



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

NÁVRH Odstředivého čerpadla metodami Diferenciální geometrie

DESIGN OF CENTRIFUGAL PUMP USING DIFFERENTIAL GEOMETRY METHODS

DIZERTAČNÍ PRÁCE

DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Ing. ZDENĚK SLOUPENSKÝ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. FRANTIŠEK POCHYLÝ, CSc.

BRNO 2011

Anotace

Disertační práce se zabývá novým přístupem návrhu oběžného kola, lopatky a spirály odstředivého čerpadla. Matematický model proudění v meridiálním řezu oběžného kola i spirály se opírá o nástroje diferenciální geometrie aplikované na Bézierovy plochy. Tato již dříve představená teorie je v této práci hlouběji rozpracována a závěry jsou využity při návrhu součástí odstředivého čerpadla, které přicházejí do styku s kapalinou. Hlavním výstupem práce je matematický model a na jeho základě vytvořený software sloužící při návrhu oběžného kola, lopatky a spirály. Získané výsledky jsou exportovatelné do některého z běžně používaných 3D modelářů.

Annotation

This thesis deals with a new approach to the design of impeller, blade and spiral of centrifugal pump. The mathematic model of flow inside meridional section of impeller and spiral is based on the instruments of differential geometry applied to Bezier surfaces. This formerly introduced theory is more deeply developed in this thesis and the conclusions are applied to the design of centrifugal pump parts working with fluid. The main thesis output is the mathematic model and on its principles created software determined for the design of impeller, blade and spiral. The received results are exportable into one of the commonly used 3D modeling programs.

Klíčová slova

Bézierova plocha, diferenciální geometrie, křivočarý souřadný systém, odstředivé čerpadlo, meridiální řez, meridiální rychlost, oběžné kolo, lopatka, spirála

Key words

Bezier surface, differential geometry, curvilinear coordinate system, centrifugal pump, meridional section, meridional velocity, impeller, blade, spiral

Bibliografická citace

SLOUPENSKÝ, Z. *Návrh odstředivého čerpadla metodami diferenciální geometrie*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 112 s. Vedoucí dizertační práce prof. Ing. František Pochylý, CSc..

Prohlášení o původnosti práce

Prohlašuji, že předkládaná práce její mojí původní autorskou prací. Vypracována byla pod vedením vedoucího disertační práce a s pomocí literatury uvedené na konci dokumentu.

V Brně dne _____

podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval všem, kteří mi byli nápomocni svými radami, zkušenostmi a všestranně mne podporovali při mé práci.

Zejména bych chtěl poděkovat vedoucímu disertační práce prof. Ing. Františku Pochylému, CSc. a doc. Ing. Vladimíru Habánovi, Ph.D. za trpělivost a ochotu zodpovídat veškeré mé dotazy.

Obsah

Anotace.....	3
Annotation.....	3
Klíčová slova.....	3
Key words	3
Bibliografická citace	4
Prohlášení o původnosti práce.....	5
Poděkování.....	6
Obsah.....	7
Úvod.....	11
1 Postup návrhu oběžného kola a spirály	12
2 Vstupní data návrhu oběžného kola	13
2.1 Kriterium rychloběžnosti.....	13
2.2 Hydraulická účinnost.....	15
2.3 Základní návrh meridiálního řezu.....	16
2.3.1 Hlavní rozměry oběžného kola	16
2.3.2 Rozměry hřídele a náboje oběžného kola	17
2.3.3 Vstup do oběžného kola	18
2.3.3.1 Meridiální rychlost na vstupu na lopatky.....	18
2.3.3.2 Vstupní hrdlo	18
2.3.3.3 Náběžná hrana lopatek	20
2.3.4 Výstup z oběžného kola	21
2.3.4.1 Meridiální rychlost na výstupu z oběžného kola	21
2.3.4.2 Rozměry výstupní části oběžného kola.....	21
2.3.5 Střední proudnice	22
2.4 Vstupní hrana lopatky.....	22
2.5 Výstupní hrana lopatky.....	23
2.6 Vstupní úhel lopatky.....	23
2.7 Výstupní úhel lopatky.....	24
2.7.1 Korekční faktor	24
3 Vstupní data návrhu spirály.....	28
4 Návrh oběžného kola metodami diferenciální geometrie.....	30
4.1 Meridiální řez oběžným kolem.....	30
4.2 Vektorové operace	31
4.3 Ortogonální síť	32
4.4 Modelování proudění v meridiálním řezu	37
4.4.1 Potenciální proudění.....	39

4.4.2	Kvazipotenciální proudění	39
4.4.3	Francisova metoda.....	42
4.5	Monitory výpočtu meridiálního řezu	43
4.5.1	Průtočná plocha	43
4.5.2	Konstanta metody.....	45
4.5.3	Meridiální rychlost	52
5	Návrh lopatky metodami diferenciální geometrie.....	55
5.1	Úhel β_1 – vstupní hrana lopatky.....	57
5.2	Určení úhlu β na lopatce jako Bézierovy plochy.....	57
5.3	Určení úhlu β na lopatce pomocí polynomu	58
5.3.1	Polynom 2. stupně po délce lopatky i napříč lopatkou	58
5.3.2	Polynom 2. stupně napříč lopatkou a 1. stupně po délce lopatky	60
5.4	Prostorový tvar lopatky	61
5.4.1	Prostorový tvar lopatky při uvažování úhlů opásání.....	63
5.5	Monitory návrhu lopatky	65
5.5.1	Průběh β po délce lopatky	67
5.5.2	Plošné rozložení β na lopatce.....	71
5.5.3	Průběh lopatky na nosném a krycím disku.....	75
5.5.4	3D zobrazení lopatky	79
5.5.5	Komentář k návrhu lopatky.....	81
6	Návrh spirály metodami diferenciální geometrie.....	82
6.1	Tvar pláště spirály	82
6.2	Návrh meridiálního řezu spirály	83
6.3	Spirála v prostoru.....	83
6.3.1	Metoda $v_{stř} = konst.$	84
6.3.2	Metoda $rv_u = konst.$	84
6.3.2.1	Korelační koeficient.....	85
6.4	Vyhrdlení spirály	86
6.4.1	Vyhrdlení na základě předepsaného natočení tělesa spirály	88
6.4.2	Vyhrdlení na základě předepsané výšky vyústění.....	89
6.4.3	Hraniční případ – $\alpha = 0^\circ$	89
6.4.4	Hraniční případ – tangenciální spirála	90
6.4.5	Posun v ose x	91
6.4.6	Posun v ose y	92
6.5	Monitory návrhu spirály	94
6.5.1	Průtočná plocha	94
6.5.2	Konstanta metody.....	95

6.5.3	Meridiální rychlost	97
6.5.4	Bokorys spirály	97
6.5.5	Stoupání spirály.....	98
6.5.6	Průtočné průřezy	99
6.5.7	Statistický graf.....	100
6.5.8	3D pohled	101
7	Aplikace výsledků	103
8	Popis programu	104
9	Závěr.....	105
10	Citovaná literatura	107
11	Seznam hlavních použitých značek.....	109
11.1	Vybrané indexy	111

Úvod

Tématem disertační práce je vývoj matematického modelu, sloužícího k návrhu oběžného kola s lopatkováním a spirály, opírajícího se o možnosti diferenciální geometrie. Jeho využitelnost není omezena pouze na odstředivá čerpadla, kterými se zabývá disertační práce, ale lze jej aplikovat na veškeré rotační stroje pracující s tekutým médiem. Na jeho základě byl vypracován software sloužící při návrhu průtočných ploch čerpadla, v němž jsou patrné výhody práce v křivočarém prostoru za využití Bézierových ploch. Jedním z cílů práce bylo i vzájemné propojení návrhu oběžného kola a spirály. Toho je dosaženo právě využitím diferenciální geometrie.

V jakékoliv fázi návrhu meridiálního řezu oběžného kola, jeho lopatky nebo spirály s vyhrdlením lze sledovat dopady prováděných kroků na proudění ve vnitřních prostorách oběžného kola nebo spirály. Díky tomu lze předejít některým problémům, které by byly jinak odhaleny až při CFD simulaci. Standardní postup návrhu průtočných částí čerpadla zahrnuje několik na sobě závislých a po sobě jdoucích úkonů, které jsou prováděny v různých programových prostředích. Pokud se vyskytne v konstrukci čerpadla chyba, zpravidla je odhalena až v pozdějších fázích vývoje. Nezbyvá poté nic jiného, než provést úpravu a opakovat následné kroky návrhu. Tím vznikají řetězce rutinních operací, které ukrajují čas využitelný pro nalezení optimálního řešení.

Od samého počátku vývoje byl kladen důraz na jednoduchost úkonů, které musí být prováděny ve všech fázích výpočtového modelování. Vyžadována jsou pouze vstupní data, která vytyčí základní obrysy řešení. Je samozřejmé, že čím kvalitnější zadání je vloženo, tím rychlejší a snadnější bude cesta k získání požadovaného výsledku. Veškeré úkony jsou interaktivní. Úspěšnost jednotlivých úprav lze okamžitě sledovat na dostupných monitorech návrhu. Výsledné součásti čerpadla jsou exportovatelné do některého z existujících 3D modelářů. V něm lze poté provést konečnou úpravu modelu a ten následně podrobit CFD analýze. Celková doba návrhu čerpadla je tím významně zkrácena.

1 Postup návrhu oběžného kola a spirály

Následující text jednotlivých kapitol se snaží popsat obvyklý postup návrhu čerpadla. Použitá návaznost výpočtů není pevně svázána a lze ji přizpůsobit aktuálnímu řešení. Oddíly věnující se vstupním datům potřebným pro zadání oběžného kola nebo spirály se opírají o poznatky a literaturu, které jsou u nás běžně přijímány a respektovány. Další kapitoly představují matematický model návrhu využívající diferenciální geometrie. V nich jsou již úzce provázána obecná odvození s postupem návrhu a jsou zde demonstrovány výstupy z vytvářeného programu.

Ověření matematického modelu a na jeho základě vytvořeného programu bylo provedeno na čerpadle BETA 10. Jedná se o velmi úspěšné a zdařile zkonstruované čerpadlo, jehož hydraulický návrh byl proveden na Odboru fluidního inženýrství Victora Kaplana Energetického ústavu FSI VUT v Brně. Bylo vybráno vzhledem k podrobným podkladům, které jsou k dispozici o jeho hydraulických vlastnostech. Na jeho základě byly zpracovány datové výstupy a grafické přílohy. Prezentovaná data mají, pokud není uvedeno jinak, bezrozměrný charakter. Při demonstraci jednotlivých výpočtových postupů byla vždy dodržena vnější geometrie meridiálního řezu oběžného kola i spirály. Měněna byla pouze vnitřní geometrie upravovaných ploch. Důvodem byl požadavek vzájemné porovnatelnosti výsledků jednotlivých výpočtových přístupů.

Poslední část práce je věnována ukázce exportu modelů a krátkému představení vyvinutého programu.

Základní parametry BETA 10:

průtok	Q_n	[l/s]	6,94
		[m ³ /s]	25,0
dopravní výška	H	[m]	5,0
účinnost	η	[-]	0,69
průměr oběžného kola	d_2	[mm]	138,0
měrné otáčky	n_s	[min ⁻¹]	131,9
otáčky	n	[min ⁻¹]	1 450

Geometrické parametry oběžného kola BETA 10:

přednatočení výstupní hrany	ζ	[°]	-4,5334
krycí disk	β_2	[°]	30,7
		$\varphi_{L(0)}$	[°]
střední disk	β_2	[°]	27,67
nosný disk	β_2	[°]	23,5

2 Vstupní data návrhu oběžného kola

2.1 Kriterium rychloběžnosti

Výběr tvaru oběžného kola je založen na kritériu rychloběžnosti. Jeho hodnota je využívána i při výpočtech prováděných během návrhu čerpadla.

Jedná se o kritérium hydrodynamické podobnosti, které zohledňuje nejdůležitější síly působící v kapalině. Rozhodujícími silami pro hydraulický stroj, u nějž předpokládáme práci s nevazkou a nestlačitelnou kapalinou, jsou síly tlakové a impulzní. Ty představuje Strouhalovo Sh a Eulerovo Eu podobnostní číslo, (MELICHAR, a další, 2002):

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2} \quad (1)$$

$$Sh = \frac{v}{nd} \quad (2)$$

Na jejich základě je definována bezrozměrná rychloběžnost n_b , (MELICHAR, a další, 2002):

$$n_b = \frac{1}{Sh Eu^{0,75}} \quad (3)$$

Rychloběžnost má fyzikální význam etalonového hydraulického stroje, jehož parametry jsou jednotkové. Její formální tvar pro vyjádření měrných otáček, (PACIGA, a další, 1984), (ČERKASSKIJ, 1984):

$$n_b = n \frac{Q^{0,5}}{Y^{0,75}} \quad (4)$$

Stále je však v dnešní době možné v odborné literatuře nalézt kritérium rychloběžnosti odvozené podle starších přístupů.

Mezi ně patří měrné otáčky n_q definované pomocí Strouhalova a Eulerova kritéria. Navrženy byly pro jednotkové parametry $Q = 1 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ a $H = 1 \text{ m}$ dle Kaplana (1908), (MELICHAR, a další, 2002).

Strouhalovo kritérium, (MELICHAR, a další, 2007), (ČERKASSKIJ, 1984):

$$Sh = \frac{vt}{x} \quad (5)$$

Pro případ jedné lopatky, $z = 1$, platí, (MELICHAR, a další, 2007):

$$n_q = 333 \frac{\pi D}{Eu^{0,75} l_{min}} \quad (6)$$

Volba oběžného kola se provádí na základě vzorce, (MELICHAR, a další, 2002), (MELICHAR, a další, 2007), (PFLEIDERER, 1960):

$$n_q = 333 n \frac{Q^{0,5}}{Y^{0,75}} \quad (7)$$

Nejstarším podobnostním kriteriem jsou specifické otáčky n_s . Bylo odvozeno Cramerem (1900) pro etalonovou turbínu určitých rozměrů pracující při parametrech:

$$P = 1 \text{ ks a } H = 1 \text{ m, (MELICHAR, a další, 2002), (ČERKASSKIJ, 1984)}$$

Do výpočtu je dosazováno n [min^{-1}]:

$$n_s = \frac{n}{H} \frac{\sqrt{\frac{1000QH\eta}{75}}}{H^{0,25}} \quad (8)$$

$$n_s = 3,65 \frac{nQ^{0,5}}{H^{0,75}} \quad (9)$$

Vzájemný vztah výše zmíněných podobnostních kriterií, (MELICHAR, a další, 2002):

$$n_s = 3,65 n_q \sqrt{\eta} = 3,65 \cdot 333 n_b \sqrt{\eta} = 1215 n_b \sqrt{\eta} \quad (10)$$

Při numerickém výpočtu n_b, n_q, n_s jsou dosazovány parametry stroje při jeho nejvyšší účinnosti η . Jsou to tzv. jmenovité parametry.

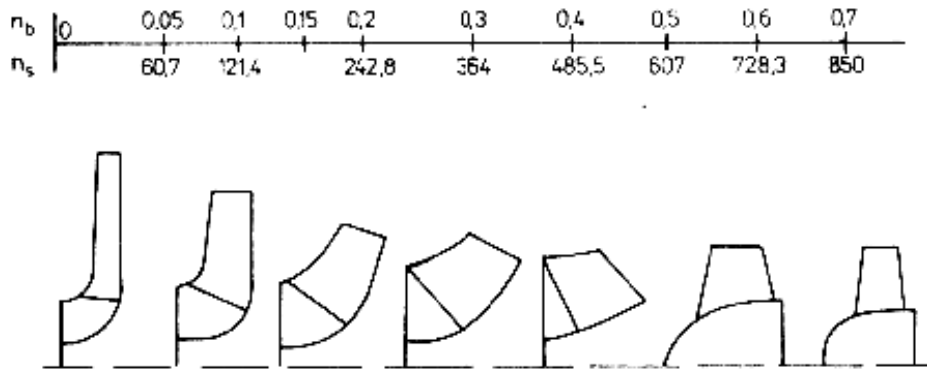
V moderní literatuře se stále více uplatňuje vyjádření hydrodynamické podobnosti pomocí rychloběžnosti n_b . Od ostatních definic rychloběžnosti se postupně upouští, proto i v této práci bude upřednostněno použití měrných otáček čerpadla n_b . Kriterium n_s je použito pouze při srovnání návrhu spirály metodou $v_{stř} = konst.$ se statistickým grafem. Měření obsažená v datech statistického porovnání byla prováděna po dlouhou dobu na mnoha různých čerpadlech. Jejich významná část byla klasifikována kriteriem n_s a toto rozdělení bylo dále zachováno.

Běžně používaný rozsah n_b je ($0,05 \leq n_b \leq 1$). Pro velmi malé hodnoty měrných otáček na jeden stupeň ($n_b \leq 0,05$) se přikračuje ke koncepci sériového zapojení oběžných kol. Měrná energie jednoho stupně čerpadla je poté, (PACIGA, a další, 1984), (STRÝČEK, 1988):

$$Y_{(1)} = \frac{Y}{i} \quad (11)$$

V případě strojů čerpajících velké průtoky se volí $n_b > 0,75$, (STRÝČEK, 1988). Stupně čerpadla jsou obvykle uspořádány paralelně, (PACIGA, a další, 1984), (STRÝČEK, 1988):

$$Q_{(1)} = \frac{Q_n}{j} \quad (12)$$



Obr. 1 Závislost tvaru oběžného kola na součiniteli rychloběžnosti, (PACIGA, a další, 1984)

2.2 Hydraulická účinnost

Hydraulická účinnost η_h je důležitým a sledovaným parametrem čerpadla. Její hodnota je potřebná již během návrhu základních rozměrů oběžného kola.

Nejnámějším a nejjednodušším způsobem určení hydraulické účinnosti je, (MELICHAR, a další, 2002), (MELICHAR, a další, 2007):

$$\eta_h \cong \sqrt{\eta_c} - (0,02 \div 0,04) \quad (13)$$

- 0,02 – velká oběžná kol
- 0,04 – malá oběžná kola

Pro účely návrhu radiálních a diagonálních oběžných kol prováděného pomocí počítače doporučuje (PACIGA, a další, 1984), (BLÁHA, a další, 1997) vzorec sloužící k určení celkové účinnosti platný v rozsazích $0,04 \leq n_b \leq 0,33$ a $Q < 0,62 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

$$\eta_c = \left[\left(\frac{Q}{0,048} \right)^{0,083} + (0,722 + \log n_b)^3 \right]^{0,5} - \xi \quad (14)$$

Kde pro jednostupňová čerpadla se spirálou $\xi \in (0,18 \div 0,2)$.

Celkovou účinnost lze získat například z Erhartova diagramu ($n_q, Q \rightarrow \eta_c$), (MELICHAR, a další, 2002), nebo pomocí novějšího Pavluchova výpočtu zpracovaného na základě Peckovy teorie ($n, Q, H \rightarrow \eta_c, \eta_h$). S ohledem na dlouhou dobu oddělující publikování teorií jsou Pavluchovy výsledky o něco vyšší a přesnější než Erhartovy.

Hydraulickou účinnost lze určit na základě rychloběžnosti, (BLÁHA, a další, 1997):

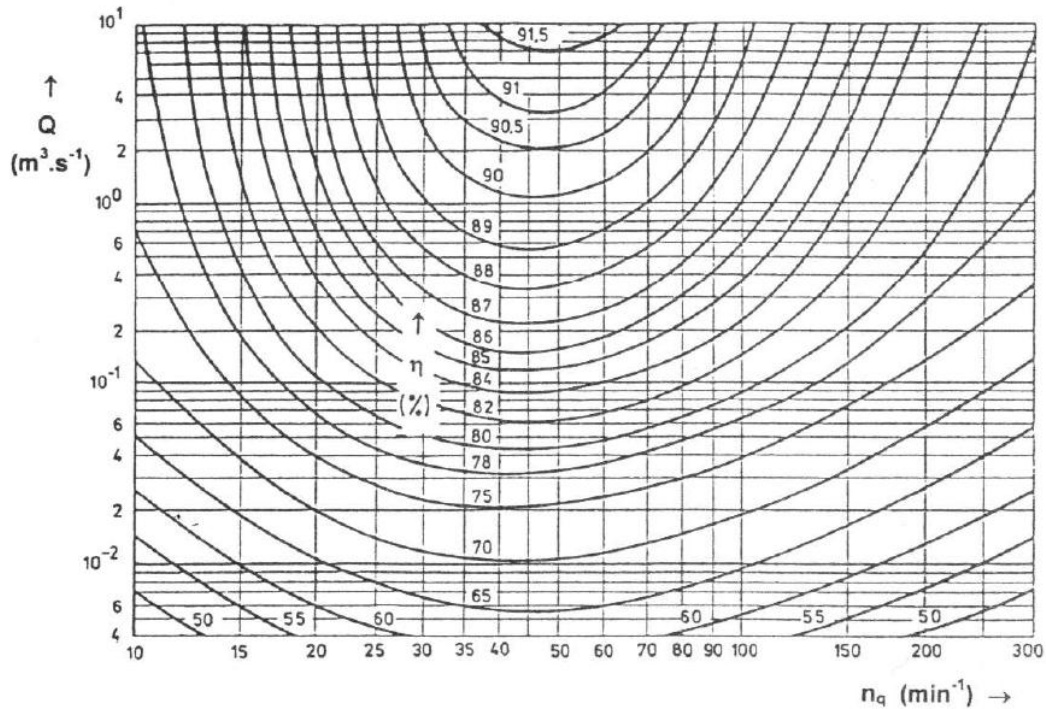
$$\eta_h = 1 - \frac{k}{\left(\frac{Q n_b}{n} \right)^{1,6}} \quad (15)$$

- drsný povrch $k = 0,325$

- střední drsnost $k = 0,265$
- větší čerpadla s hladkým povrchem $k = 0,203$

Nebo pomocí dopravní výšky, (ČERKASSKIJ, 1984), (PFLEIDERER, 1960):

$$\eta_h = \frac{H}{H_t} = \frac{H}{H + H_z} \quad (16)$$



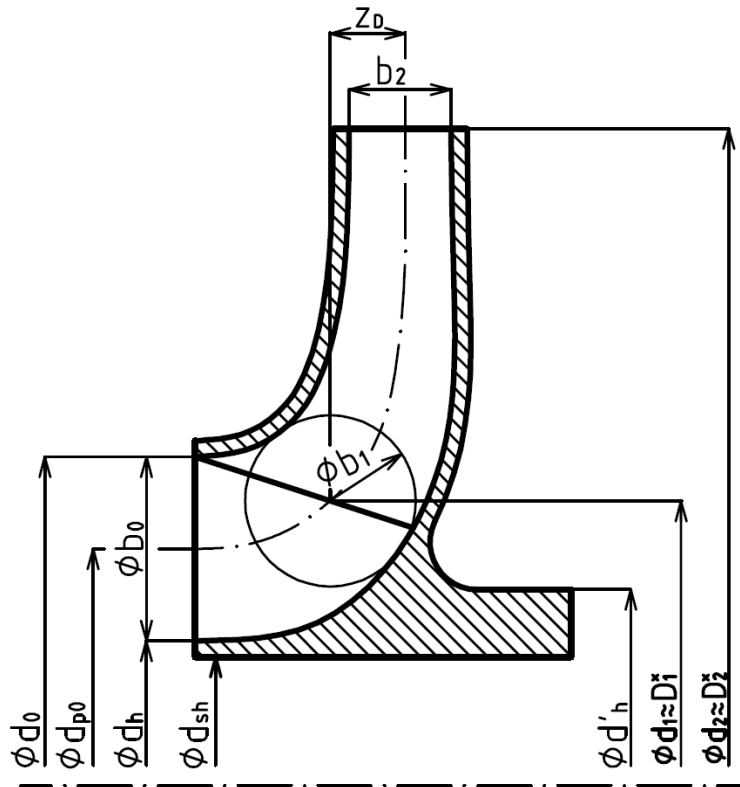
Obr. 2 Erhartův diagram (voda, $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$), (MELICHAR, a další, 2002)

2.3 Základní návrh meridiálního řezu

Předmětem práce je návrh odstředivého čerpadla a jeho spirály jako výstupního difusoru. Za takové se obecně považuje čerpadlo s radiálním oběžným kolem. Následující návrh základních rozměrů předpokládá, že výběr nejvhodnějšího tvaru oběžného kola byl již proveden. A s ohledem na požadované parametry z tohoto posouzení vyšlo jako nejvýhodnější jednostupňové radiální oběžné kolo. Představeny jsou pouze parametry oběžného kola, které je potřeba znát před tvorbou zadání do výpočtového programu.

2.3.1 Hlavní rozměry oběžného kola

Během návrhu meridiálního řezu je předpokládáno (PACIGA, a další, 1984), že střední proudnice a střednice kanálu jsou u radiálních oběžných kol s rovnoběžnými disky totožné ($d_1 \cong D_1^*, \dots, d_n \cong D_n^*, \dots, d_2 \cong D_2^*$).



Obr. 3 Meridiální řez oběžným kolem

2.3.2 Rozměry hřídele a náboje oběžného kola

Při výpočtu průměru hřídele d_{sh} je vycházeno z předpokladu, že zatížení hřídele je způsobeno pouze krouticím momentem od hnací jednotky čerpadla. Komplexní zatížení je možné stanovit až po vypracování kompletního konstrukčního návrhu čerpadla. Doporučené meze zatížení v krutu pro první návrh jsou $\tau_D \in (15; 30) \text{MPa}$, (PACIGA, a další, 1984), (STRÝČEK, 1988). V případě článkových čerpadel obvykle dolní mez, u jednostupňových čerpadel horní mez, (STRÝČEK, 1988). Dle (HALUZA, 2006/2007):

$$d_{sh} = \sqrt[3]{\frac{16M_k}{\pi\tau_D}} \quad (17)$$

$$M_k = \frac{\rho Q Y}{\eta \omega} \quad (18)$$

Na základě znalosti průměru hnací hřídele lze navrhnout rozměry náboje ze sací a výtlačné strany oběžného kola, (HALUZA, 2006/2007):

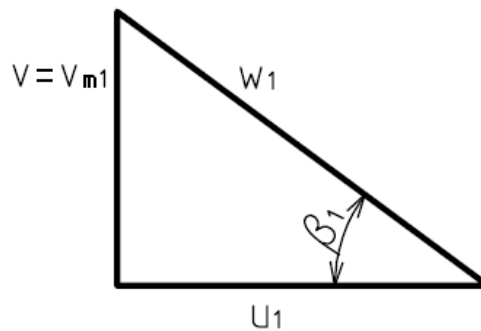
$$d_h \cong (1,3 \div 1,4)d_{sh} \quad (19)$$

$$d'_h \cong (1,35 \div 1,5)d_{sh} \quad (20)$$

2.3.3 Vstup do oběžného kola

2.3.3.1 Meridiální rychlost na vstupu na lopatky

Od meridiální složky celkové rychlosti se odvíjí rozměry vstupních částí oběžného kola. Při návrhu se obvykle předpokládá ideální vstup kapaliny, viz Obr. 4.



Obr. 4 Vstupní rychlostní trojúhelník

Meridiální složka vstupní rychlosti, (PACIGA, a další, 1984), (STRÝČEK, 1988):

$$\boxed{v_{m1} = K_{m1} \sqrt{2gH}} \quad (21)$$

Směrný parametr K_{m1} lze empiricky vyjádřit pro různé varianty oběžného kola, (PACIGA, a další, 1984), (STRÝČEK, 1988):

$$0,041 < n_b < 0,1647$$

$$K_{m1} = 0,12 + 0,5617(n_b - 0,041)^{0,8} \quad (22)$$

$$n_b \geq 0,1647$$

$$K_{m1} = 0,227 + 0,574(n_b - 0,1647) \quad (23)$$

2.3.3.2 Vstupní hrdlo

První odhad průměru vstupního hrdla d_0 je možné získat zjednodušeným postupem na základě předpokladu:

$$Q = v_0 S_0 \quad (24)$$

$$Q = Q_n + \Sigma Q_z \quad (25)$$

$$S_0 = \frac{\pi(d_0^2 - d_n^2)}{4} \quad (26)$$

Rychlost kapaliny ve vstupním hrdle v_0 je zvolena z doporučeného rozsahu:

$$v_0 = (0,8 \div 0,9)v_{m1} \quad (27)$$

Průměr vstupního hrdla lze poté vyjádřit:

$$d_0 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi v_0} + d_h^2} \quad (28)$$

Přesnější výpočet, který již uvažuje počet, tloušťku a tvar lopatek doporučuje (PACIGA, a další, 1984).

Vstupní průřez oběžného kola:

$$S_1 = \frac{Q_n + \Sigma Q_z}{v_{m1}} = \frac{(1,03 \div 1,05)Q_n}{v_{m1}} \quad (29)$$

Lze také vyjádřit:

$$S_1 = \pi D_1^* b_1 - f \quad (30)$$

Kde f je plocha, kterou překrývají lopatky v důsledku své tloušťky.

$$f = \frac{z s_1 b_1}{\sin \beta_1} \quad (31)$$

$$S_1 = \pi D_1^* b_1 \left(1 - \frac{s_1 z}{\pi D_1^* \sin \beta_1} \right) = \pi D_1^* b_1 \varphi_1 \quad (32)$$

Součinitel zúžení φ_1 má pro čerpadla s prostorově zakřivenými lopatkami tvar, (PACIGA, a další, 1984):

$$\varphi_1 = 1 - \frac{z s_1 \sqrt{1 + t g^2 \varepsilon_1 \cos^2 \beta_1}}{\pi D_1^* \sin \beta_1} \quad (33)$$

Kde ε_1 je úhel odklonu vstupní hrany od normály k proudnicím. Vzhledem k množství neznámých většímu než je počet rovnic, doporučuje (PACIGA, a další, 1984) pro návrh meridiálního řezu volbu $\varphi_1 \in (0,75 \div 0,85)$. A přesnou hodnotu poté použít až při řešení lopatkových řezů.

Počet lopatek z je volen v rozmezí (4÷8). V případě vyšších hodnot součinitele rychloběžnosti se volí počet menší, (PACIGA, a další, 1984).

Tloušťka lopatky závisí na technologii odlévání a na jejím mechanickém namáhání. Obvykle se pohybuje v rozmezí, (PACIGA, a další, 1984):

$$s_1 = (0,015 \div 0,025)d_2 \quad (34)$$

Ve vstupním hrdle a před vstupem na lopatky je předpokládána stejná rychlost, (PACIGA, a další, 1984), potom:

$$\frac{\pi}{4}(d_0^2 - d_h^2) = \pi D_1^* b_1 \quad (35)$$

Kde z vyjádření vstupního průřezu:

$$\pi d_1 b_1 = \frac{S_1}{\varphi_1} = \frac{Q_n + \Sigma Q_z}{v_{m1} \varphi_1} \quad (36)$$

$$d_0 = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{Q_n + \Sigma Q_z}{v_{m1} \varphi_1} + d_h^2} \quad (37)$$

2.3.3.3 Náběžná hrana lopatek

Pro radiální oběžná kola se d_1 podle (PACIGA, a další, 1984) přibližuje d_0 a v případech větších hodnot rychloběžnosti k d_{p0} . Pro běžné účely doporučuje (PACIGA, a další, 1984), (STRÝČEK, 1988) použít:

$$d_1 = d_{p0} + K(d_0 - d_{p0}) \quad (38)$$

$$d_{p0} = \sqrt{\frac{d_0^2 + d_h^2}{2}} \quad (39)$$

Pro $n_b < 0,15$:

$$K = 0,59 + 0,47 \cos (n_b \cdot 1255^\circ) \quad (40)$$

Při vyšších hodnotách kritéria rychloběžnosti se K blíží nule.

Šířka kanálu oběžného kola:

$$b_1 = \frac{Q_n + \Sigma Q_z}{\pi D_1^* v_{m1} \varphi_1} \quad (41)$$

2.3.4 Výstup z oběžného kola

2.3.4.1 Meridiální rychlost na výstupu z oběžného kola

Dle (PACIGA, a další, 1984), (STRÝČEK, 1988):

$$v_{m2} = K_{m2} \sqrt{2Y_{(1)}} \quad (42)$$

Směrný parametr K_{m2} lze empiricky vyjádřit pro různé varianty oběžného kola:

$$0,041 < n_b < 0,1647$$

$$K_{m2} = 0,077 + 1,41(n_b - 0,041)^{1,2} \quad (43)$$

$$n_b \geq 0,1647$$

$$K_{m2} = 0,192 + 0,8(n_b - 0,1647)^{1,1} \quad (44)$$

Pro případ nestandardních rozměrů oběžného kola, upozorňuje (STRÝČEK, 1988) na nutnost změnit K_{m2} .

2.3.4.2 Rozměry výstupní části oběžného kola

Výstupní průměr d_2 je počítán s pomocí směrného parametru K_u , který má stejný význam jako směrný parametr K_{m1} , (PACIGA, a další, 1984), (STRÝČEK, 1988).

$$d_2 = \frac{2}{\omega} K_u \sqrt{2Y_{(1)}} \sqrt{\frac{0,84}{\eta_h}} \quad (45)$$

$$0,041 < n_b < 0,1$$

$$K_u = (0,875 \div 0,89) + 1,1n_b \quad (46)$$

$$n_b \geq 0,1$$

$$K_u = (0,89 \div 0,92) + 3,47n_b^{1,5} \quad (47)$$

Šířka kanálu na výstupu z oběžného kola:

$$b_2 = \frac{Q_n + \Sigma Q_z}{\pi D_2^* v_{m2} \varphi_2} \quad (48)$$

Pro první návrh meridiálního řezu (PACIGA, a další, 1984) doporučuje volit součinitel zúžení $\varphi_2 \in (0,9 \div 0,95)$. Tento součinitel závisí na tvaru lopatek, (PACIGA, a další, 1984):

rovinně zakřivené lopatky:

$$\varphi_2 = 1 - \frac{zS_2}{\pi D_2^* \sin \beta_2} \quad (49)$$

prostorově zakřivené lopatky:

$$\varphi_2 = 1 - \frac{zS_2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon_2^2 \cos^2 \beta_2}}{\pi D_2^* \sin \beta_2} \quad (50)$$

2.3.5 Střední proudnice

Střední proudnice rozděluje kanál čerpadla na dvě části, kterými protéká stejný průtok. Při výpočtu provedeném na základě Francisovy metody jsou meridiální rychlosti napříč kanálem (po normále) konstantní. Potom střední proudnice rozděluje plochu na dvě stejné části, (PACIGA, a další, 1984).

K získání vstupních dat do zadání výpočtového programu je potřebný rozměr z_D , (PACIGA, a další, 1984), (STRÝČEK, 1988).

$$n_b < 0,247$$

$$z_D = d_2 [0,17 \sin^{1,2}(364 n_b)] + \frac{b_2}{2,2} \quad (51)$$

$$0,5 > n_b > 0,247$$

$$z_D = \left(0,17 d_2 + \frac{b_2}{2,2}\right) \{1 + 0,7 \sin^2 [121,3(n_b - 0,247)]\} \quad (52)$$

Získané hodnoty lze považovat z hydraulického hlediska za ideální. Konstrukční omezení však někdy vyžadují úpravy.

2.4 Vstupní hrana lopatky

U radiálních oběžných kol je obvykle vstupní hrana pouze mírně skloněna k ose rotace, (PACIGA, a další, 1984). Střední proudnice je potom i střednicí kanálu, viz Obr. 3. Tomu nevyhovují pouze radiální oběžná kola s velkými součiniteli rychloběžnosti. U diagonálních a axiálních oběžných kol takový předpoklad neplatí.

Vstupní hrana je vedena přes průsečík střední proudnice s průměrem d_1 . Rovinně zakřivené lopatky doporučuje (PACIGA, a další, 1984) použít pouze v případech, kdy je úhel vstupní hrany lopatky menší než 12° . (STRÝČEK, 1988) to samé doporučuje pro $n_b < 0,05$, což umožňuje navrhovat sklon vstupní hrany do hodnoty 10° až 15° . Čím je součinitel rychloběžnosti větší (dle (STRÝČEK, 1988) $n_b > 0,07$), tím je větší i sklon vstupní hrany.

Výhodné je volit vstupní hranu šikmou, i za cenu prostorově zakřiveného tvaru lopatek. Šikmá vstupní hrana se příznivě projeví na stabilitě charakteristiky čerpadla (menší možnost odtrhnutí proudění od lopatek) a částečně také na zlepšení kavitace, (PACIGA, a další, 1984).

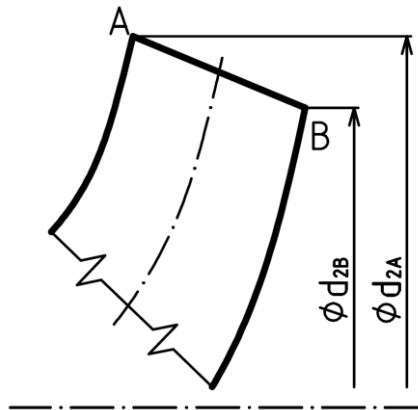
2.5 Výstupní hrana lopatky

Do $n_b = 1$ bývá výstupní hrana obvykle rovnoběžná s osou rotace. Při větších hodnotách n_b je třeba navrhnout výstupní hranu šikmou, (PACIGA, a další, 1984), (STRÝČEK, 1988).

$$d_{2A} = d_2 + A \quad (53)$$

$$d_{2B} = d_2 - A \quad (54)$$

$$A = b_2 [\sin(136 n_b)]^{1,4} \quad (55)$$



Obr. 5 Návrh výstupní hrany lopatek

2.6 Vstupní úhel lopatky

$$\tan \beta_1 = \frac{v_{m1}}{u_1(1 - \kappa)} \quad (56)$$

Kde κ je vstupní ráz a jeho hodnota se volí $\kappa \in (0 \div 0,3)$, (PACIGA, a další, 1984).

Při návrhu vstupního úhlu se uvažuje s reálným tvarem, tloušťkou a počtem lopatek. To je zohledněno nejenom zahrnutím vstupního rázu, ale i při dosazení hodnoty meridiální rychlosti, (PACIGA, a další, 1984):

$$v_{m1} = \frac{Q_n + \Sigma Q_z}{\pi D_1^* b_1 \varphi_1} \quad (57)$$

Vyjádření β_1 z funkcí sinus a tangens se považuje za matematicky složité, (PACIGA, a další, 1984). Hodnota vstupního úhlu je získávána iterativním výpočtem. Ten se postupně přibližuje

ke správné hodnotě, přičemž už při druhé nebo třetí iteraci bývá výsledek v toleranci $\pm 0,5^\circ$. Dosazení do prvního kroku bývá voleno $\beta_1 \in (15^\circ \div 25^\circ)$, (PACIGA, a další, 1984).

2.7 Výstupní úhel lopatky

Výstupní úhel β_2 (PACIGA, a další, 1984) doporučuje počítat pomocí následujících rovnic:

$$\Psi_t = \sigma_Y - \frac{\phi_2}{\sqrt{\tan \beta_2 \tan \beta_1}} \sqrt[4]{\frac{b_2}{b_1} \frac{\varphi_2}{\varphi_1}} \quad (58)$$

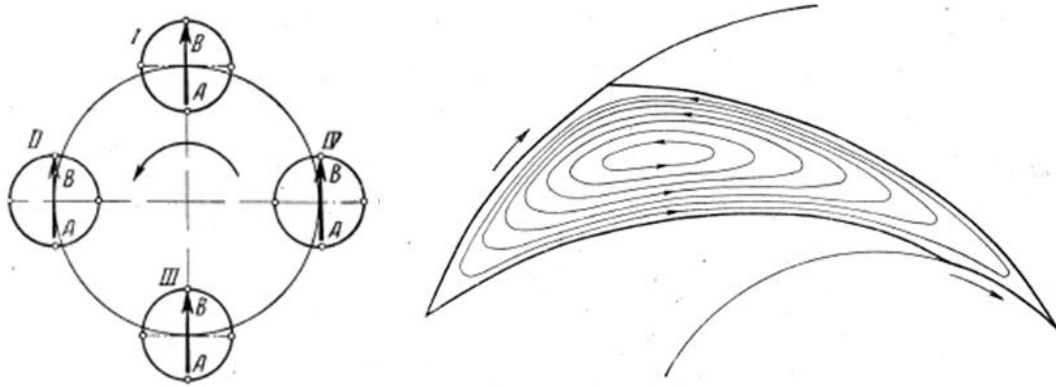
$$\phi_2 = \frac{1,04 Q_n}{\pi D_2^* b_2 \varphi_2 u_2} \quad (59)$$

$$\Psi_t = \frac{Y_{(1)}}{\eta_h u_2^2} \quad (60)$$

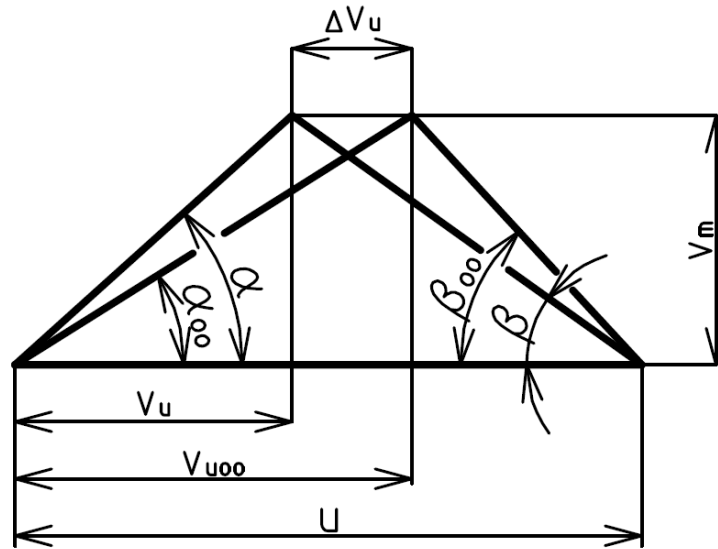
Stejně jako u výpočtu vstupního úhlu lopatky se opět jedná o iterační proces postupného přibližování se správnému výsledku. Hodnotu prvního kroku je doporučeno volit v rozsahu $\beta_2 \in (25^\circ \div 35^\circ)$, (PACIGA, a další, 1984). Výsledný úhel je ověřen splněním podmínky $Y_{(1)} \in (0,04 \div 0,00^\circ)$, (PACIGA, a další, 1984). Pokud se měrná energie vypočtená pro oběžné kolo pohybuje mimo požadované rozmezí, je zadán nový úhel β_2 nebo se změní počet lopatek.

2.7.1 Korekční faktor

Korekční faktor σ_Y (κ , (WAISSER, 1976)) zohledňuje reálný počet lopatek v obecném bodě lopatkového prostoru, (STRÝČEK, 1988). Obecným předpokladem je, že čerpadlo pracuje s ideální tekutinou a oběžné kolo má nekonečný počet lopatek. Každá část kapaliny má tedy kontakt s lopatkou, přenos hybnosti na kapalinu je dokonalý a rychlost všech částic na určitém poloměru v oběžném kole je stejná. V případě čerpání reálné kapaliny v oběžném kole s konečným počtem lopatek je nutné vzít v úvahu existenci lokálního víru, kde výstupní úhel lopatky β_{2L} a výstupní úhel kapaliny na střední proudnici relativních rychlostí β_2 se odlišují. Diference výstupního úhlu lopatky a kapaliny se zvětšuje se zmenšujícím se počtem lopatek.



Obr. 6 Ukázka vzniku lokálního víru v kanále oběžného kola čerpadla, (PFLEIDERER, 1960)



Obr. 7 Rychlostní trojúhelníky pro ideální a reálné proudění

Poměr mezi měrnou energií pro konečný a nekonečný počet lopatek, (WAISSER, 1976):

$$\varepsilon = \frac{gH_t}{gH_{t\infty}} = \frac{\sigma_v - \frac{\Phi}{\tan \beta_{2L}}}{1 - \frac{\Phi}{\tan \beta_{2L}}} \quad (61)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + \frac{2\lambda}{z} \frac{1}{1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}} \quad (62)$$

Pro čerpadla se spirálou:

$$\lambda = (0,65 \div 0,85) \left(1 + \frac{\beta_{2L}^\circ}{60}\right) \quad (63)$$

Poměr mezi dopravní výškou pro konečný a nekonečný počet lopatek, (NEUMAIER, 1994):

$$\mu = \frac{H_t}{H_{t\infty}} = \frac{v_u}{v_{u\infty}} \quad (64)$$

Změní-li se počet a úhel lopatek oběžného kola při zachování jeho meridiálního řezu a jeho spirály, změní se i teoretická charakteristika čerpadla, (WAISSER, 1976). Nová poloha bodu optimální účinnosti bude určena průsečíkem charakteristiky oběžného kola a charakteristiky spirály. „*Směrnice charakteristiky spirály zůstane přibližně konstantní a bod optimální účinnosti se bude posouvat po původní charakteristice spirály.*“, (WAISSER, 1976).

Definice korekčního faktoru, (KNÍŽAT, 2002):

$$\sigma_Y = \frac{v_u}{v_{u\infty}} = 1 - \frac{\Delta v_{u2}}{u_2} \quad (65)$$

Odvození korekčního faktoru je poměrně značné množství. Jejich kvalita a přínosnost se samozřejmě různí. Zde jsou pro ukázkou uvedena některá základní. Podrobnější zpracování a také další metody lze nalézt například v (STRÝČEK, 1988) a (KLAS, 2008).

- Stodolova metoda, (STODOLA, 1922):

$$\sigma_Y = 1 - \frac{\pi \sin \beta_2}{z} \quad (66)$$

- Pfelidererova metoda, (STRÝČEK, 1988):

$$\sigma_Y = 1 - \Psi_{t\infty} \left(1 - \frac{1}{1+p} \right) \quad (67)$$

$$p = \frac{1}{\frac{\Psi_{t\infty}}{1 - \sigma_Y} - 1} \quad (68)$$

- Weisserova metoda, (WAISSER, 1963):

$$\sigma_Y = 1 - \frac{0,4 + 0,445 \sin \beta_2}{z^{0,5}} \quad (69)$$

- Krouzova metoda, (KROUZA, 1956):

$$\sigma_Y = 1 - \frac{v_{m2}}{u_2} \left(\sqrt{\left(\frac{1}{\sin \beta_2} - \frac{\pi a_2 n}{v_{m2}} \right)^2} - 1 - \cot \beta_2 \right) \quad (70)$$

- Erhartova metoda odvozená s použitím Pfleidererových podkladů, (ERHART, 1954):

$$\sigma_Y = \frac{u_2 - \sqrt{(w_2^5)^2 - v_{m2}^2}}{u_2 \eta_h} - \frac{v_{m2}}{u_2} \cot \beta_2 \quad (71)$$

- Analytický vztah, (WAISSER, 1976):

$$\sigma_Y = \frac{gH}{\eta_h u_2^2} + \frac{\Phi}{\tan \beta_{2L}} \quad (72)$$

- Empirický vztah, odvozený pomocí metody nejmenších čtverců, založený na parametrech získaných měření řady kvalitních čerpadel, (WAISSER, 1976):

$$\sigma_Y = 1,01 + \frac{0,395 + 0,457 \sin \beta_{2L}}{z^{0,5}} \quad (73)$$

3 Vstupní data návrhu spirály

Hydraulický návrh spirály musí vycházet z charakteru proudění, které je na výstupu z oběžného kola a pokračuje v prostoru spirály až po výstupní hrdlo. Její základní činností je převod co největší části kinetické energie vystupující z oběžného kola na energii tlakovou. Tvar a kvalitní hydraulický návrh spirály mají velký vliv na hydraulické ztráty a ovlivňují další vlastnosti, jako je například účinnost, stabilita charakteristiky, velikost radiální síly, hlučnost, vibrace, v některých případech i samonasávací vlastnost čerpadla, (STRÝČEK, 1988).

Návrh spirály je podrobně rozpracován v kapitole věnované diferenciální geometrii. Vstupní hodnoty potřebné pro návrh meridiálního řezu spirály jsou následující:

Vstupní poloměr spirály, (HALUZA, 2006/2007):

$$r_3 = 1,035 r_2 \quad (74)$$

Teoretická šířka spirály na vstupu, (POCHYLÝ, 1991):

$$b_3 = b_2 \quad (75)$$

Sám autor však doporučuje volit podle situace vstupní průřez spirály o něco širší než je výstup z oběžného kola s ohledem na lepší hydraulické vlastnosti přechodu. Dle (PACIGA, a další, 1984):

$$b_3 = (1,5 \div 1,8)b_2 \quad (76)$$

V (ZAMNICKI, 1986) je zase představena funkční závislost poměru $\left(\frac{b_3}{b_2}\right)$ na poměru $\left(\frac{d_3}{d_2}\right)$.

Existuje také možnost, jak vypočítat hodnotu b_3 ze známých parametrů, (HALUZA, 2006/2007):

$$b_3 = 2 \left(\frac{b_2}{2} + \Delta + \delta_0 + s_0 \right) \quad (77)$$

$$s_0 = \frac{2,97r_2}{Re^{0,34}} \quad (78)$$

$$Re = \frac{u_2 r_2}{\nu} \quad (79)$$

$$u_2 = 2\pi n r_2 \quad (80)$$

Při použití návrhové cesty $v_{stř} = konst.$ je třeba znát hodnotu koeficientu A_{II} . Jedná se o parametr vypovídající o vazbě oběžného kola a spirály, (HALUZA, 2006/2007).

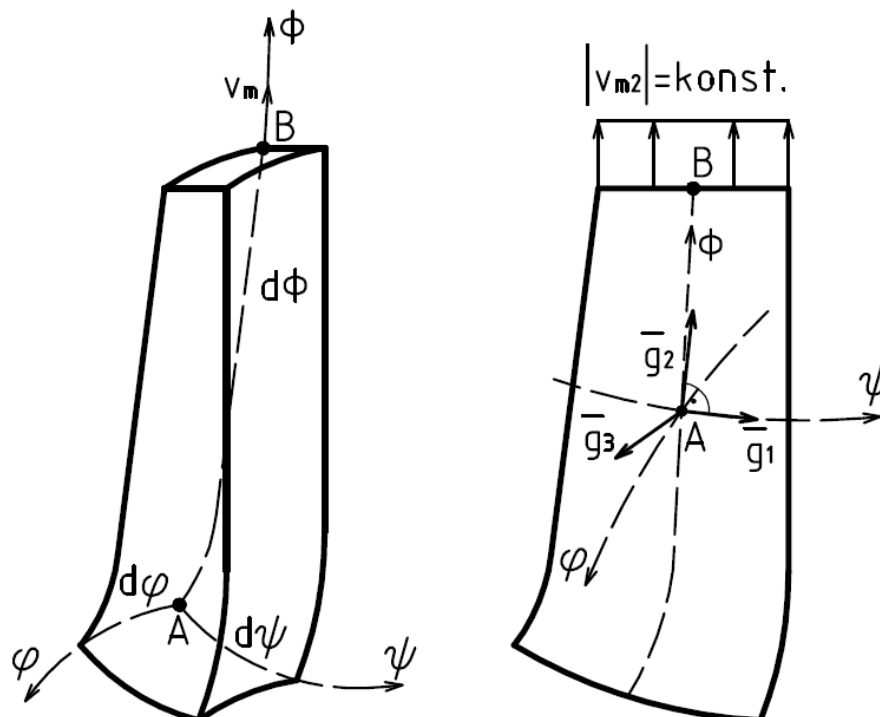
$$A_{II} = b_2(2\pi r_2 \sin \beta_2 - zs) \quad (81)$$

Při aplikaci matematického modelu na čerpadlo BETA 10 jsou i u spirály všechny rozměry převzaty z již vyrobeného a testovaného výrobku. Hodnotu A_{II} je proto také třeba vypočítat na základě skutečných konstrukčních parametrů. Velikosti výstupního úhlu lopatky β_2 a tloušťky lopatky na výstupu s jsou s ohledem na zborcený tvar lopatky vztaženy k jejímu středu.

$$A_{II} = 0,015 \cdot (2\pi \cdot 0,069 \cdot \sin 27,67 - 6 \cdot 0,00425) = \underline{2,6374 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2} \quad (82)$$

4 Návrh oběžného kola metodami diferenciální geometrie

4.1 Meridiální řez oběžným kolem



Obr. 8 Kanál oběžného kola čerpadla, (POCHYLÝ, 2009)

Meridiální řez kanálem oběžného kola je definován řídicími body. Ty tvoří matici o určitém počtu řádků a sloupců. Množství bodů ovlivňuje možnosti ovládání řezu. Nikoliv pouze jeho vnějšího tvaru, ale i velmi důležitého vnitřního uspořádání. Počet bodů je proto nutno volit uvážlivě. Musí být umožněno přesné modelování a množství bodů by mělo být uživatelsky zvládnutelné.

Každý bod zadávací matice má souřadnice (x, y, z) , kde hodnoty z jsou s ohledem na dvojrozměrnost úlohy pro všechny body rovny nule.

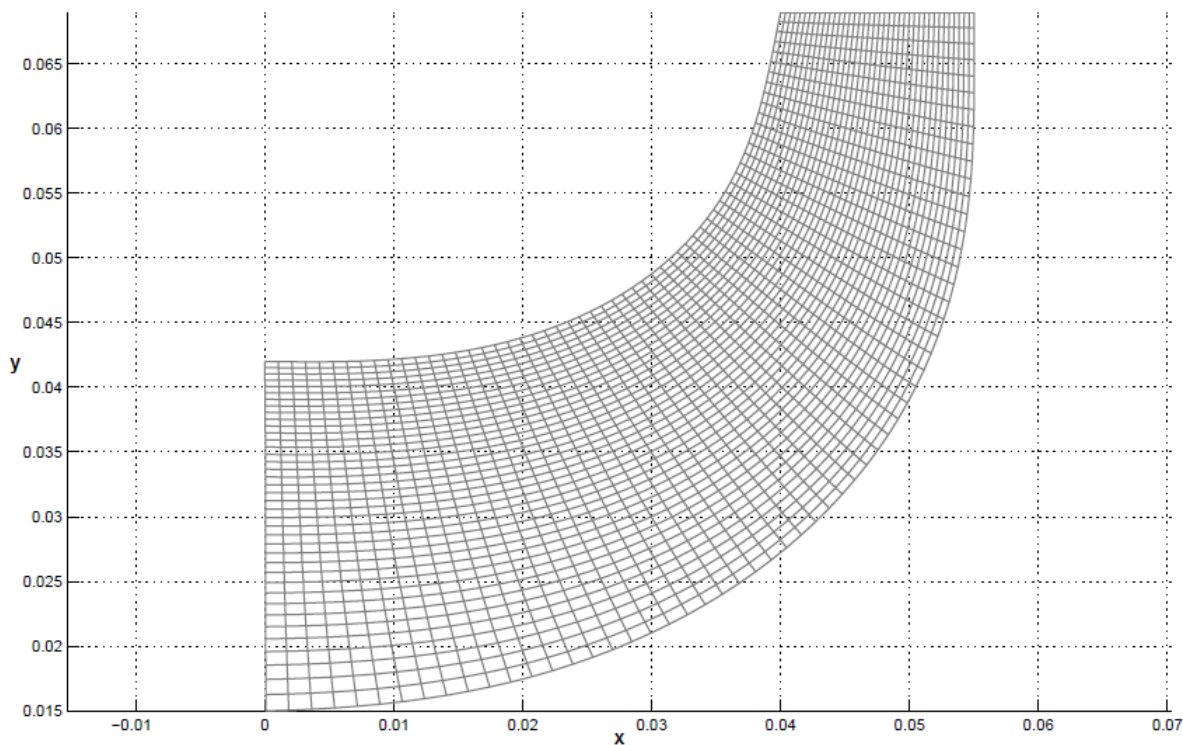
Meridiální řez je řešen jako Bézierova plocha, (POCHYLÝ, 1991):

$$\bar{r}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \bar{r}_{ij} \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i} \binom{n}{j} v^j (1-v)^{n-j} \quad (83)$$

u, v jsou bezrozměrné parametry o voleném počtu členů s hodnotou:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \langle 0, 1 \rangle \\ \bar{v} &= \langle 0, 1 \rangle \end{aligned} \quad (84)$$

u, v určují jemnost vykreslení plochy v jednotlivých směrech. Jemnost sítě je možné v každém ze směrů volit libovolně s ohledem na aktuálně řešenou úlohu.



Obr. 9 Meridiální řez oběžným kole čerpadla BETA 10, $[u \times v] = [60 \times 40]$

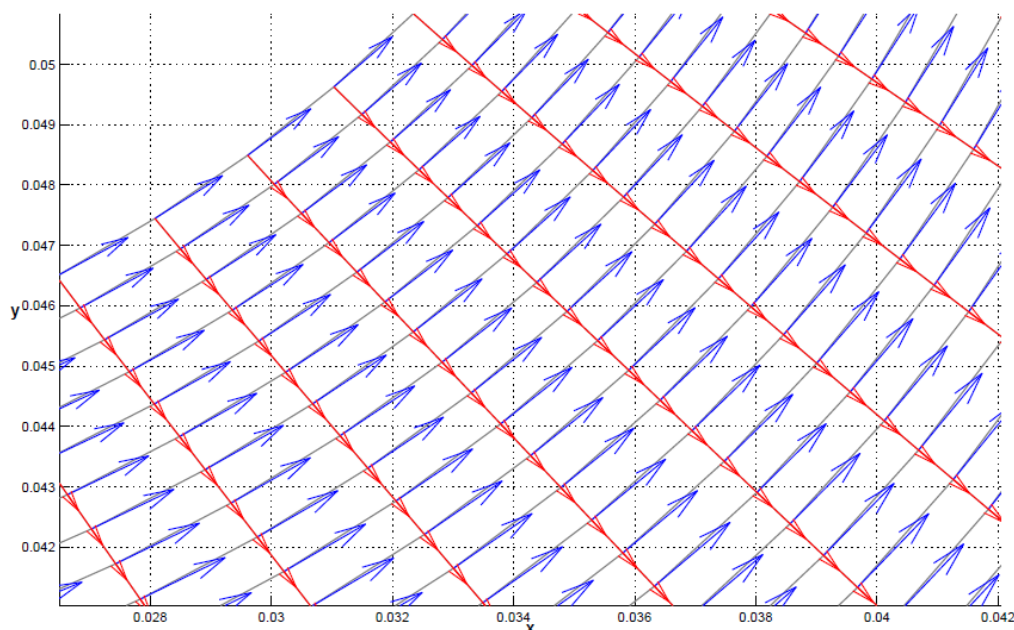
4.2 Vektorové operace

Výpočty prováděné při návrhu oběžného kola i spirály se opírají o vektory tečné ke křivkám tvořícím síť Bézierovy plochy. Vzájemná provázanost návrhu, například oběžného kola a lopatky, je uskutečněna právě přes pole vektorů tečných k souřadnicovým křivkám na ploše popisující meridiální řez oběžným kolem.

Odvození tečných vektorů je provedeno v (POCHYLÝ, 1991). Vztahy aplikované v řešené úloze:

$$\bar{g}_u = m \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^n (\bar{r}_{ij} - \bar{r}_{i-1j}) \binom{m-1}{i-1} u^{i-1} (1-u)^{m-i} \binom{n}{j} v^j (1-v)^{n-j} \quad (85)$$

$$\bar{g}_v = n \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^n (\bar{r}_{ij} - \bar{r}_{ij-1}) \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i} \binom{n-1}{j-1} v^{j-1} (1-v)^{n-j} \quad (86)$$



Obr. 10 Vektory tečné ke křivkám Bézierovy plochy; \bar{g}_u (modré), \bar{g}_v (červené)

Vektor \bar{g}_1 na Obr. 8 představuje vektor \bar{g}_u nebo \bar{g}_v , záleží to na způsobu zadání Bézierovy plochy řídicími body. Vektor \bar{g}_3 je poloměrem, tedy souřadnicí y , na kterém se daný bod pohybuje. Zbývá tedy získat vektor \bar{g}_2 , který je ortogonální k vektoru \bar{g}_1 . Takový způsob určení vektorů má svoji výhodu a je vysvětlen ve 4.5.2.

4.3 Ortogonální síť

Základním předpokladem zde představovaného výpočtového modelu je vzájemná ortogonalita vektorů v prostoru oběžného kola a spirály. Jedná se o vektory $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$, viz Obr. 8. O Bézierově ploše vypočtené z řídicích bodů lze však s takřka naprostou jistotou prohlásit, že křivky ji tvořící nejsou navzájem ortogonální. Vektory \bar{g}_u a \bar{g}_v nejsou navzájem kolmé. Řešení problému bylo provedeno s pomocí (POCHYLÝ, 2008). Následující matematický model vztahující se k tvorbě ortogonální sítě je výňatkem části odvození ze zmíněného rukopisu, přičemž některé závěry již byly představeny v (SLOUPENSKÝ, a další, 2010).

„

Síť získaná při výpočtu Bézierovy plochy obecně není ortogonální.

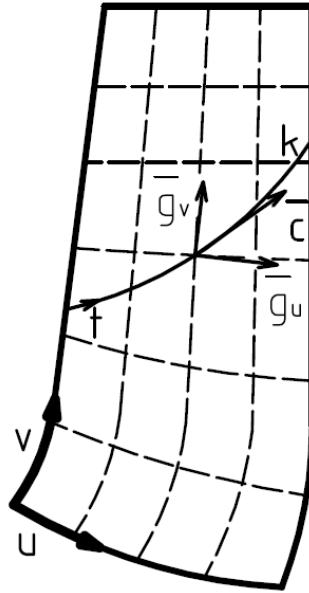
Na ploše je zvolena křivka k obecně neortogonální k souřadnicovým křivkám.

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \quad (87)$$

Předpokladem je:

$$u = u(t), v = v(t) \quad (88)$$

$$\bar{r} = \bar{r}[u(t), v(t)] = \bar{r}(t) \quad (89)$$



Obr. 11 Volba křivky

Tečný vektor ke křivce k :

$$\bar{c} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \quad (90)$$

Předpokladem je:

$$\bar{c} \cdot \bar{g}_v = 0 \quad (91)$$

Vynásobením rovnice (90) vektorem \bar{g}_v je získáno:

$$\bar{c} \cdot \bar{g}_v = \bar{g}_u \cdot \bar{g}_v \frac{du}{dt} + \bar{g}_v \cdot \bar{g}_v \frac{dv}{dt} = 0 \quad (92)$$

$$\frac{du}{dv} = - \frac{\bar{g}_v \cdot \bar{g}_v}{\bar{g}_u \cdot \bar{g}_v} \quad (93)$$

$$\frac{dv}{du} = - \frac{\bar{g}_u \cdot \bar{g}_v}{\bar{g}_v \cdot \bar{g}_v} \quad (94)$$

“

Bylo vybráno řešení podle varianty vycházející ze vzorce (94). Hodnota $(\bar{g}_u \cdot \bar{g}_v)$ může být totiž v určitých bodech blízká nule. V takových případech by výsledek skalárního součinu mohl být menší než je strojová přesnost a vzniklá chyba by velmi ovlivnila celý výpočet.

”

Počáteční podmínky:

$$v = v_0; u = 0 \quad (95)$$

$$\bar{c} = \bar{g}_u \frac{du}{dt} + \bar{g}_v \frac{dv}{dt} \quad (96)$$

$$\bar{c}(t) = \bar{g}_u \frac{du}{dt} - \frac{\bar{g}_u \cdot \bar{g}_v}{\bar{g}_v \cdot \bar{g}_v} \frac{du}{dt} \cdot \bar{g}_v \quad (97)$$

$$\bar{c}(t) = \left(\bar{g}_u - \frac{\bar{g}_u \cdot \bar{g}_v}{\bar{g}_v \cdot \bar{g}_v} \bar{g}_v \right) \frac{du}{dt} \quad (98)$$

Položíme-li $u = t$, jsme schopni vykreslit ortogonální vektory i plochu:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{c}(t) = \left(\bar{g}_u - \frac{\bar{g}_u \cdot \bar{g}_v}{\bar{g}_v \cdot \bar{g}_v} \bar{g}_v \right) \\ \bar{r} = \bar{r}[u, v(u)] = r(t) \end{array} \right\} \quad (99)$$

v je určeno v závislosti na $u = t$ z rovnice (94).

“

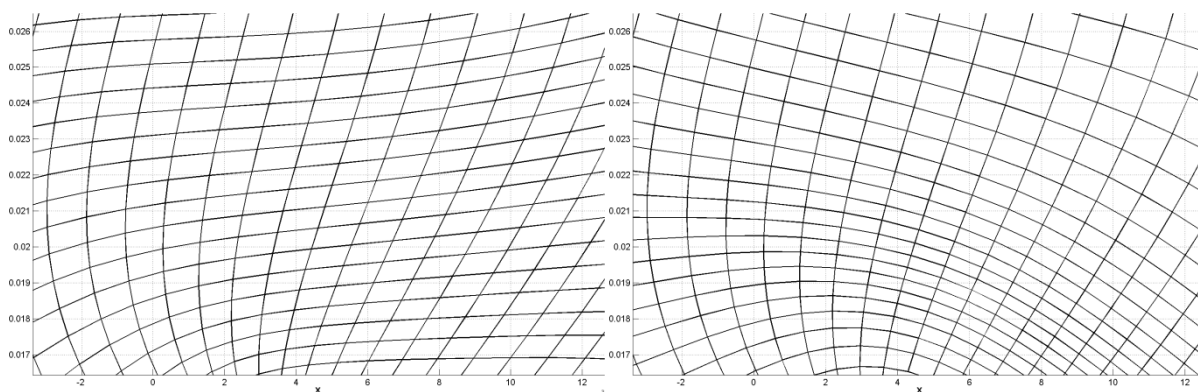
Při výpočtu ortogonální sítě na Bézierově ploše jsou řešeny obyčejné diferenciální rovnice:

$$dv = - \frac{|\bar{g}_u| |\bar{g}_v|}{|\bar{g}_v| |\bar{g}_v|} du \quad (100)$$

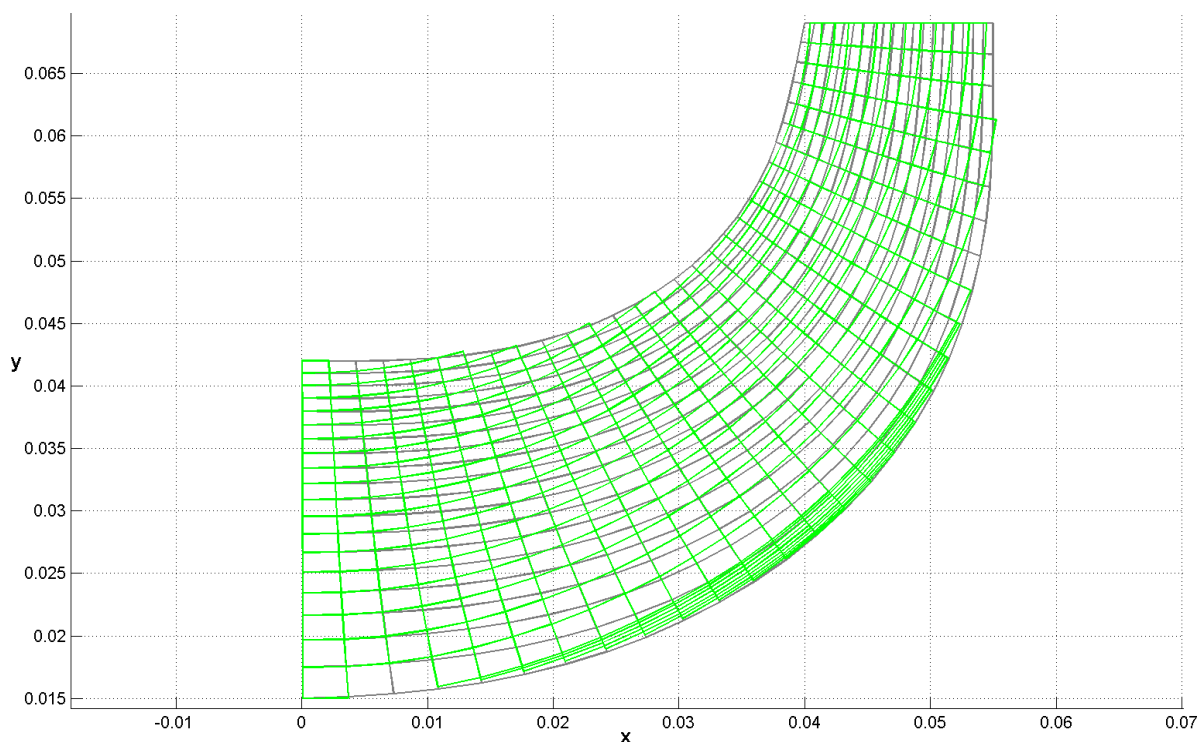
Pro řešení byly vybrány následující metody. Cílem bylo pokrýt co možná nejširší možnou oblast zadání.

- ODE45 – Dormand - Prince (4,5)
- ODE113 – Adams – Bashforth - Moulton (PECE)
- ODE23tb – TR-BDF2, L – stabilní metoda 2. řádu pro případný výskyt tuhého problému

Kvalita vypočtené ortogonální sítě velmi silně závisí na typu zadání řídicích bodů a na zadání a vzájemném poměru bezrozměrných parametrů u, v .

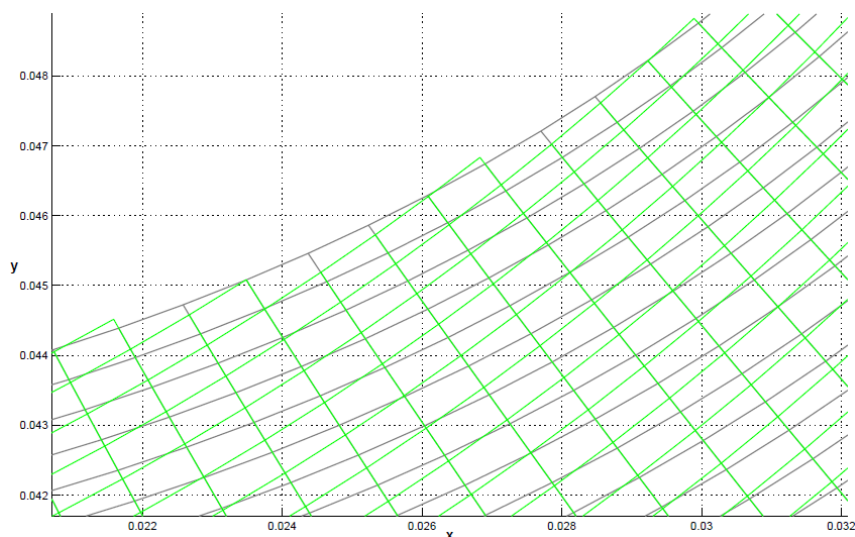


Obr. 12 Neortogonální síť (vlevo) a ortogonální síť (vpravo), (SLOUPENSKÝ, a další, 2010)

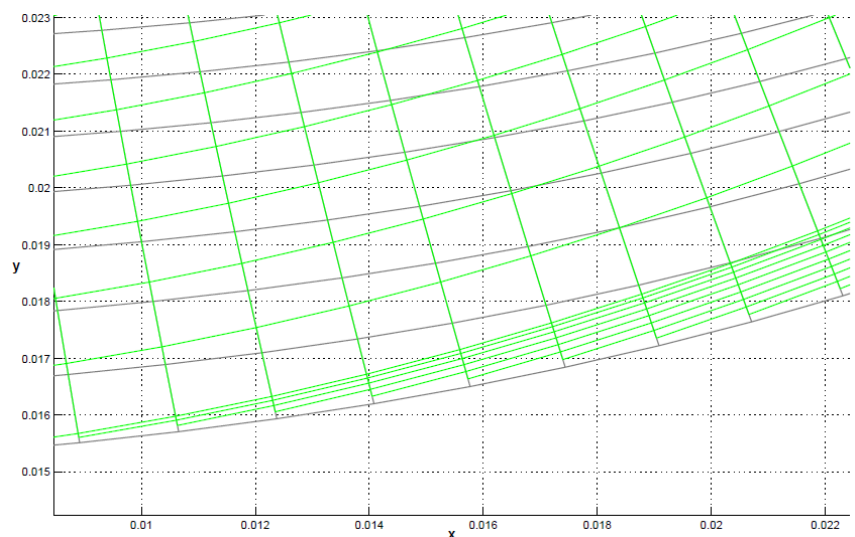


Obr. 13 Ortogonální síť (zelená) na meridiálním řezu oběžným kolem čerpadla BETA 10, $[u \times v] = [30 \times 20]$

Výpočet ortogonální sítě patří z prováděných operací k těm výpočtově náročnějším. Naprogramovaný algoritmus má schopnost téměř přesně kopírovat tvar Bézierovy plochy. Nepokračuje ve výpočtu ortogonální sítě, pokud její křivka již uniká mimo řešenou oblast a dokáže vytvářet a přidávat nové křivky v případě náhlého rozšíření plochy. Tak složité operace se však zákonitě promítnou na výsledném výpočetním čase.



Obr. 14 Ukončení výpočtu sítě při vybočení mimo plochu, $[u \times v] = [60 \times 40]$



Obr. 15 Vytváření dalších křivek ortogonální sítě, $[u \times v] = [60 \times 40]$

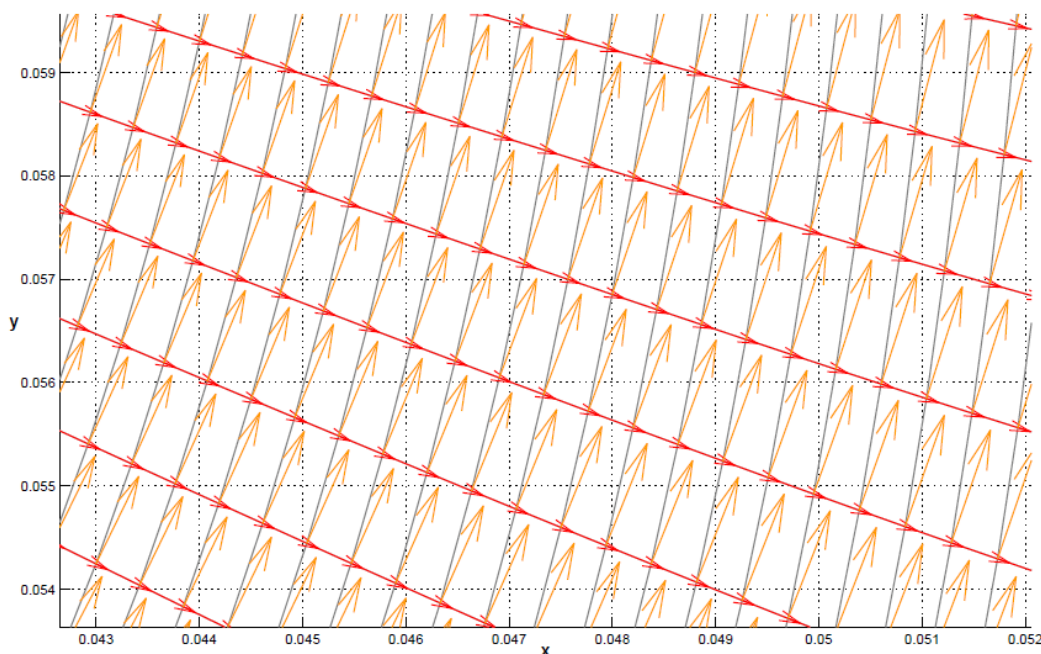
Výpočet ortogonální sítě je v programu zahrnut a získaná síť může být exportována. Hydraulický návrh však vyžaduje pouze ortogonální vektory nikoliv celou síť. K získání navzájem ortogonálních vektorů v průsečících neortogonálních křivek je možné aplikovat výše představenou metodu.

- Typ zadání $\bar{g}_1 = \bar{g}_v$ a $\bar{g}_3 = y$, počáteční podmínky $u = u_0$; $v = 0$:

$$\bar{g}_2 = \bar{g}_u - \frac{\bar{g}_u \cdot \bar{g}_v}{\bar{g}_v \cdot \bar{g}_v} \bar{g}_v \quad (101)$$

- Typ zadání $\bar{g}_1 = \bar{g}_u$ a $\bar{g}_3 = y$, počáteční podmínky $v = v_0$; $u = 0$:

$$\bar{g}_2 = \bar{g}_v - \frac{\bar{g}_u \cdot \bar{g}_v}{\bar{g}_u \cdot \bar{g}_u} \bar{g}_u \quad (102)$$



Obr. 16 Vektory tečné (\bar{g}_v) – červené, vektory k nim ortogonální – oranžové

4.4 Modelování proudění v meridiálním řezu

Matematické operace použité při výpočtech v meridiálním řezu čerpadla a spirály jsou sestaveny na základě teoretického odvození představeného v (POCHYLÝ, 2009). Z důvodu zjednodušení byl zvolen křivočarý souřadnicový systém, $u, v \in \langle 0,1 \rangle$; $w = \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, (BRDIČKA, a další, 2005), jako prostředí velmi se podobající podmínkám uvnitř oběžného kola čerpadla a spirály.

Ve výpočtech není zahrnut vliv tloušťky lopatek na proudění uvnitř lopatkového kanálu. Změny velikosti meridiální rychlosti způsobené tloušťkou lopatky jsou obecně známy. Vznikajícím dopadům lze proto snadno předcházet. V případě potřeby je možné v programu snadno provést zpětnou úpravu návrhu a tu exportovat na navazující 3D model.

Následuje představení použité části odvození z (POCHYLÝ, 2009):

„

Výpočet vychází z následujícího základního předpokladu:

$$dQ = v_m dS = konst. \quad (103)$$

Z rovnice kontinuity vyplývá:

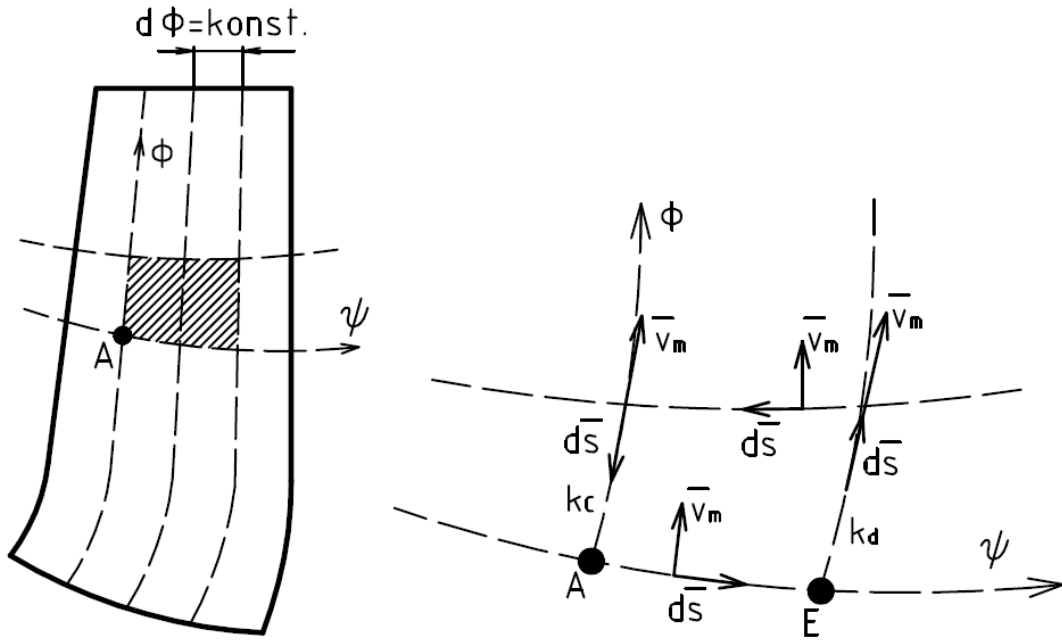
$$v_{mB} dS_B = v_{mA} dS_A \quad (104)$$

Po aplikaci předchozího vztahu na ortogonální síť je získán následující vztah:

$$v_{mA} |\bar{g}_1|_A |\bar{g}_3|_A d\psi d\phi = v_{mB} |\bar{g}_1|_B |\bar{g}_3|_B d\psi d\phi \quad (105)$$

$$v_{mA} = v_{mB} \frac{|\bar{g}_1|_B |\bar{g}_3|_B}{|\bar{g}_1|_A |\bar{g}_3|_A} \quad (106)$$

Použitím Stokesovy věty a integrací po křivkách ortogonální sítě, viz Obr. 17, se postupně dojde k zajímavému a velmi důležitému poznatku.



Obr. 17 Integrace v ortogonální síti

$$\int_S \text{rot}(\kappa \bar{v}) \bar{n} dS = \int_k \kappa \bar{v} d\bar{s} = 0 \quad (107)$$

$$\int_{k_D} \kappa \bar{v}_m d\bar{s} + \int_{k_C} \kappa \bar{v}_m d\bar{s} = 0 \quad (108)$$

$$\kappa_A v_{mA} ds_A = \kappa_E v_{mE} ds_E \quad , \text{ kde } ds = |\bar{g}_2| d\phi \quad (109)$$

$$\kappa_A v_{mA} |\bar{g}_2|_A d\phi = \kappa_E v_{mE} |\bar{g}_2|_E d\phi \quad (110)$$

$$\boxed{\kappa_A v_{mA} |\bar{g}_2|_A = \text{konst.}} \quad (111)$$

- na linii $\phi = \text{konst.}$

Po dosazení ze (106) do (111) je již možné matematicky vyjádřit funkci vířivosti na křivce $\phi = \text{konst.}$.

$$v_{mB} \frac{|\bar{g}_1|_B |\bar{g}_3|_B}{|\bar{g}_1|_A |\bar{g}_3|_A} \kappa_A |\bar{g}_2|_A = \text{konst.} \quad (112)$$

Uvažováním předpokladu $|\bar{g}_1|_B, |\bar{g}_3|_B, v_{mB} = konst.$ je vztah podstatně zjednodušen.

$$\boxed{\frac{\kappa_A |\bar{g}_2|_A}{|\bar{g}_1|_A |\bar{g}_3|_A} = konst.} \quad (113)$$

- na linii $\phi = konst.$

“

4.4.1 Potenciální proudění

Pro potenciální proudění platí:

$$rot \bar{v} = 0 \Rightarrow \kappa = 1 \quad (114)$$

Dosazením tohoto vztahu do (113) je získán předpis definující potenciální proudění.

$$\boxed{\frac{|\bar{g}_2|_A}{|\bar{g}_1|_A |\bar{g}_3|_A} = konst.} \quad (115)$$

- na linii $\phi = konst.$

4.4.2 Kvazipotenciální proudění

Je popsáno rovnicí:

$$\bar{v} rot \bar{v} = 0 \quad (116)$$

Pomocí vztahu (116) lze vyjádřit obecnou podmínku pro kvazipotenciální proudění určenou na základě křivočarého souřadného systému, viz Obr. 18., (SLOUPENSKÝ, a další, 2010):

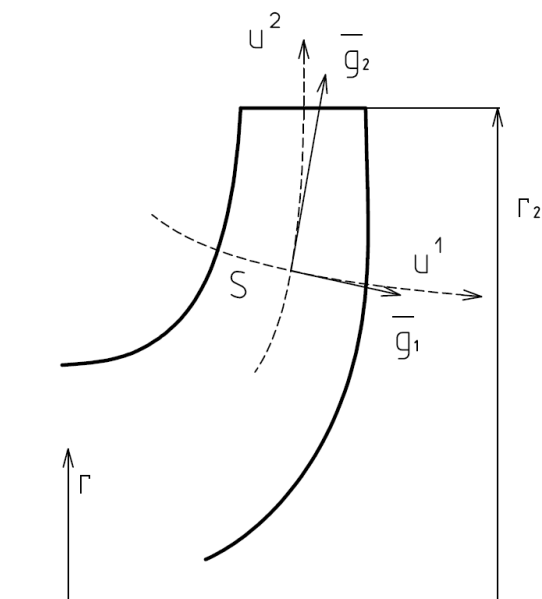
$$\bar{v} = \kappa grad \Phi; [\kappa] = 1 \quad (117)$$

$$grad \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial u^i} \bar{g}^i \quad (118)$$

$$\boxed{rot \left(\frac{1}{\kappa} \bar{v} \right) = 0} \quad (119)$$

$$\bar{v} = v_2 \bar{g}^2 \quad (120)$$

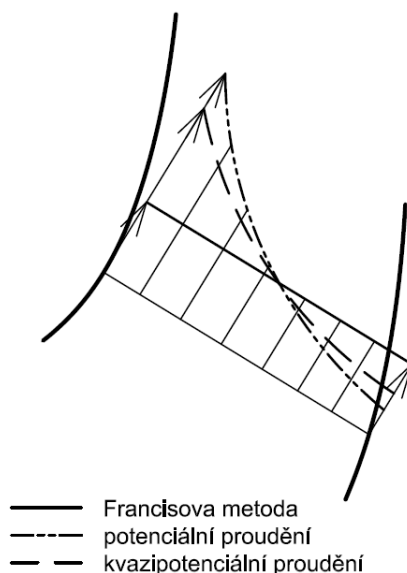
$$rot \left(\frac{1}{\kappa} \bar{v} \right) = rot \left(\frac{v_2}{\kappa} \bar{g}^2 \right) = 0 \quad (121)$$



Obr. 18 Souřadný systém, (POCHYLÝ, 2010)

Kvazipotenciální proudění je prouděním vířivým. Z jeho definice je zřejmé, že v proudící tekutině se za tohoto předpokladu nemohou tvořit spirální víry, což je jedním z předpokladů dobré účinnosti čerpadla. Jeho parametry jsou určeny funkcí vířivosti κ . Její hodnota se případ od případu liší a její funkční předpis není předem znám.

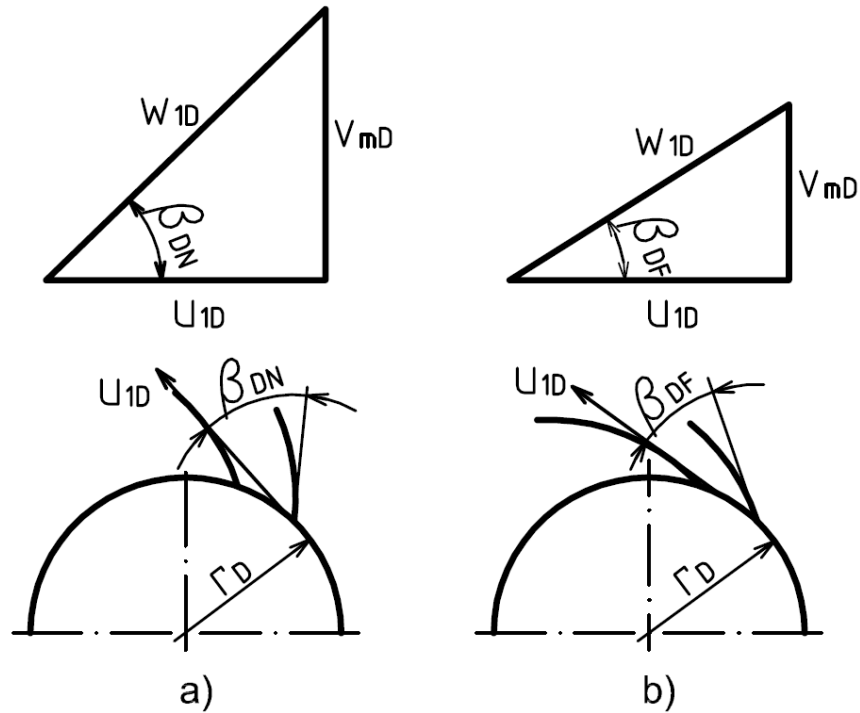
Důvodem pro použití metody na pomezí mezi dvěma nejvíce využívanými přístupy (vířivým a nevířivým) je její univerzálnost. Meridiální rychlosti na krycím disku jsou při uvažování potenciálního proudění v porovnání s Francisovou metodou větší a na nosném disku naopak menší, viz Obr. 19. V případě potenciálního proudění tak může na krycím disku docházet ke kavitaci.



Obr. 19 Meridiální rychlost

Důležité je zvážit i vliv prostorového tvaru lopatek. Úhel náběžné hrany lopatky na krycím disku je při použití vířivého proudění mnohem menší než úhel platný pro nevířivé proudění, viz Obr. 20. Kanál je poté uzavřenější a může docházet k jeho ucpání. Nejvýhodnějším se

proto jeví kompromisní kvazipotenciální proudění. To zaručuje vhodné otevření kanálu i velikost meridiální rychlosti.



Obr. 20 Řez oběžným kolem vedený na krycím disku; a) potenciální proudění, b) vířivé proudění – Francisova metoda, (SLOUPENSKÝ, a další, 2010)

Zaveďme substituci a upravme (121):

$$m_2 = \frac{v_2}{\kappa} \quad (122)$$

$$\text{rot}(m_2 \bar{g}^2) = \frac{1}{g} \varepsilon_{r2t} \frac{\partial m_2}{\partial u^r} \bar{g}_t = 0 \quad (123)$$

$$\varepsilon_{123} \frac{\partial m_2}{\partial u^1} \bar{g}^3 \varepsilon_{321} \frac{\partial m_2}{\partial u^3} \bar{g}^1 = 0 \quad (124)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial m_2}{\partial u^1} = 0 \Rightarrow m_2 = \frac{v_2}{\kappa} = f(u^2) \quad (125)$$

$$v_2 = \kappa f(u^2) \quad (126)$$

$$v_m = \frac{g_1(u^1, 1, u^3)}{g_1(u^1, u^2, u^3)} \frac{r_2}{r} v_{m2} \quad (127)$$

$$v_m = v_2 g^2 = v_2 \frac{1}{g_2} \quad (128)$$

$$\kappa f(u^2) = \frac{g_1(u^1, 1, u^3) g_2(u^1, u^2, u^3) r_2}{g_1(u^1, u^2, u^3)} \frac{r_2}{r} v_{m2} \quad (129)$$

$$g_1(u^1, 1, u^3) = b_2 \quad (130)$$

$$\frac{f(u^2)}{r_2 b_2 v_{m2}} = \frac{g_2(u^1, u^2, u^3)}{g_1(u^1, u^2, u^3) r \kappa} \frac{1}{\kappa} = g(u^2) \quad (131)$$

Nyní položme, (SLOUPENSKÝ, a další, 2010):

$$\kappa = I g_2^n \quad (132)$$

$$\boxed{\frac{g_2^{1-n}}{g_1 r} = h(u^2)} \quad (133)$$

Vzorec (133) představuje obecnou podmínku pro kvazipotenciální proudění. Přiměřenou volbou proměnné n je možné určit nejvhodnější kvazipotenciální proudění pro řešený případ. Lze předpokládat, že hodnota n bude nějakým způsobem souviset s kriteriem rychloběžnosti. Jejich vzájemný vztah ale bude možné popsat pravděpodobně až po ověření určitého množství návrhů provedených na základě kvazipotenciálního proudění.

4.4.3 Francisova metoda

Francisova metoda vychází z předpokladu:

$$v_m = konst. \quad (134)$$

- na linii $\phi = konst.$

Dosazením z rovnice (106):

$$v_{mB} \frac{|\bar{g}_1|_B |\bar{g}_3|_B}{|\bar{g}_1|_A |\bar{g}_3|_A} = konst. \quad (135)$$

Za předpokladu $|\bar{g}_1|_B, |\bar{g}_3|_B, v_{mB} = konst.:$

$$|\bar{g}_1|_A |\bar{g}_3|_A = konst. \quad (136)$$

- na linii $\phi = konst.$

Dosazením do vztahu (113) je získáno vyjádření funkce vířivosti.

$$\kappa_A |\bar{g}_2|_A = konst. \quad (137)$$

$$\kappa_A = konst. \cdot |\bar{g}_2|_A^{-1} \quad (138)$$

Výpočet meridiální rychlosti v libovolném bodě meridiálního řezu kanálem lze získat dosazením do (106).

$$v_{mA} = \frac{1}{|\bar{g}_1|_A |\bar{g}_3|_A} \quad (139)$$

4.5 Monitorování výpočtu meridiálního řezu

Meridiální řez oběžným kolem definovaný jako Bézierova plocha je ovládán řídicími body. Body jsou předepsány zadavatelem a plocha může nabývat libovolného tvaru. Splnění podmínek proudění požadovaných pro jednotlivé metody řešení a obecných doporučení, zohledňovaných při návrhu geometrie oběžného kola a spirály, je zaručeno možností interaktivně měnit souřadnice řídicích bodů. Postupně po jednotlivých krocích je získáván požadovaný tvar meridiálního řezu nebo spirály, v rámci uvažovaného typu proudění. Pro průběžné sledování postupu úprav je k dispozici několik monitorů sledovaných veličin.

Každá z dříve představených metod návrhu meridiálního řezu je založena na určitých předpokladech. Reálné proudění je však mnohem komplexnější a složitější a dodnes nebylo popsáno v celém svém rozsahu. Konstrukteři proto při své práci kombinují výpočtové modely s cílem přiblížit se co možná nejvíce reálnému stavu uvnitř čerpadla. Program, vypracovaný na základě této práce, umožňuje aplikovat různé výpočtové metody na části meridiálního řezu takovým způsobem, aby výsledek maximálně odpovídal reálnému stavu. V následujícím textu je tato varianta demonstrována. Výsledky jsou získány za předpokladu kvazipotenciálního proudění ($n = 0,3$) ve vstupní části meridiálního řezu a na náběžné hraně lopatky a Francisovy metody v jeho střední a výstupní části.

4.5.1 Průtočná plocha

Průtočná plocha oběžného kola by měla s rostoucím poloměrem vykazovat postupný nárůst, který ale nemusí být nutně lineární. Skokové změny průtočné plochy vyvolávají nežádoucí proudění a zbytečné ztráty uvnitř oběžného kola. Představený výpočtový aparát slouží pouze jako podpora návrhu, neuvažuje lopatky.

Odvození velikosti průtočné plochy metodami diferenciální geometrie je provedeno v (POCHYLÝ, 1991). Z něho jsou využity následující vztahy:

$$dS = \sqrt{|\bar{g}_1|^2 |\bar{g}_2|^2 - (\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2)^2} dudv \quad (140)$$

$$S = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{|\bar{g}_1|^2 |\bar{g}_2|^2 - (\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2)^2} \, dudv \quad (141)$$

V řešené průtočné ploše leží vektory \bar{g}_1 a \bar{g}_3 , viz Obr. 8. V závislosti na typu zadání je řešena jedna z rovnic:

$$dS = \sqrt{|\bar{g}_1|^2 |\bar{g}_3|^2 - (\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_3)^2} \, dvd\varphi \quad (142)$$

$$dS = \sqrt{|\bar{g}_1|^2 |\bar{g}_3|^2 - (\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_3)^2} \, dud\varphi \quad (143)$$

Řešení vztahu (142):

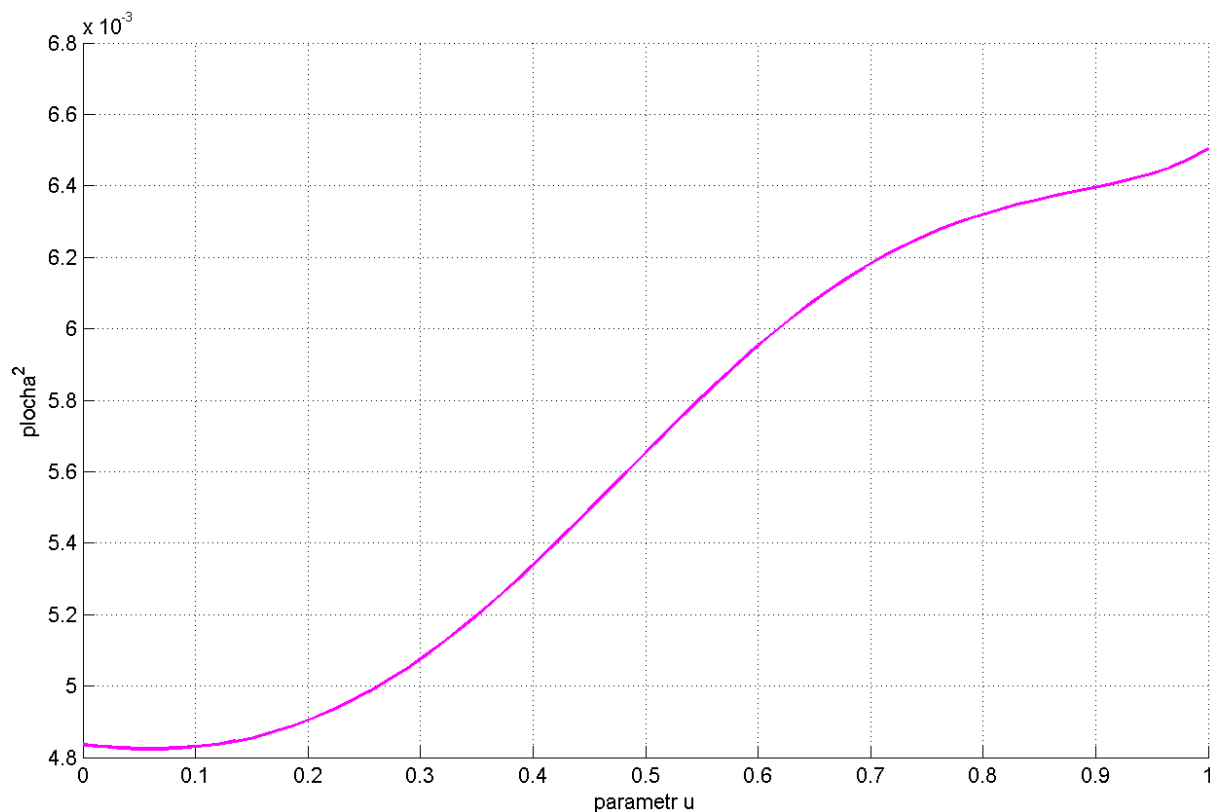
$$S = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{|\bar{g}_1|^2 |\bar{g}_3|^2 - (\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_3)^2} \, dvd\varphi \quad (144)$$

$$S = \int_0^1 2\pi \sqrt{|\bar{g}_1|^2 |\bar{g}_3|^2 - (\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_3)^2} \, dv; \quad \bar{g}_1 \perp \bar{g}_3 \quad (145)$$

$$S = \int_0^1 2\pi \sqrt{|\bar{g}_1|^2 |\bar{g}_3|^2} \, dv \quad (146)$$

Výsledkem řešení (143) je analogicky:

$$S = \int_0^1 2\pi \sqrt{|\bar{g}_1|^2 |\bar{g}_3|^2} \, du \quad (147)$$



Obr. 21 Průběh průtočné plochy meridiálního řezu BETA 10

4.5.2 Konstanta metody

Jedná se o nejdůležitější způsob kontroly návrhu. Pro každou z použitých metod výpočtu lze odvodit určitý vztah, který nabývá na čáře kolmé na proudnici konstantní hodnoty, již lze vyjádřit a sledovat. Zde se projevuje výhoda volby vektorů, zmíněná ve 4.2, vyplývající ze způsobu řešení návrhu meridiálního řezu. Postupným interaktivním upravováním řídicích bodů se výsledný tvar křivek Bézierovy plochy přibližuje tvaru proudnic a ploch na ně kolmých. Získaná síť křivek odpovídá zvolené výpočtové metodě.

Monitorovaná konstanta pro potenciální proudění je uvedena ve vztahu (115):

$$konst. = \frac{|\bar{g}_2|_A}{|\bar{g}_1|_A |\bar{g}_3|_A}$$

Konstanta sledovaná v případě volby kvazipotenciálního proudění vychází ze vztahu (133):

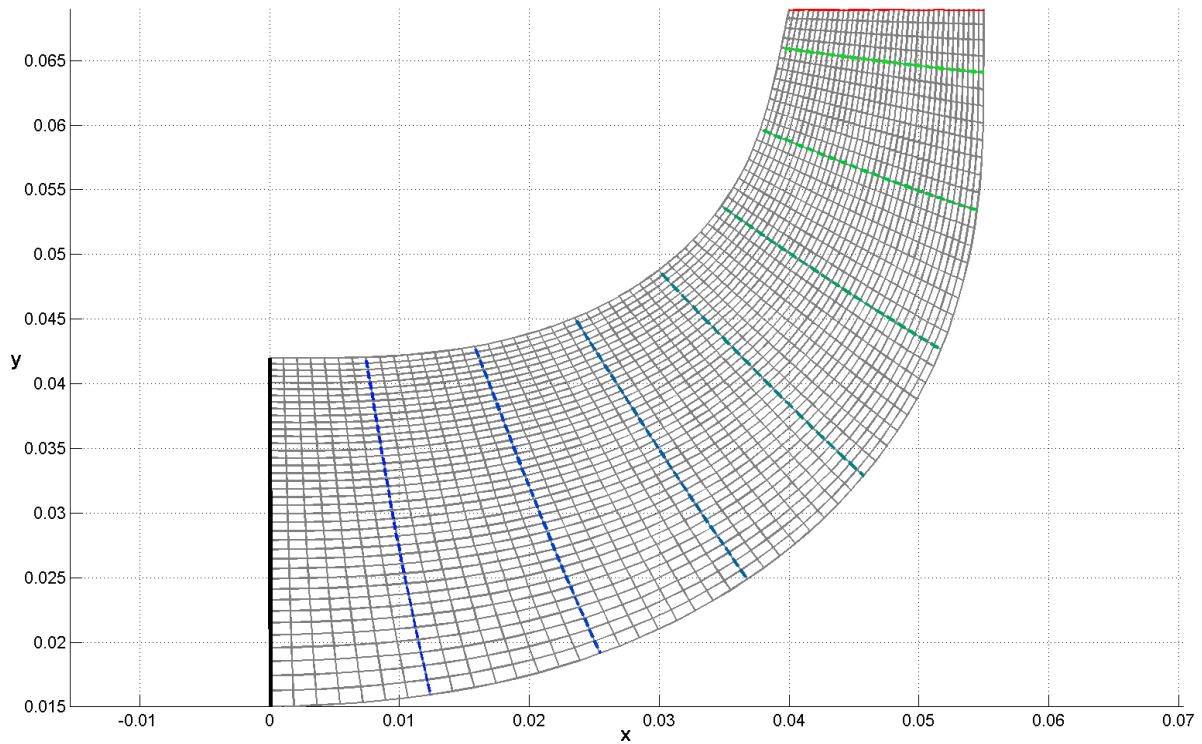
$$konst. = \frac{|\bar{g}_2|_A^{1-n}}{|\bar{g}_1|_A |\bar{g}_3|_A} \quad (148)$$

U Francisovy metody je vycházeno ze vztahu (139):

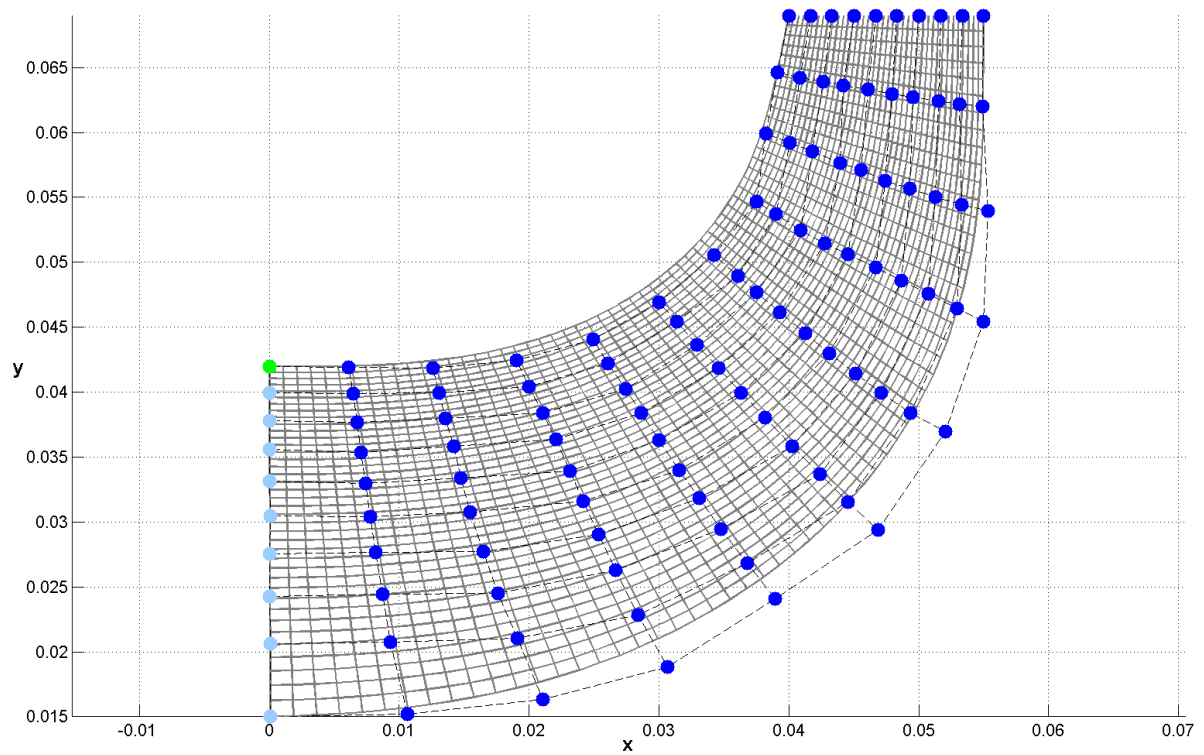
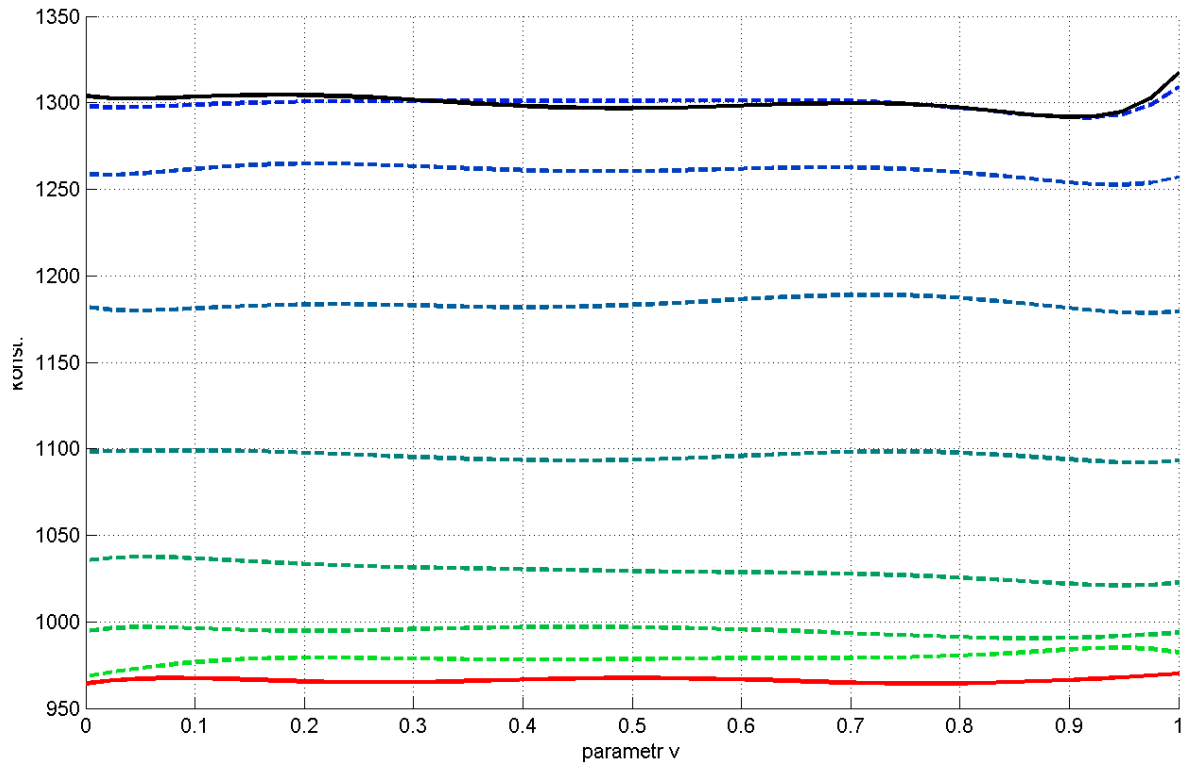
$$konst. = \frac{1}{|\bar{g}_1|_A |\bar{g}_3|_A} \quad (149)$$

Výsledky, kterých lze dosáhnout při práci s řídicími body, jsou předvedeny na následujících ukázkách. Přesnost návrhu lze ovlivnit množstvím řídicích bodů a samozřejmě pečlivostí práce.

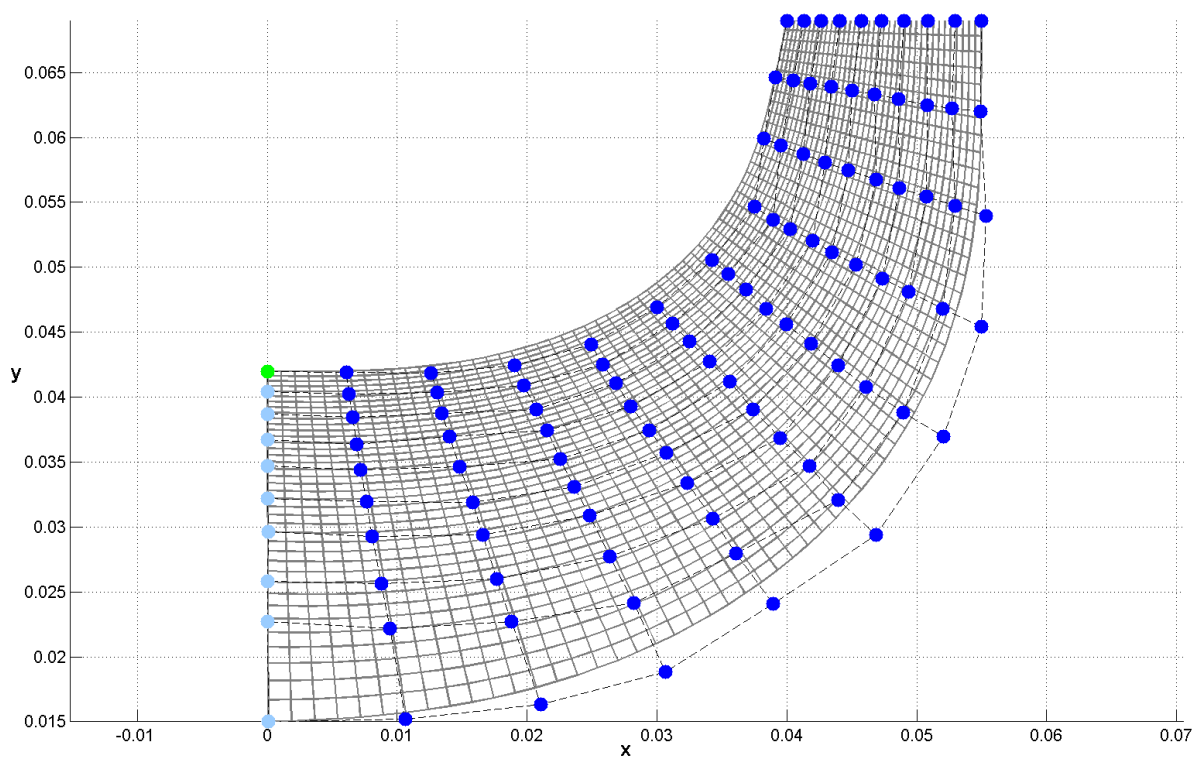
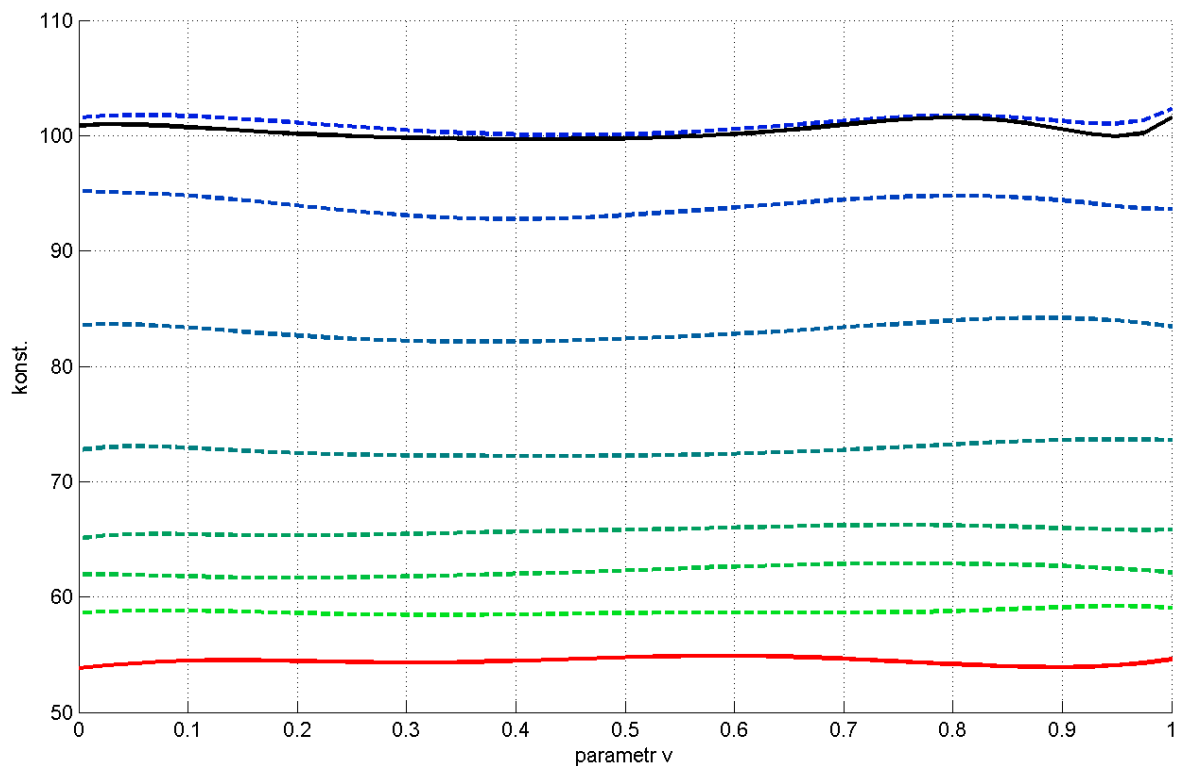
Meridiální řez je převzat z čerpadla BETA 10, typ zadání $\bar{g}_1 = \bar{g}_v$. Vnější obrys byl ve všech případech zachován, měněna byla pouze vnitřní struktura.



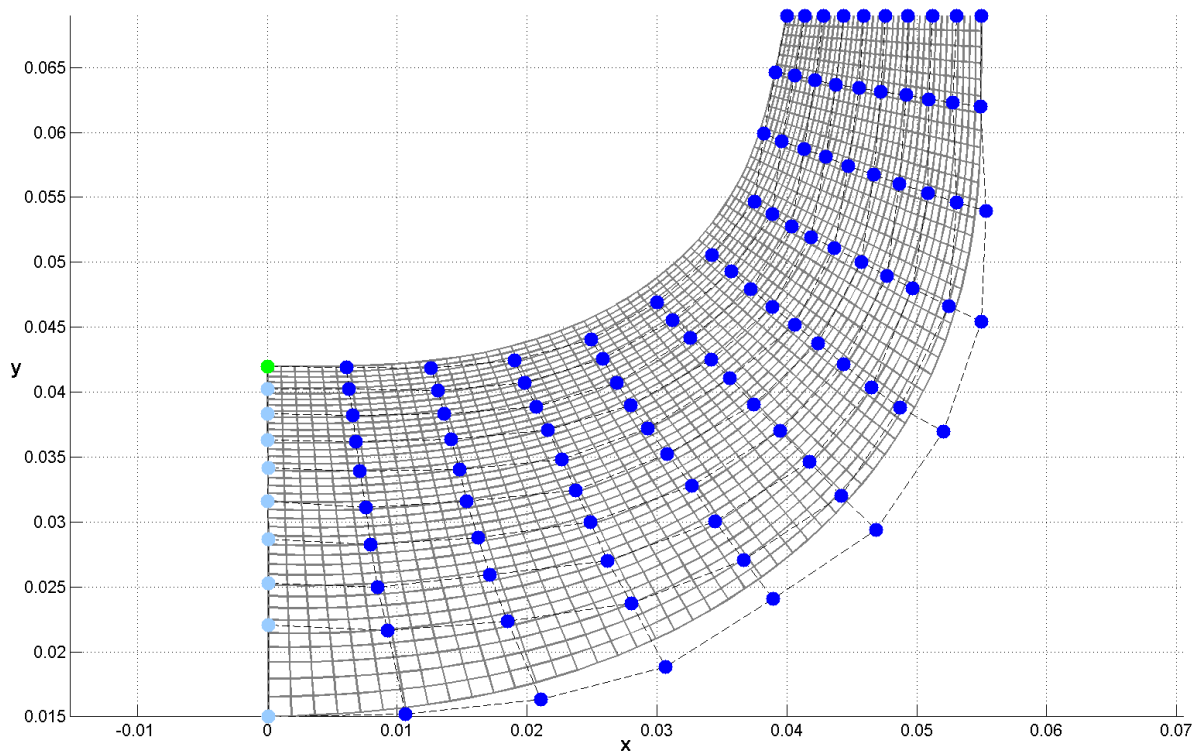
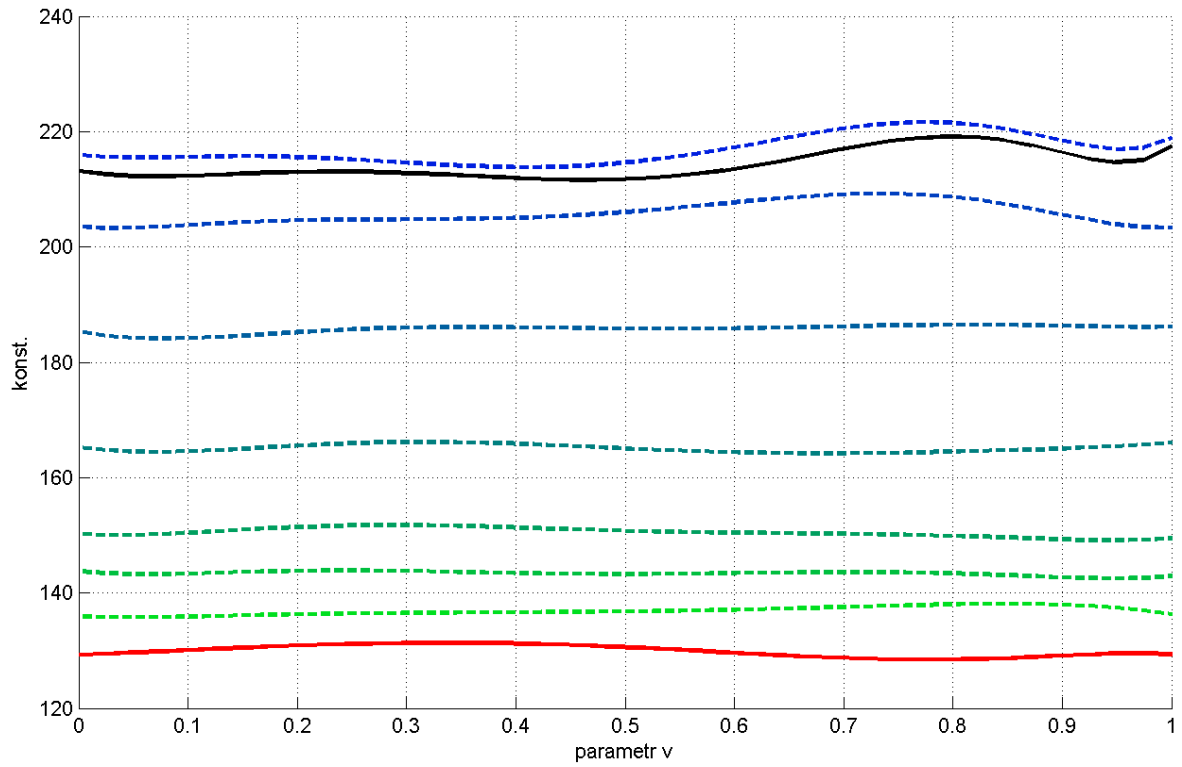
Obr. 22 Sledované plochy v meridiálním řezu oběžného kola BETA 10, $[u \times v] = [60 \times 40]$



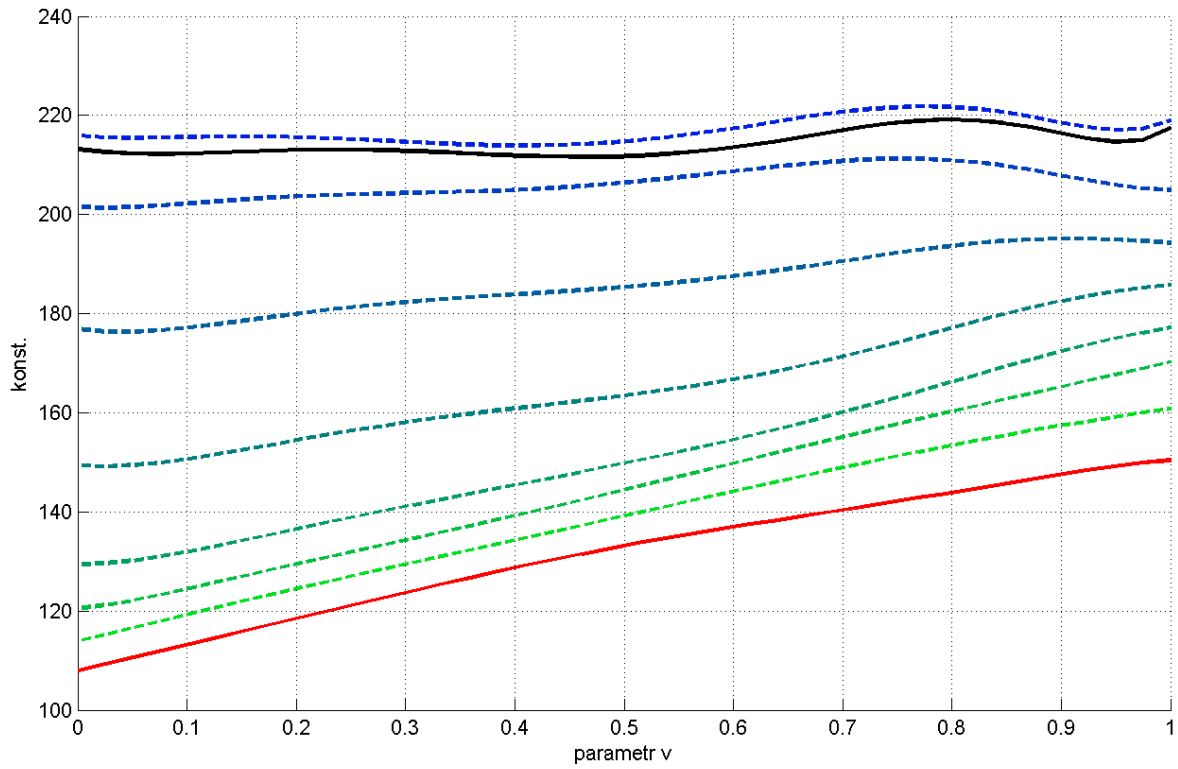
Obr. 23 Průběh hodnoty konstanty a rozložení řídících bodů - Francisova metoda



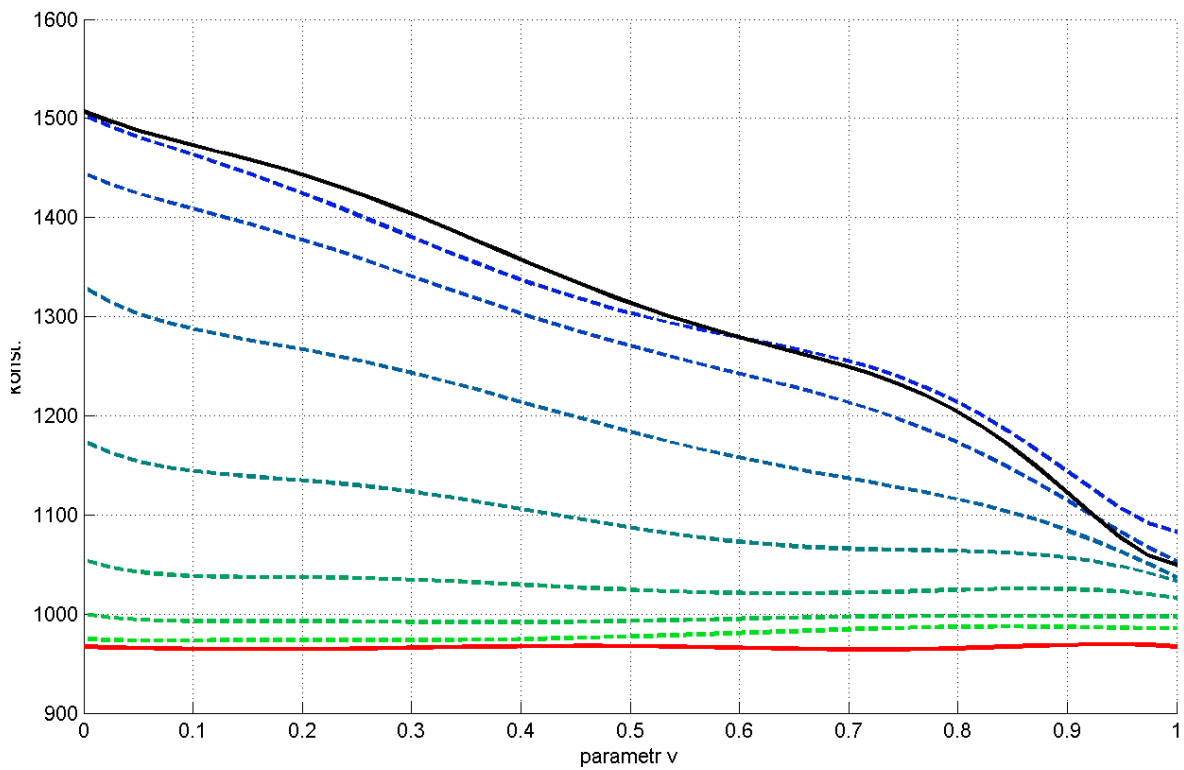
Obr. 24 Průběh hodnoty konstanty a rozložení řídicích bodů - potenciální proudění



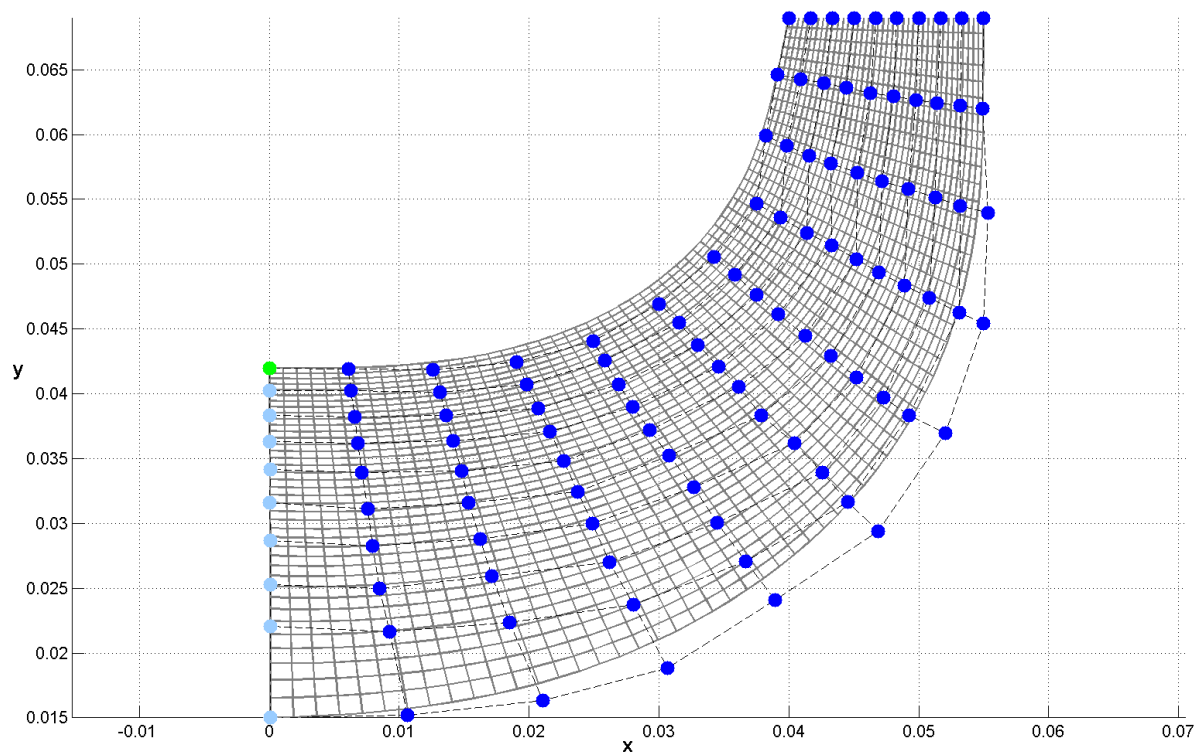
Obr. 25 Průběh hodnoty konstanty a rozložení řídících bodů - kvazipotenciální proudění



Obr. 26 Vstupní část meridiálního řezu podle kvazipotenciálního proudění



Obr. 27 Výstupní část meridiálního řezu podle Francisovy metody



Obr. 28 Rozložení řídicích bodů při kombinaci kvazipotenciálního proudění a Francisovy metody

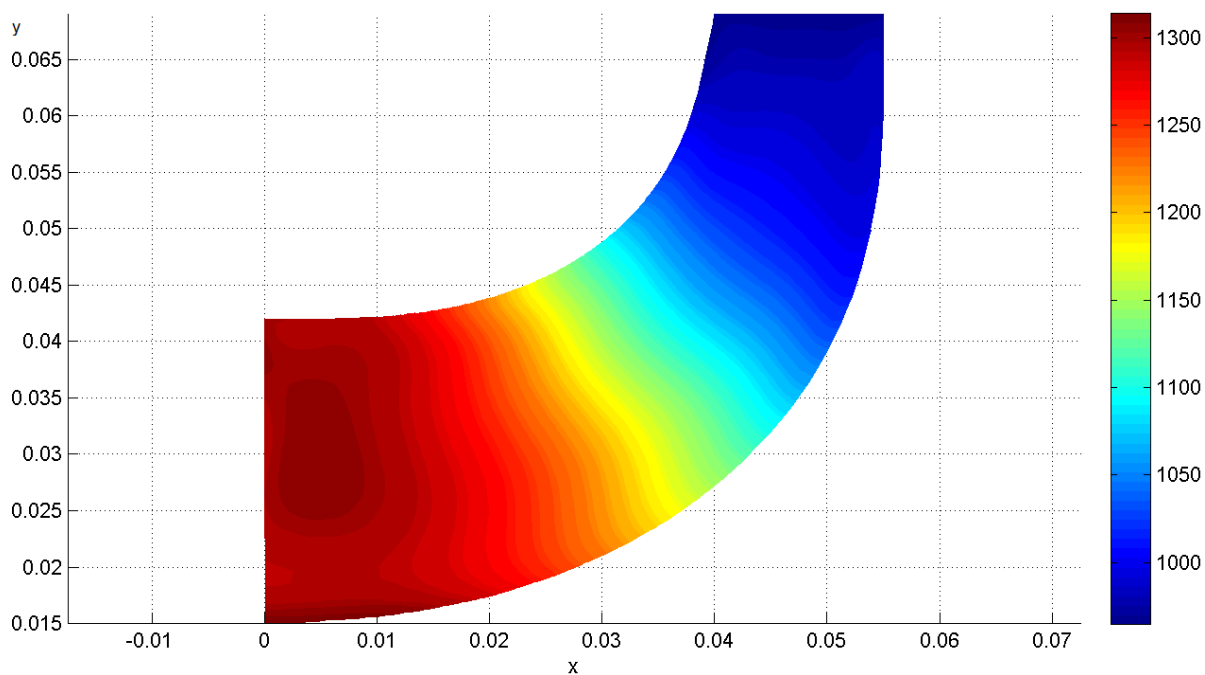
4.5.3 Meridiální rychlost

Každý z použitých teoretických přístupů návrhu oběžného kola má svoje specifické rozložení meridiální rychlosti. Pomocí jejího monitoru lze kontrolovat, zda splňuje předpoklady dané metody. Se zlepšující se plynulou návazností jednotlivých rychlostních polí se z hlediska hydrauliky oběžného kola zlepšuje jeho vnitřní proudění.

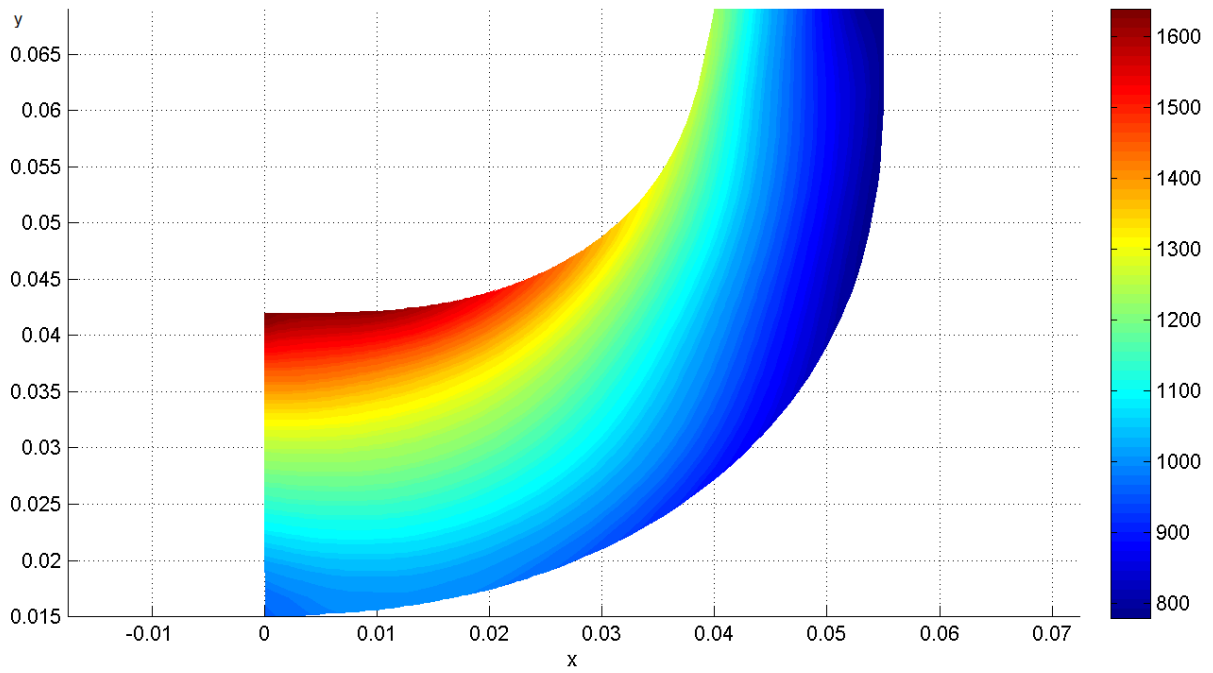
Hodnota meridiální rychlosti je počítána v každém průsečíku křivek po celé ploše meridiálního řezu. Vyčíslována je na základě vztahu (106) s předpokladem $|\bar{g}_1|_B, |\bar{g}_3|_B, v_{mB} = konst.$ Výsledným je vztah (139):

$$v_{mA} = \frac{1}{|\bar{g}_1|_A |\bar{g}_3|_A}$$

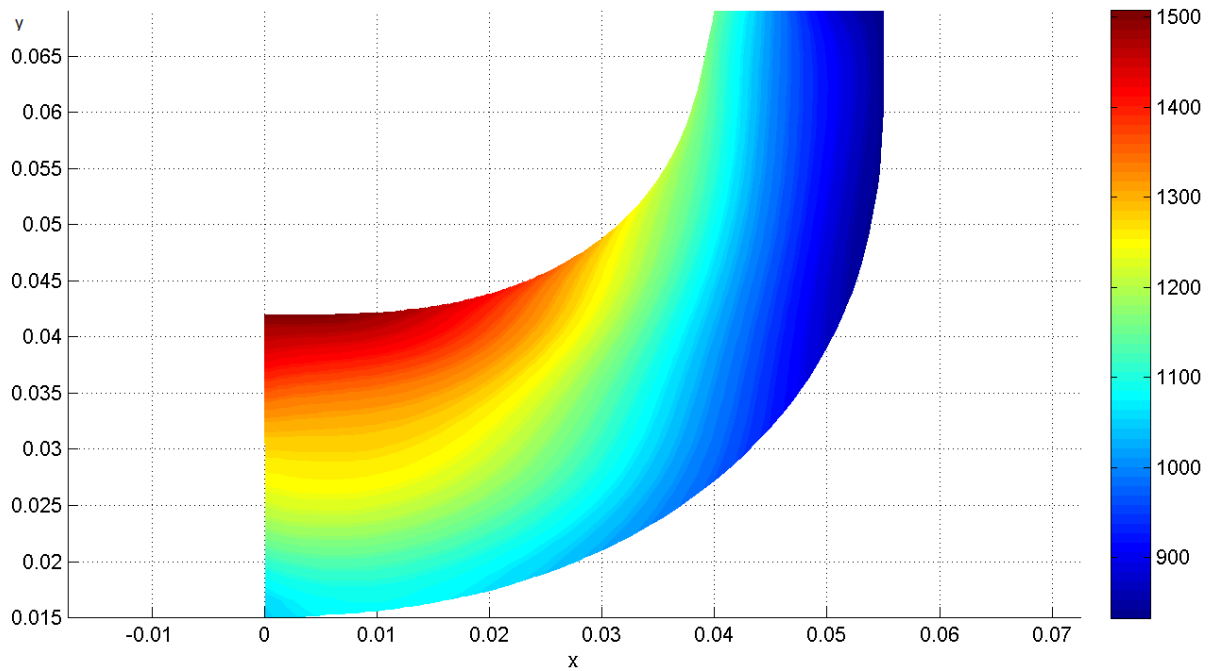
Na následujících ukázkách je zřetelně patrná provázanost mezi konstantou sledovanou pro daný typ proudění a charakterem proudění vyjádřeným meridiální rychlostí. Lze sledovat odlišnosti mezi jednotlivými typy proudění, které odpovídají obecným předpokladům.



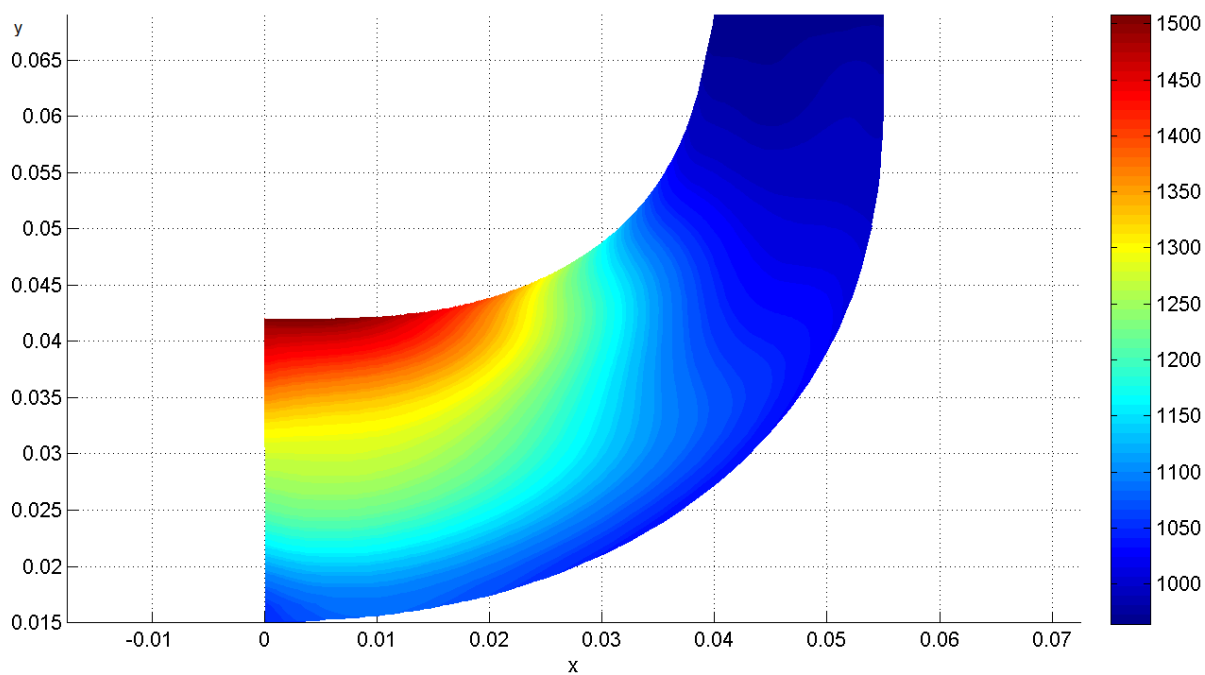
Obr. 29 Pole poměrných meridiálních rychlostí BETA 10 – Francisova metoda



Obr. 30 Pole poměrných meridiálních rychlostí BETA 10 – potenciální proudění



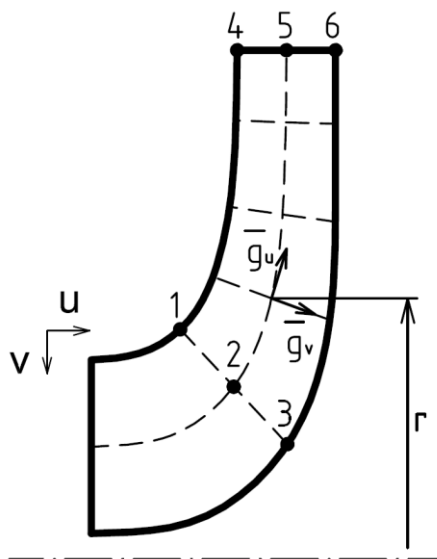
Obr. 31 Pole poměrných meridiálních rychlostí BETA 10 – kvazipotenciální proudění



Obr. 32 Pole poměrných meridiálních rychlostí BETA 10 – kombinace kvazipotenciálního proudění na vstupu a Francisovy metody na výstupu meridiálního řezu

5 Návrh lopatky metodami diferenciální geometrie

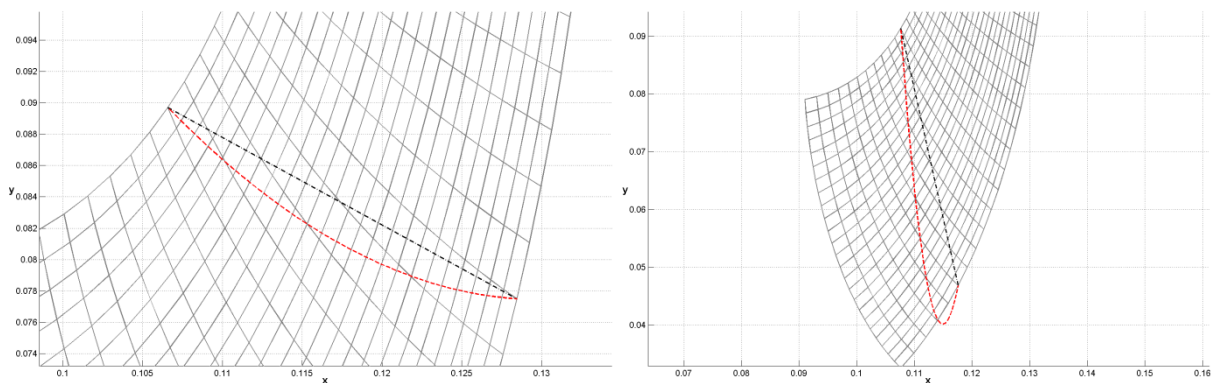
Numerický návrh lopatky vychází z předpokladu, že je znám úhel β rychlostního trojúhelníku na její vstupní i výstupní hraně. Poté je možné určit velikosti β v jednotlivých jejích bodech. Pole rozložení hodnot β má zásadní vliv na prostorový tvar lopatky obvykle popisovaný úhly opásání. Program dokáže navrhnout úhly β_1 na vstupní hraně, které lze samozřejmě upravovat. Hodnoty na výstupní hraně musí být zadávány s ohledem na požadovanou měrnou energii.



Obr. 33 Body zadání vstupních dat

Na meridiálním řezu je voleno šest bodů, viz Obr. 33. Body 4 a 6 jsou jednoznačně určeny předem, je na nich pouze třeba zadat výstupní úhel β_2 . Volba bodu 2 je přímo závislá na volbě bodů 1 a 3. Umístěním bodů 2 a 5 lze ovlivňovat rozložení hodnot úhlu β napříč lopatkou po celém jejím povrchu.

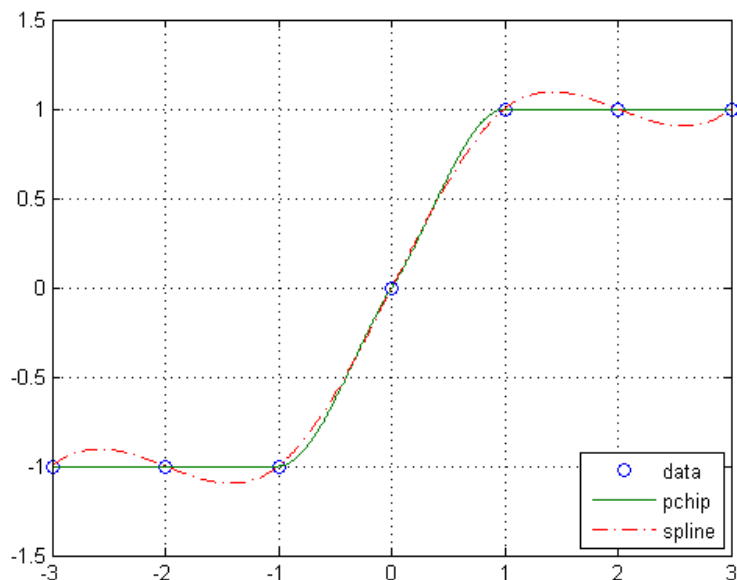
S body 1 až 3 je svázán i tvar vstupní hrany. V základním nastavení jsou body, definované dvěma souřadnicemi, spojené pomocí funkce prokládající je kubickým splajnem. Pro radiální oběžná kola jsou získané výsledky velmi dobré. Existují však i případy zadání, kdy je tvar výsledné křivky neuspokojivý.



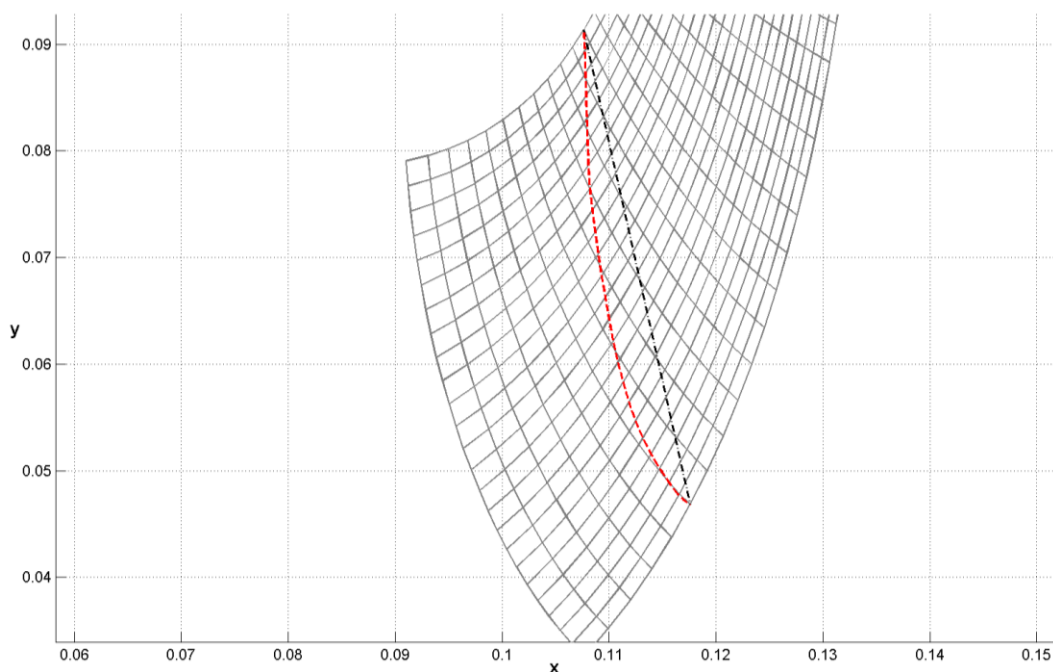
Obr. 34 Ukázka vhodného (vlevo) a nevhodného (vpravo) tvaru vstupní hrany (červená linie)

Většina navrhovaných čerpadel pracuje s axiálním vstupem kapaliny do oběžného kola. V takových případech je ale výhodnější navrhovat prostorově zborcené lopatky. Řešením

problému tvaru vstupní hrany bylo přidání čtvrtého zadávaného bodu. Jeho jedinou funkcí je ovlivňovat průběh vstupní hrany. Křivka prokládající čtyři body, vypočtená pomocí splajnu, však vykazovala značné oscilace. Dosažení jejího hladkého průběhu tak bylo krajně obtížné. K výpočtu vstupní hrany definované čtyřmi body bylo následně využito po částech spojitého kubického hermitovského interpolačního polynomu (Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial – PCHIP). Třebaže výsledky získané splajnem jsou pro hladké funkce přesnější, PCHIP nevykazuje žádné překmity a menší oscilace pro ne zcela hladká zadání.



Obr. 35 Porovnání proložení bodů, (MathWorks, 2010)



Obr. 36 Úprava nevhodného průběhu pomocí čtvrtého bodu

5.1 Úhel β_1 – vstupní hrana lopatky

Velikost úhlu β_1 lopatky doporučená programem pro jednotlivé zadávané body se odvíjí od předpokladu ideálního vstupu kapaliny, viz Obr. 4.

$$\tan \beta_1 = \frac{v_{m1}}{u_1} \quad (150)$$

$$\boxed{\beta_1 = \operatorname{atan}\left(\frac{v_{m1}}{u_1}\right)} \quad (151)$$

$$u_1 = 2\pi n r_1 \quad (152)$$

K vyjádření v_{m1} byla použita rovnice (106).

$$\begin{aligned} v_{m1} &= v_{mA} \\ v_{m2} &= v_{mB} \end{aligned} \quad (153)$$

$$v_{m1} = v_{m2} \frac{|\bar{g}_1|_2 \cdot |\bar{g}_3|_2}{|\bar{g}_1|_1 \cdot |\bar{g}_3|_1} \quad (154)$$

Velikost meridiální rychlosti na výstupu z oběžného kola je vypočtena bez uvažování lopatek.

$$v_{m2} = \frac{Q}{S_2} \quad (155)$$

Hodnotu S_2 lze vyjádřit pomocí (146) nebo (147).

5.2 Určení úhlu β na lopatce jako Bézierovy plochy

Pro výpočet plošného rozložení úhlu β byl použit předpis Bézierovy plochy.

Rovnice (83):

$$\bar{r}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \bar{r}_{ij} \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i} \binom{n}{j} v^j (1-v)^{n-j}$$

Hodnoty m a n pro zadání šesti body:

- $m = 1$ je dáno, jsou známy hodnoty β pouze na hranách lopatky
- n je závislé na počtu bodů zadání, pro zadání šesti body je $n = 2$

Hodnoty β získané takovým způsobem jsou lineární na liniích po délce lopatky. Na liniích napříč lopatkou poskytuje volba bodu 2 a 5 jistou úroveň ovládní, ta však nemá dostatečně silný vliv. Ovládní tvaru lopatky proto není příliš pružné a tento výpočet nakonec nebyl v návrhu použit.

5.3 Určení úhlu β na lopatce pomocí polynomu

5.3.1 Polynom 2. stupně po délce lopatky i napříč lopatkou

Pole β je definováno pomocí polynomu, (POCHYLÝ, 2010):

$$\beta(u, v) = A_1 + A_2u + A_3v + A_4u^2 + A_5v^2 + A_6uv \quad (156)$$

Konstanty A_i jsou vypočteny ze soustavy rovnic, (POCHYLÝ, 2010):

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & \dots & u_1v_1 \\ 1 & u_2 & \dots & u_2v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u_6 & \dots & u_6v_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_6 \end{pmatrix} \quad (157)$$

Nyní je již možné určit $\beta(u, v)$.

Soustava rovnic byla nejprve řešena standardním postupem MATLABu pomocí funkce *mldivide*. Ta pracuje s úplným rozkladem. Pokud je matice koeficientů \mathbf{A} čtvercová a $\bar{\mathbf{B}}$ je sloupcový vektor o shodném počtu řádků, je výstup $\bar{\mathbf{X}}$ z funkce *mldivide(A,B)* řešením rovnice $\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{B}}$, (MathWorks, 2010). Výpočet však byl nestabilní, velmi závislý na vstupních datech. Docházelo k výskytům singulární matice, kdy nešlo provést úplný rozklad. Výpočet následně kolaboval. Proto byl zvolen postup řešení založený na funkci:

$$\bar{\mathbf{X}} = \text{pinv}(\mathbf{A}) * \bar{\mathbf{B}} \quad (158)$$

Postup využívá Moore – Penroseovy pseudoinverze, kde výsledná matice \mathbf{B} má stejné rozměry jako \mathbf{A}' při splnění následujících čtyř podmínek, (MathWorks, 2010):

$$\begin{aligned} \mathbf{ABA} &= \mathbf{A} \\ \mathbf{BAB} &= \mathbf{B} \end{aligned} \quad (159)$$

$\left. \begin{matrix} \mathbf{AB} \\ \mathbf{BA} \end{matrix} \right\} \text{hermitovská matice}$

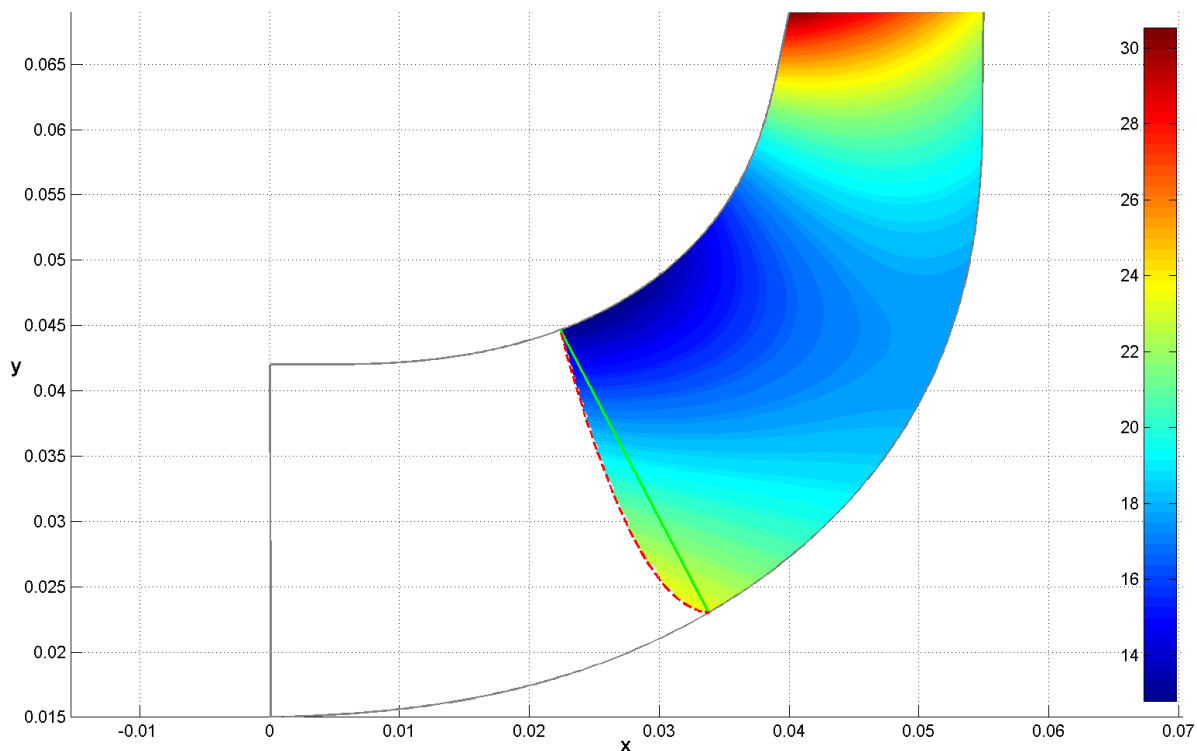
Jedná se o výpočet metodou nejmenších čtverců. Nižší přesnost získaných dat způsobená numerickým postupem není v řešené úloze na závadu. Výsledky slouží ke vzájemnému porovnání různých návrhů lopatky a tomu není dosažená přesnost překážkou.

Vyšší přesnosti je možné dosáhnout využitím polynomu o větším počtu členů. Například dle následujícího vztahu:

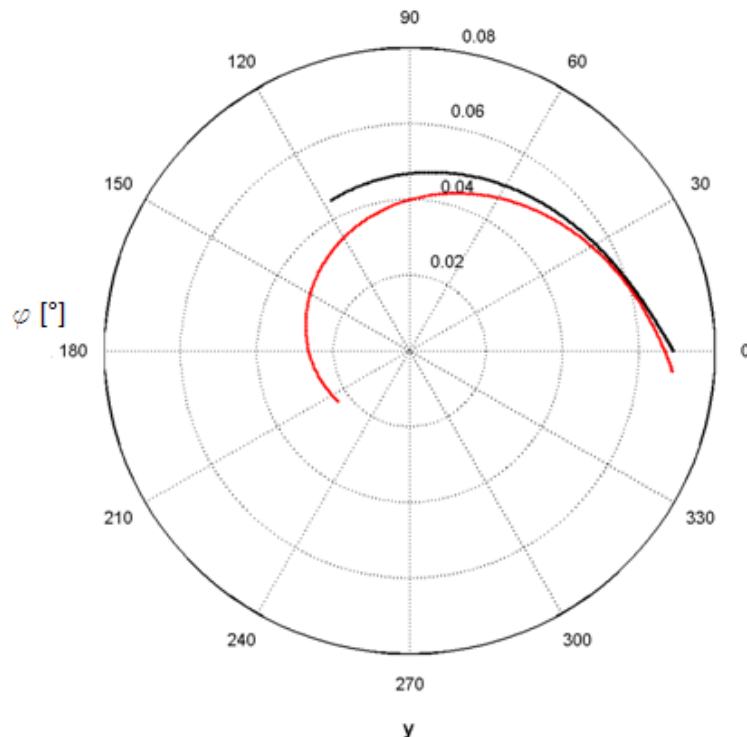
$$\beta(u, v) = A_1 + A_2u + A_3u^2 + A_4v + A_5v^2 + A_6uv + A_7u^2v + A_7uv^2 \quad (160)$$

Výpočet však již byl velmi nestabilní. Docházelo k výskytu singulární matice prakticky při jakémkoliv zadání a velmi často havarovalo i řešení pomocí metody nejmenších čtverců.

Vhodným výběrem umístění volených bodů a okrajových hodnot β lze teoreticky dosáhnout lineárního i kvadratického průběhu úhlu β na liniích po délce lopatky i napříč lopatkou. Zkušební návrhy lopatek však ukázaly, že takovým způsobem získaná pole β trpěla velkým kolísáním hodnot. Ve volených bodech zadané β měly až přílišný vliv na zbytek lopatky. Výsledné hodnoty se i přes velmi podobná zadání často výrazně lišily. Získané lopatky měly navíc příliš velké úhly opásání. Z hlediska ztrát způsobených vzájemným třením čerpané kapaliny a povrchu lopatky se jedná o nevíтанou vlastnost. Polynom 2. stupně v obou směrech (u^1, u^2) se proto ukázal pro návrh nevhodným a nebyl použit.



Obr. 37 Ukázka ovlivnění pole hodnot β zadaným bodem; meridián oběžného kola navržen pomocí Francisovy metody



Obr. 38 Nosný (červená) a krycí (černá) disk lopatky; meridián oběžného kola navržen pomocí Francisovy metody

5.3.2 Polynom 2. stupně napříč lopatkou a 1. stupně po délce lopatky

Kombinace lineární změny β po délce lopatky a kvadratického průběhu β napříč lopatkou poskytuje oproti předchozímu postupu několik výhod. Byla zachována možnost ovládat zborcení lopatky a dosáhnout vhodného tvaru její náběžné hrany. Zároveň se podařilo zmenšit výsledné úhly opásání. Tento postup se ukázal nejvýhodnějším pro získání prvních představ o průběhu lopatky v prostoru. Tím jsou míněny zborcení tvaru, natočení výstupní hrany a úhly opásání nosného a krycího disku.

Předchozí výpočty byly shodné pro všechny typy zadání. Nyní představovaný způsob má však dvě varianty. V obou případech je soustava rovnic řešena pomocí (158).

A) typ zadání s parametry u, v , viz Obr. 33:

$$\beta(u, v) = A_1 + A_2u + A_3v + A_4uv + A_5v^2 + A_6uv^2 \quad (161)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & \dots & u_1v_1^2 \\ 1 & u_2 & \dots & u_2v_2^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u_6 & \dots & u_6v_6^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_6 \end{bmatrix} \quad (162)$$

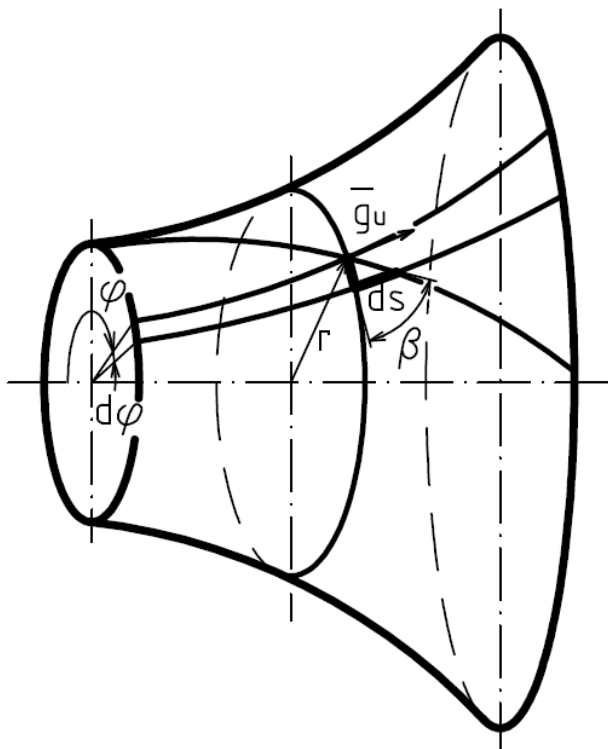
B) typ zadání s parametry u, v , viz Obr. 11:

$$\beta(u, v) = A_1 + A_2u + A_3v + A_4uv + A_5u^2 + A_6u^2v \quad (163)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & u_1 & \dots & u_1^2 v_1 \\ 1 & u_2 & \dots & u_2^2 v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & u_6 & \dots & u_6^2 v_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_6 \end{pmatrix} \quad (164)$$

5.4 Prostorový tvar lopatky

Byla zvolena plocha $v = konst.$ Na ní lze při známém $\beta(u, v = konst) = \beta(u)$ navrhnout tvar lopatky, (POCHYLÝ, 2010).



Obr. 39 Výpočet lopatky od vstupní hrany, (POCHYLÝ, 2010)

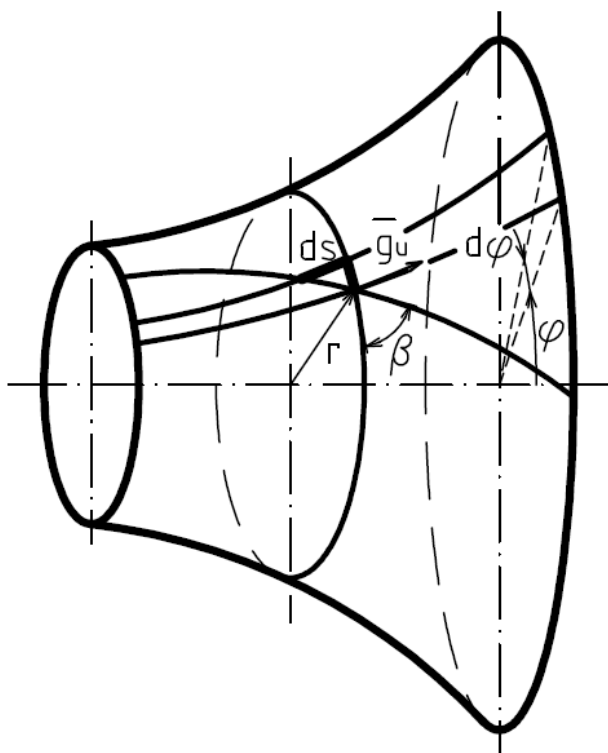
$$\tan \beta = \frac{ds}{rd\varphi} = \frac{|\bar{g}_u| du}{rd\varphi} \quad (165)$$

$$\boxed{\frac{d\varphi}{du} = \frac{|\bar{g}_u|}{r} \frac{1}{\tan \beta}} \quad (166)$$

Počáteční podmínky, (POCHYLÝ, 2010):

$$\begin{aligned} u &= u_i \\ \varphi &= 0 \\ r &= r_i \end{aligned} \quad (167)$$

Výpočet prováděný od vstupní hrany však měl nedostatek. Příčinou byla definice lopatky. V takřka všech případech přetíná linie vstupní hrany některou z příčných linií Bézierovy plochy (u^1). Tím vyvstává problém určení okrajových podmínek algoritmu návrhu. Možnosti zadání úlohy jsou totiž velmi variabilní (jemnost Bézierovy plochy, volené body, přednatočení výstupní hrany, atd.). Ve výsledku následně docházelo k porušení hladkosti povrchu lopatky. Problémy byly vyřešeny aplikací výše představené teorie na výpočet průběhu lopatky od výstupní hrany. Díky zmíněné úpravě bylo možné do řešení snadno přidat přednatočení výstupní hrany lopatky. Jedná se o parametr, který reguluje úhly opásání na nosném a krycím disku.



Obr. 40 Výpočet lopatky od výstupní hrany

$$\tan \beta = \frac{ds}{rd\varphi} = -\frac{|\bar{g}_u| du}{rd\varphi} \quad (168)$$

$$\boxed{\frac{d\varphi}{du} = -\frac{|\bar{g}_u|}{r} \frac{1}{\tan \beta}} \quad (169)$$

Počáteční podmínky:

$$\begin{aligned} u &= 1 \\ \varphi &= f(\zeta) \\ r &= r_2 \end{aligned} \quad (170)$$

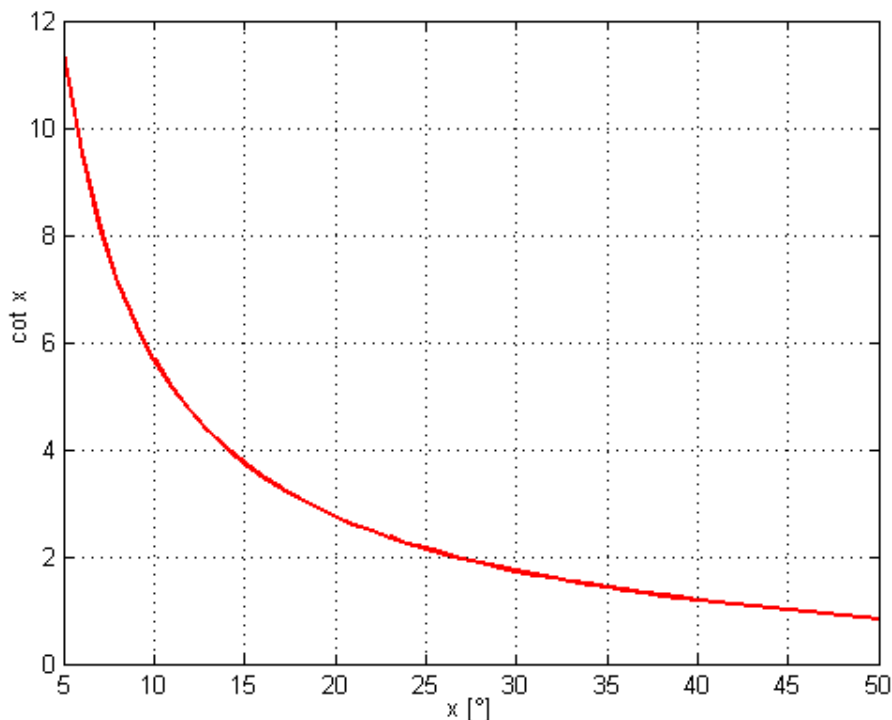
Kde ζ vyjadřuje přednatočení výstupní hrany lopatky. To je možné volit kladné i záporné. Jeho hodnota je lineárně rozložena po šířce lopatky ($\zeta_1 = 0 \dots \zeta_n = \zeta$).

Při výpočtu diferenciální rovnice (169) byla použita funkce ODE113. Jedná se o metodu Adams – Bashforth - Moulton (PECE). Důvodem volby byl kratší výpočtový čas oproti metodám ODE45 (Dormand - Prince (4,5)) nebo ODE23tb (TR-BDF2).

5.4.1 Prostorový tvar lopatky při uvažování úhlů opásání

V části 5.3.2 byl prezentován postup výpočtu pole úhlu β na lopatce určený pro první návrh. Třebaže tímto způsobem získaná lopatka má velmi často přijatelný tvar a průběh, někdy vychází příliš dlouhá. To lze ovlivnit zahrnutím požadovaných hodnot úhlů opásání do výpočtu pole β , které přímo ovlivňuje výsledný tvar lopatky založený na rovnici (169).

Po řadě výpočtů a testů byl jako nejvhodnější vybrán postup, ve kterém se nepočítá pole hodnot β , ale pole hodnot $\cot \beta$, které se aplikuje na rovnici (169). Funkce byla zvolena díky svému průběhu. V rozmezí úhlů obvykle používaných při návrzích lopatek poskytuje nelineární průběh β na lopatce bez extrémních fluktuací.



Obr. 41 Funkce kotangens

$$\cot \beta = A_1 + A_2 u + A_3 u^2 + A_4 v + A_5 v^2 + A_6 uv + A_7 u^2 v + A_8 uv^2 \quad (171)$$

$$\frac{d\varphi}{du} = -\frac{|\bar{g}_2|}{r} (A_1 + A_2 u + A_3 u^2 + A_4 v + A_5 v^2 + A_6 uv + A_7 u^2 v + A_8 uv^2) \quad (172)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(u, v) = & A_0 + A_1 \int_{u_i}^{u_{end}} \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi + A_2 \int_{u_i}^{u_{end}} \xi \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi + A_3 \int_{u_i}^{u_{end}} \xi^2 \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi \\
 & + A_4 v \int_{u_i}^{u_{end}} \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi + A_5 v^2 \int_{u_i}^{u_{end}} \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi + A_6 v \int_{u_i}^{u_{end}} \xi \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi \\
 & + A_7 v \int_{u_i}^{u_{end}} \xi^2 \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi + A_8 v^2 \int_{u_i}^{u_{end}} \xi \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi
 \end{aligned} \tag{173}$$

Řešení rovnice (171) je podmíněno dosazením osmi okrajových podmínek. Prvních šest z nich je vyjádřením $\cot \beta_{1..6}$ na šesti bodech vstupní a výstupní hrany, rovnice (174). Zbývající dvě podmínky jsou přednatočení výstupní hrany, rovnice (175), a úhel opásání krycího disku, rovnice (176). Jedná se tedy o řešení čtvercové matice koeficientů \mathbf{A} pomocí inverzní matice na základě předpisu $\mathbf{A}\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{B}}$.

Parametry (u, v) odpovídají situaci znázorněné na Obr. 33. K numerickému integrování byla použita složená lichoběžníková formule.

$$\begin{aligned}
 \cot \beta_{1..6} = & A_1 + A_2 u_{1..6} + A_3 u_{1..6}^2 + A_4 v_{1..6} + A_5 v_{1..6}^2 + A_6 u_{1..6} v_{1..6} \\
 & + A_7 u_{1..6}^2 v_{1..6} + A_8 u_{1..6} v_{1..6}^2
 \end{aligned} \tag{174}$$

$$\begin{aligned}
 \zeta = & A_1 \left(\int_{u_3}^{u_6} \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi - \int_{u_1}^{u_4} \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi \right) + A_2 \left(\int_{u_3}^{u_6} \xi \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi - \int_{u_1}^{u_4} \xi \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi \right) \\
 & + A_3 \left(\int_{u_3}^{u_6} \xi^2 \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi - \int_{u_1}^{u_4} \xi^2 \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi \right) + A_4 v_6 \int_{u_3}^{u_6} \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi \\
 & + A_5 v_6^2 \int_{u_3}^{u_6} \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi + A_6 v_6 \int_{u_3}^{u_6} \xi \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi + A_7 v_6 \int_{u_3}^{u_6} \xi^2 \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi \\
 & + A_8 v_6^2 \int_{u_3}^{u_6} \xi \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi
 \end{aligned} \tag{175}$$

$$\varphi_{L(0)} = A_1 \int_{u_1}^{u_4} \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi + A_2 \int_{u_1}^{u_4} \xi \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi + A_3 \int_{u_1}^{u_4} \xi^2 \frac{|\bar{g}_2|}{r} d\xi \tag{176}$$

5.5 Monitory návrhu lopatky

Výsledky vyobrazené v následujících podkapitolách vychází z parametrů BETA 10. Při jejich vypracování byl brán ohled na souřadnice průsečíků proudnic (střední a na krycím a nosném disku) se vstupní a výstupní hranou originálního návrhu. Kvůli dobrému přiblížení se původním souřadnicím byl meridiální řez počítán na síti o jemnosti $[u \times v] = [120 \times 90]$. Pro zachování nějaké úrovně porovnání bylo vycházeno z převzatých hodnot výstupních úhlů na zmíněných proudnicích a z úhlu opásání na krycím disku. Jako výchozí podklad pro pozdější úpravy posloužil při určení vstupních úhlů β_1 postup z 5.1. Při prvním návrhu bylo pole β řešeno pomocí 5.3.2 a v případě zadání úhlu opásání pomocí 5.4.1.

Samozřejmě nebylo možné očekávat, že lopatka vypočítaná pomocí matematického modelu bude přesně odpovídat reálnému stavu. Ten totiž v průběhu optimalizace návrhu prošel řadou dílčích změn a úprav. Cílem zde představovaného postupu je získat lopatku, která bude kvalitním základem pro konečné doladění v některém z programů simulujících proudění.

V následujících tabulkách jsou vypsány údaje definující lopatku. V posledním sloupci jsou uvedena data, na jejichž základě vznikl konečný tvar vhodný k dalšímu postupu.

Francisova metoda

	první návrh	konečný návrh
bod 1	11,06°	13°
bod 2	15,23°	19,5°
bod 3	20,7°	23,2°
bod 4	30,7°	30,7°
bod 5	27,67°	28°
bod 6	23,5°	26°
ζ	0°	-4°
$\varphi_{L(0)}$	-	130°

Kvazipotenciální proudění

	první návrh	konečný návrh
bod 1	10,81°	12,8°
bod 2	15,72°	19°
bod 3	20,34°	23°
bod 4	30,7°	30,7°
bod 5	27,67°	28°
bod 6	23,5°	25,5°
ζ	0°	-4,5°
$\varphi_{L(0)}$	-	130°

Potenciální proudění

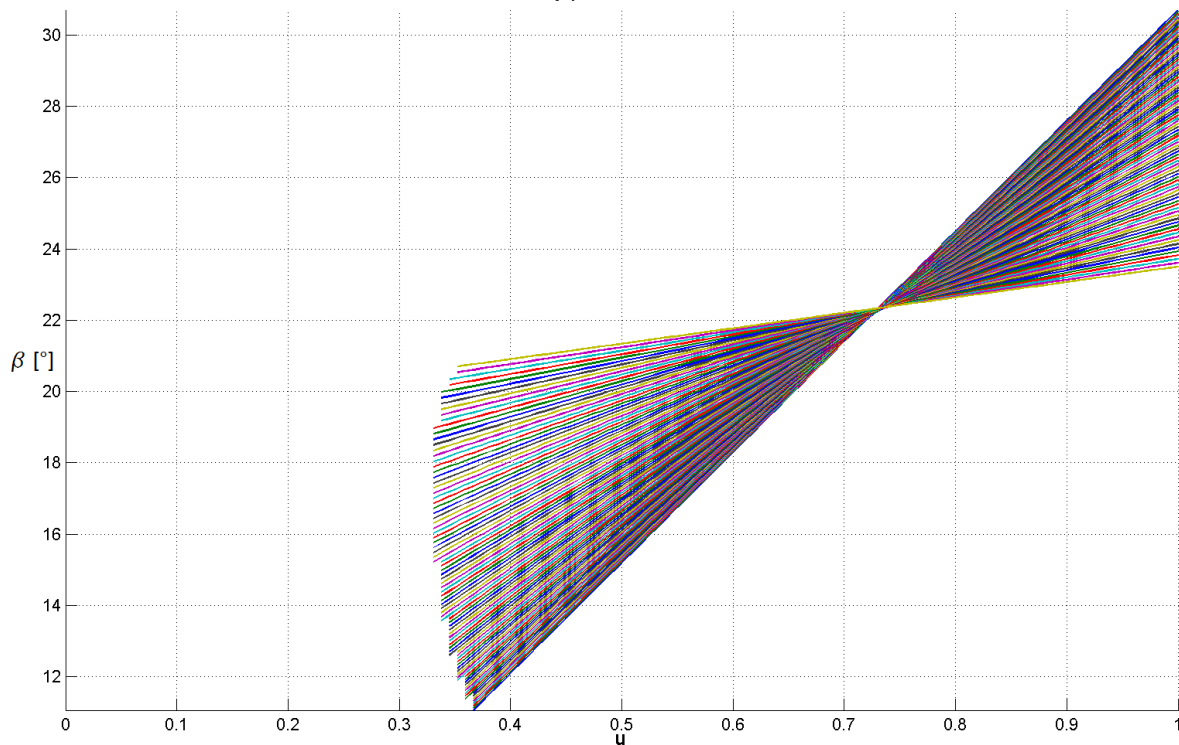
	první návrh	konečný návrh
bod 1	10,88°	12,6°
bod 2	15,51°	18,5°
bod 3	20,02°	22,9°
bod 4	30,7°	30,7°
bod 5	27,67°	27,7°
bod 6	23,5°	25,2°
ζ	0°	-4,5°
$\varphi_{L(0)}$	-	125°

Kombinace kvazipotenciálního proudění a Francisovy metody

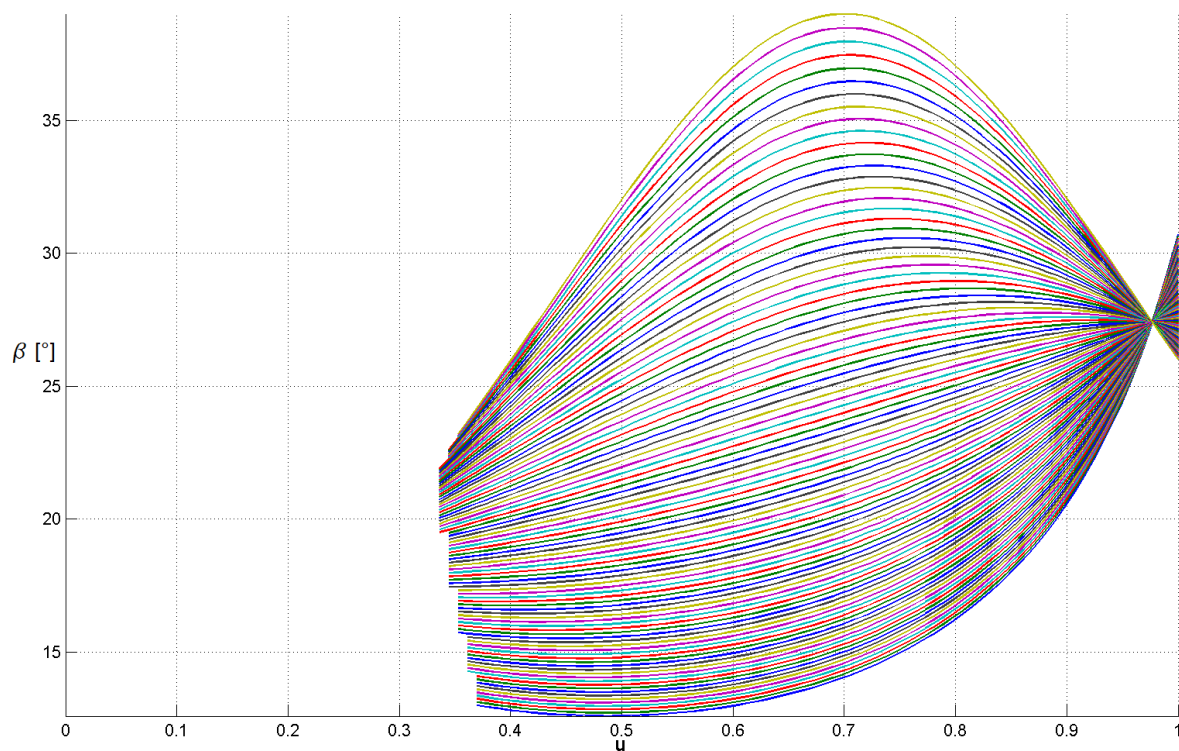
	první návrh	konečný návrh
bod 1	12,44°	13°
bod 2	14,96°	19,5°
bod 3	18,14°	22,7°
bod 4	30,7°	30,7°
bod 5	27,67°	28°
bod 6	23,5°	26,5°
ζ	0°	-4,5°
$\varphi_{L(0)}$	-	125°

5.5.1 Průběh β po délce lopatky

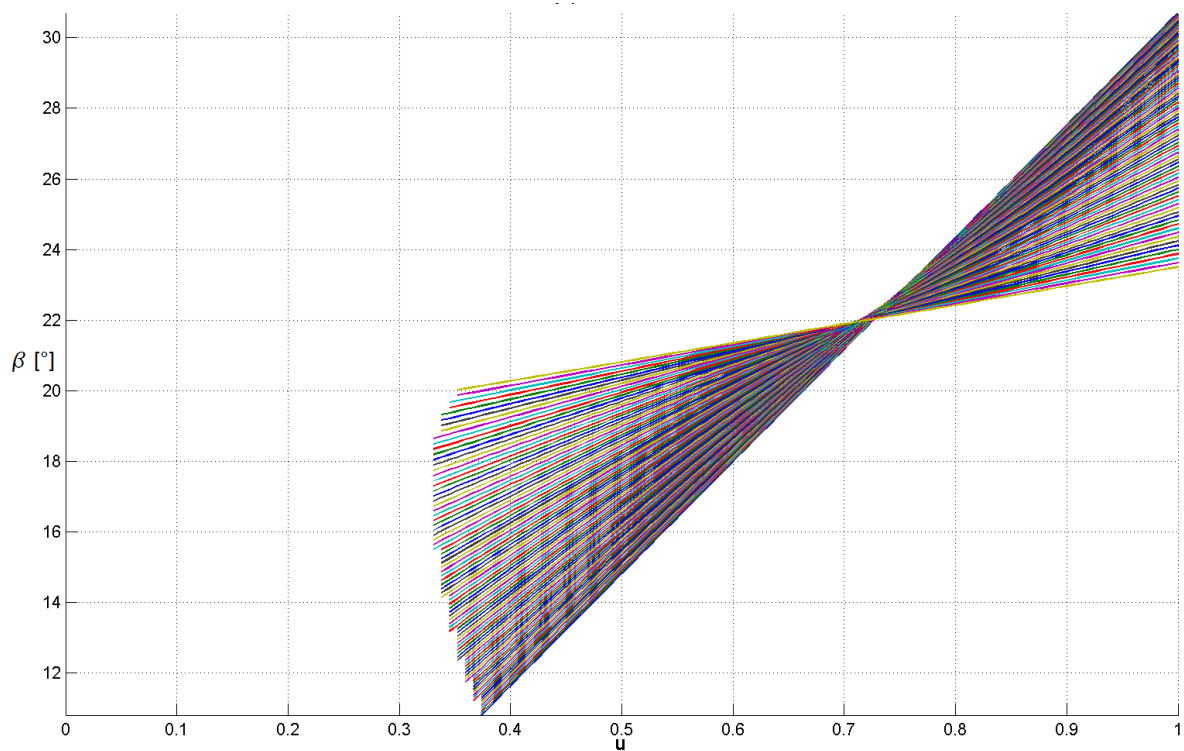
Na následujících grafech počátek křivek značí poměry na vstupní hraně a zakončení křivek na výstupní hraně lopatky. První horní křivka na vstupu na lopatku popisuje stav na krycím disku, nejspodnější křivka na nosném disku.



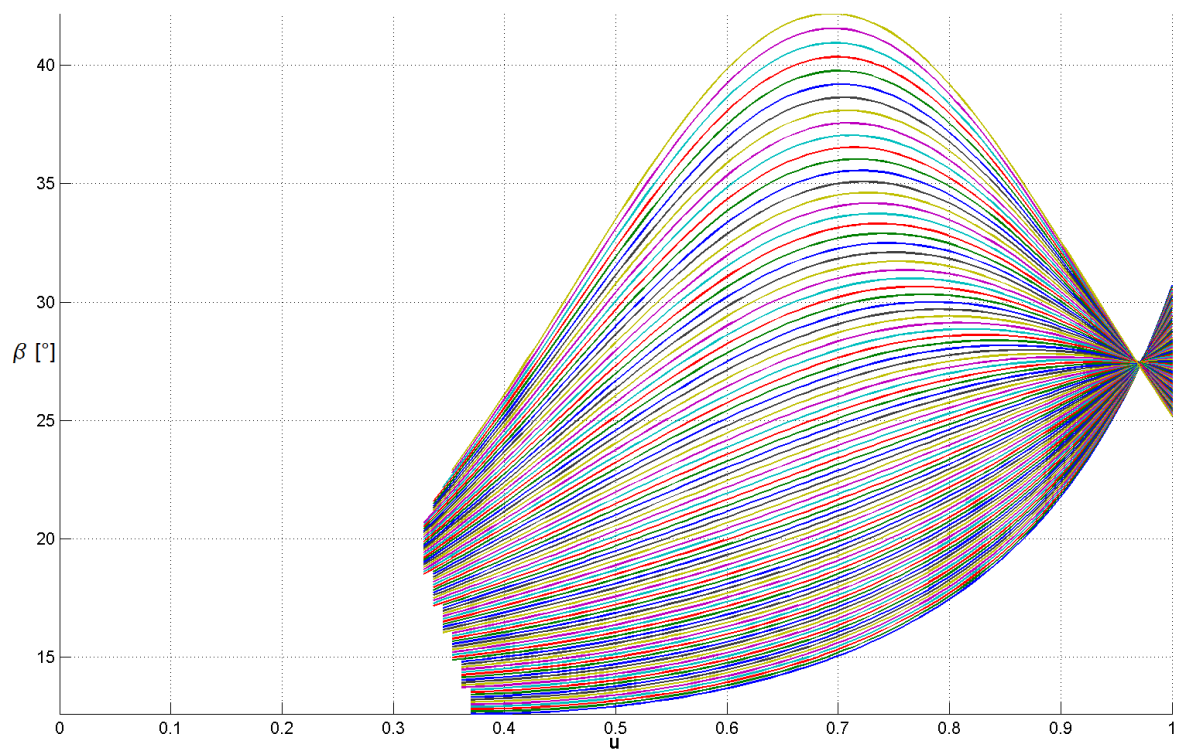
Obr. 42 Francisova metoda – první návrh



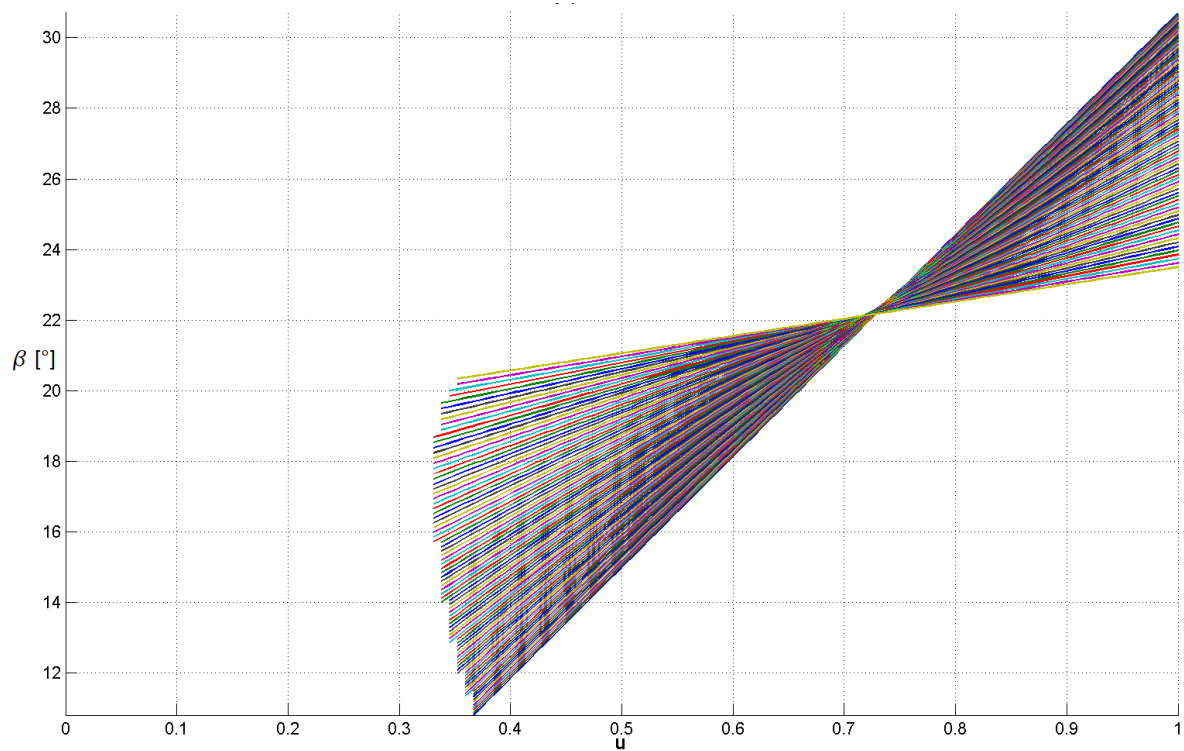
Obr. 43 Francisova metoda – konečný návrh



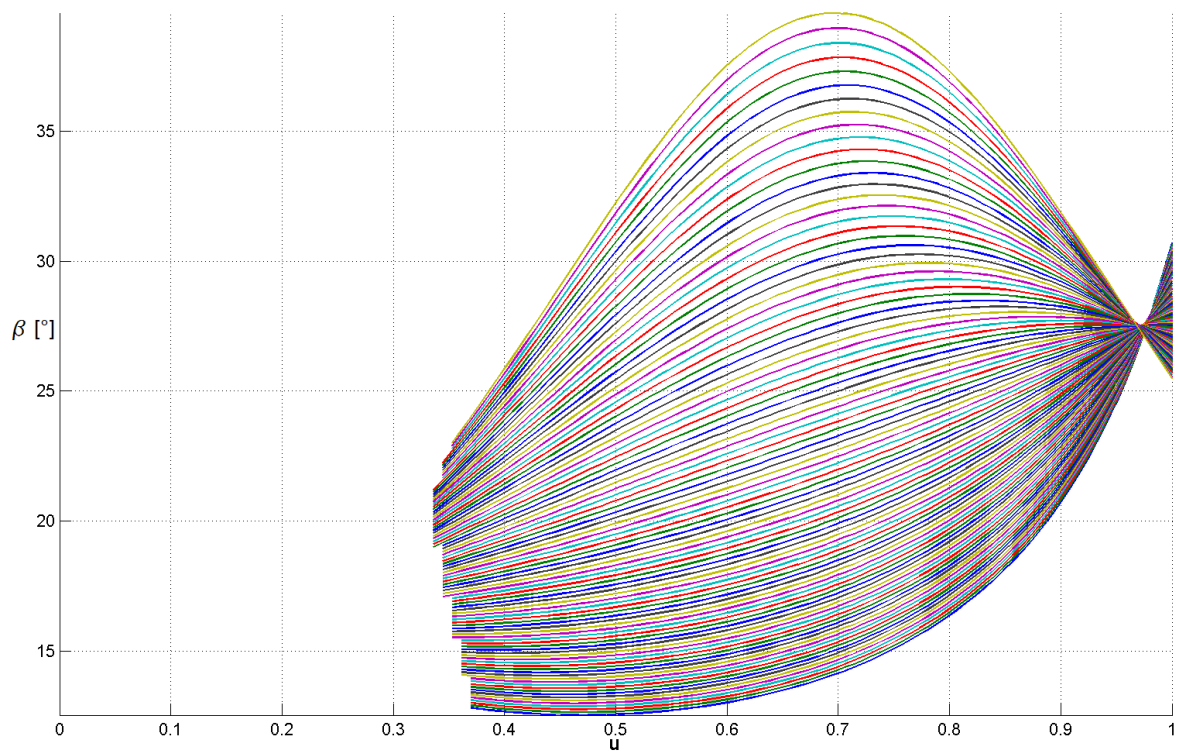
Obr. 44 Potenciální proudění – první návrh



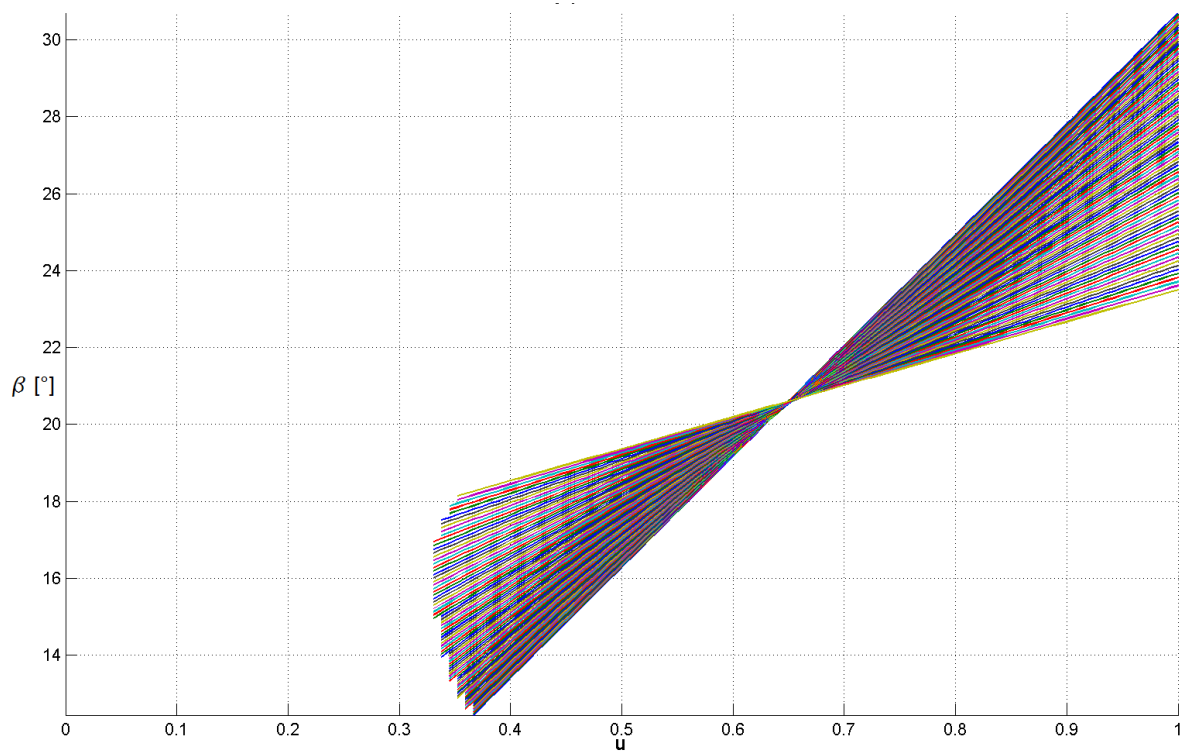
Obr. 45 Potenciální proudění – konečný návrh



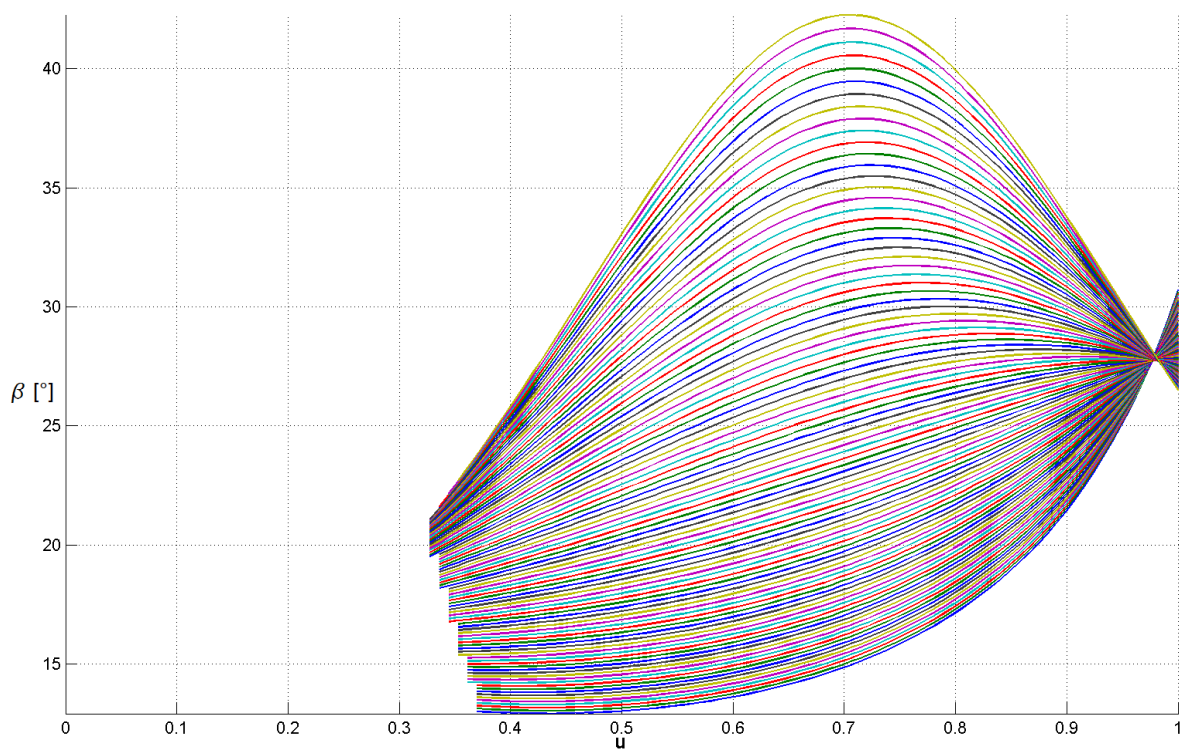
Obr. 46 Kvazipotenciální proudění – první návrh



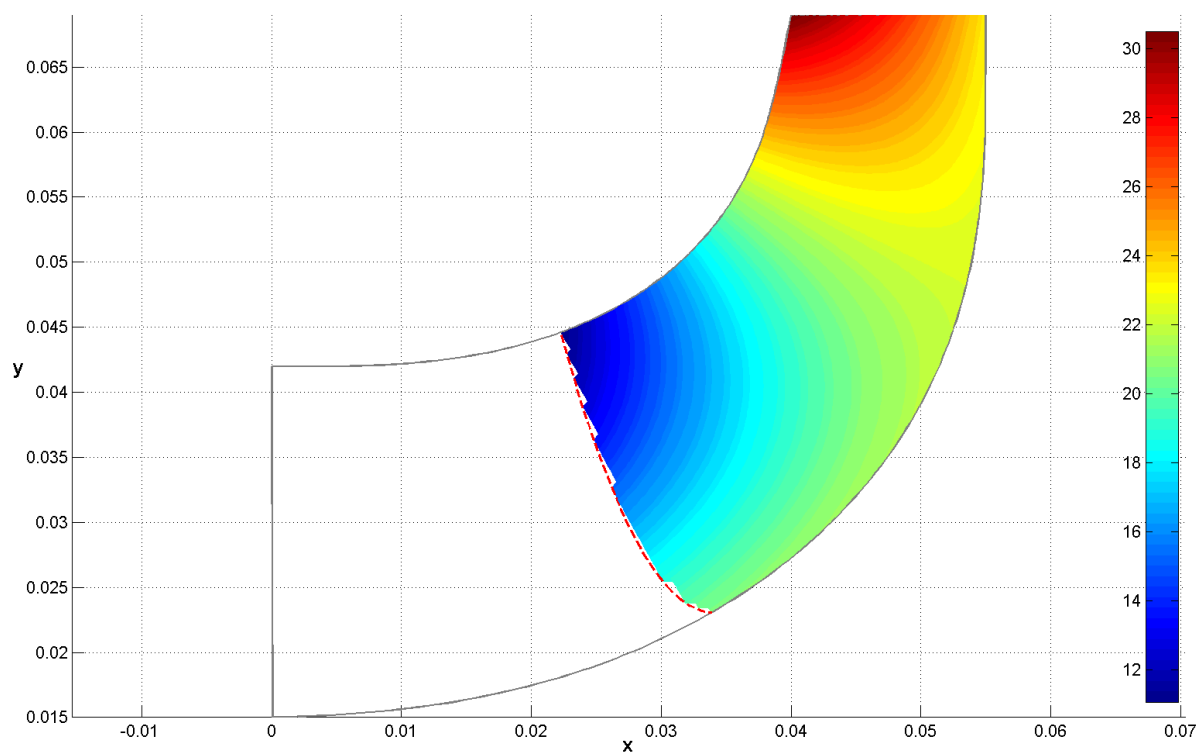
Obr. 47 Kvazipotenciální proudění – konečný návrh



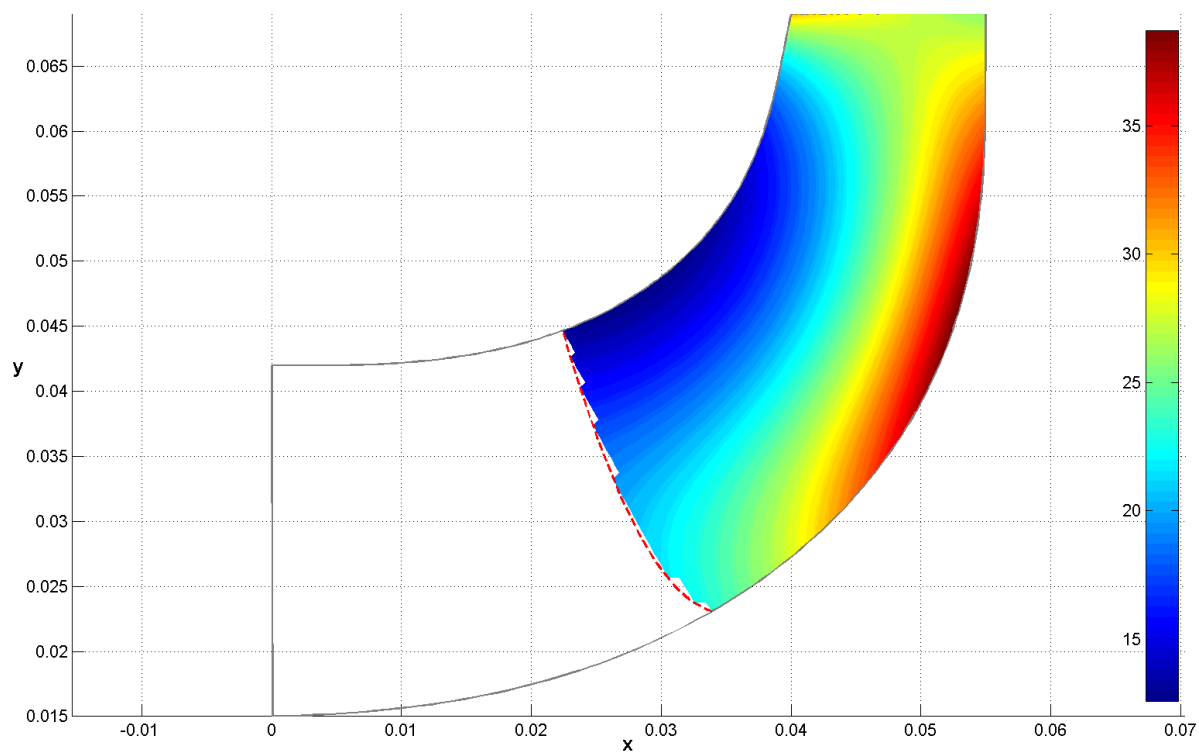
Obr. 48 Kombinace kvazipotenciálního proudění a Francisovy metody – první návrh



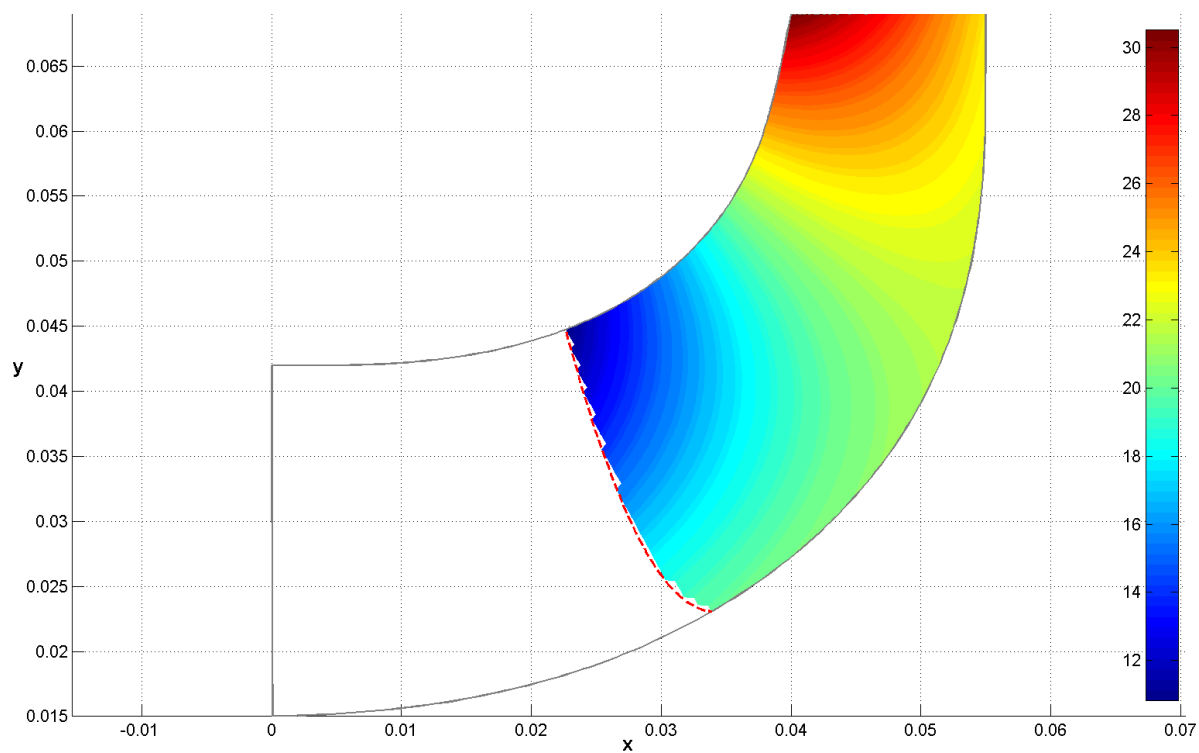
Obr. 49 Kombinace kvazipotenciálního proudění a Francisovy metody – konečný návrh

5.5.2 Plošné rozložení β na lopatce

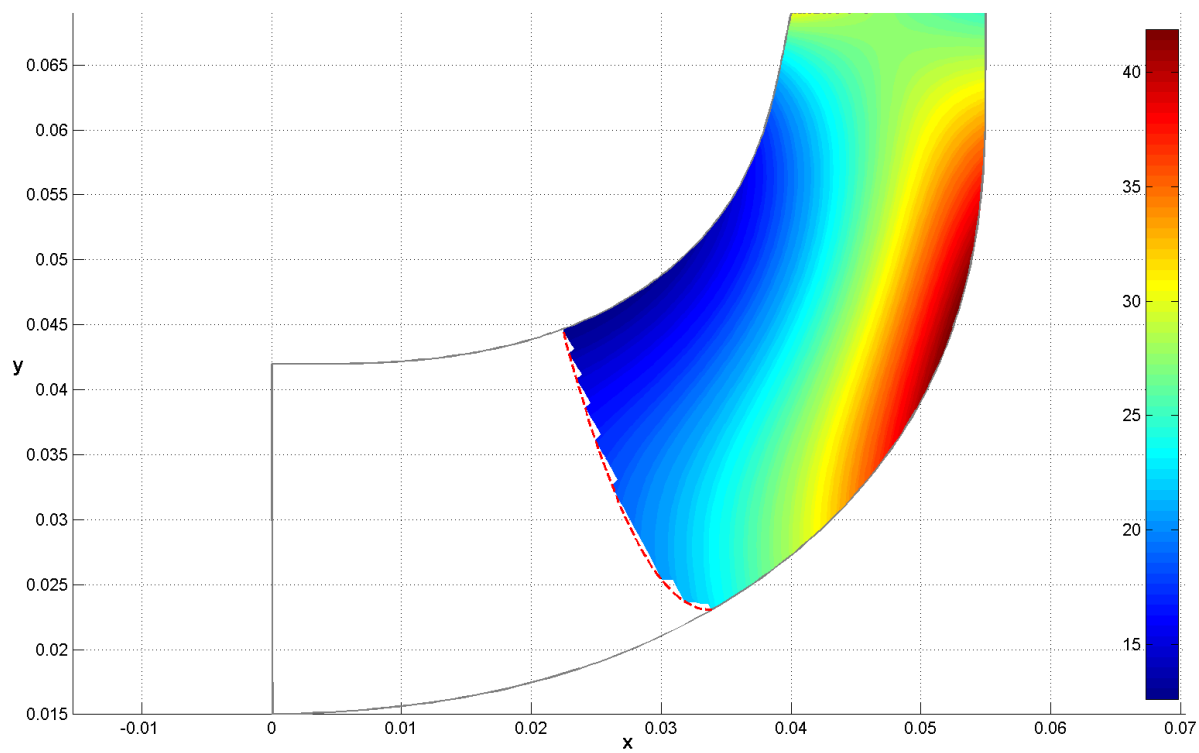
Obr. 50 Francisova metoda – první návrh



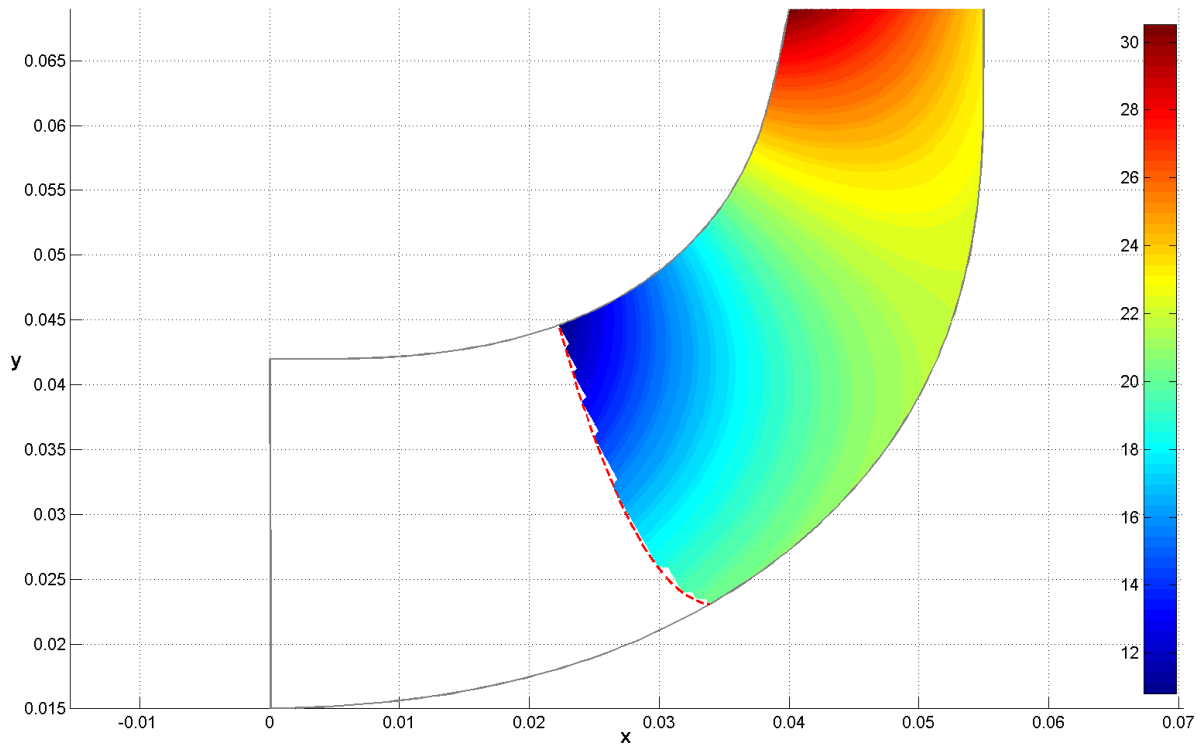
Obr. 51 Francisova metoda – konečný návrh



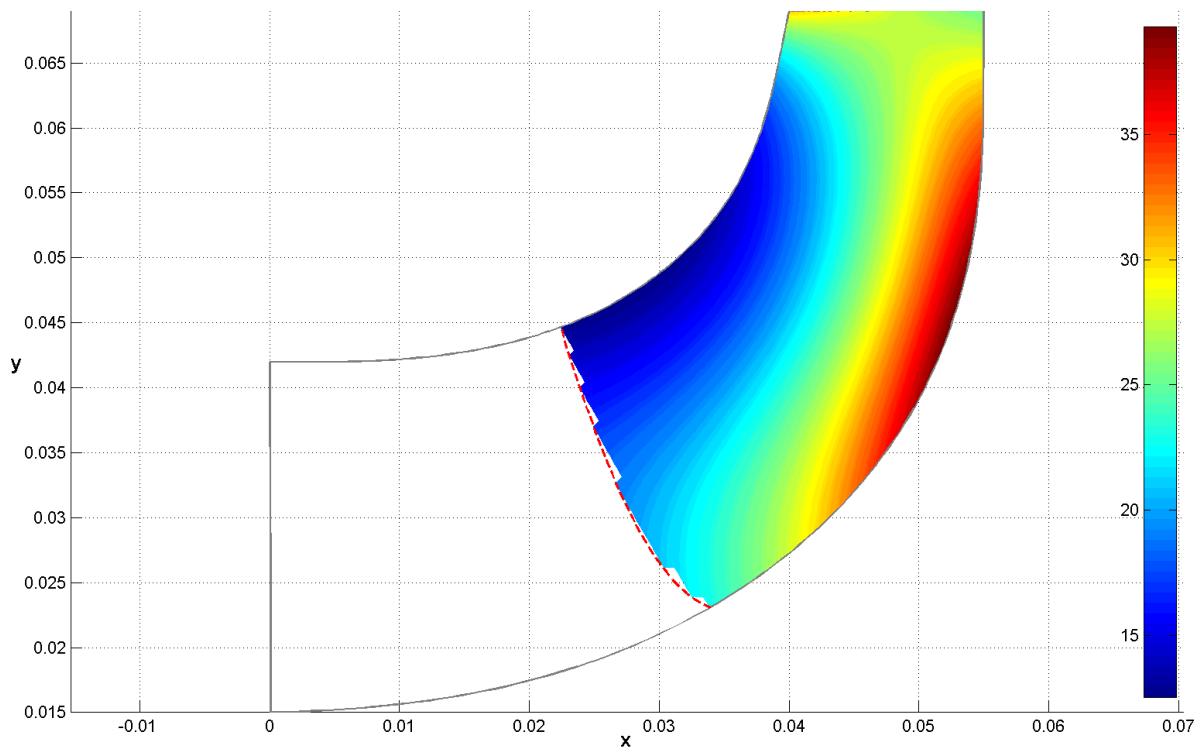
Obr. 52 Potenciální proudění – první návrh



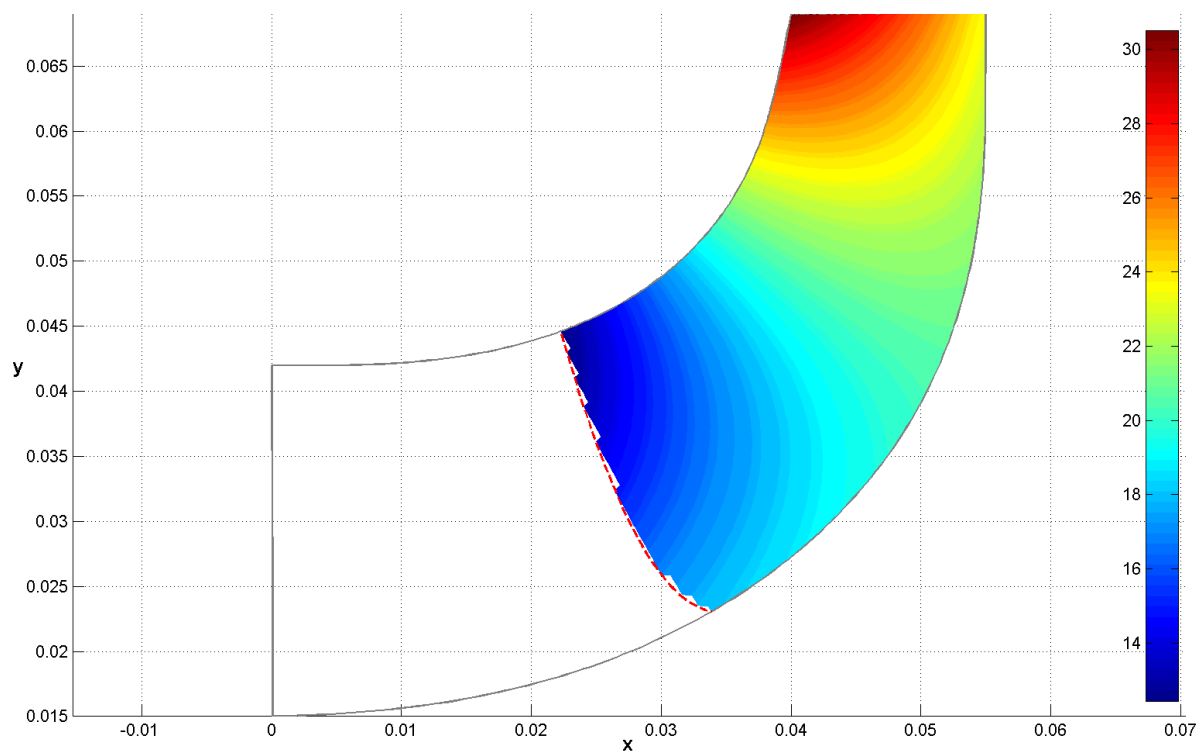
Obr. 53 Potenciální proudění – konečný návrh



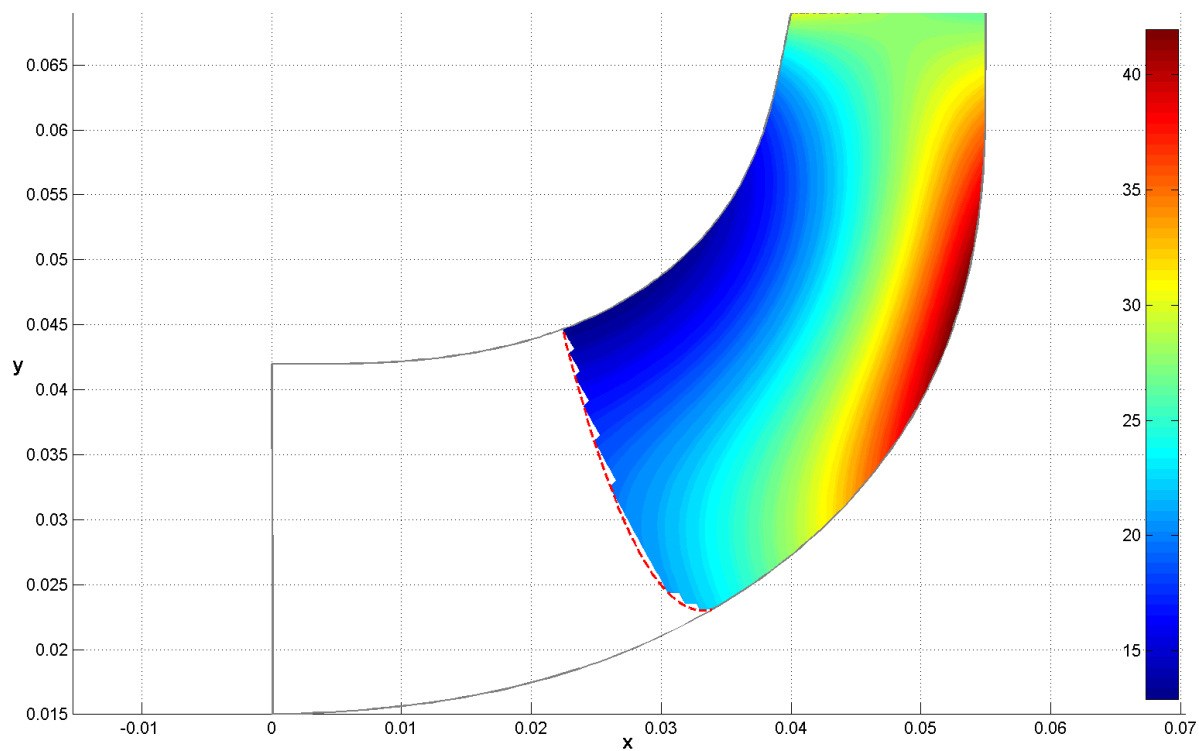
Obr. 54 Kvazipotenciální proudění – první návrh



Obr. 55 Kvazipotenciální proudění – konečný návrh



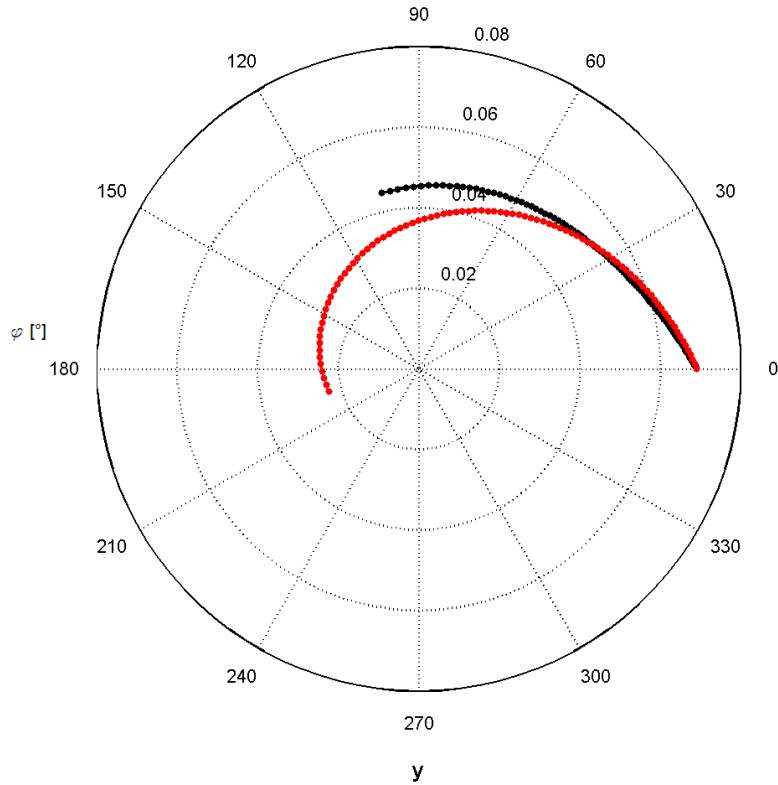
Obr. 56 Kombinace kvazipotenciálního proudění a Francisovy metody – první návrh



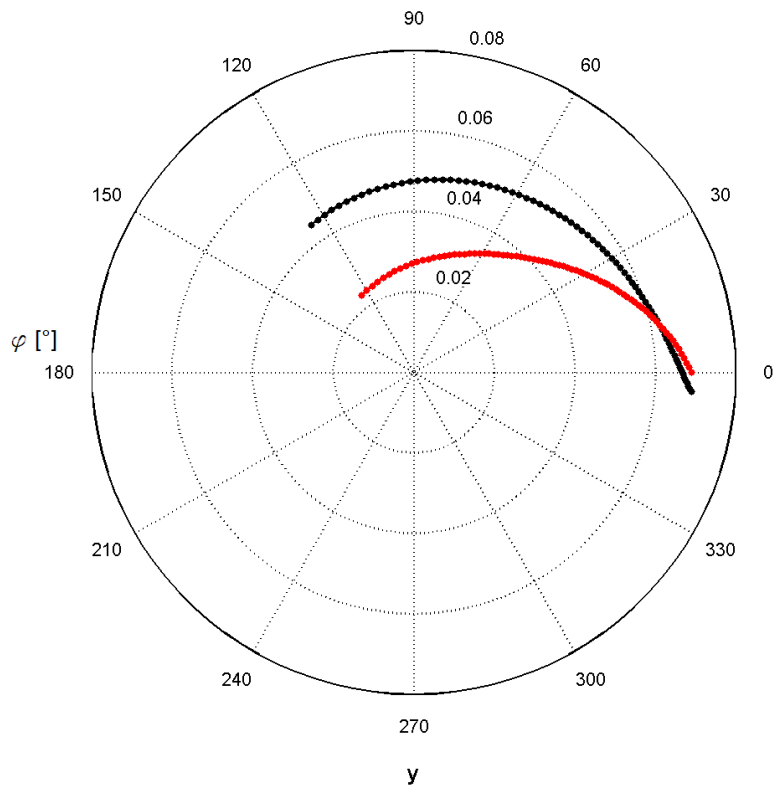
Obr. 57 Kombinace kvazipotenciálního proudění a Francisovy metody – konečný návrh

5.5.3 Průběh lopatky na nosném a krycím disku

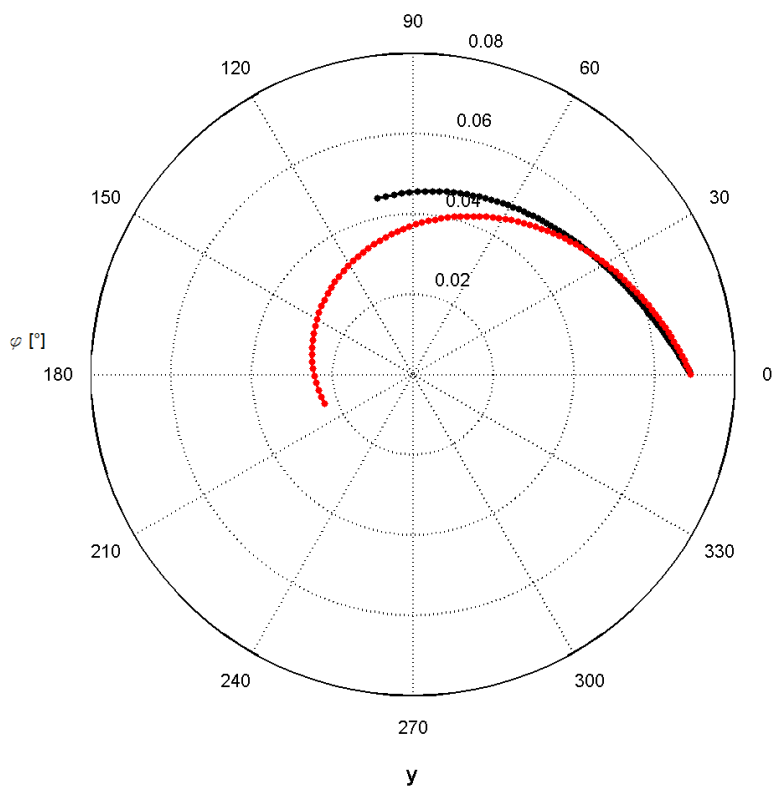
Na následujících grafech jsou zobrazeny nosný (červená) a krycí (černá) disk lopatky. Na pozici 0° je výstupní hrana lopatky na nosném disku.



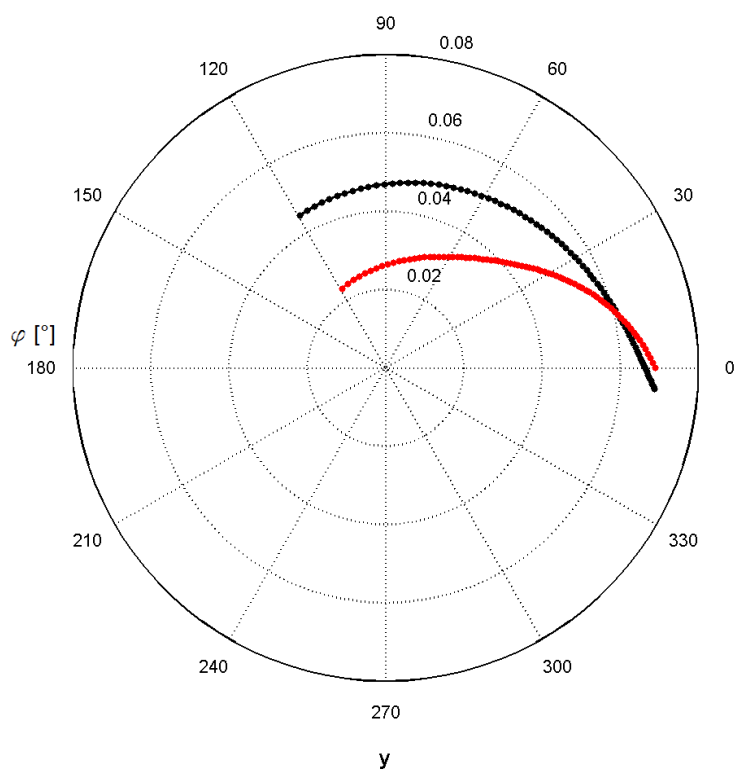
Obr. 58 Francisova metoda – první návrh



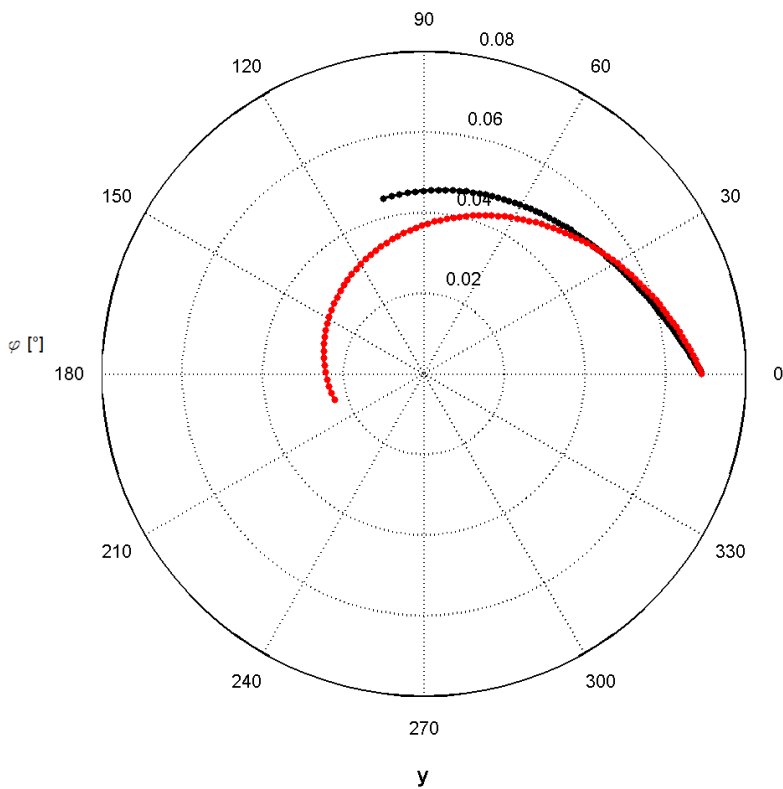
Obr. 59 Francisova metoda – konečný návrh



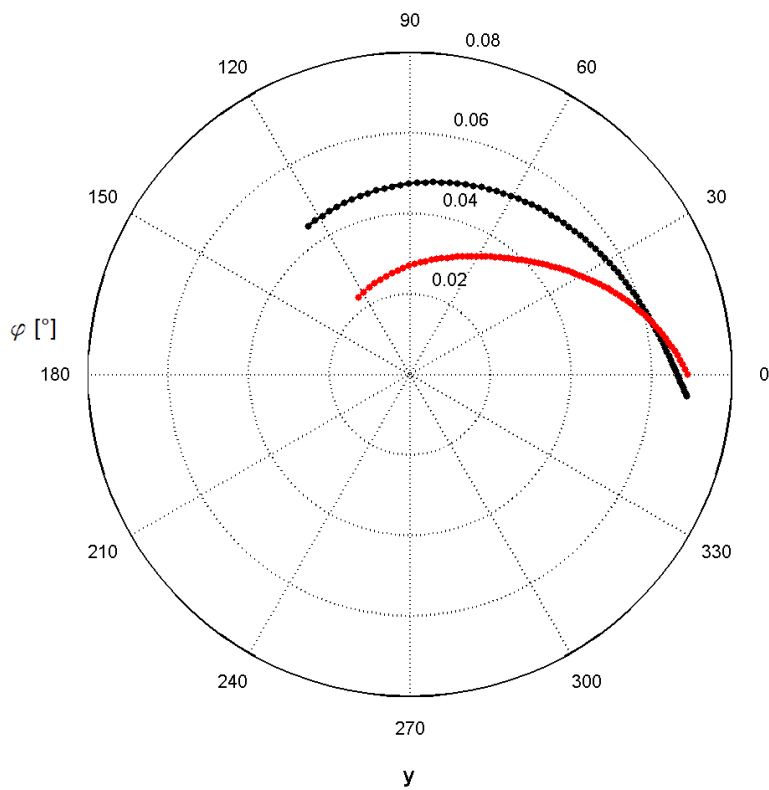
Obr. 60 Potenciální proudění – první návrh



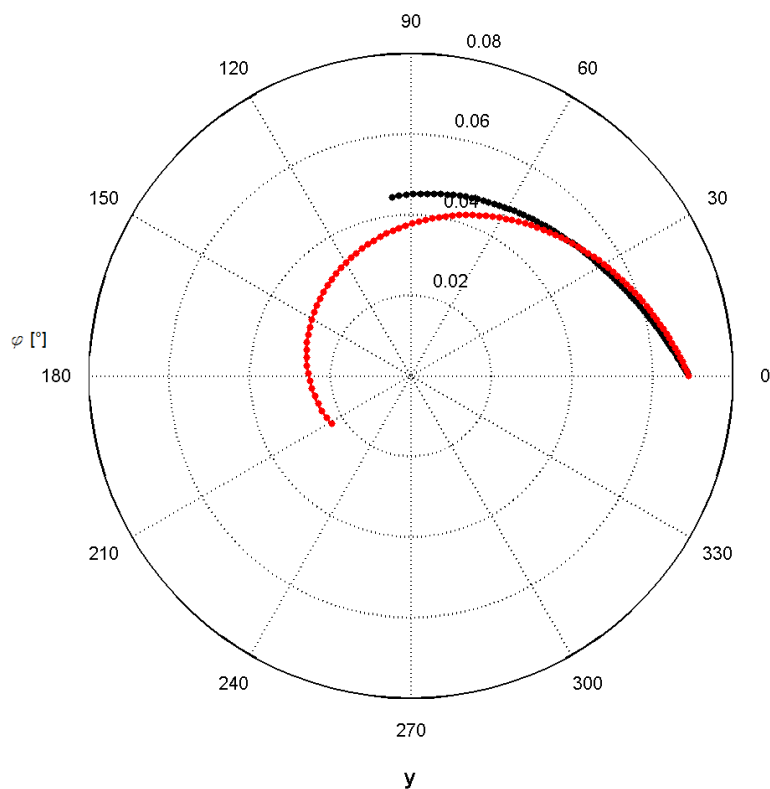
Obr. 61 Potenciální proudění – konečný návrh



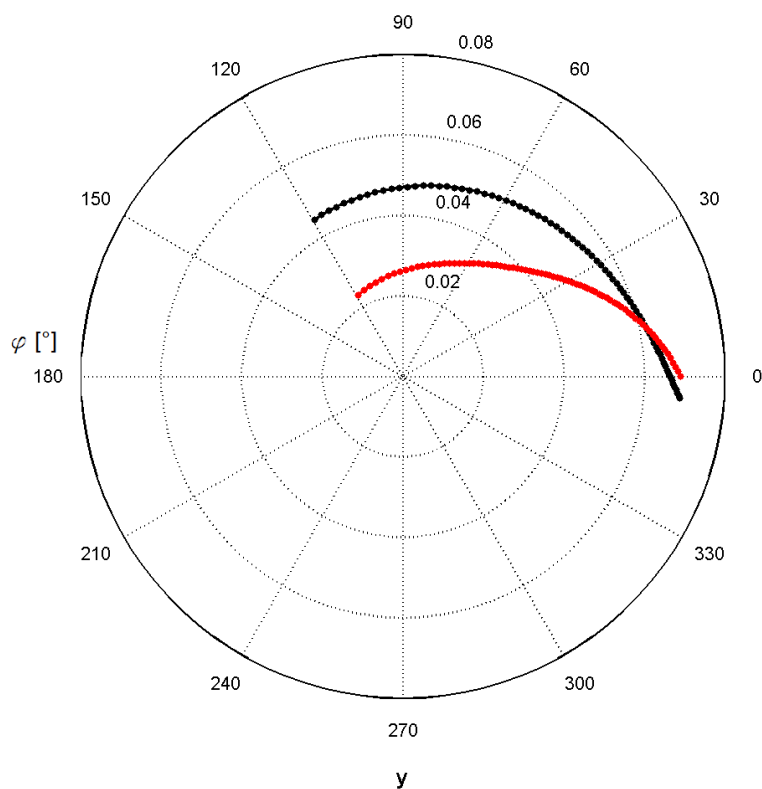
Obr. 62 Kvazipotenciální proudění – první návrh



Obr. 63 Kvazipotenciální proudění – konečný návrh



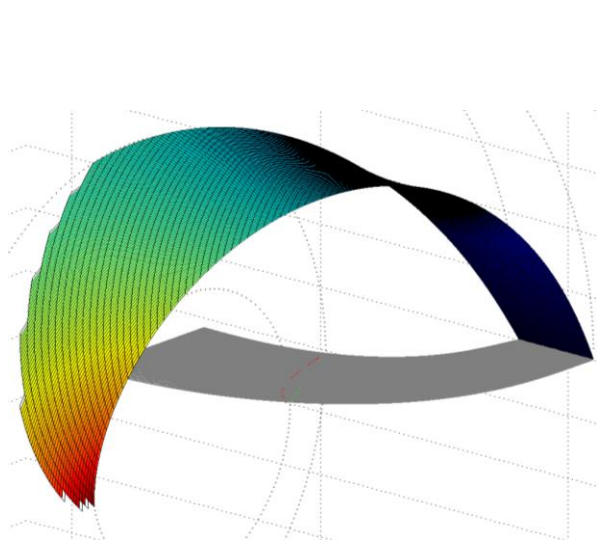
Obr. 64 Kombinace kvazipotenciálního proudění a Francisovy metody – první návrh



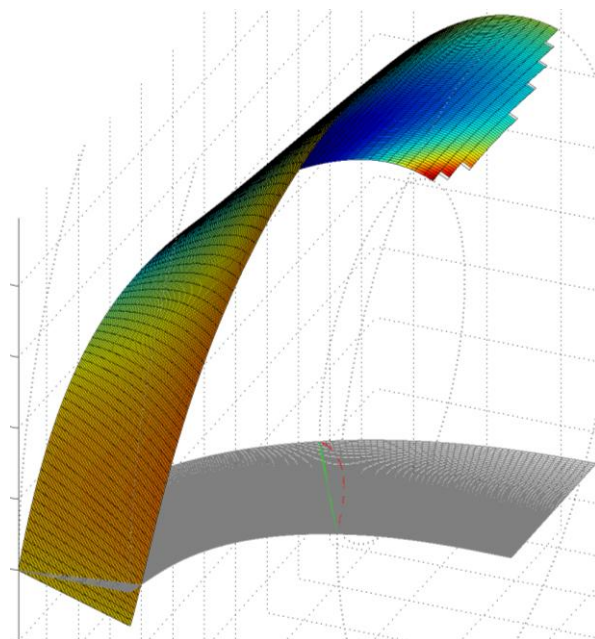
Obr. 65 Kombinace kvazipotenciálního proudění a Francisovy metody – konečný návrh

5.5.4 3D zobrazení lopatky

Francisova metoda (FM)

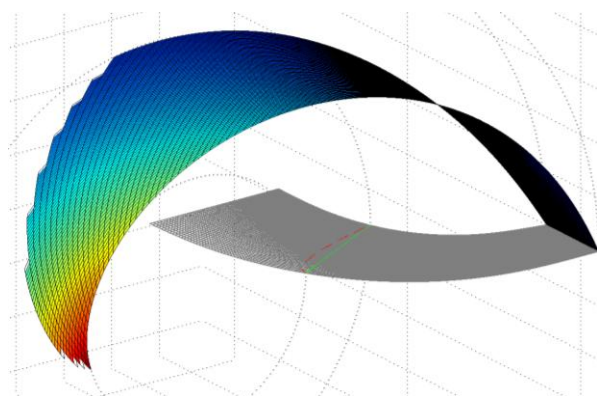


Obr. 66 FM - první návrh

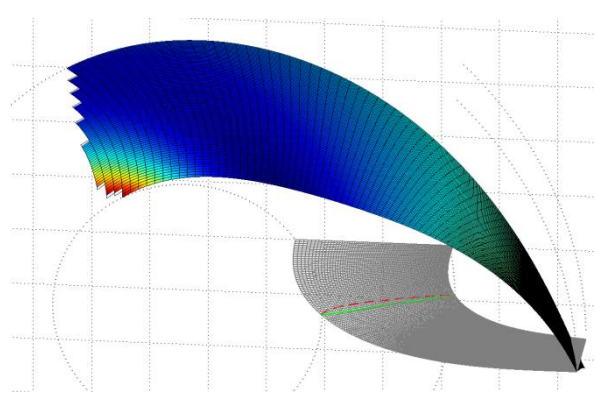


Obr. 67 FM - konečný návrh

Potenciální proudění (PP)

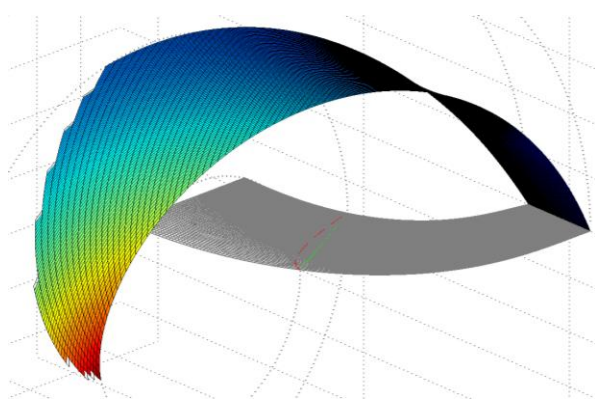


Obr. 68 PP - první návrh

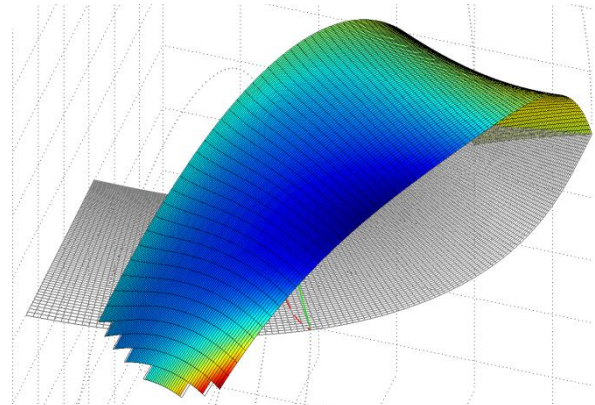


Obr. 69 PP - konečný návrh

Kvazipotenciální proudění (KP)

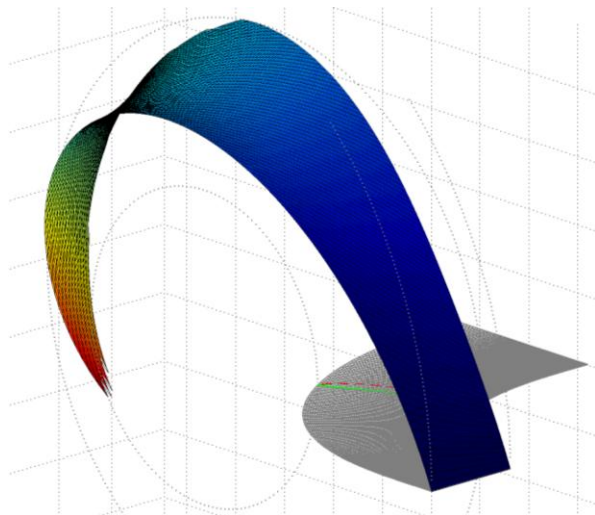


Obr. 70 KP - první návrh

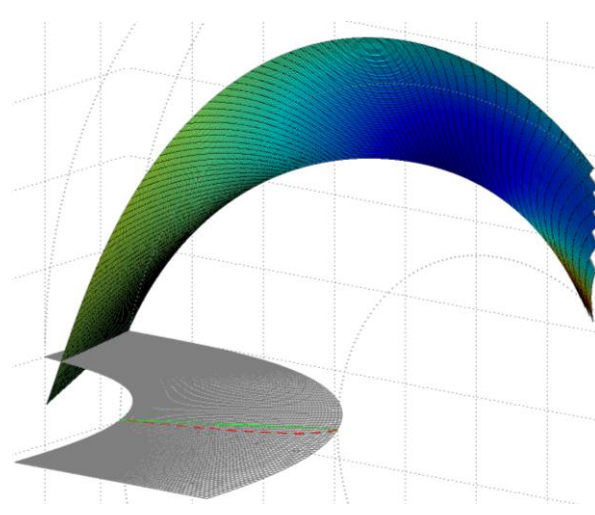


Obr. 71 KP - konečný návrh

Kombinace kvazipotenciálního proudění a Francisovy metody (KP&FM)



Obr. 72 KP&FM - první návrh



Obr. 73 KP&FM – konečný návrh

K vykreslení prostorového tvaru bylo použito obecného vztahu popisujícího rotaci bodu okolo počátku.

$$\begin{bmatrix} \acute{x} \\ \acute{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta \\ \sin \Theta & \cos \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (177)$$

5.5.5 Komentář k návrhu lopatky

V kapitolách představujících monitorý návrhu byly zároveň zobrazeny i výstupy informací o získaných lopatkách. Ty měly vždy základ v meridiálních řezech upravených dle odlišných předpokladů proudění. Během každého návrhu bylo postupováno stejným způsobem.

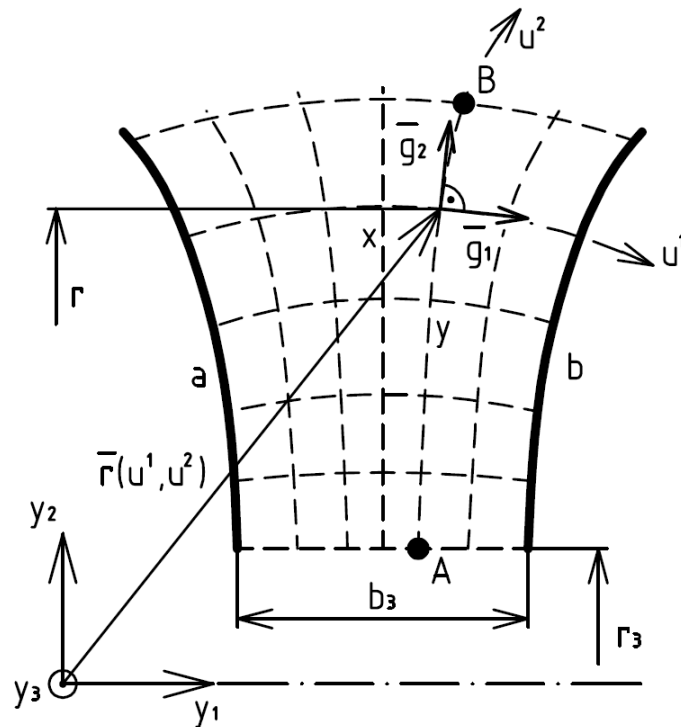
Největší důraz byl při návrhu lopatky kladen na hladký průběh úhlů opásání na nosném a krycím disku oběžného kola. Dále byla žádána spíše krátká lopatka z důvodu snížení ztrát třením kapaliny o její povrch. Informace podávané o průběhu úhlu β po délce lopatky a jeho plošné rozložení měly ve zkoumaném případě menší váhu. Důvodem byla snaha o zachování vzájemné porovnatelnosti vyrobené lopatky BETA 10 a výsledků založených na jednotlivých teoretických přístupech. Lopatka BETA 10 prošla během svého návrhu optimalizací tvaru. Nebylo proto možné očekávat perfektní shodu teoretických a reálných hodnot. Přes toto omezení se výsledky výpočtů pohybují v poměrně blízkém pásmu okolo parametrů skutečné lopatky. Mezi výstupy jednotlivých návrhových metod jsou patrné rozdíly. V další fázi návrhu oběžného kola by byly jednotlivé lopatky vyhodnoceny pomocí CFD simulace. Poté by bylo možné vybrat nejslibnější tvar a pokračovat v jeho dalších úpravách.

Odpovídající váhu jednotlivým monitorům návrhu a přiměřenost kroků úpravy tvaru lopatky bude tedy možné určit až s rostoucím počtem čerpadel navržených pomocí představovaného programu.

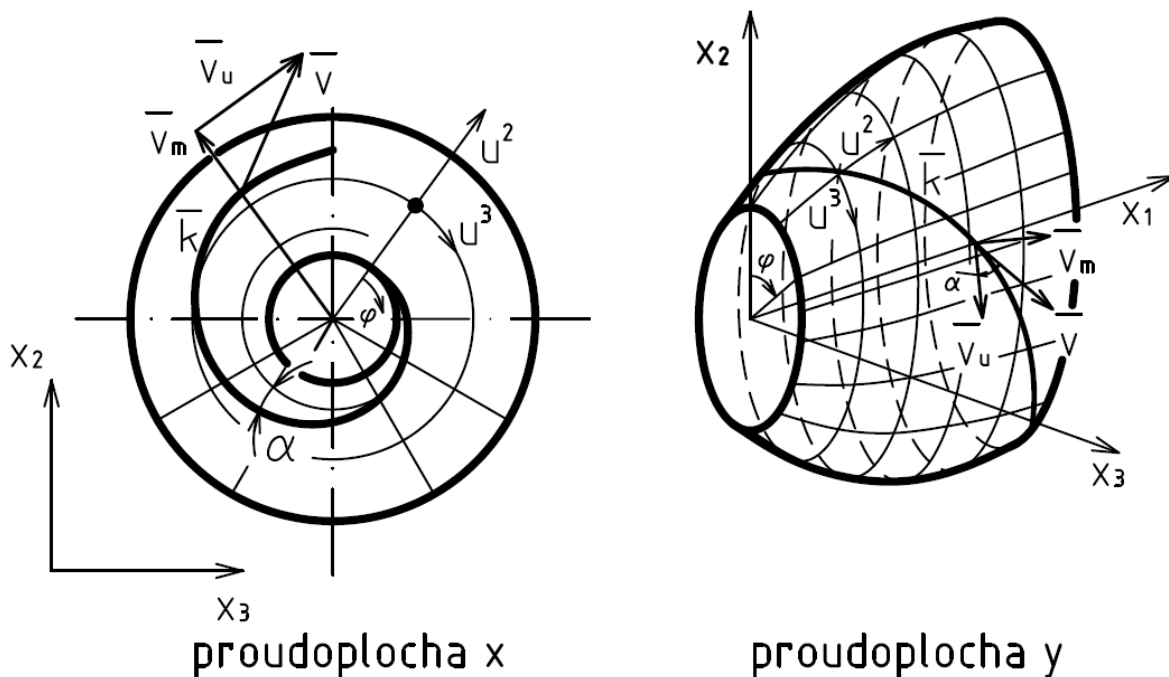
6 Návrh spirály metodami diferenciální geometrie

6.1 Tvar pláště spirály

Pro rotačně symetrické proudění, symetrické vzhledem k proudoploše x a omezené pevnými nehybnými proudoplochy a a b , proudoplocha y protíná meridiální rovinu v průsečíku AB , viz Obr. 74. Proudoplocha y je považována za proudnici tvořenou vektory meridiálních rychlostí v_m . V každém bodě proudoplochy y lze zavést vektor rychlosti \vec{v} rozložitelný do směru obvodového a tečného k čáře AB , (POCHYLÝ, 1991).



Obr. 74 Meridiální řez spirálou, (POCHYLÝ, 1991)



Obr. 75 Proudoplochy, (POCHYLÝ, 1991)

„Meridiány tvoří proudnice meridiálních rychlostí, zatímco rovnoběžkové kružnice jsou tvořeny proudnicemi složek absolutních rychlostí do obvodového směru. Skutečná proudnice vektorů \bar{v} je znázorněna křivkou \bar{k} . Na proudoploše x vytváří tato proudnice charakteristický tvar spirálního tělesa“, (POCHYLÝ, 1991).

V prostoru je definován ortogonální křivočarý souřadnicový systém u^i následovně, (POCHYLÝ, 1991):

- tečný vektor \bar{g}_2 udává směr meridiální rychlosti
- vektor \bar{g}_3 udává směr obvodové složky rychlosti
- u^1 je zvoleno tak, aby $\bar{g}_1 \perp \bar{g}_2 \perp \bar{g}_3$

Takto je definována základní geometrická představa proudění ve vymezeném prostoru mezi proudoplochami a, b . Návrh tvaru pláště spirály respektuje původní představu proudění spolu s minimalizací hydraulických ztrát. Toho je v (POCHYLÝ, 1991) dosaženo provázaností geometrické představy sítě na ploše meridiálního řezu spirálou s polem rychlostí.

6.2 Návrh meridiálního řezu spirály

Návrh je založen na modelování výstupního řezu, na kterém závisí i ostatní řezy spirálou. Postup je shodný s návrhem meridiálního řezu oběžného kola a jsou použity stejné algoritmy výpočtu. Definice proudění z hlediska diferenciální geometrie je v obou řezech shodná, viz Obr. 8 a Obr. 74. Úprava tvaru řezu je prováděna pouze na jeho jedné polovině, druhá polovina je automaticky zrcadlena. Stejně jako u návrhu meridiálního řezu oběžného kola je i zde předpoklad znalosti základních rozměrů a přibližného tvaru řezu, viz 3.

Při návrhu meridiálního řezu oběžným kolem bylo možné zvolit ze tří předpokladů proudění. U spirály je však k dispozici pouze jedna metoda. Základem návrhu radiálního oběžného kola jakýmkoliv přístupem je dosažení rovnoměrného rozložení meridiální rychlosti na jeho výstupu. Na vstupu do spirály proto lze rovněž předpokládat rovnoměrné rozložení meridiální rychlosti. Díky tomu jsou hydraulické návrhy oběžného kola a spirály navzájem provázány. Nejvhodnější se tím pro návrh spirály stává Francisova metoda.

Při návrhu výstupního meridiálního řezu značí křivky u_i^1 hranice jednotlivých meridiálních řezů spirály. Lze tak již zpočátku jejich úpravami ošetřovat některá konstrukční omezení, například předepsanou patku spirály.

6.3 Spirála v prostoru

S vhodně navrženým meridiálním řezem lze přistoupit k tvorbě prostorového modelu spirály. Jak je zmíněno v předchozím odstavci, již při návrhu výstupního řezu jsou určovány i ostatní řezy spirály. Zbývá tedy určit jejich prostorové natočení, kdy celkové natočení mezi počátkem spirály a jejím výstupním řezem je vždy 360° . S ohledem na konstrukci nosu spirály je obvykle celé těleso natočeno o určitý počet stupňů. Cílem je, aby nos protínala vertikální osa spirály. Tento problém bude hlouběji rozebrán v kapitole věnující se nosu spirály.

Při výpočtu natočení bylo vycházeno ze vztahů prezentovaných v (POCHYLÝ, 1991). Již v předchozích odstavcích bylo konstatováno, že křivky tvořící Bézierovu plochu obecně nejsou ortogonální. Do algoritmu byly proto převzaty složitější varianty odvození na neortogonální síti. K takovému výpočtově náročnému řešení je možné přistoupit, protože jednotlivé kroky jsou prováděny strojově a z předcházejících výpočtů je již známo pole hodnot \bar{g}_1, \bar{g}_2 .

6.3.1 Metoda $v_{stř} = konst.$

Metoda předpokládá konstantní střední rychlost v každém meridiálním řezu spirálou mimo výstupního hrdla. Podle experimentálních měření je vhodná pro vyšší n_b .

Rychlost proudění kapaliny ve spirále by měla být stejná jako je výtoková rychlost na výstupu z oběžného kola. Pokud je však rychlost proudění o něco nižší, bývá dosaženo lepší hydraulické účinnosti čerpadla, (PACIGA, a další, 1984). Proto je příhodné upravovat velikost plochy výstupního řezu spirály takovým způsobem, aby bylo dosaženo optimální rychlosti. Vhodnou plochu výstupního meridiálního řezu lze vypočítat z požadovaného průtoku. Program vypisuje aktuální velikost plochy v rámci jednotlivých úprav. Žádaná hodnota je proto snadno sledovatelná a dosažitelná.

Dle (PACIGA, a další, 1984):

$$v_{stř} = K_4 \sqrt{2Y_{(1)}} \quad (178)$$

$$0,049 < n_b < 0,075$$

$$K_4 = 0,45 - 2,015(n_b - 0,049) \quad (179)$$

Natočení řezu spirály definovaného jako Bézierova plocha pro metodu $v_{stř} = konst.$, (POCHYLÝ, 1991):

$$\varphi = \frac{2\pi}{Q} v_{stř} \int_0^1 \int_0^1 [|\bar{g}_1|^2 |\bar{g}_2|^2 - (\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2)^2]^{\frac{1}{2}} du^1 du^2 \quad (180)$$

Střední rychlost $v_{stř}$ je definována jako podíl zadaného průtoku čerpadlem a plochy výstupního řezu spirály.

$$v_{stř} = \frac{Q}{S_{out}} \quad (181)$$

Při natáčení jednotlivých řezů bylo použito obecného vztahu (177) popisujícího rotaci bodu okolo počátku.

6.3.2 Metoda $rv_u = konst.$

Předpokládá, že energie již není ve spirále ani dodávána ani měněna a průtok z oběžného kola do prostoru je rovnoměrný. Spirála už nijak neovlivňuje dopravní výšku H . Používá se při návrzích velkých spirál.

Výchozím předpokladem je rovnoměrný průtok, (HALUZA, 2006/2007):

$$dQ(\varphi) = v_u dS(\varphi) \quad (182)$$

$$Q(\varphi) = \int_{r_3}^r v_u b(\varphi) dr = K_{vu} \int_{r_3}^r b(\varphi) \frac{dr}{r} \quad (183)$$

Koeficient K_{vu} lze odvodit přímo ze základního předpokladu a Eulerovi čerpadlové rovnice:

$$rv_u = \frac{gH}{\eta_h 2\pi n} = konst. \quad (184)$$

$$K_{vu} = \frac{gH}{\eta_h \omega} \quad (185)$$

$$Q(\varphi) = Q \frac{\varphi}{2\pi} \quad (186)$$

$$\frac{Q\varphi}{2\pi} = \frac{gH}{\eta_h \omega} \int_{r_3}^r b(\varphi) \frac{dr}{r} \quad (187)$$

$$\varphi = \frac{2\pi Y}{\omega Q \eta_h} \int_{r_3}^r b(\varphi) \frac{dr}{r} \quad (188)$$

Natočení řezu spirály definovaného jako Bézierova plocha pro metodu $rv_u = konst.$, (POCHYLÝ, 1991):

$$\varphi = \frac{2\pi Y}{\omega Q \eta_h} \int_0^1 \int_0^1 [|\bar{g}_1|^2 |\bar{g}_2|^2 - (\bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2)^2]^{\frac{1}{2}} \frac{du^1 du^2}{r} \quad (189)$$

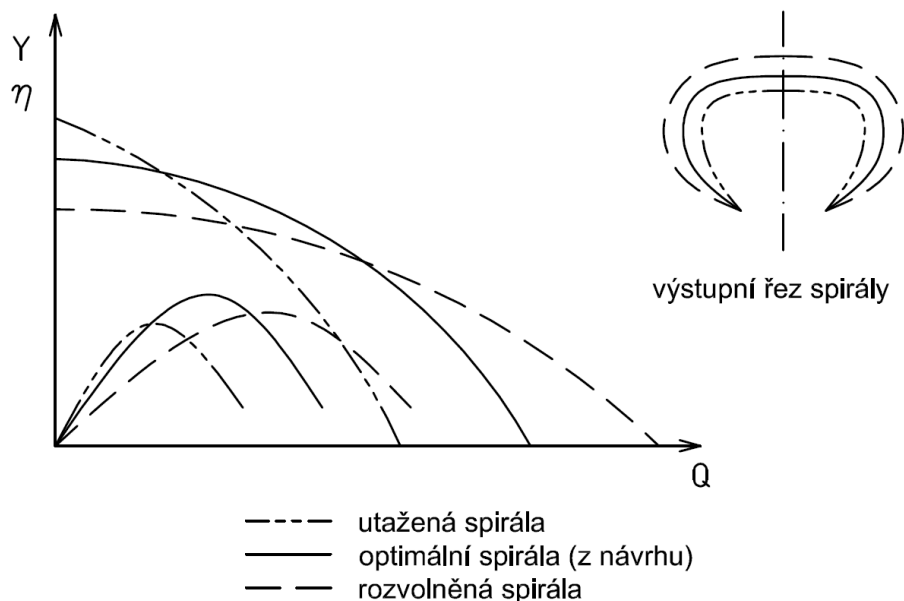
Při natáčení jednotlivých řezů bylo použito obecného vztahu (177) popisujícího rotaci bodu okolo počátku.

6.3.2.1 Korelační koeficient

S přihlédnutím k vzorcům (141), (180) a (181) se spirála při použití metody $v_{stř} = konst.$ vždy natočí na posledním řezu o 360° .

Ze vzorce natočení (189) je však patrné, že spirála navržená na základě předpokladu $rv_u = konst.$ se na svém posledním řezu natočí o úhel odpovídající zadaným parametrům.

Vyskytují se případy, kdy je třeba navrhnut spirálu volnějši nebo utaženějši, než by bylo optimální. Při takovém zadání by však program vypočítal spirálu přetočenou nebo nedotočenou.



Obr. 76 Vliv spirály na charakteristiku čerpadla, (HALUZA, 2006/2007)

Problém řeší korelační koeficient, kterým jsou roznásobeny úhly natočení jednotlivých řezů spirály, aby se poslední řez otočil vždy o 360° .

$$\varphi_i = \varphi_i \frac{2\pi}{\varphi_{end}} \quad (190)$$

Uživateli je zobrazován v rámci informací o návrhu koeficient k :

$$k = \frac{\varphi_{end}}{2\pi} \quad (191)$$

Hodnota je inverzní od dosazované z důvodu snadnější rozlišitelnosti informace.

- $k > 1$ Rozvolněná spirála, bez koeficientu by se poslední řez v návrhu přetočil.
- $k < 1$ Utažená spirála, bez koeficientu by se poslední řez v návrhu nedotočil.

U spirály BETA 10 jsou metody $v_{stř} = konst.$ a $rv_u = konst.$ rovnocenné pro $k \cong 1,618$.

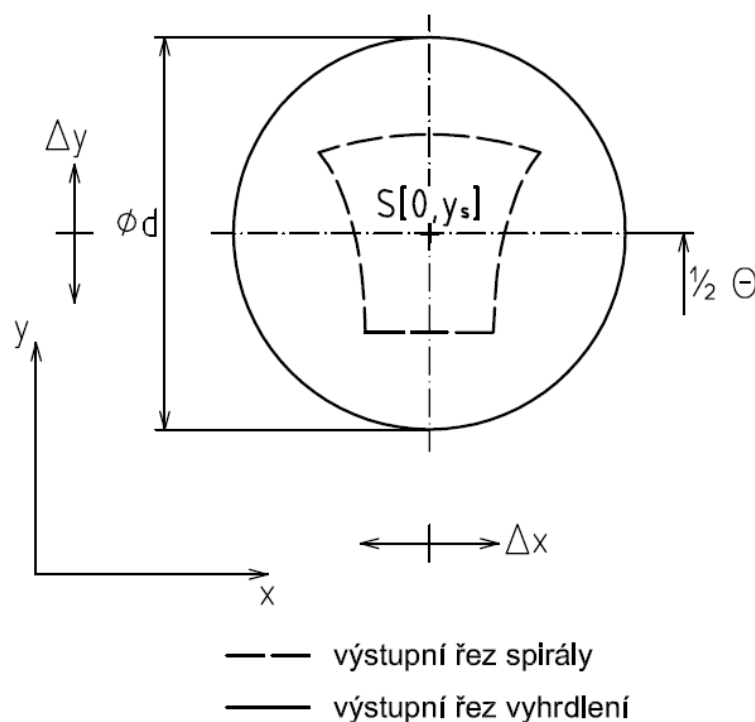
6.4 Vyhrdlení spirály

Čerpadlo je ve většině případů na vstupu i výstupu napojeno k hydraulickému systému potrubím s kruhovým průřezem. Vstupní prostor čerpadla není v této práci řešen. Jako výstupní difusor je použita spirála, kdy její výstupní průřez může nabývat rozličných tvarů. Ať už se však jedná o čtverec, obdélník nebo matematicky složitě popsateľné tvary, viz Obr. 85, musí být postupně upraven na kruhový tvar. Spolu se změnou průřezu dochází obvykle i ke změně směru proudění kapaliny. Obě operace jsou prováděny ve výstupní části spirály zvané vyhrdlení. Výstupní průměr i délka vyhrdlení bývají předepsány normou. Průtočná

plocha je upravována s cílem získat vhodnou rychlost proudění. Přeměna velikosti průtočné plochy a směru proudění musí být provedena s minimálními hydraulickými ztrátami.

Existuje řada řešení postavených na použití splajnů, polynomů, atd., vyznačujících se různou kvalitativní úrovní. Obvyklou slabinou je nedostatečně plynulá změna okamžité rychlosti částice. Výsledkem bývá vložení přechodové části mezi vyhrdlení a spirálu. Poté však již spirála neopisuje celých 360° a její hydraulické vlastnosti se zhoršují.

Zde představený návrh vyhrdlení spirály zajišťuje plynulé natočení proudící kapaliny. Řešení je dosaženo geometricky, vzájemnou tečností dvou kružnic. Proudění mění svůj směr v inflexním bodě ι . Změna tvaru průřezu se děje lineárně po celé délce vyhrdlení. Hladkost přeměny tvaru je ovládána počtem řezů vyhrdlení (mezikroky změny tvaru). Z parametrů vyhrdlení je volitelný jeho průměr a výška nad horizontální osou spirály. Případné vyosení napojení na potrubí lze určit v souřadných osách x a y . Lze navrhnout i krajní varianty natočení celého tělesa o 0° a $+90^\circ$.



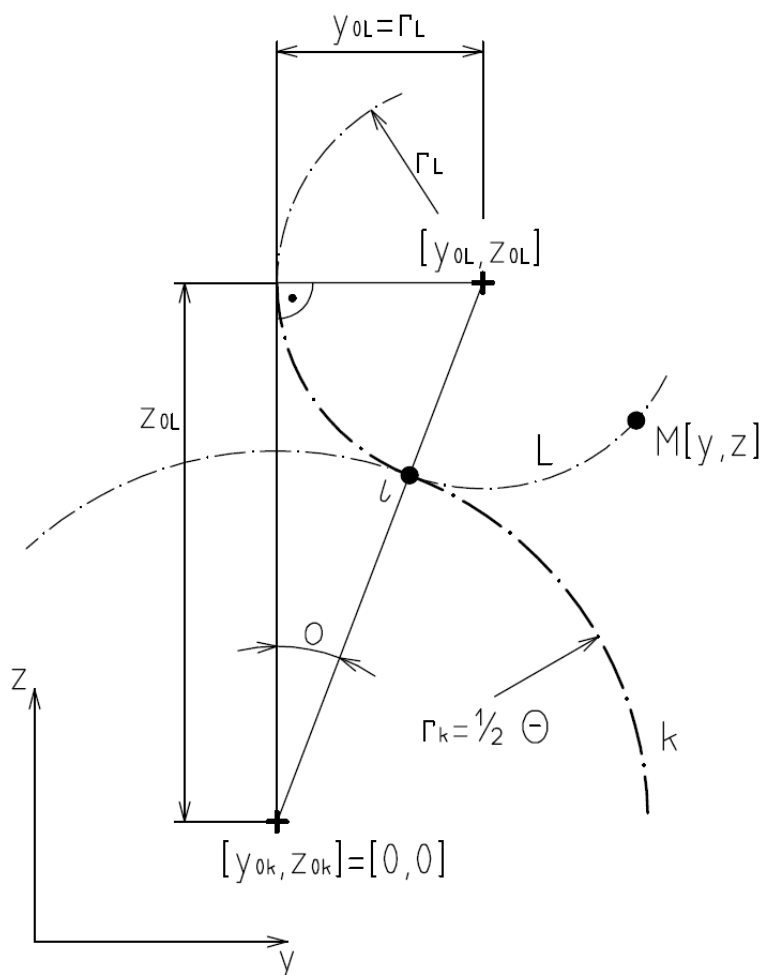
Obr. 77 Klíčové řezy vyhrdlení

Při návrhu prostorového tvaru spirály je obvyklé ji mírně natáčet proti směru proudění kapaliny o tolik stupňů, aby nos spirály protínala její vertikální osa. Obvykle bývá voleno $\sigma = \sim 20^\circ$. Nos spirály zde však není při návrhu uvažován a spirála je přesto natočena o úhel σ . Kapalína proudící spirálou opisuje 360° a vstup spirály bez uvažování nosu splývá s jejím výstupním řezem. Takové řešení je samozřejmě z hlediska výroby naprosto neproveditelné. Navržené řezy spirálou a vyhrdlením spolu s vodícími křivkami jsou však upraveny pro export do 3D modeláře. Tam je importovaná drátová konstrukce převedena na pevné těleso, na kterém již lze nos spirály snadno vymodelovat. Úprava je spojena s úbytkem materiálu modelu a správně navržený nos se tím posouvá do žádané polohy na vertikální ose spirály.

6.4.1 Vyhrdlení na základě předepsaného natočení tělesa spirály

Úhel natočení spirály o je základním parametrem, od kterého se odvíjí ostatní rozměry.

Kružnice k popisuje myšlenou dráhu středu posledního řezu vyhrdlení. Kružnice L popisuje dráhu bodu M . Její část tvoří vodící křivku středu vyhrdlení. Kružnice jsou navzájem tečné. Směr proudění se mění v inflexním bodě ι . Střed výstupního řezu vyhrdlení je protínán vertikální osou spirály, jeho souřadnice jsou $[x, y, z] = [0, 0, z_{0L}]$.



Obr. 78 Vodící křivka středu vyhrdlení bez posunu

Při známém úhlu o je pro popsání vodící křivky středu vyhrdlení třeba znát hodnotu r_L z níž lze odvodit y_{0L}, z_{0L} .

$$\boxed{y_{0L} = r_L} \quad (192)$$

$$\tan o = \frac{r_L}{z_{0L}} \quad (193)$$

$$\boxed{z_{0L} = \frac{r_L}{\tan o}} \quad (194)$$

$$\sin o = \frac{r_L}{\left(\frac{\Theta}{2} + r_L\right)} \quad (195)$$

$$\frac{1}{\sin o} = \frac{\Theta}{2} + \frac{r_L}{r_L} \quad (196)$$

$$r_L = \frac{\Theta}{2\left(\frac{1}{\sin o} - 1\right)} \quad (197)$$

6.4.2 Vyhrdlení na základě předepsané výšky vyústění

Výška napojení vyhrdlení na potrubí z_{0L} je základním parametrem.

Pro popsání vyhrdlení je třeba odvodit úhel natočení o . Předpoklady o geometrii napojení, viz Obr. 78, a proudění kapaliny zůstávají stejné jako v 6.4.1.

$$o = \text{atan}\left(\frac{r_L}{z_{0L}}\right) \quad (198)$$

$$\sqrt{r_L^2 + z_{0L}^2} = \frac{\Theta}{2} + r_L \quad (199)$$

$$r_L^2 + z_{0L}^2 = \frac{\Theta^2}{4} + 2\frac{\Theta}{2}r_L + r_L^2 \quad (200)$$

$$r_L = \frac{z_{0L}^2 - \frac{\Theta}{4}}{\Theta} \quad (201)$$

6.4.3 Hraniční případ – $o = 0^\circ$

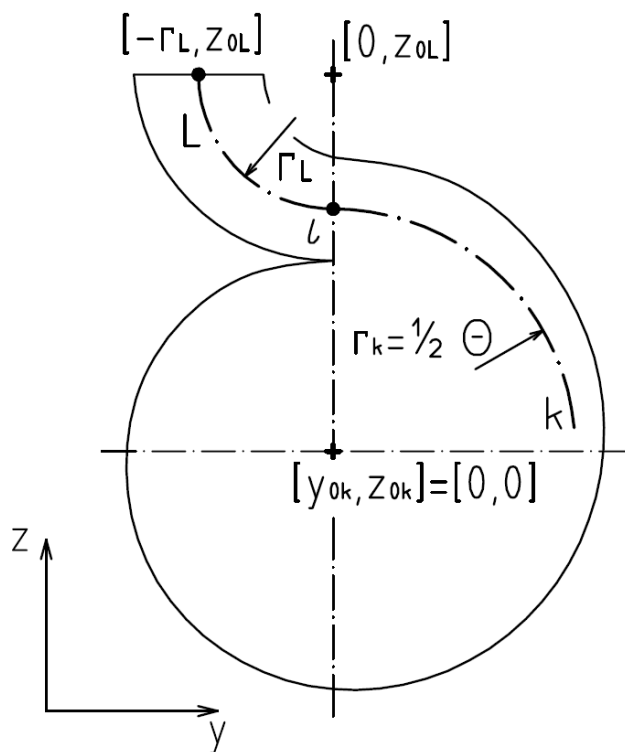
Těleso spirály není natočeno, axiální osa výtlačného potrubí je rovnoběžná s vertikální osou spirály. Vyhrdlení je modelováno na základě výšky jeho napojení na potrubí z_{0L} a nulové hodnoty o . Napojení na výtlačné potrubí musí být ve směru osy z ve větší vzdálenosti od středu spirály, než nejvzdálenější bod pláště spirály.

$$z_{0L} > 0 \quad (202)$$

$$o = 0^\circ \quad (203)$$

$$y_{0L} = 0 \quad (204)$$

$$\boxed{r_L = z_{0L} - \frac{\Theta}{2}} \quad (205)$$



Obr. 79 Hraniční případ – $\sigma = 0^\circ$

6.4.4 Hraniční případ – tangenciální spirála

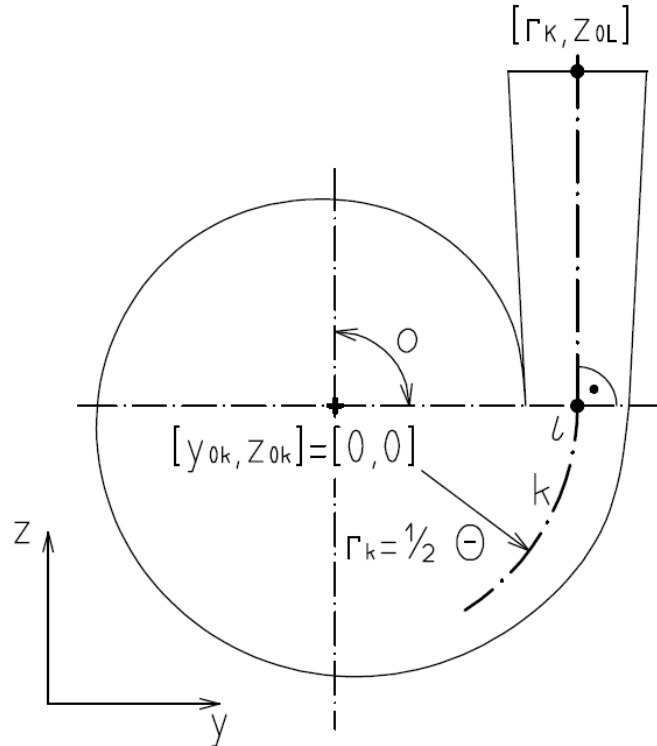
Těleso spirály je natočeno o $+90^\circ$, axiální osa výtlačného potrubí je rovnoběžná s vertikální osou spirály. Vyhrdlení je modelováno na základě výšky jeho napojení na potrubí z_{0L} a $\sigma = 90^\circ$. Napojení na výtlačné potrubí nemusí být ve směru osy z ve větší vzdálenosti od středu spirály, než nejvzdálenější bod pláště spirály. Musí však být v kladné oblasti osy z .

$$\boxed{z_{0L} > 0} \quad (206)$$

$$\boxed{\sigma = 90^\circ} \quad (207)$$

$$y_{0L} = \frac{\Theta}{2} \quad (208)$$

$$r_L = \emptyset \quad (209)$$



Obr. 80 Hraniční případ – tangenciální spirála

6.4.5 Posun v ose x

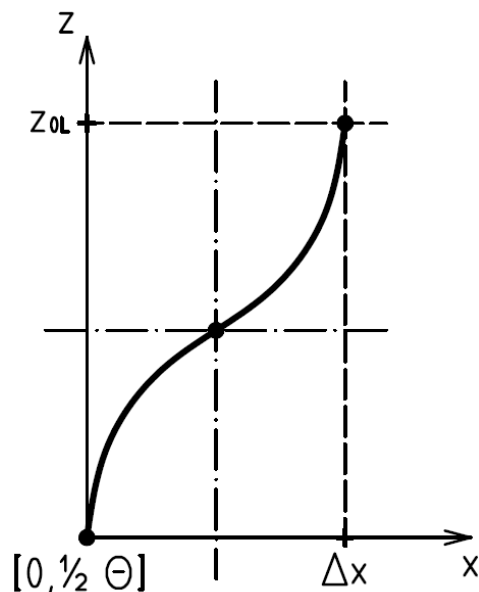
Při hledání nejlepšího postupu byly vyzkoušeny různé přístupy. Vodící linie řezů vyhrdlení byla například modelována jako část elipsy, paraboly, atd. Nakonec se nejvhodnějším z hlediska plynulé návaznosti tělesa spirály a vyhrdlení ukázal výpočet založený na interpolaci kubického splajnu třemi známými body. Řešení je provedeno v poli souřadnic z , kde v rozmezí $\langle z_{0k}, z_{0L} \rangle$ jsou rovnoměrně rozloženy jednotlivé řezy vyhrdlení. Výsledkem je vektor obsahující velikosti posunutí ve směru x pro jednotlivé řezy. Nové umístění výstupního řezu vyhrdlení má souřadnice $[x, y, z] = [\Delta x, 0, z_{0L}]$.

Aplikace posunu není závislá na volbě řešení natočením spirály nebo výškou vyústění. Velikost Δx musí být v poměru k délce vyhrdlení malá. V opačném případě dochází k deformaci tvaru modelovaného vyhrdlení, která by způsobovala nežádoucí místní ztráty.

Souřadnice známých bodů:

$$x = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Delta x}{2} & \Delta x \end{bmatrix} \quad (210)$$

$$z = \begin{bmatrix} \frac{\Theta}{2} & \frac{z_{0L} - \frac{\Theta}{2}}{2} & z_{0L} \end{bmatrix} \quad (211)$$



Obr. 81 Vodící křivka středu vyhrdlení s posunem Δx

6.4.6 Posun v ose y

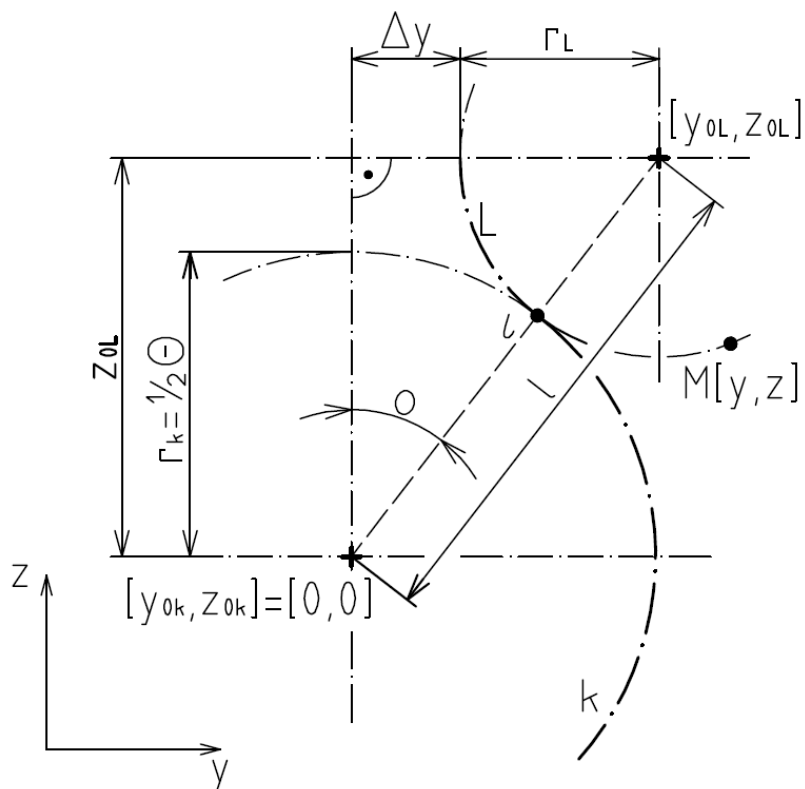
Výška napojení vyhrdlení na potrubí z_{0L} a posunutí výstupního řezu vyhrdlení Δy jsou základními parametry, od kterých se odvíjí ostatní rozměry.

Kružnice k popisuje myšlenou dráhu středu posledního řezu vyhrdlení. Kružnice L popisuje dráhu bodu M . Její část tvoří vodící křivku středu vyhrdlení. Kružnice jsou navzájem tečné. Směr proudění se mění v inflexním bodě ι . Střed výstupního řezu vyhrdlení je ve směru y posunut o Δy , jeho nové souřadnice jsou $[x, y, z] = [0, \Delta y, z_{0L}]$.

Povolená oblast volby Δy :

$$\Delta y \in ((r_k - z_{0L}), r_k) \wedge \Delta y \neq 0 \quad (212)$$

$$y_{0L} = \Delta y + r_L \quad (213)$$


 Obr. 82 Vodící křivka středu vyhrdlení s posunem Δy

$$z_{0L}^2 + (\Delta y + r_L)^2 = l^2 \quad (214)$$

$$z_{0L}^2 + (\Delta y + r_L)^2 = (r_k + r_L)^2 \quad (215)$$

$$\boxed{r_L = \frac{z_{0L}^2 + \Delta y^2 - r_k^2}{2(r_k - \Delta y)}} \quad (216)$$

$$\tan o = \frac{\Delta y + r_L}{z_{0L}} \quad (217)$$

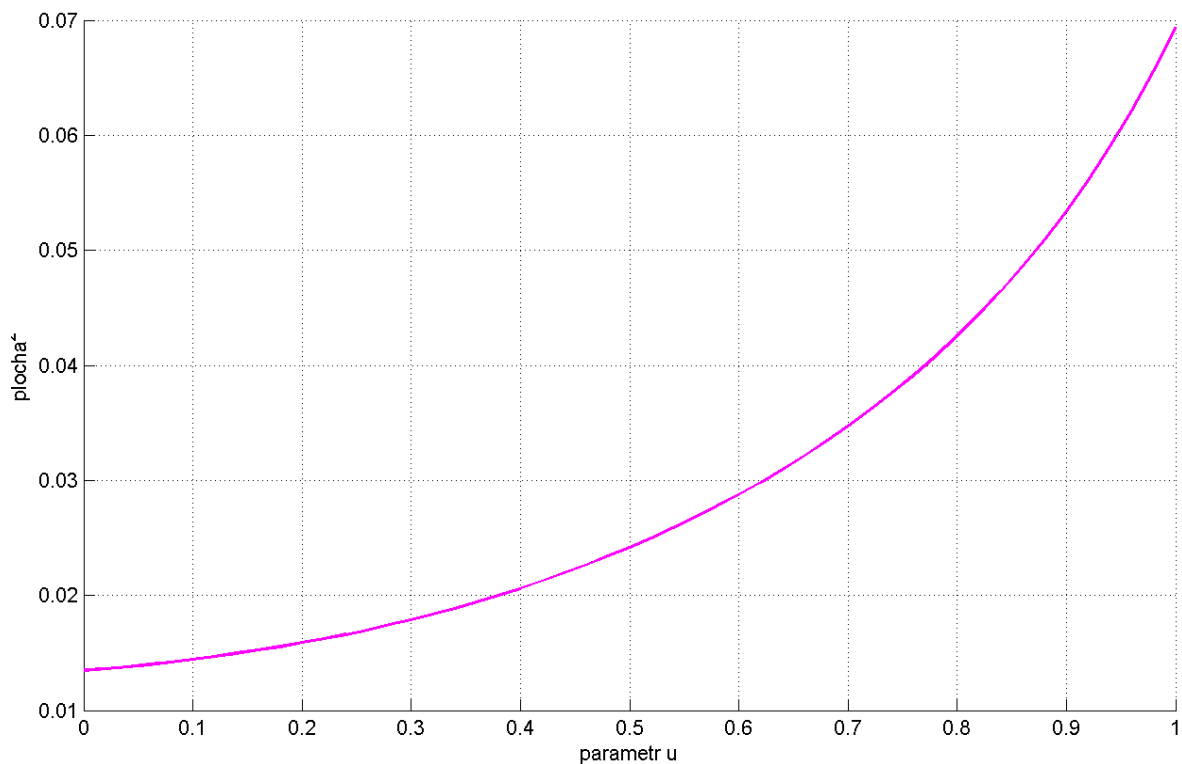
$$\boxed{o = \text{atan}\left(\frac{\Delta y + r_L}{z_{0L}}\right)} \quad (218)$$

6.5 Monitor návrhu spirály

6.5.1 Průtočná plocha

Monitor vykresluje nárůst plochy po jednotlivých meridiálních řezech spirály. Pracuje na stejném principu jako obdobná kontrola návrhu oběžného kola. Využívána je rovnice (146).

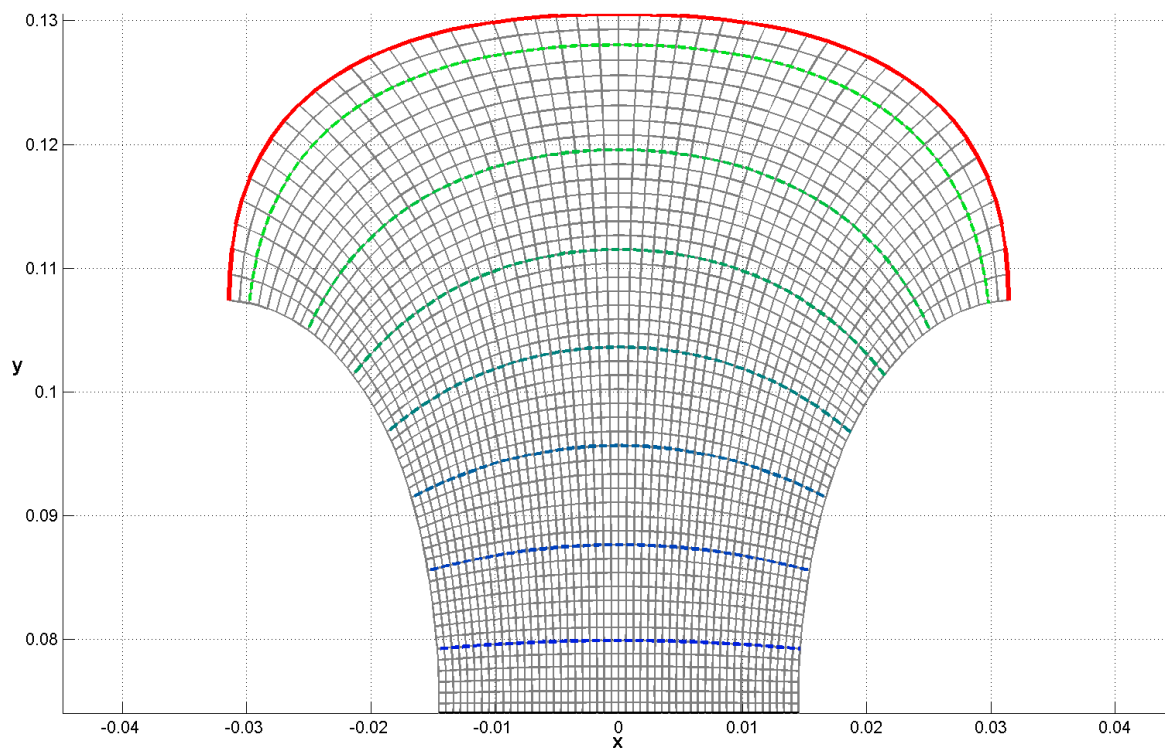
Nárůst průtočné plochy by měl být pokud možno plynulý a rovnoměrný, stejně jako je rovnoměrně dodávána čerpaná tekutina z oběžného kola. Během návrhu je speciálně pro spirálu k dispozici aktuální výpis velikosti upravované plochy.



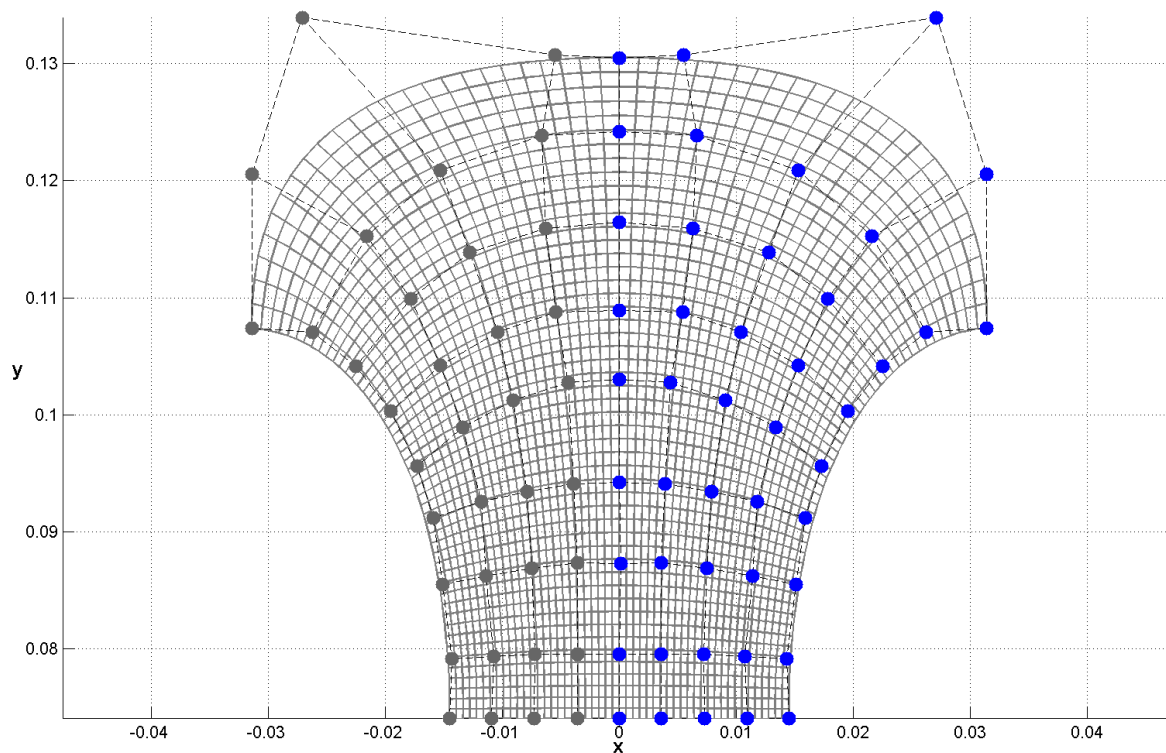
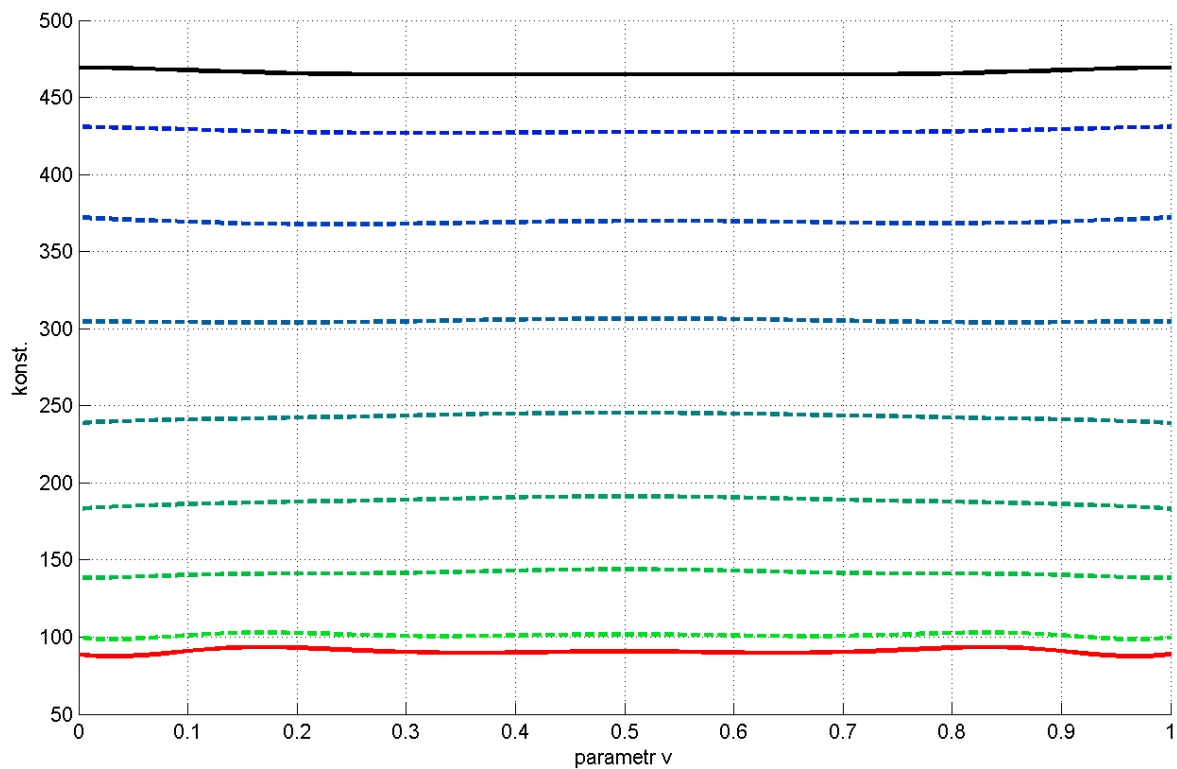
Obr. 83 Průběh průtočné plochy řezy spirálou čerpadla BETA 10

6.5.2 Konstanta metody

Jak bylo zdůvodněno dříve, při návrhu výstupního meridiálního řezu spirály je využívána pouze Francisova metoda. Monitorem je sledován výsledek vztahu (149) na všech průsečících křivkách Bézierovy plochy.



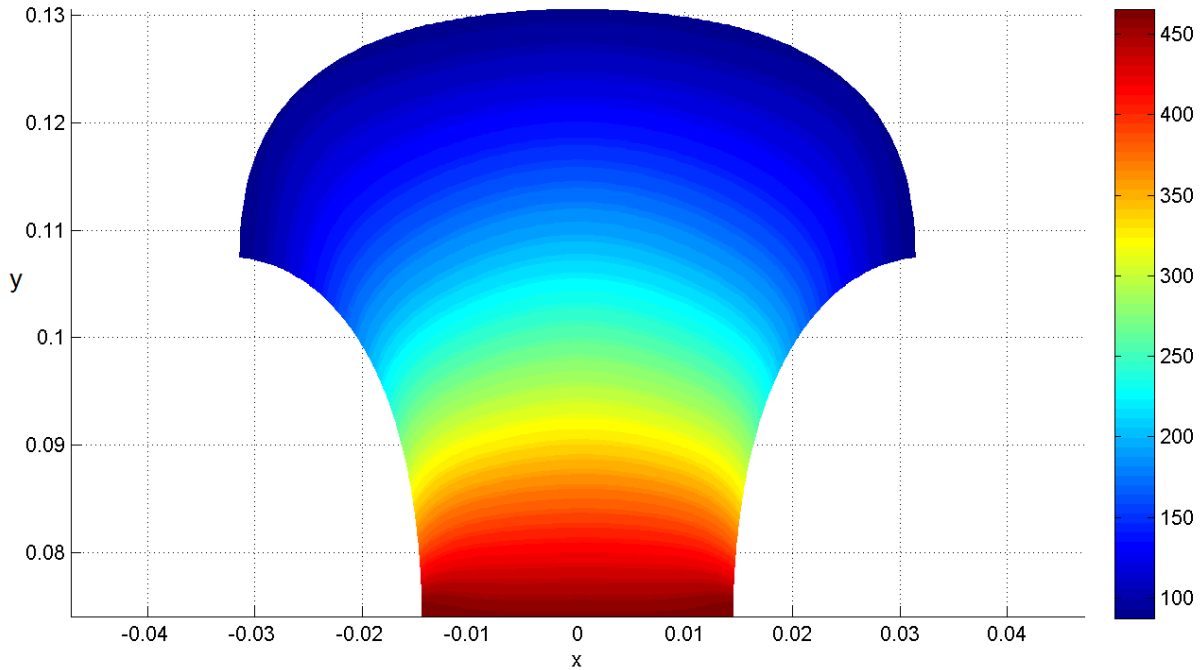
Obr. 84 Sledované plochy v meridiálním řezu spirály BETA 10, $u \times v = [60 \times 40]$



Obr. 85 Průběh hodnoty konstanty a rozložení řídících bodů

6.5.3 Meridiální rychlost

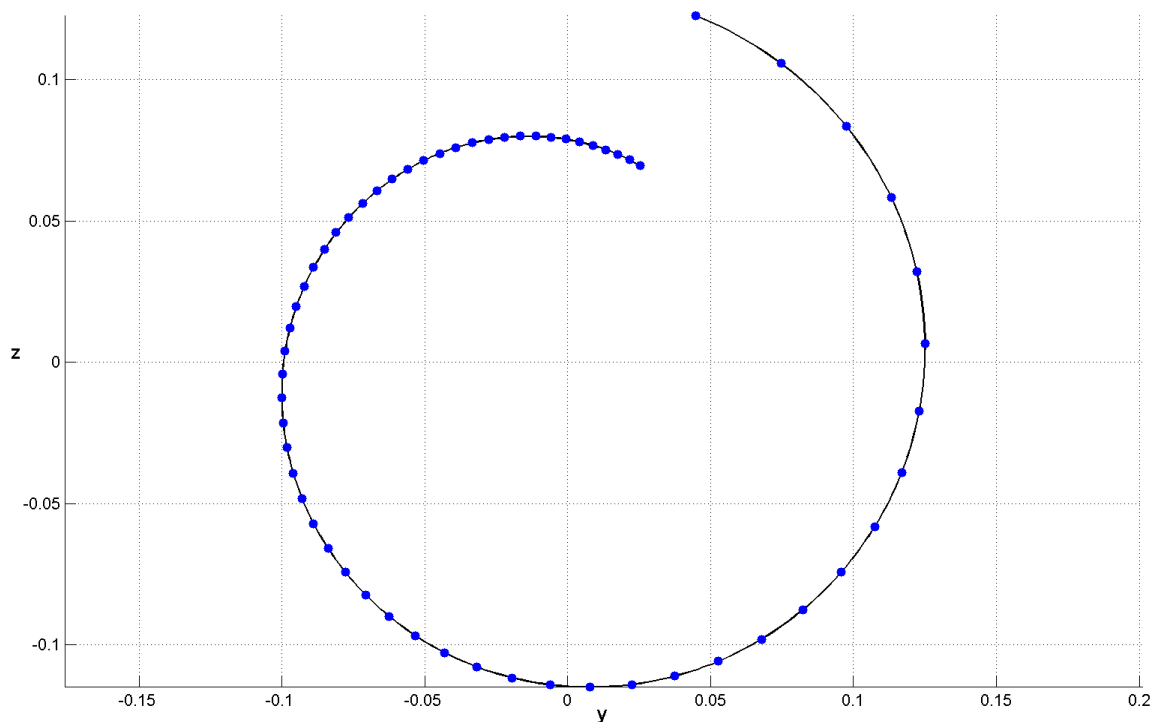
Výpočet meridiální rychlosti na průsečících křivek Bézierovy plochy využívá vzorce (139). Podle předpokládaného charakteru proudění uvnitř spirály meridiální rychlost od vstupu směrem k vnějšímu plášti postupně klesá.



Obr. 86 Pole poměrných meridiálních rychlostí uvnitř spirály BETA 10

6.5.4 Bokorys spirály

Náhled na průběh spirály v ose slouží k vizuální kontrole hladkosti jejího stoupání.



Obr. 87 Bokorys spirály, $v_{stř} = konst.$

6.5.5 Stoupání spirály

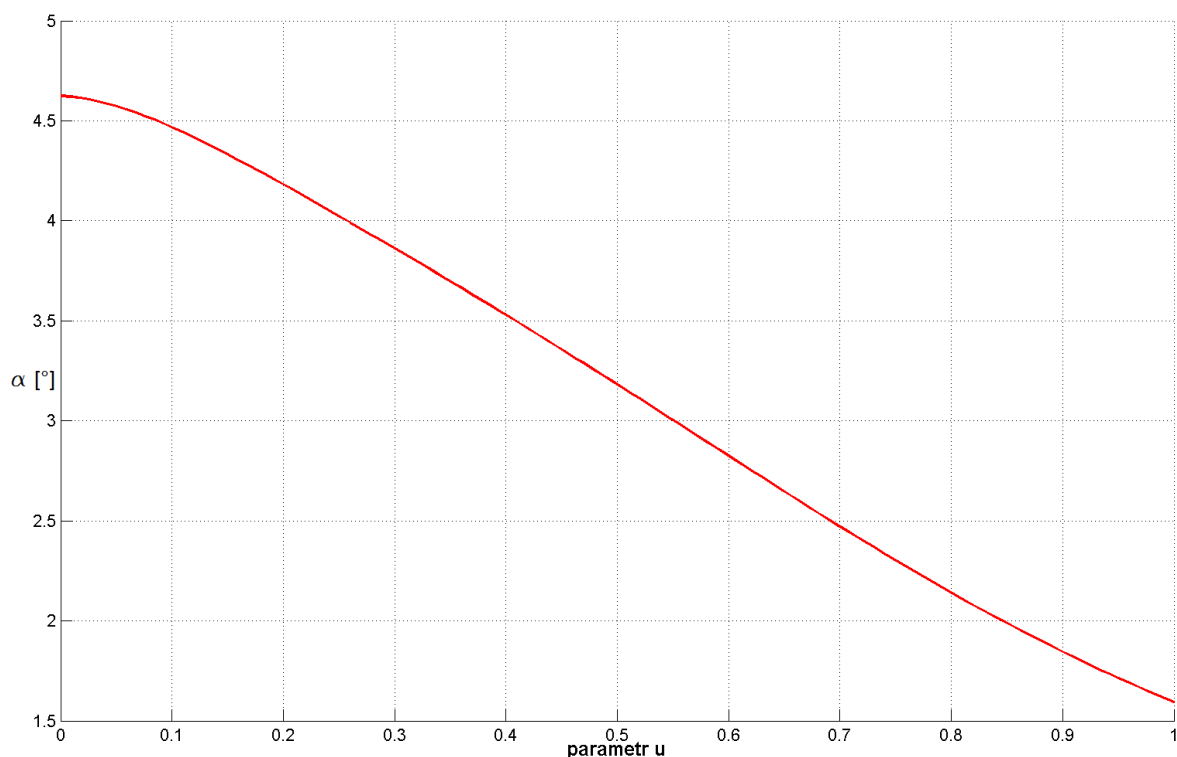
Úhel α stoupání spirály koresponduje s úhlem α_2 kapaliny na výstupu z oběžného kola. Vhodnou úpravou jednotlivých řezů spirály, a tím i jejího stoupání, lze ovlivnit vzájemnou vazbu spirály a oběžného kola se zásadním dopadem na celkovou hydraulickou účinnost stroje.

Úhel je při návrhu kontrolován v ose spirály.

Stoupání spirály, (POCHYLÝ, 1991):

$$\cot \alpha = \frac{Y}{\omega \eta_h} \frac{2\pi b_3}{Q} \frac{|\bar{g}_1(u^1, u^2)|}{|\bar{g}_1(u^1, 0)|} \quad (219)$$

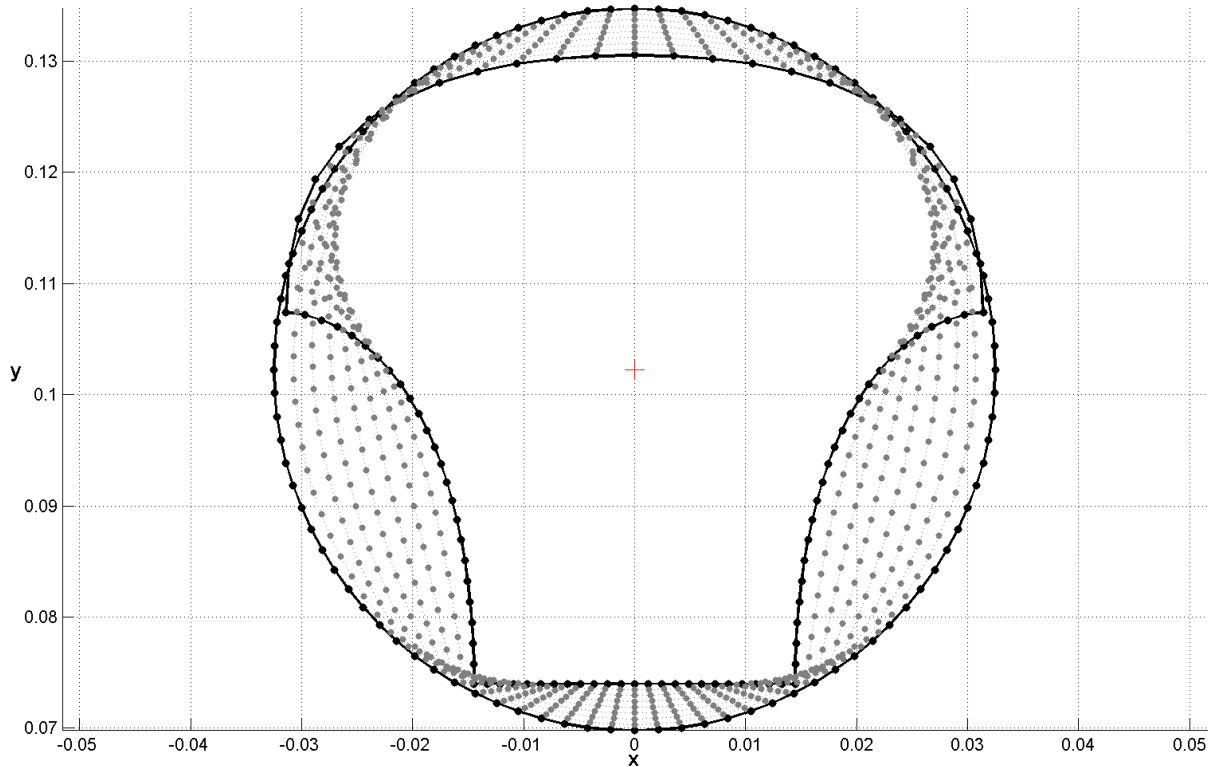
$$\alpha = \operatorname{atan} \left[\frac{\eta_h Q n |\bar{g}_1(u^1, 0)|}{g H b_3 |\bar{g}_1(u^1, u^2)|} \right] \quad (220)$$



Obr. 88 Stoupání spirály, $v_{stř} = konst.$

6.5.6 Průtočné průřezy

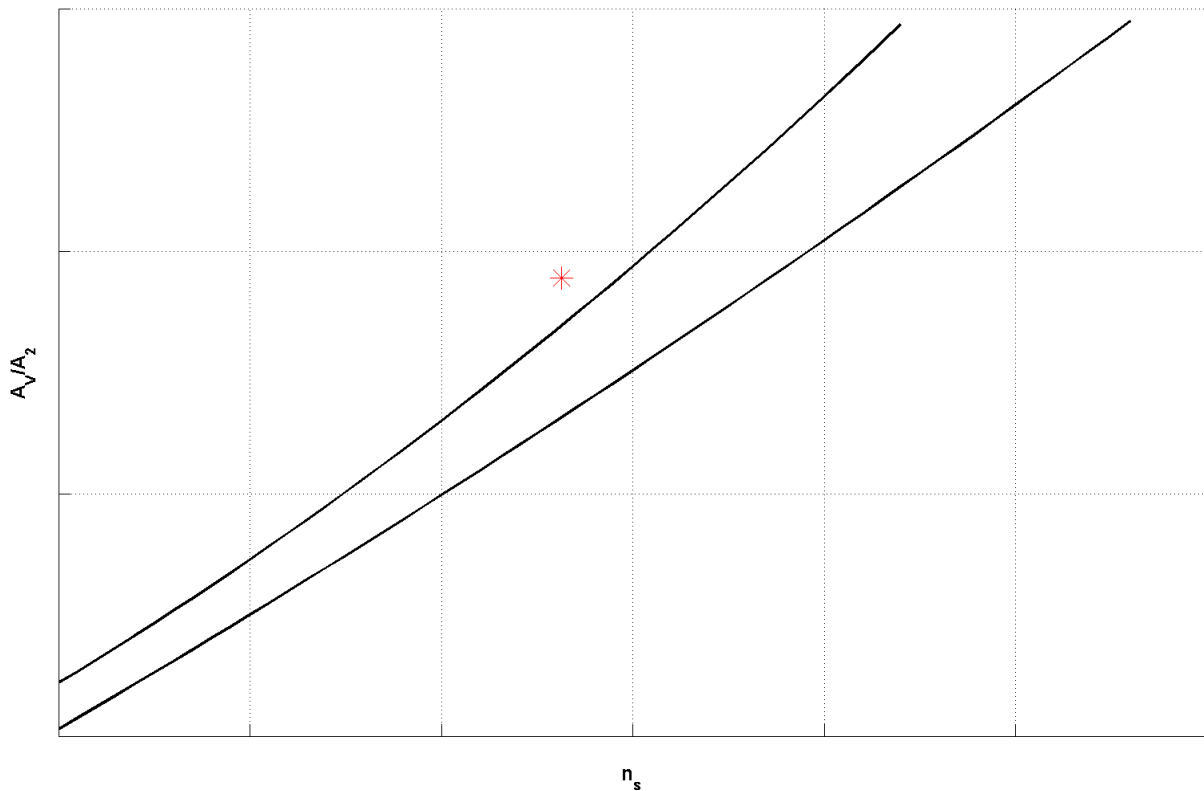
Zobrazené řezy slouží ke kontrole hladkosti změny tvaru vyhrdlení spirály. Na základě poskytované informace lze měnit počet zadaných řezů vyhrdlení, případně tvar a velikost výstupu spirály nebo vstupu výtlačného potrubí.



Obr. 89 Lineární změna tvaru průtočného průřezu vyhrdlení, 9 meziřezů

6.5.7 Statistický graf

Na základě zadané hodnoty A_{II} , určené rovnicí (81), dokáže program zobrazit aktuální umístění sestavy oběžné kolo – spirála ve statistickém grafu A_{VSD}/A_{II} . V něm jsou shrnuty výsledky stovek měření získávaných v průběhu dlouhých let od mnoha různých úspěšných odstředivých čerpadel, (HALUZA, 2006/2007). Cílem je navrhnout plochu výstupního řezu spirály, jež se bude nacházet v doporučené oblasti nejlepší hydraulické účinnosti. Postup je využitelný při návrhu založeném na metodě $v_{stř} = konst.$

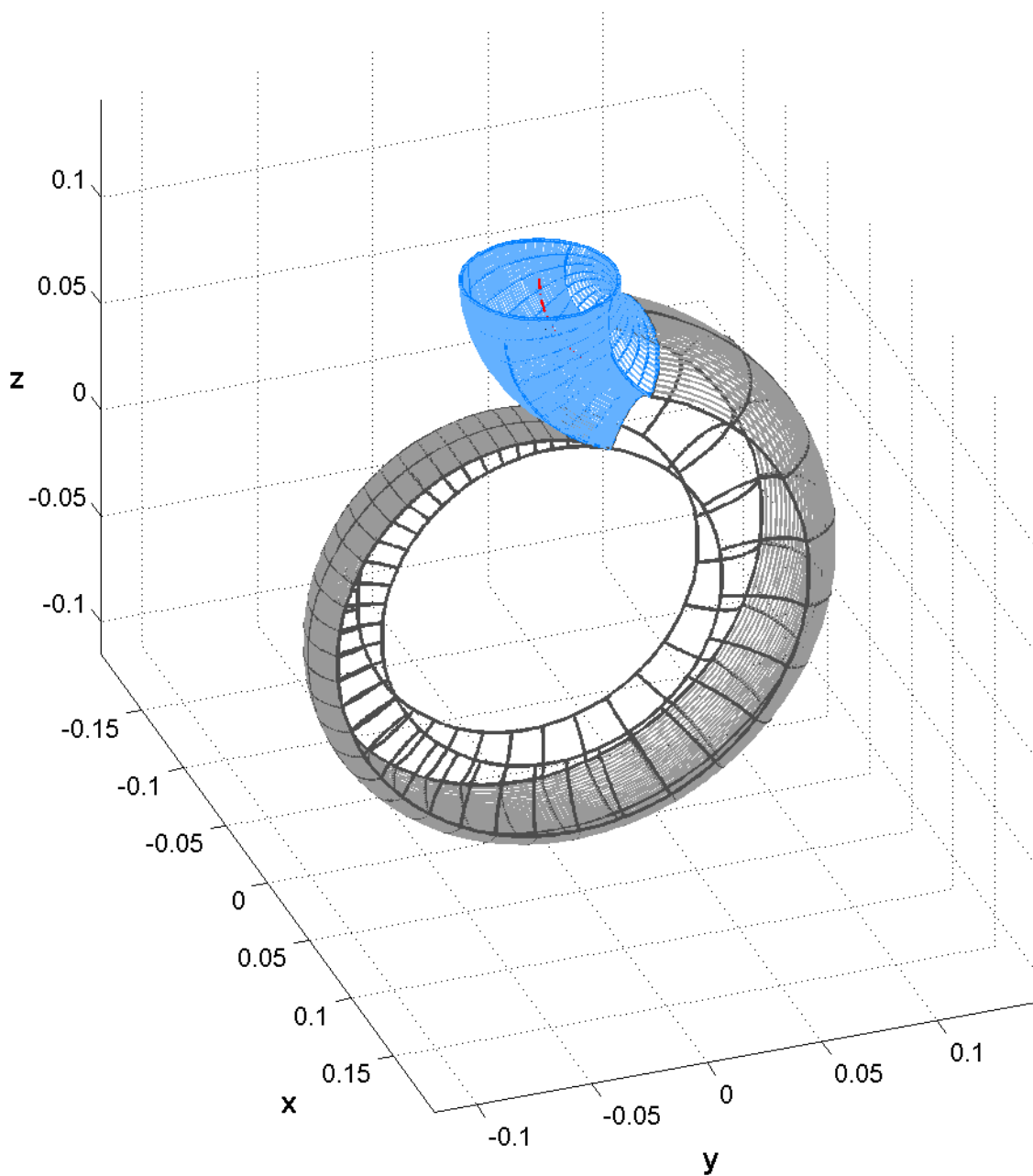


Obr. 90 Statistika oběžné kolo – spirála čerpadla BETA 10

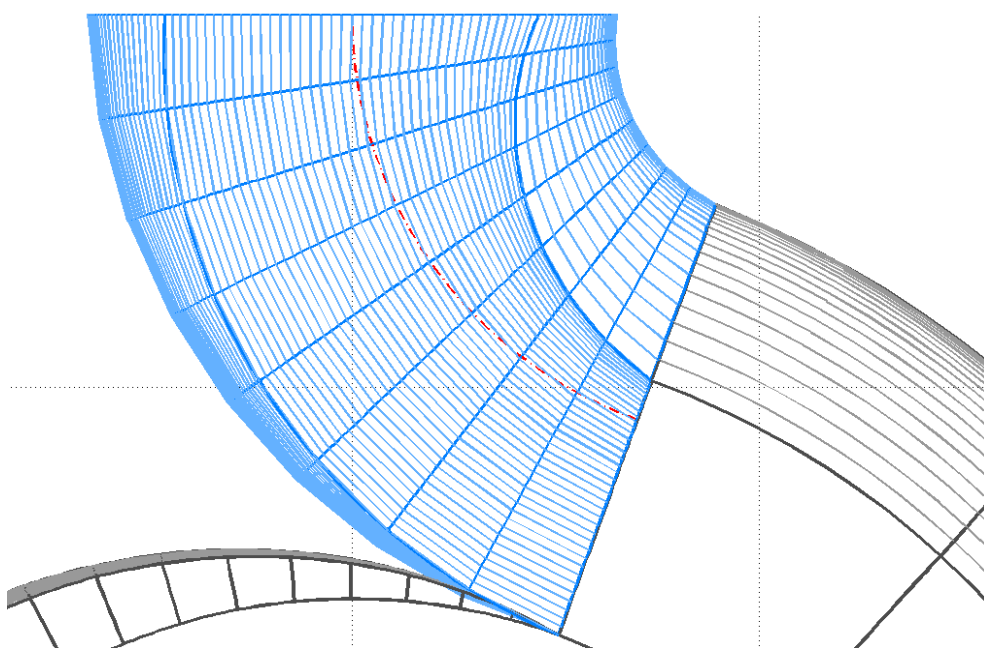
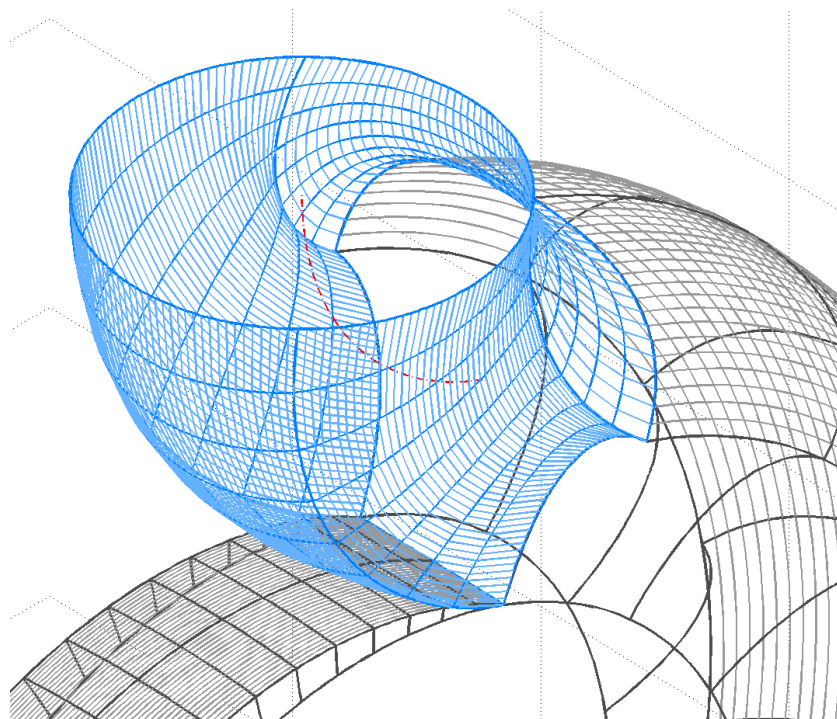
Z Obr. 90 je patrné, že BETA 10 se nachází mírně nad doporučeným pásmem. Taková výchylka nemusí ve výsledku nutně znamenat, že je návrh špatný. V případech, kdy je nutné dodržet konstrukční omezení (výška napojení vyhrdlení, vzdálenost patky čerpadla a osy pohonu, průměr výstupního potrubí, atd.) je často obtížné splnit všechny předpoklady dokonalého hydraulického návrhu.

6.5.8 3D pohled

Prostorový pohled poskytuje reálný náhled na třírozměrný model spirály a vyhrdlení (pokud je zadáno). Dává tak možnost opravit nedostatky koncepce, které by se jinak projeví až po importu modelu do 3D modeláře.



Obr. 91 Celkový pohled na spirálu s vyhrdlením BETA 10

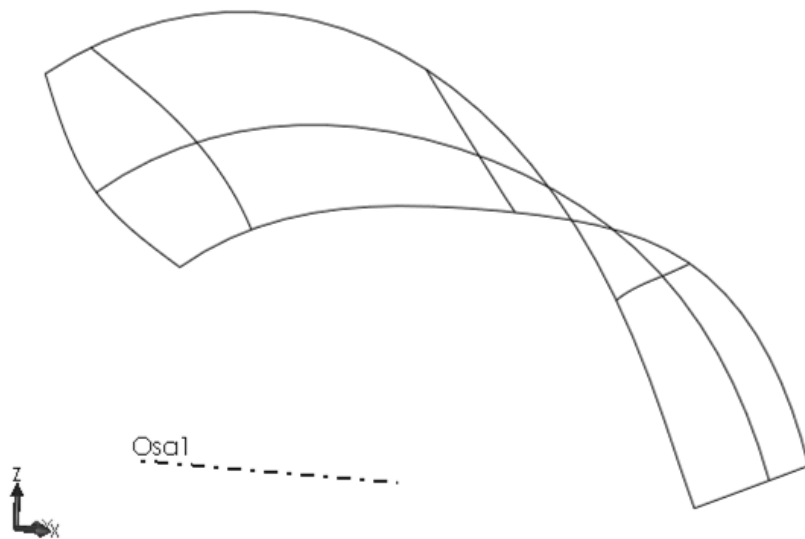


Obr. 92 Detaily vyhrdlení BETA 10

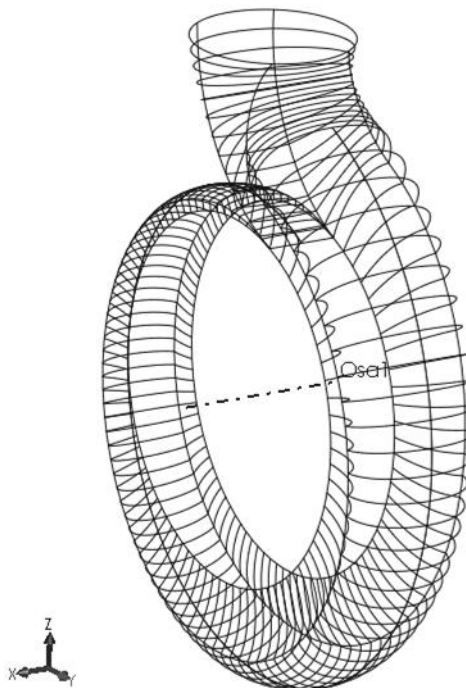
7 Aplikace výsledků

Výstupy z programu jsou vytvářeny ve formátu *txt*. Je možné zálohovat změny souřadnic bodů zadávací matice a vygenerované sítě křivek Bézierovy plochy. Pro další výpočtové využití lze uchovat hodnoty tečných vektorů a také pole relativních velikostí meridiálních rychlostí v průsečících křivek Bézierovy plochy.

Nejdůležitějšími výstupními daty jsou křivky popisující tvary navržených těles. Jsou opět ukládány ve formátu *txt* a upraveny pro snadný import do programu sloužícího k tvorbě prostorových modelů. S jejich pomocí lze snadno vytvořit tělesa představující objemy kapaliny uvnitř průtočných ploch jako vstupní data do programů simulujících proudění tekutiny. Také je možné vypracovat modely jednotlivých součástí čerpadla pro tisk na 3D tiskárně a ty následně využít při experimentech.



Obr. 93 Ukázka vodících křivek lopatky importovaných v programu SolidWorks



Obr. 94 Ukázka vodících křivek spirály importovaných v programu SolidWorks

8 Popis programu

Jako programovací prostředí byl zvolen software MATLAB. Poskytuje širokou základnu matematických funkcí a numerických metod, které jsou prověřeny v řadě technických a fyzikálních aplikacích. Nabízí také výběr z řady grafických ovládacích prvků, které lze poměrně snadno upravovat. V toolboxu MATLAB Compiler jsou ze zdrojového kódu MATLAB generovány spustitelné soubory. Zdrojový kód je během tohoto procesu převáděn do programovacího jazyka C. Po instalaci doprovodného balíčku funkcí, který je vytvořen spolu se spustitelným souborem, lze software spouštět na jakémkoliv počítači i bez licence MATLAB.

Program, vytvořený pro návrh odstředivých čerpadel, je strukturován do nezávislých modulů. Využíván je programovací styl zvaný switch-case programming. S Bézierovými plochami je možné pracovat ve dvourozměrném a třírozměrném prostoru i bez nutnosti provádět fyzikální výpočty. Jemnost sítě křivek plochy není omezena, z definice, viz (83), však musí být minimálně 2×2 pole. Návrh čerpadla využívá obou prostorů, přičemž úprava meridiálních řezů je prováděna ve dvourozměrném. Tvar a struktura ploch jsou ovlivňovány jejich řídicími body. K přesunu bodů slouží počítačová myš. Při posunu je uplatněn způsob drag-and-drop. Jednotlivé metody používané při návrhu meridiálních řezů lze používat samostatně nebo v kombinaci v rámci jednoho návrhu. Výpočet hydrauliky není v tomto směru tedy nijak omezen.

Většina ovládacích prvků je soustředěna v hlavním okně. Mimo nich se zde zobrazují některé z klíčových monitorů návrhu potřebných při úpravách meridiálních řezů oběžného kola a spirály. Dále jsou využívána okna dvourozměrného a třírozměrného prostoru. V 2D okně probíhají úpravy dvourozměrných Bézierových ploch (meridiální řezy). Také je využíváno pro monitory návrhu lopatky oběžného kola a spirály s vyhrdlením. K přepínání mezi těmito monitory slouží záložky v horní části okna. V 3D okně lze upravovat třírozměrné Bézierovy plochy. Mimo toho se v něm zobrazují třírozměrné modely lopatky oběžného kola a spirály s vyhrdlením vykreslené na základě provedeného návrhu.

Vstupní data jsou načítána z textového souboru s definovanou strukturou. Již od začátku je určeno, popisují-li zadávací body Bézierovu plochu ve dvourozměrném nebo třírozměrném prostoru. Od počátku se také rozlišuje, jedná-li se o oběžné kolo, spirálu nebo pouhou úpravu Bézierovy plochy. Počet řídicích bodů musí být vyšší nebo roven čtyřem. Výběr okrajového bodu a bodů prvního řádku zadávací matice je libovolný. Jediná výjimka z tohoto pravidla existuje kvůli zrcadlení plochy u spirály. Soubor je strukturován do třech sloupců (souřadnice x, y, z), kde v záhlaví jsou uvedeny informace o zadávací matici. Při zadání spirály musí být doplněny některé základní informace o projektovaném čerpadle.

Konečné návrhy oběžného kola, lopatky a spirály jsou exportovány jako drátové modely pomocí křivek uložených v textových souborech. Ty lze pohodlně importovat do některého z existujících 3D modelářů. Aktuálně jsou veškerá výstupní data upravena pro využití speciálně v programu SolidWorks. Mimo křivek popisujících tvar součástí je možné textovými soubory exportovat další vypočtená data (např.: pole meridiálních rychlostí, tečné vektory křivek, atd.) ve formě matic.

9 Závěr

Pro modelování proudění v průtočných částech odstředivého čerpadla byla využita diferenciální geometrie aplikovaná v prostorových křivočarých souřadnicích. Předmětem řešení bylo radiální oběžné kolo s jednoduchou spirálou jako výstupním difusorem. Cílem bylo vytvořit komplexní návrh všech součástí stroje vyjma jeho vstupu. Vyvinutý matematický model vzájemnými vazbami spojil meridiální řez a lopatky oběžného kola, a dále oběžné kolo s výstupním difusorem.

K návrhu meridiálního řezu jsou obvykle používány dva teoretické přístupy. Jedná se o nevířivé (potenciální) proudění a vířivé proudění (Francisova metoda). Oba postupy mají v porovnání své výhody i nevýhody, které byly popsány v 4.4.2. Ve zde představeném kvazipotenciálním proudění, 4.4.2, se podařilo využít pozitivní a potlačit negativní vlastnosti obou zmíněných teorií proudění. Nejvhodnější typ kvazipotenciálního proudění pro řešení případ lze získat pomocí volby funkce vířivosti κ , viz (132) a (133). Vztahy sloužící k návrhu meridiálního řezu byly u všech tří přístupů definovány v třírozměrném křivočarém prostoru takovým způsobem, aby byly rovnocenně využitelné pro návrh oběžného kola i spirály. Při návrhu meridiálního řezu lze použít představené metody samostatně na celý řez nebo v kombinaci na jednotlivé jeho části.

Křivky tvořící vnitřní strukturu Bézierovy plochy obecně nejsou ortogonální. Matematický model však uvažuje vzájemně ortogonální tečné vektory. Byl vytvořen algoritmus vytvářející ortogonální síť na Bézierově ploše jakéhokoliv tvaru, viz (100). Na jeho základě již bylo možné definovat ortogonální vektory v jednotlivých průsečících křivek tvořících Bézierovu plochu, viz (101) a (102).

Vhodnou úpravou tvaru i vnitřní struktury meridiálního řezu lze získat požadované pole meridiálních rychlostí. To však u oběžného kola nepostihuje vliv tloušťky lopatky, kterou ale lze uvažovat od počátku návrhu nebo zahrnout pozdější snadnou korekcí. Změnou vnitřní struktury Bézierovy plochy, popisující meridiální řez spirály, je možné komplexně definovat její tvar. To umožňuje vyhovět vnějším prostorovým omezením, například vzdálenosti patky čerpadla od osy hřídele pohonu.

Výpočet lopatky oběžného kola je prováděn na základě tvaru meridiálního řezu a získaném poli meridiálních rychlostí. V rámci prvního návrhu jsou tvar lopatky a úhly opásání definovány polem úhlů β vypočítaným z hodnot zadaných na vstupní (β_1) a výstupní (β_2) hraně lopatky, viz (161) a (163). Úhly na vstupní hraně lopatky nemusí být vždy přesně známy. Pokud jsou vloženy informace o otáčkách oběžného kola a požadovaném průtoku, program je schopen chybějící údaje sám navrhnout, viz 5.1. Takovým způsobem získaná lopatka nemusí z nějakého důvodu vyhovovat požadavkům. Poté lze případně použít další způsob návrhu. Tvar lopatky potom závisí na zadaných hodnotách úhlů β na vstupní a výstupní hraně a navíc na úhlu opásání lopatky na krycím disku oběžného kola, viz (171).

Spirála čerpadla je modelována spolu se svým vyhrdlením. Lze použít metody $v_{stř} = konst.$ nebo $rv_u = konst.$ Tvar jejího výstupního průřezu není nijak omezen. Může se jednat o jednoduchý obdélníkový průřez nebo i matematicky velmi složitě popsatelný tvar, viz Obr. 84. Vyhrdlení mění směr toku kapaliny, proudící spirálou, se zachováním plynulé změny okamžité rychlosti částice, viz Obr. 78. Zároveň v něm lineárně přechází tvar výstupního meridiálního řezu spirály na tvar kruhový, viz Obr. 89. Výstupní řez vyhrdlení lze umístit v osách x, y, z tak, aby byly splněny konstrukční podmínky prostorového umístění čerpadla.

Vytvořený matematický model byl využit při programování návrhového softwaru v prostředí MATLAB. Získané modely součástí čerpadla lze exportovat pomocí *txt* souborů. Ty jsou následně využitelné v programech simulujících proudění anebo v 3D modelářích.

10 Citovaná literatura

BLÁHA, Jaroslav, BRADA, Karel. 1997. *Příručka čerpací techniky*. Praha : Vydavatelství ČVUT, 1997. str. 289. ISBN 80-01-01626-9.

BRDIČKA, Miroslav, SAMEK, Ladislav, SOPKO, Bruno. 2005. *Mechanika kontinua*. Praha : Academia, 2005. str. 800. ISBN 80-200-1344-X.

ČERKASSKIJ, V. M. 1984. *Nasosy, ventiljatory, kompressory*. Moskva : Eněrgoatomisdat, 1984. str. 405.

ERHART, F. 1954. *Kontrola dopravní výšky u oběžných kol radiálních, diagonálních a axiálních*. Praha : SVUSS, 1954. technická zpráva.

HALUZA, Miloslav. 2006/2007. *Hydraulické stroje (FSI-FHY)*. [přednáška]. 2006/2007.

KLAS, Roman. 2008. *Hydrodynamický návrh hydraulického stroje s vloženými lopatkami*. Brno : VUT Brno, Fakulta strojního inženýrství, 2008. str. 156. Disertační práce na Odboru fluidního inženýrství V. Kaplana Energetického ústavu, Vedoucí práce prof. Ing. František Pochylý, CSc..

KNÍŽAT, Branislav. 2002. *Štruktúra prúdenia na rozhraní obežného kola a difúzora hydrodynamického čerpadla a jej vplyv na priebeh výkonových parametrov*. Bratislava : STU v Bratislave, Strojnícka fakulta, 2002. habilitační práce.

KROUZA, V. 1956. *Čerpadla odstředivá a jim příbuzná*. Praha : Nakladatelství ČSAV, 1956. str. 363.

MathWorks, The. 2010. *MATLAB (R) The Language of Technical Computing*. [licencovaná instalace] 2010. Version 7.10.0.499 (R2010a).

MELICHAR, Jan, BLÁHA, Jaroslav. 2007. *Problematika soudobé čerpací techniky. Vybrané partie*. Praha : ČVUT, 2007. str. 265. ISBN 978-80-01-03719-5.

MELICHAR, Jan, BLÁHA, Jaroslav, BRADA, Karel. 2002. *Hydraulické stroje - Konstrukce a provoz*. Praha : ČVUT, 2002. str. 378. ISBN 80-01-02657-4.

NEUMAIER, Robert. 1994. *Hermetische Pumpen. Die ökologische Lösung bei Kreiselpumpen und rotierenden Vardrängerpumpem*. Hemsbach : Druckhaus BELTZ, 1994. str. 589. ISBN-3-929682-05-2.

PACIGA, Alexander, STRÝČEK, Oldrich, GANČO, Martin. 1984. *Čerpacia technika*. Bratislava : Alfa Bratislava - SNTL Praha, 1984. str. 224. 63-557-84.

PFLEIDERER, C. 1960. *Lapatočnije mašiny dlja židkostěj i garov*. Moskva : GNTIML, 1960. str. 667.

POCHYLÝ, František. 2010. *Meridiální rychlostní pole*. Brno : VUT Brno, 2010. výzkumná zpráva. VUT - EU13303 - QR - 31 - 10.

POCHYLÝ, František. 2010. *Modelování lopatky čerpadla*. [soubor]. 2010. [cit. říjen 2010].

POCHYLÝ, František. 2009. *Modelování proudění v ortogonální síti*. [soubor]. 2009. [cit. duben 2009]

POCHYLÝ, František. 1991. *Návrh spirály odstředivého čerpadla*. Brno : VUT Brno, Fakulta strojního inženýrství, 1991. Habilitační práce na Odboru hydraulických strojů a zařízení.

POCHYLÝ, František. 2008. *Odvození ortogonální sítě na Bézierově ploše*. [rukopis]. 2008. [cit. říjen 2008]

SLOUPENSKÝ, Zdeněk, POCHYLÝ, František. 2010. The meridian velocity flow field within the impeller. In *13th International Conference on Mechanical Engineering 2010, Bratislava, 21. October 2010*. Bratislava : STU SjF. 2010, str. S4-60-67. ISBN 978-80-227-3304-5.

STODOLA, A. 1922. *Dampf- und Gasturbinen. Mit einem Anhang über die Aussichten der Wärmekraftmaschinen*. 5. Berlin : Springer, 1922. str. 1111.

STRÝČEK, Oldrich. 1988. *Hydrodynamické čerpadlá*. Bratislava : Edičné stredisko SVŠT v Bratislave, 1988. str. 297. 85-343-88.

WAISSER, Zdeněk. 1976. *Vliv změny geometrických tvarů průtočné části odstředivých čerpadel na jejich parametry*. Praha : Academia, 1976. str. 140. 21-019-77.

WAISSER, Zdeněk. 1963. Výpočet dopravní výšky odstředivého čerpadla vzhledem k počtu lopatek oběžného kola. *Strojirenství*. 1963.

ZAMNICKI, V. A. 1986. *Impeller Pumps*. Leningrad : Mašinostrojenije, 1986. str. 334.

11 Seznam hlavních použitých značek

Eu	[1]	Eulerovo číslo (kritérium)
Re	[1]	Reynoldsovo číslo (kritérium)
Sh	[1]	Strouhalovo číslo (kritérium)
A_{II}	[m ²]	parametr
A_{VSD}	[m ²]	plocha výstupního řezu spirály
a_2	[m]	průměr kružnice vepsané do lopatkového kanálu
b	[m]	šířka kanálu oběžného kola
	[m]	šířka průtočné plochy spirály
D	[m]	průměr
d	[m]	průměr
f	[m ²]	plocha překrytá lopatkami
g	[m·s ⁻²]	gravitační zrychlení
\bar{g}	[1]	tečný vektor
H	[m]	dopravní výška čerpadla
	[m]	spád turbíny
i	[1]	počet sériově řazených prvků
j	[1]	počet paralelně řazených prvků
K	[1]	směrný parametr
k	[mm]	relativní drsnost
	[1]	korekční koeficient
l	[m]	délka profilu
m	[1]	počet řádků zadávací matice
n	[s ⁻¹], [min ⁻¹]	otáčky
	[1]	počet sloupců zadávací matice
n_b	[1]	rychloběžnost
	[s ⁻¹]	měrné (specifické) otáčky
n_q	[min ⁻¹]	měrné (specifické) otáčky
n_s	[min ⁻¹]	měrné (specifické) otáčky
P	[ks]	výkon
p	[Pa]	tlak
	[1]	Pfleidererův korekční faktor
Q	[m ³ ·s ⁻¹]	průtok
Q_n	[m ³ ·s ⁻¹]	jmenovitý průtok

r	[m]	poloměr
	[1]	prvek matice řídicích bodů
\bar{r}	[1]	směrový vektor
S	[m ²]	plocha průřezu
s	[m]	tloušťka lopatek
s_0	[m]	spára mezi stojícím a rotujícím povrchem
t	[s]	časový faktor periodických lokálních sil
u	[m·s ⁻¹]	unášivá (obvodová) rychlost
	[1]	parametr Bézierovy plochy
$u^{1..3}$	[1]	parametr u^1 až u^3
\bar{u}	[1]	bezrozměrný vektor
v	[m·s ⁻¹]	absolutní rychlost
	[1]	parametr Bézierovy plochy
\bar{v}	[1]	bezrozměrný vektor
w	[m·s ⁻¹]	relativní rychlost
w_2^5	[m·s ⁻¹]	relativní rychlost na sací straně výstupní hrany lopatky
x	[m]	charakteristický délkový rozměr
Y	[J·kg ⁻¹]	měrná energie
z	[1]	počet lopatek
z_D	[m]	parametr průběhu střední proudnice
α	[rad], [°]	úhel svíraný vektory absolutní a unášivé rychlosti
	[rad], [°]	stoupání spirály
β	[rad], [°]	úhel svíraný vektory relativní a unášivé rychlosti
δ_0	[m]	tloušťka ostříkovací lopatky
ε	[rad], [°]	úhel odklonu hrany lopatky od normály k proudnicím
	[1]	poměr měrných energií
ζ	[rad], [°]	přednatočení výstupní hrany lopatky
η	[1]	účinnost
η_h	[1]	hydraulická účinnost
η_c	[1]	celková účinnost
κ	[1]	vstupní ráz
	[1]	korekční faktor reálného počtu lopatek
	[1]	funkce vířivosti
λ	[1]	parametr
μ	[1]	poměr dopravních výšek

ν	$[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$	kinematická viskozita
ξ	[1]	parametr
o	[rad], [°]	natočení spirály
ρ	$[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$	hustota (měrná hmotnost)
σ_Y	[1]	korekční faktor reálného počtu lopatek
φ	[1]	součinitel zúžení
	[rad], [°]	natočení řezu spirály
ϕ	[1]	rychlostní číslo
ω	$[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$	úhlová rychlost
Δ	[m]	tloušťka disků oběžného kola
Θ	[rad], [°]	natočení bodu
	[m]	rozměr výstupního řezu vyhrdlení v ose y
Φ	$[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$	potenciálová funkce
Ψ	[1]	bezrozměrná hodnota měrné energie

11.1 Vybrané indexy

*	veličina vztažená ke střednici kanálu
'	nová souřadnice bodu
∞, oo	za předpokladu nekonečného počtu nekonečně tenkých lopatek
0	vstupní prostor oběžného kola
$0k$	střed spirály
$0L$	střed kružnice popisující vodící křivku středu vyhrdlení
(1)	pro jedno oběžné kolo
1	vstupní hrana lopatky
2	výstupní hrana lopatky
3	vstup do spirály
c	celková hodnota
h	náboj oběžného kola
L	veličina vztažená k lopatce
$L(0)$	krycí disk oběžného kola
m	meridiální složka
out	výstup
$p0$	osa vstupního hrdla

<i>sh</i>	hřídel oběžného kola
<i>stř</i>	střední
<i>t</i>	teoretická hodnota
<i>u</i>	unášivá složka
<i>z</i>	hodnota vyjadřující ztrátu