceméně *lze modelovat i jinak, než je uvedeno na obrázku 8, pakliže budou mít podobný význam ve smyslu zvětšení nebo zmenšení neurčitosti elementárních termů.*

**Poznámka 2.7.** *V [28] se L.A. Zadeh pokusil definovat matematické významy těchto jazykových operátorů následovně:*

*Operátor* určitě (concentration)

$$CON(A(x)) = A(x)^2,\ \forall x \in U,\ \textit{kde } A \in \mathcal{F}(U). \tag{106}$$

*Operátor* víceméně (dilation)

$$DIL(A(x)) = A(x)^{0,5},\ \forall x \in U,\ \textit{kde } A \in \mathcal{F}(U). \tag{107}$$

*Takto definované operátory ovšem nesplňují druhý z požadavků definice obohacené jazykové škály (tj. termy s na přeskáčku aplikovanými jazykovými operátory netvoří jazykovou fuzzy škálu). Dále tyto operátory zachovávají jádro a nosič fuzzy množiny. Postupem času vzniklo mnoho modifikací těchto operátorů, které jádro i nosič fuzzy množiny mění (posouvají funkci příslušnosti).*

**Poznámka 2.8.** *Jazykový operátor určitě na obrázku 8 odpovídá Zadehovu operátoru $CON(.)$, nicméně operátor víceméně je definován jiným předpisem:*

$$A^{+}(x) = 1 - (1 - A(x))^2,\ \forall x \in U,\ \textit{kde } A \in \mathcal{F}(U). \tag{108}$$

Obohacenou jazykovou škálu použijeme v případě, kdy chceme podrobněji rozlišit míru neurčitosti jazykově zadávaných hodnot (jsme schopni rozpoznat jemné rozdíly). Někdy ovšem nastává jiná situace, kdy nejsme schopni určit, kterým ze sousedních termů danou situaci vyhodnotit (např. nejsme schopni říci, jestli je rychlost malá nebo střední). V takovémto případě použijeme *rozšířenou jazykovou škálu.*

**Definice 2.5.** *Jazyková proměnná $(\mathcal{V}, \mathcal{T}(\mathcal{V}), \langle a, b\rangle, M, G)$ představuje* rozšířenou jazykovou škálu *na $\langle a, b\rangle$, pokud se množina jazykových termů $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ skládá z množiny elementárních termů*

$$\mathcal{T}_0(\mathcal{V}) = \{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n\},\ \textit{kde } M(\mathcal{T}_i) = T_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{109}$$

*která tvoří na $\langle a, b\rangle$ jazykovou škálu a z množiny odvozených termů*

$$\mathcal{T}(\mathcal{V}) \backslash \mathcal{T}_0(\mathcal{V}) = \{\mathcal{T}_1 \textit{ až } \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_{n-1} \textit{ až } \mathcal{T}_n, \mathcal{T}_1 \textit{ až } \mathcal{T}_3, \ldots, \mathcal{T}_1 \textit{ až } \mathcal{T}_n\}, \tag{110}$$

*kde pro významy odvozených termů platí*

$$M(\mathcal{T}_i \textit{ až } \mathcal{T}_j) = T_i \oplus T_{i+1} \oplus \ldots \oplus T_j,\ i = 1, \ldots n-1,\ j = 2, \ldots, n,\ i < j. \tag{111}$$

**Poznámka 2.9.** *Łukasiewiczovu disjunkci používáme v (111) proto, že pokud ji aplikujeme na dva sousední prvky fuzzy škály, výsledkem bude opět fuzzy číslo stejného typu.*

**Poznámka 2.10.** *V případě, kdy nejsme schopni vůbec říci, jaký z elementárních pojmů zvolit (například se nepovedlo měření nebo daná informace chybí), použijeme poslední odvozený term z (110), tj. $\mathcal{T}_1$ až $\mathcal{T}_n$, pro který můžeme použít synonymum* nedefinováno *nebo* neznámá hodnota*. Významem tohoto termu je fuzzy číslo, které má na celém intervalu stupeň příslušnosti roven jedné a vyjadřuje nám maximálně neurčitou fuzzy hodnotu.*

Možnost zavedení pojmu *nedefinováno* je velmi užitečná, poněvadž nám umožní se vypořádat se situacemi, kdy nějakou hodnotu neznáme a přesto s ní chceme pracovat.

Podrobněji jsou různé vlastnosti obohacených a rozšířených jazykových škál popsány v [25].

Dále může nastat situace obdobná předchozí, kdy opět nejsme schopni rozhodnout, kterým ze sousedních elementárních termů danou situaci ohodnotit, nicméně víme, že optimální by byl term, který by ležel „mezi nimi“. V takovém případě použijeme *jazykovou škálu s mezihodnotami*.

**Definice 2.6.** *Jazyková proměnná $(\mathcal{V}, \mathcal{T}(\mathcal{V}), \langle a, b\rangle, M, G)$ představuje* jazykovou škálu s mezihodnotami *na $\langle a, b\rangle$, pokud se množina jazykových termů $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ skládá z množiny elementárních termů*

$$\mathcal{T}_0(\mathcal{V}) = \{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n\},\ \textit{kde } M(\mathcal{T}_i) = T_i,\ i = 1, \ldots, n, \tag{112}$$

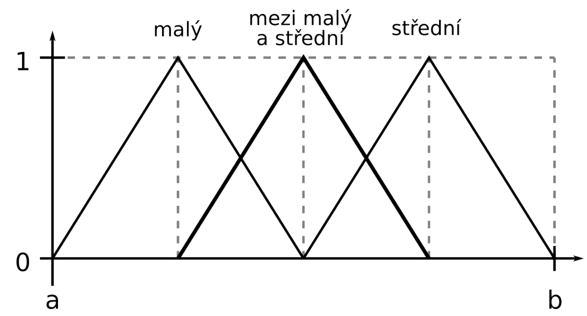
*která tvoří na $\langle a, b\rangle$ jazykovou škálu a z množiny odvozených termů*

$$\mathcal{T}(\mathcal{V})\backslash\mathcal{T}_0(\mathcal{V}) = \{\textit{mezi } \mathcal{T}_1 \textit{ a } \mathcal{T}_2, \ldots, \textit{mezi } \mathcal{T}_{n-1} \textit{ a } \mathcal{T}_n\}, \tag{113}$$

*kde pro významy odvozených termů platí*

$$M(\textit{mezi } \mathcal{T}_i \textit{ a } \mathcal{T}_{i+1}) = \frac{1}{2}(T_i + T_{i+1}),\ i = 1, \ldots, n-1. \tag{114}$$

Z obrázku 9 je zřejmé, že jazykovou škálu s mezihodnotami zavedeme v případě, kdy potřebujeme term, který leží mezi dvěma elementárními termy, nicméně nechceme toho dosáhnout na úkor větší neurčitosti.




Obrázek 9: Příklad odvozeného termu *mezi malý a střední*.

### 2.1.2 Modifikovaná definice jazykové proměnné

V této podkapitole si ukážeme jiný přístup k jazykové proměnné. Od původního se liší hlavně tím, že se více uplatňuje exaktní přístup matematické lingvistiky. Tímto přístupem k jazykové proměnné se v České republice podrobně zabývá Prof. Ing. Vilém Novák, DrSc., z jehož knih jsem nejvíce čerpal ([18, 17]).

Pro práci se sémantikou přirozeného jazyka se nejprve musíme seznámit s pojmy *intenze, extenze a možný svět*.

Pomocí *intenze* reprezentujeme určitou vlastnost jazykového pojmu nebo výrazu. Důležité je si uvědomit, že tato vlastnost se nemění v závislosti na kontextu. Například intenze jazykového pojmu „malá výška“ je vlastnost „být malý“ uspořádaných objektů. Tato vlastnost se ovšem k ničemu nevztahuje. Objekty samotné v intenzi obsaženy nejsou a mluvit o nich lze až poté, co upřesníme kontext. K tomuto účelu musíme zavést další dva pojmy.

Pod pojmem *možný svět* zjednodušeně rozumíme stav všeho kolem nás. Teprve v možném světě můžeme mluvit o jednotlivých objektech. Třídu všech objektů, které v možném světě určíme pomocí intenze nazveme extenzí (jedná se o objekty, které mají danou vlastnost). Z toho plyne, že *jedna intenze určuje třídu extenzí, a každá tato extenze určuje třídu objektů v možném světě*. Pro pojem *malá výška* může být možný svět například lidé v Olomouci a extenze tohoto pojmu jsou poté všichni obyvatelé Olomouce, kteří splňují vlastnost být malý.

Z lingvistického hlediska je potřeba pojmy intenze a extenze pečlivě rozlišovat.

Kdybychom například chtěly vyjádřit rychlost automobilu pomocí fuzzy množin (např. malá, střední, velká; viz obrázek 7), určitě by tyto fuzzy množiny vypadali jinak pro moderní automobily a jinak pro automobily z počátku dvacátého století (měníme možný svět), poněvadž tehdy automobily dosahovaly podstatně nižších rychlostí.

Předtím, než si zavedeme model jazykové proměnné, který bere v potaz intenzi a extenzi, si ovšem musíme zadefinovat několik důležitých pojmů. Tyto definice jsou převzaty z [18].

**Definice 2.7.** Množina kanonických objektů *je abstraktní množina ve tvaru*

$$M = \{t_a \,|\, a \in \langle 0, 1\rangle\}. \tag{115}$$

**Definice 2.8.** *Nechť $\mathcal{A}$ je jazykový výraz, který je jménem vlastnosti kanonických objektů. Tyto objekty budeme značit symbolem $A(x)$, kde nám proměnná $x$ určuje jednotlivé objekty.* Intenzí *jazykového výrazu $\mathcal{A}$ je fuzzy množina*

$$Int(\mathcal{A}) = \{\alpha(a)/A[t_a] \,|\, a \in \langle 0, 1\rangle\}, \tag{116}$$

*kde symbolem $\alpha(a)/A[t_a]$ vyjadřujeme, že kanonický objekt $t_a$ má vlastnost $A$ se stupněm příslušnosti $\alpha(a) \in \langle 0, 1\rangle$, přičemž $\alpha(a)$ je nějaká funkce.*

**Poznámka 2.11.** *Vybudovat všechen potřebný aparát by bylo velmi náročné, proto formuli $A(x)$ budeme zjednodušeně chápat jako formalizaci (název) vlastnosti. Symbol $A[t_a]$ budeme nazývat* instance *formule $A(x)$.*

**Definice 2.9.** *Pojmem* možný svět *rozumíme uspořádanou dvojici*

$$\mathcal{S} = (S, h), \tag{117}$$

*kde $S = \langle s_l, s_p\rangle \subseteq \mathbb{R}$, a $h$ je izomorfismus z množiny kanonických objektů $M$ do intervalu $S$ ($h : M \to S$), pro který platí:*

1. $h(t_0) = s_l$,

2. $h(t_1) = s_p$,

*3.* $h(t_a) \leq h(t_b) \Leftrightarrow a \leq b,\ a, b \in \langle 0, 1\rangle.$

**Definice 2.10.** *Nechť $\mathcal{A}$ je jazykový výraz a $\mathcal{S}$ je jeden konkrétní možný svět. Potom* extenzí *$\mathcal{A}$ v $\mathcal{S}$ je fuzzy množina*

$$Ext_{\mathcal{S}}(\mathcal{A}) = \{\beta(s)/s \mid s \in S\}, \tag{118}$$

*kde $\beta(h(t_a)) = \alpha(a)$, $a \in \langle 0, 1\rangle$.*

**Příklad 2.2.** *Na jazykovém pojmu „střední" si nyní názorně představíme všechny tři důležité pojmy.*

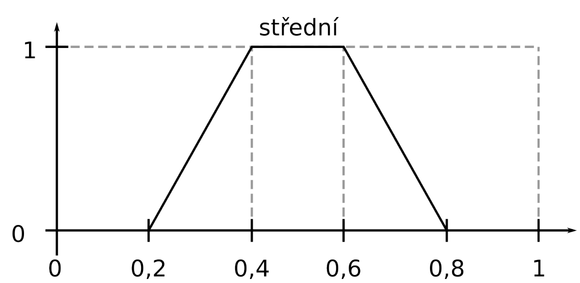
*Intenzi jazykového pojmu „střední" si vyjádříme pomocí fuzzy množiny*

$$Int(\textit{Střední}) = \{\alpha(a)/\textit{Střední}[t_a] \mid a \in \langle 0, 1\rangle\}, \tag{119}$$

*kde*

$$\alpha(a) = \begin{cases} \frac{a-0,2}{0,2} & \textit{pro } 0,2 \leq a < 0,4 \\ 1 & \textit{pro } 0,4 \leq a \leq 0,6 \\ \frac{0,8-a}{0,2} & \textit{pro } 0,6 < a \leq 0,8 \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}. \tag{120}$$

*Intenzi jazykového pojmu střední můžeme vidět na obrázku 10.*




Obrázek 10: Intenze jazykového pojmu *střední*.

*Nyní si zavedeme možný svět „rychlost auta", pro který platí:*

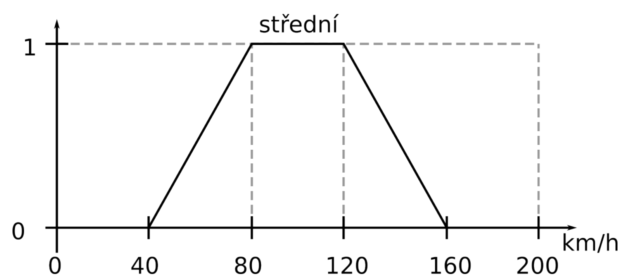
$$S = \langle 0, 200\rangle, \tag{121}$$

$$h(t_a) = (1-a)s_l + as_p. \tag{122}$$

*Nyní položme* $\beta_{Střední}(s) = \alpha_{Střední}(a)$ *pro* $s = h(t_a)$, $a \in \langle 0, 1\rangle$. *Potom extenzi výrazu „střední“ v možném světě „rychlost auta“ zapíšeme jako fuzzy množinu*

$$Ext_{rychlost\ auta}(Střední) = \begin{cases} \frac{s-0,2}{0,2} & pro\ h(t_{0,2}) = 40 \leq s < 80 = h(t_{0,4}) \\ 1 & pro\ h(t_{0,4}) = 80 \leq s \leq 120 = h(t_{0,6}) \\ \frac{0,8-s}{0,2} & pro\ h(t_{0,6}) = 120 \leq s < 160 = h(t_{0,8}) \\ 0 & jinak \end{cases}. \quad (123)$$

*Na obrázku 11 je tato konkrétní extenze znázorněna. Je vidět, že tato fuzzy množina vypadá stejně jako intenze pojmu střední (viz obrázek 10), ale je definována na jiném intervalu. Pokud bychom chtěli, aby extenze měla jiný tvar, museli bychom v definice možného světa použít jinou funkci h.*




Obrázek 11: Extenze jazykového pojmu *střední* v možném světě rychlost auta.

**Definice 2.11.** Významem *jazykového výrazu* $\mathcal{A}$ *rozumíme uspořádanou dvojici*

$$M(\mathcal{A}) = (Int(\mathcal{A}), \{Ext_{\mathcal{S}}(\mathcal{A}) \,|\, \mathcal{S}\ je\ možný\ svět\}). \quad (124)$$

**Poznámka 2.12.** *Z předchozí definice vidíme, že význam libovolného jazykového výrazu je vyjádřen pomocí jeho intenze a extenzemi ve všech možných světech.*

S pomocí těchto definic nyní zavedeme modifikovanou verzi jazykové proměnné.

**Definice 2.12.** Modifikovaná jazyková proměnná *je určena uspořádanou šesticí bodů*

$$(\mathcal{V}, \mathcal{T}(\mathcal{V}), G, M, \mathcal{P}, \mathcal{M}), \quad (125)$$

*kde $\mathcal{V}$ je název jazykové proměnné, $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ označuje množinu termů jazykové proměnné $\mathcal{V}$, $G$ je* syntaktické pravidlo *(gramatika), pomocí kterého definujeme jazykové termy z $\mathcal{T}(\mathcal{V})$, $M$ je množina* kanonických objektů*, $\mathcal{P}$ je třída všech možných světů, tj.*

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{S} \mid \mathcal{S} \text{ je možný svět}\} \tag{126}$$

*a $\mathcal{M}$ je* sémantické pravidlo*, které každému jazykové výrazu přiřazuje jeho význam.*

**Poznámka 2.13.** *Podrobněji je tato modifikovaná verze jazykové proměnné popsána v knize [17], kde se podstatně více zabývají formalizovaným popisem přirozeného jazyka.*

Je zřejmé, že modifikovaná definice jazykové proměnné popisuje přirozený jazyk formálně lépe, než původní definice. Na druhou stranu se ukazuje, že v aplikacích (například fuzzy regulátory), si vystačíme s jednodušší definicí, kdy významy hodnot chápeme jen v kontextu jednoho možného světa, určeného řešeným problémem. Proto v dalším textu budeme pracovat s původní jazykovou proměnnou.

## 2.2 Jazyková aproximace

V předchozí kapitole jsme si ukázali, jak jazykovým termům přiřadit význam v podobě fuzzy čísel. Občas je ovšem potřeba řešit opačnou situaci, kdy fuzzy číslu (případně obecnější fuzzy množině na $\mathbb{R}$) chceme přiřadit jazykovou hodnotu nějaké jazykové proměnné. Tomuto se říká *jazyková aproximace*. Pro fuzzy čísla se velmi často používá metoda založená na metrice fuzzy čísel.

**Definice 2.13.** *Nechť $A \in \mathcal{F}_N(\langle a, b\rangle)$ a nechť $(\mathcal{V}, \mathcal{T}(\mathcal{V}), \langle a, b\rangle)$ je jazyková proměnná, pro kterou platí $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n\}$, kde $\mathcal{M}(\mathcal{T})_i = T_i$ pro $i = 1, \ldots, n$ jsou fuzzy čísla na $\langle a, b\rangle$.* Jazykovou aproximací fuzzy čísla $A$, založenou na metrice fuzzy čísel*, pomocí jazykové proměnné $\mathcal{V}$ rozumíme jazykový term $\mathcal{T}_{i_0}$, $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ jazykové proměnné $\mathcal{V}$, pro jehož význam platí*

$$d(A, T_{i_0}) = \min_{i=1,\ldots,n} d(A, T_i). \tag{127}$$

V některých případech (viz Mamdaniho inferenční algoritmus, kapitola 2.4.1) ovšem potřebujeme jazykově aproximovat *fuzzy množinu* na nějakém konečném reálném intervalu. V takovémto případě nemůžeme použít jazykovou aproximaci založenou na metrice fuzzy čísel. V této situaci můžeme jazykovou aproximaci zavést například pomocí podobnosti fuzzy množin.

**Definice 2.14.** *Nechť* $A, B \in \mathcal{F}(\langle a, b\rangle)$ *s borelovsky měřitelnou funkcí příslušnosti. Potom* podobnost fuzzy množin $A$ *a* $B$ *(značíme* $P(A, B)$*) je definována takto*

$$P(A, B) = 1 - \frac{\int_a^b |A(x) - B(x)| dx}{\int_a^b (A(x) + B(x)) dx}. \tag{128}$$

**Definice 2.15.** *Nechť* $A \in \mathcal{F}(\langle a, b\rangle)$ *s borelovsky měřitelnou funkcí příslušnosti a nechť* $(\mathcal{V}, \mathcal{T}(\mathcal{V}), \langle a, b\rangle)$ *je jazyková proměnná, pro kterou platí* $\mathcal{T} = \{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n\}$, *kde* $\mathcal{M}(\mathcal{T})_i = T_i$ *pro* $i = 1, \ldots, n$ *jsou fuzzy čísla na* $\langle a, b\rangle$. Jazykovou aproximací fuzzy množiny $A$ založenou na podobnosti fuzzy množin, *pomocí jazykové proměnné* $\mathcal{V}$ *rozumíme jazykový term* $\mathcal{T}_{i_0}$, $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ *jazykové proměnné* $\mathcal{V}$, *pro jehož význam platí*

$$P(A, T_{i_0}) = \max_{i=1,\ldots,n} P(A, T_i). \tag{129}$$

Analogicky lze jazykovou aproximaci nadefinovat i s pomocí *stupně podobnosti fuzzy množin* a *stupně inkluze fuzzy množin* (viz [22]):

**Definice 2.16.** *Nechť* $A \in \mathcal{F}(\langle a, b\rangle)$. *Relativní kardinalita fuzzy množiny* $A$ *(značíme* $Card(A)$*) je dána vzorcem*

$$Card(A) = \frac{\int_a^b A(x) dx}{b - a}. \tag{130}$$

**Definice 2.17.** *Nechť* $A, B \in \mathcal{F}(\langle a, b\rangle)$. *Potom* stupeň podobnosti fuzzy množin $A$ *a* $B$ *(značíme* $S(A, B)$*) je definován následujícím předpisem*

$$S(A, B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A \cup B)}. \tag{131}$$

**Definice 2.18.** *Nechť* $A, B \in \mathcal{F}(\langle a, b\rangle)$. *Potom* stupeň inkluze fuzzy množin $A$ *a* $B$ *(značíme* $I(A,B)$*) je definován takto*

$$I(A,B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(B)}. \tag{132}$$

## 2.3 Báze fuzzy pravidel

Ukázali jsme si, že fuzzy množiny jsou vhodným nástrojem pro popis vágnosti pojmů přirozeného jazyka. Nyní si ukážeme, jak s jejich pomocí lze snadno vyjádřit vztah mezi proměnnými.

Pokud pracujeme se systémem, který jsme schopni podrobně zanalyzovat, můžeme jej pak popsat pomocí klasických, ostrých matematických funkcí. V praxi ovšem velmi často narážíme na systémy, které jsou natolik složité, že je neumíme plně analyzovat a nejsme tedy schopni je popsat pomocí klasické matematicky (často to ani není možné). Z tohoto důvodu se nyní budeme zabývat *bází fuzzy pravidel*, která využívá fuzzy množin pro zápis hrubé expertní znalosti o vztazích mezi reálnými proměnnými a lze na ni nahlížet jako na funkci zadanou tabulkou.

**Definice 2.19.** *Nechť* $(\mathcal{X}_j, \mathcal{T}(\mathcal{X}_j), U_j, G_j, M_j)$, $j = 1, \dots m$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{T}(\mathcal{Y}), V, G, M)$, *jsou jazykové proměnné, pro které platí* $\mathcal{A}_{i,j} \in \mathcal{T}(\mathcal{X}_j)$, $M_j(\mathcal{A}_{i,j}) = A_{i,j} \in \mathcal{F}(U_j)$, $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$, $\mathcal{B}_i \in \mathcal{T}(\mathcal{Y})$, $M(\mathcal{B}_i) = B_i \in \mathcal{F}(V)$, $i = 1, \dots, n$.

*Potom* bázi fuzzy pravidel (jazykově definovanou funkci)*, která popisuje závislost* $\mathcal{Y}$ *na* $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$ *značíme* $\mathcal{R}$ *a zapisujeme takto:*

$$\begin{array}{llllllll}
\textit{Pravidlo 1:} & \textit{Jestliže } \mathcal{X}_1 \textit{ je } \mathcal{A}_{1,1} & a & \dots & a & \mathcal{X}_m \textit{ je } \mathcal{A}_{1,m} & \textit{pak} & \mathcal{Y} \textit{ je } \mathcal{B}_1, \\
\textit{Pravidlo 2:} & \textit{Jestliže } \mathcal{X}_1 \textit{ je } \mathcal{A}_{2,1} & a & \dots & a & \mathcal{X}_m \textit{ je } \mathcal{A}_{2,m} & \textit{pak} & \mathcal{Y} \textit{ je } \mathcal{B}_2, \\
\multicolumn{8}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\
\textit{Pravidlo n:} & \textit{Jestliže } \mathcal{X}_1 \textit{ je } \mathcal{A}_{n,1} & a & \dots & a & \mathcal{X}_m \textit{ je } \mathcal{A}_{n,m} & \textit{pak} & \mathcal{Y} \textit{ je } \mathcal{B}_n.
\end{array}$$

**Poznámka 2.14.** *Jazykové proměnné* $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$ *z předchozí definice budeme nazývat* nezávislé *jazykové proměnné a jazykovou proměnnou* $\mathcal{Y}$ *budeme nazývat* závislá *jazyková proměnná.*

**Poznámka 2.15.** *Při definici báze fuzzy pravidel je možné jednotlivým pravidlům přiřadit jejich váhy $v_i$, kde $v_i \in \langle 0, 1 \rangle$, $i = 1, \ldots, n$. V takovém případě mluvíme o* bázi vážených fuzzy pravidel.

Existují dvě odlišné metody, jak bázi fuzzy pravidel sestrojit:

První z nich je *expertně* sestrojená báze fuzzy pravidel. V tomto případě je potřeba znalostí nějakého experta (odborníka na danou problematiku), s jehož pomocí nejprve definujeme příslušné bazické reálné proměnné (viz definice 2.2) a k nim sestrojíme odpovídající jazykové proměnné. Následně je na expertovi, aby nalezl všechny přípustné kombinace termů nezávislých proměnných $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m$ a jim poté přiřadil jeden term závislé proměnné $\mathcal{Y}$. Je zřejmé, že úspěch této metody značně závisí na daném odborníkovi. Ten musí být schopen předat svou znalost o daném procesu, což je často velmi náročné. Obecně hovoříme o *jazykově orientovaném fuzzy expertním systému.*

Druhou možností je bázi fuzzy pravidel *odvodit z dat.* V takovém případě dostaneme popis systému daný takzvanou cvičnou množinou, z které se postupně odvozuje báze fuzzy pravidel. Nejčastěji se jedná o neuronové sítě (viz [1, 4, 15]), shlukovou analýzu a genetické algoritmy. Toto ovšem není předmětem této diplomové práce a proto se těmito metodami nebudeme zabývat.

„Dosazování" hodnoty do funkce jazykově definované bází pravidel vysvětlíme analogií s pravidlem *modus ponens*, které je využíváno v klasické logice. Lze jej zapsat výrazem:

$$(a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b, \tag{133}$$

kde $a, b \in \{0, 1\}$. Slovně řečeno: „Pokud platí tvrzení $a$ a zároveň víme, že $a$ implikuje $b$, potom platí tvrzení $b$".

Práce s bází fuzzy pravidel je obdobná. Nejprve provedeme pozorování jazykových termů nezávislých jazykových proměnných $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_m$, přičemž předpokládáme, že se stejná $m$-tice termů nachází v bázi pravidel, například představuje levou stranu pravidla $i_0$, kde $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$, tj.

$$\text{Pozorování:} \quad \mathcal{X}_1 \text{ je } \mathcal{A}_{i_0,1} \quad \text{a} \quad \ldots \quad \text{a} \quad \mathcal{X}_m \text{ je } \mathcal{A}_{i_0,m}.$$

Následně se podíváme do báze pravidel $\mathcal{R}$ kde najdeme pravidlo, které má na vstupu naše pozorování a určí nám jazykový term závislé jazykové proměnné $\mathcal{Y}$, tj. $\mathcal{B}_{i_0}$. Pozorování budeme v dalším textu značit symbolem $\mathcal{P}$.

Někdy jsme ale v situaci, kdy pozorování neodpovídá přesně levé straně žádného pravidla, přestože spadá do oblasti vstupů touto bází pravidel popsaných. Pozorování mohou být popsána například $m$-ticí reálných čísel (naměřené hodnoty), $m$-ticí fuzzy čísel (výsledky nepřesného měření), ale i $m$-ticí jazykových termů, z nichž alespoň jeden term je odvozený. Způsobem, jakým v takovémto případě určit hodnotu jazykového termu závislé jazykové proměnné $\mathcal{Y}$, se budeme zabývat v následující kapitole.

**Poznámka 2.16.** *V dalším textu budeme předpokládat, že* nezávislé *jazykové proměnné použité v bázi fuzzy pravidel tvoří jazykovou škálu, případně nějakou jazykovou strukturu odvozenou z jazykové škály.*

## 2.4 Přibližná dedukce

V této části si ukážeme, jak na základě báze pravidel stanovit jazykový term závislé jazykové proměnné $\mathcal{Y}$, pokud pozorování $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$ budou zadána pomocí jazykových termů (které mohou obsahovat i odvozené termy a nemusejí se tedy přesně překrývat s žádnou z levých stran pravidel). Tuto situaci lze zapsat následovně:

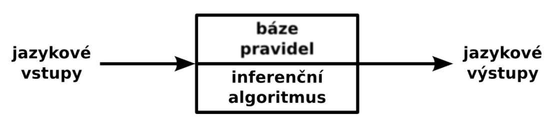
$$
\begin{array}{llllllll}
\text{Pravidlo 1:} & \text{Jestliže } \mathcal{X}_1 \text{ je } \mathcal{A}_{1,1} & \text{a} & \dots & \text{a} & \mathcal{X}_m \text{ je } \mathcal{A}_{1,m} & \text{pak} & \mathcal{Y} \text{ je } \mathcal{B}_1, \\
\text{Pravidlo 2:} & \text{Jestliže } \mathcal{X}_1 \text{ je } \mathcal{A}_{2,1} & \text{a} & \dots & \text{a} & \mathcal{X}_m \text{ je } \mathcal{A}_{2,m} & \text{pak} & \mathcal{Y} \text{ je } \mathcal{B}_2, \\
\multicolumn{8}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,} \\
\text{Pravidlo n:} & \text{Jestliže } \mathcal{X}_1 \text{ je } \mathcal{A}_{n,1} & \text{a} & \dots & \text{a} & \mathcal{X}_m \text{ je } \mathcal{A}_{n,m} & \text{pak} & \mathcal{Y} \text{ je } \mathcal{B}_n. \\
\text{Pozorování:} & \mathcal{X}_1 \text{ je } \mathcal{A}'_1 \quad \text{a} \quad \dots \quad \text{a} \quad \mathcal{X}_m \text{ je } \mathcal{A}'_m, \\
\hline
\text{Závěr:} & \mathcal{Y} \text{ je } \mathcal{B}', \mathcal{B}' = ?.
\end{array}
$$

Naším úkolem je nalezení fuzzy množiny $B'$, která je významem jazykového termu $\mathcal{B}' \in \mathcal{T}(\mathcal{Y})$. Tento proces se nazývá *přibližná dedukce* a pro jeho výpočet se používá *fuzzy inferenčních algoritmů*. Způsoby, jakými fuzzy množině $B'$ můžeme přiřadit jazykový term $\mathcal{B}'$ se zabýváme v kapitole 2.2.

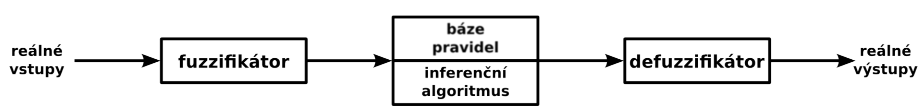
**Poznámka 2.17.** *Pozorování jsou v praktických aplikacích velmi často místo m-tic jazykových termů reprezentována pomocí m-tic fuzzy čísel nebo reálných čísel. Protože ovšem umíme pomocí jazykových termů vyjádřit fuzzy čísla (např. asi tři) i reálná čísla (např. tři), budeme každé pozorování zapisovat jako m-tici jazykových termů.*

Přibližná dedukce se zpočátku používala převážně ve fuzzy regulátorech (viz obrázek 13), které mají za cíl, aby se řízený systém dostal do požadovaného stavu. Fuzzy regulátor se skládá ze tří částí: *fuzzifikátoru*, *fuzzy expertního systému* (viz obrázek 12) a *defuzzifikátoru*. Vstupy i výstupy fuzzy regulátoru jsou reálná čísla.

V literatuře (např. [25, 7],) se přibližná dedukce začala používat i v oblasti vícekriteriálního hodnocení, které si klade za cíl ohodnotit danou variantu vzhledem k daným kritériím. V tomto případě se jedná o jazykově orientovaný fuzzy expertní systém, proto jsou vstupy i výstupy jazykové termy.




Obrázek 12: Schéme jazykově orientovaného fuzzy expertního systému.




Obrázek 13: Schéme fuzzy regulátoru.

Nyní si představíme několik fuzzy inferenčních algoritmů, které se pro přibližnou dedukci používají. Jak již bylo řečeno v předchozí kapitole, hledání hodnoty závislé jazykové proměnné se provádí pomocí fuzzy množin. Proto si všechny inferenční algoritmy zavedeme pro fuzzy množiny.

Významy jazykových termů $\mathcal{A}_{i,1}, \ldots, \mathcal{A}_{i,m}, \mathcal{B}_i\,, i = 1, \ldots, n$ báze pravidel $\mathcal{R}$ budeme modelovat pomocí fuzzy čísel $A_{i,1}, \ldots, A_{i,m}, B_i\,, i = 1, \ldots, n$. Významy jazykových termů $\mathcal{A}'_1, \ldots, \mathcal{A}'_m$ pozorování $\mathcal{P}$ bude modelovat fuzzy čísly $A'_1, \ldots, A'_m$. V případě, že je naše pozorování tvořeno $m$-ticí reálných čísel, budeme je značit symboly $a_1, \ldots, a_m$.

### 2.4.1 Mamdaniho inferenční algoritmus

Mamdaniho inferenční algoritmus, někdy též uváděn jako Mamdaniho-Assilianův inferenční algoritmus, patří k nejznámějším a nejpoužívanějším inferenčním algoritmům vůbec. Poprvé byl představen v roce 1974 v [12].

Tento algoritmus je hojně používaný jak ve fuzzy regulátorech (v tomto případě jsou pozorování zpravidla modelována pomocí $m$-tic reálných čísel), tak pro potřeby vícekriteriálního hodnocení (potom jsou pozorování modelována $m$-ticí fuzzy čísel).

Algoritmus výpočtu lze popsat ve třech krocích:

1. Vypočítáme stupeň zasažení $h_i$ $i$-tého pravidla pro $i = 1, \ldots, n$:

$$h_i = \min\{hgt(A'_1 \cap A_{i,1}), \ldots, hgt(A'_m \cap A_{i,m})\}; \tag{134}$$

   pro reálné vstupy lze takto definované $h_i$ vyjádřit také vztahem:

$$h_i = (A_{i,1} \times \ldots \times A_{i,m})(a_1, \ldots, a_m), \tag{135}$$

   přičemž kartézský součin je zde, stejně jako u dalších inferenčních algoritmů, nejčastěji definován pomocí operace minima.

2. Pro jednotlivá pravidla vypočítáme jejich fuzzy výstupní hodnoty $B_i^M$:

$$\forall y \in V: \; B_i^M(y) = \min\{h_i, B_i(y)\}. \tag{136}$$

3. Výsledek Mamdaniho inferenčního algoritmu je fuzzy množina $B^M$ (symbol $M$ nám značí, že jde o Mamdaniho inferenční algoritmus), kterou získáme sjednocením všech fuzzy výstupních hodnot:

$$B^M = \bigcup_{i=1}^{n} B_i^M. \tag{137}$$

Velkou nevýhodou tohoto přístupu je, že výsledkem je *fuzzy množina*, která často není fuzzy číslem. V případě fuzzy regulátorů je potřeba, aby výstup byl reálné číslo, proto musíme výslednou fuzzy množinu defuzzifikovat (nejčastěji metodou těžiště). Naopak v případě, že výstupem má být jazykový term, například u metod vícekriteriálního hodnocení, musíme použít jazykovou aproximaci definovanou na základě podobnosti fuzzy množin (jazykovou aproximaci na základě metriky nelze použít, poněvadž výstup inferenčního algoritmu nemusí být fuzzy číslo), přičemž je vhodné, aby závislá jazyková proměnná tvořila rozšířenou jazykovou škálu (vzhledem k tomu jak je inferenční mechanismus definován, může mít výsledná fuzzy množina široký nosič, což lze nejlépe popsat významy termů z rozšířené jazykové škály).

**Poznámka 2.18.** *Je vhodné zmínit, že někteří autoři u tohoto inferenčního mechanismu přistupují k bázi fuzzy pravidel odlišně. Například v [13, str. 1184] je vidět báze pravidel, která má dvě nezávislé jazykové proměnné. Ovšem jednotlivá pravidla jsou ve tvaru:*

$$\textit{Pravidlo i:}\quad \textit{Jestliže } \mathcal{X}_1 \textit{ je } \mathcal{A}_{i,1} \quad \text{pak jestliže} \quad \mathcal{X}_2 \textit{ je } \mathcal{A}_{i,2} \quad \textit{pak} \quad \mathcal{Y} \textit{ je } \mathcal{B}_i,$$

*přičemž použití dvou implikaci místo jedné autor označuje za přehlednější.*

### 2.4.2 Larsenův inferenční algoritmus

Tento algoritmus vychází z Mamdaniho inferenčního algoritmu a poprvé byl představen v roce 1980 v článku [11]. Analogicky jako u Mamdaniho inferenčního algoritmu jej lze využít jak pro potřeby fuzzy regulátorů, tak pro vícekriteriální hodnocení.

Algoritmus výpočtu lze opět popsat ve třech krocích:

1. Vypočítáme stupeň zasažení $h_i$ $i$-tého pravidla pro $i = 1, \dots, n$:

$$h_i = \min\{hgt(A'_1 \cap A_{i,1}), \dots, hgt(A'_m \cap A_{i,m})\}, \tag{138}$$

   pro reálné vstupy lze takto definované $h_i$ vyjádřit také vztahem:

$$h_i = (A_{i,1} \times \dots \times A_{i,m})(a_1, \dots, a_m). \tag{139}$$

2. Pro jednotlivá pravidla vypočítáme jejich fuzzy výstupní hodnoty $B_i^L$:

$$\forall y \in V: \; B_i^L(y) = h_i B_i(y). \tag{140}$$

3. Výsledek Larsenova inferenčního algoritmu $B^L$ dostaneme sjednocením všech fuzzy výstupních hodnot:

$$B^L = \bigcup_{i=1}^{n} B_i^L. \tag{141}$$

Výsledkem je opět fuzzy množina, která nemusí být fuzzy číslem. Jazyková aproximace se provádí stejně, jako u Mamdaniho inferenčního algoritmu.

### 2.4.3 Sugenův inferenční algoritmus

Sugenův inferenční algoritmus je dalším známým a hojně používaným algoritmem. Poprvé byl představen v roce 1985 v článku [23]. Na rozdíl od předchozích inferenčních algoritmů, u tohoto je potřeba zavést jinou bázi pravidel, kde na levé straně jsou fuzzy čísla a na pravé straně jsou čísla reálná. Navíc pozorování je reprezentováno $m$-ticí reálných čísel. Toto lze zapsat následujícím schématem:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{Pravidlo 1:} & \text{Jestliže } x_1 \text{ je } A_{1,1} & \text{a} & \dots & \text{a} & x_m \text{ je } A_{1,m} & \text{pak} & y = b_1, \\
\text{Pravidlo 2:} & \text{Jestliže } x_2 \text{ je } A_{2,1} & \text{a} & \dots & \text{a} & x_m \text{ je } A_{2,m} & \text{pak} & y = b_2, \\
\multicolumn{8}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\
\text{Pravidlo n:} & \text{Jestliže } x_n \text{ je } A_{n,1} & \text{a} & \dots & \text{a} & x_m \text{ je } A_{n,m} & \text{pak} & y = b_n, \\
\text{Pozorování:} & x_1 = a_1 \quad \text{a} \quad \dots \quad \text{a} \quad x_m = a_m, \\
\hline
\text{Závěr:} & y = b, \; b = ?.
\end{array}$$

Tento inferenční algoritmus byl původně navržen pro fuzzy regulátory, ve kterých se hojně využívá.

Výsledkem Sugenova inferenčního algoritmu je reálné číslo $b = b^S$, které vypočítáme pomocí vzorce:

$$b^S = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \tag{142}$$

kde $h_i = (A_{i,1} \times \ldots \times A_{i,m})(a_1, \ldots, a_m)$, $i = 1, \ldots, n$.

Protože výstupem tohoto algoritmu je reálné číslo, odpadá nám starost s defuzzifikací výstupu.

Postupem času se objevilo velké množství modifikací Sugenova inferenčního algoritmu, které řeší některé jeho nedostatky.

### 2.4.4 Takagi-Sugenův inferenční algoritmus

Takagi-Sugenův inferenční algoritmus vznikl v roce 1985 (viz [24]) a vychází ze Sugenova inferenčního algoritmu. Na rozdíl od předchozího algoritmu je pravá strana báze pravidel reprezentována pomocí lineárních funkcí $f_i(x_1, \ldots, x_m)$, $i = 1, \ldots, n$, které nazýváme *regulační funkce*. Tento inferenční algoritmus se vzhledem ke svým vlastnostem opět používá ve fuzzy regulátorech.

Výsledkem Takagi-Sugenova inferenčního algoritmu je reálné číslo $b^{TS}$, které vypočítáme pomocí vzorce:

$$b^{TS} = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i f_i(a_1, \ldots, a_m)}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \tag{143}$$

kde $h_i = (A_{i,1} \times \ldots \times A_{i,m})(a_1, \ldots, a_m)$, $i = 1, \ldots, n$.

Základní myšlenka algoritmu je taková, že $n$ lineárních funkcí, které nám aproximují chování regulátoru pro jednotlivé oblasti vstupního prostoru (levé částí pravidel báze), transformujeme pomocí váženého průměru do jedné spojité funkce.

Tento algoritmus lze zobecnit tím, že budeme uvažovat polynomiální funkce $f_i$. Takovýto inferenční algoritmus pak nazveme Takagi-Sugeno-Kang (TKS) (viz [10]).

### 2.4.5 Sugeno-Yasukawův inferenční algoritmus

Tento algoritmus byl prvně publikován v roce 1993 v [22]. Jedná se o úpravu původního Sugenova algoritmu, který ovšem používá stejnou bázi pravidel jako v případě Mamdaniho inferenčního algoritmu. Jednotlivá pozorování jsou opět reprezentována pomocí $m$-tic reálných čísel $a_1, \ldots, a_m$. Algoritmus se opět používá převážně v oblasti fuzzy regulátorů.

Výsledkem tohoto inferenčního algoritmu je reálné číslo $b^{SY}$, které vypočítáme pomocí vzorce:

$$b^{SY} = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \tag{144}$$

kde $h_i = (A_{i,1} \times \ldots \times A_{i,m})(a_1, \ldots, a_m)$, $i = 1, \ldots, n$ a $b_i$ je reálné číslo, které získáme defuzzifikací fuzzy čísla $B_i$ metodou těžiště, tj.

$$b_i = \frac{\int_V B_i(x) x \, dx}{\int_V B_i(x) \, dx}, \; i = 1, \ldots, n. \tag{145}$$

Jazyková aproximace čísla $b^{SY}$ se provádí pomocí stupně podobnosti případně stupně inkluze, přičemž je na řešiteli aby rozhodl, která z metod je v danou chvíli vhodnější. Postup je podrobně popsán v [22, str. 19]

Algoritmus lze obměnit volbou jiného defuzzifikačního přístupu.

### 2.4.6 Inferenční algoritmus Sugeno-WA

Tento algoritmus je též znám pod názvem *zobecněný Sugenův inferenční algoritmus* a podrobně je vysvětlen v [25]. Zkratka WA (Weighted Average) značí operátor *váženého průměru*, což charakterizuje způsob výpočtu celkového fuzzy výstupu z fuzzy výstupů jednotlivých pravidel; váhy jsou míry zasažení pravidel. I tento algoritmus používá stejnou bázi pravidel jako v případě Mamdaniho inferenčního algoritmu.

Na rozdíl od předchozích verzí Sugenova inferenčního algoritmu, jsou zde významy jazykových termů $\mathcal{B}_i$, $i = 1, \ldots, n$ modelovány pomocí fuzzy čísel. Při výpočtu se používá *vážený průměr fuzzy čísel*. Tento inferenční algoritmus se používá převážně pro potřeby vícekriteriálního hodnocení.

Výsledkem Sugeno-WA inferenčního algoritmu je fuzzy číslo $B^{WA}$, které vypočítáme pomocí vzorce:

$$B^{WA} = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i B_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i}, \tag{146}$$

kde $h_i = \min\{hgt(A'_1 \cap A_{i,1}), \dots, hgt(A'_m \cap A_{i,m})\}\ i = 1, \dots, n$.

Nyní si tento zápis přepíšeme do jiného tvaru (viz [6]), který později využijeme u algoritmu Sugeno-WOWA. Jestliže $(\mathcal{Y}, \mathcal{T}(\mathcal{Y}), V, G, M)$ tvoří jazykovou fuzzy škálu, pak lze výsledek Sugeno-WA algoritmu zapsat jako vážený průměr fuzzy čísel, které nám modelují významy jednotlivých termů této škály. Tyto fuzzy čísla budeme značit $E_1, \dots, E_k$ a budeme předpokládat, že $E_i > E_{i+1}$, $i = 1, \dots, k-1$.

Zavedeme si indexové množiny $C_1, \dots, C_k$ takové, že

$$C_i = \{j \mid B_j = E_i,\ j = 1, \dots, n\},\ i = 1, \dots, k. \tag{147}$$

Váhy $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{R}$, které odpovídají jednotlivým jazykovým termům jazykové fuzzy škály $\mathcal{Y}$, určíme vzorcem $w_i = \sum_{j \in C_i} h_j$, kde opět $h_j = \min\{hgt(A'_1 \cap A_{j,1}), \dots, hgt(A'_m \cap A_{j,m})\}$, $j = 1, \dots, n$.

Tyto váhy si navíc znormujeme

$$v_i = \frac{w_i}{\sum_j^k w_j}. \tag{148}$$

Výsledkem Sugeno-WA inferenčního algoritmu můžeme nyní zapsat vzorcem

$$B^{WA} = \sum_{i=1}^{k} v_i E_i. \tag{149}$$

Navíc platí, že pokud všechny fuzzy čísla $E_i$ budou lineární (resp. kvadratické), bude i výstupem tohoto inferenčního algoritmu lineární (kvadratická) fuzzy čísla (důkaz viz [25]).

Jazykovou aproximaci se provádí na základě metriky, přičemž je vhodné, aby závislá jazyková proměnná tvořila fuzzy škálu s mezihodnotami (výsledek je vážený průměr fuzzy čísel, takže zpravidla padne mezi původní fuzzy čísla).

### 2.4.7 Inferenční algoritmus Sugeno-WOWA

Tento inferenční algoritmus vychází z algoritmu Sugeno-WA, ale místo operátoru WA používá operátor WOWA (Weighted Ordered Weighted Average), což je *vážený uspořádaný vážený průměr*, který je podrobněji popsán např. v [21]. Požadavky na modelování významů jazykových termů jsou stejné, jako u Sugeno-WA, ale zde navíc přidáváme normované váhy $p_i$, které nám určují váhy jednotlivých prvků škály závislé proměnné. Při výpočtu se opět používá *vážený průměr fuzzy čísel*.

Výsledkem Sugeno-WOWA inferenčního algoritmu je fuzzy číslo $B^{WOWA}$, které vypočítáme pomocí vzorce:

$$B^{WOWA} = \sum_{i=1}^{k} v_i' E_i, \tag{150}$$

kde váhy $v_i'$ definujeme vzorcem

$$v_i' = f(\sum_{j \leq i} v_j) - f(\sum_{j<i} v_j), \tag{151}$$

přičemž $v_j$ jsou stejné váhy jako u Sugeno-WA, viz (148) a funkce $f$ je po částech lineární funkce určená body $\{(0,0)\} \cup \{(\frac{i}{k}, \sum_{j \leq i} p_j)\}_{i=1,\dots,k}$.

Sogeno-WOWA se používá zejména při vícekriteriálním hodnocení, kdy přiřazení větší váhy nepříznivým nebo příznivým hodnocením může být dobrým odrazem preferenčního systému hodnotitele. Například když budeme mít averzi k riziku a budeme se rozhodovat, zda investujeme peníze do nového výrobku, dáme nepříznivým prvků škály závislé proměnné větší váhu. Tímto bude na pravidla s nežádoucím výsledkem kladen větší důraz a sníží se riziko, že o naši investici přijdeme.

# 3 Software pro práci s bází fuzzy pravidel

V této kapitole si ukážeme dva různé programy, pomocí kterých lze počítačově zpracovávat bázi fuzzy pravidel. První z nich, který se jmenuje FuzzME, je určen převážně pro podporu vícekriteriálního rozhodování. Naopak pro potřeby fuzzy regulátoru se používá Fuzzy Logic Toolbox pro Matlab. Nyní si popíšeme práci s těmito programy.

## 3.1 FuzzME

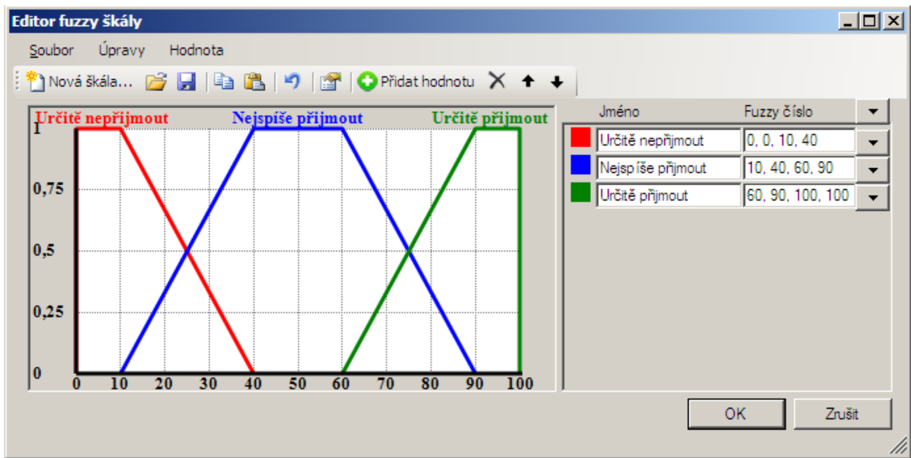
FuzzME je poměrně nový program na podporu vícekriteriálního rozhodování, který je vyvíjen na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci. Pětidenní demoverzi lze stáhnout z oficiálních stránek programu `http://fuzzme.wz.cz/`, kde se rovněž nachází podrobný manuál [5]. Další informace lze nalézt například ve článcích [6, 7].

Program je velmi přehledně strukturován do jednoho okna a jednotlivé volby jsou velmi dobře rozmístěny, proto je snadné ho ovládat. Po spuštění je nejprve nutné sestavit strom cílů nebo kritérií. Ty tvoří stromovou strukturu a jsou dvojího typu – *agregační uzly* a *kritéria*. Pro potřeby této diplomové práce jsou důležité dva druhy agregačních uzlů:

- *Fuzzy vážený průměr*, který budeme používat pro potřeby váženého průměru fuzzy čísel (viz kapitola 4.2.3).
- *Fuzzy expertní systém*, pomocí kterého lze pracovat s bází pravidel.

Ostatními agregačními uzly, tj. Fuzzy OWA, Fuzzifikovaná WOWA a Fuzzifikovaný Choquetův integrál, se v této práci zabývat nebudeme.

U kritérií musíme rozlišit, zda jsou *kvalitativní* nebo *kvantitativní*. Poté je každému uzlu potřeba přiřadit fuzzy škálu, k čemuž slouží *editor fuzzy škály* (viz obrázek 14). V něm lze fuzzy škálu buď přímo generovat, přičemž volíme počet fuzzy čísel, typ fuzzy čísel a interval, na kterém jsou generovaná (taková škála bude rovnoměrná). Pokud potřebujeme nerovnoměrnou fuzzy škálu, musíme jednotlivá fuzzy čísla zapsat manuálně pomocí význačných hodnot fuzzy čísel. Program standardně používá *rozšířenou fuzzy škálu*, nicméně je možné zvolit fuzzy škálu, případně fuzzy škálu s mezihodnotami. Hodnoty jednotlivým kritériím za-

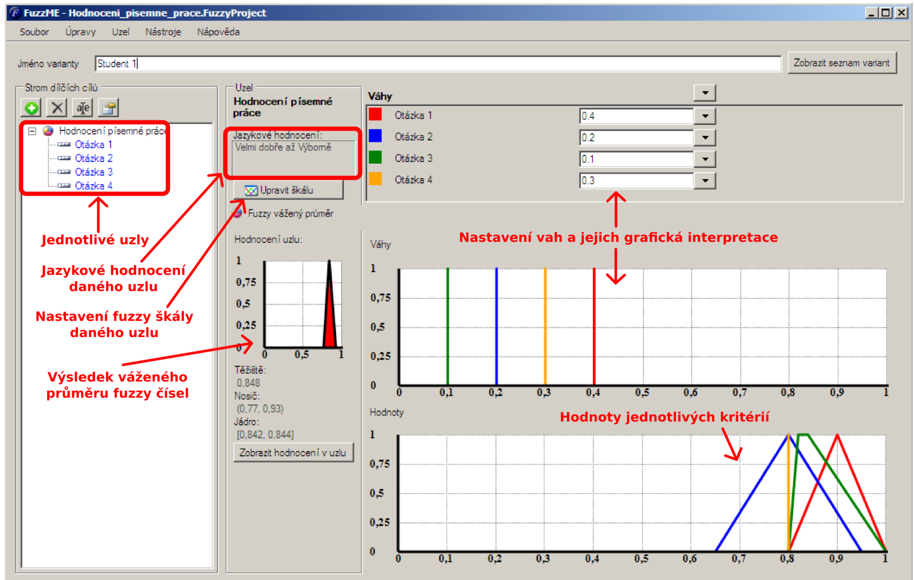



Obrázek 14: Editor fuzzy škály programu FuzzME.

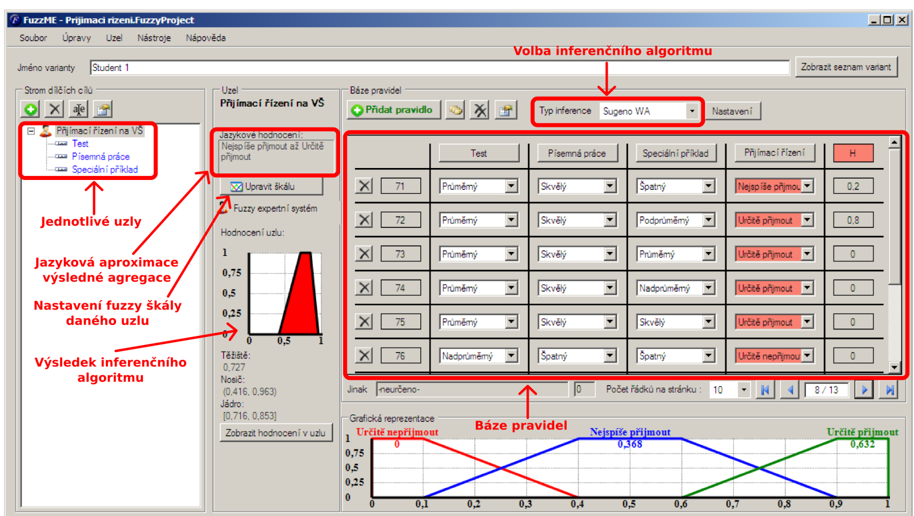
dáváme do pole *hodnota kritéria*, přičemž přípustná jsou jak fuzzy čísla, tak čísla reálná (opět můžeme zvolit typ fuzzy čísla). Nyní si ukážeme, jak pracovat s jednotlivými agregačními uzly:

Pokud máme za cíl kritéria agregovat pomocí váženého průměru fuzzy čísel, stačí v okně *fuzzy vážený průměr* nastavit normované váhy jednotlivým kritériím (lze použít i fuzzy váhy). Výsledkem této agregace je fuzzy číslo, které je znázorněno v okně *Hodnocení uzlu* a jeho jazyková aproximace (která se řeší metodou podobnosti fuzzy množin) se jmenuje *jazykové hodnocení*. Vše je znázorněno na obrázku 15

Jestliže chceme použít fuzzy expertní systém, musíme zvolit typ inferenčního algoritmu (nejčastěji Mamdani, Sugeno-WA a Sugeno-WOWA) a zapsat bázi pravidel (program umí sám navolit všechny kombinace vstupů a uživatel musí jen navolit výstupy). Fuzzy expertní systém je znázorněn na obrázku 16. Kromě zde popsaného režimu, který se nazývá *editační*, je možné se přepnout do *seznamu variant*. Tohoto využijeme, pakliže máme více variant a každou chceme zvlášť




Obrázek 15: Fuzzy vážený průměr v programu FuzzME.




Obrázek 16: Fuzzy expertní systém v programu FuzzME.

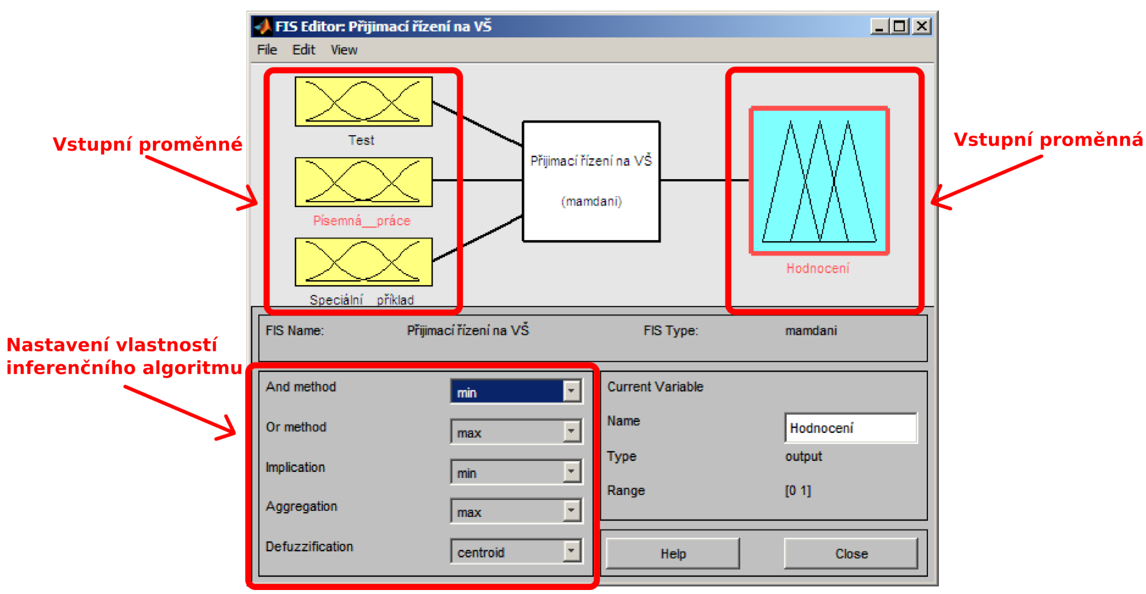
ohodnotit.

FuzzME je velmi dobře strukturovaný program, který se lze naučit ovládat během velmi krátké doby. Vzhledem ke způsobu jak je program navržen, je možné velmi snadno ladit expertní systém a dosáhnout požadovaných výsledků. Navíc je možné náš expertní systém exportovat do programu Matlab.

## 3.2 Fuzzy Logic Toolbox

Pro matematický software Matlab existuje Fuzzy Logic Toolbox, který do Matlabu implementuje základní funkce potřebné pro práci s fuzzy regulátory. V toolboxu lze použít Mamdaniho a Sugenův inferenční algoritmus (lze je různě obměňovat pomocí různých typů spojek viz obrázek 17). Bohužel inferenční algoritmy pracují pouze s *ostrými vstupy*. K toolboxu je dostupný velmi přehledný manuál (viz [8]), ve kterém jsou zároveň popsány základy fuzzy regulace.

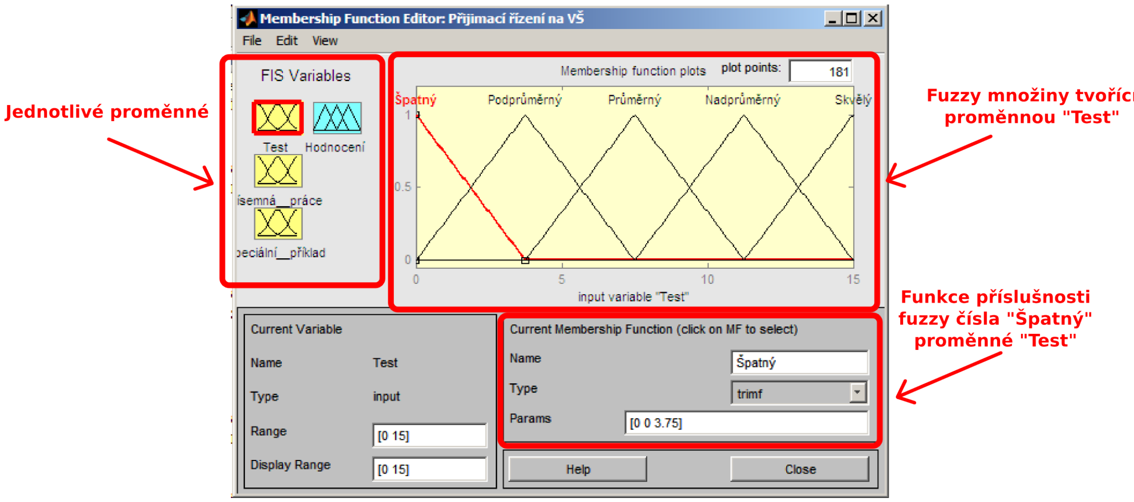
Celý toolbox se skládá z celkem 5ti částí, mezi nimiž je možné přepínat. Základem pro práci je *FIS Editor*, ve kterém je přehledně zobrazen celý inferenční systém. Můžeme zde přidávat nebo mazat vstupní a výstupní proměnné a ovlivňovat vlastnosti inferenčního algoritmu. Vše je velmi názorné, viz obrázek 17. Pomocí *Membership Function Editor* (viz 18) přiřadíme každé vstupní i výstupní




Obrázek 17: FIS Editor Matlabu.

proměnné funkce příslušnosti všech jejich fuzzy čísel. Toto můžeme udělat jak automaticky, tak manuálně. Velkou výhodou tohoto přístupu je, že máme pohromadě všechny proměnné a lze je snadno porovnávat.

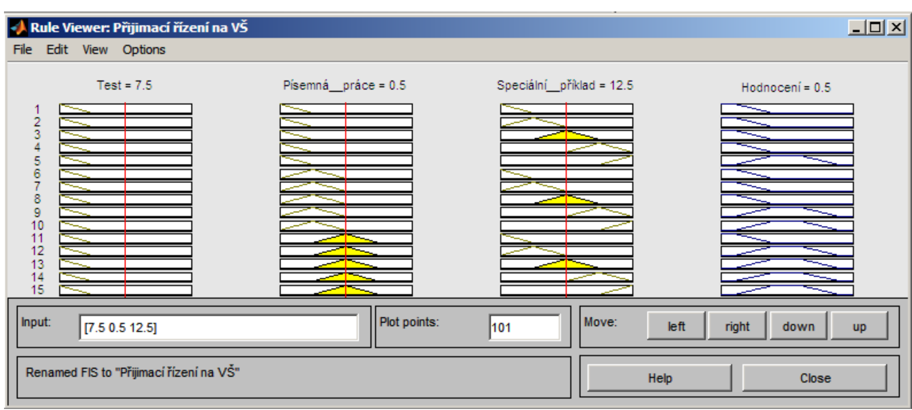
*The Rule Editor*, jak již název napovídá, slouží k zápisu báze pravidel. Volba




Obrázek 18: Membership Function Editor Matlabu.

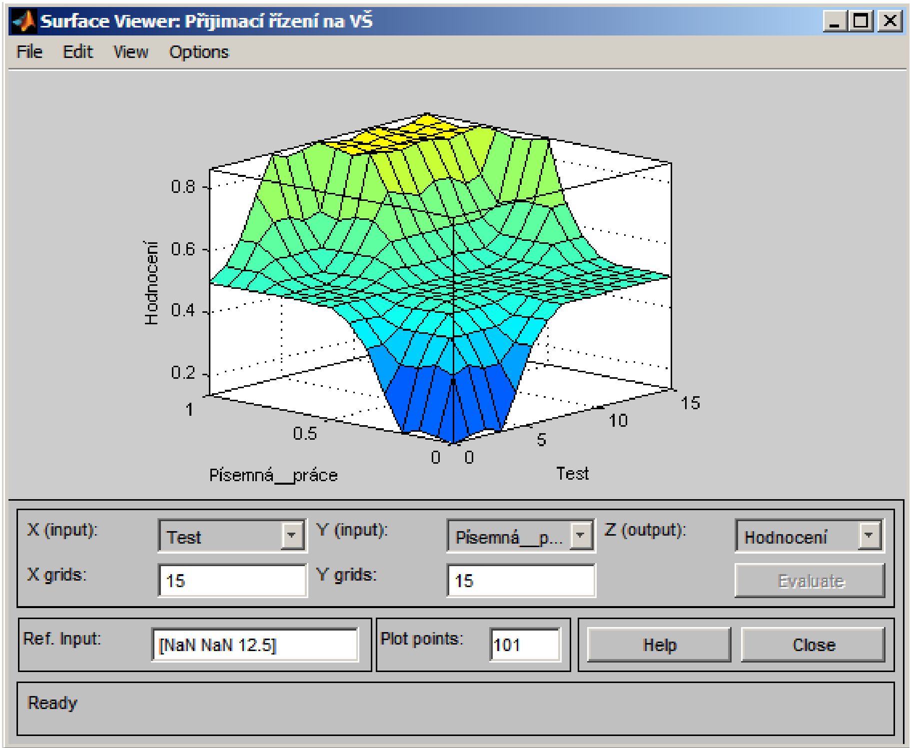
pravidel probíhá zcela analogicky, jako v programu FuzzME.

Část *Rule Viewer* (viz 19) je velmi užitečná pro ladění celého systému. Pro libovolnou vstupní kombinaci je vidět zasažení všech pravidel a výstupy jednotlivých pravidel. Díky tomu lze poměrně rychle identifikovat pravidlo, které je špatně nastaveno. Poslední částí je *Surface Viewer* (viz 20), který nám vykreslí




Obrázek 19: Rule Viewer v Matlabu.

graf pro dvě vstupní proměnné (pokud máme více vstupních proměnných, zbylé jsou reprezentovány reálnými vstupy). Z takového grafu lze velmi snadno odhadnout, jak se celý systém bude chovat a kde mohou nastat případné problémy, což velmi usnadňuje ladění báze pravidel.




Obrázek 20: Surface Viewer v Matlabu.

Tento toolbox má několik velmi dobrých vlastností, které usnadňují návrh a ladění báze pravidel. Protože je ovšem toolbox navržen pro konstrukci fuzzy regulátorů, nelze jej moc používat pro potřeby vícekriteriálního hodnocení (vstupy jsou pouze reálná čísla).

# 4 Aplikační část

Nyní se budeme zabývat praktickým využití fuzzy množin pro potřeby hodnocení, přičemž se zaměříme na oblast vysokých škol.

V první části si představíme dva články, popisující hodnocení v akademické sféře, které následně podrobíme kritické analýze. V druhé části se zaměříme na vlastní příklad, ve kterém se budeme zabývat přijímacími zkouškami na VŠ.

## 4.1 Celkové vyhodnocení dvousemestrálního předmětu

V této podkapitole budeme vycházet z článku [26]. Článek navrhuje metodu, jak studentovi, který navštěvuje dvousemestrální předmět a v každém semestru dosáhne určitého bodového hodnocení, stanovit výsledné bodové hodnocení. Na rozdíl od klasického průměru zde ovšem autoři použili jazykově orientované fuzzy modelování. Nejprve si model popíšeme.

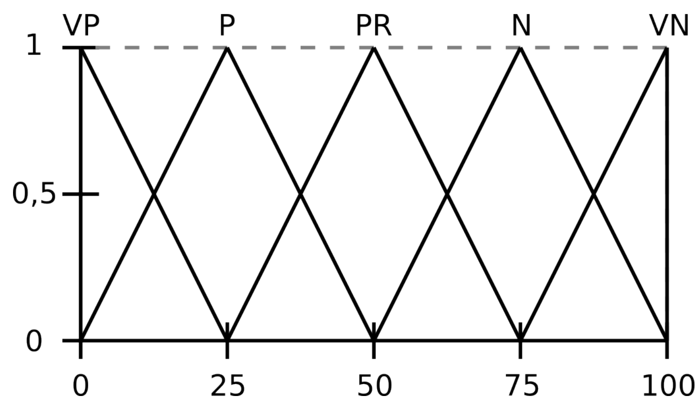
### 4.1.1 Popis modelu hodnocení dvousemestrálního předmětu

Předpokládáme, že hodnocení každého semestru je číslo z intervalu $\langle 0, 100\rangle$, tj. student může dosáhnout maximálně 100 bodů.

Ohodnocení každého semestru si budeme modelovat pomocí jazykových škál *Semestr-1* a *Semestr-2* na intervalu $\langle 0, 100\rangle$. Tyto škály jsou rovnoměrně rozložené a jsou tvořeny pěti trojúhelníkovými fuzzy čísly. Názvy jazykových termů a jejich významy modelované fuzzy čísly jsou popsány v tabulce 1. Na obrázku 21 jsou tato fuzzy čísla znázorněna.

| **Název jazykové proměnné** | **Význačné body fuzzy čísla** |
|---|---|
| Velmi podprůměrný (VP) | $(0; 0; 0,25)$ |
| Podprůměrný (P) | $(0; 0,25; 0,5)$ |
| Průměrný (PR) | $(0,25; 0,5; 0,75)$ |
| Nadprůměrný (N) | $(0,5; 0,75; 1)$ |
| Velmi nadprůměrný (VN) | $(0,75; 1; 1)$ |

Tabulka 1: Jazykové termy jazykových škál Semestr-1 a Semestr-2 a jejich významy modelované fuzzy čísly.




Obrázek 21: Fuzzy čísla, reprezentující významy jazykových termů jazykové proměnné Semestr-1 a Semestr-2.

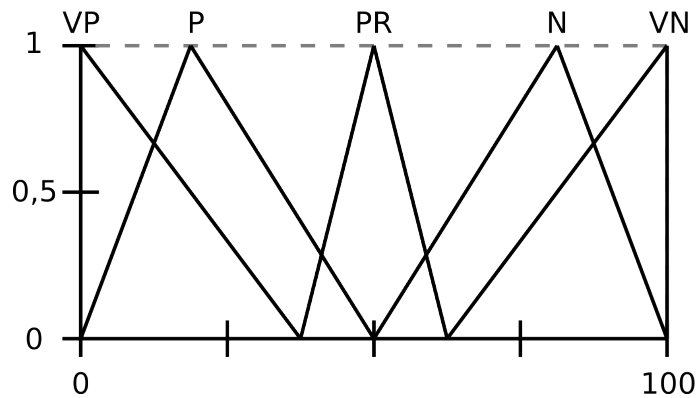
Celkové ohodnocení studenta budeme modelovat pomocí jazykové škály *Celkové hodnocení*. Jazykové termy této škály i jejich významy budou stejné, jako v případě předchozích jazykových škál s tí rozdílem, že tato škála bude definována na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Pro potřeby jazykově orientovaného fuzzy modelování je nutné stanovit bázi fuzzy pravidel, která modeluje vztah nezávislých jazykových proměnných *Semestr-1* a *Semestr-2* se závislou jazykovou proměnnou *celkové hodnocení*. V našem případě tato báze obsahuje celkem 25 pravidel (pro všechny kombinace jazykových proměnných *Semestr-1* a *Semestr-2*), které lze nalézt v [26, str. 681]. Jako příklad si uvedeme tři pravidla:

Jestliže Semestr-1 je *VP* a Semestr-2 je *VN* pak Celkové hodnocení je *PR*,
Jestliže Semestr-1 je *VN* a Semestr-2 je *VP* pak Celkové hodnocení je *PR*,
Jestliže Semestr-1 je *VN* a Semestr-2 je *N* pak Celkové hodnocení je *VN*.

Autor používá *Mamdaniho inferenční mechanismus*, přičemž vstupy jsou pro nás hodnocení studenta za oba semestry (nejprve se autor zmiňuje o fuzzifikaci vstupů pomocí trojúhelníkových fuzzy čísel, nicméně v dalším textu tyto vstupy reprezentuje pomocí fuzzy jednotek). Poněvadž výstupem Mamdaniho inferenčního mechanismu je fuzzy množina, je na defuzzifikaci výstupu použita *metoda těžiště*.

V dalším textu autor navrhuje obměnu této metody, přičemž mění významy jazykových termů jazykové proměnné *Semestr-2*. Jak tyto významy vypadají po změně je vidět na obrázku 22[4], přičemž tyto fuzzy množiny už netvoří fuzzy škálu.




Obrázek 22: Fuzzy čísla, reprezentující významy jazykových termů pozměněné jazykové proměnné *Semestr-2*.

Autor pomocí této modifikace zvýhodňuje ty studenty, kteří v druhém semestru dosáhli nadpolovičního počtu bodů. Na druhou stranu znevýhodňuje ty studenty, kteří za druhý semestr dosáhli méně než polovinu bodů. Toto lze chápat jako zohlednění faktu, že druhý semestr je většinou těžší, ale zároveň jsou po studentech vyžadovány znalosti z prvního semestru.

### 4.1.2 Analýza modelu hodnocení dvousemestrálního předmětu

V tomto modelu je použita standardní kombinace Mamdaniho inferenčního algoritmu a metody těžiště pro defuzzifikaci. Tento princip se v praxi osvědčil a je velmi často používán. Díky tomu lze model považovat za velmi přehledný, což lze považovat za velkou výhodu. Bohužel má tento model několik vlastností, které jsou velmi diskutabilní:

- Báze pravidel je symetrická. Toto podle mne není vhodné, poněvadž pokud v prvním semestru dosáhnu 80 bodů a v druhém 10, je to jednoznačně jiná

[4] Autor v textu neuvádí, jak přesně významy mění, ovšem lze to vypozorovat v [26, str. 683, obrázek 7.]

situace, než kdyby tomu bylo naopak. V tomto případě by bylo pro studenty výhodné snažit se více v prvním semestru (který bývá jednodušší), čímž si zajistí dobrý začátek, a v druhém semestru si mohou dovolit polevit.

- Modifikací významů termů jazykové proměnné *Semestr-2* autor z části řeší předchozí poznámku. Na druhou stranu si myslím, že vhodnějším způsobem by byla modifikace báze pravidel, při které lze lépe dosáhnout požadovaných vlastností modelu. To by ovšem mohlo vést k potřebě zvětšit počet termů jazykových proměnných *Semestr-1* a *Semestr-2* ze tři na pět.

- Jazyková proměnná *celkové hodnocení* je definována na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, nicméně krajních hodnot nelze dosáhnout. Pokud by student měl za oba semestry plný počet bodů, bude jeho výsledné hodnocení 0,92. Stejně tak pokud nezíská žádný bod, bude výsledné hodnocení 0,08. Toto v zásadě není problém, ovšem bylo by vhodné výsledné hodnocení transformoval vhodnou funkcí, aby bylo možné obou krajních hodnot dosáhnout.

První verze modelu je dle mého soudu obtížně použitelná vzhledem k uvedeným nedostatkům. Modifikovaná verze modelu by teoreticky mohla najít v praxi uplatnění, bohužel volba modifikace změnou významů jazykových termů dělá model méně přehledný a je obtížné dohlédnout všechny důsledky takovéto změny. Proto si myslím, že daný model praktické uplatnění spíše nenajde.

## 4.2 Hodnocení studentských písemných prací s využitím fuzzy množin

V této části budeme vycházet z článku [2]. Článek se zaměřuje na vyhodnocení písemných prací studentů a bere v potaz, že ne vždy lze jednotlivé odpovědi přesně bodově ohodnotit. Je vhodné poznamenat, že autor zde pracuje s fuzzy množinami na diskrétním univerzu. Nyní si model popíšeme.

### 4.2.1 Popis modelu hodnocení studentských písemných prací

Předpokládáme, že každou otázku písemné práce lze ohodnotit pomocí známky od A do E. Toto lze vyjádřit slovně pomocí pojmů: výborně (V), velmi dobře (VD), dobře (DO), dostatečně(D), nedostatečně (ND). Každému tomuto ohodnocení autor přiřazuje fuzzy množinu na diskrétním univerzu $U = \{0, 20, 40, 60, 80, 100\}$, přičemž jednotlivé prvky univerza $U$ značí, na kolik procent je otázka splněna.

Například známce výborně je přiřazena fuzzy množina $V = \{0/0;\ 0/20;\ 0,8/40;\ 0,9/60;\ 1/80;\ 1/100\}$. Pro větší přehlednost budeme tyto diskrétní fuzzy množiny zapisovat pomocí vektoru $V = (0;\ 0;\ 0,8;\ 0,9;\ 1;\ 1)$. V tabulce 2 vidíme, jaké fuzzy množiny jsou přiřazeny jednotlivým známkám.

| **Známka** | **Reprezentace známky** |
|---|---|
| Výborně (V) | $(0;\ 0;\ 0,8;\ 0,9;\ 1;\ 1)$ |
| Velmi dobře (VD) | $(0;\ 0,1;\ 0,8;\ 0,9;\ 0,9;\ 0,8)$ |
| Dobře (DO) | $(0;\ 0,1;\ 0,8;\ 0,9;\ 0,4;\ 0,2)$ |
| Dostatečně (D) | $(0,4;\ 0,4;\ 0,9;\ 0,6;\ 0,2;\ 0)$ |
| Nedostatečně (ND) | $(1;\ 1;\ 0,4;\ 0,2;\ 0;\ 0)$ |

Tabulka 2: Diskrétní fuzzy množiny přiřazené jednotlivým známkám.

Základní myšlenka celé metody spočívá v tom, že místo aby hodnotitel ohodnotil každý příklad jednou známkou, ohodnotí příklady pomocí fuzzy množiny $F_i \in \mathcal{F}(U)$ tak, že určí stupeň příslušnosti splnění otázky na 0%, 20%, 40%, 60%, 80% a 100%. Index $i$ nám označuje číslo otázky. Jediný požadavkem na fuzzy množinu $F_i$ je, že posloupnost stupňů příslušnosti pro každou otázku je rostoucí, klesající nebo napřed rostoucí a pak klesající.

Dále autor vychází z klasického stanovení známky podle počtu bodů a každé známce přiřadí interval a střední hodnotu (značíme $P$). Toto je znázorněno v tabulce 3.

Předtím, než si popíšeme postup vyhodnocování si musíme zadefinovat pojem *stupeň podobnosti dvou fuzzy množin.*

**Definice 4.1.** *Nechť $A, B \in \mathcal{F}(U)$, kde $U = \{x_1, \ldots, x_n\}$ je diskrétní univerzum. Stupeň podobnosti dvou fuzzy množin $A, B$, který značíme $S(A, B)$, vypočítáme*

| **Známka** | **Interval** | **Střední hodnota** $P$ |
|---|---|---|
| Výborně (V) | $\langle 90, 100\rangle$ | P(V)=95 |
| Velmi dobře (VD) | $\langle 70, 90)$ | P(VD)=80 |
| Dobře (DO) | $\langle 50, 70)$ | P(DO)=60 |
| Dostatečně (D) | $\langle 30, 50)$ | P(D)=40 |
| Nedostatečně (ND) | $\langle 0, 30)$ | P(ND)=15 |

Tabulka 3: Stanovení známky podle počtu bodů a střední hodnota známky.

*pomocí vzorce*

$$S(A,B) = \frac{\hat{A} \cdot \hat{B}}{\max\{\hat{A} \cdot \hat{A}, \hat{B} \cdot \hat{B}\}}, \tag{152}$$

*kde* $\hat{A} = (A(x_1), \ldots, A(x_n))$ *a* $\hat{B} = (B(x_1), \ldots, B(x_n))$ *jsou vektory a operace „·“ je skalární součin.*

Nyní si popíšeme postup, jak vypočítat celkové hodnocení písemné práce:

1. Předpokládejme, že máme celkem $n$ otázek. Pro každou otázku určíme její fuzzy ohodnocení $F_i$.

2. Vypočítáme stupně podobnosti fuzzy množiny $F_i$ se všemi známkami, tj.

$$S(V,F_i),\ S(VD,F_i),\ S(DO,F_i),\ S(D,F_i),\ S(NV,F_i). \tag{153}$$

3. Vybereme tu známku, se kterou má fuzzy množina $F_i$ nejvyšší stupeň podobnosti. Pokud by bylo více známek se stejným stupněm podobnosti, vybereme tu nejvyšší.

4. Body 2 a 3 opakujeme pro všechny otázky.

5. Vypočítáme celkové hodnocení písemné práce pomocí vzorce

$$\text{Celkové hodnocení} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{n} (T(Q_i)P(q_i)), \tag{154}$$

kde $T(Q_i)$ je maximální možný počet bodů za $i$-tou otázku a $q_i$ je známka za $i$-tou otázku, vypočítaná v kroku 3.

Dále pak autor navrhuje zobecnění metody pro případy, kdy se každá otázka hodnotí pomocí 4 hledisek (přesnost odpovědi, pokrytí otázky, stručnost, správné vyjadřování). Toto probíhá zcela analogicky, akorát hodnocení každé otázky se provádí pomocí více fuzzy množin, tj. $i$-tá otázka je ohodnocena pomocí fuzzy množin $F_{i1}, \dots, F_{i4}$. Celkové ohodnocení písemné práce pak vypočítáme vzorcem:

$$\text{Celkové hodnocení} = \frac{1}{400} \sum_{i=1}^{n} \left( T(Q_i) \sum_{j=1}^{4} P(q_{ij}) \right), \tag{155}$$

kde $T(Q_i)$ je maximální možný počet bodů za $i$-tou otázku a $q_{ij}$ je známka, se kterou má fuzzy množina $F_{ij}$ nejvyšší stupeň podobnosti, přičemž $j = 1, \dots, 4$.

### 4.2.2 Analýza modelu hodnocení studentských písemných prací

Tento model se snaží řešit problém neurčitosti hodnocení písemných prací tím, že otázky hodnotíme s využitím diskrétních fuzzy množin. Model se sice snaží být přehledný, ale je zde několik věcí, které mluví v neprospěch jeho využití v praxi:

- Časové nároky na hodnotitele, vzhledem k nutnosti každou otázku hodnotit pomocí šesti stupňů příslušnosti velmi rostou. Navíc je sporné, jestli by hodnotitel byl schopen takto otázku hodnotit, poněvadž 6 stupňů je poměrně hodně a mohlo by docházet k ještě většímu znepřesnění výsledků. Problém by šel zjednodušit využitím trojúhelníkových, případně lichoběžníkových fuzzy čísel.

- Samotná autorova volba diskrétních fuzzy čísel popisující jednotlivé známky (viz tabulka 2) není optimální. Například pro známky Velmi dobře, dobře a dostatečně nemají jejich fuzzy množiny v žádném bodě stupeň příslušnosti roven jedné, což je velmi diskutabilní. Navíc například fuzzy množina přiřazená známce výborně je až přehnaně tolerantní.

- Model vyžaduje ohodnocení každé otázky pomocí šesti stupňů příslušnosti, nicméně toto využívá pouze pro výpočet známky, kterou přiřadí každé otázce (jedná se o známky z tabulky 2) a následně ji nahradí reálným číslem. Potom už se pracuje pouze s tímto číslem. Ztrácíme tím informaci o neurčitosti každé odpovědi, kterou na začátku poměrně obtížně získáváme.

- Zobecněná metoda, která každou otázku hodnotí z více hledisek je v praxi jen velmi těžko použitelná. Hodnotitel by musel u každé otázky určit celkem 24 stupňů příslušnosti, což je velmi vysoké číslo a lze očekávat, že by hodnotitel brzy začal ztrácet pozornost.

Navržený model nelze považovat za zcela špatný, bohužel jeho náročnost na hodnotitele spolu s ne zcela dobře zavedenými významy jednotlivých známek jej dělá jen velmi obtížně použitelný v praxi.

Výše zmíněné nedostatky řeší mnou navržený model hodnocení studentských písemných prací, který se snaží zachovat hlavní myšlenky v této kapitole analyzovaného modelu, ale přináší značné zjednodušení výpočtu. Nyní si tento nový model představíme.

### 4.2.3 Návrh na modifikaci modelu hodnocení studentských písemných prací

Při návrhu nového modelu jsem se v první řadě snažil zachovat všechny výhody původního modelu, ale zároveň odstranit jeho nedostatky.

Nejdůležitějším bodem bylo zjednodušení ohodnocení jednotlivých otázek při zachování neurčitosti u jednotlivých odpovědí. Protože přiřazování šesti stupňů příslušnosti pro každou otázku je časově velmi náročné, budeme v tomto modelu každou odpověď hodnotit pomocí lichoběžníkového nebo trojúhelníkového fuzzy čísla, případně fuzzy jednotky (například u jednoslovných odpovědí) $F_i$ na intervalu $\langle 0, 100 \rangle$, kde $i$ je číslo otázky. Takovéto ohodnocení je podstatně snazší a lze jej zadat pomocí význačných bodů fuzzy čísla (na rozdíl od 6 hodnot, které bylo třeba zadávat v původní verzi, zadáváme pouze 4 hodnoty).

V původním modelu následovalo nalezení známky, jejíž význam nejvíce odpovídal našemu ohodnocení otázky. Jak již bylo řečeno, tímto bychom v modelu přišli o neurčitost jednotlivých odpovědí. Z tohoto důvodu se jako rozumnější jeví postup, při kterém neurčitost odstraníme až na závěr po agregaci jednotlivých odpovědí. Pro výpočet fuzzy čísla $F$, která nám určuje celkové hodnocení písemné práce, použijeme vážený průměr fuzzy čísel, přičemž váhy jsou bodová ohodnocení jednotlivých otázek $T(Q_i)$ (váhy jsou normované).

Posledním krokem je bodové ohodnocení písemné práce a určení výsledné známky. Toho dosáhneme tak, že nejprve provedeme defuzzifikaci fuzzy čísla $F$ metodou těžiště (tím dostaneme bodové ohodnocení) a následně dané hodnotě přiřadíme známku. To můžeme udělat buď pomocí tabulky 3 nebo s využitím jazykové aproximace (přičemž nejprve musíme stanovit jazykovou škálu, jejíž termy reprezentují jednotlivé známky).

V softwaru FuzzME jsem vytvořil příklad takovéhoto hodnocení písemné práce, obsahující 5 otázek. Hodnotitel musí pouze nastavit hodnoty normovaných vah pro jednotlivé otázky a následně každou otázku ohodnotí fuzzy číslem. Příklad lze nalézt na přiloženém CD, soubor se nazývá `Hodnoceni_pisemne_prace.FuzzyProject`.

Velkou výhodou této metody je jak podstatné zjednodušení zadávání hodnocení jednotlivých odpovědí, tak přehlednost celého modelu.

## 4.3 Přijímací zkoušky na VŠ

V této kapitole představím můj návrh modelu na vyhodnocení přijímacího řízení na VŠ, s využitím jazykově orientovaného fuzzy modelování. Na rozdíl od klasického způsobu vyhodnocování přijímacích zkoušek, tento model se primárně zaměří na to, zda má student potenciál daný obor vystudovat či nikoliv.

### 4.3.1 Popis modelu vyhodnocování přijímacích zkoušek na VŠ

Při konstrukci modelu jsem vycházel z přijímacího řízení na obory *Matematika-ekonomie se zaměřením na bankovnictví* a *Matematika-ekonomie se zaměřením na pojišťovnictví*, které se vyučují na Univerzitě Palackého v Olomouci. Na tyto obory se každoročně hlásí dohromady více než sto studentů. Poněvadž to kapacity umožňují, jsou od roku 2008 přijímáni všichni zájemci o studium.

Mým úkolem bylo navrhnout model vyhodnocování přijímacích zkoušek, který by měl za cíl nalézt jak studenty, kteří nemají předpoklady pro studium těchto oborů, tak studenty, kteří jsou velmi perspektivní. Tímto bychom mohli aspoň z části zamezit tomu, abychom přijali studenty, kteří během prvního roku studium ukončí a navíc bychom identifikovali nadějné studenty.

Při návrhu jsem vycházel ze skutečných přijímacích zkoušek. Ty jsou k nalezení na internetové adrese `mant.upol.cz/cs/vzor_priklady.asp`, přičemž ke stažení jsou zkoušky z let 1997-2007 (kromě roku 2003, kdy přijímací zkoušky nebyly). Tyto zkoušky obsahují 2 části:

- Test, který se skládá z šesti otázek, které jsou zaměřeny primárně na logické uvažování. Tyto otázky jsou celkem ohodnoceny 15ti body.
- Písemná práce, která se většinou skládá z pěti příkladů standardní obtížnosti (standard daný úrovní matematiky na gymnáziích), které jsou zaměřeny na matematické znalosti a schopnosti používat matematický aparát. Otázky jsou celkem ohodnoceny 45ti body.

V mém modelu navrhuji přidat další část, kterou jsem nazval speciální příklad. Tímto je myšlen příklad, jehož obtížnost odpovídá příkladům z matematickým olympiád. Cílem tohoto příkladu je určit studenty, kteří mají velmi dobré logické myšlení a umí dobře pracovat s matematickým aparátem. Tento příklad jsem ohodnotil 25ti body.

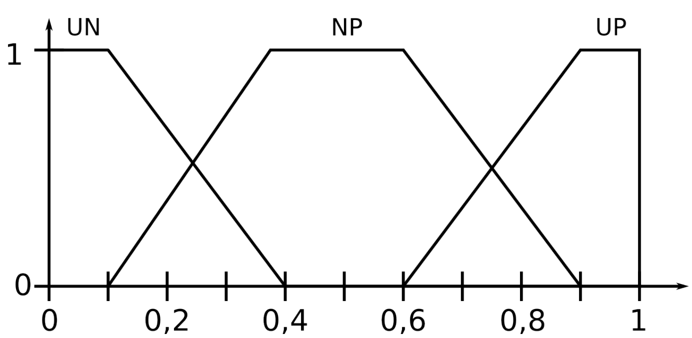
Bodové ohodnocení všech tří částí proběhne obvyklou cestou, tj. za každou část bude student ohodnocen určitým počtem bodů. Na rozdíl od klasické metody hodnocení, kdy se pouze sečtou body a dosáhneme výsledného bodového ohodnocení, v mém modelu se snažíme pečlivěji vyhodnotit skutečné studentovy předpoklady pro studium matematiky. Abychom si byli schopni model popsat, musíme si nejprve nadefinovat vstupní a výstupní proměnné.

Pro popis vstupních proměnných použijeme jazykové škály *Test*, *Písemná práce* a *Speciální příklad*. Tyto škály jsou definovány na intervalech odpovídající bodovému ohodnocení dané části (tj. $\langle 0, 15\rangle, \langle 0, 45\rangle$ a $\langle 0, 25\rangle$). Elementární jazykové termy každé z těchto jazykových proměnných jsou *Špatný, Podprůměrný, Průměrný, Nadprůměrný* a *Skvělý*. Významy těchto termů jsou modelovány pomocí trojúhelníkových fuzzy čísel, které nám tvoří rovnoměrnou fuzzy škálu. Konkrétní hodnoty fuzzy čísel jsou popsány v tabulce 4.

| **Hodnocení** | **Test** | **Písemná práce** | **Speciální příklad** |
|---|---|---|---|
| Špatný (SP) | $(0; 0; 3,75)$ | $(0; 0; 11,25)$ | $(0; 0; 6,25)$ |
| Podprůměrný (PP) | $(0; 3,75; 7,5)$ | $(0; 11,25; 22,5)$ | $(0; 6,25; 12,5)$ |
| Průměrný (PR) | $(3,75; 7,5; 11,25)$ | $(11,25; 22,5; 33,75)$ | $(6,25; 12,5; 18,75)$ |
| Nadprůměrný (NP) | $(7,5; 11,25; 15)$ | $(22,5; 33,75; 45)$ | $(12,5; 18,75; 25)$ |
| Skvělý (SK) | $(11,25; 15; 15)$ | $(33,75; 45; 45)$ | $(18,75; 25; 25)$ |

Tabulka 4: Významy jednotlivých jazykových termů pro dané vstupní jazykové proměnné.

Výstupní proměnnou si budeme modelovat pomocí jazykové proměnné *Hodnocení*, která je definována na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a tvoří zde rozšířenou jazykovou škálu (vzhledem k výsledkům se použití rozšířené jazykové škály ukázalo vhodnější, než použití jazykové škály s mezihodnotami). Její elementární termy jsou *Určitě nepřijmout (UN), Nejspíše přijmout (NP)* a *Určitě přijmout (UP)*. Významy jazykových termů jsou znázorněny na obrázku 23.




Obrázek 23: Významy jazykových termů jazykové proměnné Hodnocení.

Pro potřeby jazykově orientovaného fuzzy modelování bylo třeba zavést bázi fuzzy pravidel. Poněvadž cílem modelu bylo odlišit studenty, kteří mají buď velký nebo velmi malý potenciál, musel jsme tomuto přizpůsobit bázi pravidel. Při jejím navrhování bylo třeba vzít do úvah tyto vlastnosti:

- Speciální příklad byl přidán z důvodu, aby studentovi pomohl, ne mu uškodil. Proto studenta nebudeme penalizovat za nevyřešení této části.
- Pakliže získá student dobré bodové ohodnocení pouze z testu a speciálního příkladu, je pro nás zajímavý, poněvadž je zřejmé, že má matematické myšlení, pouze nemá dobrý matematický základ ze střední školy.
- Student, který dosáhl dobrého bodového ohodnocení pouze v části písemná práce a v jiných částech byl hodnocen jako špatný, nebude vhodným student, poněvadž sice má naučené matematické postupy, ale nejspíše postrádá matematické myšlení.
- Pokud student dosáhne v každé části alespoň nadprůměrného hodnocení, chceme ho určitě přijmout (toto je ovšem postačující, nikoliv nutná podmínka).
- Naopak pokud je student ve všech částech podprůměrný nebo špatný, přijmout ho nechceme.

Při návrhu báze pravidel bylo stanoveno pravidlo pro každou kombinaci elementárních jazykových termů vstupních proměnných, tj. celkem používáme 125 pravidel, díky čemuž to byl proces poměrně zdlouhavý, při kterém se muselo brát v potaz velké množství faktorů. Pravidla, která mají na pravé straně jazykové termy *určitě nepřijmeme* nebo *určitě přijmeme* jsou vypsána v tabulce 5. Všechna ostatní pravidla mají na pravé straně jazykový term *nejspíše přijmeme*.

Jako inferenční algoritmus byl zvolen Sugeno-WA (viz kapitola 2.4.6), s jeho použitím model dosahoval nejoptimálnějších výsledků. Výstupem tohoto algoritmu je fuzzy číslo, proto pokud bychom chtěli každého studenta ohodnotit reálným číslem, použili bychom metodu těžiště fuzzy čísel. Naopak pokud nás zajímá

| Test | Písemná práce | Speciální příklad | Hodnocení |
|---|---|---|---|
| SP nebo PP | SP nebo PP | SP nebo PP | UN |
| SP | SP | PR nebo NP | UN |
| SP | PP | PR | UN |
| SP | PR | SP | UN |
| PP | SP | PR | UN |
| PR nebo NP nebo SK | SP | SP | UN |
| PR | SP | PP | UN |
| PR | PP | SP | UN |
| NP | SP | PP | UN |
| SP | NP | SK | UP |
| SP | SK | NP nebo SK | UP |
| PP | PR | SK | UP |
| PP | NP nebo SK | NP nebo SK | UP |
| PP | SK | PR | UP |
| PR | PR nebo NP nebo SK | NP nebo SK | UP |
| PR | NP | PP | UP |
| PR | SK | PP nebo PR | UP |
| NP | PP | SK | UP |
| NP | PR | NP nebo SK | UP |
| NP | NP | cokoliv kromě SP | UP |
| NP | SK | cokoliv | UP |
| SK | SP nebo PP nebo PR | NP nebo SK | UP |
| SK | PR | PR | UP |
| SK | NP | cokoliv kromě SP | UP |
| SK | SK | cokoliv | UP |

Tabulka 5: Část báze pravidel pro model hodnocení přijímacího řízení, jejichž pravá strana není jazykový term nejspíše přijmeme. Významy zkratek v prvních třech sloupcích jsou popsány v tabulce 4, významy zkratek v posledním sloupci jsou: *UN - určitě nepřijmout* a *UP - určitě přijmout*

jazyková aproximace výsledku, můžeme použít jazykovou aproximaci založenou na metrice případně na podobnosti fuzzy množin[5].

Protože jazyková proměnná *Hodnocení* tvoří rozšířenou jazykovou škálu, můžou být výsledkem jazykové aproximace kromě elementárních termů i termy *určitě nepřijmout až nejspíše přijmout* a *nejspíše přijmout až určitě přijmout*. V tako-

[5]V programu FuzzME, ve kterém jsem model naprogramoval, se používá jazyková aproximace založená na podobnosti fuzzy množin

vémto případě je na uvážení hodnotitele, ke které z variant se přikloní. Hodnotitel může navíc změnou typu jazykové škály měnit přísnost hodnocení.

Tento model jsem naprogramoval v programu FuzzME a lze jej nalézt na přiloženém CD, jedná se o soubor `Prijimaci_rizeni.FuzzyProject`.

Model lze dále modifikovat, za použití mé modifikace modelu hodnocení studentských prací (viz 4.2.3). V takovémto případě změníme způsob hodnocení jednotlivých částí:

- Hodnocení testové část zůstane stejné, tj. pomocí reálného čísla z intervalu $\langle 0, 15 \rangle$.
- Písemná práce se bude řešit analogicky jako v případě hodnocení studentských prací, tj. každá z pěti otázek bude ohodnocena fuzzy číslem (trojúhelníkovým nebo lichoběžníkovým) na intervalu $\langle 0, 100 \rangle$ a následně budou otázky agregovány pomocí váženého průměru fuzzy čísel (váhy volí hodnotitel).
- Speciální příklad bude stejně jako v předchozím případě ohodnocen pomocí fuzzy čísla na intervalu $\langle 0, 100 \rangle$[6].

Takto modifikovaný model je taktéž naprogramován a na CD se nachází pod názvem `Prijimaci_rizeni-modifikace.FuzzyProject`.

Obě verze mnou navrženého modelu hodnocení přijímacích zkoušek byly navrženy tak, aby byl model přehledný a šlo snadno dohlédnout, jak bude model reagovat na různá vstupní data. Bohužel poněvadž momentálně žádné přijímací řízení na dané obory nejsou, neměl jsem možnost model otestovat na reálných datech. Z tohoto důvodu nemohu říci, zda je model možno aplikovat.

[6] raději volíme tento interval, aby hodnotitel lépe dokázal popsat splnění otázky

# Závěr

V této diplomové práci jsem popsal nejdůležitější pojmy, které jsou potřebné jak pro oblast fuzzy regulace, tak pro oblast vícekriteriálního hodnocení, založeného na teorii fuzzy množin. Velkou část informací jsem se snažil čerpal z původních zdrojů, díky čemuž jsem poznal různé způsoby zápisu fuzzy množin a věcí s nimi spojených. Navíc jsem mohl sledovat, jak se postupně měnili definice jednotlivých pojmů, přístupy k jazykové proměnné i inferenční algoritmy. Při studii softwaru jsem poznal efektivní nástroje pro práci s fuzzy množinami a hlavně pro potřeby vícekriteriálního hodnocení.

V aplikační části jsem pomocí získaných vědomostí provedl kritickou analýzu dvou modelů hodnocení, používaných v akademické oblasti, a pokusil se poukázat na možná úskalí těchto metod. Následně jsem navrhl vlastní model pro hodnocení přijímacích zkoušek na VŠ, na kterém jsem si osvojil používání softwaru FuzzME a vyzkoušel, jak složité je dobře navrhnout bázi pravidel.

Při psaní práce jsem poznal, jak složité je získané informace aplikovat na skutečné problémy a přitom zajistit, aby byl výsledný model přehledný a pochopitelný. V budoucnu bych se chtěl zaměřit na podrobnější zkoumání modelů vícekriteriálního hodnocení, které jsou založené na fuzzy množinách.

# Seznam obrázků

# Literatura


[1] Von Altrock, C.: *Fuzzy Logic and NeuroFuzzy Applications Explained*. Prentice Hall, New Jersey, 1995.

[2] Biswas R.,: *An application of fuzzy sets in students' evaluation*. Fuzzy Sets and Systems, vol. 74, no. 2, 1995.

[3] Dubois, D., Prade, H.: *Fundamentals of fuzzy sets*. Kluwer, Boston, London, Dordrecht 2000.

[4] Fullér, R.: *Neural Fuzzy Systems*. Abo Akademis tryckeri, Abo, 1995.

[5] Holeček, P.: *FuzzME 2.1: User Guide*, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2012.

[6] Holček P., Talašová J.: *FuzzME: A new software for multiple-criteria fuzzy evaluation*. Acta Universitatis Matthiae Belii ser. Mathematics, vol. 16, pp. 35-51, 2010.

[7] Holeček, P., Talašová, J., Müller, I.: *Fuzzy Methods of Multiple-Criteria Evaluation and Theit Software Implementation*. Cross-disciplinary applications of artificial intelligence and pattern recognition, IGI Global, USA, 2012.

[8] Jang, J.-S. R., and Gulley, N.: *Fuzzy Logic Toolbox, For Use with MATLAB*. 2nd. ed., The Math Work, 1997.

[9] Klir G. J., Yuan B.: Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: *Theory and Applications*. Prentice Hall, New Yersey, 1996.

[10] Kuncheva, L.: *Fuzzy classifier design*. Physica-Verlag and Springer, Wurzburg and Berlin, 2000.

[11] Larsen P. M.: *Industrial Applications of Fuzzy Logic Control*. International Journal of Man-Machine Studies, vol. 12, no. 1, pp. 3-10, 1980.

[12] Mamadani, E.H., Assilian, S.: *An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller*. International Journal of Human-Computer Studies, vol. 51, no. 2, pp. 135-147, 1999.

[13] Mamdani H.: *Application of Fuzzy Logic to Approximate Reasoning Using Linguistic Synthesis*. IEEE Transactions on Computers, vol. 26, no. 12, pp. 1182-1191, 1977.

[14] Nguyen, H.T., Walker, E.A.: *A First Course in Fuzzy Logic*. 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, 2000.

[15] Nguyen, H.T., Prasad, N.R., Walker, C.L., Walker, E.A.: *A First Course in Fuzzy and Neural Control*. Chapman and Hall/CRC, 2002.

[16] Novák, V.: *Fuzzy množiny a jejich aplikace*. SNTL, Praha 1990.

[17] Novák, V., Perfilieva, I., Močkoř,J.: *Mathematical Priciples of Fuzzy Logic*. Kluwer Academic Publishers,Boston-Dordrecht-London, 1999.

[18] Novák, V.: *Základy fuzzy modelování*. BEN, Praha 2000.

[19] Novosádová, L.: *Metody defuzzikace fuzzy čísel (Diplomová práce)*. Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2006.

[20] Ramík J., Vlach M.: *Generalized Concavity in Fuzzy Optimization and Decision Analysis*. Kluwer, Academic Publishers, Boston-Dordrecht-London, 2001.

[21] Stoklasa J., Talašová J., Holeček P.: *Academic Staff Performance Evaluation – Variants of Models*. Acta Polytechnica Hubgarica, vol. 8, no. 3, pp. 91-111.

[22] Sugeno M., Yasukawa T.: *A Fuzzy–Logic–Based Approach to Qualitative Modeling*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 1, no. 1, pp. 7-31, 1993.

[23] Sugeno M.: *An Introductory Survey on Fuzzy Control*. Information Sciences, 36, pp. 59-83, 1985.

[24] Sugeno M., Takagi T.: *Fuzzy Identification of Systems and its Application to Modeling and Control*. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, vol. 1, no. 15, pp. 116-132, 1985.

[25] Talašová J.: *Fuzzy metody vícekriteriálního hodnocení a rozhodování*. Vydavatelství UP, Olomouc, 2003.

[26] Yadac, R.S.: *Modeling Academic Performance Evaluation Using Soft Computing Techniques: A Fuzzy Logic Approach*. International Journal on Computer Science and Engineering, vol. 3, no. 2, 2011.

[27] Zadeh L. A.: *Fuzzy Sets. Information and Control*, vol. 8, pp. 338–353, 1965.

[28] Zadeh, L. A.: *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I, II, III*. Inf. Sci., vol. 8, pp. 199-257, pp. 301-357, 1975, vol. 9, pp. 43-80, 1975.