



Pedagogická  
fakulta  
Faculty  
of Education

Jihočeská univerzita  
v Českých Budějovicích  
University of South Bohemia  
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Matematika v přírodě

Mathematics in nature

Vypracoval: Anna Beránková

Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice 2022

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Matematika v přírodě jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce.

Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .....

.....

Anna Beránková

## **Poděkování**

Děkuji Mgr. Romanovi Haškovi, Ph.D. za cenné rady, které mi poskytl, za podněty a připomínky, jimiž mi pomohl při zpracování mé bakalářské práce.

## **ANOTACE**

Cílem bakalářské práce je vytvořit soubor materiálů, které zaznamenávají přírodní jevy propojující přírodu s matematikou, dále pořizování fotografií takovýchto jevů, jejich matematický popis, vytváření počítačových modelů a úloh, které dovolují tyto jevy spojující matematiku s přírodou vhodně zakomponovat do výuky. V bakalářské práci je kladen důraz na propojení znalostí z matematiky a přírodopisu a jejich využití ve výuce. Součástí práce je rešerše dostupné literatury a vybraných učebnic matematiky pro základní a střední školy.

## **ANNOTATION**

The aim of this bachelor thesis is not only to create a set of materials that record natural phenomena, which connect nature with mathematics, but also to take photographs of such phenomena, to provide their mathematical description, to create computer models and tasks that would allow these phenomena connecting mathematics with nature to be appropriately incorporated into teaching. The emphasis of this bachelor thesis is on the connection between knowledge from mathematics and from natural sciences and its use in teaching. The thesis also includes an listing of available literature to these topic and an analysis of selected mathematics textbooks for primary and secondary schools.

# Obsah

1	Úvod.....	8
2	Mezipředmětové vztahy .....	10
2.1	Matematika a přírodní vědy .....	10
3	Shodná zobrazení .....	12
4	Geologie a geometrie .....	15
5	Včelí architektura .....	18
6	Zlatý řez a Fibonacciho posloupnost.....	19
7	Fraktály .....	26
8	Rešerše učiva.....	28
8.1	Základní škola .....	28
8.2	Střední škola .....	30
9	Materiály vytvořené pro výuku.....	34
9.1	Stavba včelích buněk.....	34
9.1.1	Pokrytí roviny .....	35
9.1.2	Nejlepší tvar .....	36
9.2	Souměrnost v přírodě .....	41
9.3	Geometrie neživé přírody .....	45
9.3.1	Symetrie krystalů .....	45
9.3.2	Krystalové soustavy .....	45
9.3.3	Sítě krystalů.....	48
9.4	Biologie jako nástroj k pochopení matematiky.....	51
9.4.1	Dělení buněk a nultá mocnina.....	51
9.4.2	Funkce .....	52

10	Reflexe úloh vyzkoušených na ZŠ.....	55
11	Závěr .....	58
	Seznam použitých zdrojů .....	59
	Seznam obrázků .....	62
	Seznam příloh.....	65

# 1 Úvod

Bakalářská práce se věnuje vztahu matematiky k přírodním vědám a možné aplikaci tohoto vztahu do výuky matematiky.

Téma práce bylo zvoleno zejména kvůli osobním sympatiím – mou druhou aprobací je přírodopis a chtěla jsem oba předměty v práci propojit. Druhým důvodem je důležitost mezipředmětových vztahů ve vzdělávání. Mezipředmětové vztahy jsou důležitým prostředkem k tomu, aby žáci/studenti dokázali učivo vnímat v širších souvislostech, aby vnímali a sami nacházeli vztahy mezi jednotlivými učebními předměty a aby byli schopni aplikovat poznatky z jednoho předmětu do druhého, potažmo i do reálného života. Přírodní vědy, které jsou pochopitelně vzájemně provázané, k vytváření mezipředmětových vztahů přímo vybízí.

Na začátku práce jsou uvedeny definice mezipředmětových vztahů se zvláštním zaměřením na vztah matematiky k biologii a geologii, matematický popis přírodních jevů v dalších kapitolách se totiž věnuje zejména těmto dvěma disciplínám. Tento vztah je rozebírán v několika samostatných kapitolách, přičemž každá z nich poukazuje na konkrétní biologické a matematické téma. Součástí těchto kapitol je rešerše odborné literatury.

Dále byla provedena rešerše učebnic pro základní a střední školy z hlediska příkladů a úloh odkazujících na určité přírodní jevy.

Součástí práce jsou úlohy a pracovní listy propojující matematiku a přírodopis, které byly pro tuto práci vytvořeny a které je možné použít ve výuce matematiky, potažmo přírodopisu na základních školách. Celkem bylo vytvořeno 14 úloh a 2 pracovní listy. Pro účely práce byla také vytvořena GeoGebra kniha (Beránková, 2021) obsahující zmíněné pracovní listy a další grafické materiály, které vizuálně doplňují text práce. Tato kniha je dostupná na odkazu uvedeném níže. Práce je celkově doplněna velkým množstvím vizuálního materiálu, který doplňuje psaný text.



Některé z úloh, které jsou v práci obsažené, jsem vyzkoušela při výuce na Církevní základní škole v Českých Budějovicích. Předposlední kapitola práce se věnuje jejich reflexi.

<https://www.geogebra.org/m/rn9mvmkv>



## 2 Mezipředmětové vztahy

Práce se zabývá vztahem matematiky a přírodních věd a jejich vzájemným propojením v rámci učiva základní a střední školy. Jedná se tedy o tzv. mezipředmětové vztahy, které jsou definovány následovně:

*„Mezipředmětové vztahy jsou didaktickou modifikací vztahů mezivědních, které jsou objektivní zákonitostí integrace přírodních věd. Mezioborové vztahy mohou tedy být charakterizovány jako vzájemné souvislosti mezi jednotlivými předměty, chápání příčin a vztahů, přesahující předmětový rámec, jako prostředek mezipředmětové integrace.“* (Janás, 1995)

Rakoušová popisuje mezipředmětové vztahy jako: *„Souvislosti, vztahy mezi jevy, pojmy, ději, situacemi a jejich promítnutí do soustavy učebních předmětů.“* (Rakoušová, 2008)

Důležitost mezipředmětových vztahů spočívá mimo jiné i v rozvoji reálného vnímání světa. *„Rozvoj matematické gramotnosti žáků není omezen pouze na výuku matematiky, neboť matematické dovednosti žáků by měly být rozvíjeny také v dalších předmětech.“* (ČŠI, 2020)

### 2.1 Matematika a přírodní vědy

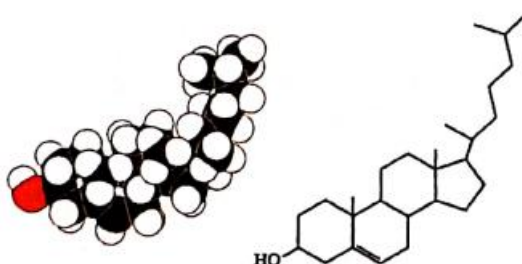
Matematika je úzce spjatá s dalšími přírodními vědami, jako jsou chemie, fyzika a biologie, protože do značné míry umožňuje popis jevů, kterými se tyto vědy zabývají. Bez znalosti matematiky by proto nebylo možné provádět většinu výzkumů v jednotlivých přírodovědných oborech.

Matematici se vztahem matematiky a přírodních věd zabývali už od starověku a jejich úsilí v tomto směru přetrvává až do současnosti. Ve starověkém Řecku řada matematiků zkoumala pohyby vesmírných těles, pythagorejci znali a používali zlatý řez, který se v přírodě často vyskytuje (definice zlatého řezu je rozvedena v kapitole 6). Příkladem z dnešní doby může být studium fraktálního růstu, které se začalo rozvíjet teprve v minulém století. Fraktály objevující se v přírodě jsou zajímavé mimo jiné svou estetičností.

Uveďme si příklad propojující matematiku a chemii z knihy *Geometry: Seeing, Doing, Understanding*:

Molekula cholesterolu se skládá ze 74 atomů. Levý obrázek níže ukazuje model této molekuly a na pravém obrázku se nachází schéma, které ukazuje, jakým způsobem jsou její molekuly spojeny (obr. 1).

1. Jaké pravidelné mnohoúhelníky vidíte ve schématu?
2. Co musí platit, aby byl mnohoúhelník pravidelný? (Jacobs, 2003, s. 612)



Obrázek 1: Molekula cholesterolu (Atkins, 1987)

Abychom nenechali otázky nezodpovězené: Ve vzorci ve vyskytuje pravidelný šestiúhelník a pravidelný pětiúhelník. Mnohoúhelníky jsou pravidelné, pokud jsou všechny jejich strany stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly mají stejnou velikost.

Práce se dále věnuje především vztahu matematiky s biologií a geologií, které jsou nedílnou součástí přírodních věd. Těmito vztahy se budeme zabývat v několika následujících kapitolách.

### 3 Shodná zobrazení

Následující kapitola se opírá o poznatky z knihy *10 geometrických transformací* (Kuřina, 2002), která na mnoha místech ukazuje příklady shodných zobrazení v přírodě.

Na obrázku 2 se ukazuje osová souměrnost různých typů složených listů.



Obrázek 2: Souměrnost složených listů (Kuřina, 2002, s. 47)

Prvky osově souměrnosti (resp. rovinové souměrnosti, pohybujeme-li se v prostoru dimenze 3) jsou typické nejen pro většinu rostlin, ale i živočichů. Většina živočichů má jednu předozadní rovinu souměrnosti, takové živočichy v biologii označujeme jako bilaterálně souměrné. Najdeme však též živočichy, kteří mají více rovin souměrnosti (např. medúzy) či naopak nemají žádnou. Mezi živočichy, kteří nemají žádnou rovinu souměrnosti, patří např. hlemýžď zahradní, jehož ulita je asymetrická ve všech směrech (obrázek 3) nebo platýs velký, který se přizpůsobil k životu na písčitém dně, přičemž se obě jeho oči nacházejí na té polovině těla, která neleží v písku.



Obrázek 3: Asymetrie ulity hlemýžďe (Biolib, 2012)

V botanické oblasti se často setkáme také s rotační symetrií. Některé útvary se po otočení o určitý úhel dostanou do polohy, ve které vypadají stejně jako před otočením. Této vlastnosti říkáme rotační symetrie. Rotační symetrie má četnost  $n$ , přičemž  $\frac{360^\circ}{n}$  je úhel, o který objekt při rotaci otáčíme a  $n$  je zároveň počet shodných poloh při otáčení o  $360^\circ$ . Kuřina popisuje rotaci (resp. růst podle rotace) u květů kakostu bahenního

a kuklice horské (u obou květin se jedná o pětičetnou rotační symetrii, která se u rostlin vyskytuje nejčastěji). Rotační symetrie u květů není ojedinělá, najdeme ji např. u vlašovičnicku většího (čtyřčetná symetrie) či trnky obecné (šestičetná symetrie).

Na obrázku 4 je demonstrována čtyřčetná rotační symetrie u květu vlašovičnicku. Postupným otáčením květu vždy o  $90^\circ$  kolem bodu S se květ dostane čtyřikrát do polohy analogické s polohou výchozí.



Obrázek 4: Rotační symetrie vlašovičnicku (vlastní zdroj)



Obrázek 6: Vlašovičnick větší (vlastní zdroj)



Obrázek 5: Trnka obecná (Atlas rostlin, 2021)

U Kuřiny se setkáme též s posunutou souměrností, což je kombinace posunutí a osově souměrnosti. Toto zobrazení demonstruje na žilnatině listů buku a dubu. Totéž lze ukázat např. u květenství klasu.



Obrázek 7: Žilnatina listů (Kuřina, 2002, s. 97)

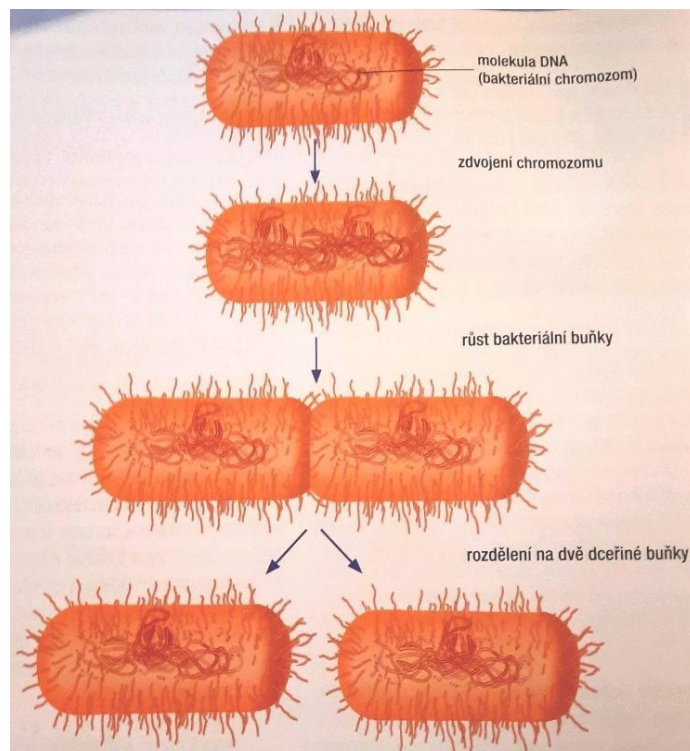


Obrázek 8: Květenství klas – schéma (vlastní zdroj)



Obrázek 9: Klas pšenice (Vesmír, 2009)

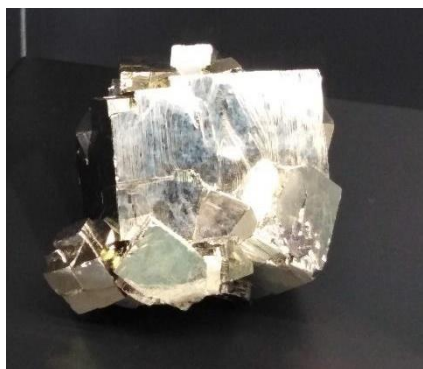
Kuřina nezůstává jen u shodných zobrazení, ale ukazuje také podobnost, kterou vysvětluje na příkladu listů jedné rostliny. Podobné útvary mají stejný tvar, liší se však velikostí. „*Takováto různorodost velikostí při zachování tvaru se vyskytuje v přírodě zcela běžně. Můžeme pozorovat různě velké listy téhož tvaru, neboť každý list rostliny roste podle týchž biologických zákonitostí*“. (Kuřina, 2002, s. 149-150) Totéž můžeme pozorovat u různých typů dělení některých vývojově nižších organismů, při kterém vznikají identické klony.



Obrázek 10: Příčné dělení bakterie (Závodská, 2006, s. 112)

## 4 Geologie a geometrie

Geologie a matematika jsou spolu spojeny zejména skrze rozmanité geometrické tvary hornin a krystalů různých minerálů. Přestože u krystalů, které se v přírodě běžně vyskytují, nejsou geometrické tvary nikdy zcela dokonalé, víme, jak by vypadaly krystaly vznikající ve vhodných podmínkách (tzv. ideální tvar krystalu). Krystaly často vytváří propracovaná a složitá tělesa, můžeme u nich ale pozorovat i základní rovinné útvary (Jacobs, 2003).

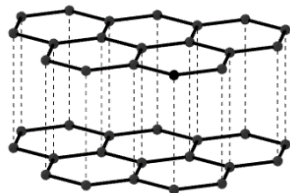


Obrázek 11: Názna krychlové struktury pyritu (vlastní zdroj)

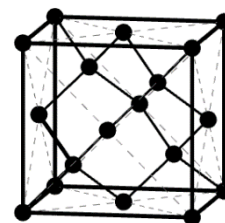


Obrázek 12: Turmalín (Jacobs, 2003, s. 575)

Některé minerály mohou krystalizovat řadou různých způsobů, dokonce jedna chemická látka může vytvářet různé minerály. Typickým příkladem je uhlík, který se vyskytuje ve formách grafitu (tuha) a diamantu. Tyto dvě formy téže látky mají zásadně odlišné chemické a fyzikální vlastnosti, což je zapříčiněno skladbou atomů. Grafit má atomy seskládané do šestiúhelníkových struktur (obr. 13) – body představují atomy a úsečky vazby mezi nimi, šestiúhelníky leží v několika vzájemně rovnoběžných rovinách (Jacobs, 2003, s. 127). Oproti tomu atomy diamantu jsou uspořádány v prostoru v krychlové síti (obr. 14), toto uspořádání dává diamantu větší pevnost.



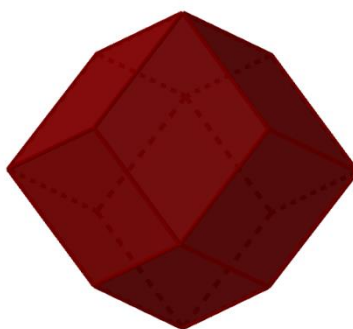
Obrázek 13: Atomová skladba grafitu (vlastní zdroj)



Obrázek 14: Krystalová mřížka diamantu (vlastní zdroj)

Mezi krystaly lze zařadit i sněhové vločky, které vznikají krystalizací vodní páry. Sněhové vločky fascinovaly už matematika Johannesese Keplera, který se snažil ve svém pojednání *O šestiúhelné sněhové vločce: poutavé čtení o „ničem“* (Kepler, 2017) zjistit, proč je jejich tvar odvozený od tvaru šestiúhelníku. V 17. století, kdy tento spis sepsal, ale pochopitelně neměl potřebné znalosti molekulárních vazeb, díky nimž by dosáhl uspokojivého vysvětlení. „*Dnes už toho víme mnohem více. Sněhové vločky vznikají, když mrzne voda kolem prachových částic ve vzduchu. Šestiramenná struktura vločky má původ v hexagonální symetrii, do níž se uspořádávají molekuly vody.*“ (Barrow, 2017, s. 172) Je tedy zřejmé, že sněhové vločky, stejně jako jiné krystaly, mají jasně předurčenou strukturu, díky specificky seskládaným atomům v tzv. krystalové mřížce. Na základě podobnosti těchto krystalových mřížek se krystaly běžně rozřazují do sedmi krystalových soustav (více o krystalových soustavách v kapitole 9.3.2).

Zajímavým útvarem je kosočtverečný dvanáctistěn. Skládáním takových dvanáctistěňů k sobě se zcela zaplňuje prostor bez jakýchkoliv vznikajících mezer. Díky této výhodné vlastnosti se s tvary blízcími se kosočtverečnému dvanáctistěnu setkáváme v přírodě poměrně často, a to nejen u krystalů, ale také např. u včelích buněk (Eastaway, 2002). Stejně tak Kepler zmiňuje tvar dvanáctistěnu u semen granátového jablka, která jsou sice nejprve kulovitá, během růstu se však deformují právě kvůli efektivnímu zaplnění prostoru uvnitř plodu.

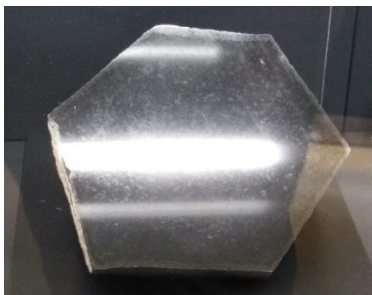


Obrázek 15: Model dvanáctistěnu (vlastní zdroj)

Jak už bylo řečeno výše, svou geometrickou strukturou nevynikají pouze krystaly, ale i některé horniny. Typickým příkladem je čedič, utvářející hranoly vysoké několik



desítek metrů, podstavou těchto hranolů je zpravidla pětiúhelník nebo šestiúhelník (Jacobs, 2003, s. 634).



*Obrázek 16: Řez čedičem (vlastní zdroj)*

## 5 Včelí architektura

Jak bylo naznačeno v předchozí kapitole, tvar včelích buněk není náhodný, nýbrž představuje strategicky výhodný tvar, který včelám umožňuje maximální využití prostoru. Matematickým jazykem lze včelí buňku popsat následovně: Každá buňka je desetistěn tvořený šestibokým hranolem se třemi kosočtverci na svém uzavřeném konci a chybějící šestiúhelníkovou stěnou na otevřeném konci (Archimedes' Laboratory, 2008).

Praktičnosti tohoto tvaru si všiml už Johannes Kepler, který poukazuje na to, že každá včelí buňka je ze všech stran (kromě otevřeného konce) obklopena dalšími buňkami, takže kolem jednotlivých buněk nevznikají žádné mezery. „*Přitom plochami dna sousedí buňka jedné vrstvy se třemi buňkami vrstvy protilehlé. Takto je buňka spojena nejen se šesti sousedními v téže vrstvě, ale i se třemi buňkami vrstvy protilehlé. Každá buňka tak sousedí s devíti dalšími, oddělena od každé z nich společnou stěnou.*“ (Kepler, 2017, s. 17-19)

Na následujícím odkazu je možné si detailně prohlédnout, jak včelí buňky vypadají:

<https://www.geogebra.org/m/j5cefvt>

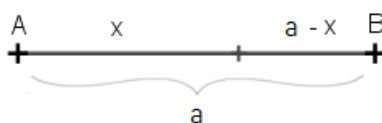


## 6 Zlatý řez a Fibonacciho posloupnost

Zlatý řez a Fibonacciho posloupnost mají úzkou souvislost a v přírodě se často vyskytují (Golden ratio, 2001). Začneme s definicí zlatého řezu. Rozdělíme-li úsečku  $a$  na dvě nové úsečky s délkami  $x$  a  $a - x$  tak, že platí,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x},$$

pak je tato úsečka rozdělena podle zlatého poměru (též označovaný jako zlatý řez).



Obrázek 17: Rozdělení úsečky v poměru zlatého řezu (vlastní zdroj)

Zlatý řez obvykle označujeme řeckým písmenem  $\varphi$ , jde o iracionální číslo a nejde ho tedy zapsat konečným počtem číslic (přibližně můžeme jeho hodnotu vyjádřit jako  $\varphi \cong 1,618$ ).  $\varphi$  můžeme vyjádřit úpravou předchozí rovnice:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

$$a^2 - ax = x^2$$

$$0 = x^2 + ax - a^2$$

$$x_1 = \frac{-a-a\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{-a+a\sqrt{5}}{2}.$$

Jelikož neznámá  $x$  představuje délku úsečky, záporný kořen  $x_1$  můžeme vyloučit. Za levou stranu rovnice tedy dosadíme  $x_2$  a dostaneme následující výraz:

$$\varphi = \frac{a}{\frac{-a+a\sqrt{5}}{2}}$$

$$\varphi = \frac{a}{\frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}}$$

$$\varphi = \frac{1}{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}$$

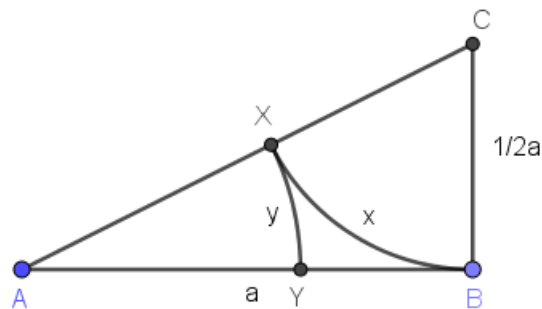
$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi = 1,6180339887498948482045868343656381 \dots$$

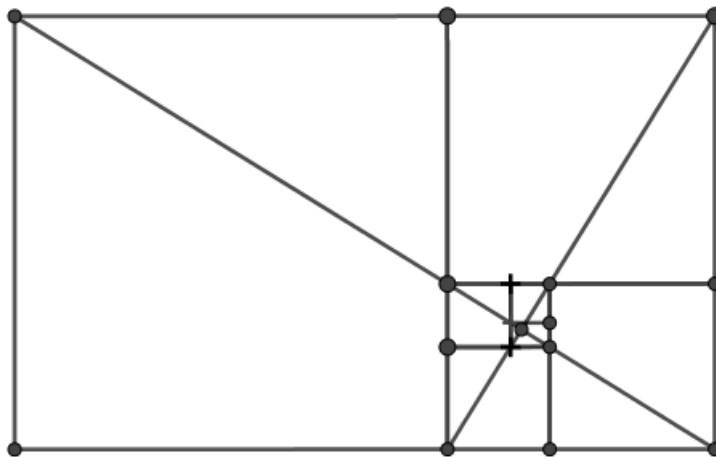
Ukažme si geometrickou konstrukci zlatého řezu:

1. Sestrojíme úsečku  $AB$  s délkou  $a$ .
2. Z bodu  $B$  vztyčíme k  $AB$  kolmici o délce  $\frac{1}{2}a$ .
3. Konec kolmice označíme jako bod  $C$ .
4. Sestrojíme trojúhelník  $ABC$ .
5. Sestrojíme kružnici  $x$  se středem v bodě  $C$  a poloměrem  $\frac{1}{2}a$ .
6. Průnik kružnice  $x$  a úsečky  $AC$  označíme jako bod  $X$ .
7. Sestrojíme kružnici  $y$  se středem v bodě  $A$  a poloměrem  $|AX|$ .
8. Průnik kružnice  $y$  a úsečky  $AB$  označíme jako bod  $Y$ .

Podíl délek úseček  $AB$  a  $AY$  je ve zlatém poměru.

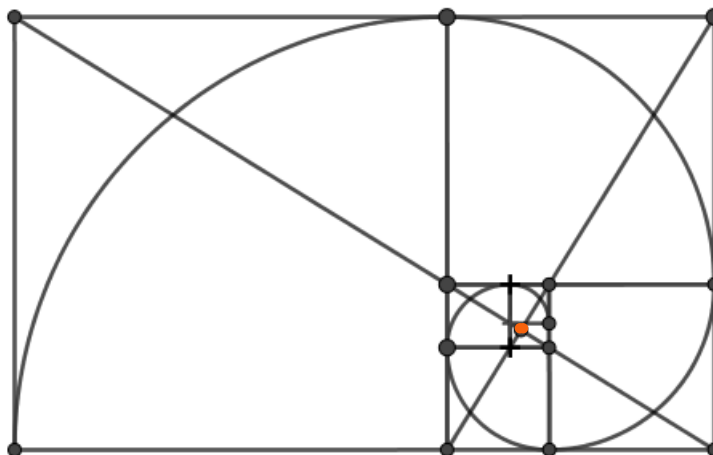


Pokud sestrojíme obdélník, jehož strany jsou v poměru zlatého řezu, a nad jeho delší stranou sestrojíme čtverec, nově vzniklý obdélník bude mít opět délky stran v poměru zlatého řezu (tzv. zlatý obdélník).



Obrázek 19: Zlatý obdélník (vlastní zdroj)

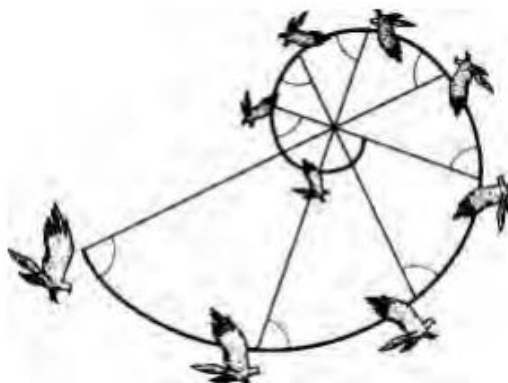
Zakreslíme-li navíc do zlatého obdélníku čtvrtiny kružnic způsobem, jaký je vidět na obrázku 20, získáme křivku, která svým tvarem aproximuje ke tvaru zlaté spirály. Zlatá spirála je speciální případ logaritmické spirály. Křivka logaritmické spirály je soběpodobná v každém svém měřítku a úsečka spojující její pól (tzv. „boží oko“, na obr. je znázorněno červeně) s libovolným dalším bodem křivky protíná tuto spirálu vždy pod stejným úhlem (tato vlastnost se nazývá rovnoúhlost).



Obrázek 20: Logaritmická spirála (vlastní zdroj)

Právě tato spirála se díky svým specifickým vlastnostem v přírodě často vyskytuje. Určuje např. dráhu letu sokolů při lovu kořisti. Proč ale sokolové nelétají přímo dolů ke své kořisti? Sokolové totiž stejně jako další druhy dravých ptáků mají oči po stranách hlavy a pokud by letěli přímo k zemi, neviděli by svou kořist nebo by museli mít nakloněnou hlavu, což by je při letu zpomalovalo. Ideální dráhou je pro ně logaritmická

spirála, při které mohou kořist pozorovat stále pod stejným úhlem (rovnoúhlost logaritmické spirály).



Obrázek 21: Dráha letu lovičího dravce (Livio, 2003, s. 119)

Logaritmická spirála je často ukazována na ulitě loděnky hlubinné. Protože se zvětšuje při zachování poměru svých částí, jak již bylo řečeno dříve, je ideální nejen pro stavbu schránek, ale také např. rohů, neboť se zvětšuje souběžně s tělem daného živočicha. Najdeme ji tak i u dalších druhů měkkýšů (např. hlemýžď zahradní) stejně jako u rohů některých lichokopytníků.



Obrázek 22: Kudu velký (Natural Scenery, 2008)

Fibonacciho posloupnost se též v přírodě ukazuje mnoha způsoby. Sám Fibonacci tuto posloupnost poprvé popisoval na dnes velmi známé simulaci rozmnožování králíků. Položil si otázku, kolik králíků se narodí v průběhu jednoho roku, pokud na začátku vezmeme jeden pár právě narozených králíků a dáme je do uzavřeného prostoru. Jestliže jeden pár králíků přivede na svět nový pár králíků každý měsíc, přičemž králíci pohlavně

dospívají po měsíci věku a budeme-li předpokládat, že žádný králik neuhyne, budou králíci přibývat následujícím způsobem:

- Na konci 1. měsíce dospěje 1 králičí pár.
- Na konci 2. měsíce máme 1 pár dospělých králiků a 1 pár mláďat.
- Na konci 3. měsíce máme 2 páry dospělých králiků a 1 pár mláďat.
- Na konci 4. měsíce máme 3 páry dospělých králiků a 2 páry mláďat.

Takto bychom mohli pokračovat dál, přičemž na konci každého měsíce je počet dospělých párů roven součtu dospělých párů a párů mláďat z předchozího měsíce.



Obrázek 23: Fibonacciho posloupnost (Livio, 2003, s. 97)

Tuto posloupnost lze zapsat rekurentně jako

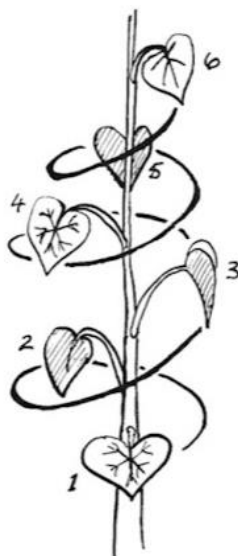
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

kde

$$a_1 = 1; a_2 = 1.$$

Příklady čísel Fibonacciho posloupnosti nalezneme také, podíváme-li se do rostlinné říše. Zkoumáme-li postavení listů na lodyhovém stonku nebo na větvích, zpozorujeme, že jednotlivé listy nerostou chaoticky, ale jejich vzdálenost od předchozích listů je dána určitým systémem (postavení listů na stonku odborně nazýváme fylotaxe). Tento systém je dán tím, že listy na stonku nebo větvi mají tendenci růst v polohách, které by optimalizovaly jejich vystavení slunci, dešti a vzduchu. (Livio, 2003, s. 109) V některých případech rostou listy protistojně (např. u rostlin čeledi kopřivovité), v takových případech jsou ale vždy spodní listy výrazně větší než listy nad nimi, takže

jím částečné stínění horních listů nevádí. Častěji se však setkáváme s tím, že listy rostou ve spirálách, přičemž vzdálenost dvou sousedních listů se dá vyjádřit zlomkem jako část z celé otáčky. U ostružiníku a různých druhů buků je to  $\frac{1}{3}$  otáčky, u meruňky je to  $\frac{2}{5}$  a dále např. u hrušně  $\frac{3}{8}$ . Jak je vidět, číselník a jmenovatel takového zlomku jsou zpravidla členy Fibonacciho posloupnosti.



Obrázek 24: Fylotaxe (Eastaway, 2008)

Podobné číselné vztahy najdeme nejen u listů, ale také u semen, plodů a květů, typickými příklady jsou šišky, ananas či slunečnice. Proč jsou Fibonacciho čísla u rostlin tak časté si vysvětlíme v následujícím odstavci.

Podíl dvou po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti je číslo, které se přibližuje číslu  $\varphi$  tím víc, čím vyšší členy použijeme. Platí tak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \varphi.$$

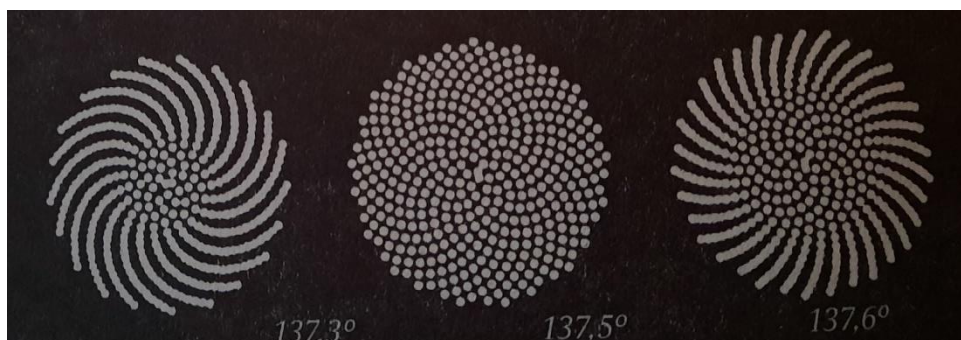
Zlatým poměrem přitom můžeme rozdělit nejen úsečku, ale také kružnici. Rozdělíme-li kruh na dvě kruhové výseče tak, že jejich poměr bude roven zlatému řezu, získáme tzv. zlatý úhel  $\psi \cong 137,5^\circ$ .

$$\psi = 360^\circ - 222,5^\circ$$

$$\frac{222,5^\circ}{137,5^\circ} \cong 1,618$$

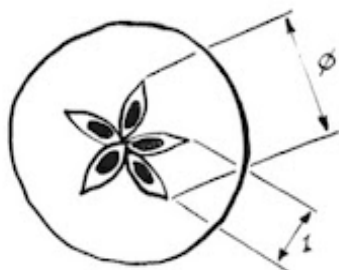


Fibonacciho čísla tedy souvisejí se zlatým úhlem. „*The angle by which each leaf is rotated from the previous one is usually between 137 and 139 degrees.*“ (Eastaway, 2008) Tento úhel také umožňuje efektivní uspořádání semen v květu slunečnice, stejně tak u semen šišek či ananasu (obr. 25).

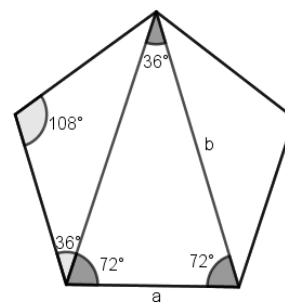


Obrázek 25: Zlatý úhel (Olsen, 2013)

Souvislost se zlatým řezem má i pravidelný pětiúhelník, se kterým se často setkáváme na poli botaniky. Pokud vzdálenost dvou sousedních vrcholů takového pětiúhelníku označíme jako 1, vzdálenost dvou nesousedících vrcholů bude rovna  $\varphi$ . (Eastaway, 2008)



Obrázek 26: Jablko (Eastaway, 2008)



Obrázek 27: Pětiúhelník (vlastní zdroj)

Důkaz můžeme provést pomocí sinové věty:

$$a = 1;$$

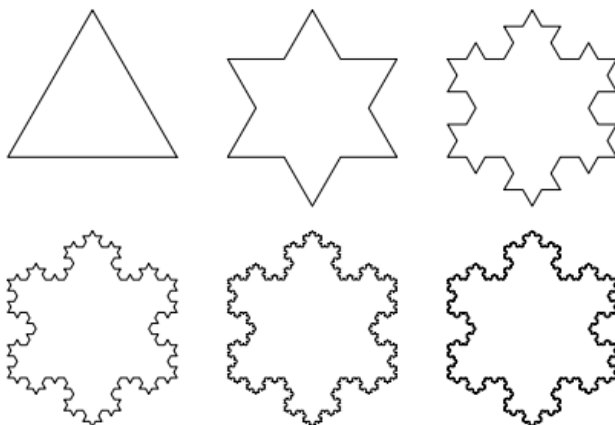
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$\frac{1}{\sin 36^\circ} = \frac{b}{\sin 72^\circ}$$

$$b \cong 1,618$$

## 7 Fraktály

Pojem „fraktál“ se v matematice poprvé objevil v 70. letech minulého století. „Fraktál je objekt, jehož geometrická struktura se opakuje v něm samém“ (Zelinka, 1999) Jde tedy o útvar, jehož vzor se postupně opakuje ve stále menším měřítku.

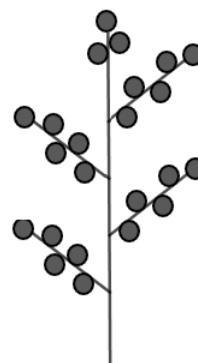


Obrázek 28: Ukázka fraktálního růstu (Barrow, 2017, s. 166)

„Shapes that are fractal, or certainly close to fractal, appear throughout nature. One often-quoted example is a fern leaf such as bracken. The large leaf is composed of nearly identical copies of itself.“ (Eastaway, 2002) Kapradiny ale nejsou zdaleka jediným vhodným příkladem. Často se jako příklad uvádí také brokolice či větve stromů, fraktální růst je krásně patrný i u některých složených květenství.



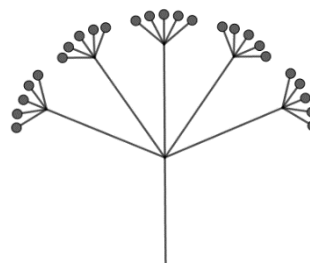
Obrázek 29: Jílek mnohokvětý (Biolib, 2012)



Obrázek 30: Klas složený z klásků (vlastní zdroj)



Obrázek 31: *Bršlice kozí noha* (vlastní zdroj)



Obrázek 32: *Okolík složený z okoličků* (vlastní zdroj)

## 8 Rešerše učiva

K tématu bakalářské práce se vztahuje příklady z učebnic pro základní a střední školy. Rešerše učiva byla provedena na řadě učebnic Odvárka a Kadlečka pro ZŠ, řadách učebnic pro nižší a vyšší gymnázia od nakladatelství Prometheus, dále byla analyzována *Sbírka aplikačních úloh ze středoškolské matematiky* (Robová a kol., 2014) a *Sbírka úloh z matematiky pro ZŠ* (Běloun, 1992).

### 8.1 Základní škola

V učebnicích matematiky se nevyskytuje mnoho příkladů, které by se opíraly o nějaké přírodní jevy, navíc většinou na přírodopis navazují pouze okrajově, i tak však u žáků pomáhají lépe utvářet reálnou představu z daných oblastí přírodních věd.

V učebnicích pro 6. ročník se objevují úlohy, které pracují s délkou těla živočichů. Tyto úlohy se zabývají jednotkami délky (Odvárko, Kadleček, 2020 a, s. 54-55), jejich převody a desetinnými čísly (Odvárko, Kadleček, 2020 b, s. 4-5, 40).

Dále některé učebnice pracují se shodností rovinných útvarů (Herman, 2012, s. 9) a s osovou souměrností u živočichů a rostlin (Herman, 2012, s. 24-25, 37) (Odvárko, Kadleček, 2020 c, s. 31-32). Přestože se v učebnicích vyskytují cvičení zaměřená na rozpoznávání osové i středové souměrnosti, cvičení, která se v učebnicích v tomto kontextu zabývají rostlinami nebo živočichy, jsou zaměřená pouze na osovou souměrnost.

Také se setkáme s úlohami zabývajícími se rozdíly nadmořských výšek terénu, jednak při práci s celými čísly (Odvárko, Kadleček, 2016 a, s. 64, 85) a jednak u funkcí (Odvárko, Kadleček, 2016 b, s. 33). Podobné úlohy s rozdíly nadmořských výšek jsou součástí kapitoly 9.4.2.

Matematika pro 9. ročník, 2. díl využívá vesmírných těles k výpočtu povrchu koule (Odvárko, Kadleček, 2016 c, s. 26).

Běloun se ve své sbírce úloh několikrát dotýká tématu biologie skrze hospodářské vlastnosti (klíčivost semen, podíl cukru v řepě, hnojení dusíkem), které sice s biologií souvisí spíše povrchově, avšak propojují úlohu s povědomím o fungování přírodních jevů (Běloun, 1992, s. 33, 49).



Řešení:

Potřebujeme znát celkový povrch planety Země, který spočítáme pomocí vzorečku pro výpočet povrchu koule.

$$S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Z úlohy vyčteme, že  $r = 6371 \text{ km}$ .

$$S = 4 \cdot \pi \cdot (6371)$$

$$S = 4 \cdot \pi \cdot 40\,589\,641$$

$$S = 510\,064\,472 \text{ km}^2$$

Celkový povrch Země je tedy přibližně  $510\,064\,472 \text{ km}^2$ .

a) Jestliže vodní plocha je 71 % povrchu Země, souše tvoří 29 %.

29 % z  $510\,064\,472$  spočítáme jako

$$510\,064\,472 \cdot 0,29 = 147\,918\,696,88$$

Souše tvoří plochu o rozloze přibližně  $147\,918\,696,88 \text{ km}^2$ .

b) 71 % z  $510\,064\,472$  spočítáme jako

$$510\,064\,472 \cdot 0,71 = 360\,145\,775,12$$

Oceány tvoří plochu o rozloze přibližně  $360\,145\,775,12 \text{ km}^2$ .

Pro kontrolu výpočtu sečteme plochu souší a oceánů a dostaneme znovu celkový povrch Země.

$$147\,918\,696,88 + 360\,145\,775,12 = 510\,064\,472$$

## 8.2 Střední škola

Učebnice pro gymnázia spojují přírodní jevy s periodickými (Odvárko, 1994, s.7) či exponenciálními funkcemi (Odvárko, 2019, s. 124, 155). Jako příklad geometrické posloupnosti ukazují poloměr rozpadu radia v čase (Odvárko, 2018, s. 51).

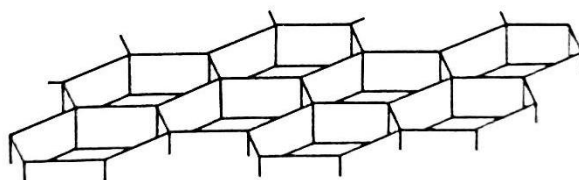
Ve Sbírce aplikačních úloh od Robové a kol. narazíme na úlohy, které počítají pravděpodobnost nákazy streptokokem a virem HIV, či pravděpodobnost onemocnění rakoviny prsu (Robová a kol. 2014, s. 132-137).

V učebnici stereometrie (Pomykalová, 2020, s. 37) najdeme úlohu, která se zabývá stavbou včelí plástve a zkoumá na ní různé typy vzájemných poloh rovin. Tuto úlohu si představíme a ukážeme její řešení. Pro její řešení je potřeba znát všechny možné vzájemné polohy tří rovin, těch najdeme právě pět a jsou také popsány ve zmíněné učebnici stereometrie.

Máme-li roviny  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$ , mohou být všechny rovnoběžné, nebo jsou alespoň dvě různoběžné. Pokud jsou dvě roviny rovnoběžné, např.  $\alpha$  a  $\beta$ , a třetí, v našem případě  $\gamma$ , je k nim různoběžná, pak  $\gamma$  protíná roviny  $\alpha$  a  $\beta$  v přímkách  $p$  a  $r$ , které jsou spolu rovnoběžné. Pokud jsou všechny tři roviny vzájemně různoběžné, nastane vždy jedna z následujících tří variant. Buď je průnikem všech tří rovin přímka (průsečnice), nebo je průnikem pouze bod (průsečík), nebo tři roviny žádný průnik nemají (v takovém případě jsou přímky vzniklé jako průsečnice vždy dvou ze tří rovin  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  vzájemně rovnoběžné).

Úloha:

*„Pozorujete-li několik sousedních včelích buněk v jejich charakteristickém seskupení [...], můžete pomocí rovin stěn těchto buněk ilustrovat všech pět možných vzájemných poloh tří rovin. Očíslujte jednotlivé stěny a proveďte.“* (Pomykalová, 2020, s. 37)



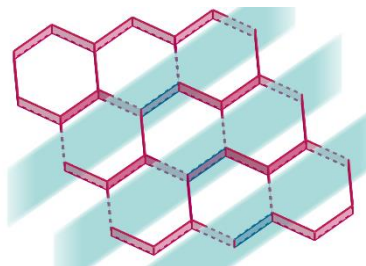
Obrázek 34: Včelí buňky (Pomykalová, 2020, s. 37)

Řešení:

Pro lepší názornost je řešení této úlohy provedeno v programu GeoGebra:

1. Příklad: Všechny tři roviny jsou rovnoběžné

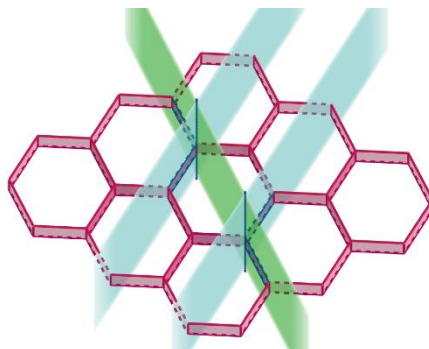
Roviny procházejí protilehlými stěnami buněk. Tento typ vzájemné polohy nastane také v případě, že stěnou, která je společná dvěma sousedícím buňkám, prochází roviny  $\alpha$  a  $\beta$ . V takovém případě by  $\alpha$  a  $\beta$  byly totožné.



Obrázek 35: Vzájemné polohy rovin 1 (vlastní zdroj)

2. Příklad: Právě dvě roviny jsou rovnoběžné

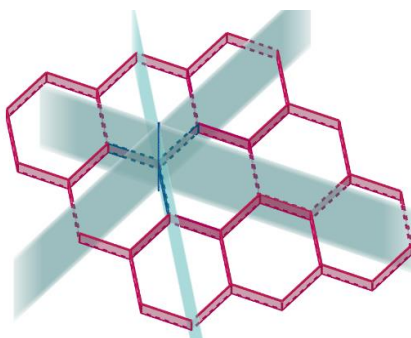
Pokud roviny  $\alpha$  a  $\beta$  procházejí protilehlými stěnami buňky (nebo dvou buněk) a rovina  $\gamma$  prochází libovolnou stěnou vedlejší k jedné z protilehlých stěn, jsou  $\alpha$  a  $\beta$  rovnoběžné a  $\gamma$  je k nim různoběžná. Přitom pokud průsečík  $\alpha$  a  $\gamma$  označíme jako přímkou  $p$  a průsečík  $\beta$  a  $\gamma$  označíme jako přímkou  $r$ , platí, že  $p$  a  $r$  jsou rovnoběžné.



Obrázek 36: Vzájemné polohy rovin 2 (vlastní zdroj)

3. Příklad: Žádné dvě roviny nejsou rovnoběžné, průsečíkem  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  je přímka

Tento případ nastane pouze, pokud  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  procházejí stěnami třech vzájemně sousedících buněk tak, že každé dvě z těchto stěn jsou stěny jedné buňky. Všechny tři zvolené stěny tak mají jednu společnou hranu, která je zároveň průsečnicí rovin  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$ .

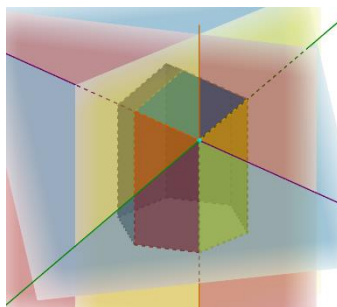


Obrázek 37: Vzájemné polohy rovin 3 (vlastní zdroj)



4. Příklad: Žádné dvě roviny nejsou rovnoběžné, průsečíkem  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  je bod

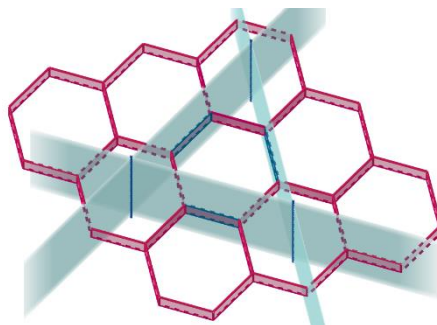
Pro simulaci této situace použijeme alespoň jednu stěnu, která tvoří uzavřený konec včelí buňky. Roviny  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  náležejí takovým stěnám, které mají společný nejvýše jeden vrchol. Potom pokud průsečík  $\alpha$  a  $\beta$  označíme jako přímkou  $p$ , průsečík  $\alpha$  a  $\gamma$  označíme jako přímkou  $r$  a průsečík  $\beta$  a  $\gamma$  jako přímkou  $q$ , pak všechny možná dvojice přímek utvořené z přímek  $p$ ,  $r$  a  $q$  jsou různoběžné.



Obrázek 38: Vzájemné polohy rovin 4 (vlastní zdroj)

5. Příklad: Žádné dvě roviny nejsou rovnoběžné, průsečík  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  neexistuje

Takovýto případ nastane vždy, když žádné dvě stěny, kterými roviny prochází, nebudou protilehlými stěnami jedné nebo dvou buněk a zároveň všechny tři zvolené stěny nebudou mít společnou hranu. Pokud průsečnici rovin  $\alpha$  a  $\beta$  označíme jako přímkou  $p$ , průsečnici rovin  $\alpha$  a  $\gamma$  označíme jako přímkou  $r$  a průsečnici rovin  $\beta$  a  $\gamma$  jako přímkou  $q$ , platí, že  $p$ ,  $r$  a  $q$  jsou rovnoběžné.



Obrázek 39: Vzájemné polohy rovin 5 (vlastní zdroj)

## 9 Materiály vytvořené pro výuku

Pro účely bakalářské práce jsem vytvořila celkem 14 úloh a dva pracovní listy propojující matematiku a přírodní jevy. Všechny dále popsané úlohy jsem vytvořila sama, některé jsou inspirované již existujícími příklady z učebnic, pro které jsem dělala rešerši (vždy je u konkrétní úlohy uveden zdroj inspirace). Úlohy jsou dále rozděleny do několika tematických celků. Úlohy 1, 2, 4, 9 a pracovní list na souměrnosti krystalů jsem vyzkoušela ve výuce na Církevní základní škole v Českých Budějovicích. Součástí práce je reflexe této výuky (kapitola 10).

### 9.1 Stavba včelích buněk

Problém stavby včelích buněk je rozdělen do dvou úloh. Zkoumání včelích buněk je určené primárně pro žáky 8. a 9. ročníku ZŠ a procvičuje následující matematické znalosti:

- Výpočet obsahů rovinných útvarů
- Pythagorova věta
- Úprava rovnic
- Úhly v mnohoúhelníku
- Specifika rovnostranného trojúhelníku

Problematiku včelích buněk je vhodné řešit kolektivně s celou třídou či v menších skupinkách formou společných úvah, částečně může být zadávána jako samostatná domácí práce.

**Výchozí text k úlohám 1-2:** Včela medonosná staví voskové buňky, dutý vnitřek těchto buněk tvoří válec, jehož kruhová podstava má průměr 5,3 mm a na příčném řezu mají buňky tvar šestiúhelníku. Šestiúhelníkové buňky včely staví záměrně, maximálně tak využívají prostor. Dokažte, že šestiúhelník je nejvhodnější tvar pro stavbu včelí buňky.

Řešení tohoto problému je třeba rozdělit na dvě samostatné úlohy.

- a) Musíme zjistit, jaké tvary ideálně zaplňují rovinu, tj. při přikládání takových útvarů k sobě mezi nimi nevznikají žádné mezery.

- b) Z těchto tvarů vybereme takový, který je nejefektivnější z hlediska spotřeby stavebního materiálu (vosku).

### 9.1.1 Pokrytí roviny

**Úloha 1:** Vyberte ze všech možných pravidelných mnohoúhelníků takové, které zaplňují plochu tak, že přikládáním těchto mnohoúhelníků k sobě se beze zbytku pokryje.

*Možný způsob řešení:*

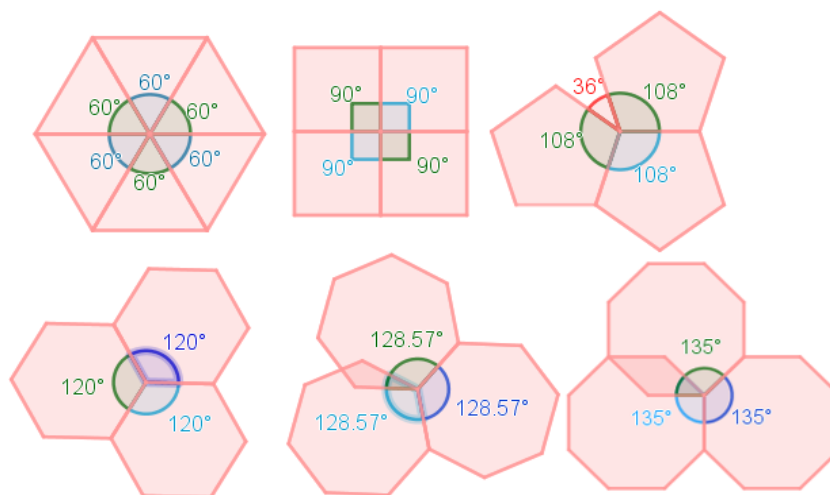
Aby se plocha mnohoúhelníky beze zbytku pokryla, je potřeba, aby všechny strany každého mnohoúhelníku byly společné pro sousední mnohoúhelníky. Velikost vnitřního úhlu takového  $n$ -úhelníku označme  $\alpha$ , velikost úhlu  $\alpha$  vypočítáme jako

$$\alpha = (n - 2) \cdot 180.$$

Můžeme si představit, že každý vrchol  $n$ -úhelníku společný pro  $n$   $n$ -úhelníků je středem kruhu a jednotlivé  $n$ -úhelníky okolo něj tvoří stejně velké kruhové výseče. Pokud mají tyto kruhové výseče zaplnit celý kruh, požadujeme, aby platilo, že

$$360|\alpha.$$

( $\alpha$  je dělitelem čísla 360).



Obrázek 40: Zaplnění roviny různými rovinnými útvary (vlastní zdroj)

Jak je vidět z obrázku 40, tuto podmínku splňuje pouze trojúhelník, čtverec a šestiúhelník. Mnohoúhelníky, které mají více než šest vrcholů, nemohou splňovat podmínku

$$360|\alpha$$

protože pro ně platí

$$120^\circ < \alpha < 180^\circ$$

a číslo 360 nemá žádného dělitele většího než 120 a menšího než 180.

### 9.1.2 Nejlepší tvar

Z předchozí úlohy jsme zjistili, že jediné mnohoúhelníky, které by mohly být použity pro stavbu včelí buňky, jsou trojúhelník, čtverec a šestiúhelník.

**Úloha 2:** Porovnejte rovnostranný trojúhelník, čtverec a pravidelný šestiúhelník, do nichž je vepsán kruh o průměru 5,3 mm a rozhodněte, který z útvarů včelám umožní postavit na dané ploše maximální počet buněk.

Pro zjednodušení výpočtů zanedbáváme minimální potřebnou tloušťku včelí buňky.

*Možný způsob řešení:*

Připomeňme si nejprve, že prostor, který včely pro své účely potřebují, je válec, resp. kruh, počítáme-li vše na průřezu včelí plástve. Pokud požadujeme, aby se na danou plochu vešlo co nejvíce kruhů, část plochy tvořená voskem by měla mít co nejmenší obsah. Ideální buňka tak bude mít obsah voskové části menší než buňky jiných tvarů. Všechny útvary mají vepsaný kruh o poloměru 2,65 mm. Obsah voskové části (na obrázcích je znázorněna hnědou barvou) vypočítáme jako rozdíl obsahu daného útvaru a obsahu vepsaného kruhu.

*Trojúhelník:* Pro výpočet obsahu trojúhelníku potřebujeme znát délku jeho strany. V rovnostranném trojúhelníku jsou osy úhlů, výšky a těžnice shodné. Na obrázku 41 je vyznačena kolmice na stranu AB, která je jak výškou (se stranou AB svírá pravý úhel), tak osou úhlu (leží na ní střed kružnice vepsané S), tak těžnicí ( $|AP| = |BP|$  a S je zároveň těžiště, rozděluje těžnici v poměru 2:1). Dopočítáme tedy délku  $\frac{2}{3}$  těžnice (na obrázku znázorněno modře). Délku strany trojúhelníku označíme jako  $2x$ , potom užitím Pythagorovy věty získáme vztah:

$$(2x)^2 = x^2 + (5,3 + 2,65)^2$$

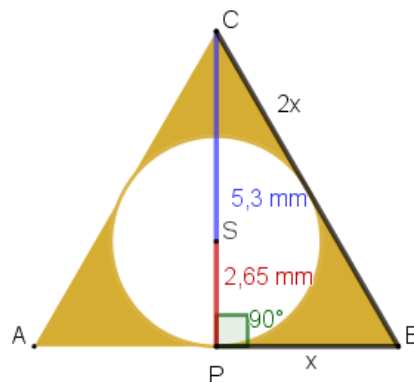
$$4x^2 = x^2 + 7,952$$

$$3x^2 = 63,2025$$

$$x^2 = 21,0675$$

$$x \cong 4,59 \text{ mm}$$

$$2x \cong 9,18 \text{ mm}$$



Obrázek 41: Rovnostranný trojúhelník (vlastní zdroj)

Potom už dokážeme vypočítat obsah hnědé části:

$$S_1 = S_{\text{trojúhelníku}} - S_{\text{kruhu}}$$

$$S_1 = \frac{9,18 \cdot 7,95}{2} - \pi \cdot 2,65^2$$

$$S_1 = 36,4905 - \pi \cdot 7,0225$$

$$S_1 \cong 14,43 \text{ mm}^2$$

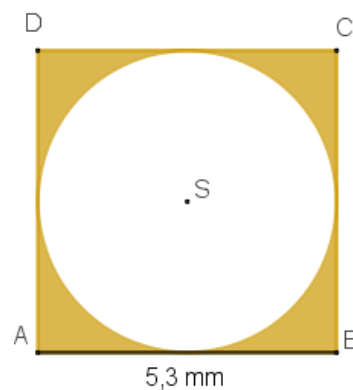
Čtverec: Délka strany čtverce je stejná jako průměr vepsané kružnice, tedy 5,3 mm.

$$S_2 = S_{\text{čtverce}} - S_{\text{kruhu}}$$

$$S_2 = 5,3^2 - \pi \cdot 2,65^2$$

$$S_2 = 28,09 - \pi \cdot 7,0225$$

$$S_2 \cong 6,03 \text{ mm}^2$$



Obrázek 42: Čtverec (vlastní zdroj)

*Šestiúhelník:* Pro výpočet obsahu šestiúhelníku je potřeba si uvědomit, že ho lze poskládat ze šesti shodných rovnostranných trojúhelníků. Postup je pak obdobný jako u rovnostranného trojúhelníku.

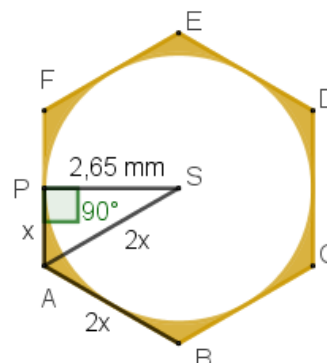
$$(2x)^2 = x^2 + 2,65^2$$

$$3x^2 = 7,0225$$

$$x^2 \cong 2,34$$

$$x \cong 1,53 \text{ mm}$$

$$2x \cong 3,06 \text{ mm}$$



Obrázek 43: Šestiúhelník (vlastní zdroj)

$$S_3 = 6 \cdot S_{\text{trojúhelníku}} - S_{\text{kruhu}}$$

$$S_3 = 6 \cdot \frac{3,06 \cdot 2,65}{2} - \pi \cdot 2,65^2$$

$$S_3 = 24,327 - \pi \cdot 7,0225$$

$$S_3 \cong 2,27 \text{ mm}^2$$

Z předchozích výpočtů jasně vyplývá, že nejvýhodnějším tvarem pro stavbu včelí buňky je skutečně šestiúhelník, protože z vybraných útvarů má nejmenší obsah.

$$S_1 > S_2 > S_3$$

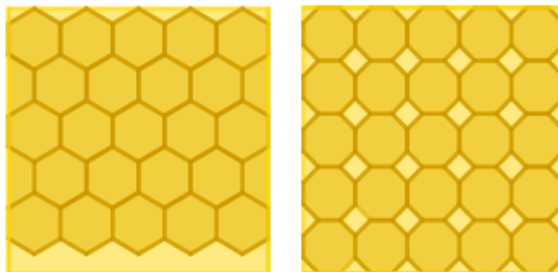
Na základě předchozí úlohy můžeme se žáky formulovat hypotézu, že čím více vrcholů bude mít mnohoúhelník, kterému je vepsaná kružnice daného poloměru, tím menší bude jeho obsah, protože se vzrůstajícím počtem vrcholů se mnohoúhelník bude svým tvarem více přibližovat tvaru vepsané kružnice (ukázka na následujícím odkazu).

<https://www.geogebra.org/m/zgscyfm>



Pokud bychom tedy nejprve neřešili úlohu o ideálním pokrytí roviny, mohlo by se zdát, že výhodnějším tvarem by byl mnohoúhelník s více vrcholy (např. osmiúhelník).

Použitím takového mnohoúhelníku by ale v plástvi vždy vznikaly nepraktické mezery. Z obrázku 44 je patrné, že stejný počet šestiúhelníkových buněk zabírá méně prostoru než u buněk tvaru osmiúhelníku.



Obrázek 44: Porovnání zaplnění plochy včelími buňkami tvaru šestiúhelníku a osmiúhelníku (vlastní zdroj)

Také si můžeme položit otázku, zda je pro určení ideálního tvaru včelí buňky podstatné, jaký je poloměr vepsaného kruhu (stále zanedbáváme minimální tloušťku stěny včelí buňky). Není. Pokud bychom poloměr ve všech předchozích výpočtech nahradili proměnnou  $r$ , poměr výsledných obsahů by zůstal stejný. Toto dokládá i samotná včelí architektura – včely, které jsou evolučně motivovány vytvářet buňky s nejefektivnějším použitím materiálu, staví několik typů šestiúhelníkových buněk, které se liší pouze ve velikosti.

Stejně tak pro určení ideálního tvaru včelí buňky není podstatné, jak jsou buňky dlouhé. Pokud bychom totiž chtěli vypočítat objem jedné včelí buňky (opět můžeme uvažovat trojúhelník, čtverec a šestiúhelník), použili bychom vztah

$$V = S_{podstavy} \cdot v,$$

kde  $v$  je výška vepsaného válce. Pak platí

$$V_1:V_2:V_3 = (S_1 \cdot v):(S_2 \cdot v):(S_3 \cdot v) = S_1:S_2:S_3.$$

Následující dva odkazy ukazují, že měníme-li  $r$  resp.  $v$  u daných objektů, poměr obsahů resp. objemů těchto útvarů zůstane stejný.

<https://www.geogebra.org/m/z8uzt3xe>



<https://www.geogebra.org/m/wsrxbghe>





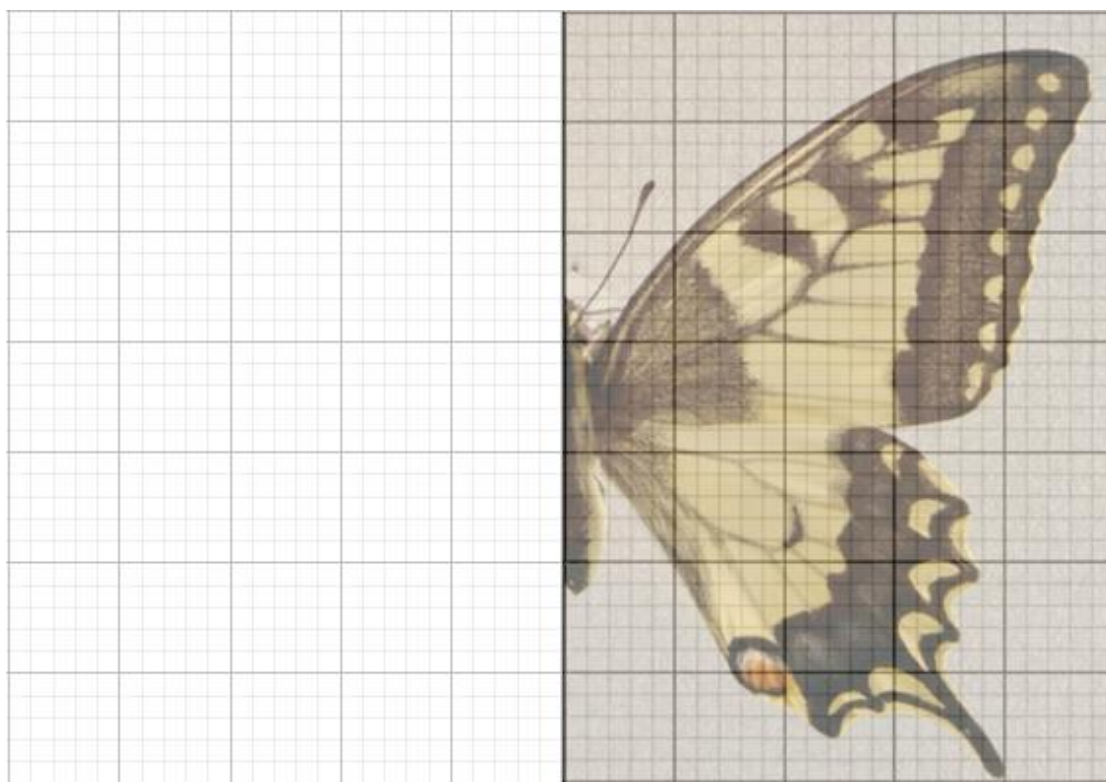
## 9.2 Souměrnost v přírodě

U rostlin a zvířat se velmi často setkáváme s prvky osové a středové souměrnosti. Přestože souměrnost v přírodě není ve skutečnosti nikdy zcela dokonalá, může být pozorování přírodních jevů pro žáky dobrým způsobem, jak souměrnost lépe pochopit a naučit se ji vnímat i ve svém reálném okolí.

Úlohy 3-5 jsou určeny primárně pro žáky 6. a 7. ročníku. Procvičují znalosti osové a středové souměrnosti. Úloha 3 je inspirována příkladem z učebnice *Matematika pro 6. ročník základní školy, 3. díl* (Odvárko, Kadleček 2020, s. 31). Protože rotační symetrie se běžně na základních školách nevyučuje, je úloha 6 vhodná spíše pro gymnázia či jako „nadstavbová“ úloha např. při přípravě na přijímací zkoušky.

**Úloha 3:** Dokreslete co nejuvěrněji levou polovinu motýla (obr. 45).

Podle čeho poznáte, jak přesně motýla dokreslit? Vysvětlete:



Obrázek 45: Motýl – dokreslování (vlastní zdroj)

*Řešení:*

Při dokreslování motýla používáme osovou souměrnost, levou polovinu doplňujeme zrcadlově podle pravé.

Na levém obrázku je motýl přesně osově souměrný, takto by měl ideálně vypadat kreslený. V přírodě ale není osová souměrnost nikdy zcela dokonalá, na pravém obrázku je proto k porovnání skutečná fotografie motýla – při bližším zkoumání si můžeme všimnout drobných rozdílů.



Obrázek 46: Motýl – ideální a skutečná fotografie (vlastní zdroj)

Osovou souměrnost motýla lze využít i v jiném úkolu, který není tolik časově a umělecky náročný. Žáci dostanou ve dvojici papír se čtvercovou sítí, ve které je zakreslena pravá polovina motýla, a obálku s čtvercovými kartičkami (viz příloha č. 1). Doplnující informace k úloze 4 jsou podrobněji rozepsány v kapitole 10.

**Úloha 4:** Před sebou máte 24 kartiček a čtvercovou síť, ve které je zakreslena pravá polovina fotografie motýla. 12 kartiček tvoří levou polovinu fotografie. Pomocí znalostí o osově souměrnosti vyberte všechny kartičky, které tvoří levou polovinu obrázku a nalepte je do čtvercové sítě.

*Řešení:*

Na fotografiích je zachycena práce žáků 6. ročníku CZŠ.



Obrázek 47: Práce žáků (vlastní zdroj)

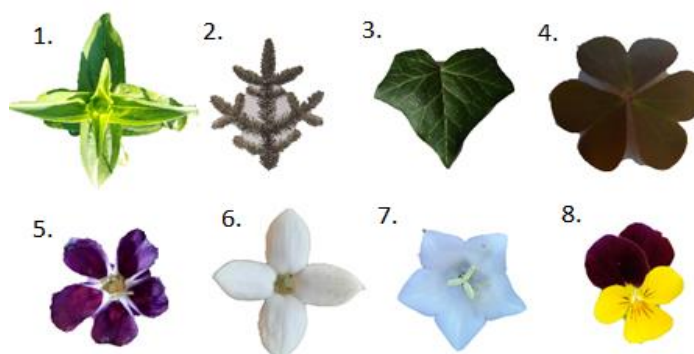
### Úloha 5:

1. U každého z obrázků 1-8 rozhodněte, zda:

- Je osově souměrný
- Je středově souměrný
- Není ani osově souměrný ani středově souměrný

(čísla přiřaďte k bodům a-c.)

2. Osy souměrnosti vyznačte v obrázcích červeně, středy souměrnosti vyznačte modře.

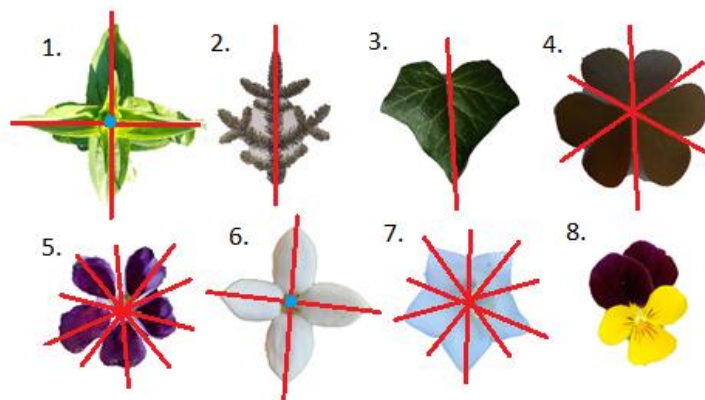


Obrázek 48: Souměrnosti rostlin (vlastní zdroj)

Řešení:

1. U každého z obrázků 1-8 rozhodněte, zda je:

- Je osově souměrný – 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7.
- Je středově souměrný – 1., 6.
- Není ani osově souměrný ani středově souměrný – 8.



Obrázek 49: Souměrnost rostlin – řešení (vlastní zdroj)

**Úloha 6:** Určete, které z rostlinných částí 1-8 na obrázku 48 obsahují rotační symetrii, případně určete její četnost.

*Řešení:*

1. Obsahuje rotační symetrii,  $n = 2$
2. Neobsahuje rotační symetrii
3. Neobsahuje rotační symetrii
4. Obsahuje rotační symetrii,  $n = 3$
5. Obsahuje rotační symetrii,  $n = 5$
6. Obsahuje rotační symetrii,  $n = 4$
7. Obsahuje rotační symetrii,  $n = 5$
8. Neobsahuje rotační symetrii

## 9.3 Geometrie neživé přírody

### 9.3.1 Symetrie krystalů

Se symetrií se setkáváme nejen v rovině, ale i v prostoru. Dobře ji lze pozorovat u některých krystalických struktur.

V prostoru dimenze 3 se setkáváme nejen s osou a středem souměrnosti, ale také s rovinovou souměrností. Rovina souměrnosti v prostoru rozděluje těleso na dvě shodné poloviny, které jsou k sobě zrcadlově převrácené. Rovinová souměrnost je analogická k osové souměrnosti v prostoru dimenze 2.

Osou souměrnosti v prostoru rozumíme přímku, která prochází středem tělesa. Otáčením krystalu o  $360^\circ$  podle osy souměrnosti se krystal několikrát dostane do pozice, která je shodná s pozicí výchozí (totéž co rotační symetrie v rovině). Osy souměrnosti můžeme rozdělovat podle četnosti shodných pozic při otáčení útvaru o  $360^\circ$  kolem dané osy. Středová souměrnost v prostoru má stejné vlastnosti jako v rovině: libovolný bod  $X$  náležící krystalu se zobrazuje na bod  $X'$  náležící krystalu, pokud bod  $S$  (střed středové souměrnosti) je středem úsečky  $XX'$ .

Pro zkoumání souměrností u krystalů byl vytvořen v programu GeoGebra pracovní list určený primárně pro žáky 9. tříd. V tomto pracovním listu mohou žáci zkoumat roviny a osy souměrnosti, středovou souměrnost u krystalů almandinu (granát), fluoritu, křemene a aragonitu. Celý pracovní list včetně jeho řešení se nachází na následujícím odkazu:

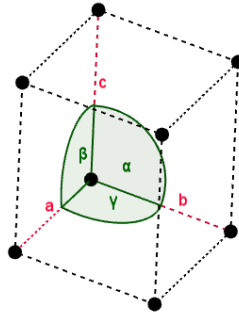
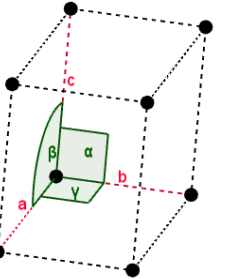
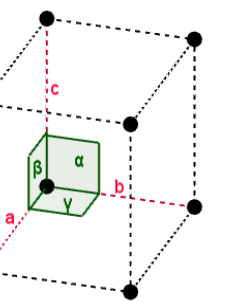
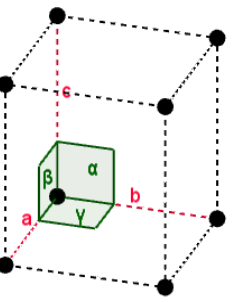
<https://www.geogebra.org/m/tsbbxqp8>

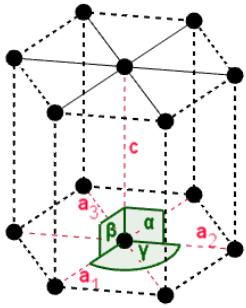
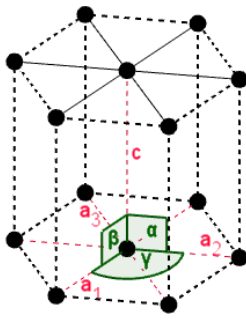
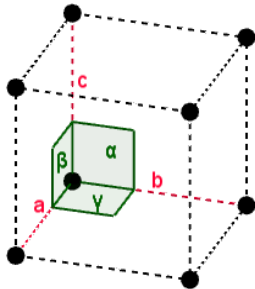


### 9.3.2 Krystalové soustavy

Krystaly se podle jejich geometrických vlastností rozdělují do sedmi krystalových soustav. Jednotlivé soustavy se liší vzhledem krystalové mřížky (krystalová mřížka udává, v jaké vzdálenost a pod jakým úhlem se k sobě přichycují atomy daného krystalu, přičemž krystal zachovává tyto úhly a poměr vzdáleností mezi atomy). Krystalové soustavy se také liší v počtu os a rovin souměrnosti.

Základní vlastnosti krystalových soustav jsou popsány v následující tabulce:

Název krystalové soustavy	Vzdálenosti a úhly v krystalové mřížce	Znaky souměrnosti
Trojklonná	$a \neq b \neq c; \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$ 	Kryštaly nemají žádnou rovinu souměrnosti ani osu souměrnosti, jsou pouze středově souměrné
Jednoklonná	$a \neq b \neq c; \beta \neq 90^\circ; \alpha = \gamma = 90^\circ$ 	Kryštaly mají 1 rovinu souměrnosti
Kosočtverečná	$a \neq b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ 	Kryštaly mají 3 na sebe kolmé roviny souměrnosti
Čtverečná	$a = b \neq c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ 	Kryštaly mají 5 rovin souměrnosti – 4, jejichž průnikem je svislá osa souměrnosti a 5. rovina souměrnosti je k nim kolmá Svislá osa souměrnosti je čtyřčetná

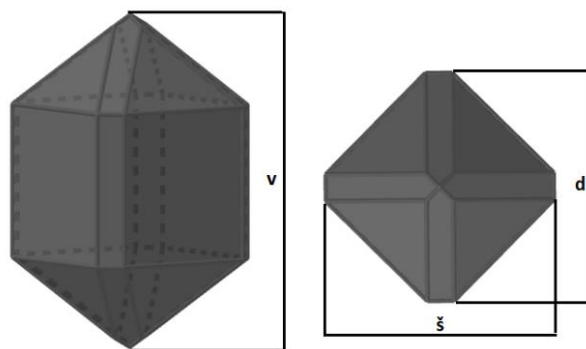
Šesterečná	$a_1 = a_2 = a_3 \neq c; \alpha = \beta = 90^\circ; \gamma = 120^\circ$ 	Krystaly mají 7 rovin souměrnosti – 6, jejichž průnikem je svislá osa souměrnosti a 7. rovina souměrnosti je k nim kolmá Svislá osa souměrnosti je šestičetná
Klencová	$a_1 = a_2 = a_3 \neq c; \alpha = \beta = 90^\circ; \gamma = 120^\circ$ 	Krystaly mají 3 svislé roviny souměrnosti (svírají úhel $120^\circ$ ) Svislá osa souměrnosti je trojčetná
Krychlová	$a = b = c; \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ 	Krystaly jsou odvozené od tvaru krychle Mají 9 rovin souměrnosti

Pomocí určování geometrických vlastností určitého krystalu ho můžeme zařadit do příslušné krystalové soustavy. K určování krystalových soustav byl vytvořen pracovní list, který se nachází na následujícím odkazu. Pracovní list je určen primárně pro žáky 9. ročníku ZŠ.

<https://www.geogebra.org/m/kc5vpgg4>



Abychom si přiblížili, jak se dá určit krystalová soustava, do níž krystal patří, uvedeme si zde příklad z pracovního listu:



Obrázek 50: Krystal cínovce (vlastní zdroj)

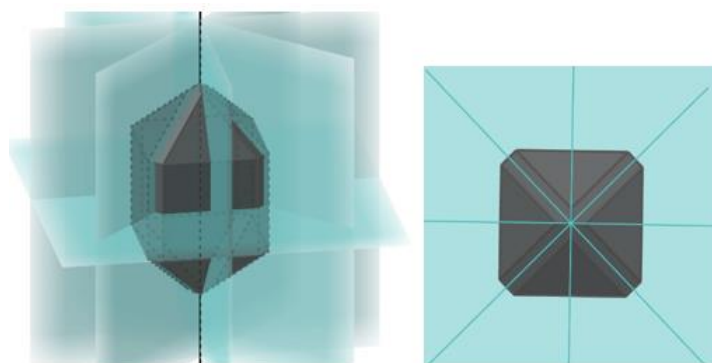
Na obrázku 50 je krystal cínovce zobrazen při pohledu zepředu a shora, je zde vyznačena výška ( $v$ ), šířka ( $š$ ) a délka ( $d$ ) krystalu, přičemž

$$š = d \neq v$$

resp.

$$a = b \neq c.$$

Podle tabulky je tento vztah typický pouze pro soustavu čtverečnou, proto krystal cínovce patří do soustavy čtverečné. Pokud bychom chtěli toto tvrzení ověřit zkoumáním prvků symetrie krystalu, dospěli bychom ke stejnému závěru, protože cínovec má 5 rovin souměrnosti a 1 čtyřčetnou osu souměrnosti (obr. 51).



Obrázek 51: Osy a roviny souměrnosti krystalu cínovce (vlastní zdroj)

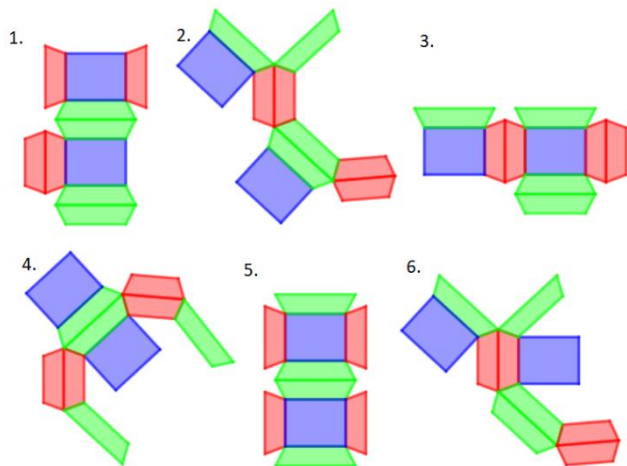
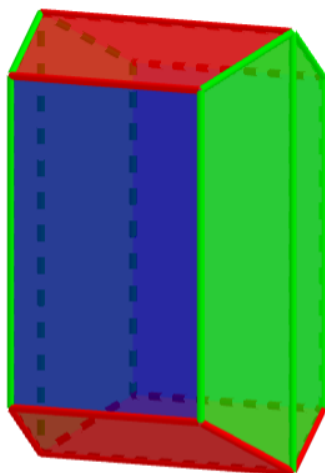
### 9.3.3 Sítě krystalů

Krystaly díky svým komplikovaným tvarům mohou pomoci žákům s rozvíjením prostorové představivosti. K rozvoji prostorové představivosti jsou dobré úlohy se sítěmi těles, proto byly takové úlohy vytvořeny pro krystaly aragonitu a fluoritu:





**Úloha 7:** Na obrázku 52 je model krystalu aragonitu. Rozhodněte, který z následujících útvarů 1-6 je sítí tohoto krystalu.



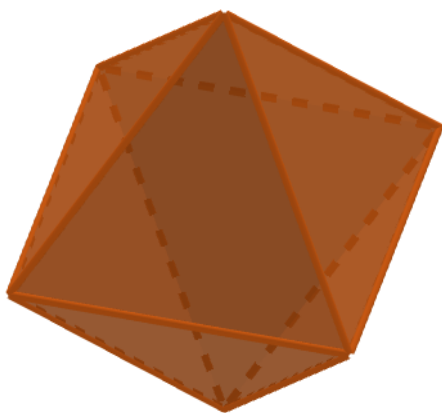
Obrázek 53: Krystal aragonitu (vlastní zdroj)

Obrázek 52: Sítě krystalu aragonitu (vlastní zdroj)

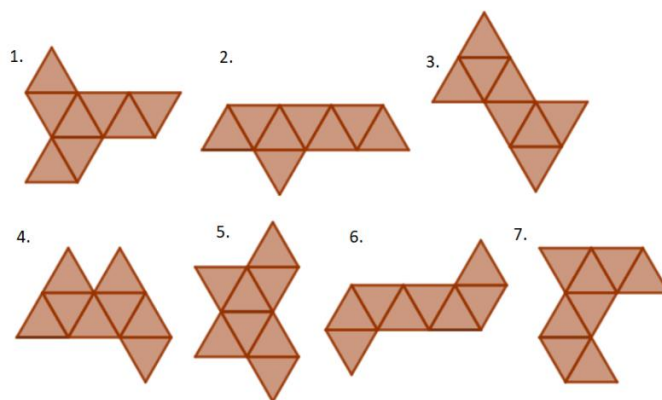
**Řešení:**

1. Není sítí krystalu
2. Není sítí krystalu
3. Je sítí krystalu
4. Není sítí krystalu
5. Je sítí krystalu
6. Je sítí krystalu

**Úloha 8:** Na obrázku 54 je model krystalu fluoritu. Rozhodněte, který z následujících útvarů 1-6 je sítí tohoto krystalu.



Obrázek 55: Krystal fluoritu (vlastní zdroj)



Obrázek 54: Sítě krystalu fluoritu (vlastní zdroj)

*Řešení:*

1. Je sítí krystalu
2. Není sítí krystalu
3. Je sítí krystalu
4. Není sítí krystalu
5. Je sítí krystalu
6. Je sítí krystalu
7. Není sítí krystalu

Zatímco u aragonitu lze vytvořit více než 100 různých sítí, fluorit (oktaedr) má pouze 11 různých variant, jak lze síť vytvořit. Všechny sítě fluoritu a některé sítě aragonitu (36) naleznete v příloze č. 2.

Pro všechny krystaly, které se objevily v kapitole 6 nebo byly použity v některém z pracovních listů, byla vytvořena síť, podle které je možné složit trojrozměrné modely krystalů pro využití ve výuce (viz příloha č. 3).

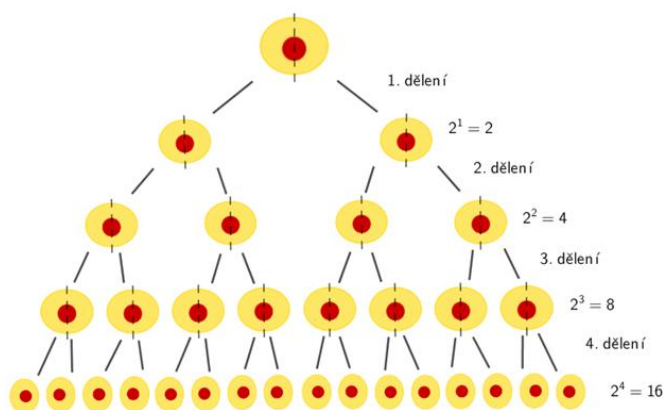
Úlohy a jednotlivé úkoly z kapitoly 9.3.3 slouží zejména k trénování prostorové představivosti.

## 9.4 Biologie jako nástroj k pochopení matematiky

Pro některé žáky/studenty je matematika velmi abstraktní, a proto těžká na pochopení. Praktické a vizuální příklady tak mohou být dobrou oporou pro lepší porozumění určitému matematickému problému. Biologii lze v některých případech použít jako model, na kterém se konkrétněji matematický problém představí.

### 9.4.1 Dělení buněk a nultá mocnina

**Úloha 9:** U určitého typu buněčného dělení (např. mitóza) dochází k tomu, že se jedna buňka rozdělí na dvě dceřiné buňky. Když dceřiné buňky dozrají, dělí se každá z nich na dvě buňky a tento proces se dále opakuje. V každé nové generaci vzniká  $2^n$  nových buněk, přičemž  $n$  je počet proběhlých dělení. Na základě následujícího obrázku (obr. 56) se pokuste vysvětlit, proč  $2^0 = 1$ .



Obrázek 56: Buněčné dělení (vlastní zdroj)

*Řešení:*

Celý proces začíná jednou buňkou ve chvíli, kdy ještě neproběhlo žádné dělení, tedy  $n = 0$ . Na buněčném dělení tak lze vizuálně předvést, že

$$2^0 = 1.$$

Tento proces by fungoval obdobně i pro jiný počet dceřiných buněk, které vzniknou z jedné mateřské buňky. Jestliže se buňka pravidelně dělí na  $a$  dceřiných buněk,  $a^n$  bude počet buněk v  $n$ -té generaci a stále tak platí

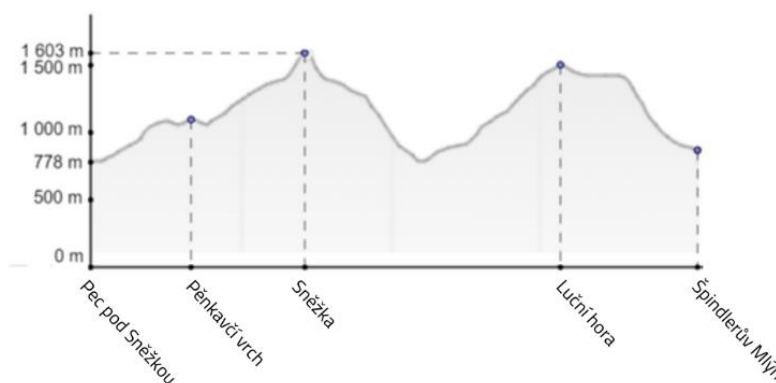
$$a^0 = 1.$$

## 9.4.2 Funkce

S výukou funkcí se začíná už na základní škole v 9. ročníku. Žáci se učí z obrázku poznat, co je a není funkce, dále jak interpretovat a zapsat definiční obor a obor hodnot a určovat monotonii.

Funkce mohou být pro žáky obtížně představitelné. Následující úlohy mají pomoci žákům s pochopením výše popsaných pojmů. Úlohy 10-14 jsou inspirované cvičením z učebnice *Matematika pro 9. ročník základní školy, 1. díl* (Odvárko, Kadleček 2016 a, s. 33).

**Text a obrázek k úlohám 10-14:** Novákovi se rozhodli jet na turistický výlet do Krkonoš. Tatínek naplánoval dvoudenní výlet: „Vyrázíme z Pece pod Sněžkou (1) a cestou přes Pěnkavčí vrch (2) dojdeme na Sněžku (3). Pak se vrátíme do Pece pod Sněžkou, kde přespíme v penzionu. Druhý den půjdeme přes Luční horu (4) do Špindlerova Mlýna (5). Celkem bychom tak měli ujít asi 33,5 km.“



Obrázek 57: Výškový profil 1 (vlastní zdroj)

Na obrázku 57 je vidět výškový profil naplánované trasy. Na základě textu a obrázku vyřešte následující úlohy:

**Úloha 10:** Můžeme výškový profil trasy označit jako funkci? Vysvětlete proč. Co představuje osa x a osa y?

*Řešení:*

Abychom mohli určit, zda jde o funkci, musíme nejprve vědět, co je to funkce. Funkce se na základních školách definuje jako předpis, který ke každému  $x$  z definičního oboru přiřazuje právě jednu hodnotu  $y$ . Výškový profil tuto definici splňuje. Představíme-li si,

jak procházíme trasu, je zřejmé, že budeme mít v každém místě zcela jasně danou nadmořskou výšku a není možné, abychom byli v jednom místě ve více nadmořských výškách najednou. Výškový profil tak můžeme považovat za funkci, která nám říká o každém místě trasy (osa x), jakou má nadmořskou výšku (osa y).

**Úloha 11:** Určete obor hodnot této funkce.

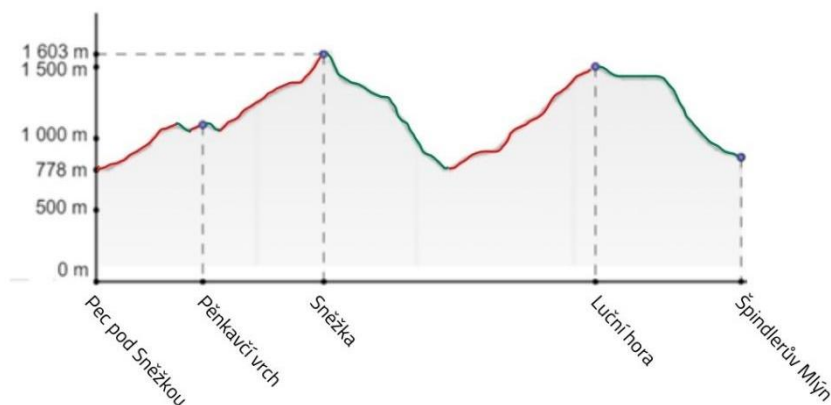
*Řešení:*

Jak už bylo řečeno u předchozí úlohy, hodnota y představuje nadmořskou výšku v každém bodě trasy x. Obor hodnot je tedy rozmezí nadmořských výšek celé trasy.

$$H(f) = \langle 778; 1603 \rangle$$

**Úloha 12:** Označte všechny rostoucí úseky červeně a všechny klesající úseky zeleně.

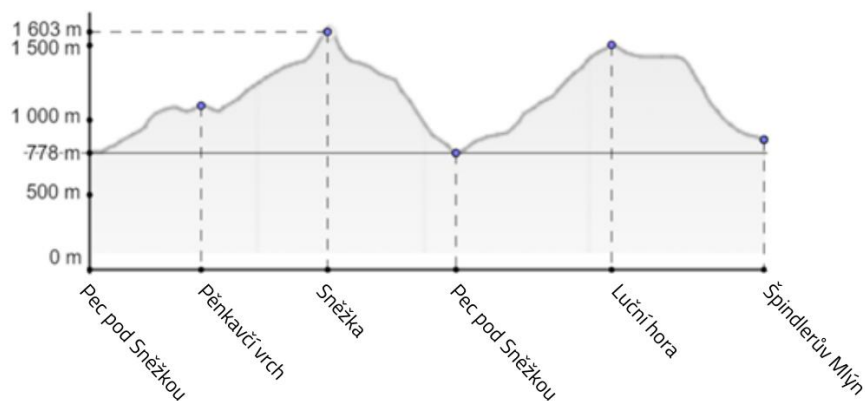
*Řešení:*



Obrázek 58: Výškový profil 2 (vlastní zdroj)

**Úloha 13:** Můžeme z výškového profilu jednoznačně určit, ve kterém místě trasy se Novákovi znovu dostanou do Pece pod Sněžkou? Pokud ano, místo v grafu vyznačte. (Nápověda: Pec pod Sněžkou je nejnižším místem z celé trasy).

Řešení:

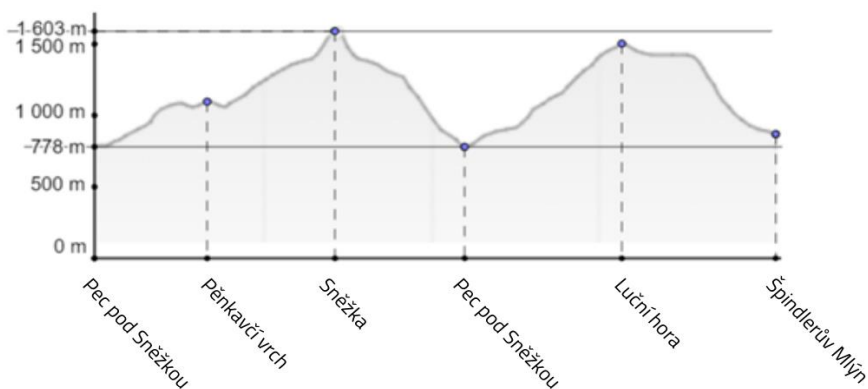


Obrázek 59: Výškový profil 3 (vlastní zdroj)

Pec pod Sněžkou se nachází ve výšce 778 m n. m. Protože nadmořská výška tohoto místa bude pořád stejná (konstantní), musí se druhá zastávka v Peci nacházet na přímce, která je kolmá k ose  $y$  a protíná jí ve výšce 778 m n. m. Jelikož je Pec pod Sněžkou nejnižším bodem trasy, protne tato přímka graf pouze v jednom bodě (jiném od počátku trasy). Průsečík přímky a grafu označuje Pec pod Sněžkou.

**Úloha 14:** Na první pohled by se mohlo zdát, že Luční hora je stejně vysoká jako Sněžka. Jde podle grafu nějak určit, jestli je to pravda?

Řešení:



Obrázek 60: Výškový profil 4 (vlastní zdroj)

Víme, že Sněžka měří 1603 m. Pokud by obě místa ležela ve stejné výšce, musela by jimi procházet přímka kolmá k ose  $y$ , protínající tuto osu ve výšce 1603 m. Jak je vidět na obrázku 60, tato přímka bodem označujícím Luční horu neprochází, Luční hora je pod hodnotou 1603 m a je tedy nižší než Sněžka.

## 10 Reflexe úloh vyzkoušených na ZŠ

Některé úlohy byly odzkoušeny ve výuce matematiky na Církevní základní škole v Českých Budějovicích. Konkrétně se jedná o úlohy 1, 2, 4, 9 a kromě toho i pracovní list o souměrnostech krystalů.

Úlohy 1 a 2 byly zadány ve dvou 8. třídách. Hlavním cílem těchto úloh bylo procvičení logického uvažování a uvědomění si přesahu dále zmíněných matematických znalostí do reálného světa, dílčím cílem bylo procvičení znalostí o rovinných útvarech, Pythagorovy věty a úprava rovnic.

Při prvním zadání (říjen 2021, třída 8. A) se řešení povedlo jen částečně. Neuvědomila jsem si, že žáci v té době neměli probrané rovnice a nemohli tedy zvládnout některé části úlohy tak, jak byla původně zadaná (viz kapitola 9.1.). Společnými silami jsme se dostali alespoň k řešení úlohy 1 (jaký tvar je potřeba k zaplnění roviny). Žáci dostali do skupin předtištěné trojúhelníky, čtverce, pětiúhelníky, šestiúhelníky, sedmiúhelníky a osmiúhelníky (každá skupina měla jeden typ mnohoúhelníku), ty vystříhali a skládáním k sobě se přesvědčili, že rovinu mohou zcela zaplnit pouze trojúhelníky, čtverci a šestiúhelníky. Poté jsem na tabuli načrtla trojúhelník, čtverec a šestiúhelník s vepsanými kruhy o stejném poloměru. Na základě tohoto obrázku žáci dokázali vysvětlit, že nejlepším tvarem bude šestiúhelník, protože má ze všech tří útvarů nejmenší obsah. Kvůli zmíněnému problému s neznalostí rovnic jsme však nemohli toto tvrzení dokázat výpočtem.

V polovině listopadu, kdy už žáci měli žáci rovnice osvojené, jsem zkusila úlohy zadat znovu, tentokrát v 8. B. Žáci nejprve sami zkoumali stavbu včelích buněk, poté se společně dobrali k řešení úlohy 1 (k dispozici měli vzoreček pro výpočet velikosti vnitřního úhlu  $n$ -úhelníku). Nejprve vypočítali velikosti vnitřních úhlů u mnohoúhelníků (stejných jako v 8. A), poté sčítáním těchto úhlů došli ke stejnému závěru jako ve třídě 8. A. Pro řešení úlohy 2 byli rozřazeni do skupin po třech až čtyřech. 3 skupiny se zabývaly variantou s trojúhelníkem, 2 zkoumaly čtverec a 3 zkoumaly šestiúhelník. Všechny skupiny vymyslely postup výpočtu. Výsledky si jednotlivé skupiny zkontrolovaly mezi sebou a dohromady pak došly k závěru, že šestiúhelník je skutečně nejvhodnějším tvarem pro stavbu včelích buněk.

Zkoumání stavby včelích buněk je časově poměrně náročné, v 8. B jsme u úloh 1 a 2 strávili cca 1,5 vyučovací hodiny.

Úloha 4 byla zadána v listopadu 2021 v 6. třídě. K tématu osově souměrnosti byla původně vytvořena pouze úloha 3 (dokreslování motýla). Později mi došlo, že taková úloha není praktická pro použití v hodině, dokreslování by totiž bylo příliš časově náročné, proto by tato úloha mohla být zadána spíše např. jako dobrovolný domácí úkol. Proto byla vytvořena úloha 4, ve které žáci chybějící část motýla pouze seskládají z rozstříhaných dílků. Cílem úlohy bylo procvičení vnímání osově souměrnosti a její rozeznání na malých objektech. Nejprve jsem měla strach, že žáci motýla složí pouze podle intuice a běžné znalosti vzhledu motýla. Obrázek byl ale rozstříhám na takové dílky, aby žáci jednoduše nepoznali, kam který dílek patří. Skutečně tak kartičky nejprve rozřazovali podle toho, které jsou zrcadlově převrácené k předloze a které ne. Většina žáků doplnila „po paměti“ pouze posledních pár zbývajících kartiček. Původně byla úloha zamýšlená pro práci ve dvojicích, nakonec se ale zdálo vhodnější jí zadat jednotlivě (každý pak měl svou tabulku s motýlem, kterou si mohl vlepit do školního sešitu). Žáci si pak svou práci ve dvojicích vzájemně kontrolovali, případně si radili.

Úloha 9 byla odzkoušena v třídě 8. A. Cílem úlohy bylo, aby si žáci pomocí reálného příkladu lépe zapamatovali vztah  $a^0 = 1$ .

Úloha byla zadána celé třídě najednou, společně jsme přečetli text úlohy a prohlédli si obrázek (viz kapitola 9.4.1.). Po krátkém zamyšlení někteří žáci představili spolužákům své řešení, ve kterém postupně několikrát zaznělo, že pokud se buňka ještě nerozdělila (počet proběhlých dělení je 0), můžeme situaci zapsat jako  $2^0$ , a protože na počátku celého procesu je 1 buňka, platí  $2^0 = 1$ . Pro ověření, zda všichni tomuto vysvětlení porozuměli, měli následně žáci samostatně zapsat odpověď svými slovy. Zhruba dvě třetiny třídy takto zformulovaly závěr, ze kterého vyplývalo, že žáci toto vysvětlení pochopili.

V 8. B jsme tuto úlohu nevyzkoušeli, žáci si vztah  $a^0 = 1$  pouze zapsali do sešitu. Po cca dvou týdnech jsem se v obou třídách zeptala, čemu se rovná nultá mocnina



z libovolného nenulového čísla. V 8. A správně odpověděly necelé čtyři pětiny třídy, část žáků přitom dokládala svůj závěr příkladem s dělením buněk. V 8. B správně odpověděla pouze polovina žáků. Z těchto údajů lze říci, že úloha naplnila svůj cíl.

Pracovní list byl zpracován s 9. třídou v červnu 2021. Žáci na něm pracovali samostatně v počítačové učebně. Cílem pracovního listu je představit souměrnosti v prostoru a ukázat propojení geologie a matematiky. Úvodní část pracovního listu, která představuje celou problematiku, jsme si prošli společně, jednotlivé úkoly žáci vyplňovali samostatně. Celkově jej zvládli vyplnit bez větších obtíží. Při závěrečném hodnocení dokázala většina žáků vysvětlit pojmy z pracovního listu (středová a rovinová souměrnost v prostoru a osa souměrnosti v prostoru) a rozlišovala tyto vlastnosti i u jiných krystalů. Zásadním negativem pracovních listů vytvořených v programu GeoGebra je dostupnost správné odpovědi a možnost opravy v průběhu vyplňování zadání. U testových otázek tvořených v programu GeoGebra je možné otevřít správné odpovědi u každé otázky ještě před dokončením celého úkolu, někteří žáci tak zadanou práci obešli tím, že se podívali na výsledky a pracovní list správně vyplnili bez vlastního zapojení.

## 11 Závěr

Cílem bakalářské práce bylo vytvořit soubor materiálů, které zaznamenávají přírodní jevy propojující přírodu s matematikou, dále pořizování fotografií takovýchto jevů, jejich matematický popis, vytváření počítačových modelů a úloh, které umožňují tyto jevy spojující matematiku s přírodou vhodně zakomponovat do výuky. Domnívám se, že tyto cíle byly v práci naplněny.

Vytvořené materiály se zaměřovaly zejména na shodná zobrazení, funkce, znalosti základních rovinných útvarů a těles. Úlohy a pracovní listy vytvořené pro tuto práci by mohly být použity ve výuce matematiky jednak pro zpestření výkladu, také k procvičení či upevnění matematických znalostí na které jsou dané materiály zaměřeny a kvůli demonstraci přesahu matematických témat do reálného světa. Obsah kapitol 3-7 není sám o sobě uzpůsoben k přímému použití ve výuce, může ale sloužit jako inspirace a zdroj informací pro učitele matematiky případně učitele přírodopisu.

Úlohy 1, 2, 4, 9 a pracovní list na souměrnosti krystalů jsem aplikovala ve výuce na ZŠ. Žáci projevovali nadšení ze změny od běžného režimu, kterou tyto úlohy do výuky přinesly. Zároveň jsem si díky zadávání úloh uvědomila důležitost přípravy učitele na výuku a správného načasování zadávaných úloh vzhledem k úrovni probraného učiva. Až v průběhu plnění úlohy 2 jsem si uvědomila, že žáci ještě neměli dostatečné znalosti k jejímu vyřešení podle původního zadání.

Osobně věřím, že obohacování výuky matematiky o příklady a úlohy vystavené na reálných jevech může u žáků jednak zvýšit zájem o matematiku jako takovou a jednak pomoci k jejímu lepšímu pochopení. Materiály propojující oba mé aprobační předměty proto hodlám používat ve své budoucí učitelské praxi.

## Seznam použitých zdrojů

**Archimedes' Laboratory.** Previous Puzzles of the Month + Solutions. 2008. Dostupné na: [https://www.archimedes-lab.org/monthly\\_puzzles\\_72.html](https://www.archimedes-lab.org/monthly_puzzles_72.html) (16.11.2021)

ATKINS, Peter W. *Molecules*. Scientific American Library, 1987, ISBN 0716750198.

Atlas rostlin. Atlas rostlin.cz, 2021. Dostupné na: <https://www.atlasrostlin.cz/pokojove-rostliny/teckovka-zlata> (15.10. 2021)

BARROW, John D. *Sto důležitých věcí o matematice a umění, které nevíte (a ani nevíte, že je nevíte)*. Praha: Dokořán, 2017. ISBN 978-80-7363-770-5.

BĚLOUN, František a kol. *Sbírka úloh z matematiky pro ZŠ*. 6. vydání. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1992. ISBN 80-04-26365-8.

BERÁNKOVÁ, Anna. Matematika v přírodě. *GeoGebra* [online]. [cit. 2021-12-22]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/rn9mvmkv>

*Biolib* [online]. 2012 [cit. 2022-4-10]. Dostupné z: <https://www.biolib.cz/en/image/id211414/>

ČŠI. *Rozvoj matematické gramotnosti na základních školách ve školním roce 2019/2020*. 2020.

EASTAWAY, Rob a Jeremy WYNDHAM. *How long is a piece of string*. 2002. London: Pavilion Books Group, 2002. ISBN 9781861056252.

EASTAWAY, Rob a Jeremy WYNDHAM. *Why do Buses Come in Threes*. London: Pavilion Books Group, 2008. ISBN 9781861058621.

Golden ratio. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2022-04-21]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Golden\\_ratio](https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_ratio)

HERMAN, Jiří, Vítězslava CHRÁPAVÁ, Eva JANČOVIČOVÁ a Jaromír ŠIMŠA. *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií Osová a středová souměrnost*. 2. vydání. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 978-80-7196-258-8.

JACOBS, Harold R. *Geometry: Seeing, Doing, Understanding*. 3. přepracované vydání. NY: W. H. Freeman and Co, 2003. ISBN 0-7167-4361-2.

JANÁS, Josef. *Mezipředmětové vazby v přírodovědných předmětech*. In Fyzika a didaktika fyziky 2. Sborník prací Pedagogické fakulty Masarykovy univerzity v Brně. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita v Brně. Pedagogická fakulta, 1995. s. 14-17 ISBN: 80-210-1405-9

KEPLER, Johannes. *O šestiúhelníkové sněhové vločce poutavé čtení o „ničem“*. Třetí upravené vydání, Praha: Nakladatelství MatfyzPress, 2017. ISBN 978-80-7378-335-8

KUŘINA, František. *10 geometrických transformací*. Prometheus, 2002. s. 47,97,149,150. ISBN: 80-7196-231-7

LIVIO, Mario. *The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number*. New York: Broadway Books, 2003. ISBN 978-0-7679-0816-0.

Natural Scenery. *Natural Scenery* [online]. Praha: Jiří Vepřek, 2008 [cit. 2021-12-3].

Dostupné z: <http://www.naturalscenery.cz/fotobanka/285-kudu-velky-0011.html>

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Goniometrie*. 2. vydání. Praha: Prometheus, 1994. ISBN 80-7196-000-4.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Funkce*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2019. ISBN 978-80-7196-357-8.

ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2018. ISBN 978-80-7196-391-2.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy, 1. díl*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2020 a. ISBN 978-80-7196-410-0.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy, 2. díl*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2020 b. ISBN 978-80-7196-414-8.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy, 3. díl*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2020 c. ISBN 978-80-7196-416-2.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 7. ročník základní školy, 1. díl*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2016 a. ISBN 978-80-7196-423-0.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník základní školy, 1. díl*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2016 b. ISBN 978-80-7196-439-1.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník základní školy, 2. díl*. 3. vydání. Praha: Prometheus, 2016 c. ISBN 978-80-7196-441-4.

OLSEN, Scott. *Záhadný zlatý řez: Největší tajemství přírody*. 2. vydání v českém jazyce. Vimperk: Dokořán, 2013. ISBN 978-80-7363-566-4.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia – Stereometrie*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2020. ISBN 978-80-7196-389-9.

RAKOUŠOVÁ, Alena. *Integrace obsahu vyučování*. Grada 1.vyd. 2008. s. 160 ISBN: 978-80-247-2529-1

ROBOVÁ, Jarmila a kol. *Sbírka aplikačních úloh ze středoškolské matematiky*. Praha: Prometheus, 2014. ISBN 978-80-7196-445-2.

Vesmír, 2009. *Kdy kvete pšenice aneb Co lze vyčíst z přečteného genu*. *Vesmír* [online]. [cit. 2021-12-10]. Dostupné z: <https://vesmir.cz/cz/casopis/archiv-casopisu/2009/cislo-9/kdy-kvete-psenice-aneb-co-lze-vycist-z-precteneho-genu.html>

ZÁVODSKÁ, Radka. *Biologie buněk*. Praha: Scientia, 2006. ISBN 80-86960-15-3.

ZELINKA, Ivan. *Aplikovaná informatika aneb úvod do fraktální geometrie, buněčných automatů ...* 1. vydání, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta technologická ve Zlíně, 1999. ISBN: 80-214-1423-5

## Seznam obrázků

Obrázek 1: Molekula cholesterolu (Atkins, 1987).....	11
Obrázek 2: Souměrnost složených listů (Kuřina, 2002, s. 47).....	12
Obrázek 3: Asymetrie ulity hlemýždě (Biolib, 2012).....	12
Obrázek 4: Rotační symetrie vlaštovičníku (vlastní zdroj).....	13
Obrázek 5: Trnka obecná (Atlas rostlin, 2021).....	13
Obrázek 6: Vlaštovičník větší (vlastní zdroj) .....	13
Obrázek 7: Žilnatina listů (Kuřina, 2002, s. 97) .....	13
Obrázek 8: Květenství klas – schéma (vlastní zdroj) .....	14
Obrázek 9: Klas pšenice (Vesmír, 2009).....	14
Obrázek 10: Příčné dělení bakterie (Závodská, 2006, s. 112) .....	14
Obrázek 11: Náznak krychlové struktury pyritu (vlastní zdroj).....	15
Obrázek 12: Turmalín (Jacobs, 2003, s. 575).....	15
Obrázek 13: Atomová skladba grafitu (vlastní zdroj).....	15
Obrázek 14: Krystalová mřížka diamantu (vlastní zdroj) .....	15
Obrázek 15: Model dvanáctistěnu (vlastní zdroj) .....	16
Obrázek 16: Řez čedičem (vlastní zdroj).....	17
Obrázek 17: Rozdělení úsečky v poměru zlatého řezu (vlastní zdroj).....	19
Obrázek 18: Konstrukce zlatého řezu (vlastní zdroj).....	20
Obrázek 19: Zlatý obdélník (vlastní zdroj) .....	21
Obrázek 20: Logaritmická spirála (vlastní zdroj) .....	21
Obrázek 21: Dráha letu lovičího dravce (Livio, 2003, s. 119).....	22
Obrázek 22: Kudu velký (Natural Scenery, 2008).....	22
Obrázek 23: Fibonacciho posloupnost (Livio, 2003, s. 97) .....	23
Obrázek 24: Fylogeneze (Eastaway, 2008) .....	24
Obrázek 25: Zlatý úhel (Olsen, 2013).....	25

Obrázek 26: Jablko (Eastaway, 2008) .....	25
Obrázek 27: Pětúhelník (vlastní zdroj).....	25
Obrázek 28: Ukázka fraktálního růstu (Barrow, 2017, s. 166) .....	26
Obrázek 29: Jílek mnohokvětý (Biolib, 2012).....	26
Obrázek 30: Klas složený z klásků (vlastní zdroj).....	26
Obrázek 31: Bršlice kozí noha (vlastní zdroj).....	27
Obrázek 32: Okolík složený z okolíčků (vlastní zdroj) .....	27
Obrázek 33: Rozdíl nadmořských výšek (vlastní zdroj).....	29
Obrázek 34: Včelí buňky (Pomykalová, 2020, s. 37) .....	31
Obrázek 35: Vzájemné polohy rovin 1 (vlastní zdroj).....	32
Obrázek 36: Vzájemné polohy rovin 2 (vlastní zdroj).....	32
Obrázek 37: Vzájemné polohy rovin 3 (vlastní zdroj).....	32
Obrázek 38: Vzájemné polohy rovin 4 (vlastní zdroj).....	33
Obrázek 39: Vzájemné polohy rovin 5 (vlastní zdroj).....	33
Obrázek 40: Zaplnění roviny různými rovinnými útvary (vlastní zdroj).....	35
Obrázek 41: Rovnostranný trojúhelník (vlastní zdroj).....	37
Obrázek 42: Čtverec (vlastní zdroj) .....	37
Obrázek 43: Šestiúhelník (vlastní zdroj).....	38
Obrázek 44: Porovnání zaplnění plochy včelími buňkami tvaru šestiúhelníku a osmiúhelníku (vlastní zdroj) .....	39
Obrázek 45: Motýl – dokreslování (vlastní zdroj) .....	41
Obrázek 46: Motýl – ideální a skutečná fotografie (vlastní zdroj) .....	42
Obrázek 47: Práce žáků (vlastní zdroj) .....	42
Obrázek 48: Souměrnosti rostlin (vlastní zdroj) .....	43
Obrázek 49: Souměrnost rostlin – řešení (vlastní zdroj).....	43
Obrázek 50: Krystal cínovce (vlastní zdroj) .....	48

Obrázek 51: Osy a roviny souměrnosti krystalu cínovce (vlastní zdroj).....	48
Obrázek 52: Sítě krystalu aragonitu (vlastní zdroj) .....	49
Obrázek 53: Krystal aragonitu (vlastní zdroj).....	49
Obrázek 54: Sítě krystalu fluoritu (vlastní zdroj) .....	50
Obrázek 55: Krystal fluoritu (vlastní zdroj).....	50
Obrázek 56: Buněčné dělení (vlastní zdroj).....	51
Obrázek 57: Výškový profil 1 (vlastní zdroj) .....	52
Obrázek 58: Výškový profil 2 (vlastní zdroj) .....	53
Obrázek 59: Výškový profil 3 (vlastní zdroj) .....	54
Obrázek 60: Výškový profil 4 (vlastní zdroj) .....	54



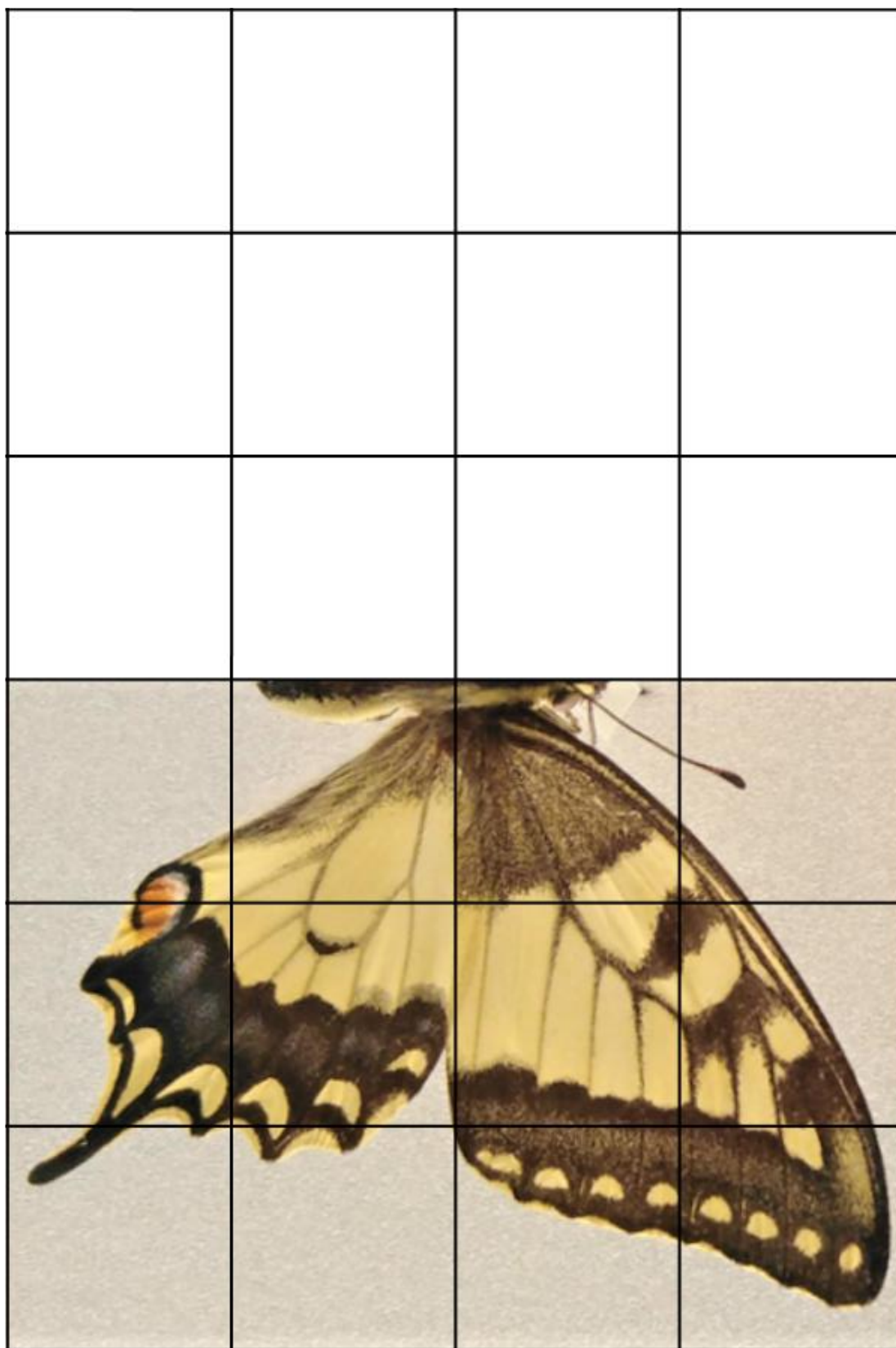
## **Seznam příloh**

Příloha č. 1: Osová souměrnost motýla – čtvercová síť a kartičky

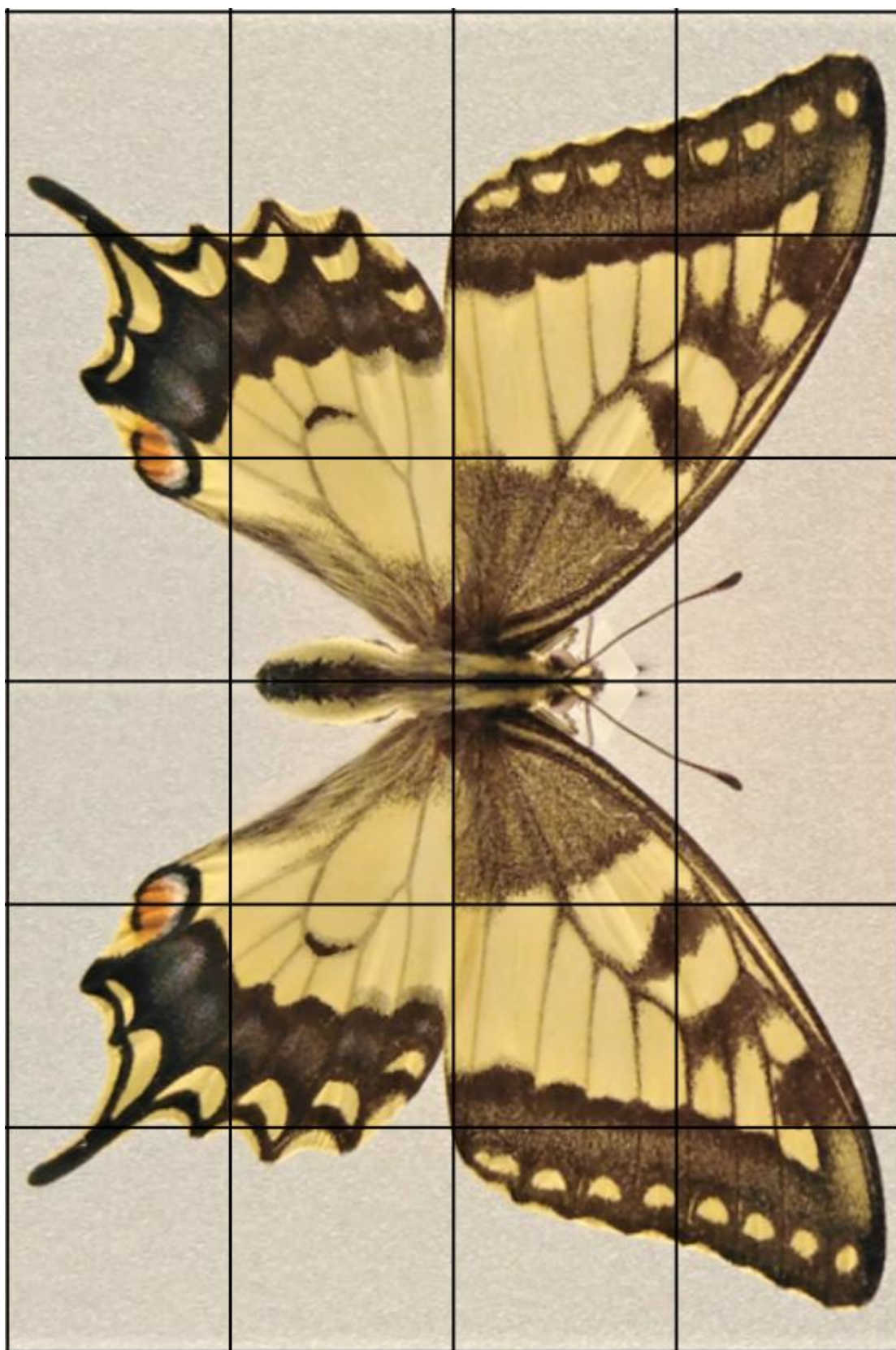
Příloha č. 2: Sítě fluoritu a aragonitu

Příloha č. 3: Sítě jednotlivých krystalů

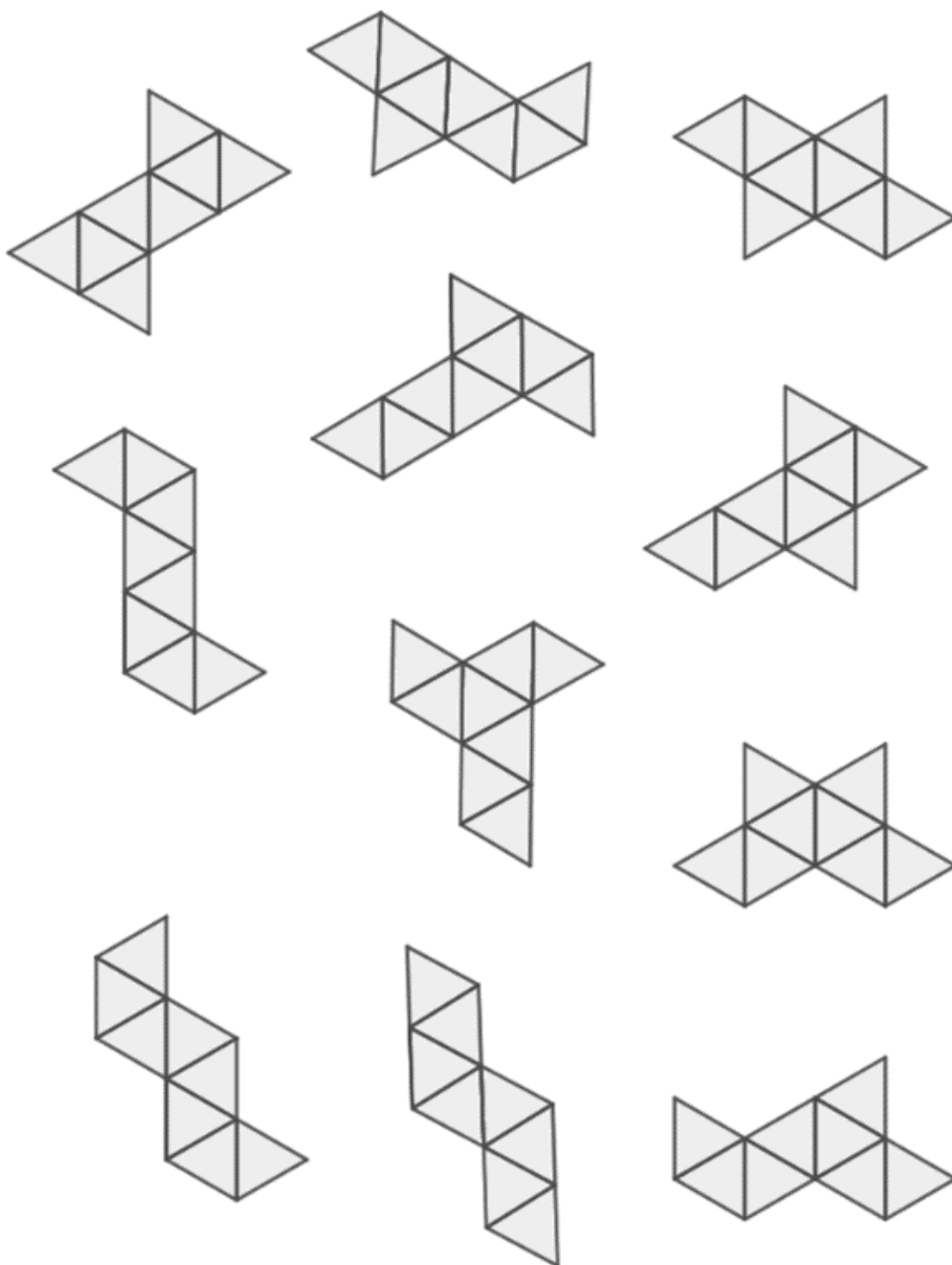
Příloha č. 1: Osová souměrnost motýla – čtvercová síť a kartičky

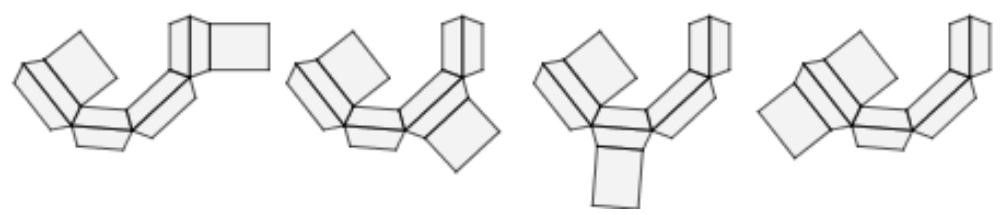
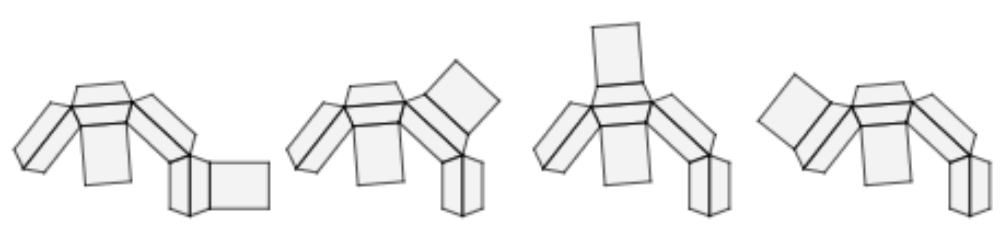
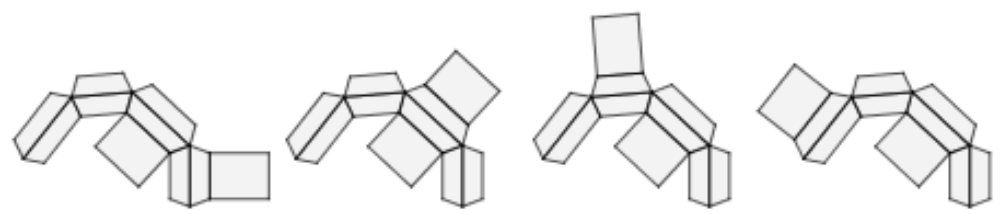
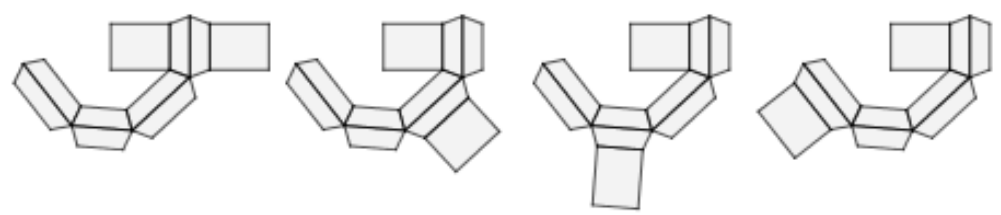
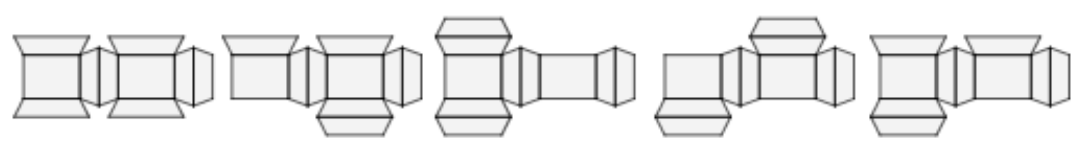
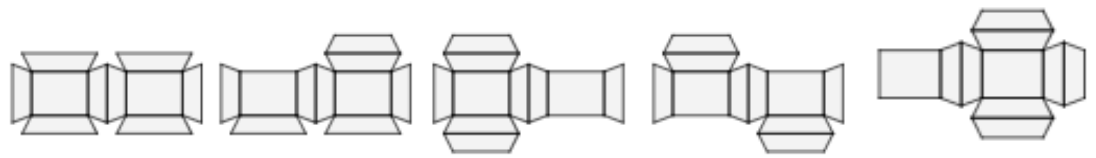
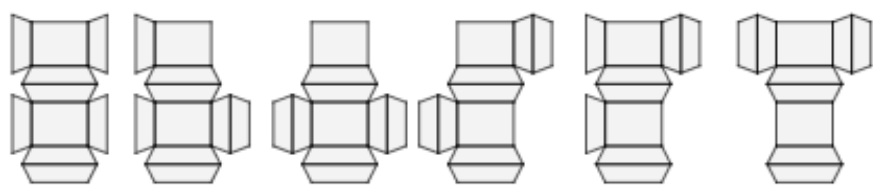
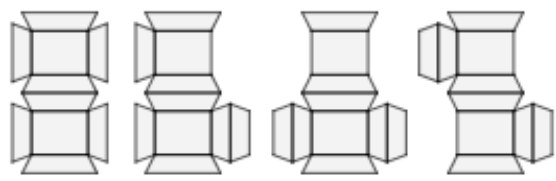


Kartičky k rozstříhání:



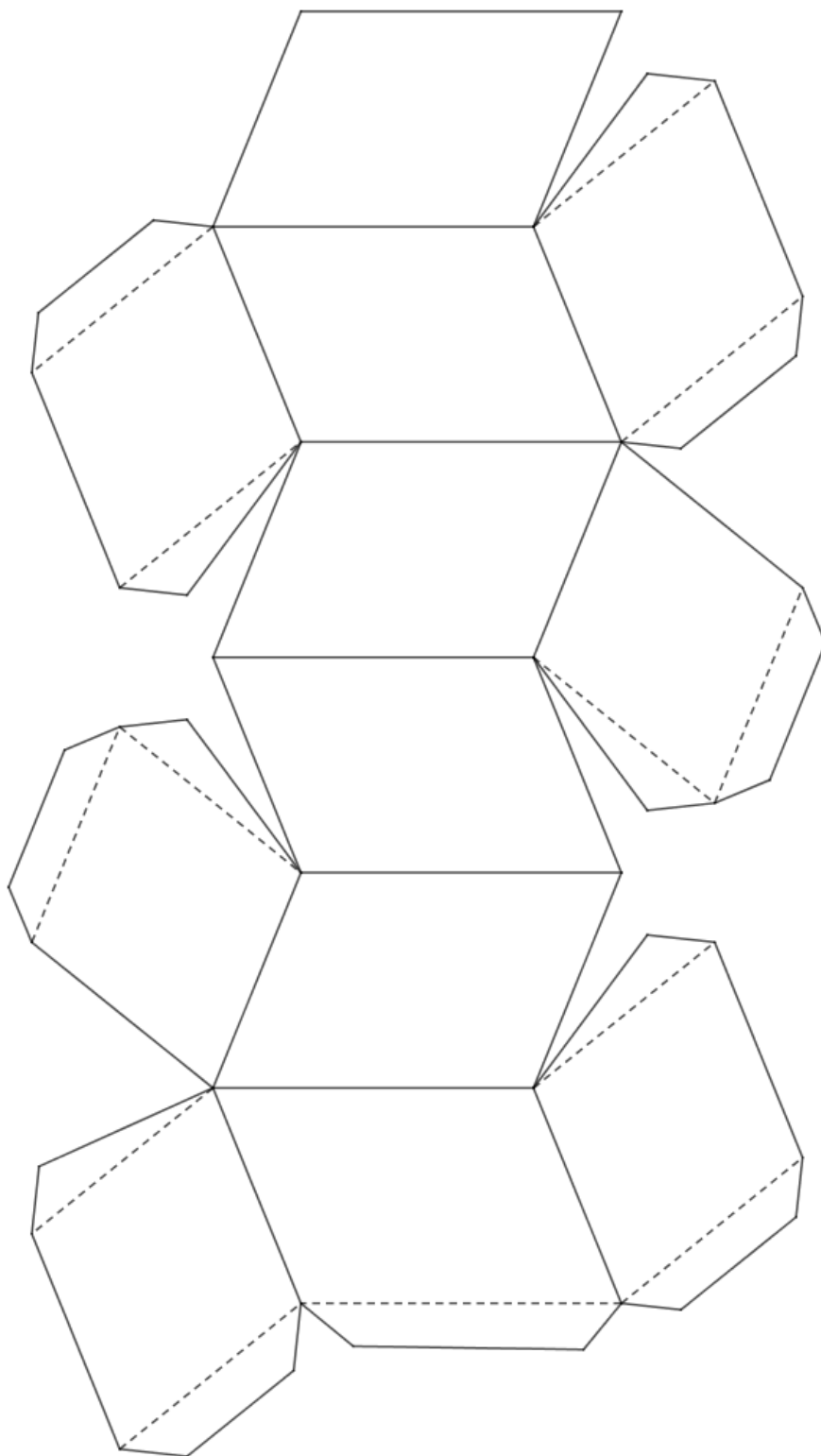
Příloha č. 2: Sítě fluoritu a aragonitu



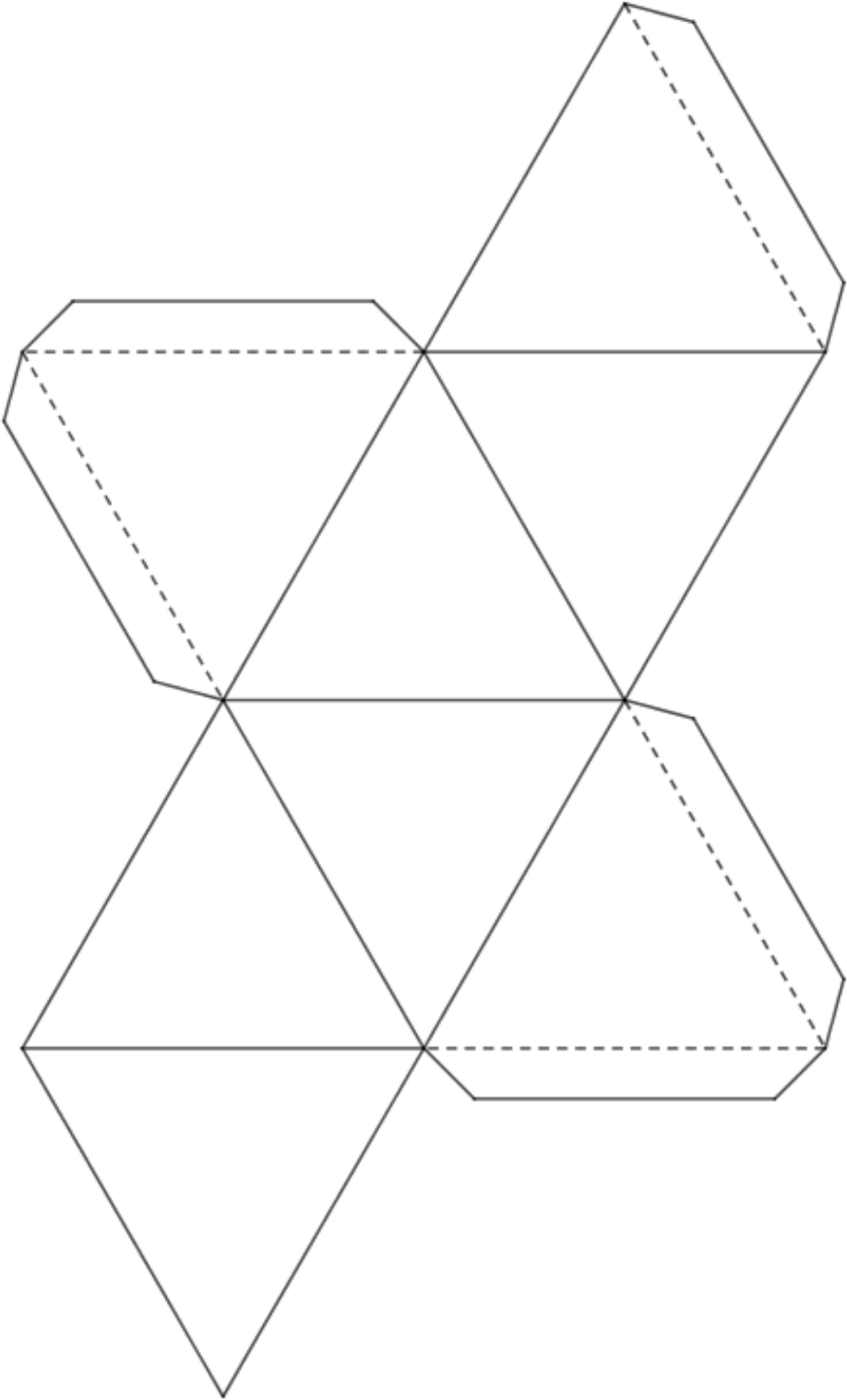


Příloha č. 3: Síť krystalů

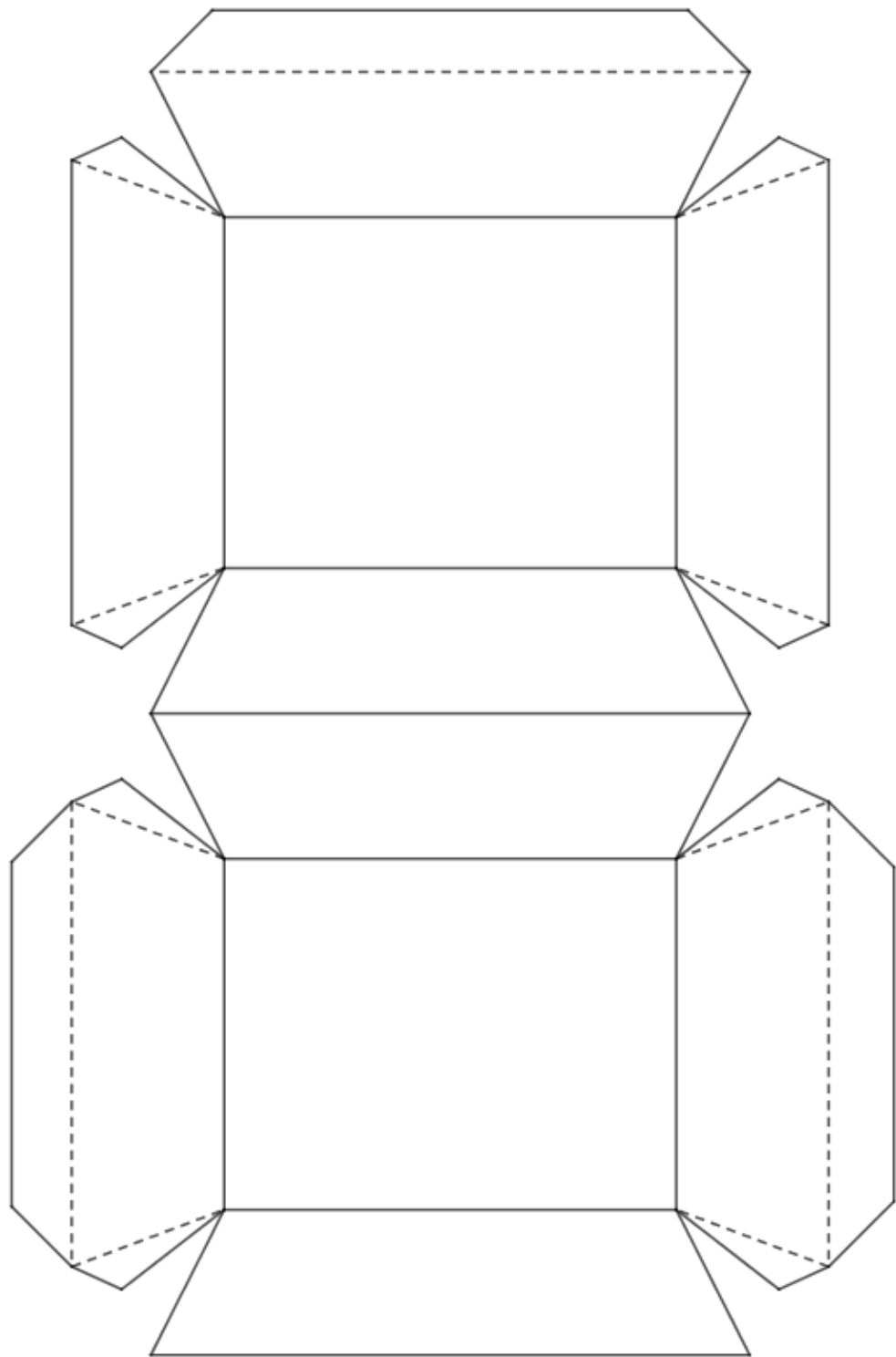
Almandin



Fluorit

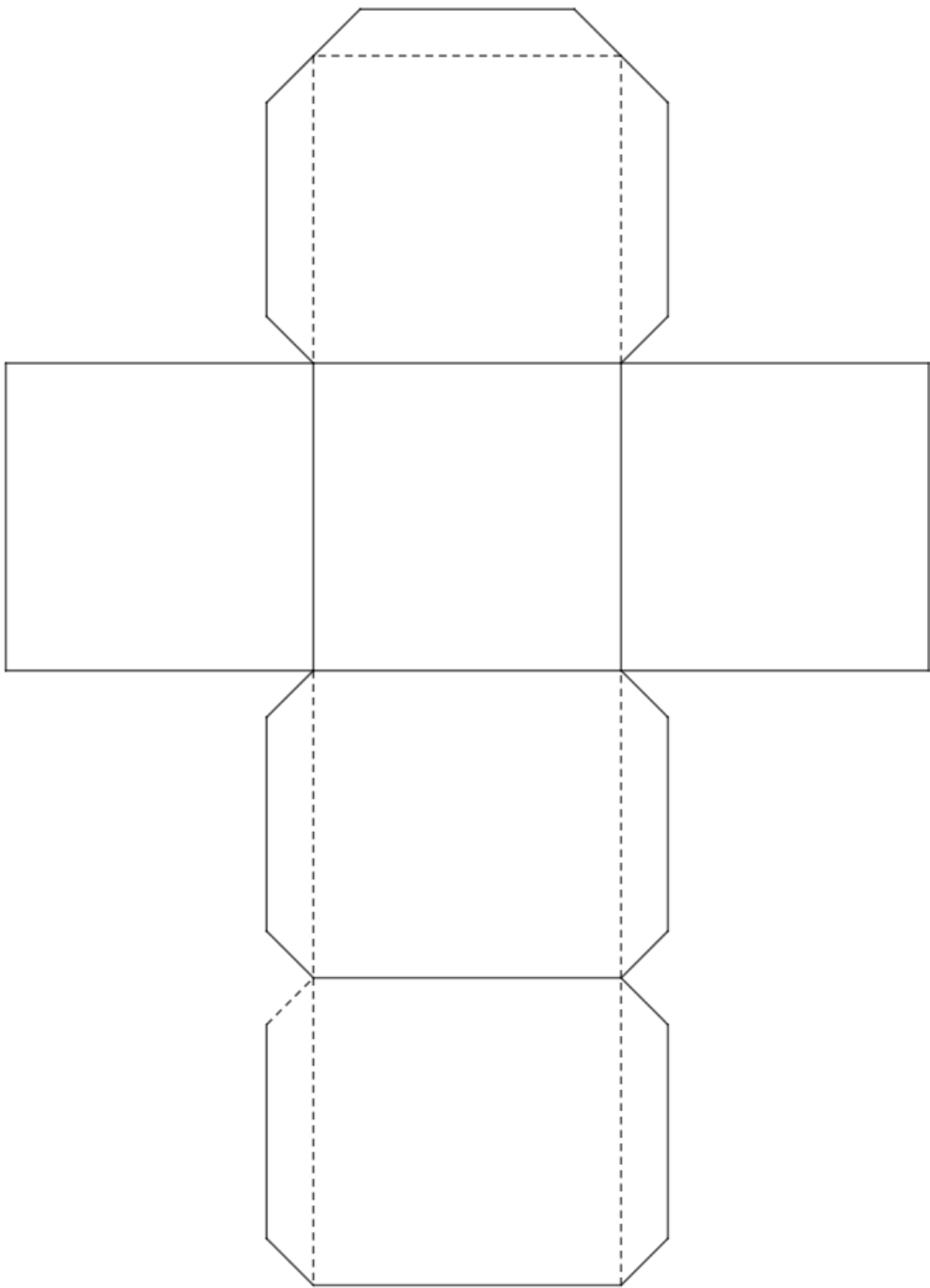


Aragonit

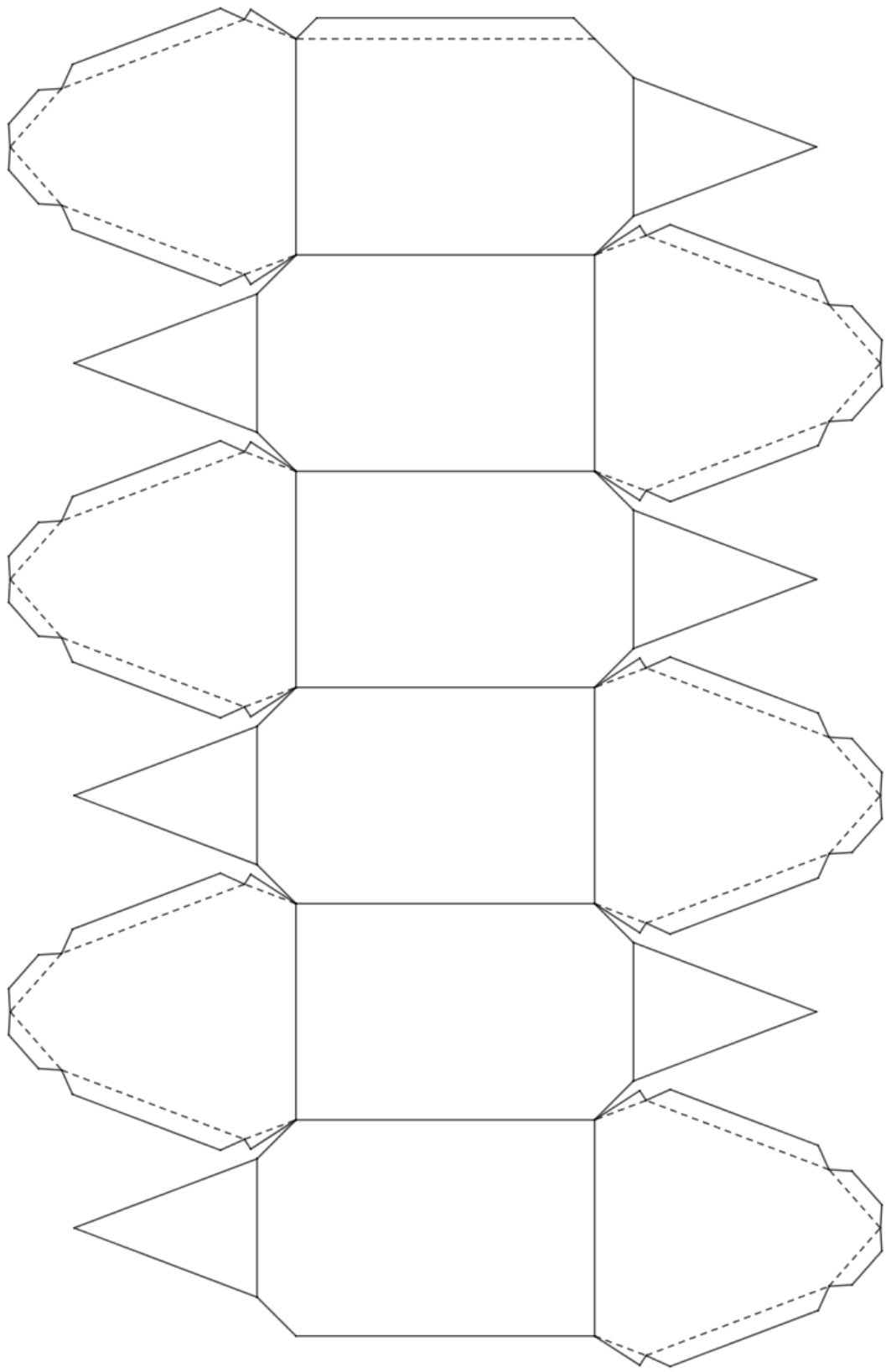




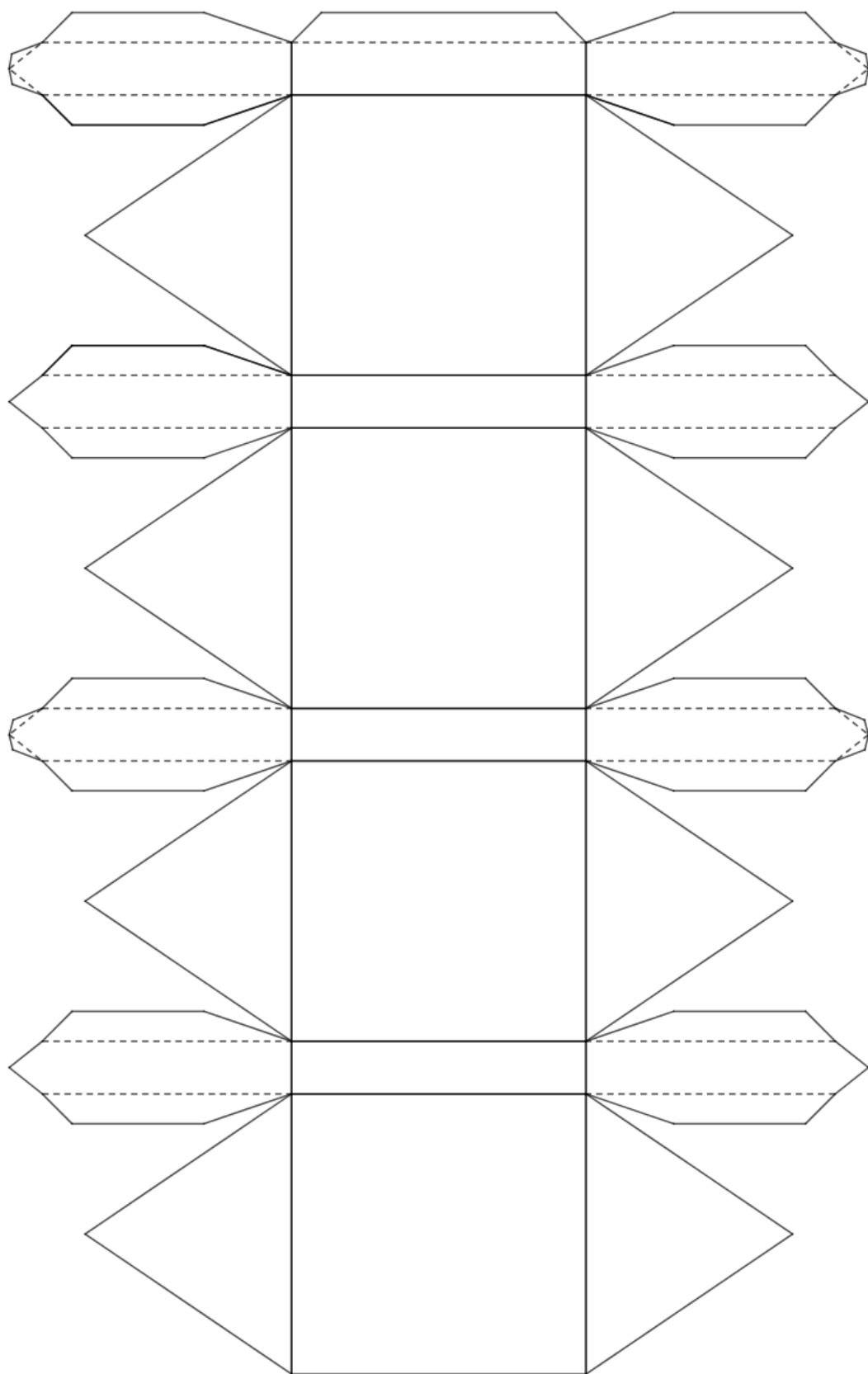
Fluorit, halit



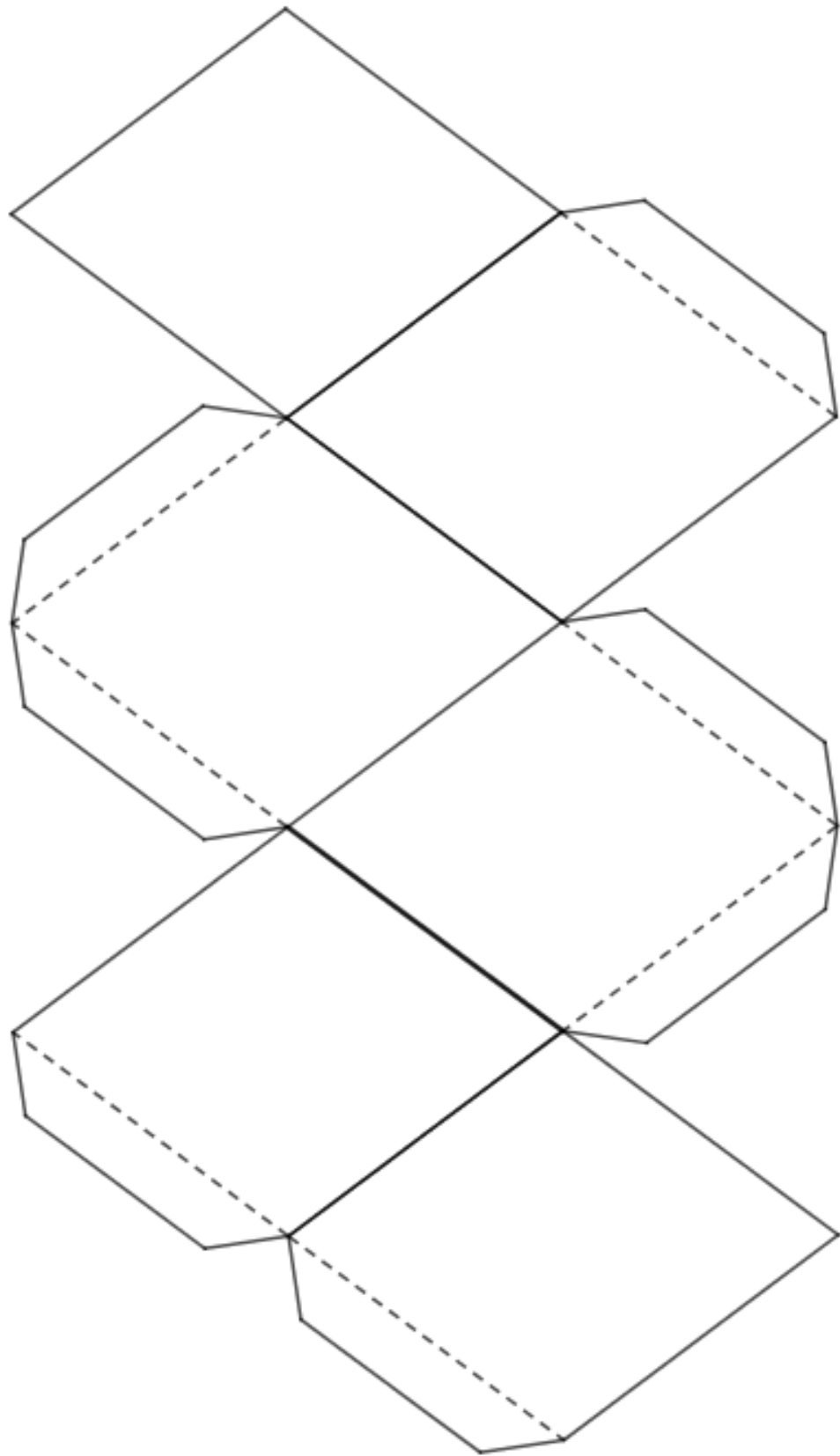
Křemen



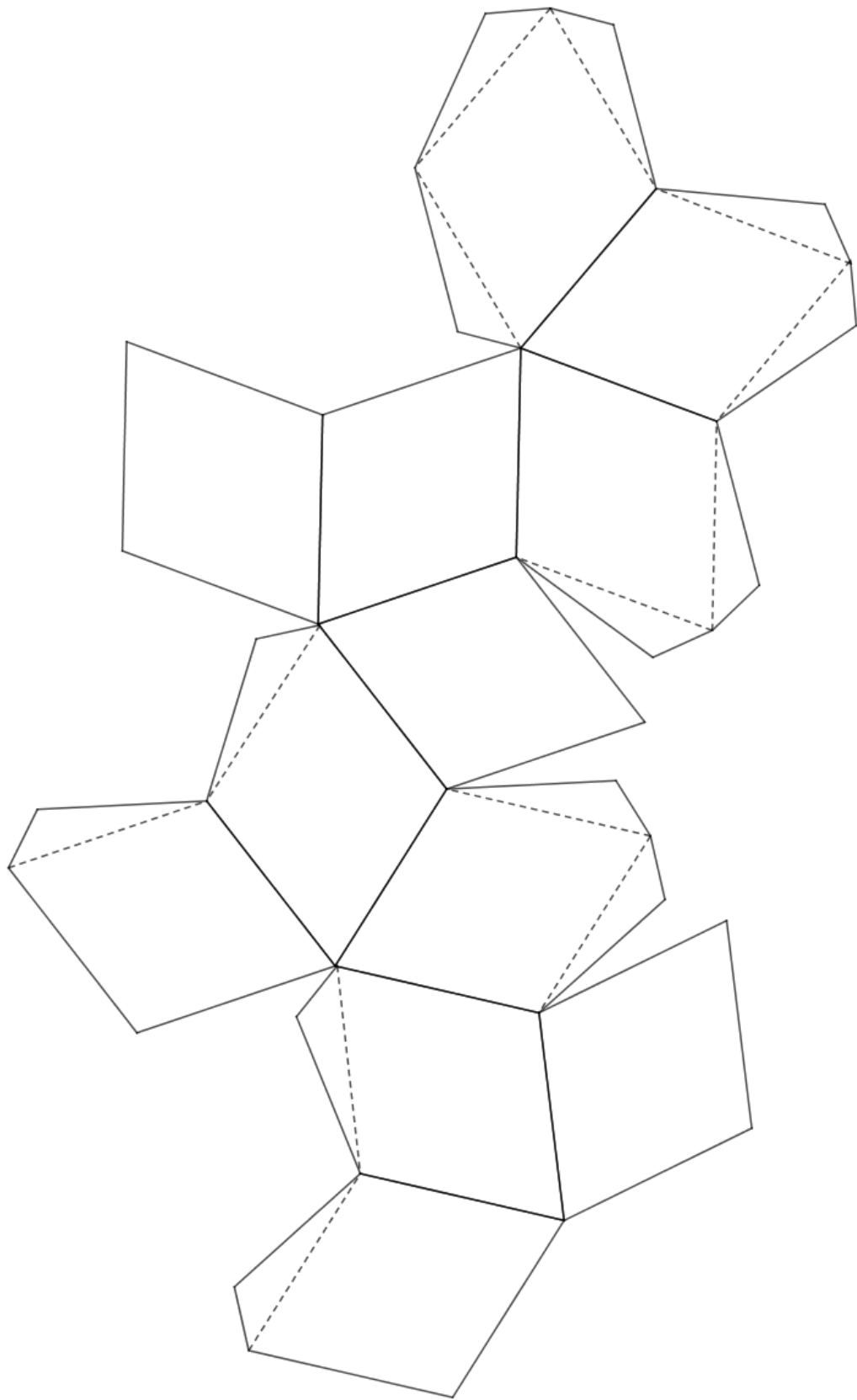
Cínovec



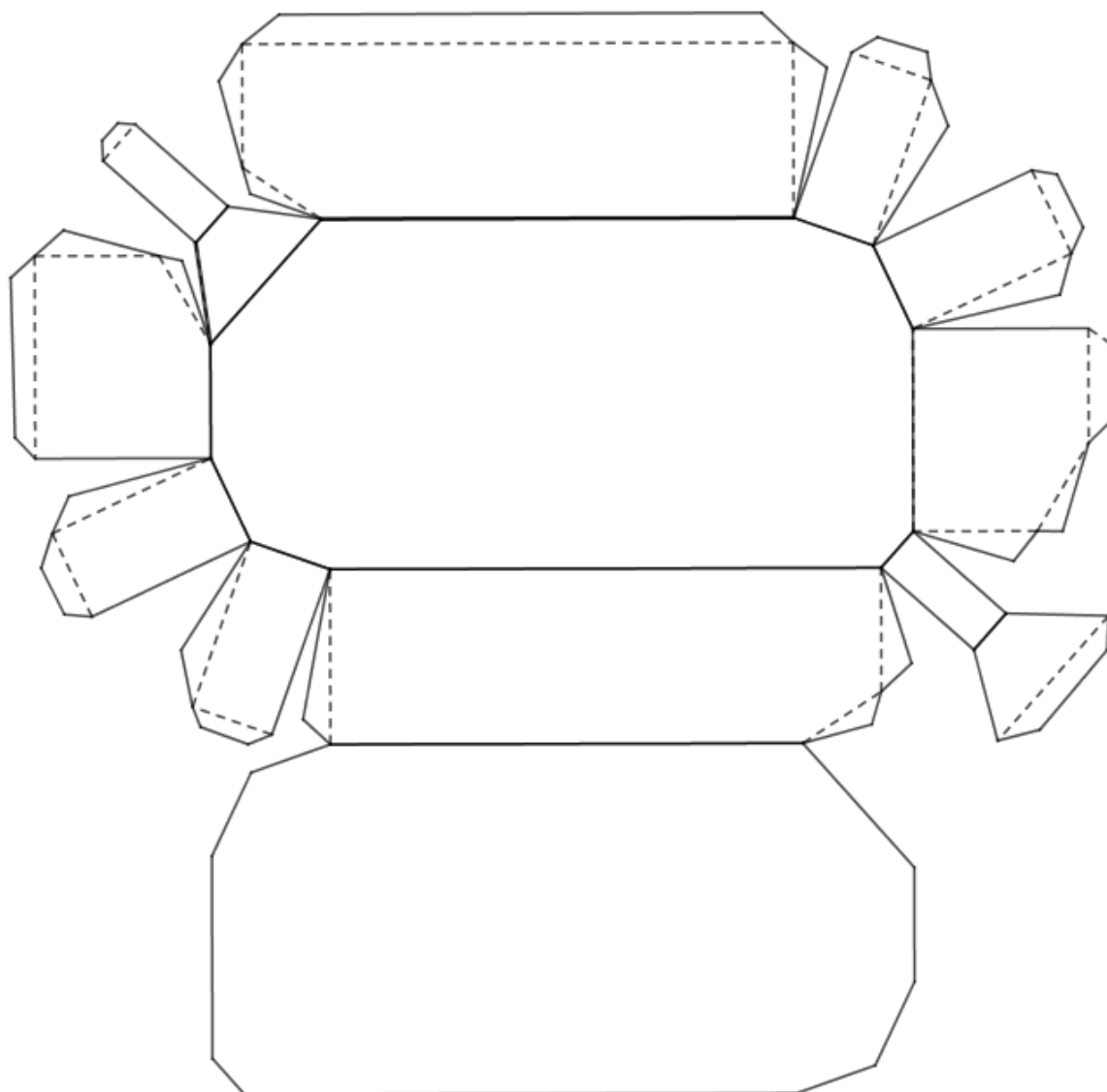
Kalcit



Granát



Modrá skalice



Sádovec

