



Pedagogická
fakulta
Faculty
of Education

Jihočeská univerzita
v Českých Budějovicích
University of South Bohemia
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Rigorózní práce

Mapování kultury vyučování a učení matematice očima učitelů na 2. stupni vybrané základní školy

Vypracovala: Mgr. Nikola Brůžková

České Budějovice 2024

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem rigorózní práci vypracovala samostatně s využitím pouze citovaných literárních pramenů, dalších informací a zdrojů v souladu s řádem pro studenty Pedagogické fakulty Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích a se zákonem 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů.

.....

Mgr. Nikola Brůžková

Poděkování

Děkuji všem členům katedry matematiky Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích za vytvoření podnětného prostředí během celého studia i po něm, zejména pak doc. RNDr. Heleně Koldové, Ph.D a doc. RNDr. Vladimíře Petráškové, Ph.D za odborné rady během celého magisterského studia i po něm. Dále bych chtěla poděkovat žákům a pedagogickému sboru vybrané základní školy za jejich aktivní participaci na výzkumu této rigorózní práce. Na závěr děkuji své rodině a blízkým, kteří mě po celou dobu tvorby a psaní podporovali.

Abstrakt

Kultura vyučování a učení matematice je pojem, který nám v této práci pomáhá popsat, pochopit a zkoumat procesy související s vyučováním a učením se matematice. Tím, že tento pojem využíváme, se snažíme zdůraznit fakt, že vyučování a učení je společenskou, resp. kulturní aktivitou. Na kulturu vyučování a učení nahlížíme jako na „dynamický fenomén, který se neustále mění jako subsystém celkového společenského systému“ (Hošpesová et al., 2007, s. 7–8). Některé změny přichází do školského systému zvenčí a žádají o přizpůsobení vzdělávání novým požadavkům společnosti. Jiné změny jsou školskému systému vlastní, ty pak žádají spíše o reprodukci existujícího (Hošpesová et al., 2007).

Tato rigorózní práce kulturu vyučování a učení zužuje na oblast vyučování matematice na 2. stupni vybrané základní školy. Za hlavní námi vybraná ohniska tohoto komplexního termínu budeme považovat souhrn zvyků, principů, pravidel, norem a dovedností, které se vztahují k cílům a metodám vyučování, ale především k interakcím učitel–žák, učitel–třída. Hlavním cílem této práce je poskytnout učitelům matematiky vybrané základní školy hloubkovou reflexi jejich vyučovacích hodin matematiky a představit jim způsob, jak samostatně a poměrně snadno svou výuku kultivovat a dále zdokonalovat. Domníváme se, že tato kultivace výuky by mohla přispět také k lepšímu chápání matematiky u žáků i ke zvýšení obliby tohoto předmětu.

Předložená rigorózní práce tedy představí akční výzkum zaměřený na zdůvodněné hodnocení kvality výukových situací a na podporu zlepšování výuky ve vzdělávací praxi. Nástrojem pro tuto reflexi výuky a hodnocení její kvality bude metodika 3A (Janík et al., 2022b), zahrnující anotaci, analýzu a alteraci výukových situací. Na podporu profesního rozvoje učitelů jsou v této rigorózní práci využity videonahrávky vybraných vyučovacích hodin matematiky. Učitelé zapojení v tomto výzkumu jsou seznámeni s metodikou 3A a způsobem, jak videonahrávky vyučovacích hodin samostatně pořizovat. Rozhodli jsme se pro tento způsob profesního rozvoje učitelů, protože jsme podobně jako autoři Šed'ová et al. (2016) nebo Desimone (2009) přesvědčeni, že vzdělávání učitelů by mělo být vedeno takovým způsobem, aby jeho účastníci byli např. po představení nových pedagogických nástrojů schopni samostatně je v praxi opakovaně aplikovat a aby měli tak dostatek příležitostí reflektovat jejich přínos.

Tento způsob sebereflexe pomocí videonahrávek vyučovacích hodin tedy vnímáme jako ideální prostředek pro propojení zkušenosti a reflexe ve smysluplný a efektivní celek (Sherin & Es, 2005).

Klíčová slova

akční výzkum, metodika 3A, didaktická analýza učiva, reflexe výukové situace, podpora profesního rozvoje pedagogických pracovníků, učitel–výzkumník

Abstract

The culture of teaching and learning mathematics is a concept that, in this thesis, helps us describe, understand, and examine processes related to the teaching and learning of mathematics. By utilizing this concept, we aim to emphasize the fact that teaching and learning are societal, respectively cultural activities. We view the culture of teaching and learning as a "dynamic phenomenon that constantly changes as a subsystem of the overall societal system" (Hošpesová et al., 2007, s. 7–8). Some changes come to the educational system externally, demanding that education adapts to new societal requirements. Other changes are inherent to the educational system, requiring more of a reproduction of the existing state (Hošpesová et al., 2007).

The thesis narrows down the culture of teaching and learning to the field of mathematics education at the secondary level of the selected primary school. As our chosen main focuses of this comprehensive term, we will consider a combination of habits, principles, rules, norms, and skills related to the goals and methods of teaching, especially the interactions between teacher and pupil and teacher and class. The primary goal of this thesis is to provide mathematics teachers at selected primary schools with a profound reflection on their mathematics teaching lessons and to introduce a way for them to independently and relatively easily cultivate and improve their teaching. We believe that this cultivation of teaching could also contribute to a better understanding of mathematics among students and an increased fondness for the subject.

This presented thesis will introduce action research aimed at justified assessment of the quality of teaching situations and supporting the improvement of teaching in educational practice. The 3A methodology (Janík et al., 2022b), encompassing annotation, analysis, and alteration of teaching situations, will be the tool for this reflection on teaching and evaluating its quality. To support the professional development of teachers, video recordings of selected mathematics teaching lessons are used in the thesis. Teachers involved in this research are familiarized with the 3A methodology and the method of independently recording teaching videos. We chose this method of professional development for teachers because, similar to authors Šedřová et al. (2016) or Desimone (2009), we are convinced that teacher education should be conducted in such a way that its participants, after the introduction of new pedagogical tools, can independently apply them repeatedly in practice and have enough opportunities to reflect

on their contributions. We perceive this method of self-reflection through video recordings of teaching lessons as an ideal means to connect experience and reflection into a meaningful and effective whole (Sherin & Es, 2005).

Keywords

action research, 3A methodology, didactic analysis of the curriculum, reflection and feedback, teachers' professional development, teacher as researcher

Obsah

Úvod.....	11
1 Vymezení problematiky a základních pojmů.....	17
1.1 Vymezení problematiky	17
1.2 Vymezení základních pojmů.....	22
2 Teoretická východiska a dosavadní stav poznání problematiky	28
2.1 Žákův poznávací proces	28
2.2 Didaktická transformace obsahu: Od kurikulárních obsahů k obsahu výuky.....	36
2.2.1 Příprava a průběh vyučovací hodiny	40
2.3 Reflexe po vyučovací hodině	46
2.4 Způsoby realizace nové produktivní kultury vyučování a učení matematice aneb konstruktivismus ve výuce matematiky	50
2.4.1 Dialogické vyučování.....	56
2.4.2 Problémové vyučování.....	58
2.4.3 Badatelsky orientovaná výuka	61
2.5 Matematická gramotnost.....	63
2.5.1 Státní a mezinárodní šetření v matematice.....	64
2.6 Digitální gramotnost a digitální kompetence	70
2.7 Shrnutí teoretických východisek	79
3 Metodologie provedeného výzkumu.....	83
3.1 Výzkumný problém.....	83
3.2 Cíle výzkumu	84
3.3 Výzkumné otázky.....	85
3.4 Výzkumný design	86
3.5 Výzkumný vzorek	87
3.6 Výzkumné metody	87

3.7	Výzkumné šetření.....	89
3.7.1	Tvorba dotazníkového šetření 1	90
3.7.2	Tvorba dotazníkového šetření 2	96
3.7.3	Rozhovory s učiteli	98
3.7.4	Nepřímé pozorování.....	98
3.7.5	Reflexe a analýza výukové situace	99
4	Výsledky provedeného výzkumu.....	103
4.1	Výsledky dotazníkových šetření	103
4.1.1	Výzkumná otázka 1 (V1):.....	103
4.1.2	Výzkumná otázka 3 (V3).....	106
4.1.3	Výzkumná otázka 2 (V2):.....	108
5	Didaktické kazuistiky.....	109
5.1	Didaktická kazuistika 1	109
5.1.1	Teoretická východiska	111
5.1.2	Anotace	113
5.1.3	Analýza	120
5.1.4	Alterace	125
5.2	Didaktická kazuistika 2	127
5.2.1	Teoretická východiska	130
5.2.2	Anotace	134
5.2.3	Analýza	139
5.2.4	Alterace	146
5.3	Didaktická kazuistika 3	148
5.3.1	Teoretická východiska	150
5.3.2	Anotace	153
5.3.3	Analýza	159
5.3.4	Alterace	165
6	Závěr	168
	Literatura.....	171
	Seznam obrázků	199

Seznam tabulek	201
Přílohy	202
Příloha 1 – Dotazníkové šetření 1 (pro 2. stupeň ZŠ)	202
Příloha 2 – Dotazníkové šetření 1 (pro 1. stupeň ZŠ)	212
Příloha 3 – Posuzování reliability dotazníkového šetření 1	215
Příloha 4 – Dotazníkové šetření 2 (pro 2. stupeň ZŠ)	223
Příloha 5 – Dotazníkové šetření 2 (pro 1. stupeň ZŠ)	234
Příloha 6 – Informované souhlasy	237

Úvod

Používání matematických pojmů a znalostí jako prostředku pro komunikování, popis a poznávání reálného světa jsou s lidskou civilizací úzce spjata již od starší doby kamenné. Potřeba zachycovat informace vedla k vynálezu písma. První dochované souvislé matematické texty pocházejí z Egypta a Mezopotámie z 3. a 2. tisíciletí př. n. l. V těchto textech se však vyskytují pojmy, kterým evidentně předcházelo dlouhé období formování. Zrod matematiky jako vědy v moderním slova smyslu¹ se odehrál přibližně v 6. století př. n. l. v antickém Řecku (Bečvář & Fuchs, 1993). Od té doby nás matematika jako prostředek pro porozumění světu provází téměř na každém kroku. Pro její přirozenost a všudypřítomnost si však její význam mnohdy ani neuvědomujeme. Obešli bychom se bez ní však jen stěží (Opava, 1989).

„Před několika lety na jednom neformálním setkání se univerzitní profesori pokusili najít alespoň jeden obor, ve kterém se matematika nijak neuplatňuje. Po dlouhém hledání se jim nakonec takový obor najít nepodařilo“ (Halas, 2012, s. 5). Matematika zasahuje jako svébytný komunikační prostředek do různých oborů lidské činnosti a poznávání, ať už technických, humanitních, lékařských, ekonomických nebo uměleckých. Např. i malíř, režisér, choreograf nebo hudebník využívají při své práci matematiku. Při jejich pracovních činnostech pracují s perspektivou, prostorovou představivostí, tónovými soustavami, stupnicemi, různými způsoby ladění nebo akustikou (Halas, 2012). Aby mohly i další generace pokračovat v rozvoji různých vědních oborů, je nezbytné všem dětem školního věku „...poskytnout spolehlivý základ všeobecného vzdělání orientovaného zejména na situace blízké životu a na praktické jednání“ (MŠMT ČR, 2023, s. 8), tzn. vzdělávat je mimo jiné i v matematice. Matematika je tedy vysoce relevantní i v rámci pedagogického, resp. didaktického diskurzu.

Matematika jako věda společně s psychologíí vytvořily prostor pro vznik didaktiky matematiky jako samostatného vědního oboru. Jan Amos Komenský ve svém výstižném vyjádření popisuje didaktiku jako: „...umění, jak dobře učit. Učiti značí působiti, aby tomu, kdo něco zná, se naučil někdo jiný a znal to“ (Komenský, 1947). Slovník školské matematiky (Sedláček, 1981) uvádí, že: „didaktika matematiky je mezní vědní disciplína

¹ Deduktivně budovaná věda se systematicky budovanými teoriemi, v „...nichž se důkaz předkládaných tvrzení stává jedním ze základních požadavků a které se cílevědomě snaží o systematické rozšiřování dosavadních poznatků...“ (Bečvář & Fuchs, 1993, s. 12).

mezi matematikou a pedagogikou, která se zabývá různými otázkami školské matematiky na všech typech škol, tj. jejím obsahem i metodami, jak vyučovat a jak se učit matematice“ (Blažková, 2013, s. 5). Didaktika matematiky se v posledních padesáti letech věnuje také poznávacímu procesu, „...tedy tomu, jak se dítěti otevírá svět matematiky a jak se jej postupně žák zmocňuje“ (Hejný et al., 2004, s. 23). Na základě poznávacího procesu se objevují nové metody, způsoby a pojetí, jak matematiku efektivně žáky vyučovat. Didaktika matematiky ve 21. století tedy navazuje na předchozí vývoj, soustřeďuje se především na „...didaktické oblasti zaměřené na obsah vzdělávání a jeho didaktickou transformaci, na psychodidaktické procesy poznávání, metody výuky², na organizační formy výuky a na efektivní využití digitálních technologií ve výuce“ (Polák, 2020, s. 256). Jedním z inovativně významných pojetí výuky, na které se současná matematicko-didaktická literatura soustřeďuje, je konstruktivistické pojetí vyučování a učení matematice (Polák, 2020; Beeson, 1985; Jaworski, 2002; Molnár et al., 2008; Rendl, 2008; Binterová et al., 2015; Hejný & Kuřina, 2001, 2009, 2015; Hejný, 2014; Vondrová et al., 2019; Lesh et al., 2020). Z dosavadních poznatků didaktiky matematiky budeme vycházet i my v této rigorózní práci.

21. století se od předchozích století výrazně liší. „Je charakteristické bezprecedentní rychlostí a rozsahem společenských změn, které budou mít významný vliv a rostoucí nároky na absolventy. Nasnadě jsou tedy dvě otázky: Změnil se pod tíhou celospolečenských změn účel vzdělávacího systému? Změnily se také didaktické metody a role pedagogů, které tento účel naplňují?“ (Sieglová, 2019, s. 10). Souhrnné odpovědi na tyto a mnohé další otázky přináší v České republice národní šetření a výzkumy, které provádí např. Česká školní inspekce (dále jen ČŠI), Národní pedagogický institut České republiky (dále jen NPI) nebo na úrovni mezinárodní např. šetření TIMSS nebo PISA. Tato šetření přinášejí velmi užitečná data a statistiky, sloužící dále především k rozvoji vzdělávací politiky³ obecně. My se také v této rigorózní práci zaměříme okrajově na hledání odpovědí na tyto otázky, nicméně ne na nejvyšší úrovni státní správy a řízení, ale

² „Výuka označuje synonymicky totéž, co vyučování v jeho běžném významu. V teoriích obecné didaktiky se výuka objasňuje širěji než samo vyučování – jako systém, který zahrnuje jak proces vyučování, tak především cíle výuky; obsah výuky; podmínky, determinanty a prostředky výuky; typy výuky; výsledky výuky“ (Průcha, Walterová & Mareš, 2003, s. 288).

³ „Praktická činnost týkající se plánování zásadních strategických koncepcí, dílčích nebo celkových reforem vzdělávacího systému, především školství. Je vytvářena na nejvyšších úrovních státní správy a řízení vzdělávacího systému (vláda, MŠMT, parlament) a přenášena na nižší úrovně státní správy (kraje, obce)“ (Průcha & Veteška, 2014, s. 299).

v základní organizační formě podle délky trvání, tzn. ve vyučovací hodině (Chocholoušková & Müllerová, 2019).

„Protože kvalita výuky vyrůstá zevnitř, je třeba podnikat cesty pod povrch a pronikat do hloubkové struktury výuky za účelem získání solidního základu pro její zkvalitňování“ (Janík et al., 2022b, s. 25). Připomeneme znovu i Jana Amose Komenského, který poukazoval na důležitost toho, jak „...učitel ve své konkrétní třídě teoretické přístupy didaktiky zrealizuje, jak velký prostor žákům dá a jakou pomoc jim při výuce poskytne“ (Vondrová, 2014, s. 27). Účinný způsob, jak učitel po vyučovací hodině získá z této spontánně vzniklé situace či záměrně navozené aktivity maximum (tzn. zváží její přednosti a nedostatky a posune sebe i žáky o krok vpřed), je provést reflexi této výukové situace (Frišová, 2010). Pojmem reflexe pedagogické činnosti míníme formu zpětné vazby, při níž dochází ke zhodnocení dosavadního počínání ve vyučovacím procesu. Reflexe pedagogické činnosti učitelů matematiky budeme provádět na vybrané základní škole, kterou jsme se pro tuto rigorózní práci rozhodli označovat jako základní škola Dobrá (dále jen ZŠ Dobrá).

Předkládaná rigorózní práce se tedy věnuje souladnosti a proporčnosti mezi klíčovými komponenty matematického vzdělávání. Tzn. vzdělávacím cílům, vzdělávacímu obsahu a součinnosti žáků a učitelů ve výuce matematiky na 2. stupni ZŠ Dobrá. „Tuto souladnost můžeme vyjádřit termínem *integrita výuky*“ (Janík et al., 2022a, s. 19). V širším pedagogickém systému se touto integritou vyznačuje právě nová kultura vyučování a učení, která funguje „...jako rámec pro určitá pojetí podmínek, aktérů, obsahů, procesů, cílů a výsledků vzdělávání“ (Janík et al., 2022a, s. 9). Pokusíme se zde o propojení teorie a výzkumu se vzdělávací praxí. Kulturu vyučování a učení budeme vnímat také jako fenomén či hodnotu, na kterou lze nahlížet nejen teoreticky, ale lze ji i zkoumat, v praxi ovlivňovat, resp. kultivovat. „Nahlížíme-li na kulturu jako na hodnotu, můžeme pak rozlišovat její lepší a horší alternativy a usilovat tak o změny k lepšímu“ (Janík et al., 2022a, s. 7). Při snaze o změnu kultury vyučování a učení matematice je v praxi problematická komplexita tohoto kulturního systému, který je stabilní či setrvačný. Tuto stabilitu a setrvačnost můžeme označit pojmem *kulturní praktika* (Stigler & Hiebert, 1999, s. 97) a tu připodobnit k rutinnímu zvyku, který je mnohdy velmi odolný vůči pokusům o změnu, pokud má tedy „...kulturní systém nedostatky, je pravděpodobné, že

postupně nabývají chronické podoby...“. V případě, že má kulturní systém přednosti, mohou vyústit naopak v didaktické kvality či excelence“ (Janík et al., 2022a, s. 7).

V této práci na kulturu vyučování a učení nazíráme v rámci tzv. „malé revize“ Rámcového vzdělávacího programu⁴ pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV 2023⁵) (Jeřábek & Tupý, 2021) a zužujeme její rozsah na kulturu především konkrétní skupiny, kterou tvoří učitelé matematiky 2. stupně ZŠ Dobrá. Tato skupina totiž sdílí společný rámec pro určitá pojetí podmínek, aktérů, obsahů, procesů, cílů a výsledků vzdělávání v oblasti matematiky na ZŠ Dobrá. Výuku matematiky na 2. stupni základní školy vnímáme jako společenský proces a školu jako místo mimo jiné i pro kooperaci učitelů. Pojem kultura nám pomáhá popsat, pochopit a zkoumat procesy související s vyučováním a učením se matematice (Hošpesová et al., 2007, s. 7). Kulturu vyučování a učení matematice výzkumně uchopujeme také jako prostředek, který se může uplatnit při didaktické transformaci⁶ (kap. 2.2) a hledání způsobů zprostředkování vzdělávacího obsahu pro konkrétní skupiny žáků. Přitom didaktické kazuistiky, které vytvoříme během výzkumu této rigorózní práce, mohou v konečném důsledku napomáhat také samotnému procesu učení. V každé z kazuistik budeme usilovat o shrnutí situace a jejího kontextu. Výukovou situaci budeme popisovat z různých hledisek, jako jsou např. metakognice; získávání, zpracování a osvojování nových znalostí a dovedností; uplatňování znalostí a dovedností v různých kontextech. Následně budeme analyzovat hloubkovou strukturu výukové situace, didaktickou transformaci obsahu a na závěr se vždy pokusíme o zhodnocení kvality výukové situace, posouzení její integrity a navržení změny, kterou znovu posuzujeme a diskutujeme (Janík et al., 2022b). Naším hlavním cílem však bude učitelům na ZŠ Dobrá představit tento způsob sebereflexe tak, aby ho sami mohli v rámci profesního rozvoje nadále využívat.

V kapitole 1 je vymezen obecnější kontext analyzované problematiky vyučování a učení matematice. Představeny jsou oblasti reprezentující teoretické ukotvení

⁴ „Rámcové vzdělávací programy (RVP) tvoří obecně závazný rámec pro tvorbu školních vzdělávacích programů škol všech oborů vzdělávání v předškolním, základním, základním uměleckém, jazykovém a středním vzdělávání. Do vzdělávání v České republice byly zavedeny školským zákonem č. 561/2004 Sb.“ (MŠMT ČR, 2022).

⁵ Dostupné online: <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/> (MŠMT, ČR, 2023)

⁶ „Didaktická transformace je převedení učiva a jeho rozvržení do takové podoby, která odpovídá věkovým i individuálním zvláštnostem skupiny žáků. Jde o učitelovu úpravu učiva pro konkrétní třídu, skupinu“ (Vališová & Kovaříková, 2021, s. 54).

problematiky a také výzkumné aktivity směřující k rozpracování problematiky. Vedle toho jsou v kapitole vymezeny základní pojmy, se kterými se v práci operuje. Jedná se o vymezení ústředního pojmu této práce, a to kultura vyučování a učení.

V kapitole 2 jsou představena teoretická východiska práce. Jsou zde vysvětleny koncepty, které uchopujeme v souvislosti se snahou objasnit význam akčního výzkumu v pedagogickém prostředí a také souvislosti s okolnostmi, za jakých může tento druh výzkumu přispět ke kultivaci kultury vyučování a učení matematice.

V kapitole 3 je představena metodologie provedeného akčního výzkumu. Podrobněji je zde popsán výzkumný problém a představen výzkumný design. Rozebírány jsou výzkumné otázky, výzkumný vzorek a také použité výzkumné metody. V této kapitole rovněž naznačujeme tvorbu a vývoj námi použitých dotazníkových šetření, dále stručně čtenáře seznamujeme s výzkumným nástrojem – metodikou 3 A.

V kapitole 4 jsou představeny výsledky výzkumu práce. Zahrnuty jsou výsledky dílčích kvantitativně i kvalitativně orientovaných šetření výzkumu práce. Jsou zde prezentovány výsledky výzkumných šetření 1 a 2, jejichž cílem bylo prozkoumat přípravu učitelů matematiky na vyučovací hodinu a jejich subjektivní pohledy na (sebe)reflexi vyučovacích hodin matematiky. Dále jsou představeny didaktické kazuistiky, které jsou výsledkem použití metodického postupu reflexe a analýzy výuky spojených s hodnocením kvality výuky a s návrhem změn na zlepšení. Kapitola je doplněna diskusí o výzkumná zjištění a shrnující závěry.

Závěr práce směřuje ke kritickému zhodnocení provedeného výzkumného šetření a vybraného výzkumného nástroje. Naznačováno je také možné směřování dalších výzkumných aktivit v oblasti mapování kultury vyučování a učení matematice.

1. Vymezení problematiky a základních pojmů

1.1 Vymezení problematiky

s. 17-21

1.2 Vymezení základních pojmů

s. 22-26

1 Vymezení problematiky a základních pojmů

V této kapitole je představen širší kontext analyzované problematiky – kultura vyučování a učení se matematice očima učitelů na ZŠ Dobrá. Cílem této kapitoly je uvést důvody, resp. problematiku, která nás k napsání této rigorózní práce vedla. Dále uvádíme pozice, z nichž je ke zkoumání problematiky přistupováno. Naznačeny jsou zde souvislosti s relevantními oblastmi pedagogického akčního výzkumu ve vzdělávací oblasti *Matematika a její aplikace* (MŠMT ČR, 2023) a kultuře matematického vyučování. Definován je ústřední pojem – kultura vyučování a učení. V obecné rovině jsou vymezeny také další pojmy – nová kultura vyučování a učení a produktivní kultura vyučování a učení.

1.1 Vymezení problematiky

Z mezinárodního šetření PISA⁸ vyplynulo, že matematická gramotnost v České republice od roku 2003 do roku 2022 vykazovala opakovaně klesající tendenci (Boudová et al., 2023). Mnozí výzkumníci se zaměřovali také na míru obliby matematiky, která by mohla žákovské výsledky v matematice ovlivňovat. „Např. Mullis et al. (2012) nebo Inzlicht & Schmader (2012) prokázali, že existuje jasný pozitivní vztah mezi výsledky v matematickém testování a oblibou matematiky“ (Smetáčková, 2018, s. 44). Hrabal & Pavelková (2010, 2012) opakovaně poukázali, že matematika je pro české žáky silně neoblíbený předmět. Chvál (2013) zaznamenal ve své analýze výrazný propad v oblibě matematiky při přechodu z 1. na 2. stupeň základní školy. V roce 2015 Feridičová a Münich analýzu prováděli na mezinárodní úrovni a ukázalo se, že u českých žáků je pokles obliby silnější než u žáků jiných zemí (Smetáčková, 2018, s. 45). Smetáčková (2018, s. 44–56) ve svém článku představuje další studii, která opět potvrdila neoblíbenost matematiky, jež má s postupujícím věkem žáků vzrůstající tendenci. „Stejně tak se s rostoucím věkem žáků posunulo těžiště známek z matematiky od výborně k dobře“ (Smetáčková, 2018, s. 49–50). Výzkumů a publikací s podobnou tematikou

⁸ „Projekt PISA je jednou z hlavních aktivit vzdělávacího direktoriátu OECD. Je do něj zapojeno 36 členských států a mnoho dalších zemí a ekonomických regionů. Šetření PISA je zaměřeno na zjišťování vzdělávacích výsledků patnáctiletých žáků, kteří se ve většině zemí nacházejí na konci povinné školní docházky nebo se k němu blíží. PISA zjišťuje úroveň čtenářské, matematické a přírodovědné funkční gramotnosti v tříletých cyklech“ (Blažek et al., 2019, s. 9).

bychom našli mnoho, nicméně předmětem této kapitoly není uvést všechny, proto zmíníme pouze několik dalších autorů, kteří se této problematice ve 21. století v České republice věnovali nebo věnují: Palečková & Tomášek (2001), Hejný et al. (2004), Dvořák (2011), Vondrová et al. (2020) atd.

Dalším signálem byla subjektivní zkušenost autorky této rigorózní práce s přípravou žáků na přijímací zkoušky z matematiky na 2. stupni ZŠ Dobrá. Někteří žáci této školy se testu z matematiky obávali a jejich výsledný procentuální skór nebyl mnohdy dostatečný pro přijetí na jimi preferovanou školu.

V České republice se těchto přijímacích zkoušek⁹ v dubnu 2023 zúčastnilo celkem 89 729 žáků 9. ročníků. Zkouška se skládala z testu z matematiky a českého jazyka. Průměrný procentuální skór u přijímacího testu z matematiky čtyřletých oborů byl 39,9 %, což je o 5,4 % horší výsledek než v roce 2022. Jedná se zároveň o nejhorší výsledek za posledních 5 let, tzn. od roku 2019 včetně (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání – Oddělení analýz, 2023, s. 38). Na šestiletá gymnázia se v roce 2023 přihlásilo celkem 7 347 uchazečů, přičemž průměrný procentuální skór z testu z matematiky byl 44,3 %, což je o 9,2 % méně než v roce 2022, a jedná se o nejnižší průměrný procentuální skór od roku 2017 včetně (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání – Oddělení analýz, 2023, s. 53). Zmíněné klesající tendence a výzkumy, které jsme uvedli, naznačují, že je stále v oblasti didaktiky matematiky prostor pro zlepšování a kultivaci kultury vyučování a učení se matematice vzhledem k její nezastupitelné roli v základním vzdělávání.

Učitelé základních škol jsou tedy primárními aktéry (Hiebert & Grouws, 2007) v reálném procesu edukace, kteří mohou přímo působit na žáky a záměrně tak ovlivňovat a dále zdokonalovat jejich výsledky. Docházet by však mělo mimo jiné i k provádění systematických reflexí (sebereflexí či vzájemných hospitací) výukových situací, které přispívají k nalezení konkrétních nedokonalostí procesu vyučování a učení a jsou „...v našem prostředí tradiční metodou pozorování pedagogického procesu a jako takové jsou nenahraditelným nástrojem jeho řízení. Ze strany učitelů jsou však často vnímány jako zbytečné, obtěžující a nepříjemné metody kontroly jejich práce“ (Faltýšek & řešitelský kolektiv projektu Centra celoživotního vzdělávání Pedagogické fakulty

⁹ Jednotná přijímací zkouška je povinnou součástí prvního kola přijímacího řízení do všech maturitních oborů s výjimkou oborů s talentovou zkouškou (kromě oboru gymnázium se sportovní přípravou) a oborů zkráceného studia podle § 85 školského zákona.

Univerzity Palackého v Olomouci, 2021, s. 3). Česká školní inspekce ve své výroční zprávě *Kvalita vzdělávání v České republice 2021/2022* uvedla, že „...z dalších inspekčních zjištění, v systémovém ovlivňování kvality výuky stále zůstávají v základních školách rezervy“ (ČŠI, 2022, s. 67). Z výzkumu vyplynulo mimo jiné to, že hodnocení a poskytování zpětné vazby učitelům ze strany učitelů probíhá pouze jednou či méně než jednou za rok na 44,4 % zúčastněných základních školách. Hodnocení a poskytování zpětné vazby učitelům ze strany ředitelů probíhá pouze jednou či méně než jednou za rok dokonce na 61,9 % zúčastněných základních školách (ČŠI, 2022, s. 67). Proto se v naší rigorózní práci pokusíme zjistit, zda učitelům matematiky zvýšení četnosti poskytování zpětné vazby na ZŠ Dobrá pomohlo. Následně se zaměříme na to, zda učitelé toto zvýšení vnímají jako přínosné.

V rámci projektu CIVIS 2017 - *Spolupráce oborových didaktik při formování občanských a sociálních kompetencí* se ukázalo, že „učitelé zpravidla nemají dovednosti pro cílené reflektování své výuky“ (Holcová et al., 2019, s. 3). Korthagen (2011) se ve své publikaci domnívá, že tato dovednost by měla být nejen výbavou každého učitele, ale také nástrojem pro přípravu budoucích učitelů. „Výzkumy potvrzují, že učení se z vlastní zkušenosti s využitím reflexe je velmi účinný nástroj pro profesní rozvoj učitelů i zlepšování výsledků žáků“ (Holcová et al., 2019, s. 3). Mourshed et al. (2010) ve své publikaci uvádí, že „úspěšné systémy se zaměřují na to, jak probíhá vzdělávání ve třídách spíše, než co se má ve třídách učit anebo jak má vypadat struktura a zdroje vzdělávacího systému“ (Mourshed et al., 2010, s. 7). Cílem našeho výzkumu je tedy také zvýšit povědomí o možnostech cílených (sebe)reflexí a prohloubit tak dovednosti pro reflektování výuky u učitelů na ZŠ Dobrá.

Širší kontext pro námi zvolený přístup k analyzování problematiky kultury vyučování a učení matematiky na 2. stupni ZŠ Dobrá představuje specifická oblast pedagogického výzkumu – *akční výzkum* (Lewin, 1946). Základní rysy a možnosti akčního výzkumu popisují např. Bartholomew (1972); Stenhouse (1975); Elliott (1981); Elliott (1991); Rudduck (2001); Průcha et al. (2001); Janík (2003); Sagor (2005); Hošpesová (2012); Efron & Ravid (2013); Holcová et al. (2019) nebo Richterová et al. (2020); Góral et al. (2021). Akčnímu výzkumu je věnována kapitola 3.6. této rigorózní práce. Dle množství zahraničních i českých publikací zaměřených na téma akčního výzkumu lze konstatovat, že se jedná o poměrně rozšířený druh výzkumu, jehož využití je opodstatněné. Článek

Teachers as reserchers: the quiet revolution okomentoval také J. Rudduck (2001, s. 58) slovy: „Vláda se pokoušela změnit školství snahou vybudovat velkou stavebnici (ang. *big building blocks*) – nové kurikulum, nové pojetí hodnocení – a využila k tomu velkolepé, významně financované projekty. Avšak v akčním pedagogickém výzkumu usilujeme o něco odlišného – podstatného, co se vyvíjí pozvolna mnoho let, s postupně nabývajícím uznáním a národní legitimitou. Je to významný a pozoruhodný krok – tichá revoluce.“ Jinými slovy, pedagogické akční výzkumy a hloubková reflexe pedagogických hospitací je nyní i do budoucna prostorem pro prohlubování znalostí a zdokonalování českých vzdělávacích systémů, a to nejen pro zkušené učitele, ale také pro učitele začínající. Akční výzkum totiž „...vede k pozorování sebe sama: reflektuje vlastní činnost a hledá alternativní přístupy k dosažení lepších výsledků. Na základě poznání činnosti učitele dochází ke zkvalitnění jeho pedagogického působení a zároveň výzkum přispívá ke změně kultury školy“ (Nezvalová, 2003, s. 300–303).

John Elliott (1981, s. 1) ve své klasické definici uvádí, že „akční výzkum je učiteli prováděná systematická reflexe profesních situací s cílem jejich dalšího rozvinutí“, což koreluje s naším hledaným přístupem, jak zkoumat a mapovat aktuální situaci výuky vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace na ZŠ Dobrá. Mnozí autoři ke zkoumání této problematiky validními poznatky již přispěli nebo stále přispívají. Patří mezi ně např. Janík et al. (2022a); Janík et al. (2013); Binterová & Šulista (2013); Mareš (2015); Slavík et al. (2017a); Slavík et al. (2017b) nebo Janík et al. (2022b); Binterová & Dvorožňák (2009); Binterová et al. (2010). A i my se pokusíme akčním výzkumem na toto téma alespoň částečně ke zkoumání této problematiky přispět.

Další oblastí, která se v několika výzkumech ukázala jako problematičtější, je praktické začlenění změn ze strany učitelů v rámci tzv. „malé revize“ RVP ZV 2023 (MŠMT ČR, 2023). Nová podoba RVP ZV přinesla řadu změn. Došlo k začlenění nové klíčové digitální kompetence, která prostupuje všemi vzdělávacími oblastmi RVP ZV včetně oblasti Matematika a její aplikace. Rozvoj této kompetence se opírá o koncept průřezového rozvoje digitální gramotnosti učitelů, žáků a studentů, který byl ověřován v letech 2019–2020 v mateřských, základních a středních školách (MŠMT ČR & NPI ČR, 2023). K interní revizi školního vzdělávacího programu dle „malé revize“ RVP ZV 2023 již došlo i na ZŠ Dobrá.

Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj (dále jen OECD) publikovala v roce 2019 výsledky rozsáhlého výzkumu zaměřeného na učitele, vedení škol a prostředí pro učení ve školách. V případě České republiky byl výzkum digitální gramotnosti zaměřen na 2. stupeň základních škol a víceletá gymnázia. Podíl učitelů, kteří ‚docela ano‘ či ‚do velké míry‘ zvládají při výuce podpořit vzdělávání žáků pomocí digitálních technologií (např. počítačů, tabletů, interaktivních tabulí SMART board), byl dle výsledků výzkumu 63 %. Přitom 68 % ve skupině učitelů s praxí do 5 let a 62 % nad 5 let „...to souvisí patrně s věkem učitelů, přičemž rozdíl v podílu učitelů hodnotících svoji schopnost podpořit vzdělávání žáků pomocí digitálních technologií mezi skupinou učitelů do 30 let a nad 50 let byl 15 % (72 % oproti 57 %)“ (Boudová et al., 2019, s. 35). Učitelů, kteří nechávají žáky používat ICT nástroje při projektech nebo pro práci v hodině, bylo mezi zúčastněnými zeměmi 53 %, což je o 18 % více než v České republice (Boudová et al., 2019, s. 35–36).

Česká školní inspekce ve své výroční zprávě – *Kvalita vzdělávání v České republice 2021/2022* uvedla, že jsou mezi vyučujícími stále tací, kteří k digitalizaci výuky nezastávají kladný postoj, ať už např. z důvodu nedostatečné sebedůvěry ve své vlastní digitální kompetence, nedostatečného vybavení školy nebo negativního subjektivního postoje k technologiím obecně. Výzkum dále potvrdil, že „...mezi oblastí podpory, po kterých učitelé stále nejvíce volají, patří právě oblasti metod, forem využívání ICT ve výuce a získání dalších dovedností v oblasti ICT“ (ČŠI, 2022, s. 104). V závěrečných doporučeních této zprávy pro základní vzdělávání také nalezneme, že je „nadále nutné věnovat cílenou pozornost přípravě vzdělávacích příležitostí, které umožní zvyšování kompetencí učitelů v oblasti nové informatiky. A to tak, aby mohl být kompenzován kritický nedostatek učitelů připravených efektivně vzdělávat žáky v oblasti informačních a komunikačních technologií“ (ČŠI, 2022, s. 93). Další výzkum České školní inspekce hodnotil současné učitelské kompetence. Kompetence využívat ICT ve výuce byla vyhodnocena následovně: „29 % učitelů hodnotilo své kompetence k využívání ICT ve výuce jako velmi dobré; 51 % jako dobré; 18 % jako částečné a 1 % jako vůbec žádné“ (Koucký, 2023, s. 21). Jaké informační a komunikační technologie jsou ve výuce matematiky na ZŠ Dobrá využívány nejčastěji, to se pokusíme zjistit ve výzkumné části této rigorózní práce. Dále se zaměříme také na to, jak obtížné je pro učitele matematiky 2. stupně ZŠ Dobrá rozvíjet digitální kompetence u žáků během výuky matematiky.

1.2 Vymezení základních pojmů

Terminologie související s mapováním kultury vyučování a učení matematice je velmi komplexní a mnohdy nejednoznačná, a to často i podle literárních zdrojů nebo podle doby, ve které vznikla. V rámci problematiky existuje více pojmů, které si mohou navzájem konkurovat, popřípadě se v určitých ohledech mohou doplňovat apod. Ty v této kapitole uvádíme a pokusíme se je teoreticky vymežit. Čtenář se v této kapitole setká s pojmy kultura, (nová či produktivní) kultura vyučování a učení a kultura vyučování a učení se matematice.

Ve slovníku spisovného jazyka českého nalezneme hned několik definic pojmu kultura. Kulturou můžeme nazvat:

- „soubor výsledků veškeré tělesné a duševní činnosti utvářející lidskou společnost (např. vyvinutá kultura);
- soubor materiálních hodnot v jednotlivých stádiích vývoje společnosti, zvl. v souvislosti s výrobní činností (např. materiální kultura);
- soubor výsledků činnosti lidské společnosti v oblasti vědy a umění, popř. společenského života vůbec, v určité historické epoše (např. egejská kultura);
- vše, co zahrnuje jazyk, literaturu a umění národa (např. národní kultura);
- slovesnost, obyčej lidu (např. lidová kultura);
- všestranná péče o spisovný jazyk, zvl. teoretické úsilí o jeho vytržbenost (jazyková kultura);
- úroveň bydlení a péče o ni (bytová kultura);
- stupeň výtvarné umělecké i technické hodnoty tištěných obrazů (obrazová kultura);
- hromadně pěstovaná užitková rostlina nebo plocha jí osetá nebo osázená (např. kultura bavlníku)
- hromadné pěstování nebo výpěstky živočichů nebo rostlin (např. kultury bakterií)“ (Havránek et al., 2011).

V definicích jednotlivých kultur (např. bytové, obrazové, vyvinuté) si můžeme všimnout, že význam výsledného slovního spojení ovlivňuje přívlastek, který pojmu kultura přiřadíme. V pedagogické sféře se termín kultura uplatňuje především v následujících významech:

- „Kultura jakožto komplex materiálních, především ale nemateriálních výtvorů (poznatků, idejí, hodnot, materiálních norem aj.), které lidská civilizace během svého vývoje vytvářela. Toto „kulturní dědictví“ si lidstvo předává z generace na generaci, zejm. také prostřednictvím formálního vzdělávání ve školských institucích. Rozporné a nevyřešené otázky v pedagogické teorii se týkají toho, jaký má být optimální obsah a rozsah „kulturní transmise“ ve škol. kurikulech;

- Kultura ve smyslu sociologickém a kulturně-antropologickém znamená způsoby chování, sdílené normy, hodnoty, tradice, rituály aj., jež jsou charakteristické pro určité sociální nebo etnické skupiny. V tomto smyslu ovlivňují např. *kulturní vzorce*¹⁰ průběh a výsledky vzdělávacích procesů. Ve školním prostředí je charakteristická zvláště *žakovská subkultura*¹¹ (Průcha, 2001; Průcha et al., 2013, s. 108–109).
- Kultura školy jako specifické rysy konkrétní školy, zejména sdílené hodnoty, postoje, normy, symboly, rituály, preferované chování aktérů školního života a vztahy školy k okolí, sociálním partnerům a rodičům“ (Průcha, Walterová & Mareš, 2003, s. 108–109).

Z mnohých výše uvedených definic se v této práci přikláníme k některým českým autorům z pedagogického prostředí (např. Hartl & Hartlová, 2000; Hošpesová et al., 2007; Hloušková, 2008; Janík et al., 2013; Janík, Knecht & Najvar, 2010; Slavík & Janík, 2012; Janík et al. 2022a), kteří nahlíží na pojem kultura jako na souhrn zvyklostí, tradic, norem, stereotypů a také jako na hodnotu, kterou je možné kultivovat (Šedřová & Šalamounová, 2016, s. 48).

Hojně využívaným souslovím je však v této práci kultura vyučování a učení. Existují různé způsoby používání a různé významy pojmu kultura vyučování a učení, vycházet budeme ze studií Wiatera (2005), Reussera (2001, 2006) a Weinerta (1997).

Reusser (2006, s. 159–164) charakterizuje kulturu vyučování a učení ve třech oblastech: *kultura učiva a učebních úloh*, *kultura učení a interakce* a *kultura didaktické komunikační a učební podpory*. Všechny tyto oblasti autor propojuje s konstruktivistickým pojetím výuky. Např. v oblasti kultura učiva a učebních úloh jde o to, že „...znalosti nejsou primárně chápány jako hotový materiál, nýbrž ve své konstrukci jako něco, co se utváří (proces objevování)“ (Reusser, 2006, s. 161). Oblast kultury učení a interakce „...se projevuje tím, že je žákům poskytnuto dostatečné množství příležitostí ke zkušenostně orientovanému, smysluplnému, problémově orientovanému a dialogickému učení“ (Reusser, 2006, s. 163).

¹⁰ „Soubor charakteristik označujících chování lidí specifické pro určitou kulturu (např. evropskou). Přenášejí se rodinnou výchovou, prostřednictvím postojů, zvyků, tradic, odrážejí se i v obsahu škol. kurikula, charakteru edukačního prostředí, v chování učitelů aj.“ (Průcha, Walterová & Mareš, 2003, s. 110).

¹¹ „Svébytná součást kultury, jíž se vyznačuje škola jako instituce. Je charakterizována specifickými sociálními rolami (role žáka, spolužáka, „bažanta“, „mazáka“, vlivného či okrajového žáka apod.), sociálními vztahy, způsoby komunikace a interakce, specifickým životním stylem. Má svá pravidla chování, rituály atd. Dále existuje též učitelská subkultura“ (Průcha, Walterová & Mareš, 2003, s. 316).

Oblast kultury didaktické komunikační a učební podpory Reusser (2006, s. 163–164) chápe jako omezení přímého řízení učitelem. „Učitel, který jedná konstruktivisticky, hledá cesty, které žáky podpoří ve vzdělávání, zároveň akcentuje a přijímá jejich autonomii jako cíl a současně jako procesuální předpoklad výuky“ (Reusser, 2006, s. 163).

Weinert (1997, s. 12) odkazuje toto sousloví k „...časově ohraničenému souhrnu určitých forem učení a vyučovacích stylů a s nimi souvisejících antropologických, psychologických, společenských a pedagogických orientací“. Hartl & Hartlová (2000, s. 282) dodávají, že tato kultura je „...předávána výhradně negeneticky, tedy učením“.

Kultuře vyučování a učení můžeme přisuzovat dvě vzájemně propojená, ale přesto odlišná hlediska – hledisko komparace či srovnání a hledisko změny a zlepšování. Obě tato hlediska mají společnou právě hodnotu, v tomto smyslu vždy souvisí s porovnáváním kvalit a posuzováním hodnot. Přisuzujeme-li vyučování a učení kulturu, musí se týkat „...zvyklostí, tradic a norem nebo stereotypů, tj. obecně vzato se jedná o způsob či metodu a metodiku jednání ve výuce, protože kultura se pozná jen podle toho, co je společné pro více případů a co se po nějaký čas v určitém prostředí opakuje. Je také součástí kultury té společnosti a historické doby, do níž spadá, a nemůže se jí reálně nijak vymknout ani ji přesahovat, protože se utváří uvnitř ní“ (Slavík & Najvar, 2016, s. 7). Komparace či srovnání představují první hledisko, jež můžeme kultuře vyučování a učení přisuzovat, obdobně tak činí nadnárodní výzkumy kvality vzdělávání jako např. PISA nebo TIMSS. Tyto výzkumy nahlíží na vyučování jako na ang. *cultural activity* – kulturní aktivitu. Druhé je hledisko změny a zlepšování směřující k intervencím do stereotypů kulturní formy (Slavík & Najvar, 2016, s. 8). „Realizovat změnu ve smyslu zvýšení kvality výuky znamená rozvíjet kulturu vyučování a učení přímo ve školních třídách“ (Janík et al., 2013, s. 654). Tento rozvoj je nutné provádět s ohledem na obsah, učivo a specifický obor školního vzdělávání (Janík et al., 2013; Slavík & Najvar, 2016). Proto jsme se rozhodli pro mapování kultury vyučování a učení na jedné konkrétní škole, jejíž vzdělávací kurikulum vychází ze společného školního vzdělávacího programu.

Na pojem kultura vyučování a učení matematice nahlížíme v této práci jako na pojem shrnující popis, zkoumání a pochopení procesů, které souvisí s výukou matematiky. „Jedná se o souhrn pravidel, zvyků, principů, norem a dovedností, které se vztahují k cílům a metodám vyučování, chápání matematiky jako oblasti lidského vědomí i jako

výukové oblasti a interakcím učitel–žák, učitel–třída, učitel–vedení školy, učitel–kolegové, učitel–rodiče, žák–žák a žák–třída“ (Hošpesová et al., 2007, s. 8). Vzhledem k rozsahu této rigorózní práce nebudeme však schopni pojmut vše zmíněné. V didaktických kazuistikách (kap. 5) se zaměříme pouze na cíle a metody vyučování, interakce učitel–žák a učitel–třída. Tato specifikace a zúžení našeho zaměření by nám měly pomoci k tomu, abychom mohli tuto problematiku zkoumat detailně.

Kultura vyučování a učení bývá v některých publikacích doplňována o přívlastky např. nová nebo produktivní. Mnohdy se však významy výsledného sousloví v různých publikacích liší, proto jsme se rozhodli uvést pouze ty z nich, které jsou relevantní k tematice této rigorózní práce. Publikace autorů Weinert (1997), Reusser (2001) nebo Wiater (2005) používají pojem nová kultura vyučování a učení v tradici psychologického, pedagogického a didaktického konstruktivismu pro označování otevřeného, aktivního, produktivního a tvořivého učení a vyučování (Janík et al., 2022a).

Přívlastek „nová“ zde signalizuje proměnu. Nová kultura vyučování a učení jde tedy ruku v ruce s proměnami didaktiky. Didaktika se vyvinula z obsahově zaměřené teorie vzdělávání k psychologizující disciplíně centrované kolem konceptu učení. Tento trend je v zahraniční literatuře označován termínem *learnification* (Biesta, 2014). Termín zdůrazňuje mimo jiné i význam interakce a dialogického přístupu k vyučování a učení.

Současný výzkum také hojně akcentuje roli jazyka a komunikace ve vztahu k učení a vytváření znalostí ve třídě (Jones & Hammond, 2018). Řadu současných didaktických přístupů či výukových strategií nové kultury vyučování a učení tak můžeme charakterizovat snahou o zdůraznění dialogu mezi učitelem a žáky ve třídě (Wilkinson et al., 2015). „Dobrá výuka je v tomto pojetí taková, která povzbuzuje žáky k aktivnímu hovoru o učivu“ (Šed'ová, Švaříček & Šalamounová, 2022, s. 11).

Přívlastek „nová“ může signalizovat také přechod z jedné kultury (staré) do druhé (nové). Tento přechod však není ze dne na den, jedná se o dlouhodobý proces. Ten je výslednicí dvou protichůdných tendencí. První přichází do vzdělávacího systému zvenčí a cílí na přizpůsobení se novým požadavkům společnosti, druhá žádá o změnu vlastní, tedy reprodukci již existujícího (Hošpesová et al., 2007). Tato nová kultura vyučování a učení pracuje převážně na úrovni mikro-didaktiky, tzn. s jednotlivými akty učebního procesu, jako jsou interakce mezi učitelem a žáky, organizačními formami a metodami

výuky (Janík et al., 2022a). Na úrovni mikro-didaktiky se pohybuje i výzkum této rigorózní práce.

Produktivní kulturu vyučování a učení zmiňují ve svých publikacích např. autoři Dvořák et al. (2015); Šed'ová & Šalamounová (2016); Švaříček et al. (2017); Janík et al. (2022a). Dle autorů Janík et al. (2022) se produktivní kultura vyučování a učení vyznačuje souladností (integrita výuky) či proporčností mezi svými klíčovými komponentami, mezi něž patří „vzdělávací cíle, obsah; součinnost žáků a učitele ve výuce. Vyznačuje-li se výuka tzv. integritou, „...není zatížena didaktickými formalismy, je sémanticky bohatá a zároveň uměřená a pro žáky kognitivně aktivizující“ (Janík et al., 2022, s. 19). Šed'ová & Šalamounová (2016, s. 47–48) uvádějí, že produktivní kultura vyučování a učení označuje velmi široký rámec, do něhož můžeme řadit mnoho specifitějších, kontextově vázaných konceptů. Autorky za realizaci produktivní kultury vyučování a učení považují např. dialogické vyučování (Alexander, 2006; Lyle, 2008; Reznistkaya & Gregory, 2013). Podobně jako autorky Šed'ová & Šalamounová (2016) nahlíží na produktivní kulturu vyučování a učení ve své knize např. Štěpáník (2019). Přívlastky „produktivní“ a „nová“ jsou v některých případech zaměnitelné (Janík et al. 2022a).

V této rigorózní práci není však naším cílem označovat konkrétní výukové situace za realizaci či nerealizaci produktivní, resp. nové kultury vyučování a učení. Chceme přinést reálný vhled do vyučovacích hodin matematiky na ZŠ Dobrá ve školních letech 2022/2023 a 2023/2024 v rámci revize ŠVP ZŠ Dobrá, a to bez ohledu na to, zda bude výuka vedena konstruktivisticky, transmisivně nebo např. formou dialogického vyučování. Dále se pokusíme některým učitelům ZŠ Dobrá poskytnout hloubkovou reflexi výukových situací a představit jim způsob, jak mohou svou výuku i nadále samostatně reflektovat a kultivovat. Cílem této práce je pozorovat a hledat cesty, které by mohly vést ke zlepšení a kultivaci této kultury. Abychom ale mohli stávající kulturu zlepšovat, musíme ji nejprve poznat.

Výše uvedené stručné vymezení základních pojmů dále rozvíjíme v následujících kapitolách, kde je zasadíme do odpovídajícího teoretického a praktického kontextu a vysvětlíme je v širších souvislostech.

2. Teoretická východiska a dosavadní stav poznání problematiky

2.1 Žákův poznávací proces

s. 28–36

2.2 Didaktická transformace obsahu: Od kurikulárních obsahů k obsahu výuky

s. 36–46

2.3 Reflexe po vyučovací hodině

s. 46–50

2.4 Způsoby realizace nové produktivní kultury vyučování a učení matematice

s. 50–62

2.5 Matematická gramotnost

s. 63–70

2.6 Digitální gramotnost a digitální kompetence

s. 70–79

2.7 Shnutí teoretických východisek

s. 79–81

Teoretická východiska a dosavadní stav poznání problematiky

V kapitole jsou uvedena teoretická východiska této rigorózní práce. Nejprve stručně popisujeme poznávací proces žáka, ze kterého vychází různé způsoby, metody a formy výuky obecně. Dále zmiňujeme didaktickou analýzu učiva a přípravu pedagogů na vyučovací hodinu. Na tuto část navazujeme teoretickým zkoumáním didaktické transformace obsahu v rámci vzdělávání na základních školách, přičemž pozornost je zde věnována především transformaci, kterou běžně provádí pedagogičtí pracovníci v rámci výuky, tzn. psychodidaktické transformaci. Poté uvádíme základní informace o (sebe)reflexi pedagogů po vyučovací hodině. Na tyto běžné činnosti pedagogických pracovníků navazujeme uvedením několika příkladů možných realizací nové produktivní kultury vyučování a učení. Toto je uvedeno s cílem nalézt konkrétní „vlastnosti“ výuky, jež jsou různými výzkumy a odborníky vyhodnocovány jako edukačně efektivní a vhodné pro 21. století. Tento výčet „vlastností“ nám dále pomáhá při hodnocení kvality výuky, kterou jsme zaznamenali.

Další část této kapitoly tvoří teoretická východiska problematiky matematické a digitální gramotnosti, jež nabývá na významu v souvislosti s tím, jak rychle se mění společnost 21. století. V souvislosti s digitální gramotností vymezujeme fungování informačních a komunikačních technologií (dále jen ICT) jako didaktického prostředku ve výuce matematiky. Dále uvádíme také základní charakteristiky generace alfa¹², která bude v následujících letech základní školy navštěvovat. Charakteristiky této generace také úzce souvisí s otázkou zprostředkovávání vzdělávacích obsahů, aktuálním stavem matematické a digitální gramotnosti a s novou kulturou vyučování a učení. V závěru kapitoly uvádíme shrnutí těchto teoretických východisek.

2.1 Žákův poznávací proces

Nejprve se zaměříme na poznávací proces dětí, resp. v našem případě žáků. Z jejich poznávacího procesu bychom měli totiž vycházet při výběru způsobu, jak a s jakým

¹² Generace alfa je označení pro generaci lidí, která se narodila po roce 2010, tedy do doby, kdy jsou dotykové obrazovky všudypřítomné. Tato generace je někdy označována jako screenagers (McCridle, 2020, s. 6).

přístupem je budeme vyučovat. Popis a zkoumání poznávacího procesu nám usnadní myšlenka Bolzanových-Popperových tří světů. Bolzano ve svém díle představil myšlenku, že náš „vesmír“ je utvářen třemi světy, „svět jedna – to jsou písemnosti; svět dvě – to jsou naše prožitky, když tyto písemnosti čteme; a svět tři – to jsou obsahy toho, co čteme, především obsahy vět“ (Hejný & Kuřina, 2015, s. 83). Popper (1978) na Bolzanovy myšlenky navázal a ve svém díle *The Tanner Lecture on Human Values* představuje své tři vzájemně integrující „světy“. Svět jedna popsal jako svět složený z fyzických těles (např. kamenů, hvězd, rostlin, zvířat), ten můžeme dále dělit na živé a neživé fyzické objekty. Svět dva obsahuje mentální, psychologické a kognitivní procesy, stavy nebo subjektivní zkušenosti a zážitky (např. bolesti, radosti, myšlenky, rozhodnutí, vnímání). Svět tři dle Poppera zahrnuje produkty lidského ducha (např. jazyky, pohádky, mýty, vědecké teorie, písně, matematiku). Všechny tyto světy jsou vzájemně propojeny (Popper, 1978). Předmětem našeho zkoumání je však svět školy, který obsahuje produkty všech tří světů; fyzikálního – svět 1; duševního – svět 2; kultury – svět 3.

Samotné vzdělávání ve škole může probíhat cestou transmise myšlenek ze světa 3 do světa 2 např. formou jazykové transformace vědeckých poznatků do mysli studujících. V tomto případě žáci naslouchají a snaží se vložit do paměti vše, co čtou nebo slyší. Při samostatném řešení problému se snaží imitovat řešitelský proces učitele, proto tento způsob výuky můžeme označit jako instruktivní (Hejný & Kuřina, 2001). „Jestliže se proces učení omezí pouze na popsané přejímání hotových a přesně artikulovaných produktů světa 3, bude výsledné poznání trpět formalismem¹³“ (Hejný & Kuřina, 2001, s. 44). Opakem cesty transmise je v didaktice cesta konstrukce. „O cestě konstrukce mluvíme, když je žák motivován ke zkoumání jistého problému, samostatně hledá jeho řešení, zamýšlí se, experimentuje, nabytou zkušenost eviduje, třídí, analyzuje, porovnává se zkušenostmi jiných lidí. O svých úvahách diskutuje, při hledání řešení chybí, objevuje příčiny chyb a nachází cesty k jejich odstranění“ (Hejný & Kuřina, 2001, s. 45). Během této cesty konstrukce si žák vlastní myšlenkovou činností konstruuje svůj svět 2 a vztahuje ho ke světu 3 nebo světům 2 ostatních (spolužáků, učitelů atd.) (Hejný &

¹³ V pedagogice a didaktice je formalismus obecně chápán jako porušení harmonie obsahových, projevovalých, organizačních, aplikačních a úkolových prvků, které mají tvořit přirozenou jednotu“ (Mojžíšek, 1969, s. 89). Poznání trpící formalismem „neumožní žákům další tvůrčí použití těchto poznatků, jejich obměňování, je rozvíjení, propojování na poznatky jiné, jejich použití mimo oblast reprodukce a imitace“ (Hejný & Kuřina, 2000, s. 45).

Kuřina, 2001). Autoři Hejný & Kuřina (2001) vnímají smysl vzdělávání především v kultivaci žákovského duševního světa (světa 2). „Přitom nejde prioritně o to, aby žák ovládal určitou sumu poznatků či informací, ale o to, aby rozuměl světu, aby dokázal řešit problémy, s nimiž přijde do styku, aby uměl vyhledávat a hodnotit informace, aby měl vybavení pro svůj další rozvoj“ (Hejný & Kuřina, 2001, s. 44).

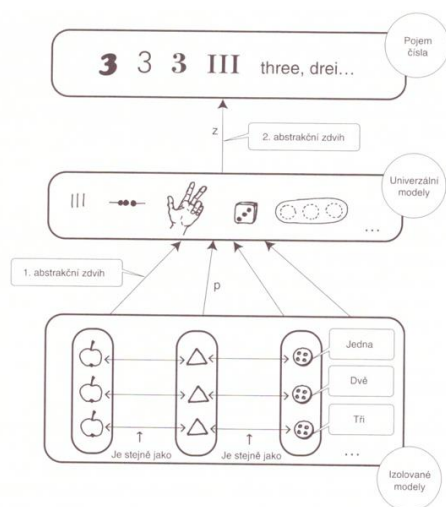
Kultivace žákovského světa 2 je otázkou porozumění, přičemž „...rozumět znamená chápat souvislosti, umět formulovat otázky a problémy a řešit je, umět aplikovat teorii“ (Hejný & Kuřina, 2015, s. 92). Proces porozumění obsahuje jednu důležitou složku, tou je práce s reprezentacemi¹⁴. Pro účely tohoto příspěvku si vystačíme s dělením těchto reprezentací na vnitřní (mentální) a vnější (externí) (Janko, 2012). Zjednodušeně můžeme vnější reprezentací rozumět část světa 1, „která umožňuje žákovi proniknout hlouběji do světa 3 nebo rozvinout jeho svět 2“. Vnitřní reprezentací budeme pro tuto kapitolu rozumět „obraz jevu v žákově světě 2, tedy např. novou představu jevu“. Vnitřní reprezentace jsou tedy výsledkem žákovské aktivity, kterou nelze započít bez jeho zájmu (Hejný & Kuřina, 2015, s. 92–93).

Žák je nejen ve škole obkloповán produkty ze všech tří světů, seznamován je během jejich objevování s pro něj novými pojmy, které zařazuje do určitých souborů. Aby mohl proces objevování nových pojmů započít, měla by mu předcházet etapa motivace¹⁵, která „...vede k intenzivnímu zaměření a obvykle i k citovému upnutí ke sledovanému jevu...“ (Hejný & Kuřina, 2015, s. 96). Tvorba pojmu poté probíhá pomocí procesu abstrakce. „V procesu abstrakce oddělujeme od vnímaného jevu to, co považujeme za podružné, nepodstatné, a zdůrazňujeme to, co považujeme za zásadní, podstatné, charakteristické“ (Hejný & Kuřina, 2015, s. 95; Ficová & Pavelková, 2018). Důležitým krokem procesu abstrakce je „...okamžik přeměny kvantity zkušeností subjektu v novou kvalitu, v nový pojem“. Tento okamžik budeme nazývat *abstrakčním zdvihem* a považovat ho za „...ukončení etapy prvotních zkušeností poznávajícího s poznávaným pojmem“ (Hejný & Kuřina, 2015, s. 95). S postupným kvantitativním růstem poznatků je u poznávajícího vyvolána potřeba je hodnotit. Vytvářejí se tak obecné, univerzální zkušenosti (Hejný &

¹⁴ „Reprezentace je v psychologii učení způsob, kterým jedinec zpracovává, chápe a uchovává určitou zkušenost v paměti“ (Průcha, Walterová & Mareš, 2003, s. 200).

¹⁵ „Motivace je důvod, proč věci děláme. Hybná síla. Jádro našeho chtění. Vnitřní kompas. Proces, který dává organismu energii. Smysl nějaké činnosti. Nástroj k uspokojení potřeby. Pohon. A někdy i důsledek úspěšně vykonané činnosti“ (Medlíková, 2021, s. 13).

Kuřina, 2015). Cestu od izolovaného modelu k samotnému abstraktně vnímanému pojmu pomocí abstrakčních zdvihů naznačuje obrázek 1.



Obrázek 1 Proces uchopování čísla tři (Hejný & Kuřina, 2015, s. 100)

*Izolované modely*¹⁶, *univerzální modely*¹⁷ a pojmy můžeme hromadně nazvat *mentálními reprezentacemi*. Definic pojmu mentální reprezentace bychom našli bezpočet (Najder, 1989; Jorna, 1990; Sedláková, 1992; Teichman, 2003; Sedláková, 2004). Jako příklad uvedeme definici autorů Ruisel & Ruiselová (1990), kteří vymezují mentální reprezentace jako „finální výsledek kódování informací, který je buď uložen v paměti (dispoziční mentální reprezentace), nebo je součástí proudu uvědomovaných informací (aktuální reprezentace)“ (Sedláková, 1995, s. 38). Učitel by měl poskytnout žákům takové vnější (externí) reprezentace poznatků, které by jim umožnily, aby si vytvářeli vlastní vnitřní (mentální) reprezentace k řešení problémů (Bertrand, 1998). Sedláková (2004) dále dělí externí reprezentace na obrazové (např. obrázky, videa, animace, symboly, modely) a jazykové (např. výklad, audionahrávka). Koncept reprezentací má pro didaktiku nejen matematiky zásadní význam, postihuje totiž předmět didaktiky na pomezí oborových konceptů a žakovských prekonceptů. Zároveň se významně uplatňuje při vysvětlování didaktické transformace (Janko, 2012).

¹⁶ „Model chápeme jako metodologický prostředek k tomu, abychom se „vyznali v situaci“. Izolovanými modely čísla 4 jsou např. 4 nohy, 4 hrušky, 4 knoflíky, jsou tedy reprezentanty obecného pojmu“ (Hejný & Kuřina, 2015, s. 131).

¹⁷ „Etapa univerzálních modelů je etapou nalézání výsledků, nalézání společné podstaty komunity izolovaných modelů i jejich vzájemných souvislostí. Mají obecnější charakter než modely izolované. Univerzálním modelem kvadratické rovnice $x^2 = 16$ je obecná kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ “ (Hejný & Kuřina, 2015, s. 132).

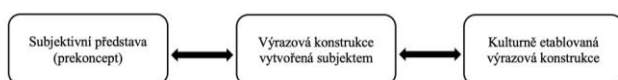
Mají-li se žáci naučit na základní škole číslice nebo např. geometrické objekty, musí se mimo jiné učit i schopnosti *obsahové reprezentace*, jež nám umožňuje sdružovat všechny objekty stejné vlastnosti do jedné třídy. Jako příklad uvedeme trojúhelník jakožto obsahovou reprezentaci: naučí-li se žák rozpoznávat trojúhelník na základě jeho obsahové reprezentace (vlastností) a objeví nový rovinný geometrický útvar, jenž má shodné geometrické vlastnosti (tři vrcholy; tři strany; tři vnitřní úhly, přičemž součet jejich velikostí je 180°), využije schopnost obsahové reprezentace všech trojúhelníků, které již někdy dříve vnímal a přidruží tento rovinný geometrický objekt do třídy trojúhelníků (Janko, 2012). Schopnost obsahové reprezentace můžeme u žáků kultivovat dostatečně bohatou činností s příslušnými objekty, např. „...odkazováním (denotováním) nebo uváděním příkladů či vzorků (exemplifikováním) k určitému fenoménu...“ (Slavík, 2011, s. 213–214). Schopnost vytvářet *reference mezi reprezentujícími objekty a reprezentovanými fenomény* lze považovat za přirozenou součást práce učitele (Janko, 2012, s. 32). Shulman (1986) v této souvislosti mluví o tzv. didaktických znalostech obsahu jako o dispozici učitele uvádět příklady nebo alternativní reprezentace. „Aby žák pochopil, co jsou čísla, musí umět počítat“ (Janko, 2012, s. 32).

Model didaktické rekonstrukce

V předchozím odstavci jsme zmínili, že je při výuce vhodné využívat různé způsoby ztvárnění obsahu vzdělávání, tzn. různé *reprezentace učiva* (Čáp & Mareš, 2001). Koncept reprezentací¹⁸ je uplatňován také při vysvětlování didaktické transformace. Abychom uvedli souvislost mezi konceptem reprezentací a didaktickou transformací, představíme okrajově model didaktické rekonstrukce. „Cílem tohoto modelu je vytvořit teoretický rámec plánování, průběhu a hodnocení výzkumu výuky a učení se v oblasti odborných didaktik“ (Jelemenská, 2009, s. 147) Jak již název modelu napovídá, byl vytvořen za účelem didakticky rekonstruovat obsahy vědeckého poznání. Při utváření vzdělávacího obsahu jsou klíčovými komponentami: „objasňování oborových představ, výzkum žákovských představ a didaktická strukturace učebního prostředí“ (Jelemenská et al., 2003, s. 91). Oborové a žákovské představy jsou si v modelu rovnocenným zdrojem

¹⁸ Reprezentace chápeme jako „relace mezi reprezentujícími a reprezentovanými. Koncept reprezentací předpokládá, že objekt, který vnímáme tady a teď, musí být v nějaké souvislosti s objektem, který jsme již někdy v minulosti vnímali, není zpochybňován žádným z existujících pojetí.“ V kognitivní psychologii se setkáváme s několika pojetími reprezentací, která se liší „v tom, jaké kognitivní procesy, mechanismy předpokládají při organizaci a reprezentaci podnětů různého druhu (modality)“ (Janko, 2012, s. 26). Přehled různých forem reprezentací shrnuje ve své publikaci například Sedláková (2004, s. 68–69).

pro rekonstruování obsahu vyučování a učení (Jelemenská et al., 2003). Žákům je tedy během výuky předáván obsah vzdělávání, ti usilují o jeho subjektivní uchopení, vstupují tak do „...intersubjektivního prostoru, v němž dochází k utváření a komunikování významů“ (Janko, 2012, s. 33). Jakmile žák vybraný obsah subjektivně zpracuje, měl by být schopen sdělit ho druhým a své reprezentace zdůvodnit (Janík & Slavík, 2009). „Učitel by měl během výuky uvažovat a balancovat mezi třemi rovinami reprezentace, které propojují subjekt s intersubjektivním¹⁹ kontextem“ (Janko, 2012, s. 34). První rovinou jsou již zmíněné představy žáků (subjektivní uchopení obsahu). V publikacích jako např. Zormanová (2014, s. 28), Pivarč (2017, s. 84) nebo Kosíková (2011, s. 93) jsou tyto představy označovány jako *prekoncepty*. Druhou rovinu tvoří projevy představ žáků prostřednictvím odpovídajících výrazů, respektive výrazových konstrukcí²⁰. Výuka by měla být cílena na změny v představách žáků, které se mohou projevovat v jejich výrazech a musí mít nějaký obecně srozumitelný a obecně přijatelný rámec – kontext (Janko, 2012). Třetí rovinou jsou kulturně etablované výrazy, tzn. „představy vědců“, tj. např. odborně korektní matematické definice (Janko, 2012). Vztahy mezi těmito třemi rovinami graficky znázorňuje obrázek 2.



Obrázek 2 Tři roviny existence prezentovaného obsahu (Janko, 2012, s. 34)

Jak již schéma obrázku 2 naznačuje, žákovské a oborové představy jsou vnímány jako rovnocenné. Na jedné straně je důraz kladen na vědecké koncepty v rámci žákovských představ, na straně druhé vychází výzkum žákovských pojetí z předpokladu souhlasné struktury s představami vědců v daném oboru (Janík et al., 2009, s. 20). Aby učitel učinil obsah vzdělávání pro žáky srozumitelnější a přístupnější, může využívat např. různé didakticky uzpůsobené formy prezentování, vysvětlování, objasňování obsahu, analogie, metafory, modely. Tyto různorodé způsoby přibližování obsahu budeme nazývat reprezentací učiva (Janík et al., 2009).

¹⁹ Kontext, který je přístupný více než jednomu subjektu, je přístupný více myslím. V tomto případě můžeme nahradit slovem socio-kulturní (Janko, 2012, s. 34).

²⁰ „Výrazová konstrukce je způsob vyjádření představy, resp. pojmu, je to vnější obsahová prezentace. Slovo konstrukce zdůrazňuje tvůrčí charakter, nutnost ji určitým postupem vytvořit, postupně ji vybudovat“ (Janko, 2012, s. 35). Příkladem výrazové konstrukce může být např. zápis součtu $4 + 9$.

Na závěr této kapitoly zmíníme okrajově také model didaktické rekonstrukce pro učitelské vzdělávání, který má dvě roviny. První rovina vychází ze základního předpokladu didaktické rekonstrukce, tudíž chceme-li učební předměty pro účely učení a vyučování rekonstruovat, musíme znát žákovské představy. Druhá rovina integruje tři oblasti: didaktické strukturování učebního prostředí, zkoumání učitelových představ a koncepce učitelského vzdělávání. Ve výzkumu učitelových představ jsou kladeny tři výzkumné otázky: „Jaké představy mají učitelé o určitém učivu? Jaké představy mají učitelé o každodenních představách žáků o určitém učivu? Jaké představy mají učitelé o tom, jak a kdy by mělo být určité učivo vyučováno?“ (Janík et al., 2009, s. 24). My jsme se těmito otázkami inspirovali při tvorbě dotazníkového šetření 1 (příprava učitele na vyučovací hodinu matematiky a didaktická analýza učiva), které je představeno v kap 3.7.1.

Kurikulum a vzdělávací oblast Matematika a její aplikace

Definice pojmu kurikulum bychom našli bezpočet. V této kapitole uvedeme pouze některé, které jsou v souladu s tématem této rigorózní práce. Tento pojem či výraz je běžně používán mezi pedagogy po celém světě. S původním významem (běh, průběh) má tento pedagogický termín mnoho společného. „Kurikulum v širším vymezení znamená veškeré učení, jež probíhá ve škole nebo v jiných institucích, a to jak plánované, tak neplánované učení“ (Lawton & Gordon, 1993, s. 66). „Kurikula jsou učební plány, a sice takové, jež vznikají na základě vědeckých postupů, určují jasné časové úseky pro vyučování a jsou uzpůsobeny evaluační kontrole a případné inovaci“ (Roth, 1991, s. 659). V českém Pedagogickém slovníku ho Průcha et al. (2013, s. 137) definují jako „...obsah veškeré zkušenosti, kterou žáci získávají ve škole a v činnostech ke škole se vztahujících, její plánování a hodnocení“. Kurikulum není tedy totéž, co učivo. Pojem kurikulum můžeme nahradit termínem obsah vzdělávání, jejich význam je totožný. „Obsah vzdělávání vyjadřuje nejen témata či informace, jež jsou plánovány pro školní výuku, aby se staly znalostmi žáků, ale také plánované dovednosti, hodnoty, postoje, zájmy, jež se rovněž mají vytvářet v žácích. Do obsahu vzdělání se řadí nadto také formy a prostředky výuky, plánované cíle a standardy vzdělávání a jiné“ (Průcha, 2017, s. 245). Obrázek 3 zachycuje dělení existence obsahu vzdělávání do pěti forem. Z obrázku 3 je patrné, že plánovaný obsah vzdělávání (to, co konstruktéři kurikula naplánují), není totožný s realizovaným obsahem vzdělávání (to, co jsou žáci schopni se učit).

	Formy	Produkty
(A)	koncepční forma (konceptce, vize, plány aj. toho, co má být ve školách obsahem vzdělávání)	dokumenty školské politiky, formulace národních priorit vzdělávání, konceptce různých zájmových skupin
↓		
(B)	projektová forma (konkrétně plánované projekty obsahu vzdělávání)	vzdělávací programy, učební plány a osnovy (škol, předmětů), učebnice, standardy vzdělávání aj.
↓		
(C)	realizační forma (obsah vzdělávání prezentovaný subjektům edukace)	konkrétní akty realizace učiva učiteli či výukovými médii
↓		
(D)	rezultátová forma (obsah vzdělání percipovaný subjekty edukace)	vzdělávací výsledky („osvojené učivo“)
↓		
(E)	efektová forma (obsah vzdělání fungující na straně subjektů edukace)	efekty obsahu vzdělávání v profesní kariéře lidí, jejich politických aj. postojích apod.

Obrázek 3 Formy existence obsahu vzdělávání; Průcha (2017, s. 246, tab. 6.2)

Mezinárodní výzkum TIMSS (2019), Podlahová et al. (2012, s. 26), Průcha (2017, s. 246–247) a mnoho dalších autorů uvádějí i jiné tři roviny, v nichž se kurikulum analyzuje. Jedná se o kurikulum zamýšlené, realizované a dosažené. *Zamýšlené kurikulum* je „...to, co je plánováno ve vzdělávací soustavě země, tj. cíle a obsah vzdělání v učebních plánech a osnovách. *Realizované kurikulum* je učivo skutečně osvojené studenty v konkrétních třídách, posluchárnách, laboratořích a školách. Zkoumá se testy, dotazníky, které se týkají kvalifikace učitelů, organizace výuky, učebnic, prostředků. *Dosažené kurikulum* je učivo studenty skutečně osvojené. Zkoumá se speciálními testy pro měření vzdělávacích výsledků“ Podlahová et al. (2012, s. 26–27). Toto dělení využijeme i my pro ukotvení teoretického rámce vzdělávacího obsahu oblasti Matematika a její aplikace.

Nejprve se zaměříme na zamýšlené kurikulum námi zkoumané vzdělávací oblasti. Systém kurikulárních dokumentů je v souladu s principy kurikulární politiky tzv. Bílé knihy²¹ a zakotvenými ve školském zákoně č. 561/2004 Sb. Kurikulární dokumenty jsou vytvářeny na úrovni státní a školní. My se v této kapitole zaměříme na úroveň státní, konkrétně na RVP ZV (MŠMT, ČR, 2023), ze kterého vychází i školní vzdělávací program (dále jen ŠVP) ZŠ Dobrá.

Vzdělávací obsah základního vzdělávání je v RVP ZV rozdělen do devíti vzdělávacích oblastí, přičemž námi zkoumanou je vzdělávací oblast Matematika a její aplikace. Tato vzdělávací oblast je dále rozdělena do čtyř tematických okruhů (na 2. stupni – *Číslo a proměnná; Závislosti, vztahy a práce s daty; Geometrie v rovině a v prostoru;*

²¹ Národní program rozvoje vzdělávání v ČR, dostupné z: <https://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/bila-kniha-narodni-program-rozvoje-vzdelani-v-cr>

Nestandardní aplikační úlohy a problémy). Žáci se také učí využívat prostředky výpočetní techniky, což úzce souvisí s rozvojem digitální kompetence v této vzdělávací oblasti. RVP ZV je veřejně dostupný²² dokument, proto zmíníme pouze obsah jeho kapitoly 5.2 *Matematika a její aplikace*. Čtenář najde v RVP ZV na stranách 31–38 detailní charakteristiku této vzdělávací oblasti; popis jejího cílového zaměření; popis vzdělávacího obsahu vzdělávacího oboru pro 1. i 2. stupeň základního vzdělávání, přičemž tato část obsahuje očekávané výstupy a učivo jednotlivých tematických okruhů.

Naše rigorózní práce je zaměřena především na kurikulum realizované vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace na ZŠ Dobrá. Toto realizované kurikulum představujeme v kapitole 5 této rigorózní práce. Kurikulum dosažené žáky České republiky zmiňuje kapitola 2.5.

2.2 Didaktická transformace obsahu: Od kurikulárních obsahů k obsahu výuky

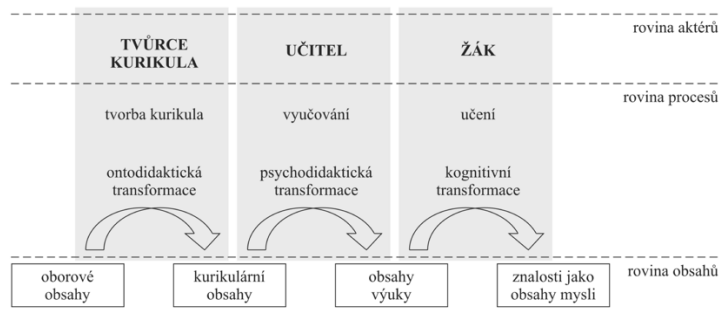
V předchozích odstavcích jsme představili kurikulum základního vzdělávání a vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Nyní se zaměříme na cestu od kurikulárních obsahů k obsahu výuky samotné. Didaktika si již od svého počátku klade otázky: „Čemu vyučovat (výběr vzdělávacích obsahů a výběru učiva)? Jak tomu vyučovat (zpřístupnění učiva, vyučovací formy metody atp.)? Na otázky výběru vzdělávacích obsahů odpovídají spíše oboroví didaktici nebo zástupci odborných vědeckých disciplín. Nicméně výběr učiva a jeho didaktické zprostředkování žákům je většinou na učiteli samotném (Knecht, 2007, s. 68).

„Termín transformace obecně vyjadřuje převod obsahu mezi subjektivní, objektivní a intersubjektivní realitou“ (Janík, 2018, s. 1). „Transformace obsahu je taková proměna způsobu existence obsahu, při níž se obsah relativně nemění, takže výsledek interpretace transformovaných podob obsahu je týž“ (Chocholoušková & Müllerová, 2019, s. 97). „Tato transformace je spojená se zpracováním obsahu v paměti do znalosti obsahu (procedurální, deklarativní) spolu s reprezentacemi znalostí v odpovídajících činnostech komunikace je nutnou podmínkou jakéhokoliv učení i vyučování“ (Jedlička et al., 2018, s. 199–201). Tento proces je rozhodující při zpřístupňování zprvu nedostupného obsahu

²² MŠMT ČR, RVP ZV 2023 s vyznačenými změnami, dostupné z: <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/>

žákovi. Je-li proces úspěšný, žák si obsah osvojí na základě svých zkušeností. Pojem transformace obsahu vypovídá o univerzální povaze tohoto procesu, náročnost této transformace si pak každý žák ve školním prostředí může vyzkoušet např. při počítání rovnic o dvou neznámých nebo skoku dalekém (Slavík et al., 2017). „Jestliže jsou transformace obsahu podmíněné záměrnou didaktickou přípravou nebo podporou v učebním prostředí, nazýváme je *didaktické transformace obsahu*...“ (Chocholoušková & Müllerová, 2019, s. 97).

Autoři, např. Čapek (1981); Štech (2004a, 2004b); Helus (2007); Slavík & Janík (2007); Janík et al. (2009), ve svých publikacích dále rozlišují tři typy obsahové transformace: ontodidaktickou, psychodidaktickou, kognitivní. *Ontodidaktická transformace* spočívá v převádění oborových obsahů do obsahu kurikulárních (vzdělávacích), a je tedy úkolem tvůrců kurikula. *Psychodidaktickou transformaci* obsahu provádí většinou učitel. Obsah, který transformuje, pochází z kurikulárních dokumentů, ty regulují vzdělávání a vymezují rámec pro aktivity učitele a žáků ve výuce (Janík et al., 2009). *Kognitivní transformace* je proces související s utvářením žakovských znalostí, resp. vnitřních (mentálních) reprezentací obsahu (Janík et al., 2009). Roviny těchto tří typů transformace obsahu výstižně popisuje obrázek 4.



Obrázek 4 Roviny existence obsahu a obsahové transformace; Janík et al. (2009, s. 38, obr. 7)

Z obrázku 4 je patrné, že autoři rovinu obsahů dělí na čtyři části: *oborové obsahy*, *kurikulární obsahy*, *obsahy výuky* a *znalosti jako obsahy mysli* (Janík et al., 2009, s. 38).

Rovinu aktérů pak tvoří tvůrce kurikula, učitel a žák. Uvedené schéma však nemusí být vždy výhradně platné, jedná se o určitou typizaci. Ta umožňuje poukázat na základní principy transformace obsahu a rozlišit typickou zodpovědnost jednotlivých aktérů. Jako příklad záměny uvádíme situaci, ve které může být aktérem psychodidaktické transformace např. sám žák (Janík, 2018).

Každá vyučovací hodina je originální a podléhá vlivům mnoha faktorů, hovořit můžeme např. o psychosociálním klimatu třídy; zdraví, schopnostech, zkušenostech a motivaci učitele, žáků nebo počtu žáků. Nelze tedy poskytnout všeobecně platný návod, jak ztvárnit vzdělávací obsah ve výuce. Nicméně pedagogické a didaktické teorie mohou učitelům poskytnout potřebné informace a vybavit je dovednostmi, na jejichž základě budou moci samostatně konkrétní vyučovací hodinu připravit tak, aby zohledňovala potřeby učitele i žáků (Knecht, 2007, s. 69). Učitelé se nyní v čase po „malé revizi“ RVP ZV setkávají s novým úkolem. Jejich hlavní činnost již nespočívá pouze ve zprostředkování vzdělávacích obsahů žákům tak, aby jim porozuměli. Učitelé by po této revizi měli žákům prezentovat vzdělávací obsahy v takové podobě, aby tyto obsahy žáky vedly k získávání digitální kompetence a zároveň k dosažení očekávaných výstupů, v našem případě vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace definované v RVP ZV. Pro školní praxi je důležitý nejen souhrn příslušných aktivit, ale především jejich vhodné „nasazení“ do výuky, což bývá označováno termínem „umění dobře učit“ (Kuřina, 2009).

V této rigorózní práci budeme pozornost věnovat především psychodidaktické transformaci. Ta je založená na uplatnění širokého spektra různých způsobů ztvárnění obsahu vzdělávání, které souhrnně označujeme jako reprezentace učiva (Janík et al., 2009). Učitel by měl během tohoto procesu „...respektovat subjektivitu žáka a na různých úrovních diagnostikovat žákovy předpoklady k zacházení s obsahem“ (Janík & Slavík, 2009, s. 130). Výsledky námi zkoumaných psychodidaktických transformací budou představeny v podobě didaktických kazuistik, jež jsou výsledkem procesu anotace, hloubkové analýzy a alterace příslušného videozáznamu vyučovací hodiny. Ten dokumentuje obsah vzdělávání v realizační formě (to, co se skutečně prezentuje v interakci učitel–žáci, učitel–třída) (Šafránková, 2019).

Bloomova taxonomie cílů ve školní praxi

Jak již bylo zmíněno, učitel by měl „...respektovat subjektivitu žáka a na různých úrovních diagnostikovat žákovy předpoklady k zacházení s obsahem“ (Janík & Slavík, 2009, s. 130). Bloom zastával stanovisko, že existují pouze žáci, kteří se učí rychleji, a žáci, kteří se učí pomaleji, tedy vyžadují více času na učební úkoly. „Převážná většina žáků může v průběhu edukačních procesů získávat velmi podobné vlastnosti, pokud jde o schopnost učit se, rozsah (kapacitu) učení – za předpokladu, že učení probíhá ve vhodných podmínkách“ (Průcha, 2020, s. 42). Bloomova teorie se tedy soustředí právě na didaktické podmínky školního učení (Průcha, 1982). Zvládnout či osvojit si libovolný soubor poznatků nebo dovedností ve škole tedy může teoreticky každý žák. Každý je však na různé myšlenkové úrovni. Formulovat požadavky na žáka na různé myšlenkové úrovni umožňuje tzv. Bloomova taxonomie kognitivních cílů. Tuto taxonomii považujeme pro současnou didaktiku za stále aktuální. Pomocí aktivních sloves, která obsahuje, jsou formulovány očekávané výstupy a učební úlohy, obsahující požadavky na výkon žáka. My tato aktivní slovesa využíváme v dotazníkových šetřeních 1 a 2 této rigorózní práce při popisu konkrétní výukové situace a jejího průběhu. Taxonomii tvoří šest hierarchicky uspořádaných kategorií cílů (viz obr. 5) (Kosíková, 2011).

Cílová kategorie (úroveň osvojení)	Typická slovesa a jejich vazby používané k vymezení cílů	
1. Zapamatování (znalost) specifických informací terminologie a fakta, klasifikace, kategorizace, obecné poznatky a generalizace v oboru teorie a struktur	definovat doplnit napsat opakovat pojmenovat popsat	přidat reprodukovat seřadit vybrat vysvětlit určit
2. Pochopení (porozumění) příklad z jednoho jazyka do druhého, z jedné formy komunikace do druhé, jednoduchá interpretace, extrapolace (vysvětlení)	dokázat jinak formulovat ilustrovat interpretovat objasnit odhadnout opravit	převést vyjádřit vlastními slovy vysvětlit vypočítat zkontrolovat
3. Aplikace použití abstrakcí a zobecnění (teorie, zákony, principy, metody) v konkrétních situacích	aplikovat demonstrovat diskutovat interpretovat načrtnout navrhnout	použít prokázat registrovat řešit uvést vztah uspořádat
4. Analýza rozbor komplexní informace (systému, procesu) na prvky, stanovení hierarchie prvků, principů jejich organizace, interakce mezi prvky	analyzovat provést rozbor rozhodnout rozišit rozčlenit specifikovat	
5. Syntéza složení prvků a jejich částí do nového celku (ucelené sdělení, plán operací nutných k vytvoření díla nebo projektu, odvození souboru abstraktních vztahů k účelu klasifikace nebo objasnění jevů)	kategorizovat klasifikovat kombinovat modifikovat napsat sdělení organizovat reorganizovat shnout vytvořit obecné závěry	
6. Hodnotící posouzení posouzení materiálů, podkladů, metod a technik z hlediska účelu podle kritérií, která jsou dána nebo která si žák navrhne sám	argumentovat obhájit ocení oponovat podpořit (názory) porovnat provést kritiku posoudit	prověřit srovnat s normou uvést klady a zápory zdůvodnit zhodnotit

Obrázek 5 Bloomova taxonomie a slovník aktivních sloves používaných k vymezení cílů vyučování (Skalková, 2007, s. 122, tab. 9)

Bloom také na základě srovnávacích analýz proměnných ovlivňujících učební výsledky žáků vymezil celkovou determinovanost učení žáků ve škole. Mezi determinující faktory byly zařazeny: kognitivní vstupní charakteristiky žáků (a); afektivní vstupní charakteristiky (b) (motivace vázané na jednotlivé předměty, na školu celkově, na sebehodnocení žáků) a kvalita vyučování (c) (charakteristiky učitelů, tříd a škol, vyučování). Dle analýzy determinující faktor (a) tvořil 50 %, faktor (b) 25 % a faktor (c) 25 % pravděpodobného podílu na variabilitě učebních výsledků (Bloom, 1976). Faktor (c) je předmětem našeho zkoumání v této rigorózní práci.

2.2.1 Příprava a průběh vyučovací hodiny

K výběru a zařazení konkrétních reprezentací učiva by mělo u vyučujícího dojít již ve fázi přípravy na vyučovací hodinu. Určitě bychom však našli situace, kdy je reprezentace volena vhodně bez předchozí přípravy v rámci improvizace či reakce na aktuální nečekanou výukovou situaci (Suchoradský, 2010). „Plánování (projektování) toho, co se má udělat, je prvním krokem každé uvědomělé lidské činnosti. Plán je vlastně představou příštího stavu věcí“ (Kalhous & Obst, 2002, s. 354). Jak obrázek 4 napovídá, učitelé při plánování výuky vycházejí z různých kurikulárních dokumentů. Na základě těchto dokumentů zpracovává učitel časově tematický plán učiva a přípravu na konkrétní vyučovací jednotku. Plánuje-li učitel činnost vyžadující různá technická zařízení nebo např. pomůcky, projektování výuky není již pouze představou, ale jeho obsahem je i zajištění realizace záměru vyučovací jednotky (např. příprava na pokus, únikovou hru) (Kalhous & Obst, 2002).

Autorka Zormanová (2014) ve své publikaci uvádí model pro plánování a realizaci výuky. Model je členěn do pěti fází: „(1) analyzuj, (2) navrhni, (3) vypracuj, (4) uskutečni, (5) ověř“ (Zormanová, 2014, s. 22–23). Jedná se o zjednodušený model postupu, který uvádí autoři Kalhous & Obst (2002). My se v tomto odstavci pokusíme shrnout jeho hlavní kroky. Během školního roku by měl učitel průběžně studovat učební osnovy a tematické plány, ve kterých je zpravidla formulováno učivo a výukové cíle, jichž mají žáci dosáhnout. Na tyto cíle můžeme nahlížet jako na dlouhodobou vizi, k níž by měla výuka neustále směřovat. Následně by si měl učitel vybrat různé didaktické prostředky (např. učebnice, pracovní sešity, elektronické materiály), z nichž bude při výuce vycházet. Obsah těchto vybraných didaktických prostředků by měl odpovídat

učivu, které je vymezené učebními osnovami. Pozornost by měl věnovat také aktuálním potřebám žáků a jejich dosavadním znalostem (Kalhous & Obst, 2002). „Je věcí profesní etiky učitele, aby slepě neučil všechno to a jen to, co obsahují osnovy nebo učebnice, ale aby dotvářel kurikulum podle nových poznatků vědeckého bádání i podle svých znalostí oborové didaktiky, ale především podle situace žáků a komunity“ (Kalhous & Obst, 2002, s. 356).

„Základním artefaktem tradiční výuky v českých školách je tištěná učebnice“ (Bednárek et al., 2021, s. 101). Tištěné učebnice považují za hojně využívaný didaktický prostředek také např. autoři Roth et al. (2006); DeCesare (2007); Horsley & Sikorova (2014); Thompson (2014); Stará et al. (2017) nebo Burgos et al. (2020). Učebnice je definována jako „...druh knižní publikace s obsahem, strukturou a funkcemi přizpůsobenými pro didaktickou komunikaci. Funguje jednak jako součást kurikula (tj. představuje určitou část plánovaného vzdělávacího obsahu), jednak jako didaktický prostředek, tzn. řídí a stimuluje učení žáků a navozuje pedagogické činnosti“ (Průcha, 2009, s. 265). S digitalizací světa se mění i oblasti využívání nejrůznějších učebních pomůcek. Nynějším trendem je postupný přechod na učební texty v elektronickém formátu (Millar & Schreier, 2015). Tyto texty by měly být atraktivnější pro současnou generaci žáků základní školy (Vácha & Bohdalová, 2021). Jaké didaktické prostředky využívají při přípravě a realizaci výuky matematiky učitelé ZŠ Dobrá, to se pokusíme v této rigorózní práci zjistit.

Samotná příprava na konkrétní vyučovací hodinu je plně záležitostí učitele. Rys (1975) rozlišuje tři typy přípravy učitele na vyučovací hodinu: První typ nazývá „bleskovou přípravou“, během které učitel odpovídá na otázky: „Co? Jak?“ U druhého typu přípravy učitel pracuje s cíli, jež popisují, „čemu se mají žáci naučit a na jaké úrovni“. Zařazuje vyučovací jednotku do obsahových a časových souvislostí s tím, co bylo, a tím, co bude... Tento typ přípravy odpovídá na otázky: „Co již bylo? Čeho chci dosáhnout? Jak a čím toho dosáhnout? Jaké bude mít tato hodina pokračování?“ Jestliže si učitel vybere postupovat dle třetího typu přípravy, provádí již tzv. *didaktickou analýzu učiva*²³

²³ „Didaktická analýza učiva je myšlenková činnost učitele nebo taková metoda, která mu umožňuje pochopit obsah, rozsah a strukturu učební látky a najít výchovnou a vzdělávací hodnotu učební látky. Dále stanovit konkrétní výukové cíle v souladu s obecnými cíli výchovy a vzdělání v určitém učebním předmětu, v určitém ročníku a na určitém stupni školy“ (Podroužek, 1998, s. 42).

(Kalhous & Obst, 2002, s. 358). Celý postup didaktické analýzy učiva uvádíme na obrázku 6.

Důležitou etapou didaktické analýzy tematického celku učiva tvoří výběr základního učiva. Na významu v tomto procesu nabývá věcný obsah didaktického systému, který je omezen na nezbytná fakta, jevy, události, „...o nichž si mají žáci vytvořit odpovídající představy a které si mají osvojit v pojmové rovině jako poznatky, tedy jako strukturovaný systém pojmů“ (Vališová et al., 2011, s. 131). Procesuální stránka osvojování pojmů má stejný význam jako věcný obsah. Tato stránka zahrnuje myšlenkové operace, tzn. specifické intelektuální dovednosti, které se mají u žáků společně s poznatky učit a rozvíjet (Vališová et al., 2011).

1. Cíle – co chci, čeho zamýšlím dosáhnout

Sem by patřila formulace cílového chování žáka podle zásad uvedených v kapitole 9. Tyto dílčí cíle (úkoly) by měly být konkretizací některého z obecných cílů vzdělávacího programu.

2. Jakými prostředky chci těchto cílů dosáhnout:

- Obsah učiva – stručný nástin.
- Volba vyučovacích metod (důležitá je činnost žáků při výuce, ne pouze činnost učitele), didaktických pomůcek a technik, metodický postup.

3. Zvláštní didaktická hlediska:

- Jaké mají žáci o tématu předběžné znalosti, možná nesprávná pojetí (prekoncepty, miskoncepty)?
- Co z učiva bude pro žáky nejobtížnější?
- Jak budu žáky aktivizovat?
- Jak zajistím časovou a obsahovou kontinuitu obsahu učiva?
- Jak zajistím diferencovaný a individuální přístup k žákům?
- Jaké učební úlohy je potřeba připravit k procvičování a k upevňování učiva (včetně domácí práce pro žáky)?
- Jaká jiná hlediska (např. hygienická) je třeba respektovat?

4. Výchovné možnosti:

- Jak mohu učiva i průběhu vyučování výchovně využít (se zřetelem k celku třídy i k jednotlivcům)?

5. Organizace vyučovací jednotky:

- Které pracovní podmínky si musím zabezpečit?
- Jaký organizační typ vyučovací jednotky bude mé metodické koncepci nejlépe odpovídat?

6. Časový projekt vyučovací jednotky:

- Kolik času mohu věnovat jednotlivým fázím vyučovací jednotky?
- Kolik času si vyžádá domácí příprava žáků na další vyučovací jednotku?

7. K realizaci přípravy

- Jak budu zajišťovat pracovní součinnost žáků?
- Jak budu zjišťovat pracovní výsledky žáků?

Obrázek 6 Didaktická analýza učiva (Kalhous & Obst, 2002, s. 358–359)

Pojmová analýza učiva může být prováděna na různých úrovních a v několika směrech jeho struktury. Jedním ze základních členění struktury učiva je na: základní; pomocné a rozšiřující pojmy; zpracování pojmů do strukturálních map, schémat, klasifikací. Učitel následně vybrané učivo logicky uspořádá na základě cílů výuky a specifických možností učiva konkrétní vyučovací hodiny. Toto uspořádání pak závisí především na odbornosti učitele a na jeho schopnosti porozumět učivu daného tématu. Když učitel provede rozbor učiva tematického celku, vymezí základní činnosti žáků, přičemž didaktická analýza učiva umožní vymezit didaktické činnosti vlastní a učební činnosti žáků, jež vedou k žádoucímu rozvoji žáka. Následuje volba metody výuky, organizačních forem a ostatních materiálních didaktických prostředků. V neposlední fázi lze také formulovat učební otázky a úkoly (Vališová et al., 2011, s. 131–132). Na závěr lze říct, že „důkladné

provedení didaktické analýzy učiva spolu s pedagogickou diagnózou²⁴ vytváří předpoklady nejen dobrého projektu výuky, ale i efektivního řízení vyučovacího procesu v jednotlivých učebních předmětech“ (Vališová et al., 2011, s. 132).

„Plánování výuky tedy není jen hledáním odpovědi na otázku, co bude dělat učitel, a rozhodně by tím příprava neměla začínat“ (Kalhous & Obst, 2002, s. 363). Učitel by měl během plánování rozhodovat, co např. z osnov či učebnice je pro žáky důležité, co naopak zásadní není. Dále by měl přemýšlet také o tom, zda naopak v osnovách či učebních materiálech něco nechybí. Následně by měl formulovat takové cíle, k nimž je schopen najít objektivně posouditelná kritéria k jejich dosažení. V následujícím kroku je třeba hledat činnosti a aktivity pro žáky, které vedou k učení žáka a umožní dosažení cílů. Teprve po utvoření představy o tom, co by měli ve vyučovací hodině dělat žáci, přemýšlí o tom, co může v hodině dělat on. Po vyučování by se měl ke svému plánu vrátit a zhodnotit, zda bylo vytyčených cílů dosaženo, případně může zformulovat závěry pro budoucí vyučovací hodiny (Kalhous & Obst, 2002; Zormanová, 2014).

Vyučovací hodina a její fáze

Během rodinné večeře se rodina sejde u jednoho stolu a začnou ve stejnou dobu společně jíst. Každý má vlastní talíř, ale pokrm bývá pro všechny stejný. Mnohdy jsou to právě dospělí, kteří servírují večeři svým dětem. Konverzace u stolu nebývá ničím předem omezena, je otevřená a komentáře dětí i dospělých jsou oboustranně vítány. Rodinná večeře je považována za kulturní aktivitu. Vyučovací hodinu můžeme k rodinné večeři připodobnit. Ve třídě jsou dospělí i děti, konverzace není předem ničím omezena a místo pokrmu je „servírováno“ ve stejnou dobu např. učivo nebo dovednosti (Stigler & Hiebert, 2000, s. 85). Vyučování je tedy také kulturní aktivitou. Kulturní aktivity (praktiky) si osvojujeme převážně tím, že na nich participujeme, tzn. že jsme do nich dlouhodobě zapojeni, pozorujeme je a vykonáváme je (Dvořák et al., 2015). Stigler & Hiebert (1999) upozorňují na to, že jsme si v průběhu času pro vyučování vytvořili určitá pravidla a očekávání, která předáváme z jedné generace na druhou. Tímto sdílením a

²⁴ „Pedagogická diagnóza je vědecká disciplína, která se zabývá otázkami hodnocení úrovně výchovně vzdělávacího procesu, jeho podmínkami, průběhem a výsledky. Součástí diagnostické činnosti učitele je nejen zhodnocení současného stavu výchovně a vzdělávací činnosti, ale také vyjádření odborného soudu o možném vývoji sledovaného jevu –pedagogická prognóza. Tato diagnostická kompetence je základní výbavou učitelské profese. Pedagogická diagnóza podává přehledný výsledek zkoumání určitého pedagogického jevu, objektu či znaku, jeho odpovídající zařazení do konvencemi stanovené kategorie a označení podle platného pedagogického názvosloví.“ (Jedlička et al., 2018, s. 350)

šířením začínáme věřit, že právě tak vyučování běžně vypadá a vypadat musí, ač tomu tak mnohdy není (Stiegler & Hiebert, 1999). Cílem výzkumu této rigorózní práce bude zaznamenat a pomocí metodiky 3A analyzovat vyučovací hodiny matematiky na ZŠ Dobrá. Podobně jako autoři na ně budeme nahlížet jako na kulturní aktivity. Tyto aktivity mají totiž svoji vnější pozorovatelnou stránku, pro jejíž označení se používá pojem vzorec²⁵, který odkazuje k určitému uspořádání událostí v daném kontextu (Dvořák et al., 2015).

Jakmile si tedy učitel vyučovací hodinu připraví a naplánuje, přichází vyučování samotné. Zormanová (2014) ve své publikaci dělí vyučovací jednotku do pěti fází: motivační, expoziční, fixační, diagnostické, aplikační (Zormanová, 2014, s. 33–34). Motivační fáze výuky je typická tím, že učitel připraví žáka po psychické stránce na učení, motivuje ho k danému tématu, navodí u žáka zájem o to, co hodlá v dané vyučovací hodině probírat. Motivovat žáky je však třeba v průběhu celé vyučovací hodiny, nikoli pouze na jejím začátku (Zormanová, 2014). Způsobů, jak žáky v hodině motivovat, je mnoho. Čeští autoři zmiňující důležitost motivace ve výuce matematiky jsou např.: Langr (1984); Jáchim (1984); Novotná (2012, 2013); Hejný (2014); Čejková & Jandová (2018). Ze zahraniční literatury se jedná o publikace autorů např. Rao (2010); Hannula et al. (2016); Posamentier & Krulik (2016) nebo Tuohilampi (2022).

Během expoziční fáze jsou žákům zprostředkovávány nové vědomosti. „V žákově mysli dochází k vytváření pojmů, představ, formálních vědomostí a základů pro budování dovedností a návyků“ (Zormanová, 2014, s. 33). Tato fáze tedy zahrnuje všechny způsoby a postupy, na jejichž základě si žák učivo pod vedením učitele osvojuje. Fixační fáze patří společně s expoziční fází k časově nejnáročnějším. Je typická upevňováním a prohlubováním osvojených vědomostí, dovedností, návyků, postojů a přesvědčení, tzn. učivo se fixuje v paměti žáka formou např. opakování nebo cvičení (Zormanová, 2014, s. 33). Fáze probíhající v různých částech vyučovací hodiny je označována jako diagnostická. Setkat se můžeme se vstupní nebo závěrečnou diagnostikou. Vstupní diagnostika přináší informace o žákovských prekonceptech o daném tématu. Během

²⁵ S pojmem vzorec je často spojován také pojem *skript*, který označuje „mentální obraz odkazující k určitému adekvátnímu uspořádání událostí ve specifickém kontextu“ (Schank & Abelson, 1977, s. 41). Skripty nejsou dostupné přímému pozorování a bývají spíše předmětem zkoumání např. mezinárodně srovnávacích výzkumů (Dvořák et al., 2015, s. 130).

diagnostické fáze učitel prověřuje a hodnotí žákovy vědomosti o probraném tématu (Zormanová, 2014).

V libovolné vyučovací hodině jsou tedy účelně skloubeny dílčí postupy, vyučovací metody a techniky, které sledují konkrétní cíl. „Vyučovací hodina je základním článkem vyučování matematice“ (Květoň et al., 2010, s. 10). Strukturu vyučovací hodiny matematiky dělí autoři Květoň et al. (2010) na sedm částí: seznámení s novým učitelem; upevnění nového učiva; řešení úloh, cvičení; opakování dříve probraného učiva; kontrola výsledků domácí práce žáků; formulace úkolu pro domácí práci; prověřování a hodnocení vědomostí, dovedností, návyků žáků. Ne každá vyučovací hodina matematiky však dle autorů obsahuje všechny tyto elementy. O tom, jakou kombinaci učitel zvolí, rozhoduje hlavní cíl, který si před hodinou stanoví (Květoň et al., 2010). Hejný (2014) za hlavní vzdělávací cíl vyučování matematice považuje „...rozvoj matematického duševního orgánu každého žáka...“ (Freudenthal, 1971, s. 413–414). Autoři Miles et al. (2018, s. 107) uvádí, že „každý učitel má svou preferovanou strukturu vyučovací hodiny matematiky, nicméně neexistuje žádná konkrétní struktura, kterou by měl vyučující zavádět opakovaně každý den po celý školní rok“. Dodržování jedné konkrétní struktury může být pro žáky i vyučující značně omezující a demotivační (Miles et al., 2018). Jako příklad uvádějí autoři strukturu vyučovací hodiny inspirovanou knihou *Teaching Mathematics Developmentally* (Van de Walle et al., 2016), která je graficky znázorněná na obrázku 7.



Obrázek 7 Struktura vyučovací hodiny (Miles et al., 2018, s. 107, obr. 9.1, volně přeloženo)

Struktura a fáze vyučovacích hodin matematiky budou také předmětem našeho zkoumání během akčního výzkumu, proto jsme se rozhodli toto téma stručně teoreticky vymezit. Vzhledem k tomu, že se do akčního výzkumu zapojí více učitelů, předpokládáme, že se struktury vyučovacích hodin budou lišit.

Pedagogická komunikace

K vyučovací hodině a k reflexi po ní neodmyslitelně patří komunikace, v našem případě pedagogická komunikace, proto ji stručně v tomto odstavci teoreticky vymežíme. Pedagogickou komunikaci můžeme považovat za speciální případ sociální komunikace²⁶, jejímž prostřednictvím můžeme sledovat pedagogické cíle, vychovávat a vzdělávat (Nelešovská, 2005). A. N. Leont'jev uvádí tuto definici: „pedagogická komunikace je profesionální komunikace učitele se žákem při vyučovací hodině i mimo ni, jež má určité pedagogické funkce a je zaměřena na vytvoření příznivého psychologického klimatu“ (Leont'jev, 1978, s. 12). Gavora (1988, s. 22) definuje pedagogickou komunikaci jako „...výměnu informací mezi účastníky výchovně vzdělávacích cílů, která se řídí osobitými pravidly, která určují pravomoci jejich účastníků“. Jak již z definic vyplývá, hlavními aktéry pedagogické komunikace jsou na jedné straně učitelé (Hiebert & Grouws, 2007), vychovatelé, vedoucí např. zájmových útvarů, přednášející atd., na straně druhé jsou žáci, studenti, posluchači apod. Za základní činitele budeme vzhledem k výzkumu této práce dále považovat pouze učitele a žáka, výzkum budeme provádět ve školní třídě. Je vhodné dodat, že do pedagogické komunikace řadíme i komunikaci žáků mezi sebou, popř. učitelů mezi sebou, vždy se však jedná o dvousměrný proces (Nelešovská, 2005). Andersonová (1993, s. 94) dodává přirovnání ke stolní hře ping-pong: „Jde o dávání a brání. Neshrábněte míček. Střídejte se. Ať je míč v pohybu.“ Bez vzájemné spolupráce tedy zřejmě nelze pedagogickou komunikaci vůbec uskutečňovat. Základem pedagogické komunikace mezi učitelem a žáky je tedy typ komunikačního aktu, v němž se účastníci střídají v roli mluvčích a posluchačů, nazývaný dialog. Dialog je zároveň didaktickým prostředkem pro vytváření řečových dovedností, uplatňuje se např. jako cvičení v lingvo-didaktických programech (Müllerová & Hoffmanová, 1994).

2.3 Reflexe po vyučovací hodině

Jak již bylo zmíněno, po vyučovací hodině by se měl učitel ke svému plánu vrátit a hodnotit, zda bylo vytyčených cílů dosaženo, případně může také formulovat závěry

²⁶ V Pedagogickém slovníku (Průcha, Walterová & Mareš, 2003, s. 104) je (sociální) komunikace definována jako: „sdělování, dorozumívání mezi lidmi. Mívá tuto strukturu: mluvčí – záměr sdělení – formulace sdělení – vlastní sdělení – posluchač – interpretace obsahu a záměru mluvčího – reakce posluchače. Sociální komunikace vytváří základní souvislosti mezi hlavními stránkami sociálního styku lidí: mezi činností, interakcí a společenskými vztahy.“

pro budoucí vyučovací hodiny (Kalhous & Obst, 2002, s. 363; Zormanová, 2014, s. 22–23). Tuto fázi po vyučovací hodině budeme dále nazývat pedagogickou reflexí. Prvopočátky výzkumného zájmu o pedagogickou reflexi sahají do začátku 20. století. Např. práce Johna Deweye (Dewey, 1910, 1916) je jednou z těch významných, jež se zabývala procesy myšlení, tedy právě reflexí vyučovacího procesu. V následujících letech došlo k mnohým významným změnám v této oblasti (Ryan et al., 2017). V 80. letech 20. století došlo k exponenciálnímu růstu počtu výzkumů a publikací na toto téma (Zwozdiak-Myers, 2009). Výzkumníci a vědci se v tomto období snažili mimo jiné také zpochybnit „...příliš technický a zjednodušený pohled na vyučování, který v 80. letech dominoval“ (Sparks-Langer & Colton, 1991, s. 37). Tyto pochybnosti vedly k vytvoření nového pohledu na pedagogickou reflexi a přinesly s sebou nové modely, typologie, rámce a kategorizování. Vytvořen byl také základní teoretický rámec toho, co znamená reflektovat a být tím, kdo pedagogicky reflektuje (Kreber & Craton, 2000; Sellars, 2012; Zeichner & Tabachnick, 1991).

V zahraniční literatuře se s pedagogickou reflexí pojí pojmy jako např.: „the reflexive practioner (reflexivní praktik); teacher as researcher (učitel–výzkumník); action research (akční výzkum); reflection (reflexe); reflective teaching (reflexivní vyučování); reflective practice (reflexivní praxe jako proces prováděný učiteli za účelem zkoumání konkrétního vyučování)“ (Ryan et al., 2017, s. 4). V této rigorózní práci jsou využívány mimo jiné i pojmy *učitel–výzkumník* a akční výzkum. Pojem učitel–výzkumník budeme využívat k označení všech zúčastněných vyučujících v akčním výzkumu této práce, který zahrnuje právě reflexi výukových situací a její následnou analýzu. Pojem akční výzkum detailněji popíšeme v kapitole 3.6. „Chceme-li zvýšit kvalitu vzdělávání, učitelé se musí připojit ke kultuře výzkumných pracovníků“ (Kincheloe, 2003, s. 18). Na důležitost výzkumů, které provádí učitelé přímo ve vzdělávacím procesu, poukazují ze zahraničních publikací např.: Kincheloe (2003); Feng (2012); Sell & Lynch (2014) nebo Guha (2021). V českém prostředí se jedná např. o publikace: Švaříček & Šed'ová (2007), Šed'ová & Šalamounová (2016); Švaříček et al. (2017); Greger et al. (2020).

Definice pojmu pedagogická reflexe bychom našli v české i zahraniční literatuře skutečně mnoho, uvedeme tedy pouze ty, které nám poskytla dostupná literatura a jež subjektivně vyhodnocujeme jako adekvátní k tématu této rigorózní práce. Killion & Todnem (1991) definují pedagogickou reflexi jako „...analýzu našeho jednání, výběru

aktivit, rozhodnutí či produktů zaměřenou na proces dosažení vytyčených cílů“. Bright (1996) ji definuje jako „...skutečně kritickou a zpochybňující orientaci a odhodlání k objeovávání a analyzování pozitiv a negativ kvality a stavu profesionálem navrženého jednání“ (Bright, 1996, s. 165). Hatton & Smith (1995) o této reflexi uvažují jako o „...úmyslném přemýšlení o akci s cílem jejího zlepšení“ (Hatton & Smith, 1995, s. 40). Raelin (2002, s. 3) na ni nahlíží jako na „...analýzu významu toho, co se v minulých vyučovacích hodinách stalo. Snažíme se analyzovat to, co jsme zažili my a co ostatní přítomní, díky tomu vytváříme základ pro budoucí jednání“ (Ghere et al., 2005, s. 8). Autoři Smith et al. (2022, s. 6–7) charakterizují efektivní pedagogickou reflexi následovně: je záměrná (neděje se náhodou); je prováděna individuálně nebo skupinově; je strukturována dle kontextu, zaměření a účelu; není vrozená a přirozená, je nezbytné se ji učit a opakovaně praktikovat; zahrnuje zvažování a rekonstrukci minulých aktů jednání; popisuje kontext (včetně např. obsahu, cílů, účastníků); může být prováděna ihned nebo s odstupem času; většinou se zabývá řešením problému; nelpí na tradicích a stereotypech, reaguje na aktuální situaci; je doložena promluvou (např. písemnou, ústní, digitální, audiovizuální); nejvíce efektivní je tehdy, je-li založena na důkazech; je vždy odrazem subjektivního vnímání reflektujícího; dělá již zdánlivě známé novým a přínosným („seznamuje rybu s vodou“); mnohdy může být pro účastníky výzvou.

V českém prostředí definují autorky Dytrtová a Krhutová (2009) pedagogickou reflexi jako „...metodu sebehodnocení či hodnocení ve vztahu k profesnímu výkonu jako diskurzivní, tj. uvědomovaný a sdělitelný proces“ (Dytrtová & Krhutová, 2009, s. 56). „Reflexe je základním fenoménem v přípravě učitele, je jednou z cest rozvoje didaktického myšlení a signifikantně ovlivňuje kvalitu pedagogické činnosti“ (Slavík et al., 2012, s. 233). Dále bývá reflexe pedagogické činnosti dělena dle počtu zúčastněných pedagogických pracovníků na sebereflexi a tzv. hospitaci pedagogické činnosti.

Sebereflexe vyučovací hodiny

Reflexi vyučovací hodiny, kterou učitel provádí samostatně, budeme označovat pojmem sebereflexe. Vzhledem k tomu, že je autorka této práce začínající učitelkou, bude v rámci akčního výzkumu pořizovat videozáznam a následně samostatně analyzovat i své vlastní vyučovací hodiny matematiky, tzn. bude provádět sebereflexi. Sebereflexi chápeme jako proces, během něhož „učitel získává cíleně a systematicky zpětnovazebné informace“ (Slavík et al., 2012, s. 233). Schopnost sebereflexe znamená znát sám sebe, vědět o svých přednostech, ale i nedostacích, a zároveň znát dobře účinky svých výchovných a vyučovacích postupů na žáka... Dobrá sebereflexe je předpokladem nejen ke zdokonalování učitele (Hrabal & Pavelková, 2010; Spilková & Tomková, 2010), ale zároveň i „...obranou před zafixovanými neefektivními stereotypy v myšlení, prožívání a jednání“ (Holeček, 2015, s. 35). Na sebereflexi můžeme nahlížet také jako na „...metodu sebehodnocení ve vztahu k profesnímu výkonu, jako diskursivní, tj. uvědomovaný a sdělitelný proces“ (Dytrtová & Krhutová, 2009, s. 56). Sebereflexe zahrnuje popis, analýzu, hodnocení, uspořádání a generalizaci vlastních pedagogických poznatků a zkušeností (Švec, 1996). Autoři Dytrtová a Krhutová (2009, s. 57) a Slavík (2012, s. 233) uvádějí strukturu procesu sebereflexe tabulkou, kterou zachycuje obrázek 8. Proces sebereflexe zmínění autoři dělí do čtyř fází: motivační fáze; fáze posuzování; fáze vnitřního dialogu učitele a hledání odpovědí na různé otázky; fáze projektování dalších postupů a syntéza závěrů (Dytrtová & Krhutová, 2009, s. 57).

1. Nastartování procesu sebereflexe – tato fáze proběhne na základě zájmu učitele o svou pedagogickou činnost.	1. Podnět k sebereflexi, motivace – vychází z výchovně-vzdělávacího procesu a je specifická pro daného učitele a jeho žáky (konkrétní zkušenost).
2. Shromáždění a uspořádání sebereflexe – orientace na detaily v rámci pedagogické činnosti.	2. Fáze posuzování – učitel posuzuje svou činnost a její efektivitu ve vztahu ke své činnosti a činnosti žáků (reflexní zkušenost).
3. Analýza a interpretace reflektovaných prvků v kontextu předcházejících zkušeností a vyvození závěrů z výsledků sebereflexe.	3. Fáze vnitřního dialogu učitele a hledání odpovědí na otázky: Proč byli žáci pasivní – aktivní, netvořiví – tvořiví, co bylo příčinou toho či onoho jevu nebo výsledku (abstraktní konceptualizace)?
4. Vytváření plánu budoucí pedagogické činnosti na základě výsledků sebereflexe.	4. Fáze projektování dalších postupů a syntéza závěrů (plán aktivního experimentování).

Obrázek 8 Proces sebereflexe a její struktura (Dytrtová & Krhutová, 2009, s. 57, tab. 8)

My budeme (sebe)reflexi vyučovacích hodin matematiky provádět pomocí metodiky 3A: *anotace–analýza–alterace* (Janík, 2022b, s. 4).

Hospitace pedagogické činnosti

Účastní-li se vyučovací hodiny a její reflexe další pedagogický pracovník (např. ředitel školy nebo učitel) mimo vyučujícího, který výuku vede, jedná se o tzv. hospitaci. Definicí pojmu hospitace uvádí v Pedagogickém slovníku např. autoři Průcha et al. (2009, s. 75): „Hospitace je návštěva vyučovací hodiny, přednášky apod. s cílem poznání stavu a úrovně výchovné a vzdělávací práce.“ Základní metodou hospitační činnosti je pozorování, popis a následně rozhovor (Průcha et al., 2009, s. 75). Hospitace jsou konány za účelem zjištění toho, „...jak si pedagog počíná při práci ve výchovně-vzdělávací činnosti po stránce věcné i metodické, jak účelně využívá pomůcky, jakou má kázeň, jak se chová k žákům apod.“. Pozorovatel má povinnost vyučujícímu poskytnout zpětnou vazbu na pozorovanou vyučovací hodinu (Švamberg Šauerová, 2018). Hospitující by měl vše shrnout tak, aby závěry hospitace přispěly ke zlepšení pedagogických postupů (Dytrtová & Krhutová, 2009). „Hospitaci můžeme chápat jako formu získávání informací o práci, o jejích metodách, organizaci a pracovních výsledcích u jednotlivých pedagogů z hlediska získávání zkušeností hospitujícího nebo z hlediska potřeb pedagogického řízení školní výchovně-vzdělávací práce (Švamberg Šauerová, 2018, s. 191). Poznání pedagogické situace ve výchovně vzdělávacím procesu je tedy smyslem hospitací (Rys, 1975).

Adey (2006) také uvádí, že „efektivita rozvojových programů pro učitele není ani tak dána sofistikovaností předávaných poznatků či propracovaností učebních materiálů, nýbrž kvalitou přímé interakce mezi učiteli a jejich vzdělavateli“. Úspěšné programy by tedy dle autora měly být založeny na podpoře, kterou vzdělavatel přináší přímo do výuky a je její součástí. „Důležitou roli hraje rovněž kolegalita, kontakt s dalšími učiteli, kteří procházejí podobnými zkušenostmi“ (Adey, 2006, s. 53).

2.4 Způsoby realizace nové produktivní kultury vyučování a učení matematice aneb konstruktivismus ve výuce matematiky

Jak již bylo zmíněno, kulturu vyučování a učení matematice vnímáme jako hodnotu, na kterou teoreticky nahlížíme, zkoumáme ji, ale především se ji v praxi pokoušíme kultivovat. Důraz v této rigorózní práci tedy klademe na propojení teorie a výzkumu se vzdělávací praxí. Vzhledem k tomu, že se chystáme rozlišovat lepší a horší alternativy konkrétních výukových situací, je nezbytné teoreticky ukotvit ty způsoby výuky, které

byly pedagogickými odborníky a výzkumy (např. TIMSS, PISA) vyhodnoceny jako kvalitní. Obsah této kapitoly tedy vychází z mezinárodních šetření TIMSS, PISA; z výčtu klíčových kompetencí vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace (MŠMT ČR, 2023, s. 31–32) a dále z informací získaných z dostupné literatury. Určitě bychom tedy našli mnoho dalších způsobů a pojetí vyučování, jež jsou možnou realizací nové (produktivní) kultury vyučování a učení matematice, nicméně rozsah této práce nám neumožňuje zmínit všechny. Navíc k realizaci produktivní kultury vyučování a učení matematice nelze dát obecný návod. Může je uskutečňovat jen „dobrý učitel“. „Přitom si musíme uvědomit, že na žáky působí mnohdy negativně společnost, v níž o úspěchu člověka nerozhodují vždy jeho kvality“ (Kuřina, 2014, s. 246), proto se v této práci zaměřujeme na zdokonalování schopností učitelů matematiky spíše než na popis všech možných realizací produktivní kultury vyučování a učení matematice.

Námi již definovaný pojem „nová kultura vyučování a učení se hlásí k tradici psychologického, pedagogického a didaktického konstruktivismu jakožto otevřenému, aktivnímu, produktivnímu a tvořivému učení a vyučování“ (Janík et al., 2022a, s. 10). Právě konstruktivistickému pojetí výuky bude věnována tato kapitola. V českém prostředí se tématu konstruktivismus ve vzdělávání věnuje mnoho publikací, patří mezi ně např. Nezvalová (2005, 2007); Klečková & Bílek (2007); Holubová (2007); Molnár et al. (2008); Pecina & Zormanová (2009); Bílek et al. (2008); Hejný & Kuřina (2001, 2009, 2015); Binterová (2012, s. 66–81); Zormanová (2012) a mnoho dalších. V zahraniční literatuře se jedná např. o publikace Richardson (2005); Steffe & Gale (2012); Matthews (2012); Lezcano (2022) atd.

V kapitole 2.1 jsme nastínili, že vzdělávání může probíhat cestou transmise, nebo cestou konstrukce. Nyní tato dvě pojetí výuky detailněji představíme. Na úvod je důležité zmínit, že „žádná reálná výuka není ani čistě transmisivní, ani čistě konstruktivní. Leží někde mezi uvedenými dvěma póly“ (Hejný & Kuřina, 2000, s. 45).

Transmisivní vyučování je známé téměř tak dlouho jako lidstvo samo, označovat ho můžeme také jako tradiční (klasické) vyučování (Zormanová, 2012). Během transmisivního vyučování žáci zastávají roli pasivních příjemců. Pedagog v něm má dominantní úlohu, jeho hlavním cílem je plnit učební osnovy, žákovo zvládnutí učiva, ale jeho motivy, potřeby či potíže zůstávají v pozadí. Převládá metoda výkladu (mezi další

patří metody slovní²⁷, názorně demonstrační²⁸, dovednostně praktické²⁹) ve srovnání s ostatními výukovými metodami a žákům jsou předávány hotové vědomosti organizačně převážně formou frontální výuky³⁰ (Okoň, 1966; Kalhous & Obst, 2002; Maňák & Švec, 2003; Pecina & Zormanová, 2009; Zormanová, 2012). Frontální výuka je i nadále velmi využívanou formou v českých základních školách, což potvrzují výsledky výroční zprávy ČŠI za školní rok 2021/2022. Výzkum prováděla ČŠI na 4238 základních školách a z výsledků vyplynulo, že se frontální výuka v různých podobách (frontální hodina se samostatnou prací, frontální hodina, neúčelná frontální hodina) na 2. stupni ZŠ objevila u 55,8 % sledovaných škol (Novosák, 2022, s. 74).

Kritika transmisivního vyučování má již dlouholetou tradici, její prvopočátky sahají až do konce 19. století, kdy se objevují zastánci reformního hnutí, např. Ellen Key, John Dewey, Jean Piaget, L. S. Vygotsky, Rudolf Steiner, Maria Montessori, Václav Příhoda, Otokar Chlup (Zormanová, 2012, s. 10). Čtenář se o reformním hnutí dočte více např. v publikacích autorů Skalková (1971), Průcha (2001), Střelec a kol. (2005), Svobodová (2007). Samotní zastánci reformního hnutí předkládali důvody, proč je tradiční výuka mnohdy neefektivní, a pokoušeli se o zavedení změn a inovací do vzdělávacího procesu. Kritika byla mnohdy intenzivní, nicméně bychom neměli opomenout situace, ve kterých je tradiční výuka doporučována: „např. zprostředkování těžce pochopitelné, složité látky, abstraktního učiva, pouček a pravidel“ (Zormanová, 2012, s. 10).

Reformní hnutí a jeho myšlenky vyústily mimo jiné i ve zrod konstruktivismu. V českém Pedagogickém slovníku autorů Hartl & Hartlová (2015, s. 271) je konstruktivismus definován jako „...směr druhé poloviny 20. století, který zdůrazňuje aktivní úlohu člověka, význam jeho vnitřních předpokladů a důležitost jeho interakce s prostředím a společností“. Průcha et al. (2013, s. 132) ve svém Pedagogickém slovníku uvádí obsáhlejší definici, na konstruktivismus nahlíží jako na „...široký proud teorií ve

²⁷ Mezi slovní metody řadí Maňák & Švec (2003) vyprávění, vysvětlování, přednášku, práci s textem, rozhovor.

²⁸ Mezi metody názorně demonstrační řadí Maňák & Švec (2003) předvádění a pozorování, práci s obrazem, instruktáž.

²⁹ Mezi metody dovednostně praktické řadí Maňák & Švec (2003) napodobování, manipulování, vytváření dovedností, produkční metody.

³⁰ „Frontální výuka je společnou prací žáků ve třídě s dominantním postavením učitele, který řídí, usměrňuje a kontroluje veškeré aktivity žáků.“ (Maňák & Švec, 2003, s. 133) Pro frontální výuku je typická jednosměrnost komunikačního procesu ve směru od pedagoga k žákům, pedagog se zaměřuje na vysvětlování daného tématu/učiva žákům. Mezi nevýhody frontální výuky patří pasivita žáků, kteří nejsou vedeni k samostatnému myšlení.

vědách o chování a sociálních vědách, zdůrazňující jak aktivní úlohu subjektu a význam jeho vnitřních předpokladů v pedagogických a psychologických procesech, tak důležitost jeho interakce s prostředím a společností. V tomto smyslu je také interakční teorií překonávající jednostrannost empirismu³¹ a nativismu³². V didaktice je jedním z dominantních soudobých paradigmat dělících se do několika proudů.“ Konstruktivismus tedy není jasně vymezenou teorií, je složen z mnoha proudů a neustále se vyvíjí. „Konstruktivistická linie v pedagogickém výzkumu a v pedagogickém myšlení vůbec vychází z epistemologické koncepce³³ Jeana Piageta³⁴“ (Pupala & Osuská, 2000, s. 103).

Ve 2. polovině 20. století se objevilo mnoho odlišných pojetí (např. dialektický, empirický, humanistický, kontextuální, informačně-procesorový, metodologický, moderovaný, pragmatický, radikální³⁵ (Glaserfeld, 1974, 1984, 1990), racionální, realistický, sociální konstruktivismus³⁶ (Vygotsky, 1968)). V rámci konstruktivistické teorie poznání se všechny shodují v „...odmítání pasivního osvojování znalostí; jednotném vnímání učení jako aktivního procesu, v němž student rekonstruuje a znovu konstruuje svá pojetí“ (Smejkalová, 2014, s. 4), což je „antonymické“ pojetí vůči

³¹ „Obecně obvykle chápán jako názor, podle kterého naše přesvědčení mají původ ve smyslové zkušenosti“ (Hříbek, 2017, s. 297). Např. dle Davida Humeho je „poznání buď analytické, nebo odvozené ze zkušenosti: matematika a logika jsou analytické, veškeré syntetické poznání je odvozeno ze zkušenosti“. John Locke chápal empirismus „pouze jako tezi, že všechny pojmy, včetně matematických a logických, pocházejí ze zkušenosti“ (Hříbek, 2017, s. 303). Empiristická koncepce psychického vývoje předpokládá jeho určenost vnějšími faktory, člověk je dle ní libovolně formovatelný zvnějšku (Pelcák, 2021, s. 7).

³² „Nativistické teorie vycházejí z teze, že duševní vývoj je ve své podstatě určen vrozenými biologickými mechanismy a prostředí nemá podstatnější vliv“ (Pelcák, 2021, s. 7).

³³ „Epistemologie (* E. Meyerson, 1908) je teorie poznání či přesněji řečeno vědění“ (Sousedík, 2015, s. 151).

³⁴ Jean Piaget vypracoval teorii kognitivního vývoje, ve které věnoval pozornost především kognitivní funkci, kterou nazval *psychologií inteligence* (Piaget, 1947). Ve svém díle uváděl čtyři faktory, které mají na její vývoj vliv: organický růst, učení a zkušenosti získané při práci s předměty, sociální vztahy, jednota činnosti vývojových faktorů (Blatný, 2017, s. 29). Podobnosti např. s faktorem *učení a zkušeností získaných při práci* můžeme najít i v současném pedagogickém pojetí konstruktivismu, kterému se budeme věnovat níže.

³⁵ Piagetova teorie kognitivního vývoje inspirovala převážně zastánce radikálního konstruktivismu. Glaserfeld (1984, s. 140) konstatoval dva hlavní principy radikální konstruktivistické teorie: „poznání není získané pasivně, ale je tvořené poznávajícím subjektem; funkce kognice je adaptivní, umožňuje vytvářet životaschopné vysvětlení na základě zkušenosti, praxe a cílů subjektu“ (Pupala & Osuská, 2000, s. 110). Radikální konstruktivismus je tedy zaměřen především na intrapsychické procesy.

³⁶ Konstruktivismus sledující především interpsychické procesy nazýváme sociálním konstruktivismem (neopomíjí ani procesy intrapsychické) (Škoda, 2005, s. 103). Výchozí myšlenkou sociálního konstruktivismu je, že „poznávání, vnímání a myšlení jsou zejména společenskými, a nikoliv nutně individuálně-psychologickými výkony prostřednictvím konkrétního sociálního diskurzu“ (Kašćák, 2002, s. 397). Rozsáhlou analýzu teorie sociálního konstruktivismu provedl např. Reich (1997, 2005), který kriticky nahlížel na radikální konstruktivismus z důvodu údajného zanedbávání vztahového aspektu a interakce při konstrukci reality (Smejkalová, 2014, s. 5).

transmisivnímu pojetí výuky. Chceme-li teorie konstruktivismu aplikovat do didaktiky, je zásadní, aby docházelo k vlastnímu konstruování poznatků žáků. Konstruktivistický přístup je postavený na přebudování a reorganizaci zkušeností žáka. Dochází k rekonstrukci dosavadního poznání na novou kvalitu. Individuální zkušenost žáka ovlivňuje jeho aktivitu v procesu výuky. Učitel v konstruktivisticky pojaté výuce působí jako facilitátor, který žáka vede na cestě poznávání. „Učitel by se měl během výuky postupně pokusit sestavit hypotetický model konkrétních konceptuálních světů (myšlenky, ideje, poznatky) jeho žáků, kterým žáci aktuálně čelí, a konceptuálních vztahů, které v danou dobu mají“ (Fosnot, 2015, s. 4–5). Následně by se měl zamýšlet nad tím, jak jsou významy pro žáky nového učiva konstituovány a jakým způsobem bude vhodné je žákům předávat. „Učitel by si měl přitom uvědomovat, že některé významy a obsahy nelze uchopit a předat žákům pouze slovně či výkladem, i přestože je jazyk nejmocnějším nástrojem, který učitel má“ (Fosnot, 2015, s. 4–5). Žák by se měl tedy k poznatkům dopracovat samostatně vlastní činností (Dostál & Kožuchová, 2016). „Zastánci konstruktivismu ve výuce zdůrazňují, že každé učení vyžaduje specifické interakce mezi žáky navzájem a mezi učitelem a žáky při společné práci. Vzdělávání je sociálním procesem, který se nemůže uskutečňovat jinak než prostřednictvím komunikace mezi lidmi (přímé nebo zprostředkované). Učení je tedy proces zároveň osobní i sociální, který nastává tehdy, když jedinci spolupracují na budování (konstrukci) sdílených, společných porozumění a významů (Kalhous & Obst, 2002).

Z výše uvedených definic můžeme za klíčovou úlohu konstruktivismu považovat odklon od transmisivní výuky, příklon k sociální interakci, důraz na hloubkové porozumění a aplikaci získaných znalostí. Námí zkoumanou vzdělávací oblastí je Matematika a její aplikace. Jak konstruktivistické pojetí výuky souvisí s touto oblastí, popisují např. zahraniční autoři Jaworski (2002), Glasersfeld (2006), Brown (2012), Ernest (2012), Henney & Stemhagen (2021) a Davis, Mahler, Noddings (1990), přičemž tuto publikaci lze považovat za vstup do současné celosvětové konstruktivistické iniciativy didaktiků matematiky (Hejný et al., 2004).

Vzhledem k výzkumu této rigorózní práce, který bude prováděn na české škole, budeme v této kapitole citovat převážně české autory píšící na téma konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. Jejich knihy a publikace jsou pro české učitele matematiky dostupnější a mohly by být inspirací pro jejich výuku.

Autoři F. Kuřina a M. Hejný (2001) jsou význační tím, že obecné konstruktivistické pojetí výuky přetvářejí v tzv. *didaktický konstruktivismus*, který je zaměřen na vyučování matematice. Ve své publikaci *Dítě, škola a matematika – konstruktivistické přístupy k vyučování* (Hejný & Kuřina, 2015, s. 194–195) uvádí desatero konstruktivismu obsahující deset zásad, které nazývají „aktivita; řešení úloh; konstrukce poznatků; zkušenosti; podnětné prostředí; interakce; reprezentace a strukturování; komunikace; vzdělávací proces; formální poznání“, a ty dále detailněji popisují. „Pro konstruktivisticky pojaté vyučování matematice je tedy charakteristické aktivní vytváření části matematiky v duševním světě dítěte. Podle povahy žáka může být podkladem pro takovou konstrukci otázka či problém ze světa přírody, techniky nebo matematiky samé.... Konstruktivistické vyučování tedy může obsahovat transmisi celých partií, může obsahovat i instrukce k řešení typických úloh“ (Hejný & Kuřina, 2015, s. 196).

Shrnutím desatera konstruktivismu na matematiku nahlížíme jako na specifickou lidskou aktivitu, nejen jako na její výsledek. Zásadním pro tuto aktivitu je hledání souvislostí; řešení úloh, problémů; tvorba pojmů; zobecňování tvrzení, jejich zdůvodňování a ověřování. Vznik poznatku se opírá o zkušenosti toho, kdo poznává, a probíhá v jeho mysli. Aby mohlo matematické vzdělávání probíhat, je nutné vytvářet prostředí podněcující tvořivost. Sociální interakce a pedagogická komunikace ve třídě přispívají ke konstruování poznatků. Vhodné je používat různé druhy reprezentací a strukturální budování matematického světa. Hodnocení vzdělávacího procesu je prováděno ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla a samotná aplikace matematiky. Pouhá reprodukce informací vede k formálnímu pseudo-poznání (Stehlíková & Cachová, 2006). „Učit matematiku neznamená zápolit s definicemi, větami, vzorci a důkazy, ale s jejich smyslem“ (Hejný & Kuřina, 2015, s. 197). „Vyučování matematice je především odevzdáváním kulturního odkazu. Významnou částí tohoto odkazu je hloubavost, přemýšlení, hledání pravdy“ (Hecht, 1994, s. 1). Bydžovský (1937) ve své publikaci podotýká, že chceme-li reformovat

vzdělávání spojitě a zdokonalovat ho, je nezbytné, aby se právě učitelé sami účastnili reformního snažení a hojně konali pedagogické pokusy ve svých třídách.

Jak již bylo zmíněno, učitelé a didaktici se snaží poukazovat na potřebu přistupovat k vyučování matematiky konstruktivisticky a prioritně vést žáky ke konstrukci individuálních poznatků nových struktur, jejich dobrému porozumění a účelným aplikacím. Vyvstává však otázka, zda je možné konstruktivistický přístup realizovat v široké pedagogické praxi. Každý učitel a každá třída jsou naprosto unikátní. Představme si, že např. některý z učitelů není přímo nadšencem v oboru, nebo někteří žáci nejsou zrovna „chtiví poznání“. Podaří se v takovém prostředí přistupovat k vyučování konstruktivisticky? (Hejný & Kuřina, 2015, s. 200). V našem akčním výzkumu se pokusíme zjistit, zda se učitelům matematiky na 2. stupni ZŠ Dobrá daří zavádět prvky konstruktivismu do jejich výuky.

2.4.1 Dialogické vyučování

„Celý náš život je vlastně dialogem, který vede každý z nás se svým okolím, ale i sám se sebou“ (Müllerová & Hoffmanová, s. 5). „Jazyk je jednou ze složek, jež navádějí člověka na možnost tvoření pojmů“ (Hejný & Kuřina, 2015, s. 96). Jak již bylo zmíněno v kapitole 1.2, v posledních dekadách v rámci přechodu ze „staré“ kultury vyučování a učení na „novou“ došlo v pedagogických vědách k obratu mimo jiné i k jazyku, komunikaci a dialogu (Šeďová et al., 2016; Janík et al., 2022a). Samotné prvopočátky dialogického vyučování bychom hledali především v sociokulturních teoriích vycházejících z díla Vygotského³⁷. Dialogické vyučování je založené mimo jiné i na komunikaci a interakci, které jsou součástí již zmíněného desatera konstruktivismu. Pro konstruktivistické vyučování v matematice má značný význam komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky. Jedním z nich je neverbální vyjadřování, jiným matematická symbolika. Dovednost vyjadřovat vlastní myšlenky a rozumět jazyku

³⁷ Vygotskij (1976, s. 314) nebo Wertsch (1985) ve svých sociokulturně teoretických dílech představili myšlenku silného propojení mezi řečí a myšlením. Poukázali tak na to, že participujeme-li v sociálním prostředí, vyvíjí a formuje se zde naše vědomí. Důležité místo ve Vygotského koncepci má tzv. *vnitřní řeč* (*inner speech*), která bývá chápána jako „verbální forma myšlení“ a předchází řeč vnější (Vygotskij, 2004, s. 51). Vygotského teorie byla následně dovedena do koncepce „zóny nejbližšího vývoje“, což „je období, které těsně předchází nové vývojové etapě, je obdobím, kdy lidský organismus bývá vnímavější, citlivější, pohotovější zareagovat na podněty zvenku, takže se dá nástup změn „urychlit““ (Průcha, Walterová & Mareš, 2003, s. 313). Nebo „vzdálenost mezi aktuální úrovní výkonu (tj. současnou, realizující se úrovní schopnosti dítěte řešit určitý úkol) a potenciální vývojovou úrovní“ (Vygotskij, 2004, s. 72). Tuto teorii kritizovali např. Sylva et al. (1997); Matusov & Hayes (2000); Čáp & Mareš (2001).

druhých je třeba systematicky pěstovat. „Ačkoli je konstrukce poznatků proces individuální, přispívá k jeho rozvoji sociální interakce ve třídě (diskuse, srovnávání výsledků, konstrukce příkladů a protipříkladů, pokusy o formulace domněnek a tvrzení, argumentace, hledání důkazů...)“ (Hejný & Kuřina, 2001, s. 160).

Dialogické vyučování³⁸ tedy uvádíme v této kapitole jako příklad možné realizace nové, resp. produktivní kultury vyučování a učení (Alexander, 2006; Lyle, 2008; Reznistkaya & Gregory, 2013). Výzkum této rigorózní práce na něj není přímo zaměřen. Nicméně je možné, že se s dialogickým vyučováním nebo s jeho principy, resp. pseudodialogem ve výuce matematiky setkáme. Na úzké spojení dialogu, resp. řeči a myšlení v matematice poukazuje ve svých publikacích např. Sfordová³⁹ (2008, 2018).

Šed'ová a Šalamounová (2016, s. 49–50) definují dialogické vyučování jako „...typ vyučování, v němž dochází prostřednictvím komunikace a práce s jazykem ke stimulaci aktivity žáků, podněcování jejich myšlení a prohlubování porozumění. Je to takový způsob komunikace mezi učitelem a žáky, v němž u žáků dominují vyšší kognitivní procesy“. Podstatným znakem dialogického vyučování je značná „autonomie angažovaných žáků“. „Scénář hodiny je otevřený myšlenkám a nápadům od žáků“, jež jim umožňují do určité míry ovlivňovat dění v hodině (Šed'ová, 2011, s. 39). Tyto charakteristiky dialogického vyučování autoři považují „...za plně kompatibilní s vymezením produktivní kultury vyučování a učení“ (Šed'ová & Šalamounová, 2016, s. 50).

Dialogické vyučování by nemělo být zaměňováno s takzvaným vyučováním interaktivním. Scott et al. (2010) připisují interaktivnímu vyučování podobu rozhovoru mezi učitelem a žáky, nicméně scénář hodiny není příliš otevřený myšlenkám a nápadům, odehrává se spíše jako „...sled obvykle uzavřených otázek učitele vykazujících nízkou kognitivní náročnost; krátkých žakovských odpovědí a učitelských zpětných vazeb...“.

³⁸ V zahraniční literatuře se setkáváme např. s pojmy *dialogic inquiry* (Wells, 1999); *dialogical pedagogy* (Skidmore & Murakami, 2016) nebo *dialogic teaching*, které pro dialogické vyučování používají např. Bakhtin (1986), Matusov (2009), Dawes (2010) nebo Alexander (2006) (Wegerif, 2006, s. 3–4).

³⁹ Ta ve svých publikacích užívá termín *commognition* (communication + cognition) v kontextu matematického vzdělávání. „Na matematiku nahlíží jako na historicky vytvořený diskurz a učít se matematice znamená stát se „komunikátorem“ v této formě diskurzu.“ Tento diskurz je dle Sfordové (2018, s. 2) charakteristický „specifickými klíčovými slovy (např. trojúhelník, množina, funkce), vizuálními médii (např. číslice, algebraické symboly, grafy), charakteristickými postupy (např. metody dokazování) a „obecně přijímanými“ tvrzeními tímto diskurzem (např. matematické věty, pravidla, definice). Sfordová (2008, 2018) inspirovala svou teorii mnoho pedagogicko-matematických výzkumníků a autorů (např. Lew et al. (2016); Švaříček et al. (2017); Robertson & Graven (2019); Kontrochovich (2021)), kteří se ve svých publikacích či studiích věnují důležitosti komunikace ve vzdělávacím prostředí a výuce matematiky.

Učitel přitom nejeví zájem o zjištění, zda žáci otázce porozuměli. Pro tuto výukovou situaci Mareš (1975) dále Mareš & Křivohlavý (1995) využívají pojem *pseudodialog*.

V rámci projektu *Komunikace ve školní třídě* GA406/09/0752 Šeďová et al. (2012) byl zaznamenán masivní výskyt pseudodialogických výměn (Šeďová, 2011, s. 40). Na základě masivního výskytu na českých školách dále autoři rozlišovali dvě formy těchto výměn: *tematickou diskusi*⁴⁰ a *produktivní dialog*⁴¹. Náročnost vedení dialogického vyučování potvrzují také jeho ideální principy, které vymezuje Alexander (2006, s. 37): „Aby byly diskuse a dialog efektivní, musí být: kolektivní (zapojena celá třída), reciproční (žáci a učitelé si vzájemně naslouchají, sdílejí své myšlenky a názory), podpůrný (bez obav ze zapojení se do komunikace a ze špatné odpovědi), kumulativní a účelný (postupující vpřed v osvojování nových znalostí a dovedností).“

2.4.2 Problémové vyučování

V pedagogické a psychologické literatuře bychom našli hned několik definic problémového vyučování. Jako příklad uvádíme definici Turka (1982): „Problémové vyučování je činnost učitele, která se projevuje v zabezpečení podmínek problémového učení žáků, a to prostřednictvím nastolování systému problémových situací a řízení procesu řešení problémů žáky. Problémové učení je činnost žáků zacílená na osvojení si znalostí a způsobů činnosti prostřednictvím analýzy problémové situace, formování problémů a jejich řešení vytyčených hypotéz a jejich verifikace.“ (Honzíková & Sojková, 2016, s. 38-39) Učitel během tohoto vyučování nezprostředkovává poznatky v hotové podobě, zadává úkoly obsahující pro žáky neznámé znalosti a způsoby činností. Tímto jsou žáci motivováni k řešení problémů, hledání způsobů a prostředků řešení dílčích úkolů a osvojují si tak nové vědomosti, dovednosti a rozvíjejí své schopnosti (Honzíková & Sojková, 2016). Maňák ve své knize definuje problémové vyučování jako „...řešení problémů, a to ze strany žáků s postupně narůstající samostatností, která může vyvrcholit i tvořivým činem“ (Maňák, 1998, s. 110). Ze zahraniční literatury zmíníme definici

⁴⁰ „Komunikační forma, v níž na sebe minimálně 3 účastníci vzájemně reagují nejméně 30 sekund. Je vždy vztažena k probírané látce. Učitel klade autentické otázky, na které není předem známá odpověď“ (Šeďová, 2011, s. 41).

⁴¹ „Dialog s interakcí mezi učitelem a žákem, která umožňuje vyřešit problém či úlohu, které jsou dosud za hranicemi schopností učícího se jedince, pokud by je řešil bez asistence. Slouží k dopomoci žákům k samostatnému vyvození závěru či k autonomnímu porozumění předkládanému obsahu“ (Šeďová, 2011, s. 42).

autorky Ronis (2008, s. 1): „Problémové vyučování je založeno na problémech a myšlence, že žáci utvářejí své chápání z velké části prostřednictvím toho, co prožívají. Tento způsob vyučování umožňuje žákům zpracovávat a získávat nové informace způsobem, který nejlépe odpovídá přirozeným způsobům, jak řešit reálný problém, přemýšlet a poznávat.“ Autoři Baden, Major ve své knize dodávají, že problémové vyučování klade důraz „...na žákovské uvědomění si vlastní zodpovědnosti za řešení problémů, na zaměření se na proces řešení spíše než na řešení výsledné a na spolupráci s ostatními, která je mnohdy během řešení komplexního problému nezbytná...“ (Baden & Major, 2004, s. 4).

Cílem problémového vyučování je příprava žáků na tvůrčí činnost, na projev kreativních schopností ve všech sférách budoucí činnosti. Problémové vyučování simuluje řešení problémů běžného života, což odpovídá i obsahu učiva, které je žákům předáváno. Téměř všechno učivo bylo původně problémem, jenž byl nedávno nebo před staletími řešen. Výsledkem jsou obsažené vědomosti, dovednosti a návyky v učivu osvojované tvůrčím způsobem (Honzíková & Sojková, 2016).

Definice a cíle problémového vyučování úzce korelují s některými principy konstruktivistického pojetí vyučování. Jsou jimi principy: „Aktivita – matematiku chápeme především jako specifickou lidskou aktivitu, tedy nikoliv jen jako její výsledek, který se obvykle formuje do souboru definic, vět a důkazů. Řešení úloh – podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení a jejich dokazování. Popsaný proces může probíhat v matematice samé nebo v libovolné jiné oblasti lidského poznání. Tvorba matematických modelů reality je pak jeho součástí. Zkušenosti – vytváření poznatků (například v oblasti pojmů, postupů, představ, domněnek, tvrzení, zdůvodnění...) se opírá o informace, je však podmíněno zkušenostmi poznávajícího. Zkušenosti si přináší žák zčásti z kontaktu s realitou svého života, měl by však mít dostatek příležitostí nabývat zkušenosti i ve škole (experimentování, řešení úloh, problémů...)“ (Hejný & Kuřina, 2001, s. 160–161). Na základě těchto principů můžeme považovat problémové vyučování za další možnou ukázkou způsobu realizace produktivní kultury vyučování a učení matematice.

Vzhledem k tomu, že předmětem našeho zkoumání je vzdělávací oblast Matematika a její aplikace (MŠMT ČR, 2023), můžeme předpokládat, že problémové vyučování

v matematice započne např. zadáním matematické problémové úlohy simulující reálný problém. Jako příklad uvádíme čtyři typy problémových úloh, které do svého výzkumu zařadilo mezinárodní šetření PISA 2003 a 2022. Prvním typem jsou úlohy zaměřené na rozhodování. Jedná se o úlohy, ve kterých se žák rozhoduje, jaké řešení z řady možných vybere, tak aby byl tento výběr nejoptimálnější. Tyto úlohy vyžadují porozumění informacím zadání úlohy, určení příslušných možností a omezujících podmínek, vhodné znázornění jednotlivých možností ve vztahu k omezujícím podmínkám, výběr nejlepšího řešení, zhodnocení, zdůvodnění a prezentaci řešení. Druhým typem problémových úloh jsou úlohy zaměřené na systémovou analýzu a projektování. Tyto úlohy „obsahují složité vztahy mezi řadou vzájemně závislých proměnných. K tomu musí žáci umět určité podstatné znaky systému, znázornit jeho jednotlivé prvky a vztahy mezi nimi, obvykle musí též provádět řadu kontrolních a hodnotících kroků v různých fázích svého řešení“ (Tomášek & Potužníková, 2004, s. 8). Třetím typem jsou úlohy zaměřené na odstraňování chyb, ve kterých „...mají žáci za úkol odhalit nebo opravit špatně fungující systém nebo jeho část. Takové úlohy od žáků vyžadují, aby pochopili princip fungování tohoto systému (například přístroje), vytvořili si odpovídající znázornění, porozuměli požadavkům úlohy, navrhli, posoudili a prezentovali své řešení“ (Tomášek & Potužníková, 2004, s. 8). Mezinárodní šetření PISA 2022 zaměřovalo problémové úlohy na schopnost logicky uvažovat, zdůvodnit a přesvědčivě argumentovat ve prospěch svého řešení. Ukázkou problémové úlohy šetření PISA 2022 uvádíme na obrázku 9.

Krása umocňování
Otázka 3/3

Otázka níže se vztahuje k textu "Krása umocňování" vpravo. Kliknutím vyberete odpověď.

Jaká je poslední číslice čísla 7^{199} ?

1
 3
 7
 9

Krása umocňování

Výsledky prvních devíti mocnin čísla 7 můžete vidět níže.

Všimněte si, jak rychle roste!

Poslední číslice výsledků se mění podle určitého pravidla či vzoru. Prozkoumejte ho a pokuste se odpovědět na otázku.

$7^1 =$	7
$7^2 =$	49
$7^3 =$	343
$7^4 =$	2 401
$7^5 =$	16 807
$7^6 =$	117 649
$7^7 =$	823 543
$7^8 =$	5 764 801
$7^9 =$	40 353 607

Obrázek 9 PISA 2022 testová úloha The beauty od powers (OECD, 2018, s. 55–57, volně přeloženo)

Nyní jsme tedy stručně definovali problémové vyučování a uvedli některé příklady problémových úloh v matematice. Důležité je si však uvědomit, že velmi zásadní je při zadávání problémové úlohy samotný přístup učitele. Např. P. Palhares et al. (Clarke et al., 2008) pozorovali rozdíly ve způsobu užití téže matematické úlohy různými učiteli. Přestože někteří učitelé sdíleli obecné názory na výuku matematiky, způsob užití téže

úlohy byl odlišný. Jako zásadní při zadávání a práci s matematickou úlohou vnímají autoři učitelovy matematické znalosti a profesní zkušenosti. Do rozboru užití matematických úloh autoři řadí: „organizační formy práce v hodině (skupinová, samostatná), učitelovu podporu komunikace a míru tolerance k hluku, manipulativní vs. abstraktní způsob práce, množství informací poskytnutých učitelem“ (Clarke et al., 2008, s. 275). Učitel tedy může při přípravě na vyučovací hodinu vybrat vhodnou problémovou úlohu, nicméně se mu již během vyučovací hodiny nemusí podařit žáky podnítit k řešení, které rozvíjí požadované kompetence a schopnosti. Jakým způsobem učitelé 2. stupně na ZŠ Dobrá přistupují k zadávání problémových úloh nebo matematických úloh všeobecně, to se pokusíme během našeho výzkumu zjistit.

2.4.3 Badatelsky orientovaná výuka

Jako další možnou ukázkou způsobu realizace produktivní kultury vyučování a učení matematice stručně představíme badatelsky orientovanou výuku, která bývá zahraničními autory řazena mezi aktuální celosvětové trendy matematického vyučování (Carfora & Blessinger, 2015; Mieg, 2019; Hussein, 2023). Z českých autorů píší o badatelsky orientované výuce např. Dostál (2015); Kubicová (2015); Pech et al. (2015) nebo Jůvová et al. (2023). Dostál definuje badatelsky orientovanou výuku jako výuku, během níž „...jsou využívány různé vyučovací metody, především problémového charakteru (metoda problémová⁴², heuristická, výzkumná, inscenační⁴³, informačně receptivní, projektová⁴⁴, reproduktivní). V takto pojaté výuce mohou žáci provádět různé úrovně bádání, od potvrzujícího až k otevřenému“ (Dostál, 2015, s. 44). Samková badatelsky orientované vyučování (dále jen BOV) považuje za výuku založenou na bádání (Pech et al., 2015, s. 14). Bádání pak můžeme definovat jako „...kontrolovanou nebo řízenou transformaci neurčité situace v situaci, která je určitá do té míry, nakolik to vyžaduje zařazení prvků původní situace do nějakého jednotného celku. Tyto neurčité situace

⁴² „Vyučovací metoda, resp. typ výuky, která začleňuje řešení problémů samostatnými žáky jako prostředek jejich intelektového rozvoje. Do určité míry je tato metoda realizována při každé školní výuce, preferována je ve výuce činné školy a jiných alternativních škol (Skalková, 1999, s. 141–146).“

⁴³ „Metoda hraní role“ (Průcha, Walterová & Mareš, 2003, s. 86).“

⁴⁴ „Vyučovací metoda, v níž jsou žáci vedeni k samostatnému zpracovávání určitých projektů a získávají zkušenosti praktickou činností a experimentováním... Podporuje motivaci žáků a kooperativní učení. Projekty mohou mít formu integrovaných témat, praktických problémů ze životní reality nebo praktické činnosti vedoucí k vytvoření nějakého výrobku, výtvarného či slovesného produktu“ (Průcha, Walterová & Mareš, 2003, s. 184).“

mohou být charakterizovány různými pojmenováními. Jsou znepokojivé, svízelné, nejednoznačné, popletené, plné protichůdných tendencí, mlhavé apod.“ (Dewey, 1938, s. 104–105). V českém matematickém vzdělávání můžeme identifikovat mnoho teoretických rámců, které s BOV souvisí. Jedná se např. o „teorie didaktických situací“⁴⁵, realistické matematické vzdělávání⁴⁶, matematické modelování⁴⁷, uchopování situací, tvoření úloh, projektová metoda, podnětná výuková prostředí a budování schémat nebo konstruktivistické přístupy k vyučování matematice“ (Samková et al., 2015, s. 102–105).

Mezi základní znaky výuky matematiky zaměřené na bádání patří „úlohy a otázky, které mohou být různě interpretovány, mají více způsobů řešení, více správných odpovědí; objevování a znovuobjevování; učení se z chyb; zajištění dostatečně husté sítě základních znalostí; kumulativní styl učení; propojení matematiky s jinými obory; podpora kooperativního i autonomního učení“. Matematicky bádát mohou žáci např. o přírodních jevech, technických problémech nebo lidských vynálezech (Samková et al., 2015, s. 100). Jako příklad uvedeme úlohu (obr. 3), která umožňuje různé cesty a různý rozsah žákovského bádání.

* **Úloha 6:** *Jaký obvod má mnohoúhelník, který je sestaven ze čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků s délkami stran 3, 4, 5?*

Obrázek 10 Badatelsky orientovaná úloha (Samková et al., 2015, s. 110)

⁴⁵ Guy Brousseau, autor této teorie, ji označuje jako teorii konstruktivisticko-strukturalistickou. Ta pohlíží na vzdělávací proces jako na posloupnost situací (přirozených nebo didaktických), které vedou k modifikacím v chování žáků typickým pro získávání nových znalostí (Novotná et al., 2006). Vyučovací proces se odehrává v didaktickém prostředí, které zahrnuje všechny vlivy, jež žáka ovlivňují. Didaktická situace je záměrné, učitelem řízené vzdělávání. Řízené vzdělávání má 3 fáze: a priori analýza (příprava na vyučování); didaktická situace; posteriori analýza (Jančaříková, 2019, s. 96).

⁴⁶ „Odkazuje na vyučování, během kterého je matematika součástí žákovy reality, ať už skutečné, nebo uměle vytvořené. Situace odehrávající se v této realitě mohou být brány z každodenního života stejně jako z čistě matematického prostředí, neboť matematické objekty se postupně stávají součástí žákovy reality. Klíčovým principem je řízené objevování a znovuobjevování, při němž si žáci vytvářejí vlastní „matematiku“ a postupně z neformálních strategií řešení úloh předcházejí k formalizovanějším metodám“ (Samková et al., 2015, s. 103).

⁴⁷ Tvorba matematického modelu probíhá v 6 základních fázích: „formulace problému, systematizace, matematizace, matematická analýza, interpretace a hodnocení výsledků, hodnocení validity modelu“ (Blomhøj & Jensen, 2003, s. 125).

2.5 Matematická gramotnost

V předchozích kapitolách jsme naznačili možné realizace nové produktivní kultury vyučování a učení, dále jsme teoreticky ukotvili vyučovací hodinu, přípravu na ni a reflexi po ní. V souvislosti s tím vyvstává otázka, zda se školám v rámci globálního rozvoje během třicátých let 21. století daří úspěšně a efektivně vzdělávat své žáky v matematice. Z publikací věnovaných tématu, jak matematickou gramotnost rozvíjet ve 21. století, zmíníme např. Goulding (2013); Hejný (2014); Polák (2016a); Beyranvand (2017); Drury (2018); Chinn (2020)). Matematická gramotnost je aktuálním tématem, potřeba rozvíjet ji nabývá na významu nejen v souvislosti s rozvojem nových technologií ve vzdělávání, poskytováním vědomostí a dovedností potřebných v praktickém životě, rozvojem logického myšlení, ale také kritického myšlení (OECD, 2018).

Co si však pod termínem matematická gramotnost představit? Pojetí a definic matematické gramotnosti je celá řada. V této práci uvedeme vzhledem k jejich similaritám s dalšími definicemi pouze dvě. Jako první představíme definici Národního pedagogického institutu České republiky (dále jen NPI ČR), který definuje matematickou gramotnost jako:

„Schopnost uplatnit získané vědomosti, dovednosti, návyky, postoje a hodnoty při řešení nejrůznějších úkolů a životních situací s čistě matematickým obsahem až k takovým, ve kterých není matematický obsah zpočátku zřejmý, a je na řešiteli, aby ho v nich rozpoznal“ (Bendl et al., 2020, s. 4).

Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj (dále jen OECD) uvádí definici pro účely mezinárodního výzkumu PISA 2022 následovně:

„Matematická gramotnost je schopnost jedince matematicky uvažovat a formulovat, používat a interpretovat matematiku při řešení problémů v různých kontextech každodenního života. Zahrnuje používání matematických pojmů, postupů, faktů a nástrojů k popisu, vysvětlování a předpovídání jevů. Pomáhá jedinci uvědomit si úlohu matematiky ve světě a díky tomu odpovědně usuzovat a rozhodovat se jako tvořivý, angažovaný a přemýšlivý občan 21. století (OECD, 2018, s. 7).

Matematické gramotnosti se ze zahraničních publikací věnují např. Stacey & Turner (2014); Jurdak (2016); Nowlan (2017); Hassler (2021); Greathouse (2022), z českých autorů zmíníme např. Straková (2016); Dombrovská (2018); Vondrová (2019); Hendl (2022).

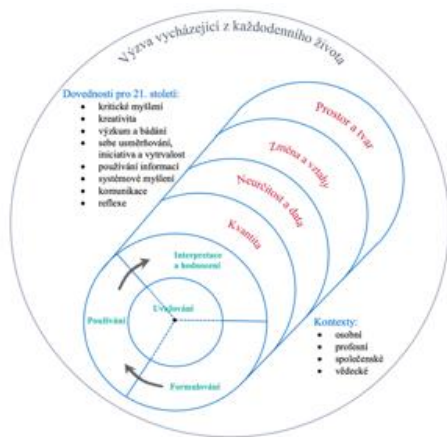
Je tedy patrné, že matematickou gramotnost chápeme jako schopnost. Jak je ale tato schopnost měřena? Historicky zahrnovala matematická gramotnost schopnost provádět základní aritmetické operace, jako jsou sčítání, odčítání, násobení, dělení celých, desetinných čísel nebo zlomků; dále počítání s procenty nebo míry v geometrii (výpočet obvodu, obsahu základních rovinných geometrických útvarů; objemu, povrchu základních geometrických těles). Vzhledem ke globální digitalizaci společnosti nelze nyní opomínat všudypřítomnost online dat a informací, které zásadně ovlivňují všechny aspekty našich životů. Společnost se v posledních letech potýká také s populačním růstem, změnami globalizující se ekonomiky nebo např. se šířením pandemických a civilizačních chorob. Tyto neopomenutelné změny přispívají k přeformulování toho, co znamená být matematicky gramotný, a tudíž dostatečně matematicky vybavený na to využít své znalosti z matematiky pro uspokojivé žití ve společnosti 21. století (OECD, 2018).

2.5.1 Státní a mezinárodní šetření v matematice

Jak již bylo zmíněno, v této kapitole rozebereme, jak je matematická gramotnost měřena nyní. Nejprve se zaměříme na mezinárodní šetření PISA 2022⁴⁸, jež pojímalo matematicky gramotného jedince v rámci šetření 2022 jako toho, který by měl být schopný „...používat matematiku při řešení problémů reálného světa, matematicky uvažovat a řešit problémy pomocí matematických pojmů, postupů, faktů a nástrojů“ (OECD, 2018, s. 7).

⁴⁸ Program PISA (Programme for international Student Assessment) zjišťuje výsledky patnáctiletých žáků různých zemí v oblasti čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti. Hlavním záměrem tohoto šetření je poskytnout tvůrcům školské politiky v jednotlivých zemích informace o úspěšnosti a efektivitě jejich vzdělávacích systémů. Jedná se o největší světový vzdělávací výzkum vzdělávacího direktorátu OECD. V České republice za realizaci, přípravu a vyhodnocení šetření PISA odpovídá Česká školní inspekce (ČŠI, 2024). Toto šetření organizované s ústředním zaměřením na matematiku proběhlo v letech 2003, 2012, 2022 (odloženo z 2021 v důsledku pandemie covidu-19), přičemž v roce 2003 bylo inovativní doménou šetření *Řešení problémů*, v roce 2012 *Tvůrčí řešení problémů* a v roce 2022 *Tvůrčí myšlení* (ČŠI, 2024).

V publikaci *PISA 2021 Mathematics framework* (OECD, 2018) organizace OECD graficky znázornila vztah mezi matematickým uvažováním, cyklem řešení problémů, matematickým obsahem⁴⁹, kontextem⁵⁰ a vybranými dovednostmi⁵¹ pro 21. století, který uvádíme na obrázku 11.



Obrázek 11 PISA 2022 (ČŠI, 2022a, s. 12)

Testové úlohy v rámci šetření PISA 2022 byly řazeny do dvou hlavních kategorií⁵²: *Matematické uvažování* a *Řešení matematických problémů*. Šetření PISA 2022 použila tři formáty testových otázek: s volnou tvorbou odpovědi, s uzavřenou tvorbou odpovědi a s výběrem více odpovědí. Každá testová úloha obsahovala úvodní slovní stimul a další informace uvedené v tabulkách, grafech a diagramech, plus jednu nebo více otázek vycházejících z tohoto společného zadání. Jako ukázkou testování předkládáme námi vybranou úlohu PISA 2022 (viz obrázek 12).

⁴⁹ Matematický obsah: kvantita, neurčitost a data, změna a vztahy, prostor a tvar (OECD, 2018, s. 10).

⁵⁰ Kontext: osobní (vaření, cestování, osobní finance...), profesní (kalkulace nákladů, mzdy, účetnictví...), společenské (veřejná doprava, politiky, reklamy...), vědecké (ekologie, vesmír, medicína) (ČŠI, 2022a, s. 25).

⁵¹ Dovednosti pro 21. století: kritické myšlení, kreativita, výzkum a bádání, sebeusměrňování, iniciativa, vytrvalost, používání informací, systémové myšlení, komunikace, reflexe (OECD, 2018, s. 10).

⁵² Úlohy řazené do kategorie *Matematické uvažování* tvořily přibližně 25 % úloh v šetření PISA 2022. Zbýlých přibližně 75 % pokrývaly úlohy kategorie *Řešení matematických problémů*, do kterých patřilo „formulování situací matematicky (cca 25 %); používání matematických pojmů, faktů, postupů a uvažování (cca 25 %); interpretování, aplikování a hodnocení matematických výsledků (cca 25 %)“ (ČŠI, 2022a, s. 28). Obsahově byly úlohy děleny do čtyř již zmíněných kategorií: změna a vztahy, prostor a tvar, kvantita, neurčitost a data. Každá z kategorií tvořila přibližně 25 % z celkového počtu úloh. Úlohy byly zároveň různé obtížnosti, tak aby pokrývaly rozsah schopností patnáctiletých žáků (ČŠI, 2022a, s. 29).



Obrázek 12 PISA 2022 testová úloha Dice and stories (OECD, 2018, s. 32, volně přeloženo)

Inovativní doménou šetření PISA 2022 bylo tvůrčí myšlení⁵³. OECD definuje tvůrčí myšlení jako „...schopnost aktivně vytvářet, posuzovat a vylepšovat návrhy, které mohou vést k originálním a efektivním řešením, k vytváření nových poznatků a k působivým projevům představitosti“ (ČŠI, 2022a, s. 46). „Tvůrčí myšlení zahrnuje pružnost uvažování a reorganizace procesu porozumění za účelem vytvoření nových úvah a řešení. Kreativní osobnost se vymezuje tím, že pravidelně řeší zadané problémy, produkuje nové výtvary a stanovuje nové otázky, kterými ovlivňuje nejen sebe, ale často i své fyzické a sociální prostředí“ (Cakirpaloglu, 2012, s. 227). Podstatou tvůrčího myšlení je takzvané divergentní myšlení, které nesetrvává u jediné možnosti řešení, ale flexibilně nabízí množství nejruznějších řešení, ze kterých následně vybírá prostřednictvím myšlení konvergentního to nejvhodnější (Barták, 2021, s. 45).

Ze šetření PISA 2022 vyplynulo, že matematická gramotnost českých žáků od roku 2003 do roku 2022 vykazovala mírně klesající tendenci. Výsledky šetření PISA 2022 ukázaly, že podíl žáků dosahujících nejvyšších úrovní 4–6 klesl z 39 % v roce 2003 na 28 % v roce 2022. Zaznamenán byl také úbytek žáků dosahujících alespoň základní dovednostní úrovně z 83 % v roce 2003 na 74 % v roce 2022 (Boudová et al., 2023, s. 6). „Téměř 60 % českých patnáctiletých žáků vyjádřilo časté obavy z toho, že pro ně budou

⁵³ Dosáhnout tvůrčích výsledků vyžaduje poměrně mnoho: schopnost tvůrčího myšlení, širší specializovaný soubor atributů a dovedností, inteligenci, znalost oblastí nebo umělecký talent (ČŠI, 2022a, s. 46). Jedním z posledních konceptů úrovní kreativity je dělení na: „mini k (mini-c); malé k (little-c); Pro-k (pro-c) a Velké K (Big-C),“ přičemž „mini k“ je primární úroveň, se kterou se setkáváme běžně u žáků druhého stupně základní školy a ze které může žák rozvíjet svůj tvůrčí potenciál a dosáhnout až úrovně „Velké-K“. Tato úroveň souvisí s průlomovými objevy v oblasti technologie nebo např. s tvorbou významných uměleckých děl (Runco & Pritzker, 2020, s. 549). Šetření PISA 2022 bylo zaměřeno „na procesy tvůrčího myšlení, které lze od patnáctiletých žáků důvodně očekávat“. Dále se šetření snažilo „popsat rozsah, v němž jsou žáci schopni myslet tvůrčím způsobem při vyhledávání a vyjadřování nápadů, a dále zjistit, jak tato schopnost souvisí s přístupy k výuce, se školními aktivitami a s dalšími charakteristikami vzdělávacích systémů“ (ČŠI, 2022a, s. 52).

hodiny matematiky obtížné, a rovněž obavy z toho, že z matematiky dostanou špatnou známku“ (Boudová et al., 2023, s. 6).

Další šetření, které se mimo jiné zabývá také měřením žákovských matematických schopností, je projekt TIMSS⁵⁴. Nejprve uvedeme základní charakteristiky šetření TIMSS 2023 v matematice a jeho plně digitalizovanou podobu. Stejně jako šetření PISA 2022 i TIMSS 2023 nahlíží na matematiku jako na klíčovou vzdělávací oblast, jež je nezbytná pro začlenění se do dnešního technologického světa. Matematika je zásadní nejen v každodenním životě, ale také v mnoha kariérních oborech, jako jsou např. inženýrství, architektura, účetnictví, bankovníctví, podnikání, medicína, ekologie, počítačové technologie, vývoj softwaru nebo letectví. Cílem TIMSS 2023 je obdobně jako u šetření PISA 2022 plné využití výhod, které počítačové technologie nabízí. TIMSS 2023 přichází s plně digitálním systémem, který nabízí nová vylepšení jak pro hodnotitele během hodnocení (např. „nové hodnoticí metody, prezentace výsledků, automatizace procesu hodnocení, vyšší reliabilita“), tak pro žáky během testování (např. „interaktivní simulace a nástroje“) (ČŠI, 2022a, s. 6). Obě šetření TIMSS 2023 i PISA 2022 kladou důraz na reálný kontext řešeného problému⁵⁵. Rámcový hodnoticí plán pro matematiku šetření TIMSS 2023 je rozdělen na obsahovou⁵⁶ a kognitivní dimenzi⁵⁷, přičemž obsahová dimenze specifikuje obsah, jenž je hodnocen, a kognitivní dimenze myšlenkové procesy, které jsou hodnoceny (ČŠI, 2021).

Poslední šetření TIMSS zaměřené na matematiku a žáky 2. stupně ZŠ proběhlo v roce 1999. Výsledky tohoto šetření nebudeme z důvodu časové irelevance uvádět. Zmíníme

⁵⁴ TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*) je studie řízená Mezinárodním centrem TIMSS v Boston College v úzké spolupráci s Mezinárodní asociací pro hodnocení výsledků vzdělávání IEA (*International Association for the Evaluation of Educational Achievement*) (Tomášek et al., 2020, s. 8). Jedná se o mezinárodní šetření, do kterého se Česká republika pravidelně zapojuje (s výjimkou šetření TIMSS 2003) ve čtyřletých cyklech od roku 1995. Pravidelně toto šetření přináší informace o výsledcích žáků 4. ročníků základní školy v matematice a přírodovědě. Do testování žáků 8. ročníku se Česká republika zapojila naposledy v roce 2007 (Tomášek et al., 2020, s. 3). Vzhledem k zaměření této práce na žáky 2. stupně základní školy neuvádíme v této kapitole výsledky posledního šetření TIMSS 2019, protože výzkumným vzorkem šetření v tomto roce byli čeští žáci 4. ročníků. Zahrnuty nejsou ani výsledky šetření TIMSS 2007, do kterého se sice zapojili i žáci 8. ročníků, nicméně stáří těchto dat by mohlo být zavádějící.

⁵⁵ Šetření TIMSS 2023 tvoří úlohy s reálným kontextem 85 %, zbylých 15 % tvoří úlohy bez kontextu, díky kterým je zkoumán možný efekt čtenářské zátěže (ČŠI, 2022a, s. 6).

⁵⁶ Obsahová doména matematiky pro 8. ročník základní školy zahrnuje v tomto šetření kategorie: číslo – celá čísla, desetinná čísla a zlomky, poměr a procenta (30 %), algebra – výrazy, operace a rovnice, vztahy a funkce (30 %) geometrie – geometrické útvary a míra v geometrii (20 %), data a pravděpodobnost (20 %) (ČŠI, 2022a, s. 16).

⁵⁷ Kognitivní doména obsahovala kategorie: znalosti (35 %), aplikace (40 %), zdůvodnění (25 %) (ČŠI, 2022a, s. 7).

však výsledky posledního šetření TIMSS 2019, které však v České republice testovalo v matematice pouze žáky 4. ročníků. Průměrné výsledky žáků v matematice od roku 1995 do roku 2019 vykazovaly klesající tendenci. Od roku 1995 do roku 2007 došlo u českých žáků k velkému zhoršení, dokonce největšímu ze všech zapojených zemí (Tomášek et al., 2020, s. 16). Šetření TIMSS 2019 měřilo také průměrnou vědomostní úroveň v matematice. Ta u českých žáků byla vyhodnocena jako nízká či pod standardní úrovní u 22 % zúčastněných žáků. Střední průměrné vědomostní úrovně v matematice dosáhlo 36 % zúčastněných žáků. Velmi vysoké a vysoké vědomostní úrovně v matematice pak dosáhlo 42 % zúčastněných žáků, přičemž významně větší podíl na této úrovni měli chlapci. Obě šetření (PISA 2022 i TIMSS 2019) tedy potvrdila, že výuka matematiky stále nabízí prostor pro zlepšování a další rozvoj.

I přestože jsou výsledky obou šetření v tomto ohledu podobné, zásadně se liší v přístupu k tomu, co je současně míněno (v oblasti vzdělávání) pojmem matematická gramotnost. V publikaci *TIMSS 2023 Assessment Frameworks* (Mullis et al., 2021) není pojem matematická gramotnost zmíněn přímo. Autoři zmiňují pouze tzv. primární gramotnost a numerické dovednosti či aktivity („early literacy and numeracy activities“) (ČŠI, 2022a, s. 49) v kontextu předškolního věku dítěte a vzdělávání na 1. stupni základního vzdělávání. Matematická gramotnost, jak ji uvádíme v kapitole 2.5, není zde definována ani s ní není operováno.

Matematické znalosti, dovednosti a schopnosti jsou v šetření TIMSS 2023 hodnoceny na základě již zmíněné kognitivní a obsahové domény. Vyhodnocení šetření PISA 2022 naopak vychází z definice matematické gramotnosti, kterou v publikaci *PISA 2021 Mathematics framework* OECD uvádí. Kurikulární rámec šetření PISA 2021 je navíc doplněn o inovativní doménu *tvůrčí myšlení*. Na rozdíl od šetření TIMSS 2023 nevychází šetření PISA 2022 primárně z analýzy kurikulárních dokumentů jednotlivých států, jako je tomu v TIMSS 2023 (v publikaci *TIMSS 2019 Encyclopedia: Education policy and curriculum in mathematics and science*). Hlavním cílem šetření PISA 2022 je hodnotit určité matematické kompetence patnáctiletých žáků, které pro ně mohou být užitečné především v budoucím profesním, osobním, vědeckém či společenském kontextu a životě. Naopak hlavním cílem šetření TIMSS 2023 je zhodnotit dosažení a naplnění vzdělávacích kurikul v jednotlivých zemích. Šetření TIMSS hodnotí v každé zemi u žáků 4. a 8. ročníků tři úrovně kurikula – zamýšlené, realizované a dosažené kurikulum.

Odpovídají tak na otázku úspěšnosti vzdělávacího procesu konkrétního státu (Maršák, 2009). Je nutné podotknout, že i v projektu PISA 2022 je škola považována za důležitý zdroj rozvíjení zmiňovaných kompetencí, a proto jsou hlavní části testovacích prostředků věnovány tématům běžně probíraným v matematice v mnoha zemích. Kurikula většiny participujících zemí tak do jisté míry vždy přispívají k podpoře matematické gramotnosti, jak byla konsensuální vymezená v projektu PISA 2022 (Maršák, 2009).

Ač v šetřeních nacházíme rozdílné přístupy, není nutné vybírat si jeden ze způsobů hodnocení matematických znalostí, schopností a dovedností, popř. matematické gramotnosti. Společně tyto způsoby hodnocení utváří komplexní celek, ke kterému bychom měli během výuky matematiky na základní škole dospět. Bez kurikulárních znalostí je totiž student pouze stěží aplikuje při řešení problémů reálného kontextu, naopak bez aplikace matematického poznání je velmi obtížné prohlubovat porozumění dalším matematickým pojmům či tvrzením (Maršák, 2009). V této práci se tedy přikláníme ke komplexnímu pojetí matematické gramotnosti, která zahrnuje mimo (výše již definovanou) matematickou gramotnost také plnění vzdělávacího kurikula, v případě České republiky tedy RVP ZV 2023.

Na závěr představíme výsledky aktuálního šetření v matematice, jež proběhlo na státní úrovni v České republice v roce 2022. Toto šetření realizovala Česká školní inspekce, jednalo se o rozsáhlé zjišťování výsledků žáků na úrovni 5. a 9. ročníků základní školy a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií v oblasti český jazyk a matematika. Cílem tohoto šetření bylo poskytnout žákům, rodičům, učitelům, ředitelům škol i státu objektivizovanou a relevantní informaci o výsledcích vzdělávání stejně jako o vybraných faktorech kvality vzdělávání, které na výsledky působí. Vzhledem k tomu, že shodné zjišťování výsledků realizovala Česká školní inspekce i v roce 2017, bylo možné posoudit změny, ke kterým ve vzdělávacích výsledcích žáků v letech 2017 až 2022 došlo. Důležitost možnosti srovnání výsledků byla zesílena potřebou sledovat dopady pandemie covidu-19 na vzdělávání ve školním roce 2019/2020 a 2020/2021. Podobně jako během testování v roce 2017 se jeví zvládnutí učiva matematiky na 1. i 2. stupni základní školy jako problematické (Novosák et al., 2022, s. 6). Do testování matematiky v roce 2022 se zapojilo v 5. ročníku 58 281 žáků a v 9. ročníku 53 069 žáků (Novosák et al., 2022, s. 7). Průměrná úspěšnost žáků 5. ročníku v testu z matematiky byla 51 %, u žáků 9. ročníků byla průměrná úspěšnost v matematickém testu 53 %. „Opakovaně se tak ukazují vyšší

problémy žáků 5. i 9. ročníků se zvládnutím učiva matematiky na 1. i 2. stupni základní školy“ (Novosák et al., 2022, s. 10). Zaznamenána byla také tendence zhoršování charakteristik spojených s kvalitou vzdělávání při přechodu žáka z 1. na 2. stupeň základní školy, např. „...snižování vzdělávacích ambicí žáků; klesající sebedůvěra žáků v matematice a zvyšující se pocit, že jim matematika nejde; snižující se úroveň žáky vnímané podpory ze strany učitelů a spolužáků...“ (Novosák et al., 2022, s. 12). I výsledky posledního státního testování by nás měly vést k dalšímu zkoumání této problematiky.

2.6 Digitální gramotnost a digitální kompetence

V předchozích kapitolách jsme se věnovali různým podobám matematické gramotnosti a výuce matematiky jako takové. Zmínili jsme také, že se pohledy na matematickou gramotnost a vzdělávání mění společně se změnami, jimiž prochází společnost sama. Jednou z hlavních změn, kterou v posledních letech společnost zaznamenala, je právě globální digitalizace a vznik mnohých informačních a komunikačních technologií. Tuto změnu již zaznamenal i RVP ZV (MŠMT ČR, 2023), který byl v roce 2021 obohacen o digitální kompetenci v rámci tzv. „malé revize“ RVP ZV. K rozvoji této kompetence by mělo přispívat vzdělávání ve všech vzdělávacích oblastech včetně oblasti Matematika a její aplikace. Všechny základní školy musí dle revidovaného RVP ZV revidovat také své školní vzdělávací programy pro základní vzdělávání a začít je v praxi aplikovat nejpozději k 1. 9. 2025. Na námi vybrané základní škole (ZŠ Dobrá) již k interní revizi ŠVP ZV došlo, program je platný od 1.9. 2023.

Ucelenější vizi českého školství do budoucna pak podává dokument *Strategie 2030+* (MŠMT ČR, 2020), přičemž v první strategické linii tohoto dokumentu je zařazeno digitální vzdělávání. Hlavním cílem však není, aby student pouze hojně využíval digitální technologie, ale aby svoje digitální znalosti a dovednosti uměl zodpovědně, samostatně a vhodným způsobem používat v kontextu vzdělávání, práce či zábavy. Během výuky by tedy měl být seznámen se způsoby a druhy technologií, které může využít právě pro tyto účely. Tento úkol je směřován na samotné učitele, kteří by studentům měli zprostředkovat ukázky širokého spektra edukačních možností a zmiňovat výhody a nevýhody jejich používání. Žák by měl být následně schopen vyhledávat důvěryhodné zdroje a z nich čerpat, třídít je a kriticky informace hodnotit. Zároveň by měl být seznámen s riziky, která

přináší právě samotné využívání technologií a internetu, a být na ně připraven (MŠMT ČR, 2020, s. 31).

MŠMT dále uvádí, že využívání digitálních technologií by mělo být v průběhu následujících let samozřejmostí ve všech oblastech vzdělávání, mělo by se tedy stát jeho smysluplnou součástí a podporovat tak informatické myšlení a digitální gramotnost studentů. Zásadním úkolem by měla být schopnost žáka adaptovat se na dynamickou digitalizaci celé společnosti, připravenost na budoucí automatizaci některých profesí, které po ukončení jeho studia již nemusí existovat na budoucím trhu práce (MŠMT ČR, 2020, s. 31).

Digitální kompetence by měla být rozvíjena v závislosti na tom, jak vývoj digitálních technologií zasahuje do obsahů konkrétního vzdělávacího oboru RVP ZV (MŠMT ČR & NPI ČR, 2023). Pokud žák během základního vzdělávání nabude předpokládanou digitální kompetenci dle RVP ZV (MŠMT ČR, 2023), na jeho konci:

- ovládá běžně používaná digitální zařízení, aplikace a služby; využívá je při učení i při zapojení do života školy a do společnosti; samostatně rozhoduje, které technologie, pro jakou činnost či řešený problém použít,
- získává, vyhledává, kriticky posuzuje, spravuje a sdílí data, informace a digitální obsah, k tomu volí postupy, způsoby a prostředky, které odpovídají konkrétní situaci a účelu,
- vytváří a upravuje digitální obsah, kombinuje různé formáty, vyjadřuje se za pomoci digitálních prostředků,
- využívá digitální technologie, aby si usnadnil práci, zautomatizoval rutinní činnosti, zefektivnil či zjednodušil své pracovní postupy a zkvalitnil výsledky své práce,
- chápe význam digitálních technologií pro lidskou společnost, seznamuje se s novými technologiemi, kriticky hodnotí jejich přínosy a reflektuje rizika jejich využívání,
- předchází situacím ohrožujícím bezpečnost zařízení i dat, situacím s negativním dopadem na jeho tělesné a duševní zdraví i zdraví ostatních; při spolupráci, komunikaci a sdílení informací v digitálním prostředí jedná eticky.

Pro vzdělávací oblast Matematika a její aplikace připravilo MŠMT ČR a NPI ČR na webu revize.edu.cz návod, jak digitální kompetenci rozvíjet přímo ve výuce matematiky na 2. stupni ZŠ.

- „Žáci se na druhém stupni učí rozpoznat situace, kdy jim kalkulátory ulehčí řešení algoritmických úloh a napomáhají jim s rutinními výpočty. Jejich pozornost se tak může přesunout na podstatu řešení problému.
- Digitální technologie slouží žákům jako nástroj pro zpracování dat.
- S pomocí tabulkového procesoru či vhodného programu žáci analyzují a prezentují data. K modelování geometrických útvarů a těles využívají dynamický geometrický software, který přispívá k porozumění geometrickým vztahům a vlastnostem útvarů a také podporuje osvojení geometrických dovedností a rozvoj prostorové představivosti“ (MŠMT ČR & NPI ČR, 2023).

Z tohoto webu čerpala i ZŠ Dobrá při interní revizi ŠVP ZV. Očekávané výstupy vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace byly obohaceny o tyto konkrétní výstupy přispívající k rozvoji digitální kompetence u žáků.

Vzhledem k začlenění digitální kompetence do rámcového vzdělávacího programu předpokládáme, že se v reálném pedagogickém prostředí během našeho akčního výzkumu setkáme i s využitím ICT ve výuce matematiky, proto je tato kapitola věnována digitální gramotnosti, která je v posledních letech hojně diskutována (Dombrovská, 2018; NPI, 2021; Reininger & Karbginsky, 2021; Radovanović, 2023; Nicosia, L. & Nicosia, F. J., 2022; Eilu et al., 2021 atd.).

Tato rigorózní práce je tedy věnována podobě vzdělávání v době, jež bývá označována jako „digitální věk“ nebo věk nových médií (Eurofound, 2021). V digitálním věku bychom očekávali, že se dostanou do popředí otázky související s využitím informačních a komunikačních technologií (ICT⁵⁸) a s jejich efektivním využitím, s vhodným a správným začleněním do výukového procesu. Škola by měla žákům ukazovat způsoby, jak efektivně a vhodně ICT využívat k seberozvoji nebo např. k tvorbě vlastního kreativního obsahu. Nezná-li žák způsoby efektivního využití technologií v občanském životě, může se stát, že je bude používat pouze jako prostředek jednoduché zábavy. Tou jsou např. hry nebo socializace na sociálních sítích, což přináší mnohá zásadní rizika. Více informací čtenář najde např. v publikaci *Digitální demence* (Spitzer, 2014).

⁵⁸ ICT je zkratka z anglického Information and Communication Technologies – označuje informační a komunikační technologie.

Člověk žijící v 21. století by měl tedy dosahovat určité míry znalostí, zkušeností, schopnosti orientovat se v dané problematice, kriticky hodnotit informace, měl by být mimo jiné i tzv. digitálně gramotný. Tato digitální gramotnost je v současné době úzce spojována mimo jiné i s matematickou gramotností, obě jsou totiž společně s čtenářskou gramotností považovány za základní gramotnosti 21. století (NPI, 2021, s. 4). Definice digitální gramotnosti bychom našli mnoho, ale vzhledem k danému rozsahu této rigorózní práce uvedeme pouze některé.

Než budeme definovat sousloví digitální gramotnost, zaměříme se na vymezení gramotnosti obecně, z níž digitální gramotnost vychází. Organizace UNESCO (2004, s. 13) definuje obecně gramotnost jako souhrn schopností „identifikovat, porozumět, interpretovat, vytvářet, komunikovat, počítat a používat tištěné a psané materiály v různých kontextech. Zahrnuje také nepřetržité učení, které umožní dosáhnout cílů, rozvíjet znalosti, potenciál a plně se zapojit do komunity a společnosti“. Uznáme-li skutečnost, že gramotnost zahrnuje ústní, psané, vizuální a digitální formy vyjadřování a komunikace, můžeme konstatovat, že utváří, vyjadřuje a sděluje kulturní identitu⁵⁹ jedince (UNESCO, 2004, s. 14). Bélisle (2006, s. 54–55) dodává, že gramotnost „přináší také hloubkové obohacení a nakonec znamená transformaci schopností lidského myšlení. Tato intelektuální osvěta se děje vždy, když lidstvo objeví a dále zkoumá nové kognitivní nástroje (např. digitální technologie)“.

S konceptem digitální gramotnosti, podobně jak ji vnímáme dnes, se odborná veřejnost poprvé setkala v roce 1997 zásluhou knihy *Digital Literacy* (Gilster, 1997). Již v této knize autor upozorňuje na potřebu osvojit si nové gramotnosti pro život ve století internetu a kriticky myslet. V publikaci uvádí následující definice:

- „Digitální gramotnost je dovednost používat počítačové sítě pro zpřístupnění zdrojů a schopnost s těmito zdroji pracovat“ (Rosado & Bélisle, 2006, s. 5).
- „Digitální gramotnost je dovednost pracovat v on-line prostředí a posuzovat on-line informace“ (Rosado & Bélisle, 2006, s. 5).

⁵⁹ „Ztotožnění jedince se sociálními a morálními normami a konvencemi, sdílenými určitou etnickou či jinou skupinou“ (Průcha, Walterová & Mareš, 2003). Vyvíjí se již od raného věku jedince narozeného do sociální skupiny (např. rodina, škola, obec, město, region). Každá z těchto skupin vytváří svoji specifickou kulturu. Kulturní identita jedince pak vzniká na základě styku s těmito skupinami (Skarupská, 2017, s. 18).

Od Gilsterova (1997) původního pojetí se tento pojem vyvinul a rozšířil a postupně nabýval na stále větší důležitosti pro kulturní, občanskou a ekonomickou participaci (Aabo, 2005). V roce 1999 použila DiNucci ve svém článku poprvé termín Web 2.0⁶⁰ (DiNucci, 1999, s. 32), ten se stal přelomovým pro redefinování termínu digitální gramotnost. Vznikla totiž participativní kultura, která vyžadovala dovednosti a činnosti (tvořivost, schopnost vyjadřovat, interagovat, sdílet, zapojovat se atd.) přesahující Gilsterovu úvodní definici (Meyers et al., 2013).

Počátkem 21. století začali publikovat autoři jako např. Bawden (2001); Bawden & Robinson (2002); Eshet-Alkalai (2004); Kope (2006); Martin (2006a, 2006b); Williams & Minnian (2007); Bawden (2008); Lankshear & Knobel (2008); Jones & Hafner (2012), kteří hlouběji a detailněji objasňovali koncept digitální gramotnosti. Např. Bawden (2008) publikoval model digitální gramotnosti, v němž rozlišil komponenty čtyř úrovní. První úroveň vnímal jako základy (čtení, porozumění textu, znalosti a dovednosti, jak počítač používat); druhou jako dosavadní znalosti a zkušenosti (porozumění různorodým formám informací, začlenění informací do digitálního světa); třetí jako ústřední kompetence (porozumění digitálním i nedigitálním informacím v digitálním i nedigitálním formátu, tvorba a sdělování informací, extrakce nových významů atd.). Do poslední úrovně zařadil postoje, stanoviska a nové pohledy přesahující rámec této gramotnosti (zasazení prvních tří úrovní do socio-kulturního rámce) (Jeřábek et al., 2019, s. 10). Allan Martin (Lankshear & Knobel, 2008, s. 157) vyjmenoval tři fáze vývoje digitální gramotnosti: „fáze zvládnutí, během které dojde k získání odborných znalostí a dovedností k ovládnutí konkrétní technologie; fáze aplikace, během které je na technologii nahlíženo jako na nástroj; fáze reflexe, během které je nutné zaujmout kritický a reflexivní přístup.“

⁶⁰ „Web jako prostředí, jako éter, jehož prostřednictvím dochází k interaktivitě“ (DiNucci, 1999, s. 32). O'Reilly definuje následně jako „revoluci podnikání v počítačovém průmyslu, dochází k přesunu chápání webu jako platformy a pokusu o porozumění pravidlům, která na této platformě vedou k úspěchu“ (O'Reilly, 2006).

O deset let později Evropská unie a MŠMT ČR ve spolupráci s českými autory připravily publikaci *Rozpracovaný koncept digitální gramotnosti*, ve které uvádí definice několika autorů:

- „Digitální gramotnost je schopnost provádět úspěšně digitální aktivity (schopnost efektivně pracovat s digitálními technologiemi) v rámci různých životních situací, které mohou zahrnovat práci, učení, volný čas a další aspekty každodenního života“ (Jeřábek et al., 2018, s. 2).
- „Digitální gramotnost je schopnost využívat informační a komunikační technologie k hledání, ověřování, vytváření a předávání informací vyžadující kognitivní i technické dovednosti“ (Jeřábek et al., 2018, s. 2).
- „Digitální gramotnost lze chápat jako soubor digitálních kompetencí (vědomostí, dovedností, postojů, hodnot), které jedinec potřebuje k bezpečnému, sebejistému, kritickému a tvořivému využívání digitálních technologií při práci, při učení, ve volném čase i při svém zapojení do společenského života“ (Jeřábek et al., 2018, s. 2).

Vzhledem k pedagogické tematice této práce se přikláníme k definici uvedené výše, která na digitální gramotnost nahlíží jako na soubor digitálních kompetencí. Vzhledem k dříve uvedeným definicím můžeme navíc konstatovat, že terminologický koncept digitální gramotnosti je velmi rozsáhlý, různorodý a dynamický. My však výzkum této rigorózní práce provádíme na české škole, proto se z mnoha definic přikloníme k té, kterou uvádí NPI (2021): „Digitální gramotnost je pojímána jako soubor digitálních kompetencí (vědomostí, dovedností, postojů, hodnot), které potřebuje jedinec k bezpečnému, sebejistému, kritickému a tvořivému využívání digitálních technologií při práci, při učení, ve volném čase i při svém zapojení do společenského života“ (NPI, 2021, s. 44).

ICT ve výuce matematiky

Již od pradávna se snažíme automatizovat operace, jako jsou např. počítání, třídění či šifrování. Stejně jako vynález knihtisku patří k důležitým milníkům konkrétní doby i vznik internetu, počítače a dalších ICT. Tyto technologie automatizovaly zmíněné procesy, podpořily svobodný přístup ke znalostem a akcelerovaly rozvoj v oblastech vědy a techniky (Kursch, 2022). Automatizace operace počítání začala již v 17. století, kdy filozof Blaise Pascal vytvořil mechanický kalkulátor, který ke sčítání a odčítání čísel využíval jehlu k tzv. „vytáčení“ čísel. Gottfried Leibniz přišel o 30 let později s tzv. „krokovým kalkulátorem“ (Isaacson, 2015, s. 37). První plně automatický kalkulátor na počítání logaritmů sestavil Charles Babbage začátkem 19. století, jenž je považován za „nejranějšího předchůdce moderního počítače“ (Kursch,

2022, s. 15). Alan Turing a John von Neumann se také úspěšně pokusili o automatizaci řešení problému z oblasti matematiky a Turingův stroj a ENIAC jsou neopomenutelnou součástí světové historie (Taylor, 2019). ICT a automatizace procesů v oblasti matematiky nejsou tedy náhlým výplodem digitálního věku, tyto oblasti jsou již s matematikou od pradávna úzce spjaty.

Nyní existuje celá řada moderních technologií, jež je možné efektivně zavádět do vzdělávání. Nicméně cíle, které v digitální oblasti deklarovaly dokumenty, jako jsou *Strategie digitálního vzdělávání do roku 2020* (MŠMT ČR, 2014) a *Strategie digitální gramotnosti 2015–2020* (MPSV, 2015), se v praxi nepodařilo naplnit a realizovat. V roce 2017 vyhodnotila Česká školní inspekce ve své tematické zprávě zaměřené na využívání digitálních technologií ve vzdělávání „...koncepte a financování neefektivní, personální zajištění jako nedostatečné, počítače jako zastaralé, připojení k internetu jako omezené a celou situaci vyhodnotila jako kritickou...“ (Česká školní inspekce, 2017, s. 20). Během následujících let se situace na mnoha místech zlepšila, proces digitalizace urychlila pandemie covidu-19, která zapříčinila uzavření škol a přechod na vzdělávání distanční. Během pandemie vzniklo také mnoho nových edukačních platforem, databází vzdělávacího obsahu, návodů a komunikačních nástrojů. „To, co se nepodařilo strategiím za posledních 10 let, změnila pandemie během dvou měsíců“ (Kopecký et al., 2021, s. 12). Na některých školách sice během pandemie došlo k poměrně zásadním změnám, ale byly a jsou i školy, které se diametrálně liší, na nichž k téměř žádným změnám či e-learningu nedošlo ani během pandemie (Kopecký et al., 2021). Nadějí na další změny je tak v roce 2026 revidovaný RVP ZV (MŠMT ČR, 2023).

Integrace ICT do vzdělávání je stále populárnější. Účastníci vzdělávacího procesu v éře digitalizace a globalizace by se měli pokoušet o „...hledání vhodného mixu mezi využíváním ICT ve vyučování a učení a využíváním klasických nástrojů za účelem docílit optimálního prostředí pro efektivní vzdělávání, postavené na všech dostupných možnostech. Role ICT pro vzdělávání tudíž není zanedbatelná...“ (Kursch, 2022, s. 10).

Významnou roli ICT zastupuje např. při explanaci složitějších problémů pomocí počítačových vizualizací, modelování abstraktních entit pomocí speciálních softwarů či spolupráci odborníků z celého světa pomocí internetu. Pokud nebudeme ICT ve vzdělávání využívat, posouváme se zpět do doby, kdy tyto procesy nebylo možné realizovat vůbec, nebo pouze v malé míře (Kursch, 2022).

Běžnými ICT, které jsou využívány ve výuce matematiky, jsou např. kalkulátor, tabulkový procesor nebo software dynamické geometrie. Digitálních technologií, jež lze ve výuce matematiky využívat, je však bezpočet. Záleží pouze na učitelích matematiky, které z nich do své výuky zařadí. To však znamená, že jsou na učitele kladeny nové požadavky. Musí být připraveni s moderními didaktickými prostředky a technologiemi pracovat a vytvářet pro potřeby takto koncipované výuky také vhodné vzdělávací materiály. Učitelé však nemusí být nutně experti na oblast ICT nástrojů a programů (např. interaktivní tabule, tablety, počítače, výukové programy, výukové webové stránky, elektronické výukové materiály a knihy apod.), měli by ale být schopni je ve výuce využít (Klement et al., 2017). Model, který zkoumá schopnosti učitele ICT ve výuce využít, je technologicko-pedagogická znalost obsahu. Anglicky je tento model označován jako TPACK (Technological Pedagogical Context Knowledge) (Shulman, 1986). Tento model operuje s třemi dimenzemi. První je pedagogická dimenze, druhou tvoří dimenze obsahová a třetí je dimenze technologická. Čtenář se o modelu TPACK dočte více např. v publikacích autorů Zormanová & Šedřová, 2009; Janík et al., 2007; Mishra & Koehler, 2006; Angeli & Valanides, 2014; Herring et al., 2014 atd. Jak náročné je pro učitele matematiky na ZŠ Dobrá rozvíjet ve vyučovacích hodinách matematiky žákovskou digitální gramotnost uvádíme v kapitole 4.1.

Žáci z generace alfa

V předchozích odstavcích jsme hovořili o gramotnostech, k jejichž rozvoji by mělo základní vzdělávání přispívat. Máme-li u žáků jednotlivé gramotnosti a kompetence rozvíjet, je vhodné znát charakteristiky skupiny, kterou budeme v následujících letech na základních školách vyučovat. Generace, která bude základní školu navštěvovat v následujících letech, bude tzv. generace alfa. Vzhledem k rychlosti technologického rozvoje a přenosu informací je velmi pravděpodobné, že absolventi základních škol, tedy generace alfa, budou vykonávat profese, které ještě neexistují. Vzhledem k nynějšímu proudu automatizací, robotizací, zavádění ICT, kyberneticko-fyzických systémů,

systemů umělé inteligence do výroby, služeb a všech odvětví hospodářství, budou zaměstnavatelé od zaměstnanců vyžadovat digitální gramotnost, adaptabilitu, schopnost spolupracovat, kriticky myslet a stále se učit novému (McCridle, 2020). Na významu tak nabývají mimo jiné kompetence digitální, komunikativní, pracovní, sociální a personální. I z tohoto pohledu se může jevit výuka matematiky a informatiky jako zásadní pro rozvoj technické gramotnosti⁶¹ obyvatelstva.

V kontextu českého vzdělávacího systému je nutné vzít v potaz i populaci, pro kterou inovace připravujeme. Počet žáků základních škol ve srovnání s minulou dekádou stoupá a výhledově stoupat bude. Jejich charakteristiky se v závislosti na digitálním věku mění a budou se i nadále měnit (MŠMT ČR, 2023, s. 5). Mark McCridle ve své publikaci *Understanding generation alpha* uvádí a podrobně popisuje termín generace alfa, který užívá pro generaci nově narozených od roku 2010, kdy byl na trh uveden první iPad a spuštěna sociální síť Instagram, která má v roce 2023 přes 1,3 miliardy uživatelů. Do generace patří nově narození do roku 2024. Pokud nomenklatura zůstane, generaci alfa bude následovat generace beta (2025–2039). Setkat se můžeme také s termíny „Screenagers“ nebo např. „Generation Glass“ (např. Apaydin & Kaya, 2020; Robb, 2017). Jedná se o děti mileniálů a často mladší sourozence generace Z. Předpokládá se, že jich v roce 2025 budou více než 2 miliardy, tzn. nejpočetnější generace v historii lidstva. Označení alfa vzniklo primárně z důvodu vyčerpání posledního písmene latinské abecedy u generace Z, alfa značí nový začátek, tentokrát však abecedy řecké. Tato generace nebude pouze tou největší, ale zároveň nejglobálnější v historii světa, a to díky technologiím a možnostem, které digitální věk 21. století nabízí. Fyzická, vzdělávací, obchodní, sociální a psychologická vyspělost (v angličtině tzv. „upagers“) u nich začíná dříve, to však může mít pozitivní i negativní důsledky. Adolescence sice začíná dříve, nicméně mnohdy končí později než u předchozích generací, často se prodlužuje např. doba studia, možnost být finančně soběstačným jedincem a trvání finanční podpory ze strany rodičů (McCridle, 2020, s. 3–5).

Protože generace alfa představuje budoucnost, je důležité porozumět jejím charakteristikám za účelem efektivního rozvoje a formování této generace, tak aby v budoucnosti prosperovala. Má plně k dispozici technologická zařízení, jako jsou např.

⁶¹ V kontextu definice technické gramotnosti jako „schopnosti lidského jedince rozumět technickým procesům a schopnosti používat je, posoudit a stanovit správné technologie a přístupy“, dostupné z materiálu TAČRu Definice technického vzdělávání (2017, s. 8)

chytré telefony, tablety, výkonné počítače, autonomní automobily, pokladny nebo umělá inteligence (AI). S technologiemi a obrazovkami přichází do kontaktu již od narození, není divu, že je mnohdy velmi náročné je od obrazovky odtrhnout. V oblasti formálního vzdělávání a technologií jsou tedy nejvzdělavatelnější, naopak někteří budou méně zdatní v praktických dovednostech a motorických schopnostech. Klesat může také jejich psychická i fyzická odolnost, schopnost reálně se socializovat v kolektivu nejen svých vrstevníků a kriticky myslet. McCridle uvádí srovnání generace Z, alfa a beta v oblastech vzdělání, marketingu a technologií pomocí přídavných jmen vystihujících konkrétní generaci (obr. 13).

	Generace Z	Generace alfa	Generace beta
Očekávané výstupy vzdělávání	zaměstnatelní	přizpůsobiví	podnikaví
Zaměření žáků	Známky/výsledky testu	Schopnost učit se	Schopnosti pro život
Marketing	Kolega	Influencer	Umělá inteligence
Pracovní styl	Participativní	Kolaborativní	Spolu tvořivý
Ideální vedoucí	Koordinátor	Posilovatel	Rozšiřovatel
Platební metody	Kreditní karty	Digitální platby	Virtuální platby
Technologie	Dotykové	Ovládané zvukem	Ovládané gesty
Trendy mezi zákazníky	Zákazková výroba	Personalizované	Předpovídající
Poradenství	Profesionálně kvalifikované	Hodnocení na sociálních sítích	Doporučení kolegů
Trend stávající ekonomiky	Měníci se	Častá narušení	Nepřetržitá volatilita

Obrázek 13 Zájmy napříč generacemi, (McCridle, 2020, s. 9, volně přeloženo)

Škola je ideálním místem, které může podpořit nejen slabé, ale i silné stránky generace alfa a dalších (McCridle, 2020). S příchodem změn ve společnosti a v charakteristikách generací musí dojít k posunu od frontálního systému vzdělávání k systému vzdělávání menších skupin. Škola by se měla stát místem pro rozvoj kritického myšlení, pro pěstování schopnosti řešit problémy a ověřování a kritické hodnocení dostupných informací (Poosnick-Goodwin, 2010). Výzva dosáhnout změn ve výuce na všech českých školách určitě není nereálná, v této rigorózní práci se pokusíme přispět ke zkoumání této problematiky tak, že pronikneme do hloubkové struktury výuky matematiky na vybrané základní škole a získáme tak základ pro její zkvalitňování. Zároveň poukážeme na to, že se každý učitel může stát výzkumníkem ve svém oboru a přispět tak k rozvoji vzdělávání dalších generací.

2.7 Shrnutí teoretických východisek

V předchozích kapitolách jsme se komplexně zaměřili na matematické vzdělávání na základních školách, počínaje žakovským poznávacím procesem, z něhož vychází nejen kurikulum vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, didaktická transformace obsahu,

ale také např. nová produktivní kultura vyučování a učení se matematice. V celkovém pohledu se ukazuje, že mezi determinující faktory ovlivňující učební výsledky a oblíbenost matematiky u žáků patří mimo jiné i kvalita a charakteristiky vyučování (Bloom, 1976). Primárními aktéry, kteří mohou kvalitu a charakteristiky vyučování přímo ovlivňovat, jsou učitelé, kteří konkrétní vyučovací hodiny vedou.

Většinou vyučovacích hodin matematiky by měla předcházet příprava a plánování vyučovací hodiny, které jsme se věnovali v kapitole 2.2.1. V kapitole 2.3 jsme poté poukázali na didaktickou analýzu učiva, kterou můžeme považovat za hloubkovou přípravu na vyučovací hodinu, nicméně nejedná se o nejčastější druh přípravy českých pedagogů. Příprava na vyučovací hodinu by měla pomoci učitelům najít odpověď na otázku: „Co by se měli moji žáci v hodině naučit?“ (Janík et al., 2022b, s. 8). Tato otázka zároveň úzce souvisí s průběhem a reflexí vyučovací hodiny, během níž se nabízí otázky: „Co se moji žáci v hodině skutečně učili? A co se v hodině skutečně naučili?“ (Janík et al., 2022b, s. 8).

Právě reflexe pedagogické činnosti je jedním z možných způsobů, jak kvalitu a charakteristiky vyučování v praxi přímo ovlivňovat a kultivovat. Z výzkumů, které v kapitolách 1.1 a 2.5 uvádíme, však vyplynulo, že reflexe pedagogické činnosti je aktivitou, kterou mnoho českých pedagogických pracovníků podstupuje či vykonává jednou či méně než jednou za rok (ČŠI, 2022). Obdobně je tomu i na námi vybrané základní škole. Vystává tedy potřeba četnost vzájemných hospitací a (sebe)reflexí zvyšovat (Zatloukal, 2023).

Při teoretickém ukotvování námi využívaného pojmu kultura vyučování a učení jsme však také poukázali na problematiku tzv. kulturních praktik ve školním prostředí, kterou nejen subjektivně vnímáme jako poměrně častou, ale navíc zatíženou svou komplexitou. Tyto praktiky můžeme připodobnit k rutinnímu zvyku, který může být mnohdy poměrně náročné změnit. Za možnou kulturní praktiku můžeme považovat např. charakteristiky vyučování, přípravu na vyučovací hodinu matematiky konkrétního pedagoga nebo četnost a způsob průběhu vzájemné pedagogické hospitace nebo (sebe)reflexe. Pedagogické hospitace a (sebe)reflexe však patří ke způsobům, jak analyzovat a charakterizovat kulturní struktury vyučování a učení s cílem porozumět na jedné straně nedostatkům v jejich praktickém utváření a na druhé straně projevům didaktické kvality (Janík et al., 2022a).

Teoretická východiska nás tedy vedou na cestu výzkumu, který si za hlavní cíl klade pokus o hromadné vystoupení z komfortní rutinní zóny učitelů matematiky na vybrané základní škole a podporu jejich samostatného i kolektivního profesního růstu začleněním nového způsobu (sebe)reflexe. Ten jim může i nadále dopomáhat ke kultivaci inovativních způsobů při vyučování matematice nebo např. při začleňování ICT do výuky matematiky, jež si žádá interně revidovaný školní vzdělávací program ZŠ Dobrá.

3. Metodologie provedeného výzkumu

3.1 Výzkumný problém

s. 83–84

3.2 Cíle výzkumu

s. 84–85

3.3 Výzkumné otázky

s. 85–86

3.4 Výzkumný design

s. 86–87

3.5 Výzkumný vzorek

s. 87

3.6 Výzkumné metody

s. 87–89

3.7 Výzkumné šetření

s. 89-100

3 Metodologie provedeného výzkumu

V této kapitole představujeme metodologii provedeného výzkumného šetření. Nejdříve přibližujeme výzkumný problém a cíle výzkumu. V návaznosti uvedeme výzkumné otázky a naznačíme design a průběh výzkumného šetření, přičemž popíšeme výzkumný vzorek a také použité výzkumné metody. Pokračovat budeme shrnutím procesu tvorby použitého výzkumného nástroje. V neposlední řadě představíme metodologii výzkumu zaměřeného na mapování kultury vyučování a učení se matematice na ZŠ Dobrá.

3.1 Výzkumný problém

V teoretické části této rigorózní práce jsme stručně teoreticky ukotvili pojem kultura vyučování a učení matematice. Tento pojem nám pomohl popsat, pochopit a zkoumat procesy související s vyučováním a učením matematice na vybrané základní škole. Pro jeho užívání jsme se rozhodli na základě našeho přesvědčení, že škola je sociální organizace, která má své „...specifické rysy, sdílí hodnoty, postoje, normy, symboly, rituály, preferované chování aktérů školního života a vztahy k okolí, sociálním partnerům a rodičům“, a je tedy kulturou (Průcha, Walterová, & Mareš, 2003, s. 108–109). Je-li škola kulturou, pak je vyučování matematiky její součástí a můžeme ho označit za kulturní aktivitu (Stigler & Hiebert, 1998). Vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, matematickým schopnostem, dovednostem a matematické gramotnosti jsme se věnovali v kapitole 2.5, ve které jsme mimo jiné zmínili jejich „nezastupitelnou“ roli v základním vzdělávání žáků v 21. století (NPI, 2021, s. 4).

Dále jsme však uvedli několik výzkumů, které v posledních letech zkoumaly schopnosti a dovednosti českých žáků v matematice na základních školách. Z výzkumů (např. Blažek et al., 2019, s. 28; Novosák, 2022, s. 7–12; Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání – Oddělení analýz, 2023, s. 38) vyplynulo, že míra těchto schopností a dovedností vykazuje v posledních letech klesající tendenci, za níž stojí mnoho různých faktorů. Cílem této rigorózní práce však není tyto faktory popsat, tuto klesající tendenci zastavit, nebo dokonce její směr obrátit. Zmíněné výzkumy vnímáme „pouze“ jako potvrzení naší domněnky, že ve světě pedagogických výzkumů stále existuje prostor pro další kultivaci kultury vyučování a učení matematice, pro kterou jsme se rozhodli.

Způsobů, jak kulturu vyučování a učení matematice kultivovat, existuje mnoho (např. Smith, 2011; Hospešová et al., 2007; Sochacka et al., 2020). Ten, který představíme v následujících kapitolách, mohou využívat nejen začínající učitelé, zkušení učitelé, ale také další pedagogičtí pracovníci. Nejdříve ale upozorníme na problematiku, kterou vnímáme jako zásadní. Vyučování matematice (stejně jako jiného vyučovacího předmětu) se pro učitele stane po určité době každodenní rutinou. „V průběhu času si budoucí i stávající učitelé pro vyučování vytvoří pravidla a očekávání, která jsou ve společnosti rozšířena a předávána, jak se jedna generace žáků stává příští generací učitelů... Tím, jak jsou naše modely vyučování široce rozšířeny a sdíleny ve společnosti, stávají se takřka neviditelnými. Začínáme věřit, že takhle vyučování vypadá a vypadat musí“ (Stigler et al., 1999, s. 196–197). Při snaze o kultivaci kultury vyučování a učení matematice se tedy pravděpodobně setkáme se stabilitou a setrvačností (kulturní praktikou) této komplexní kulturní aktivity (Janík et al., 2013).

3.2 Cíle výzkumu

Cílem této rigorózní práce v obecné rovině je přimět učitele na ZŠ Dobrá k výstupu z komfortní rutinní zóny a představit jim způsob, jak samostatně nebo kolektivně reflektovat své vyučování a získané poznatky využít jako východisko pro další kultivaci kultury vyučování a učení matematice na své škole. Vzhledem k tomu můžeme rozlišit výzkumné cíle v rovině metodologické a obsahové.

V rovině metodologické je cílem výzkumu vytvořit dvě online dotazníková šetření vycházející z didaktické analýzy učiva, která by mohla i některým dalším učitelům matematiky na základních školách poskytnout podporu pro hloubkovou přípravu na vyučovací hodinu matematiky a zároveň reflexi její realizace po vyučovací hodině.

Cílem výzkumu v rovině obsahové je provést reflexi vybraných vyučovacích hodin matematiky a hodnocení jejich kvality pomocí metodiky 3A. Tohoto cíle chceme dosáhnout prostřednictvím následujících dílčích cílů:

- Pořízením videozáznamu z několika vyučovacích hodin matematiky u všech učitelů matematiky 2. stupně vybrané základní školy;
- Realizováním rozhovorů s těmito učiteli (bezprostředně před pořízením videozáznamu) zaměřených na jimi plánovaný obsah vyučovací hodiny.

3.3 Výzkumné otázky

Výzkumné cíle, které vyplývají z výzkumného problému, byly převedeny do výzkumných otázek. Výzkumné otázky byly dále konkretizovány stanovením podotázek.

Výzkumná otázka 1 (V1):

- Jak připravili učitelé matematiky na ZŠ Dobrá programy vyučovacích hodin matematiky?
 - Liší se jejich příprava na vyučovací hodinu v závislosti na délce jejich pedagogické praxe?
 - Jaké didaktické prostředky využívají učitelé na ZŠ Dobrá při přípravě na vyučovací hodinu nejčastěji?
 - Jakým způsobem učitelé na ZŠ Dobrá nejčastěji začleňují ICT do výuky matematiky? Jak je pro ně rozvoj digitální kompetence u žáků během vyučovacích hodin matematiky náročný?

Výzkumná otázka 2 (V2):

- Jak realizují učitelé matematiky na 2. stupni ZŠ Dobrá vyučovací hodiny matematiky?
 - Jaké jsou alternativní, potenciálně lepší varianty vybraných výukových situací?

Výzkumná otázka 3 (V3):

- Liší se příprava vyučovacích hodin matematiky učitelů na 2. stupni ZŠ Dobrá od samotné realizace výuky?
 - Jaké jsou případné příčiny odklonu od původní přípravy během realizace výuky?
 - Liší se přístup k reflektování a hodnocení kvality vyučovacích hodin v závislosti na délce pedagogické praxe?

3.4 Výzkumný design

Výzkum je pojat jako deskriptivně-evaluační. Jeho průběh jsme rozdělili do čtyř fází, které se odlišují povahou výzkumné činnosti a použitými výzkumnými metodami.

V první fázi našeho výzkumu jsme se zaměřili na teoretické poznání současného stavu analyzované problematiky a rešerši související literatury, teoretických prací a empirických výzkumů. Cílem této fáze bylo teoreticky ukotvit pojmy a procesy související s mapováním kultury vyučování a učení matematice na vybrané základní škole. Na základě nabytých teoretických poznatků jsme se pokusili rozpracovat první verzi dotazníkových šetření a vytvořili jsme informovaný souhlas (viz příloha 5) pro účastníky výzkumu.

Během druhé fáze jsme shromáždili podepsané informované souhlasy⁶² a provedli pilotní natáčení vyučovací hodiny matematiky každého z učitelů matematiky na 2. stupni ZŠ Dobrá. Cílem pilotáže bylo ověření spolehlivosti zařízení, s nímž byly pořizovány i další videozáznamy. Dále pilotáž ověřila validitu a reliabilitu dotazníků a otázek polostrukturovaného rozhovoru, které byly ve třetí fázi zadány.

Ve třetí fázi jsou uskutečněna opakovaně cyklicky dotazníková šetření, rozhovory s učiteli a jsou pořizeny videozáznamy. U každého učitele matematiky na 2. stupni ZŠ Dobrá proběhl tento cyklus alespoň dvakrát. „Z předběžných závěrů B. Rosenshina vyplývá, že pokud chceme pozorovat ..., stačí u každého učitele 1–2 pozorování a získáme poměrně spolehlivé průměrné ukazatele měření“ (Mareš, 1983, s. 173).

⁶² Informovaný souhlas byl vytvořen ve dvou verzích, jedna verze byla připravena pro ředitele školy, druhá pro zákonné zástupce žáků, kteří se videozáznamu vyučovací hodiny zúčastnili. Podpisem informovaného souhlasu dotazovaný či jeho zákonný zástupce potvrdil svou dobrovolnou účast ve videozáznamu.

Výstupem třetí fáze jsou výsledky z dotazníkových šetření, (video)záznamů z vyučovacích hodin a rozhovorů s učiteli. Vzhledem k tomu, že zpracovávání těchto výsledků probíhá jako společná diskuze, spolupráce učitele vybrané vyučovací hodiny a autorky této rigorózní práce, je hloubková analýza a hodnocení kvality výukové situace (pomocí metodiky 3A) výsledkem tzv. shody pozorovatelů⁶³ (Martin & Bateson, 2009).

Ve čtvrté fázi výzkumu jsou vyhodnocena a interpretována data, která byla získána během první až třetí fáze výzkumu. Dále jsou vyhodnoceny a interpretovány rozhovory s učiteli a shrnuty výsledky výzkumného šetření. V poslední části uvádíme závěry pro pedagogickou praxi.

3.5 Výzkumný vzorek

Výzkumným vzorkem pro první fázi našeho výzkumu byly domácí i zahraniční teoretické práce, odborná literatura a empirické výzkumy. Ve druhé, třetí a čtvrté fázi výzkumného šetření tvořila výzkumný vzorek dobrovolná skupina učitelů matematiky na 1. i 2. stupni ZŠ Dobrá. Do dotazníkových šetření se zapojili všichni učitelé matematiky z 1. a 2. stupně ZŠ (celkem 12 učitelů). Videozáznamy vyučovacích hodin matematiky byly pořízeny u všech, tzn. 3 učitelů matematiky na 2. stupni ZŠ. Tito učitelé poskytli také krátké rozhovory autorce této rigorózní práce. Vzhledem k tomu, že byly pořizovány videozáznamy vyučovacích hodin na 2. stupni ZŠ, zapojeni byli i žáci 6.–9. tříd ZŠ Dobrá. Počet žáků zapojených na druhém stupni byl 151.

3.6 Výzkumné metody

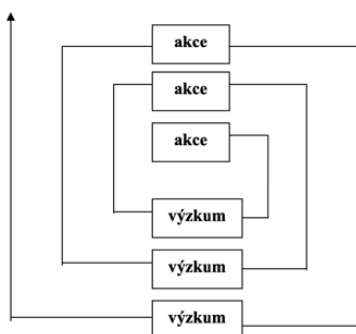
V této kapitole detailněji představíme výzkumné metody v pořadí tak, jak byly postupně použity v jednotlivých etapách výzkumného šetření.

Kultuře vyučování a učení jsme v teoretické části přisoudili dvě hlediska: hledisko komparace či srovnání a hledisko změn a zlepšování. Tato kultuře vyučování a učení přisouzená hlediska nás vedou k pedagogickému výzkumu, jehož účelem „...je přímo ovlivňovat či zlepšovat určitou část vzdělávací praxe, řešit aktuální potřeby vzdělávací instituce, uplatňovat intervenční strategie, navrhnout určitá doporučení a pokoušet se je

⁶³ Reliabilita jako shoda pozorovatelů je míra, s jakou v našem případě dva různí výzkumníci posoudí stejný jev, tzn. videozáznam výukové situace. Předpokladem pro interindividuální shodu mezi pozorovateli je shoda mezi dvěma a více pozorovateli, která je použita po shromáždění dat. (Frick & Semmela, 1978)

realizovat a průběžně sledovat efekty změn“ (Průcha, Walterová & Mareš, 2003, s. 14). Tento pedagogický výzkum je v českém pedagogickém prostředí označován jako akční výzkum a stal se námi zvolenou výzkumnou strategií.

Jeho průběh můžeme zjednodušeně znázornit pomocí dvoufázového modelu akce a výzkumu. Akci můžeme popsat jako jednání v rámci konkrétní situace a výzkum jako reflexi této situace. „Jednání (akce) a reflexe (výzkum) se opakují v graduujícím cyklu (viz obr. 14), přičemž akce se má neustále zlepšovat ve smyslu dosahování vyšší kvality“ (Janík, 2004, s. 9).



Obrázek 14 Graduující cyklus akce a výzkumu (Janík, 2004, s. 9, obr. 1)

Didaktická analýza učiva: První výzkumná metoda byla použita ve třetí fázi výzkumu. V této fázi výzkumného šetření proběhl sběr dat pomocí online dotazníkového šetření 1, ve kterém učitelé matematiky 1. i 2. stupně mimo jiné provedli přípravu na vyučovací hodinu a didaktickou analýzu učiva den až tři dni před plánovanou vyučovací hodinou. „Tato analýza je považována za celkové završení plánovací činnosti učitele. Jde o jeho hlubší myšlenkovou činnost...“, která umožňuje z pedagogického hlediska proniknout do učiva (Vališová et al., 2011, s. 130). Tato analýza nám umožnila analyzovat výběr základního, rozšiřujícího, doplňujícího učiva a jeho uspořádání (Vališová et al., 2011).

Polostrukturovaný rozhovor (interview): Když učitelé matematiky 2. stupně provedli didaktickou analýzu učiva, byli požádáni o krátký rozhovor, který byl zvukově zaznamenán těsně před vyučovací hodinou. Cílem těchto rozhovorů bylo zjistit, zda se jimi plánovaný program vyučovacích hodin od didaktické analýzy učiva pozměnil. Pokud ke změnám došlo, zajímalo nás, o jaké změny se jednalo a proč k nim došlo.

Nepřímé pozorování: Třetí a čtvrtá fáze zahrnovala nepřímé pozorování a jeho analýzu. Toto pozorování bylo realizováno z videozáznamu. Vzhledem k tomu, že jsme

prováděli analýzu videozáznamu, můžeme tuto metodu označit také jako videostudii (Janík & Najvar, 2008).

Reflexe a analýza výukové situace: Během čtvrté fáze byly z videozáznamů výukových situací vybrány ty, které jsme vyhodnotili jako nejužitečnější ke kultivaci kultury vyučování a učení matematice na ZŠ Dobrá. Tyto videozáznamy jsme následně hodnotili pomocí metodiky 3A. Tato metodika zahrnovala tři fáze: Anotaci výukové situace neboli popis výukové situace a jejího širšího kontextu; analýzu výukové situace neboli podrobný didaktický rozbor klíčových situací; alteraci neboli návrh didaktické změny, která má přinést zvýšení kvality výuky (Janík et al., 2022b).

3.7 Výzkumné šetření

Výše jsme uvedli, že jedním z cílů bylo vytvoření online dotazníkových šetření, jejichž prostřednictvím by učitelé mohli kdykoliv a online provádět didaktickou analýzu učiva před vyučovací hodinou a po ní. V kapitolách 3.7.1 a 3.7.2 popisujeme tvorbu těchto dotazníkových šetření a jejich validitu a reliabilitu.

3.7.1 Tvorba dotazníkového šetření 1

Dotazníkové šetření je jednou z metod sběru dat. My jsme se rozhodli pro jeho online podobu z důvodu možnosti vyplňovat tento dotazník kdykoliv a kdekoliv a zajištění anonymity respondentů. „V souladu s metodou ABBBA⁶⁴ je jeho další výhodou, že lze provést opakované dotazování a snadno porovnat výsledky (např. před zahájením a po skončení vzdělávací akce)“ (Havlíčková, 2015, s. 54).

Jedním cílem dotazníkového šetření 1 (příprava na vyučovací hodinu a didaktická analýza učiva před vyučovací hodinou matematiky) bylo získat základní informace o tom, jak se učitelé matematiky na vybrané základní škole na vyučovací hodiny matematiky připravují. Druhým cílem bylo vytvořit online veřejné dotazníkové šetření, které by mohlo posloužit jako podpůrný nástroj při přípravě na vyučovací hodiny i např. několika dalším učitelům matematiky na základní škole.

Abychom tyto cíle byli schopni naplnit, bylo nutné vytvořit odpovídající soubor vhodných otázek, jenž vznikl na základě syntézy poznatků ze souvisejících domácích i zahraničních studií a literatury. Ukázalo se, že poznatky, které jsme nabyli, není možné použít hromadně beze změn pro účely našeho dotazníkového šetření, některé z nich byly tedy upraveny. Použitou literaturu uvádí tabulka 1. Provedené změny uvádíme v odstavcích níže.

⁶⁴ „Hodnoticí metoda ABBBA je postup evaluace vzdělávacích programů zaměřený především na oblast kompetencí účastníků, principy postupu však lze v zásadě využít i v dalších oblastech evaluace v neformálním vzdělávání“ (Havlíčková, 2015, s. 57).

Tabulka 1 Literatura pro tvorbu dotazníkového šetření 1

Příprava na vyučovací hodinu – doporučený postup	Autor
„...stanovení cíle vyučovací hodiny; výběr učiva; zamyšlení se nad žákovskými prekoncepty, možnými miskoncepty ve vybraném učivu; výběr aktivizující činnosti; výběr pomocné činnosti; výběr způsobu hodnocení žákovské činnosti“	Mishra (2009, s. 147, volně přeloženo)
„...určení potřeb žáků; konkretizace cílů výuky tematického celku nebo tématu; rozbor učiva tematického celku; vymezení základní činnosti žáka; volba způsobu výuky – metod, organizačních forem, materiálních prostředků atd.; formulace učebních otázek a úkolů učitelem“	Vališová et al. (2011, s. 130)
„a) analyzuj – analýza potřeb žáků, cílů výuky, existujících výukových postupů; určení základního organizačního rámce výuky; b) navrhni – formulace výukových cílů, návrh způsobu zjišťování výsledků výuky, popis žádoucí úrovně žákovských vědomostí a dovedností (popis výchovně vzdělávacího cíle vyučovací hodiny), určení postupu a struktury výuky; c) vypracuj – specifikace učební činnosti, vypracování organizačního plánu řízení výuky, konkretizace způsobu předávání učiva, výběr materiálů a materiálně-didaktických pomůcek, hodnocení reálnosti, funkčnosti a efektivnosti navrhovaného programu výuky...“	Zormanová (2014, s. 22–23)
„...jasné definování očekávaného výstupu z vyučovací hodiny a cíle vyučovací hodiny; výběr vhodných zdrojů; příprava obsahu učiva v souladu s kurikulárními dokumenty; výběr vhodných vzdělávacích strategií; výběr způsobu hodnocení a monitorování žákovského pokroku; zvážení diferenciací či adaptace přípravy pro žáky se speciálními vzdělávacími potřebami“	Swargiary & Kavita (2023, s. 8)
Didaktická analýza učiva – doporučený postup	Autor
„...definování učebních cílů vyučovací hodiny; výběr základního učiva; rozčlenění učiva na základní, pomocné a rozšiřující poznatky, zpracování těchto poznatků do strukturálních map, schémat, klasifikací; vymezení konkrétních žákovských činností; volba optimálních metod, organizačních forem, materiálních didaktických prostředků; formulace učebních otázek a cílů“	Filová et al. (1997, s. 32–34)

<p>„...rozbor obsahu učiva – rozbor pojmů, vztahů, obsahových vazeb v učivu, určení materiální a formální hodnoty učiva; rozbor činností žáků jako prostředku, který vede k pochopení a osvojení učiva a k rozvoji osobnosti žáka; rozbor vertikálních a horizontálních mezipředmětových vztahů⁶⁵ v učivu“</p>	<p>Podroužek (1998, s. 42)</p>
<p>„...určení cíle – co chci, čeho zamýšlím dosáhnout; určení prostředků, kterými chci těchto cílů dosáhnout; zvláštní didaktická hlediska; výchovné možnosti; organizace vyučovací jednotky; časový projekt vyučovací jednotky; realizace přípravy“ (podrobněji viz obr. 6)</p>	<p>Kalhous & Obst, (2002, s. 358–359)</p>
<p>„...pojmová analýza – analýza jednotlivých pojmů vztahující se k danému učivu, které si mají žáci osvojit; operační analýza – analýza činností a operací, které musí udělat učitel a žáci s učivem, aby dosáhli výchovně-vzdělávacího cíle; analýza z hlediska mezipředmětových vztahů – propojení učiva z jednotlivých předmětů“</p>	<p>Zormanová, (2014, s. 95–96)</p>

Dostupná literatura nám poskytla několik doporučených postupů pro přípravu na vyučovací hodinu a pro didaktickou analýzu učiva, které se od sebe mírně lišily. Naším cílem bylo tedy vybrat kroky přípravy a didaktické analýzy učiva, které obsahovaly (nejlépe) všechny nám dostupné literární zdroje, a považujeme je tedy za zásadní. Dotazníkové šetření 1 jsme se pokusili sestavit tak, „...aby položky dotazníku byly jasné a srozumitelné všem respondentům; aby formulace položek byla jednoznačná a nedošlo k pochopení položky více způsoby; dotazníkové šetření zajišťovalo jen nezbytné údaje; nebylo příliš rozsáhlé; položky v dotazníku nebyly sugestivní⁶⁶; aby dotazník obsahoval jasné pokyny k vyplňování; aby bylo možné získaná data snadno třídit, tabelovat a zpracovávat a aby byly položky řazeny z psychologického hlediska správně...“ (Chráška, 2016, s. 164). Zda se nám takto dotazník podařilo dle respondentů sestavit, uvádíme v kapitole 4.1.1.

Obsah položek v dotazníkovém šetření vychází z literatury uvedené v tabulce 1. V tomto odstavci představíme změny a úpravy, které jsme provedli. Do dotazníkového šetření 1 jsme nezahrnuli otevřenou formulaci plánovaných učebních otázek a úkolů.

⁶⁵ „Vzájemné souvislosti mezi jednotlivými předměty, chápání příčin a vztahů, přesahujících předmětový rámec, prostředek mezipředmětové integrace“ (Průcha, Walterová & Mareš, 2003, s. 124).

⁶⁶ „Sugestivní, tj. takové, že již svou formulací napovídají, jak mají být zodpovězeny“ (Chráška, 2016, s. 164).

Místo ní je součástí dotazníku 1 výběr úrovně vzdělávacích cílů v kognitivní oblasti společně s aktivními slovesy (Anderson & Krathwohl, 2001). Důvodem byl fakt, že jsme u některých (v dotazníkovém šetření) plánovaných vyučovacích hodin pořizovali po vyplnění dotazníkového šetření videozáznam, ze kterého jsme tyto kompletní formulace získali. Dalším důvodem byla pravděpodobná různorodost odpovědí na otevřenou otázku tohoto typu, jejichž následné vyhodnocení by bylo velmi obsáhlé a neodpovídalo by rozsahu této rigorózní práce. Ze stejného důvodu nebyla zařazena ani analýza potřeb jednotlivých žáků formou otevřené otázky. Po vyučujících dále není v dotazníku požadováno zpracování učebních poznatků do strukturálních map, schémat, klasifikací a rozbor vertikálních, horizontálních mezipředmětových vztahů v učivu. Je to vzhledem k tomu, že se jedná o poměrně nejen časově náročné činnosti, což by nesplňovalo požadavky na námi zvolené online dotazníkové šetření 1, které by dle naší subjektivní vize mělo sloužit jako poměrně rychlý, návodný a online dostupný nástroj podpory pro učitele při přípravě na vyučovací hodinu matematiky nejen na ZŠ Dobrá.

Dotazníkové šetření 1 obsahuje celkem 35 položek, přičemž 24 položek tvoří uzavřené otázky (22 položek s možností volby jedné odpovědi, 2 položky s možností jedné a více odpovědí) a 11 položek tvoří otevřené otázky (s možností výpisu stručné odpovědi). 5 položek (UO) dotazníkového šetření 1 tvořily otázky týkající se hodnocení samotného dotazníkového šetření 1 očima učitelů. Dotazníkové šetření 1 je online dostupné na: <https://forms.gle/MuPRvG6EHv9CegvJ7>. Jeho zadání přikládáme také v příloze 1.

Ověřování validity a reliability dotazníkového šetření 1

„Validita dotazníku spočívá v tom, že dotazník zjišťuje skutečně to, co zjišťovat má, tj. to, co je výzkumným záměrem.“ (Chráška, 2016, s. 165) Vzhledem k tomu, že posouzení stupně validity dotazníku je považováno do určité míry za subjektivní posouzení, je doporučováno, aby při posuzování nevycházel autor jen z vlastních názorů, ale aby nechal vždy navrhovaný dotazník posoudit i dalšími odborníky (Chráška, 2016) Posouzení validity dotazníkového šetření 1 tedy provedla autorka dotazníku a Mgr. Lenka Pelešková, za účelem vyhnout se subjektivnosti při posuzování. Dotazníkové šetření dle zmíněných hodnotitelů Mgr. Nikoly Brůžkové a Mgr. Lenky Peleškové můžeme považovat za validní.

„Reliabilitou dotazníku se rozumí schopnost dotazníku zachycovat spolehlivě a přesně zkoumané jevy“ (Chráška, 2016, s. 165). Je-li reliabilita dotazníku dostatečně vysoká, je

předpokladem dobré validity dotazníku. Pro posouzení reliability výsledků dotazníkového šetření jsme vybrali tzv. metodu měření reliability pomocí Cohenova koeficientu kappa (Chráska, 2016). „Cohenův Kappa koeficient (κ) může nabývat rozsahu hodnot od -1 do $+1$, přičemž hodnota 1 vypovídá o dokonalém souhlasu mezi hodnotiteli a hodnota -1 značí perfektní nesouhlas hodnotitelů“ (Pivarč, 2017, s. 116). „Za přijatelnou míru shody je možné považovat hodnotu Kappa v rozsahu $0,41-0,60$, což je středně silná neboli přijatelná míra shody mezi hodnotiteli“ (Landis & Koch, 1977, s. 165).

Vzhledem k tomu, že je cílem dotazníkového šetření 1 odpovědět na výzkumnou otázku 1 (V1), tzn. mapovat běžnou přípravu respondentů na vyučovací hodinu matematiky, rozhodli jsme se při posuzování reliability dotazníkového šetření 1 postupovat následovně: Nejprve jsme si rozdělili celý výběrový soubor (tzn. 12 učitelů matematiky ZŠ Dobrá) náhodně na dva stejně velké soubory po 6 respondentech vzhledem k tomu, že všichni respondenti vychází při přípravě na vyučovací hodinu ze stejného školního vzdělávacího programu. Odpovědi respondentů u vybraných položek⁶⁷ dotazníku jsme zapisovali do matic, ty následně zachytily, jak dalece se v odpovědích objevují shody mezi těmito dvěma skupinami. Toto posuzování reliability včetně matic uvádíme v příloze 3.

Průměrná hodnota Cohenova koeficientu Kappa (κ) u vybraných položek v dotazníku byla přibližně $0,52$ (zaokrouhлено na dvě desetinná místa). To je středně silná neboli přijatelná míra shody mezi hodnotiteli (Landis & Koch, 1977).

Dotazníkové šetření 1 bylo zároveň předloženo týmž respondentům po uplynutí určitého období (2 týdny⁶⁸) znovu, a to v podobě dotazníkového šetření 2 (kap. 3.7.2). Dotazníkové šetření 2 obsahovalo stejně formulované položky (změněn byl pouze čas větných přísudků).

⁶⁷ Dotazníkové šetření 1 obsahuje celkem 34 položek společných pro všechny respondenty. Přičemž některé položky jsou zadány formou otevřené otázky, míra variability odpovědí je tedy příliš vysoká na to, abychom je mohli do měření reliability pomocí Cohenova Kappa koeficientu zařadit. Z měření reliability byly také vyřazeny otázky, na které neodpovídalo všech 12 respondentů, tzn. jednalo se o otázky týkající se především učiva a očekávaných výstupů vzhledem k tomu, že učitelům 2. stupně (počet respondentů 3) byly nabídnuty jiné odpovědi než učitelům 1. stupně (počet respondentů 9) základního vzdělávání. Reliabilita dotazníkového šetření byla tedy měřena u 14 položek. Tento počet otázek sice není ze statistického hlediska úplně dostačující počet, ale v budoucnu chceme ve výzkumu pokračovat a na větším vzorku a upřesňovat tak výsledky měření.

⁶⁸ „...Doba pro opakované šetření by měla být určena skutečně optimálně...Většinou se uvádí, že nejvhodnější čas pro opakované měření je asi dva až tři týdny po měření prvním.“ (Chráska, 2016, s. 166)

Navíc bylo dotazníkové šetření 2 doplněno o závěrečnou část vztahující se k reflexi a hospitacím pedagogické činnosti všeobecně. Tento způsob opakovaného šetření je také možné v některých případech využít jako nástroj k měření reliability dotazníku (Chráška, 2016). Stupeň reliability výsledků jakožto stupeň shody mezi prvním a opakovaným šetřením uvádíme v kapitole 3.7.2.

3.7.2 Tvorba dotazníkového šetření 2

Jak jsme již zmínili, cílem této rigorózní práce bylo vytvořit dvě online dotazníková šetření. Cílem dotazníkového šetření 2 bylo získat základní informace o tom, jak se učitelům matematiky na vybrané základní škole podařilo realizovat svůj původní plán vyučovací hodiny matematiky. Zároveň jsme však cílili na to, aby toto dotazníkové šetření mohli používat i další učitelé matematiky, kteří mají zájem především o reflexi realizace své přípravy na vyučovací hodinu.

Abychom tyto cíle byli schopni naplnit, bylo nutné vytvořit odpovídající soubor vhodných otázek na základě již zmíněné syntézy poznatků ze souvisejících domácích i zahraničních studií a literatury (tab. 1), převážně pak vychází z dotazníkového šetření 1.

Dotazníkové šetření 2 bylo doplněno o 4 otázky týkajících se reflexe a hospitací pedagogické činnosti všeobecně. Cílem dotazníkového šetření 2 bylo získat základní informace mimo jiné i o tom, zda se liší příprava vyučovacích hodin matematiky učitelů na 2. stupni ZŠ Dobrá od samotné realizace výuky (V3). Zároveň jsme se pokusili tento dotazník vytvořit tak, aby mohl sloužit jako podpůrný nástroj při reflexi přípravy na vyučovací hodinu matematiky pro všechny učitele matematiky základních škol. Do dotazníkového šetření 2 jsme tedy přidali hodnoticí škálu, která na základě bodového ohodnocení u vybraných položek vyhodnotí naplnění původního plánu vyučovací hodiny a shrne respondentem uvedené důvody, které ke změně původního plánu vedly.

Dotazníkové šetření 2 je online dostupné na: <https://forms.gle/1BVj1Qd7z3FvtEwZA>.

Jeho zadání přikládáme v příloze 4.

Reliabilita dotazníkového šetření 2

Jak již bylo zmíněno, dotazníkové šetření 2 vychází z dotazníkového šetření 1 a položky v těchto dotaznících jsou totožné, proto záměrně neopakujeme měření reliability pomocí Cohenova koeficientu kappa, nicméně využijeme druhou námi velmi zjednodušenou metodu, která je postavena na základech tzv. metody test-retest reliability.

Toto testování zahrnuje administraci testu a retestu (opakovaného šetření) během optimální doby. Následně zahrnuje porovnávání shody mezi prvním a opakovaným šetřením pomocí např. Pearsonova korelačního koeficientu. Tento koeficient může nabývat hodnot 0 (naprostá neshoda) – 1 (naprostá shoda), aby bylo možné považovat dotazníkové šetření za dostatečně reliabilní, musí výsledná hodnota šetření dosáhnout hodnoty 0,7 či vyšší (Domino, G. & Domino, M., 2006, s. 43). My jsme toto námi velmi zjednodušené měření uvedli do tabulky 2. Zjednodušení měření bylo provedeno z důvodu rozsahu této rigorózní práce.

Tabulka 2 Shoda odpovědí respondentů v opakovaném šetření

Respondent	Počet shodných odpovědí v opakovaném šetření	Výsledný podíl
1	16	0,8
2	17	0,85
3	18	0,9
4	16	0,8
5	11	0,55
6	14	0,7
7	14	0,7
8	15	0,75
9	9	0,45
10	20	1
11	20	1
12	7	0,35
Průměrný výsledný podíl		≐ 0,74

My jsme měření provedli tak, že jsme shodu v odpovědi v prvním a opakovaném měření ohodnotili jedním bodem a libovolnou neshodu (např. volbu jiné odpovědi nebo výpis jiné odpovědi) 0 body. Následně jsme určili podíl celkového počtu shodných odpovědí a celkového počtu možných shodných odpovědí (20). Průměrný výsledný podíl počtu shodných odpovědí a celkového počtu možných shodných odpovědí byl 0,74 (zaokrouhleno na dvě desetinná místa).

3.7.3 Rozhovory s učiteli

Ve třetí fázi výzkumu byl jako nástroj pro sběr dat zvolen polostrukturovaný rozhovor. Před ním bylo nezbytné formulovat otázky, které směřují ke zjišťování zkoumané problematiky. Vytvořeno bylo pět otevřených otázek vzhledem ke krátkému časovému úseku, který jsme na rozhovor těsně před videozáznamem vyučovací hodiny měli. Většinou se jednalo o malou přestávku, tzn. 10 minut.

Všem vyučujícím matematiky na 2. stupni ZŠ Dobrá byly položeny otázky:

- (a) Došlo k nějakým změnám v programu vyučovací hodiny matematiky po vyplnění dotazníkového šetření 1?
 - a) Pokud ano, k jakým změnám došlo a proč k nim došlo?
- (b) V dotazníku jste uvedl(a), že hodláte žákům během plánované výuky zadat úlohy (výběr z nabídky tab. 3), můžete nám zadání jedné takové úlohy přečíst?

Tabulka 3 Úrovně učebních úloh (Tollingerová, 1970)

1) Úlohy vyžadující paměťovou reprodukci poznatků
2) Úlohy vyžadující jednoduché myšlenkové operace s poznatkem
3) Úlohy vyžadující složité myšlenkové operace s poznatkem
4) Úlohy vyžadující sdělení poznatků
5) Úlohy vyžadující tvořivé myšlení

- (c) Jaké pocity ve Vás aktuálně pořizování videozáznamu vyvolává?
- (d) Co by Vám účast v tomto výzkumu mohla přinést, co od ní očekáváte?
- (e) Vnímáte tento způsob reflexe pedagogické činnosti jako přínosný?

3.7.4 Nepřímé pozorování

Třetí a čtvrtá fáze našeho výzkumu zahrnovala nepřímé pozorování, jež probíhalo tak, že byl do místnosti, kde probíhala vyučovací hodina, umístěn *chytrý telefon*⁷⁰ (ang. *smartphone*). Prostřednictvím něj byl pořízen (video)záznam⁷¹ vyučovací hodiny.

⁷⁰ „Chytrý telefon vybavený vyspělým operačním systémem s aplikačním rozhraním, které umožňuje vytváření aplikací třetími stranami. Smartphony nabízí svým uživatelům pokročilé funkce srovnatelné s možnostmi počítačů.“ (Weinstein & Siste, 2022, s. 57)

⁷¹ V jedné z 8 tříd 2. stupně ZŠ Dobrá jsme nemohli pořídit videozáznam vyučovací hodiny. Někteří zákonní zástupci žáků této třídy s pořízením videozáznamu nesouhlasili, rozhodli jsme se tedy pro pořízení zvukového záznamu.

Videozáznamy vnímáme jako záznamy mající mnohé výhody ve srovnání s např. písemným či přímým pozorováním (Calandra & Rich, 2014; Vondrová et al., 2019). Jejich pořízením jsme získali materiál, který jsme mohli opakovaně spouštět, a tedy detailně zkoumat všechny jeho aspekty. Jako další výhodu vnímáme možnost dalšího využití těchto videozáznamů např. pro budoucí či začínající učitele, kteří tento materiál mohou např. analyzovat formou odborného rozhovoru se svými kolegy či profesory a učit se na základě autentické zkušenosti.

Při pořizování videozáznamu jsme se však setkali s mnohými nevýhodami a překážkami. Vzhledem k tomu, že jsme natáčeli „pouze“ na chytrý telefon, nebyli jsme schopni zaznamenat kompletně celou třídu, zároveň zvuk, který videa obsahovala, nebyl vždy dostatečně kvalitní. Jako další nevýhodu vnímáme fakt, že byl mnohdy videozáznam jedné vyučovací hodiny neukončený, předcházela mu či navazovala na něj vyučovací hodina, která zaznamenána nebyla. Hodnocení „neukončené“ výukové situace bylo poté poměrně obtížné nebo nerelevantní.

3.7.5 Reflexe a analýza výukové situace

Hodnocení vybraných výukových situací ve čtvrté fázi výzkumu probíhalo pomocí metodiky 3A. Tento metodický postup reflexe a analýzy výuky spojený s hodnocením kvality výuky a s návrhem zlepšujících změn – tzv. alterací výuky je detailně rozpracován v publikaci *Metodika 3A: nástroj pro reflexi výuky a hodnocení její kvality* autorů Janík, Slavík & Najvar (2022b). Tato rigorózní práce využívá shodné základní principy a hlavní strukturu této metodiky při analýze vybraných výukových situací. Navíc jsme se však rozhodli pro vlastní úpravu modelu hloubkové struktury výuky. Tento model je v publikaci složen ze tří vrstev (tematická, konceptová, kompetenční), ty jsou mezi sebou navzájem propojené. My jsme se tyto tři vrstvy rozhodli obohatit o jejich další „stupně“. Než uvedeme detailně úpravy, které jsme provedli ve vrstvách, seznámíme čtenáře s významem barev, jež v následujícím odstavci a v modelech hloubkové struktury výuky využíváme (viz tab. 4).

Tabulka 4 Vysvětlivky využití barev – hloubkový model struktury výuky

Barva vrstev	Význam
Modrá	Události, které se odehrály před vybranou výukovou situací a trvají až do výukové situace.
Bílá	Události, které se skutečně odehrály během vybrané výukové situace.
Žlutá	Události plánované, které se dle plánu vyučovací hodiny měly odehrát během vybrané výuky.
Barva šipek	Význam
Černá	Značí vazbu/propojení/napojení/návaznost.
Přechodová z červené na zelenou	Značí zlepšení, ke kterému došlo během výukové situace.
Přechodová ze zelené na červenou	Značí nesprávnost/zhoršení, ke kterému došlo během výukové situace.

Tematická vrstva modelu hloubkové struktury výuky dle publikace *Metodika 3A* „...zachycuje obsah, jak jej vidí žáci (tj. konkrétní pojmy a jevy, s nimiž ve výuce pracují)“ (Janík et al., 2022b, s. 15). My jsme tuto tematickou vrstvu rozdělili na dva stupně – na *žakovské prekoncepty* (modrá barva) a *žakovské znalosti během výuky* (bílá barva). Toto dělení jsme provedli na základě toho, že vnímáme jako zásadní, s jakými prekoncepty žáci do vyučovací hodiny přichází a jak s nimi vyučující či spolužáci pracují, tzn. jak na tyto prekoncepty, resp. miskoncepty reagují a snaží se je např. vyzdvihnout, nebo opravit.

Konceptová vrstva modelu hloubkové struktury výuky dle publikace *Metodika 3A* „...zachycuje obsah, jak jej vidí učitel (tj. koncepty a pravidla, na jejichž osvojení učitel výukou cílí)“ (Janík et al., 2022b, s. 15). My jsme tuto konceptovou vrstvu dále rozdělili na stupeň *učitelem realizovaného kurikula* (obsah, který učitel během výuky předal) a stupeň *učitelem zamýšleného kurikula* (obsah, který učitel plánoval předat). Toto dělení jsme zařadili z toho důvodu, že vnímáme na základě dotazníkových šetření 1 a 2 pro některé učitele na ZŠ Dobrá realizovat jimi zamýšlené kurikulum dle jejich původního plánu jako poměrně problematické.

Zároveň souhlasíme např. s Průchou (1997, s. 246) nebo Průchou (1983, 1989), kteří prosazují názor, že „...plánovaný obsah vzdělávání není totožný s realizovaným obsahem vzdělávání“. V našem případě je toto tvrzení specifikováno tak, že existují rozdíly mezi tím, co učitelé naplánují, a tím, co jsou žáci schopni se učit.

Kompetenční vrstva (bílá barva), která „zachycuje obsah, jak jej vidí tvůrce kurikula (tj. obecnější cíle, gramotnosti a kompetence, které jsou výukou rozvíjeny)“ (Janík et al., 2022b, s. 15), byla v našem upraveném modelu hloubkové struktury výuky zachována v původní podobě. Souhrnný přehled vrstev je umístěn v tabulce 5.

Tabulka 5 Upravený model hloubkové struktury výuky

Model hloubkové struktury výuky (Janík et al., 2022b, s. 15)	Upravený model hloubkové struktury
<p>Tematická vrstva</p> <p>Zachycuje obsah, jak jej vidí žáci (tj. konkrétní pojmy a jevy, s nimiž ve výuce pracují).</p> <p>Svět žákovské zkušenosti</p>	<p>TEMATICKÁ VRSTVA – svět žákovské zkušenosti</p> <p>Žákovské znalosti během výuky</p> <p>Žákovské překoncepty</p>
<p>Konceptová vrstva</p> <p>Zachycuje obsah, jak jej vidí učitel (tj. koncepty a pravidla, na jejichž osvojení učitel výukou cílí).</p> <p>Prostor oboru</p>	<p>KONCEPTOVÁ VRSTVA – prostor oboru</p> <p>Učitelem realizované kurikulum</p> <p>Učitelem zamýšlené kurikulum</p>
<p>Kompetenční vrstva</p> <p>Zachycuje obsah, jak jej vidí tvůrce kurikula (tj. obecnější cíle, gramotnosti a kompetence, které jsou výukou rozvíjeny).</p> <p>Obecnější oborové a nadoborové cíle</p>	<p>KOMPETENČNÍ VRSTVA – obecnější oborové a nad-oborové cíle</p> <p>Kompetenční vrstva</p>

4. Výsledky výzkumných šetření

4.1 Výsledky dotazníkových šetření

s. 102 - 107

5. Didaktické kazuistiky

5.1 Didaktická kazuistika 1

s. 108 - 126

5.2 Didaktická kazuistika 2

s. 126 - 147

5.3 Didaktická kazuistika 3

s. 147 - 166

4 Výsledky provedeného výzkumu

4.1 Výsledky dotazníkových šetření

V této kapitole jsou prezentovány výsledky provedeného výzkumu. Představeny jsou zjištění vyplývající ze dvou uskutečněných dotazníkových šetření týkajících se: (D1) přípravy na vyučovací hodinu a didaktické analýzy učiva před vyučovací hodinou matematiky, (D2) reflexe realizace přípravy na vyučovací hodinu. U každé položky, která přinesla data využitelná k sestavení odpovědí na výzkumné otázky V1 a V3, uvádíme v závorce procentuální podíl respondentů (zaokrouhlený na jednotky), kteří tuto odpověď v D1 nebo D2 uvedli. U otevřených (dále jen OO) i uzavřených otázek (dále jen UO) dotazníku uvádíme v této kapitole pouze dvě nejčastěji zastoupené odpovědi. Dále byly do dotazníku zařazeny i otázky, na něž respondent mohl odpovědět výběrem jedné či více možností, ty budeme dále označovat písmeny VM. Písmeny UO jsou míněny otázky, u kterých mohl respondent vybrat pouze jednu možnost jako odpověď.

Výsledky dotazníkových šetření (D1 a D2) nám umožnily zodpovědět výzkumné otázky V1 a V3, a to následovně:

4.1.1 Výzkumná otázka 1 (V1):

- Jak připravili učitelé matematiky na ZŠ Dobrá program vyučovací hodiny?

Učitelé matematiky ZŠ Dobrá v dotazníkovém šetření uvedli, že jejich příprava na vyučovací hodinu běžně (průměrně) trvá přibližně 20 minut, přičemž jeden učitel z dvanácti dotazovaných uvedl, že délka příprav je „velmi individuální dle učiva, nápadu, které jsou vhodné k dalšímu zpracování“. Dále z D1 vyplynulo, že nejčastějším zdrojem, ze kterého učitelé při přípravě na vyučovací hodinu čerpají, jsou (OO): učebnice Taktik (92 %) a internet (42 %). Učitelé během přípravy plánovali vyučovací hodiny zaměřit především na rozvoj klíčové kompetence (VM): „rozvíjení paměti žáků prostřednictvím numerických výpočtů a osvojování si nezbytných matematických vzorců a algoritmů“ (46 %) a „vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu“ (33%) (MŠMT ČR, 2023, s. 31–32).

Učitelé při svých přípravách na vyučovací hodiny matematiky nejčastěji plánovali cílit na následující úroveň vzdělávacích cílů v kognitivní oblasti (UO): „zapamatování (znalost) specifických informací“ (42%) a „pochopení (porozumění)“ (33 %) (Skalková, 2007, s. 122). Nejčastěji uváděné plánované znalostní dimenze výukových cílů v kognitivní doméně kurikula byly (UO): „znalost faktů – základní prvky, které musí studenti znát, aby byli obeznámeni s disciplínou a byli schopni řešit její problémy“ (58 %) a „konceptuální znalost – vzájemné vztahy mezi základními prvky uvnitř větších struktur, které umožňují jejich vzájemné fungování“ (33 %) (Hudecová, 2004, s. 280). V další části měli učitelé vybrat plánovanou úroveň učebních úloh (VM). Nejčastěji učitelé plánovali zařadit „úlohy vyžadující jednoduché myšlenkové operace s poznatky – zjišťování faktů, vyjmenování, popis faktů, třídění, zobecňování...“ (58 %) „úlohy vyžadující paměťovou reprodukci poznatků – znovupoznání, reprodukce faktů, čísel, pojmů, definic, norem, pravidel, velkých celků, textů, tabulek...“ (33%) (Podlahová et al., 2012, s. 35–36). Učitelé měli také vybrat úroveň plánovaných výukových cílů v afektivní doméně kurikula (UO). Nejčastěji učitelé vybírali: „Přijímání (vnímavost) – žák věnuje pozornost vnějším podnětům. Na této úrovni je žák ochotný vnímat podněty. Na podněty však aktivně nereaguje“ (58 %) a „Reagování – žák projevuje dobrovolnou aktivitu ve výuce. Svou aktivitou nezvýrazňuje svůj hodnotový žebříček“ (42 %) (Zormanová, 2014, s. 60, tab. 4). Další položka dotazníku se týkala výběru předpokládaného výukového cíle v psychomotorické doméně kurikula (UO). Zde učitelé nejčastěji volili odpovědi „imitace (nápodoba) – žák prostřednictvím pozorování napodobuje činnost, a to spontánně, nebo pod vedením učitele“ (33 %) a „manipulace (praktická cvičení)“ (42 %).

V následující položce dotazníku učitelé vybírali jimi plánovanou převládající vyučovací metodu (UO). Nejčastěji volili metodu názorně demonstrační (33 %) a metodu řešení problémů (25 %). Nejčastěji plánovanou organizační formou výuky byla (UO): hromadná (frontální) výuka (75 %). V další položce dotazníku učitelé uvedli, že je pro ně rozvoj digitální kompetence u žáků ve vyučovacích hodinách matematiky poměrně náročný (67%).

Učitelé jako nejdelší fázi vyučovací hodiny plánovali především (UO): „expozici – zprostředkování, osvojování nového učiva“ (42 %) a „fixaci – upevňování a prohlubování osvojených vědomostí, dovedností, návyků, postojů a přesvědčení“ (33 %) (Zormanová, 2014, s. 33–34). Učitelé zároveň plánovali ověřovat pracovní výsledky z vyučovací

hodiny (OO): písemně – test (50 %) a formou ústního zkoušení (25 %). V další položce dotazníku měli učitelé uvést, zda se chystají během vyučovací hodiny uplatňovat některé mezipředmětové vztahy (UO). 50 % z nich je plánovalo uplatnit, 50 % ne. Nejčastěji plánovali zařadit mezipředmětový vztah (OO) matematika–přírodopis a matematika–český jazyk.

Ze závěrečné části dotazníku vyplynulo, že 92 % respondentů přiměřlo D1 k hlubšímu zamyšlení nad jimi plánovanou vyučovací hodinou v porovnání s jejich běžnou přípravou. 75 % respondentů vnímalo D1 jako odlišnou přípravu na vyučovací hodinu matematiky, než je pro ně běžné.

Dotazníkové šetření 1 očima učitelů

Do D1 byly zařazeny také položky týkající se zhodnocení formulace položek D1. Celkem 83 % učitelů označilo položky D1 jako jasné a srozumitelné. Pro 75 % respondentů byla formulace položek dotazníku naprosto jednoznačná. 100 % respondentů potvrdilo, že položky v D1 nejsou sugestivní, tzn. jejich formulace nenapovídá respondentovi, jak má být položka zodpovězena.

Výzkumná otázka 1 (V1a):

- Liší se jejich příprava na vyučovací hodinu v závislosti na délce jejich pedagogické praxe?

Na ZŠ Dobrá vyučuje 75 % učitelů matematiku déle než 5 let. 25 % učitelů vyučuje matematiku méně než 5 let nebo 5 let. Výrazné rozdíly, které byly v D1 (příprava na vyučovací hodinu a didaktická analýza učiva) mezi těmito dvěma skupinami zaznamenány, jsou:

- Běžná průměrná doba přípravy u učitelů s delší praxí než 5 let je přibližně 15 minut. U učitelů s praxí 5 let či kratší je běžná průměrná délka přípravy 45 minut.
- Přibližně 89 % učitelů s delší pedagogickou praxí než 5 let plánovalo, že převládající organizační formou výuky bude hromadná (frontální) výuka. 33 % učitelů s pedagogickou prací 5 let nebo méně plánovalo, že převládající organizační formou výuky bude hromadná (frontální) výuka.

- Úlohy vyžadující tvořivé myšlení a úlohy vyžadující sdělení poznatků plánovalo zařadit přibližně 33 % učitelů, jejichž délka pedagogické praxe je 5 nebo méně let. Žádný z učitelů matematiky s délkou praxe více než 5 let tyto úrovně učebních úloh neplánoval zařadit.

Žádné další výrazné rozdíly mezi těmito dvěma skupinami zaznamenány nebyly.

Výzkumná otázka 1 (V1b):

- Jaké zdroje využívají učitelé na ZŠ Dobrá při přípravě na vyučovací hodinu nejčastěji?

Jak již bylo zmíněno, učitelé na ZŠ Dobrá nejčastěji při přípravě čerpají z učebnice a internetových zdrojů. Jako další zdroje někteří z nich uvedli: „pracovní sešit, vlastní (samostatně připravené) pracovní listy, tematické plány, metodiku, vlastní zkušenosti, příručku pro učitele, ŠVP ZV“.

4.1.2 Výzkumná otázka 3 (V3)

Výzkumná otázka V3, V3a:

- Liší se příprava vyučovacích hodin matematiky učitelů na 2. stupni ZŠ Dobrá od samotné realizace výuky.
 - Jaké jsou případné příčiny odklonu od původní přípravy během realizace výuky?

U některých učitelů matematiky se příprava vyučovací hodiny matematiky na ZŠ Dobrá od samotné realizace výuky lišila. Dvěma respondentům z celkových 12 se podařilo vyučovací hodinu realizovat přesně podle plánu. V tabulce níže uvádíme, rozdíly, které se mezi D1 a D2 objevily u učitelů 2. stupně, zároveň je tabulka doplněna o důvody, které učitelé uvedli jako příčinu odchylky od jejich původního plánu vyučovací hodiny.

Tabulka 6 Neshoda v odpovědi mezi D1 a D2 u učitelů na 2. stupni

Respondent	Neshoda v odpovědi mezi D1 (před vyučovací hodinou) a D2 (po vyučovací hodině) u položky ...	Příčina neshody očima respondentů
Učitel Veselý	7: Utváření a rozvoj klíčové kompetence během vyučovací hodiny (odpověď před: B, C, F, G; po: B, C)	„Příklad na výpočet obvodu budovy na mapě, nám zabral poměrně dlouho, příliš příkladu

		z reálného světa jsme tedy nestihli. Metodu řešení obvodu obdélníku jsme uvedli pouze jednu, žádnou další jsme zavést nestihli.“
	9: Znalostní dimenze výukových cílů v kognitivní doméně kurikula (odpověď před: konceptuální znalost; po: znalost faktů)	„Nejvíce času nám zabralo konstruování a počítání dle návodů, na zobecnění a hlubší samostatnou žákovskou aplikaci nezbyl čas. Obávám se, že někteří žáci nevnímají vztah mezi obvodem a obsahem.“
	11: Úroveň výukového cíle v afektivní doméně kurikula (odpověď před: reagování; po: přijímání)	„Po zhlédnutí videa jsme usoudili, že žáci příliš nereagovali, byli spíše pasivními posluchači.“
	12: Úroveň výukového cíle v psychomotorické doméně kurikula (odpověď před: manipulace; po: imitace)	„Žáci neřešili úlohy samostatně, řešili jsme je nakonec společně.“
Učitel Šťastný	6: Očekávaný výstup (před: M-9-3-01, M-9-3-02, M-9-3-04, M-9-3-13; po: M-9-3-04, M-9-3-10)	„Vzhledem k tomu, že jsem zvolila velmi stručné a jednoduché úlohy bez kontextu, vyučovací hodina byla zaměřena pouze na výpočet obvodu, obsahu a povrchu.“
	7: Utváření a rozvoj klíčové kompetence během vyučovací hodiny (odpověď před: B, C, D, F, I; po: B)	„Během hodiny jsme nejvíce trénovali paměť a vzorečky, proto tato kompetence.“
	8: Úroveň vzdělávacích cílů v kognitivní oblasti (odpověď před: aplikace; po: zapamatování)	„Žáci spíše doplňovali, než aplikovali, raději jsem vzorce prošla s nimi.“
Učitel Milý	8: úroveň vzdělávacích cílů v kognitivní oblasti (odpověď před: aplikace; po: pochopení)	„Nestihli jsme druhou úlohu, spíše bylo potřeba prohloubit pochopení.“
	9: znalostní dimenze výukových cílů v kognitivní doméně kurikula (odpověď	„Po vyučovací hodině usuzuji, že žáci zatím znají spíše vzájemné

	před: procedurální znalost; po: konceptuální znalost)	vztahy a souvislosti než kritéria pro používání.“
--	---	---

Výzkumná otázka V3b:

- Liší se přístup k reflektování a hodnocení kvality vyučovacích hodin v závislosti na délce pedagogické praxe?

Šetření D2 obsahovalo také 4 uzavřené otázky týkající se reflektování a hodnocení kvality vyučovacích hodin všeobecně. V závislosti na délce praxe vyplynuly z dotazníku následující závěry.

Přibližně 78 % učitelů s delší pedagogickou praxí než 5 let uvedlo, že reflexi po vyučovací hodině provádí velmi zřídka. Přibližně 33 % učitelů s pedagogickou praxí 5 let nebo méně uvedlo, že reflexi po vyučovací hodině provádí velmi zřídka.

Přibližně 67 % učitelů s delší pedagogickou praxí než 5 let uvedlo, že jsou zapojeni do vzájemné hospitace vyučovacích hodin matematiky 2 krát až 5 krát ročně. 100 % učitelů s pedagogickou praxí 5 let nebo méně uvedlo, že jsou zapojeni do vzájemné hospitace vyučovacích hodin matematiky 2 krát až 5 krát ročně.

Přibližně 78 % učitelů s delší pedagogickou praxí než 5 let uvedlo, že v nich vzájemná hospitace vyvolává spíše příjemné pocity. Přibližně 33 % učitelů s pedagogickou praxí 5 let nebo méně uvedlo, že v nich vzájemná hospitace vyvolává spíše příjemné pocity.

100 % učitelů s pedagogickou praxí 5 let nebo méně uvedlo, že vnímají reflexi své pedagogické činnosti jako spíše či velmi přínosnou. 67 % učitelů s delší pedagogickou praxí než 5 let uvedlo, že vnímají reflexi své pedagogické činnosti jako spíše či velmi přínosnou.

4.1.3 Výzkumná otázka 2 (V2):

- Jak realizují učitelé matematiky na 2. stupni ZŠ Dobrá vyučovací hodiny matematiky?

Na tuto výzkumnou otázku odpovídáme pomocí didaktických kazuistik, které uvádíme v kapitole 5 této rigorózní práce. Didaktické kazuistiky vznikly z videozáznamů vyučovacích hodin matematiky, které byly pořízeny ve školním roce 2022/2023 a 2023/2024. Celkem bylo pořízeno 18 (video)záznamů, ze kterých jsme vzhledem k cílům této rigorózní práce vybrali 3 ke zkoumání. .

5 Didaktické kazuistiky

V této kapitole představíme didaktické kazuistiky vybraných videozáznamů, které byly pořízeny během výzkumu prováděného pro tuto rigorózní práci. V těchto kazuistikách budou metodikou 3A (Janík et al., 2022b) detailně rozebrány tři výukové situace, které se odehrály na 2. stupni ZŠ Dobrá. Každá z těchto kazuistik obsahuje anotaci, analýzu a návrh alterace této výukové situace. Kazuistiky jsou navíc doplněny o data z dotazníkových šetření 1 a 2, která dodali vyučující konkrétních výukových situací, a o závěr, ve kterém jsou shrnuta základní zjištění z rozboru hodiny a rovněž prezentovány náměty k dalšímu výzkumu v této oblasti.

Vzhledem k přislíbenému⁷² zachování anonymity účastníků výzkumu využíváme v kazuistikách k označení vyučujících sousloví učitel Veselý, učitel Šťastný a učitel Milý. Tato sousloví nijak neurčují charakteristiky ani pohlaví vyučujícího, jedná se pouze o náhodný výběr označení.

5.1 Didaktická kazuistika 1

V tabulce 7 uvádíme výsledky dotazníkového šetření 1 (příprava na vyučovací hodinu a didaktická analýza učiva), které vyplňoval učitel Veselý před pořízením videozáznamu. V tabulce 8 uvádíme transkripci rozhovoru, který byl s učitelem Veselým proveden těsně před námi analyzovanou vyučovací hodinou matematiky.

Tabulka 7 Učitel Veselý – Dotazníkové šetření 1

Číslo otázky	Otázka	Odpověď
1	Délka pedagogické praxe	více než 5 let
3	Tematický okruh	Geometrie v rovině a v prostoru
4–5	Učivo a jeho specifikace	Rovinné útvary – přímka, úsečka, trojúhelník, čtyřúhelníky – čtverec, obdélník
6	Očekávané výstupy dle RVP ZV 2023	M-9-3-01, M-9-3-02, M-9-3-04, M-9-3-06, M-9-3-13
7	Klíčové kompetence ⁷³	B, C, F, G

⁷² Zachování anonymity bylo uvedeno v informovaném souhlasu, který obdrželi všichni účastníci výzkumu.

⁷³ Odpovědi pro tuto otázku značíme písmeny vzhledem k jejich délce, čtenář znění těchto odpovědí nalezne v příloze 1.

8	Úroveň vzdělávacích cílů v kognitivní oblasti	Pochopení (porozumění)
9	Dimenze výukových cílů v kognitivní doméně kurikula	Konceptuální znalost
10	Úroveň učebních úloh	Úlohy vyžadující paměťovou reprodukci poznatků
11	Úroveň vzdělávacích cílů v afektivní doméně kurikula	Reagování
12	Úroveň vzdělávacích cílů v psychomotorické doméně kurikula	Manipulace (praktická cvičení)
13	Vyučovací metoda	Metoda názorně-demonstrační
14	Organizační forma	Hromadná (frontální) výuka
15	Didaktické pomůcky	„Učebnice, pracovní sešit, rýsovací pomůcky, interaktivní tabule“
16	Nejčastější způsob začlenění ICT	„Nejčastěji využíváme kalkulačky na výpočty, které již žáci bez kalkulačky umí.“
17	Náročnost rozvoje digitální kompetence u žáků při výuce matematiky	Poměrně náročný
18	Žákovské prekoncepty	„Žáci znají např. význam oplocení zahrady, to by jim mělo k pochopení pojmu obvod pomoci.“
19	Žákovská kritická místa konkrétního učiva	„Žáci by mohli mít problém s určováním skutečné velikosti budov dle měřítko mapy.“
20	Aktivizace žáků	Diskusní metoda, heuristická metoda
23	Organizační typ	Hromadné vyučování
24	Nejdelší fáze vyučovací hodiny	Fixace
25	Důvod volby nejdelší fáze vyučovací hodiny	„Vyučovací hodina je formou opakování učiva z 5. ročníku.“
27–28	Mezipředmětové vztahy	Ano – „zeměpis“

Tabulka 8 Učitel Veselý – rozhovor před vyučovací hodinou

Otázka	Odpověď
Došlo k nějakým změnám v programu vyučovací hodiny matematiky po vyplnění dotazníkového šetření 1?	„Ne, program vyučovací hodiny zůstává stejný.“
V dotazníku jste uvedl(a), že hodláte žákům během plánované výuky zadat úlohy vyžadující paměťovou reprodukci poznatků. Můžete nám zadání jedné takové úlohy přečíst?	„Vypočtete obvod budovy na mapě, je-li 1 cm na mapě roven 8 m ve skutečnosti. A ještě tu mám na začátek úlohu: Na obrázku jsou vyznačeny kolmice a dva body D a B, sestroj rovnoběžky s oběma přímkami tak, aby vznikl obdélník $ABCD$.“
Jaké pocity ve Vás aktuálně pořizování videozáznamu vyvolává? Pokuste se srovnat tento způsob reflexe např. s běžnou hospitací.	„Docela se na to těším, bude to něco nového, zároveň jsem ráda, že v hodině není další člověk, bude to pro mě příjemnější.“
Co by Vám účast v tomto výzkumu mohla přinést, co od ní očekáváte?	„Stejně jako hospitace je to pro mě vždy pedagogický posun vpřed, ráda o výuce diskutuji s dalším vyučujícím.“
Vnímáte tento způsob reflexe pedagogické činnosti jako přínosný?	„Určitě ano. Běžně neanalyzujeme vyučovací hodinu úplně hloubkově.“

5.1.1 Teoretická východiska

Vzhledem k tomu, že je výuková situace, kterou představíme v kapitole 5.1.2, zaměřena na tematický okruh Geometrie v rovině a v prostoru, uvedeme stručně některá teoretická východiska, jež úzce souvisí s programem této výukové situace. V anotaci, analýze a alteraci této výukové situace budeme z těchto teoretických východisek čerpat.

Geometrii můžeme považovat za zásadní součást matematiky jako vědního oboru. Trojúhelník, čtverec a obdélník patří k fundamentálním geometrickým obrazcům a zastávají v geometrii důležitou roli především vzhledem k jejich praktickému významu v reálném světě. S těmito pojmy se čeští žáci seznamují již na 1. stupni základní školy

a k jejich poznávání dochází intuitivně většinou prostřednictvím např. popisu tvaru mnohých objektů, které žáky běžně obklopují.

Následně je u nich rozvíjena schopnost měřit a porovnávat velikosti, určovat jejich obvod a obsah (pomocí čtvercové sítě) a konkretizovat jejich vlastnosti. Jakmile žáci vlastnosti těchto rovinných útvarů znají, konstruuji je jako množiny bodů daných vlastností.

Úlohy, ve kterých mají žáci na základě zadaných hodnot zkonstruovat geometrický objekt daných vlastností, nazýváme konstrukčními úlohami. Konstrukční úlohy podobně jako slovní úlohy nejsou mezi žáky příliš populární, a to dlouhodobě (Rakušanová, 1957; Novotná, 2000; Vondrová et al., 2019). Obtíže při řešení konstrukčních úloh může způsobovat např. to, že si žák neuvědomuje rozdíl mezi geometrickým útvarem jako teoretickým objektem a jeho reprezentantem na papíře (Duval, 2006). Dalším důvodem může být fakt, že žák neumí pracovat s nekonkrétním rozměrem, nechápe, co u konstrukční úlohy znamená slovo libovolný či obecný nebo dokáže provést konstrukční kroky, ale jejich povaze nerozumí (Vondrová et al., 2015).

S formalismem v geometrii mohou souviset také nesprávné představy pojmů. Tento formalismus bývá pozorován například v případě, že mají žáci identifikovat geometrické útvary. Některým z nich se podaří správně rozpoznat jen typický model daného útvaru, který autoři Hershkowitz (1989) a Monaghan (2000) označují jako prototyp. Autoři Hejný & Kuřina (2001) tento model považují za případ tzv. izolovaného modelu pojmu. Jako příklad můžeme uvést pojem trojúhelník a jeho možné prototypy – rovnostranný nebo rovnoramenný trojúhelník. Pokud žakovským prototypem trojúhelníku byl např. rovnoramenný trojúhelník, mohl by u tupoúhlého trojúhelníku váhat, o jaký rovinný útvar se jedná (Clements et al., 1999; Tirosh et al., 2011; Budínová, 2018; Robová et al., 2019). Žáci se takto mohou dostat do „zajetí“ prototypů geometrických objektů, což může také vést k neúspěšnému řešení úlohy.

Podobně jako konstrukční úlohy se ukázala i míra v geometrii (v rámci projektu GA ČR *Kritická místa matematiky základní školy, analýza didaktických praktik učitelů*) u žáků základních škol jako problematická. Mezi příčiny této problematiky byl mimo jiné zařazen také „...přílišný důraz na výpočty, tedy zjišťování číselného ohodnocení míry...“ (Vondrová & Rendl, 2015, s. 262).

Tuto manipulaci s čísly mnozí žáci vykonávají bez porozumění, tzn. ztrácí se spojení výpočtu míry a geometrické představy. Jako další příčina byl uveden „...příliš brzký nástup vzorců, tedy předčasná algebraizace...“ (Vondrová & Rendl, 2015, s. 262).

V mnohých případech se totiž učitel po zavedení vzorců již nevrací k předchozím hladinám pojmotvorného procesu míry. S příliš brzkým nástupem vzorců souvisí také záměna obvodu a obsahu (Jirotková et al., 2019; Comiti & Moreira, 1997) rovinných útvarů. Jednu z příčin uvádí např. autorky Jirotková & Kloboučková (2013, s. 45): „Většina tradičně koncipovaných učebnic neodděluje budování konceptu obsah a obvod od uvedení vzorce jako návodu na výpočet obsahu či obvodu.“

Zásadní roli u míry v geometrii hraje také jednotka a její tvar. Proces počítání jednotek je na druhém stupni základního vzdělávání zobecněn do multiplikační struktury, tzn. žák si uvědomuje, že např. při výpočtu obsahu čtverce či obdélníku dochází k násobení příslušných délek. Naopak při výpočtu obvodu čtverce, obdélníku či trojúhelníku dochází ke sčítání příslušných délek. Toto zobecnění do multiplikační struktury může být pro žáky problematické (Vondrová et al., 2015).

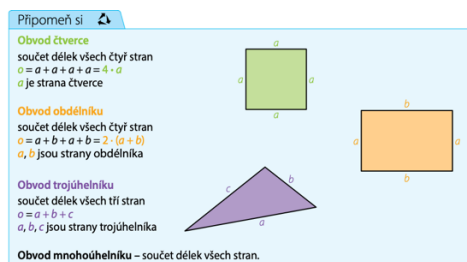
V kapitole 5.1.3 budeme vybraný videozáznam analyzovat. Hodnotit budeme potenciál této výukové situace být sama o sobě situací podnětnou, případně i rozvíjející. Hejný (2014, s. 127) charakterizuje podnětné, případně rozvíjející vyučování (založené na budování schémat) jako vyučování, ve kterém „...učitel vytváří optimální pracovní klima, žáci řeší přiměřené úlohy, učitel ponechává žákům prostor pro jejich úvahy, nepodsouvá jim své postupy, nezavrhne chybné myšlenky, vede žáky k vzájemným diskusím, žáci zažívají radost z úspěchu, v žácích je vyvolána potřeba experimentovat, hledat, komunikovat a formulovat vlastní myšlenky, učitel pracuje s chybou žáka promyšleně, vede ho k tomu, aby sám vlastní chybu odhalil a aby odhalil její příčiny...“ Takové vyučování můžeme označit za možnou realizaci nové a produktivní kultury vyučování a učení se matematice.

5.1.2 Anotace

Kontext výukové situace

Sledovaná vyučovací hodina matematiky byla realizována na začátku školního roku 2023/2024 na ZŠ Dobrá. Ve třídě bylo přítomno 23 žáků, učitel Veselý a asistent pedagoga. Dle učitele Veselého bylo hlavním cílem vyučovací hodiny zopakovat vybrané

rovinné útvary, jejich konstrukci a obvod. Dalším cílem bylo, aby žáci sami přišli na to, z čeho je odvozen vzorec na výpočet obvodu obdélníku, tzv. „urychlovač⁷⁴“ ($o = 2 \cdot (a + b)$). Učitel Veselý během vyučovací hodiny čerpal z učebnice a pracovního sešitu nakladatelství Taktik (Matasová et al., 2019) (viz obr. 15). V učebnici chtěl konkrétně připomenout žákům informace uvedené na straně 22 kapitoly Obvod a jednotky délky (obr. 15). Konstrukční úloha a slovní úloha na práci s mapou byly čerpány z internetových zdrojů.



Obrázek 15 Učebnice Taktik – Hravá matematika 6 (Matasová et al., 2019, s. 22)

Didaktické uchopení obsahu – činnosti učitele a žáků

Část 1: Opakování – obvod mnohoúhelníků (0:00–4:45)

Na začátku vyučovací hodiny se učitel Veselý pokusil žáky vrátit v čase do poslední vyučovací hodiny věnované geometrii. Společně došli k tomu, že byla zaměřena na čtverec a trojúhelník a výpočet jejich obvodu. Tabulka 9 zachycuje pedagogickou komunikaci během tohoto opakování. Videozáznam s titulky této části výukové situace 1 nalezne čtenář také online na:

https://drive.google.com/file/d/1uHCu_U2wDAX1v_mWn8AspbDSuOenjQH4/view?usp=sharing.

⁷⁴ Termín, který používá učitel Veselý.

Tabulka 9 Pohled do výuky 1: Didaktická kazuistika 1

<p>Výuková situace 1 – učitel Veselý (U), žáci (Ž1–Ž6) (1:30–4:45) počet slov učitel: 161; počet slov žáci: 55, počet zapojených žáků: 6</p>
U: „Co jsme dělali poslední hodinu, ve které jsme se věnovali geometrii?“
Ž1: „Podobnosti a nerovnosti trojúhelníku?“
U: „Ano, zabývali jsme se trojúhelníkem, ale to nebylo poslední hodinu. Ale taky jsme se tomu věnovali.“
Ž2: „Čtverec.“
U: „A co s ním?“
Ž2: „Rovnosti a nerovnosti čtverce?“
U: „Ne, ne. Co to bylo, co jsme dělali?“
Ž3: „Obvod.“
U: „Výborně, bavili jsme se o obvodu trojúhelníku, o obvodu čtverce a dneska zopakujeme i obvod obdélníku. Pojděme se tedy vrátit k obvodu čtverce. Jak ho vypočítáme, tedy co to vůbec ten obvod je, co si pod tímto pojmem představíte? Co si vybavíte, co jsme si říkali jako pomůcku, co je obvod. Co jsme si říkali z praxe jako příklad.“
Ž4: „Vlastně všechny strany dohromady.“
U: „Ano, říkali jsme si, že to je, když potřebujeme vypočítat...“ (učitel navádí žáky pohyby rukou)
Ž5: „Třeba, my jsme si ve třídě říkali příběh, když obejdu dům s pejskem.“
U: „Třeba, obejdeme dům s pejskem, nebo jsme si říkali, když máme zahradu, tak ji co?“
Ž5: „Plot.“
U: „Plot, výborně, tu zahradu oplotíme. Takže vypočítáme, kolik budeme potřebovat pletiva. Ten pozemek vlastně ohraničíme. Tak, a co když ten pozemek bude mít tvar trojúhelníku? Jak byste na to šli?“
Ž6: Že vlastně spočítám, kolik má ta jedna strana, no a tu stranu, kterou jsem vypočítal kolik má...
U: „Nebo vím, kolik má.“
Ž6: „No, tak vynásobím dvakrát a k tomu sečtu přeponu.“
U: „Takže je to součet všech stran. Přesně tak. To platí pro trojúhelník, čtverec i obdélník. Poslední hodinu jsme ještě zapisovali a vy jste rýsovali do čtvercové sítě, kde jste znali nějakou délku strany, obdélník jste měli podle toho zakreslit a potom naopak jste zakreslili obdélníky a měřili jste délky stran. Takže už jsme se s počítáním obvodu setkali. No a my, když se dneska budeme zabývat obdélníkem, tak co víme o obdélníku?“

Část 2: Vlastnosti obdélníka a jeho konstrukce (4:46–20:22)

V návaznosti na pojem obdélník otevřel učitel Veselý diskuzi týkající se jeho vlastností. Žáci správně uvedli několik vlastností jako např. „obdélník nemá všechny strany stejně dlouhé; má čtyři vrcholy; protější strany jsou stejně dlouhé“.

Dále jeden z žáků uvedl, že „obdélník je kolmý“, společně s učitelem Veselým tvrzení upravili a došli k tomu, že „strany obdélníku jsou na sebe kolmé“. Učitel Veselý na tuto odpověď reagoval další otázkou týkající se toho, co to znamená, když jsou na sebe strany kolmé. Vzhledem k tomu, že se žáci na chvíli odmlčeli, načrtl učitel Veselý na tabuli různoběžky a zeptal se žáků, zda tedy mohou vypadat kolmice takto. Dotaz byl vznesen za účelem vybavení si pojmu pravý úhel. Ten si žáci vybavili a doplnili, že kolmice svírají pravý úhel. Diskuze pokračovala na téma, jak kolmici ke konkrétní přímce sestrojít. Učitel Veselý kolmici úspěšně sestrojil dle instrukcí žáků na tabuli. Tuto část videozáznamu nalezne čtenář také online na: https://drive.google.com/file/d/1O19G0Q9XXCuIVg7elglt18IPGi-V_IVa/view?usp=sharing.

Poté se vrátil k pojmu obdélník. Žáci měli za úkol vyjmenovat objekty ve třídě, které mají tvar obdélníku. Mezi zmíněnými objekty byly dveře, tabule, projektor nebo plakát. Další diskuse proběhla na téma rovnoběžky. Žáci se beze slov pustili do naznačování rovnoběžek rukama. Učitel Veselý se tedy vyptával dál, aby na tuto otázku dostal slovní odpověď. Po chvíli jeden ze žáků tento pojem přisoudil „čárám, které se nikdy neprotnou“. Po společné diskuzi učitel Veselý zadal žákům první konstrukční úlohu. Probíhající pedagogickou komunikaci během řešení této konstrukční úlohy jsme zaznamenali do tabulky 10. Videozáznam s titulky této části výukové situace 2 nalezne čtenář také online na:

[https://drive.google.com/file/d/1HCeZluQAW2IPshjTZukeXODC0aFUZV-F/view?usp=share link](https://drive.google.com/file/d/1HCeZluQAW2IPshjTZukeXODC0aFUZV-F/view?usp=share_link).

Tabulka 10 Pohled do výuky 2 – Didaktická kazuistika 1

Výuková situace 2 – učitel Veselý (U), žáci (Ž5–Ž15) (10:30–18:51) počet slov učitel: 218; počet slov žáci: 43, počet zapojených žáků: 4
U: „Já když udělám děti tady bod D a zadám to tak, že tady máme jednu, tady narýsuji druhou přímkou shora dolů, tak...“ (rýsuje na tabuli)
U: „A poslouchej, jaké je zadání. Na obrázku jsou vyznačeny kolmice a dva body D a B . Sestroj rovnoběžky s oběma přímkami tak, aby vznikl obdélník $ABCD$. Tak jak bychom pokračovali? Pojdte mi navrhnout postup, pojdte říkat nebo klidně i na tabuli. Co byste řekli, přemýšlejte nad tím. Jak budu postupovat? Čím začnu? Zatím nic neotvírejte. Vydrž, co budu dělat teď?“ (žáci se odmlčeli, po chvíli je vyvolán Ž5): „Co bys udělal?“
Ž5: „Nevím.“
U: „Sestroj rovnoběžky tak, aby vznikl obdélník.“
Z5: „Obdélník?“
U: „Ano. Co bude jako první, co byste udělali? Někteří se hlásí, já potřebuji, abyste nad tím přemýšleli všichni.“
Ž14: „Rysku dáme na přímkou a uděláme čáru v bodě D .“
U: „První si zvolila bod D , dobře, tak já to udělám takhle, tady ji mám delší“ (rýsuje na tabuli dle pokynů).
U: „Z bodu D tedy spustím kolmici. No a co dále, abychom měli obdélník komplet?“ (vyvolán je Ž10)
Ž10: „Změříme si vlastně no... nejdřív vyznačíme bod A , který tam vznikl. Poté změříme vzdálenost mezi bodem A a D .“
U: „Ano, přesně tak, změřím, to je jedna z možností, a tu délku přenesu. Je to tak? Jaký by mohl být ještě jiný postup? Jak dostanu ten bod chybějící? C .“
Ž15: „Že si dám pravítko na AB .“
U: „Potřebuji ještě jedno, vid’?“
Ž15: „Jo. A udělám vlastně výtah a ...“
U: „Ano, říkáme výtah, takže já si ji přesně nastavím, aby kopírovala tu přímkou. A pojedou tím výtahem, mně to na tabuli úplně tak přesně nejde, děti, až do bodu D a nesmím si s těmi pravítky vůbec hnout. Takže také možnost, jak rovnou dostanu tu rovnoběžku.“

Slovně jeden ze žáků uvedl ještě třetí správný postup konstrukce pomocí kružítka. Následně si žáci měli za úkol vybrat jeden jimi preferovaný postup konstrukce a pomocí něj obdélník $ABCD$ do svého pracovního sešitu narýsovat.

Část 3: Výpočet obvodu budovy na mapě (20:23–45:02)

Závěrečnou část vyučovací hodiny tvořilo zhlédnutí videa⁷⁵, ve kterém byl popsán proces zjednodušení výpočtu obvodu obdélníka pomocí vzorce. Učitel Veselý žákům pustil úvodní část videa (0:00–0:51), následně přeskočil prostřední část videa (0:52–1:29), ve které hlavní postava postupně sčítala délky stran obdélníka, a spustil závěrečnou část videa (1:30–1:50), ve které druhá postava uvedla vzorec na výpočet obvodu obdélníku, který žáci již znali. Po zhlédnutí videa se učitel Veselý žáků dotázal, jak tedy vzorec na výpočet obvodu („urychlovač“ $o = 2 \cdot (a + b)$) vznikl, a co tedy obsahovala vynechaná část videa. Žákům se tento úkol podařilo splnit a vynechanou část videa odhalili správně ($o = a + b + a + b$).

Po zhlédnutí videa měli žáci za úkol vyřešit úlohu, která obsahovala mapu budovy školy ZŠ Dobrá a jejího okolí. Žáci měli za úkol pomocí rozměrů budovy a měřítky mapy určit skutečný obvod jedné z budov (tvaru obdélníka). Jak probíhala pedagogická komunikace mezi učitelem a žáky během řešení této úlohy, uvádíme v tabulce 11 a také ve videozáznamu dostupném online na:

https://drive.google.com/file/d/1svm3lQFkyFSkWlvr6OR-sVVfYMVg4PpQ/view?usp=share_link.

⁷⁵ Dostupné online: <https://edu.ceskatelevize.cz/video/3666-obvod-a-obsah>. (Česká televize, 2023)

Tabulka 11 Pohled do výuky 3: Didaktická kazuistika 1

Výuková situace 3 – učitel Veselý (U), žáci (Ž2–Ž11) počet slov učitel: 417; počet slov žáci: 39, počet zapojených žáků: 7	
	U: „Co byste řekli, že máme na té mapě?“
	Ž2: „Naši školu.“
	U: „Ano, to je naše škola na mapě. Tady to je co?“ (ukazuje na objekt na mapě)
	Ž2: „Hřiště.“
	U: „Ano, a my teď máme tvar, tady toto je ta budova dole, která je 1. stupeň a družina, my budeme brát tady ten obdélníkový tvar pouze. Jo? No a já Vám řeknu údaj, že 1 cm na téhle mapě je 8 m ve skutečnosti.“
	Ž10: „Cože?“
	U: „ 1 cm je 8 m ve skutečnosti. No a jak zjistíme obvod naší školy, co byste, jak byste ho vypočítali, co bychom měli udělat. Jak to pomocí mapy zjistíme, jak byste postupovali? Málo ještě, ještě chvíli, přemýšlej. Co byste navrhovali“
	Ž11: „Co?“
	Ž7: „Změřili bychom si tu školu na centimetry úplně každý obvod a pak bych to převedl na ty metry.“
	U: „Aha, takže první krok. Zůstaneme u toho tvého prvního kroku. Tedy, že bychom si měli změřit délku té jedné strany. Je to tak? Jo? Já to tedy změřím a údaj zapíšeme. No a nám vyjde tady ...“ (U začíná objekt na tabuli měřit). „No, já kdybych to měřila tedy ještě doma. No, já Vám zadám údaje, protože tady na tabuli to máme zvětšené, ale doma, kdybychom měli přesně takhle tu mapu, tak jsem si změřila, přesně jak říká Ž7, kolik má ta jedna strana centimetrů. Ta jedna strana, děti, má, když jsem ji měřila, tak má 6 cm . Tahle strana, když ji změříme pravítkem, tak má 3 cm . Tak máme tyhle údaje, s těmi budeme počítat, a jedná se nám tedy tady o tu obdélníkovou budovu, já to takhle ohraničím. No a co teď s tím? Když víme, jak spočítáme ten obvod.“
	Ž8: „Vynásobím si těch 6 cm na osm, krát osm.“
	U: „Výborně, 6×8 a strana b bude?“
	Ž4: „ 6×3 , teda 8×3 .“
	U: „Strana a má tedy 48 m a strana b má 24 m . Takže prosím Vás, otevřete sešity, napište dnešní datum a vypočítejte obvod naší školy. Napište si nadpis obvod obdélníku. Sešit na geometrii, datum a запиšte si údaje a vypočítejte obvod naší školy. Kdo máte, zvedněte ruku. Zapište si údaje, jo? Údaje perem, rýsujeme tužkou. Zapište vzoreček. Uděláme k tomu náčrt,

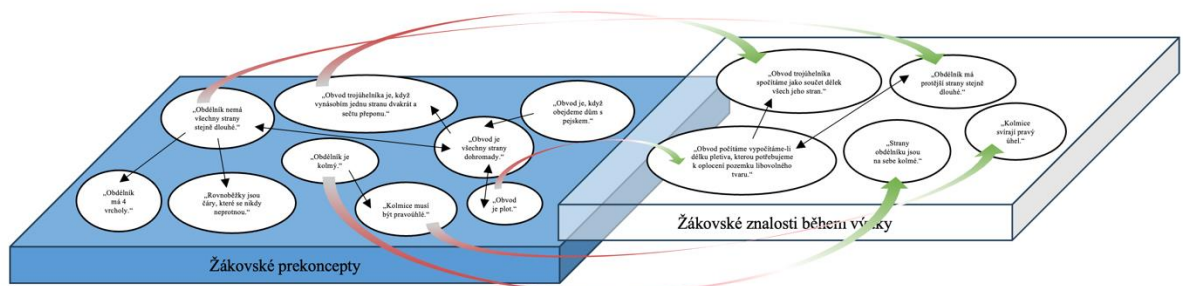
náčrt naší školy. Tak, a vypočítáme obvod. Popište strany, do náčrtu patří údaje, které známe. Mělo by to být tím vzorečkem“ (U: Píše na tabuli $o = 2 \cdot (a + b)$).
Ž9: „Jsou tam metry čtvereční?“
U: „Nejsou u obvodu, protože počítáme kolem dokola, u obvodu nemáme čtvereční. Tak já se jdu tedy podívat. Než to obejdu, tak pro rychlíky, ti vypočítají i obvod toho hřiště před družinou, strana a má, když to změříme, takže má 4 cm , a strana b má 3 cm a pořád platí, že 1 cm je 8 m ve skutečnosti. Takže tady je to vlastně 32 m a tady je to vlastně 24 m ve skutečnosti.“

Žáci si příklad zapisovali do sešitu, mezitím učitel Veselý pro rychlejší žáky zadal stejný úkol, tentokrát však pro jinou budovu (tvaru obdélníku) na mapě. Na závěr učitel zkontroloval práci každého žáka v sešitě individuálně.

5.1.3 Analýza

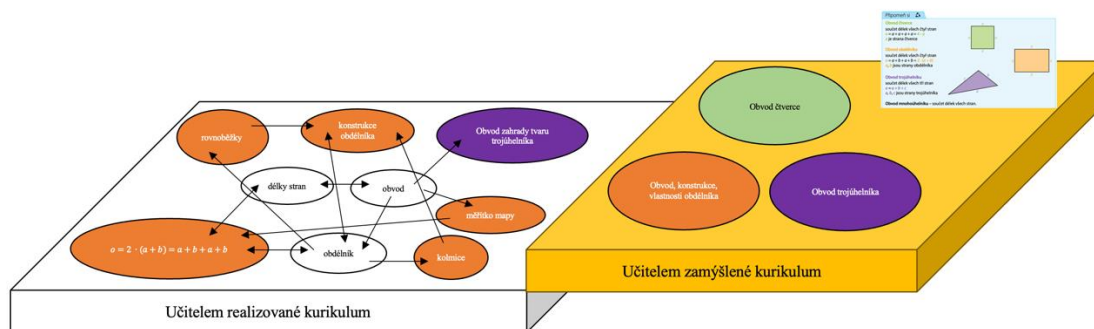
Strukturace obsahu

K základnímu popisu využijeme námi upravený model hloubkové struktury výuky, který je složen ze tří vrstev (Janík & Slavík, 2013). Jako první představíme tematickou vrstvu, která disponuje fenomény, které jsou nejbližší smyslové zkušenosti žáků. V našem případě jde o již známé rovinné útvary – čtverec, trojúhelník a obdélník. Žáci již měli o těchto útvarech určité výchozí znalosti, prekoncepty vlastností těchto rovinných útvarů a výpočtu jejich obvodu. Od žáků zazněla mnohá tvrzení, jejichž znění bylo potřeba poupravit či blíže specifikovat. S pomocí učitele Veselého a dalších spolužáků došlo během výuky k několika korekcím či specifikacím některých miskonceptů. Tyto korekce jsou naznačeny i v tematické vrstvě viz obr. 16 pomocí červeno zelených šipek.



Obrázek 16 Tematická vrstva – Didaktická kazuistika 1

Druhá vrstva, tj. konceptová (obr. 17), obsahuje strukturu obsahu výuky této vyučovací hodiny. V našem případě se jedná především o pojem obdélník (jeho konstrukci, vlastnosti, výpočet obvodu). Učitel Veselý standardní výpočet obvodu obdélníka modifikoval na výpočet obvodu budovy na mapě s konkrétním měřítkem, tzn. propojil pro žáky již známé algoritmy: práci s měřítkem na mapě a výpočet obvodu obdélníka. Žáci tento úkol však neřešili samostatně, ale s dopomocí učitele Veselého. Z důvodu přehlednosti jsme u této konceptové vrstvy nevyužívali šipky, stejnou barvou jsme však označili učitelem realizované kurikulum, které přispělo k naplnění učitelem zamýšleného kurikula. Z obrázku 17 je tedy patrné, že nenaplněným, nicméně původně zamýšleným kurikulem byl obvod čtverce, který ve vyučovací hodině učitel Veselý zmínil, nicméně myšlenka nebyla dokončena.



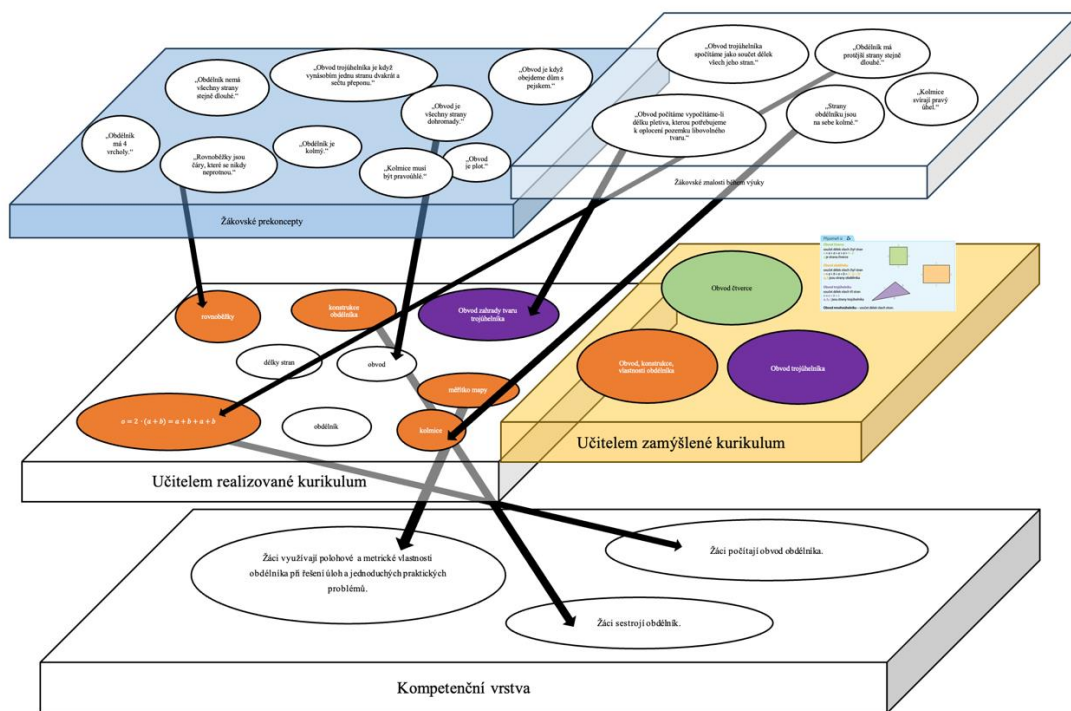
Obrázek 17 Konceptová vrstva – Didaktická kazuistika 1

Třetí kompetenční vrstva (obr. 18) je standardně tvořena nadoborovými kompetencemi. V našem případě budeme vycházet z kompetencí, které plánoval učitel Veselý rozvíjet během této vyučovací hodiny (viz tab. 7). Do diagramu hloubkové struktury zařadíme pouze ty kompetence, které autorka této rigorózní práce a učitel Veselý vyhodnotili po této vyučovací hodině jako takové, k jejichž rozvoji skutečně vyučovací hodina přispěla.



Obrázek 18 Kompetenční vrstva – Didaktická kazuistika 1

Na závěr všechny tyto vrstvy (obr. 16, obr. 17, obr. 18) propojíme do jednoho společného modelu hloubkové struktury výukové situace (obr. 19).



Obrázek 19 Diagram hloubkové struktury – Didaktická kazuistika 1

Pro přehlednost jsou vynechány šipky na úrovni vrstev, nicméně jejich platnost je neměnná.

Rozbor transformace obsahu s výhledem k alteraci

V této části budeme analyzovat vybrané části vyučovací hodiny matematiky vedené učitelem Veselým. Vzhledem k tomu, že je naším cílem kulturu vyučování a učení kultivovat, zaměříme se především na momenty vyžadující změnu. Než tak ale učiníme, zmíníme pozitivní momenty této výukové situace. Učitel Veselý vytvořil ve třídě optimální pracovní klima a žákům zadal k řešení přiměřené úlohy. Učitel Veselý zároveň ponechával žákům prostor pro jejich úvahy, nepodsouval jim své postupy a nezavrhoval chybné myšlenky. Práce s videem a odhalováním toho, co vynechaná část videa obsahovala, byla velmi nápaditá a žáky k objevování motivovala. Zároveň před řešením konstrukční úlohy (část 2 – didaktická kazuistika 1) učitel Veselý zmínil a s žáky teoreticky ukotvil pojmy, které žáci následně během konstrukce využívali. Tímto procesem mohl pravděpodobně dopomoci mnohým žákům k nalezení hned několika správných postupů konstrukce.

Část 1: První část výukové situace 1, která byla vybrána k analýze, byla věnována opakování pojmu obvod. V tabulce 9 jsme uvedli pedagogickou komunikaci, která mezi učitelem Veselým a žáky probíhala. Můžeme si zde všimnout, že hned na začátku vyučovací hodiny od žáků zazněla dvě sousloví, která matematicky nepovažujeme za správná nebo je považujeme za neexistující. Žáci nesprávně použili sousloví „podobnosti a nerovnosti trojúhelníku“ a „rovnosti a nerovnosti čtverce“. Můžeme předpokládat, že některá z minulých vyučovacích hodin byla věnována trojúhelníkové nerovnosti. Věty o podobnosti trojúhelníků jsou však ve školním vzdělávacím programu na ZŠ Dobrá zařazeny do učiva matematiky až pro 9. ročník. Jednalo se tedy o žákovské chybné využití pojmu, resp. tohoto sousloví. Zpětná vazba učitele Veselého na tato sousloví nenesla významnější hodnotící zprávu vzhledem k tomu, že se otázka, která žakovským odpovědím předcházela, netýkala žakovských znalostí, ale obsahu předchozích vyučovacích hodin geometrie, proto jim učitel Veselý údajně nepřikládal význam. Jaký význam měla pro žáky tato sousloví se již nedozvíme.

Poté třída diskutovala na téma obvod mnohoúhelníků. Vznesen byl dotaz na výpočet obvodu trojúhelníka. Žák 6 naznačoval, že má-li počítat obvod trojúhelníka, potřebuje znát délky jeho stran. Svou úvahu tedy započal tím, že by „spočítal délku jedné strany“ (učivo 8. ročníku ZŠ a vyšší). Zdá se tedy, že se mu kognitivně nepodařilo pracovat s nekonkrétními rozměry. Vzhledem k tomu se nabízí otázka, jak by si žáci poradili, pokud by např. jejich úkolem bylo počítat obvod libovolného či obecného trojúhelníka (Vondrová et al., 2015) a zda se s pojmy libovolný či obecný již setkali.

Učitel Veselý specifikoval délky stran trojúhelníka na takové, které „známe“ (viz tab. 9). Žák tedy pokračoval ve výpočtu obvodu trojúhelníku. Jednu jeho stranu vynásobil dvakrát a k tomu přičetl přeponu. Zpětná vazba učitele Veselého na tento postup výpočtu obvodu byla lakonická: „takže je to součet všech stran dohromady.“ Např. Mareš (1975) tento typ komunikace označuje termínem pseudodialog. Učitel Veselý žakovo tvrzení sice upravil, nicméně dále nereagoval na to, že je pro tohoto žáka pravděpodobně prototypem trojúhelníka rovnoramenný trojúhelník. Jak jsme již v kap. 5.1.1 zmínili, tyto prototypy mohou u žáků rozvíjet další miskoncepty.

Konstruktivistické teorie chybu vnímají jako nezbytnou součást učení. Chyba představuje pro učitele užitečný zdroj informací o žákovském porozumění učební látce a má potenciál podpořit žákovské učení (Santagata, 2005). Učitel má klíčovou roli při jejím využití k podpoře žákovského učení (Seifried & Wuttke, 2010). Obdobně měl i učitel Veselý možnost volit způsob, jak na chybu reagovat a jak ji dále využít.

Část 2: V další části vyučovací hodiny můžeme pozorovat tzv. tematickou diskusi. Ta je komunikační formou, v níž na sebe minimálně tři účastníci reagovali nejméně třicet sekund. Tematická diskuse byla vztažena k probírané látce, netýkala se organizačních záležitostí či žákovských digresí (Šed'ová, 2011). Učitel Veselý kladl žákům autentické otázky. Do hry bylo postupně vtahováno několik žáků a dostávali prostor k vyjádření. Třídě se s pomocí učitele Veselého podařilo najít tři správné postupy konstrukce obdélníku *ABCD*.

V tab. 10 si můžeme všimnout, že první řešení, které vymyslel jeden ze žáků, využívá měření délky jedné strany obdélníku. Tento žák tedy preferoval využití konkrétního rozměru při postupu konstrukce obdélníku. To může opět souviset s tím, že někteří žáci neumí pracovat s nekonkrétním rozměrem, resp. raději pracují s konkrétním rozměrem, i přestože toto měření může být nepřesné nebo časově náročnější než např. přenesení nekonkrétní délky pomocí kružítka (Vondrová et al., 2015). Nekonkrétní rozměry souvisí s procesem abstrakce měření délek (Kůrka, 2023).

Společné řešení této konstrukční úlohy vyvolalo v žácích potřebu hledat, komunikovat a formulovat vlastní myšlenky. Žákovské odpovědi byly však většinou krátké, učitel Veselý za účelem naplnit časový harmonogram vyučovací hodiny záměrně doplňoval žákovské promluvy předtím, než se žákům podařilo svou myšlenku vyslovit kompletně.

Část 3: V části 3 se učitel Veselý vrátil k předchozí hladině pojmotvorného procesu míry tak, že žákům představil video, ve kterém jednu jeho část vynechal. Žáci měli za úkol rozklíčovat, co vynechaná část videa obsahovala. Tento úkol se jim podařilo splnit a při zjišťování obvodu obdélníka sčítali postupně délky všech jeho stran (bez použití vzorce $o = 2 \cdot (a + b)$) stejně jako osoby figurující ve vynechané části videa.

V tab. 11 můžeme pozorovat promluvy mezi učitelem Veselým a žáky při řešení úlohy, ve které měli žáci za úkol zjistit skutečný obvod jim známé budovy zobrazené na mapě. Když učitel Veselý seznámil žáky s měřítkem mapy, jeden žák navrhl, že změří obvod školy v centimetrech a ty poté převede na metry. Učitel Veselý dále nezjišťoval,

jak by žák 7 tento proces provedl, i přestože jeho postup můžeme chápat dvojznačně (můžeme se pouze domnívat, že tím chtěl žák říct, že bude využívat měřítko mapy, a ne standardní převod jednotek, tedy např. $6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m}$). Nicméně navázal na tuto žakovskou promluvu tím, že pro celou třídu uvedl správný postup řešení (bez výsledného numerického vyčíslení) samostatně bez zapojení žáků. Poté žákům zadal, aby výpočet skutečného obvodu budovy provedli do svých sešitů. Důraz byl tedy kladen na číselné ohodnocení míry. Žák 9 vznesl při zapisování úlohy do sešitu dotaz týkající se jednotky míry, ve které má obvod budovy uvést. Jím navrženou jednotkou byly metry čtvereční. Zpětná vazba učitele Veselého obsahovala zamítnutí této jednotky z důvodu, že se jednalo o výpočet obvodu, což je „kolem dokola“. Analyzovaná výuková situace končila zadáním příkladu pro rychlejší žáky. Úkolem bylo spočítat obvod jiné budovy na mapě se stejným měřítkem.

5.1.4 Alterace

Posouzení kvality výukové situace

Tato výuková situace může být považována za příklad poměrně zdařilé výuky. Forma výuky byla sice frontální, avšak učitel Veselému se podařilo v žácích probudit zájem o danou problematiku. Většina se aktivně zapojovala svými nápady. Učitel dal příležitost nejen žákům, kteří hovořili dobrovolně, ale vyvolával i další žáky za účelem zapojení celé třídy. V určitých (v kapitole 5.1.3 již zmíněných) momentech bylo možné žáky více aktivizovat a s některými žakovskými miskoncepty lépe pracovat, což ale bude předmětem alterace v následujících odstavcích.

Budeme-li vycházet z konstruktivistického pojetí vyučování (desatera konstruktivismu) jakožto odborníky a výzkumníky doporučeného přístupu k vyučování matematice (kap. 2.4), dojdeme k následujícímu shrnutí této výukové situace: Žáci a učitel Veselý během této vyučovací hodiny vykazovali aktivitu, tzn. řešili úlohu slovní, konstrukční a dotvářeli představu o pojmech jim již dříve známých. Během výuky zdůvodňovali vzorec na výpočet obvodu obdélníku. Vznik tohoto poznatku pramenil z předchozí zkušenosti žáků s využitím tohoto vzorce. Klima třídy bylo příznivé a tvořivosti otevřené. Vhodně byly využity různé druhy reprezentací (konstrukce tužka – papír, video, mapa).

Za aspekt výuky vyžadující zlepšení považujeme pedagogickou komunikaci, konkrétně práci učitele Veselého s žákovskou chybou, která vznikla při pedagogické komunikaci. Kulič (1971, s. 42) ve svém čtyřfázovém modelu popisuje čtyři fáze postupu při práci s žákovskou chybou následovně: Prvním krokem je *detekce chyby*, během které je žák upozorněn na chybu ve svém výkonu či odpovědi. Ve druhém kroku (*identifikace chyby*) by měl žák získat podrobnější informace o vzniku této chyby. Během třetího kroku (*interpretace chyby*) učitel vysvětluje důvod vzniku chyby a uvádí ji do kontextu vzhledem k budoucímu učení. Ve čtvrté fázi dochází ke *korekci chyby*, popř. je žákům nabídnuta možnost chybné řešení revidovat. Učitel Veselý v části 1 až 3 výukové situace opakovaně přistupoval ihned po žákovském vyslovení chyby k její korekci bez fází 1 až 3. Tato „pouhá“ korekce chyby, kdy sami učitelé chybujícího žáka opraví, není dle Ingramové et al. (2015) neobvyklým jevem ve školském prostředí, spíše se naopak jedná o jev velmi častý. Způsob opravy učitele Veselého můžeme charakterizovat jako tzv. direktivní. Žáci totiž neobdrží žádné informace, které by je vedly k porozumění, proč je odpověď nesprávná a jak v jejich mysli vznikla nebo mohla vzniknout (Kosíková & Černá, 2013).

Učitel Veselý tedy místo korekce mohl žáky např. požádat o upřesnění jejich výroků. Např. v případě výpočtu obvodu trojúhelníku by mohly další návodné otázky žáka dovést k tomu, že jeho odpověď je správná pouze v případě počítání obvodu trojúhelníka rovnoramenného. Obdobná situace nastala v případě volby jednotek míry při výpočtu obvodu budovy na mapě. Zpětná vazba formou dalších otázek (od učitele nebo spolužáků) si totiž klade za cíl žáka v modifikaci chybného řešení podpořit a dopomoci mu překonat zónu nejbližšího vývoje⁷⁶. Dále upozorníme také na to, že direktivní zpětná vazba nemusí být žákem využita např. z důvodu „nepostačujícího množství využitelných informací, nedostatečné individualizace a konkrétnosti zpětné vazby, autoritativního sdělení, použití příliš odborného jazyka nebo absence vhodných strategií“ (Majcík, 2022, s. 71).

Na základě všech výše zmíněných aspektů hodnotíme výukovou situaci celkově jako pro žáky přínosnou, a tedy podnětnou. Podnětná situace je na kognitivní úrovni charakteristická „porozuměním a povrchním zobecněním (obvykle konceptuální znalost), aplikací a analýzou obsahu (obvykle procedurální a konceptuální znalosti)“ (Janík et al.,

⁷⁶ Tato zóna se vztahuje k rozdílu mezi aktuálním dosaženým výkonem, kterého je žák schopen sám dosáhnout, a výkonem, kterého může docílit s podporou učitele (Vygotskij, 1976).

2022b, s. 20). Naléhavost alterace souhrnně vyhodnocujeme jako nízkou. Toto hodnocení bylo diskutováno s učitelem Veselým, který souhlasně v D1 uvedl, že plánovanou úroveň vzdělávacích cílů v kognitivní oblasti bylo porozumění a dimenzí výukových cílů v kognitivní doméně kurikula byla právě konceptuální znalost.

Závěr

Navrhovaná alterace se snaží nenásilně obohatit pedagogickou komunikaci ve vyučovacích hodinách matematiky. Zároveň se snažíme naznačit, že je mnohdy přínosnější věnovat více času žakovským promluvám a zpětné vazbě než přesnému naplnění původního plánu vyučovací hodiny. Na druhou stranu je nezbytné uvést, že každá třída je jiná a také každý den ve školní třídě je jiný, proto eliminovat zmíněná úskalí pedagogické komunikace je velmi náročné, ne v každé situaci v praxi uskutečnitelné.

5.2 Didaktická kazuistika 2

Během výzkumu se nám podařilo pořídit záznam⁷⁷ vyučovací hodiny zaměřené na stejné učivo jako u vyučovací hodiny, kterou jsme již představili v didaktické kazuistice 1 (dále jen DK1). Vyučovací hodina, kterou představíme níže, proběhla o týden později než vyučovací hodina v DK1. Nicméně tentokrát ji vedl učitel Šťastný. Žáci, kteří tuto hodinu absolvovali, byli také z 6. ročníku jako žáci z DK1. Pro reflexi této výukové situace jsme se tedy rozhodli z důvodu možnosti komparace těchto dvou vyučovacích hodin. Připomeneme, že tematické plány učitele Veselého i učitele Šťastného vychází ze stejného školního vzdělávacího programu. Oba učitelé také využívají při výuce matematiky stejnou učebnici a pracovní sešit. Dále můžeme předpokládat, že jsou oba součástí jedné společné kultury vyučování a učení na ZŠ Dobrá.

Před pořízením záznamu vyplňoval učitel Šťastný také dotazníkové šetření 1 (příprava na vyučovací hodinu a didaktická analýza učiva). Data získaná v D1 uvádíme v tabulce 12. V tabulce 13 uvádíme transkripci rozhovoru, který byl s učitelem Veselým proveden těsně před pořízením záznamu.

⁷⁷ U této vyučovací hodiny nebylo možné pořídit videozáznam z důvodu nesouhlasu některých zákonných zástupců přítomných žáků (nesouhlas vyjádřili do informovaného souhlasu). Pořízen byl tedy pouze zvukový záznam a fotografie zápisu na tabuli.

Tabulka 12 Učitel Šťastný – Dotazníkové šetření 1

Číslo otázky	Otázka	Odpověď
1	Délka pedagogické praxe	více než 5 let
3	Tematický okruh	Geometrie v rovině a v prostoru
4–5	Učivo a jeho specifikace	Rovinné útvary – trojúhelník (obvod); čtyřúhelníky – čtverec, obdélník (obvod, obsah)
6	Očekávané výstupy dle RVP ZV 2023	M-9-3-01, M-9-3-02, M-9-3-04, M-9-3-13
7	Klíčové kompetence ⁷⁸	B, C, D, F, I
8	Úroveň vzdělávacích cílů v kognitivní oblasti	Aplikace
9	Dimenze výukových cílů v kognitivní doméně kurikula	Znalost faktů
10	Úroveň učebních úloh	Úlohy vyžadující paměťovou reprodukci poznatků
11	Úroveň vzdělávacích cílů v afektivní doméně kurikula	Reagování
12	Úroveň vzdělávacích cílů v psychomotorické doméně kurikula	Zpřesňování
13	Vyučovací metoda	Metoda řešení problémů
14	Organizační forma	Hromadná (frontální) výuka
15	Didaktické pomůcky	„Učebnice, pracovní sešit Taktik“
16	Nejčastější způsob začlenění ICT	„Hodně používáme interaktivní tabuli, žáky na ni baví psát.“
17	Náročnost rozvoje digitální kompetence u žáků při výuce matematiky	Poměrně snadné
18	Žákovské prekoncepty	„Žáci obvod a obsah již umí dlouho, měli by vše řešit samostatně.“

⁷⁸ Odpovědi pro tuto otázku značíme písmeny vzhledem k jejich délce, čtenář znění těchto odpovědí nalezne v příloze 1.

19	Žákovská kritická místa konkrétního učiva	„Povrch krychle a kvádrů“
20	Aktivizace žáků	Diskusní metoda, heuristická metoda
23	Organizační typ	Hromadné vyučování
24	Nejdelší fáze vyučovací hodiny	Fixace
25	Důvod volby nejdelší fáze vyučovací hodiny	„Věřím, že schopnost vypočítat obvod a obsah je naprosto zásadní pro jejich další rozvoj.“
27–28	Mezipředmětové vztahy	Ne

Tabulka 13 Učitel Šťastný – Rozhovor před pořízením záznamu vyučovací hodiny

Otázka	Odpověď
Došlo k nějakým změnám v programu vyučovací hodiny matematiky po vyplnění dotazníkového šetření 1?	„Ne, vše zůstává dle dotazníku.“
V dotazníku jste uvedl(a), že hodláte žákům během plánované výuky zadat úlohy vyžadující paměťovou reprodukci poznatků. Můžete nám zadání jedné takové úlohy přečíst?	„Žákům na tabuli zadám rozměry čtverce, obdélníku, trojúhelníku, krychle a kvádrů, jejich úkolem bude počítat obvody případně obsahy či povrchy podle vzorečků těchto útvarů.“
Jaké pocity ve Vás aktuálně pořizování videozáznamu vyvolává? Pokuste se srovnat tento způsob reflexe např. s běžnou hospitací.	„Aktuálně mám ještě trošku kašel, takže to není úplně nejvhodnější doba, ale snad to umluvíme. Oba způsoby jsou pro mě velmi podobné. Hospitující učitel si určitě všimne méně detailů.“
Co by Vám účast v tomto výzkumu mohla přinést, co od ní očekáváte?	„Zatím vůbec nevím, všeobecně vzájemné hospitace nepovažuji za příjemné, jsem poměrně stydlivější typ.“
Obohatila Vás profesně některá ze vzájemných hospitací, které doposud proběhly?	„Co se nových aktivit pro žáky týká, tak ano, jinak profesně příliš ne.“

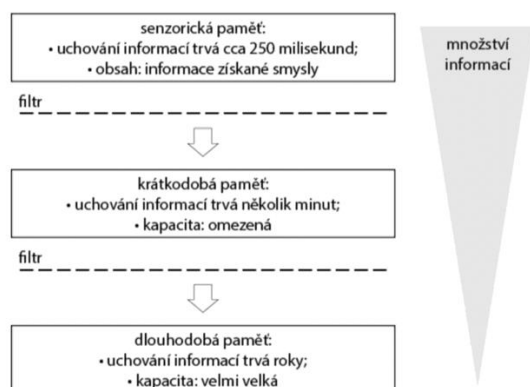
Vnímáte tento způsob reflexe pedagogické činnosti jako přínosný?	„Je to něco trošku jiného než vzájemná hospitace, takže mě třeba tento způsob příjemně překvapí.“
--	---

5.2.1 Teoretická východiska

Vzhledem k tomu, že vyučovací hodina, kterou zmiňujeme v didaktické kazuistice 2, byla vedena na podobné téma jako vyučovací hodina didaktické kazuistiky 1, teoretická východiska nebudeme podruhé opakovat. Pouze zmíníme, že v následujících kapitolách čerpáme z poznatků kap. 5.1.1 a ty jsou doplněny o další teoretická východiska v následujících odstavcích kapitoly 5.2.1.

Nejdelší část této vyučovací hodiny byla věnována matematickým vzorcům (v našem případě na výpočet obvodu, obsahu rovinných útvarů a povrchu těles), těmi se budeme zabývat i my v této části. Kořenem slova vzorec je slovo vzor, významů tohoto slova bychom našli mnoho, my uvedeme pouze ten význam, který souvisí s tematikou geometrických vzorců. Vzor je „to, co je určeno (zprav. jako pomůcka) k napodobení (mechanickému)“ (Havránek et al., 2011). Přeneseme-li tento význam do vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace, můžeme vzor interpretovat jako určitý návod, posloupnost kroků vedoucí k řešení. Matematický vzorec je ve slovníku spisovného jazyka českého (Havránek et al., 2011) definován jako „...vyjádření určitého vztahu, poučky, postupu, uspořádání, složení, struktury apod. ustálenými značkami, symboly“. Tyto zmíněné definice nás vedou k tomu, že je matematický vzorec pomůckou, která se dá poměrně snadno zapamatovat.

Představme si situaci, ve které se žák poprvé setká např. s vzorcem na výpočet povrchu kvádru, když ho vyučující napíše na tabuli. Žák ho během výuky přijme svými smysly zejména zrakově nebo sluchově. Poté se tento vzorec dostane do žákovy tzv. sensorické paměti. Zde je po dobu cca čtvrt sekundy k dispozici. Upoutá-li tento vzorec žákovu pozornost, přesune se ze sensorické paměti do krátkodobé, kde může zůstat několik minut. „Aby se však informace dostala z krátkodobé do dlouhodobé paměti, kde ji můžeme mít uloženou řadu let, musí se ještě zpracovat v několika krocích (obr. 20)“ (Hofmann & Löhle, 2017, s. 14).



Obrázek 20 Filtrování informací ve třech typech paměti (Hofmann & Löhle, 2017, s.15, obr. 2)

Naše paměť však záměrně filtruje informace za účelem zbavit se nepotřebného nebo nezajímavého. Bude-li chtít tedy žák tento vzorec záměrně dostat do dlouhodobé paměti, musí se těmto obecně smysluplným a užitečným filtrům při přechodu z jedné paměti do druhé vyhnout. Nevyhne-li se jim, tato informace bude nenávratně zapomenuta, nebude-li ji dotyčný opakovat nebo mu nebude dávat hlubší smysl. Matematické vzorce (v našem případě např. vzorec na výpočet povrchu kváдру ($S = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)$) se skládají z několika paměťových míst. Kapacita žákovy krátkodobé paměti je sedm plus minus dva prvky⁷⁹, resp. logické jednotky⁸⁰ (Miller, 1956).

Počet paměťových míst, ze kterých je vzorec na výpočet povrchu kváдру složen, je individuální. Závisí na tom, jaké informace již žák v dlouhodobé paměti má (Hofmann & Löhle, 2017, s. 16). Informace v dlouhodobé paměti nám umožňují z nových paměťových míst utvářet tzv. informační shluky (ang. *chunks*), díky nimž je proces uložení informace do dlouhodobé paměti „ekonomičtější“. Toto tvoření shluků uvádíme na obrázku 21. Bude-li žák znát „pouze“ latinku, arabské číslice, interpunkční znaménka a matematické symboly, bude při prvním pohledu na vzorec (s cílem uchovat ho v paměti) vnímat písmena, čísla a symboly odděleně v určitém pořadí, které mu nebudou dávat smysl. Aby si tento „zápis znaků“ uchoval v paměti, musí využít 17 paměťových míst, která však v krátkodobé paměti k dispozici nemá.

⁷⁹ Prvkem mohou být pojmy, čísla, vzorce, události, argumenty atd.

⁸⁰ Tyto logické jednotky se mohou skládat z písmen, slov, čísel nebo vět.

Bude-li žák např. již znát, jak vypočítat obsah obdélníku, místo 17 paměťových míst mu bude stačit míst 11. Bude-li však navíc žák znát, i z čeho je složena síť kvádrů, pro uchování vzorce na povrch kvádrů mu budou stačit pouze dvě paměťová místa na to, aby si uvědomil význam pojmu povrch a naučil se jeho běžné matematické označení.

$S = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)$	17 paměťových míst
$S = 2 \cdot (a \cdot b) + b \cdot c + c \cdot a$	11 paměťových míst
$S = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a)$	2 paměťová místa

Obrázek 21 Počet paměťových míst – vzorec na výpočet povrchu kvádrů

Z tohoto důvodu je při zavádění matematických vzorců do vyučovacích hodin matematiky velmi důležité, aby se s nimi žák seznamoval až poté, když chápe jejich podstatu. Např. vzorce na výpočet obvodu či obsahu mnohoúhelníků (přidání proměnné jako nástroje k modelování různých situací) je vhodné zavádět až poté, co žák chápe význam pojmu obvod a obsah a zná vlastnosti konkrétního mnohoúhelníku.

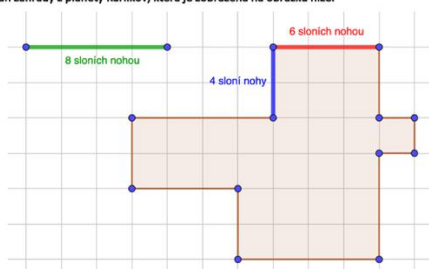
Výpočet obvodu bývá pro žáky kognitivně „uchopitelnější“ než výpočet obsahu rovinného útvaru díky mnohým prekonceptům, které žáci nabyli při zkoumání reálného světa kolem nich. Výpočet obvodu bývá často spojován např. s výpočtem délky pletiva na oplocení zahrady. Vzhledem k tomu, že je pravděpodobné, že se žáci 4. ročníku a starší již se zahradním oplocením setkali, není pro většinu z nich obtížné pochopit význam pojmu obvod. Situaci si dokáží poměrně dobře představit. Zatímco při výpočtu obsahu rovinného útvaru do „hry“ vstupuje multiplikativní vztah mezi délkami stran (v našem případě u čtverce, obdélníku), který si mnozí žáci jen těžko představí. Navíc toto uvědomění si povahy multiplikativního vztahu zahrnuje také výběr jednotky míry. Jednotky obsahu zahrnují ve svém zápisu přirozený exponent (např. m^2), se kterým se žáci na ZŠ Dobrá obecně setkávají až v 8. ročníku.

Z výzkumu GAČR *Kritická místa matematiky na základní škole – analýza didaktických praktik učitelů* (2011–2014) vyplynulo, že mnozí žáci poté, kdy jsou jim představeny vzorce na obvod, obsah rovinných útvarů nebo povrch a objem těles, je využívají velice často a mnohdy bez snahy udělat si nejdříve představu situace (Vondrová et al., 2015).

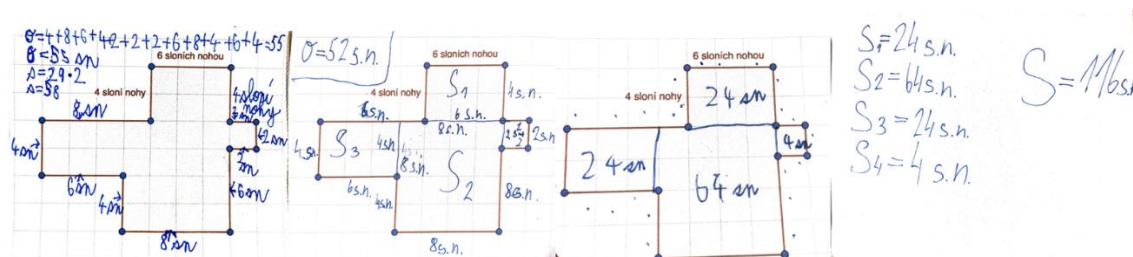
Tendenci žáků k okamžitému použití vzorce (formální znalost vzorce) v úloze týkající se míry v geometrii potvrzují např. i výzkumy autorů Kospentaris et al. (2011); Watson et al. (2013) nebo Battista (2007). Otázkou však zůstává, zda někteří vyučující nezáměrně k této tendenci u žáků nepřispívají během vyučovacích hodin matematiky.

Za kritické místo míry v geometrii jsou považovány také převody jednotek a zároveň žakovský výběr výsledné jednotky při číselném určování výsledného obsahu rovinného útvaru či objemu tělesa (Vondrová et al., 2015, s. 306). K hlubšímu pochopení míry v geometrii obecně může vést volba netradičních úloh a jednotek, ve kterých se žáci „nemohou“ uchýlit k použití jim již známého vzorce či známé jednotky. Jako příklad uvádíme úlohu⁸¹ na obrázku 22, kterou jsme zadali žákům 6. ročníků ZŠ Dobrá, kteří byli součástí vyučovací hodiny matematiky představené v této kazuistice. Řešení, která žáci uváděli nejčastěji (65 % žáků), zachycuje obrázek 23.

Na planetě Karlíkov počítají obvod a obsah rovinných útvarů stejně jako my na planetě Zemi. Na jejich planetě je všechno menší než u nás, proto místo 1 metru využívají tzv. 1 sloní nohu (přibližně 0,4 m). Ve sloních nohách budeme tedy nyní počítat l my. Určete obvod a obsah zahrady z planety Karlíkov, která je zobrazena na obrázku níže.



Obrázek 22 Netradiční úloha na výpočet obvodu a obsahu



Obrázek 23 Řešení netradiční úlohy na výpočet obvodu a obsahu

⁸¹ Úloha byla inspirována úlohou na výpočet obvodu, která byla součástí didaktického testu jednotné přijímací zkoušky na osmiletá gymnázia pro rok 2023 (Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání – Oddělení analýz, 2023, s. 7).

Všichni žáci správně určili obvod zahrady z obrázku 22. Jako kritické místo se však ukázala volba jednotky při výpočtu obsahu této zahrady. Na obrázku 23 je patrné, že žáci počítají obsah zahrady, nicméně jednotka, ve které ho počítají, nemá stejnou dimenzi jako daná míra. Žákům tedy chybí uvědomění si, že podstatou zjišťování míry je násobení příslušných délek a jejich jednotek ($2 \text{ sloní nohy} \cdot 2 \text{ sloní nohy} = 4 (\text{sloní nohy})^2$ ⁸²).

5.2.2 Anotace

Kontext výukové situace

Sledovaná vyučovací hodina matematiky byla realizována na začátku školního roku 2023/2024 na ZŠ Dobrá. Ve třídě bylo přítomno 20 žáků, asistent pedagoga a učitel Šťastný. Dle učitele Šťastného bylo cílem vyučovací hodiny „opakovat rovinné útvary, jejich obvod a obsah; tělesa a jejich povrch“. Učitel během vyučovací hodiny čerpal z vlastních zdrojů, úlohy, které žáci řešili, vymyslel sám. V učebnici Hravá matematika 6 – Geometrie (Matasová et al., 2019), ze které učitel Šťastný vycházel, se jedná o kapitoly Obvod a jednotky délky, Obsah a jednotky obsahu a Povrch krychle a kvádrů.

Didaktické uchopení obsahu – činnosti učitele a žáků

Část 1: Opakování – obvod a obsah rovinných útvarů (0:00–8:45)

Na začátku vyučovací hodiny položil učitel žákům otázku týkající se toho, co se v posledních měsících (2. pololetí 5. ročníku, 1. pololetí 6. ročníku) z geometrie naučili. Od žáků zaznělo, že se již učili „sít a povrch krychle, operace s úsečkami, rovnoběžník, povrch kvádrů, obvody a obsahy, souřadnice bodů, střed a osu úsečky“. Učitel se v návaznosti na tyto odpovědi tázal, u jakých rovinných útvarů žáci umí spočítat obvod a obsah. Tabulky 14 a 15 zachycují pedagogickou komunikaci během této diskuse. Záznam s titulky této části výukové situace 1 a 2 nalezne čtenář také online na: <https://drive.google.com/file/d/1TcYJoM11YhgwACXdZapJNbgBkHCfJkYb/view?usp=sharing> a https://drive.google.com/file/d/1RNJO37O6Nr9veL1qfT1GRkHqW_vDDisIV/view?usp=share_link.

⁸² „Výsledek“ $4 (\text{sloní nohy})^2$ nepovažujeme za správný. Vzhledem k tomu, že pracujeme s „jednotkou“, kterou vymyslela autorka této rigorózní práce a nejedná se o ustálený symbol, úloha nemá předem stanovené správné řešení. Řešení tedy bylo pro žáky otevřené, snažili jsme zjistit, zda žáci jakýmkoliv způsobem rozliší jednotku délky a obsahu vzhledem k jejich dimenzi. Očekávali jsme např., že žáci pojmenují jednotku obsahu souslovím např. sloní noha plošná/plochy/obsahu.

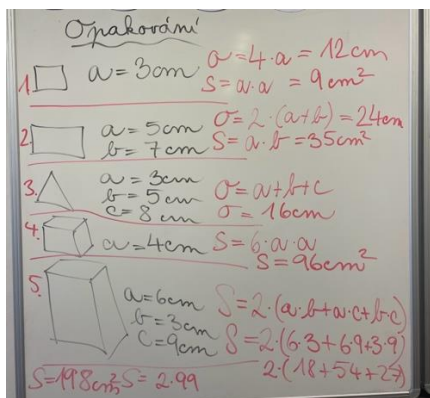
Tabulka 14 Pohled do výuky 1 – Didaktická kazuistika 2

<p>Výuková situace 1 – učitel Šťastný (U), žáci (Ž1–Ž6) (0:24–1:54) počet slov učitel: 124; počet slov žáci: 26, počet zapojených žáků: 6</p>
U: „Obvody a obsahy u čeho?“
Ž1: „U trojúhelníku.“
U: „Ano, u trojúhelníku jsme se naučili obvod, hlásíme se. Pak jste se naučili obvod a obsah u...?“
Ž2: „Kvádru.“
U: „To jste se naučili povrch, jo.“
Ž3: „Souřadnice bodů.“
U: „Ano, to je další téma, které jsme se učili. Ale mě teď zajímá, u čeho jste se učili obvod a obsah, se tě ptám.“
Ž4: „No u tý krychle.“
Ž5: „U čtverce a obdélníku.“
U: Výborně, u čtverce a obdélníku. U trojúhelníku jsme se naučili pouze...?“
Ž5: „Obvod.“
U: „Ano, obvod. Povrch jsme se naučili u jakých těles?“
Ž6: „U krychle.“
U: „A...?“
Ž6: „U kvádru.“
U: „Výborně, u krychle a kvádru. Jaký je rozdíl mezi tvarem a tělesem?“
Ž4: „Na těleso si můžu sáhnout, na tvar ne.“
U: „Výborně, na těleso si můžu sáhnout, je prostorové, proto u něj určujeme povrch, to, co je na něm, na tom tělese. Ale u tvaru určujeme pouze obvod a obsah. To, co je kolem a nebo to, co je v něm.“

Tabulka 15 Pohled do výuky 2 – Didaktická kazuistika 2

Výuková situace 2 – učitel Šťastný (U), žáci (Ž1–Ž6) (2:50–6:14) počet slov učitel: 140; počet slov žáci: 37, počet zapojených žáků: 5
U: „Dneska si dáme takový opáčko. Dáme si obvod a obsah, nějaké příklady jenom na souhrnné opakování, abychom si to trošku procvičili a podíváme se na to. Nejdříve si vypočítáme, napište si klidně jako nadpis opakování. A to, co vám teď píšu, tak si prosím udělejte, to si napíšete a já vám řeknu, co bude vaším úkolem, asi už možná tušíte. Vyznáte se v tom? Tyto údaje patří ke čtverci, obdélníku, trojúhelníku, ke krychli a kvádru. Vaším úkolem bude vypočítat obvod a obsah u čtverce, obvod a obsah u obdélníku, obvod u trojúhelníku, povrch u krychle a povrch u kvádru. Pojdme si zopakovat vzoreček pro obvod a obsah ...“
Ž7: „Počkat, já to ještě nemám.“
Ž8: „Já také ne.“
U: „Dobře, tak já vám dám teď čas.“
Ž9: „Paní učitelko, ale jak to, že tady je u trojúhelníku a, b, c , dyť dvě strany mají být stejné, ne?“
U: „To není pravda.“
Ž9: „Aha, jo.“
U: „Jaké máme druhy trojúhelníků? Když už jsme u toho.“
Ž5: „Rovnostranný, rovnoramenný a obecný.“
U: „Obecný, rovnoramenný a rovnostranný. Jaký je trojúhelník obecný?“
Ž10: „Že jsou všechny jiný?“
U: „Ano, všechny strany jsou jiné.“

Dále třída diskutovala o délkách stran trojúhelníku rovnoramenného a rovnostranného. Podařilo se jim správně určit počet shodných stran u rovnoramenného i rovnostranného trojúhelníku, nicméně tyto poznatky dále nebyly propojeny s výpočtem jejich obvodu. Poté žáci pokračovali v opisování zadání příkladů z tabule (obr. 24 černé písmo) do svých sešitů. Po zápisu se třída pustila do řešení zadaných příkladů. Z lavic se od dvou žáků ozvalo, že je pro ně hledání řešení poměrně náročné.



Obrázek 24 Zápis učitele Šťastného na tabuli

Část 2: Zadání a řešení příkladů pro žáky (8:45–28:51)

Třída společně zopakovala některé geometrické vzorce. Během společného opakování učitel Šťastný zmíněné geometrické vzorce (červeně) dopisoval na tabuli vedle zadaných rozměrů vybraných rovinných útvarů a těles. Jak toto společné opakování probíhalo, uvádíme v tabulce 16. Záznam s titulky této části výukové situace 3 nalezne čtenář také online na: https://drive.google.com/file/d/1jaq7us7Cn49bzbvuUHaplA_-CICs8YDQ/view?usp=sharing

Tabulka 16 Pohled do výuky 3 – Didaktická kazuistika 2

Výuková situace 3 – učitel Šťastný (U), žáci (Ž2–Ž15) (9:02–11:10) počet slov učitel: 115; počet slov žáci: 44, počet zapojených žáků: 8	
U: „Pojďme si říct, jaký je obvod čtverce.“	
Ž11: „ a krát a .“	
U: „Ne, ne...“	
Ž12: „Čtyřikrát a .“	
U: „Jaký je obsah čtverce?“	
Ž9: „ a krát a .“	
U: „Jaký je obvod obdélníku?“	
Ž13: „Dvakrát a krát b .“	
U: „Dvakrát a plus b . Jaký je obsah obdélníku?“	
Ž14: „ a krát b .“	
U: „Jaký je obvod u trojúhelníku?“	
Ž15: „ a krát b krát, teda a plus b plus c .“	
U: „Výborně, jaký je povrch krychle?“	
Ž3: „Šestkrát a krát a .“	

U: „Výborně. A jaký je povrch kvádrů?“
Ž2: „Dvakrát a krát b ...“
U: „Pozor, jo pardon.“
Ž2: „...krát b plus a krát c plus b krát c .“
U: „Super, opravdu vlastně nejtěžší, ale vlastně se jedná, máme vzorečky, ale stále se jedná pouze o to, že dosazujeme ty jednotky do toho daného vzorečku. Takže když mám $a = 6$, dosadím za a šest do toho vzorečku. Když mám $b = 3$, dosadím za b tři... Takže dosazují ty jednotky za ty písmena a poté s tím počítám. Co má přednost? Včera jsme si kreslili domeček s přednostmi. Co má jako první přednost?“

Žáci správně určili pořadí matematických operací a závorek. Poté se pustili do počítání úkolů 1 až 5. Učitel Šťastný se během jejich samostatné práce procházel po třídě, sledoval práci žáků a dopomáhal některým žákům k nalezení správného řešení. Samostatná práce žákům trvala přibližně 10 minut, poté byla ukončena a učitel Šťastný přistoupil ke společné kontrole výsledků.

Část 3: Společná kontrola žakovských řešení (28:51–39:56)

Během společné kontroly učitel Šťastný vyvolával žáky, ti měli za úkol přečíst svá řešení zbytku třídy. Správný výsledek pak vždy učitel Šťastný zapsal na tabuli vedle příslušného geometrického vzorce (obr. 24). Během kontroly výsledků se objevilo několik žakovských miskonceptů, zpětná vazba učitele na tyto miskoncepty neobsahovala racionální argumentaci, „pouze“ korekci těchto miskonceptů. Pedagogickou komunikaci během společné kontroly uvádíme v tabulce 17. Čtenář záznam s titulky této části vyučovací hodiny nalezne také na:

<https://drive.google.com/file/d/1rUIsDtG2OyrFq8BIEF4NHb014mZoQZUz/view?usp=sharing>.

Tabulka 17 Pohled do výuky 4 – Didaktická kazuistika 2

Výuková situace 4 – učitel Šťastný (U), žáci (Ž1–Ž20) (31:42–35:31) počet slov učitel: 81; počet slov žáci: 37, počet zapojených žáků: 13
U: „Jaký vyšel obvod u čtverce?“
Ž1: „12 cm.“
U: „Ano, kolik vyšel obsah čtverce?“
Ž10: „9 cm.“
U: „Jakých ale?“

Ž7: „Krychlových.“
U: „Ne, ne, pozor, jsme u plochy a to je...?“
Ž13: „Čtverečnicích.“
U: „Ano, 9 centimetrů čtverečnicích. Jaký vyšel obvod u obdélníku?“
Ž8: „24 cm.“
U: „Ano, 24 centimetrů. Jaký vyšel obvod, tedy pardon obsah u obdélníku?“
Ž5: „35 centimetrů čtverečnicích.“
U: „Výborně, jaký je obvod u trojúhelníku?“
Ž3: „To nevím.“
Ž12: „16 centimetrů.“
U: „Jaký vyšel povrch krychle?“
Ž6: „96 centimetrů.“
U: „6krát 4 je ...?“
Ž9: „24krát 4 je 96.“
U: „Výborně, 96 centimetrů čtverečnicích. Jaký vyšel? Doplníme si to do toho. Pojďme doplnit správné jednotky.“
Ž11: „6krát 3 plus 6krát 9 plus 3krát 9.“
U: „Super, pojďme si spočítat, jak to je.“
Ž13: „18, 54, 27.“
U: „To dáme dohromady a vynásobíme dvěma.“
Ž20: „198 centimetrů čtverečnicích.“

Po společné kontrole zadal učitel Šťastný další samostatnou práci, žáci měli za úkol určovat povrch krychle a kvádrů, přičemž zadány byly délky hran těchto těles. Tento úkol se třídě již nepodařilo z časových důvodů společně zkontrolovat. Kontrola této aktivity byla tedy přesunuta do následující vyučovací hodiny, proto tuto část dále neuvádíme.

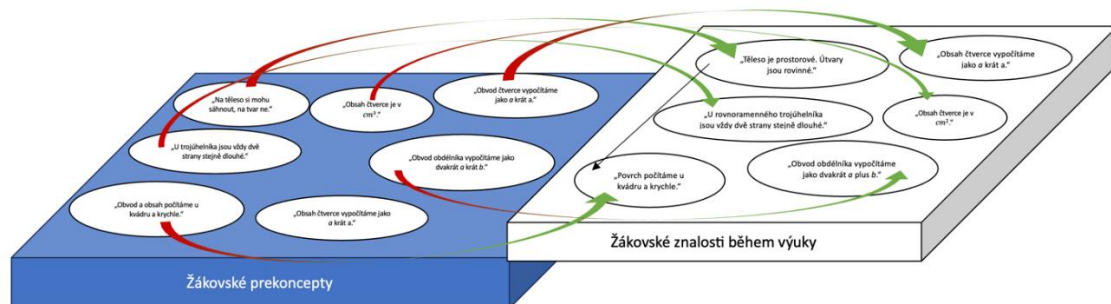
5.2.3 Analýza

Strukturace obsahu

K základnímu popisu využijeme námi upravený model hloubkové struktury výuky, který je složen ze tří vrstev. Jako první představíme tematickou vrstvu, která disponuje fenomény, jež jsou nejbližší smyslové zkušenosti žáků. V našem případě jde o žákovské prekoncepty týkající se především výpočtu obvodu trojúhelníka; obvodu, obsahu čtverce

a obdélníka a povrchu krychle a kvádru pomocí geometrického vzorce. Zároveň jsme do žákovských prekonceptů zařadili jeden ze žákovských miskonceptů, který se shodoval s miskonceptem uvedeným v didaktické kazuistice 1 v tabulce 9. Tento miskoncept se týkal prototypů trojúhelníka. Během výzkumu jsme totiž zjistili, že alespoň pro dva žáky 6. ročníků na ZŠ Dobrá byl a možná stále je prototypem pojmu trojúhelník rovnoramenný trojúhelník. Tomu mohlo předcházet např. to, že se žáci na prvním stupni ZŠ s tímto druhem trojúhelníka setkávali často, ať už během vyučovacích hodin matematiky, nebo v učebnicích či pracovních sešitech.

S výpočty obvodu, obsahu rovinných útvarů a povrchu těles pomocí vzorce již měli žáci tohoto 6. ročníku zkušenosti z předchozích vyučovacích hodin. Můžeme předpokládat, že byli žáci seznámeni také s významem pojmů obvod, obsah a povrch. Od žáků však během této vyučovací hodiny zazněla mnohá tvrzení, jež bylo potřeba poupravit či blíže specifikovat. Učitel Šťastný během výuky prováděl korekce těchto tvrzení, ty jsou naznačeny i v tematické vrstvě viz obr. 25.

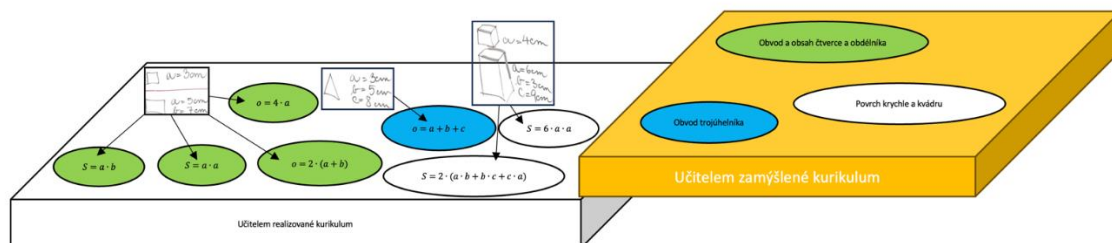


Obrázek 25 Tematická vrstva⁸³ – Didaktická kazuistika 2

Druhá vrstva, tj. konceptová (obr. 26), obsahuje strukturu obsahu výuky této vyučovací hodiny. V našem případě se jedná především o výpočet obvodu a obsahu základních rovinných útvarů a povrchu některých těles. Učitel Šťastný zadal rozměry vybraných rovinných útvarů a těles, se žáky poté zopakoval vzorce na výpočet obvodu, obsahu a povrchu. Žáci měli za úkol samostatně do vzorců dosadit délky příslušných stran rovinných útvarů či hran těles. Reálný kontext tyto úkoly neobsahovaly. Z důvodu přehlednosti jsme u této konceptové vrstvy nevyužívali šipky, stejnou barvou jsme však označili učitelem realizované kurikulum, které přispělo k naplnění učitelem zamýšleného

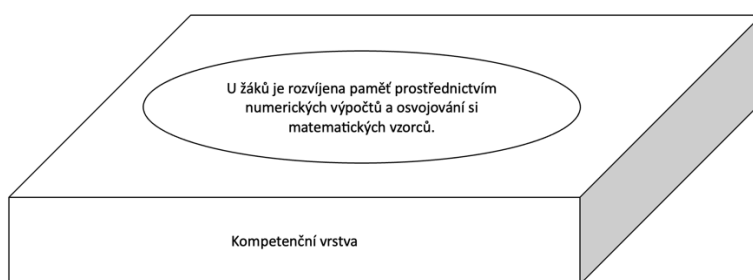
⁸³ V tematické vrstvě uvádíme tvrzení učitele Šťastného či žáků v uvozovkách vzhledem k tomu, že některá tvrzení či pojmy nebyla korektní či nebyly korektně využita.

kurikula. Z obrázku 26 se zdá, že se učitel Šťastnému podařilo přispět k naplnění předem zamýšleného kurikula.



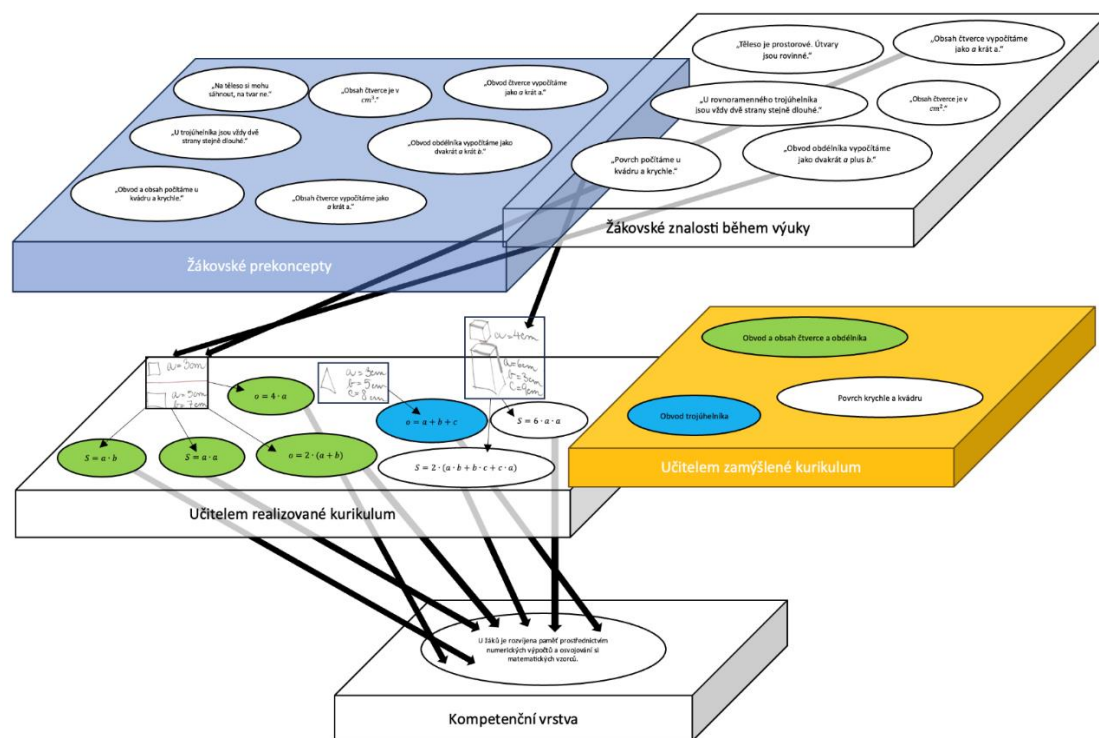
Obrázek 26 Konceptová vrstva – Didaktická kazuistika 2

Třetí, kompetenční vrstva (obr. 27) je standardně tvořena nadoborovými kompetencemi. V našem případě budeme vycházet z kompetencí, které plánoval učitel Šťastný rozvíjet během této vyučovací hodiny (viz tab. 12). Do diagramu hloubkové struktury zařadíme pouze ty, které autorka této rigorózní práce a učitel Šťastný vyhodnotili po této vyučovací hodině jako takové, k jejichž rozvoji skutečně vyučovací hodina přispěla. V dotazníkovém šetření 1 učitel Šťastný plánoval rozvíjet poměrně široké spektrum kompetencí. Vzhledem ke zdravotní indispozici zvolil nakonec samostatnou práci žáků, která přispěla především k rozvíjení paměti žáků prostřednictvím numerických výpočtů a osvojování si matematických vzorců. Tuto kompetenci jsme tedy uvedli do kompetenční vrstvy jako jedinou.



Obrázek 27 Kompetenční vrstva – Didaktická kazuistika 2

Na závěr všechny tyto vrstvy (obr. 25, obr. 26, obr. 27) propojíme do jednoho společného modelu hloubkové struktury (obr. 28) výukové situace.



Obrázek 28 Diagram hloubkové struktury – Didaktická kazuistika 2

Pro přehlednost jsou vynechány šipky na úrovni vrstev, nicméně jejich platnost je neměnná.

Rozbor transformace obsahu s výhledem k alteraci

Zde budeme analyzovat vybrané části vyučovací hodiny matematiky vedené učitelem Šťastným. Vzhledem k tomu, že je naším cílem kulturu vyučování a učení kultivovat, zaměříme se především na momenty vyžadující změnu. Než tak učiníme, zmíníme pozitivní momenty této výukové situace. Učitel Šťastný vytvořil ve třídě optimální pracovní klima a na začátku vyučovací hodiny se žáky zjednodušeně teoreticky ukotvil pojmy těleso a rovinný útvar a následně zadal k řešení přiměřené úlohy. Ty navíc doplnil o obrázky rovinných útvarů a těles, což pravděpodobně mohlo některým žákům pomoci při vybavování si geometrických vzorců na výpočet obvodu, obsahu či povrchu. Učitel Šťastný zároveň zapojil do pedagogické komunikace ve třídě všechny žáky a nezavrhoval jejich chybná či nepřesná tvrzení. Úlohy, které byly žákům zadány, měly stručné a jasné zadání, všichni žáci mu porozuměli a na řešení pracovali samostatně. Následovala společná kontrola, při které si každý žák své řešení samostatně kontroloval. Většině žáků se podařilo najít správná řešení všech úloh, tuto část vyučovací hodiny tedy můžeme považovat za motivační.

Část 1: První část výukové situace 1, která byla vybrána k analýze, byla věnována opakování pojmů těleso a rovinný útvar. Žáci během této diskuse volili rovinné útvary či tělesa, u kterých již uměli vypočítat obvod, obsah či povrch. V tabulce 14 jsme uvedli pedagogickou komunikaci, která mezi učitelem Šťastným a žáky probíhala. Hned na začátku vyučovací hodiny od žáků 2 a 4 zaznělo, že by „obsah a obvod počítali u kvádrů a krychle“. Učitel Šťastný provedl korekci těchto tvrzení tak, že „u kvádrů a krychle se žáci naučili počítat povrch“. Vzhledem k tomu, že korekci chybného tvrzení nepředcházely další otázky či identifikace a interpretace chyby, můžeme pouze polemizovat o tom, co je příčinou tohoto miskonceptu. Žáci by např. nemuseli znát přesný význam některého z těchto pojmů: krychle, kvádr, obsah, obvod.

Dále žáci i učitel zmínili pojem tvar. Slovník spisovného jazyka českého definuje tvar jako „vnější sestavu základních prvků obrazce nebo tělesa (např. tvar čtverce, kruhu, miskovitý, kulovitý)“ (Havránek et al., 2011). V případě, že chceme hovořit o „souboru geometrických prvků (bodů, přímek, rovin)“, využíváme pojem (geometrický) útvar (Havránek et al., 2011). Rovinné útvary zobrazujeme na rovinné nákresně v jejich pravém tvaru, nicméně útvary prostorové nelze takto zobrazovat (Močnik, 1875).

Část 2: Výuková část 2 zachycuje průběh zadávání úloh žákům k samostatné práci. V tabulce 15 je uvedena pedagogická komunikace, která během zadávání mezi žáky a učitelem Šťastným probíhala. Na začátek budeme specifikovat pojem jednotka, který učitel Šťastný využívá, hovoří-li o dosazení konkrétního rozměru do geometrického vzorce na výpočet obvodu, obsahu nebo povrchu. Slovník spisovného jazyka českého jednotku definuje jako „číslici 1“ nebo „známku prvního klasifikačního stupně“. (Havránek et al., 2011) Jednotku míry pak definuje jako „...dílec na teploměru nebo na jiné stupnici“ nebo také „jednotku míry pro úhel“. (Havránek et al., 2011) S jistotou však můžeme říci, že za jednotku nemůžeme považovat konkrétní délku strany geometrického útvaru či hrany tělesa.

Jak jsme již zmínili, podobně jako v didaktické kazuistice 1 se zde setkáváme s problematikou týkající se výpočtu obvodu u obecného trojúhelníka. Žák 9 v komunikaci polemizuje o správnosti zadání, které učitel Šťastný zapsal na tabuli. Zdálo se mu totiž, že je zadání tří délek stran u trojúhelníka nadbytečné vzhledem k tomu, že by „trojúhelník měl mít dvě strany stejně dlouhé“. Učitel toto tvrzení označil za nepravdivé, i přestože je pravdivé pro rovnoramenný trojúhelník. Pro žáka 9 byl rovnoramenný trojúhelník

prototypem trojúhelníka. Tuto problematiku žákovského porozumění pojmům a jevům můžeme označit za žákovské pojetí učiva⁸⁴. Žák má tendenci dělat chyby, v případě, že je daný objekt v jiné než prototypové formě. (Cutugno & Spagnolo, 2002) Tuto problematiku žákovského porozumění pojmům a jevům můžeme označit za žákovské pojetí učiva⁸⁵. Autoři Průcha, Walterová a Mareš uvádějí, že toto pojetí „...se nevytváří jen na základě té podoby učiva, která je či byla prezentována ve výuce učitelem, učebnicí aj., ale často na základě naivních teorií dítěte, jež nemusí být v souladu s výukovou podobou učiva“. (2009, s. 389) Tyto prekoncepty, tzn. představy o pojmech a jevech, které si žáci osvojili již dříve, neradi mění, často je vnímají jako pravdivé. (Robová et al., 2019) Prekoncepty tedy mohou představovat překážku při učení ve chvíli, kdy dochází ke střetu mezi nimi a tím, co se zrovna žák učí. (Kalhous et al., 2009) Častým důvodem nesprávných představ pojmů u žáků bývají také tzv. formální znalosti uchované pouze v paměti žáka. Žák k těmto znalostem nemá vytvořené adekvátní modely. (Hejný & Kuřina, 2009)

Část 3: Třetí část výukové situace uváděl učitel Šťastný otázkou: „Jaký je obvod čtverce?“ Žák 11 na tuto otázku obratem odpověděl, že by obvod čtverce vypočítal jako „ a krát a “. Předpokládáme, že učitel Šťastný očekával odpověď $o = 4 \cdot a$, tato odpověď po chvíli zazněla od žáka 12. Stejně formulované otázky pokládal učitel Šťastný v průběhu celé výukové situace 3, tázal se na obvod obdélníka, trojúhelníka, obsah čtverce a obdélníka a povrch krychle a kvádrů. Jeden z žáků uvedl, že by obvod obdélníku vypočítal jako „ $o = 2 \cdot a \cdot b$ “. Učitel Šťastný jeho odpověď opravil na „dvakrát a plus b “. Na otázku: „Jaký je obvod/obsah/povrch konkrétního rovinného útvaru či tělesa?“ existuje více správných odpovědí (např. obvod čtverce je menší než 20 cm). Tento dotaz není dostatečně konkrétní na to, aby jedinou správnou odpovědí na něj byl vzorec na výpočet obvodu, obsahu či povrchu konkrétního rovinného útvaru či tělesa. To znamená, že žáci již předem věděli, že od nich učitel Šťastný očekává odpověď ve formě geometrického vzorce na výpočet obvodu, obsahu či povrchu. Můžeme tedy předpokládat, že již podobnou aktivitu během vyučovacích hodin matematiky s učitelem Šťastným absolvovali. Vzhledem k tomu, že učitel Šťastný odpověď formou vyřčení

⁸⁴ Soubor žákovských poznatků, představ, přesvědčení, emocí i očekávání souvisejících s učivem, tento soubor se v čase mění (Čáp & Mareš, 2001).

⁸⁵ Soubor žákovských poznatků, představ, přesvědčení, emocí i očekávání souvisejících s učivem, tento soubor se v čase mění. (Čáp & Mareš, 2001)

vzorci na výpočet obvodu, obsahu či povrchu rovinného útvaru či tělesa považoval za správnou, můžeme tyto otázky zařadit do otázek nižší kognitivní náročnosti⁸⁶.

Hejný (2014) uvádí, že při zavádění geometrických vzorců (na výpočet obvodu, obsahu, povrchu rovinných útvarů či těles) do výuky matematiky na 1. či při přechodu na 2. stupeň základní školy, dochází k prvotnímu vytváření vztahu žáka k jazyku písmen. „Většina žáků si však osvojí pouze manipulativní dovednosti a standardní použití písmen v nacvičených situacích. Jen málo žáků si uvědomí obrovskou sílu tohoto jazyka a bude schopno tímto jazykem „mluvit s matematikou“ a řešit pomocí tohoto jazyka složité úlohy.“ (Hejný, 2014, s. 58) Pozorujeme-li pedagogickou komunikaci ve výukové situaci 3 (tab. 16), především tedy promluvy žáků, nabízí se otázka, zda se učitel Šťastný nesnaží dávat tento silný nástroj poznávání matematiky příliš brzy, bez toho, aby sami žáci cítili potřebu tohoto jazyka.

Část 4: Výuková situace 4 zachycuje společnou kontrolu žákovských řešení. Učitel Šťastný se dotazuje na numerické výsledky obvodů, obsahů a povrchů konkrétních rovinných útvarů či těles. V této komunikaci si můžeme u některých žáků všimnout nejistoty při volbě jednotky míry, která je pro konkrétní numerická řešení správná. Zároveň měli žáci k dispozici obrázky čtverce, obdélníka, trojúhelníka, krychle i kvádrů, ve kterých byly dány velikosti stran či hran. Žákům tedy „stačilo“ dosadit do vzorců, které předem společně s učitelem Šťastným uvedli na tabuli. Písmena a, b, c na obrázku 24 „zastávají“ roli stručných jmen (plná jména délka, šířka, výška), Hejný (2014) je označuje pojmem *kódy*. Tato písmena přispívají mentálně nejméně náročnou silou jazyka písmen, protože jsou předem dána. Žáci měli tedy pouze za úkol tato písmena evidovat a dosadit za ně čísla. Navzdory nízké kognitivní náročnosti úkolů, někteří žáci nebyli schopni nalézt správné řešení. Miskoncepty se u žáků objevovaly v některých dimenzích pojmotvorného procesu míry v geometrii: *jednotce míry*, konkrétně ve výběru jednotky míry; *numerických procesech*, konkrétně při uvědomění si atributů, na kterých míra záleží, povahy vztahu mezi nimi, koordinaci vizuální a číselné reprezentace míry; *algebraických reprezentacích*, konkrétně ve vyjádření vzorcem a uvědomění si vztahů mezi vzorci pro základní útvary. (Vondrová et al., 2015, s. 255)

⁸⁶ „Jsou takové otázky, jež jsou zaměřeny na doslovné vybavení si faktu, který byl již alespoň jednou v nějaké podobě učitelem prezentován. Tento typ otázek koresponduje s úrovněmi znalost a pochopení dle Bloomovy tabulky.“ (Švaříček, 2011, s. 20)

5.2.4 Alterace

Posouzení kvality výukové situace

Tato výuková situace probíhala formou společné práce žáků ve třídě s dominantním postavením učitele Šťastného, který řídil, usměrňoval a kontroloval aktivity žáků. (Maňák & Švec, 2003) Tuto formu výuky můžeme označit za výuku frontální. Učitel Šťastný postupně vyvolal všechny žáky ze třídy, ti na jeho otázky reagovali.

Budeme-li vycházet z konstruktivistického pojetí vyučování (desatera konstruktivismu), jakožto odborníky a výzkumníky doporučeného přístupu k vyučování matematice (kap. 2.4) ve 21. století, dojdeme k následujícímu shrnutí této výukové situace: Žáci a učitel Šťastný během této vyučovací hodiny vykazovali aktivitu, tzn. řešili úlohy a dotvářeli představy o pojmech jim již dříve známých. Ve vyučovací hodině nebyly poznatky konstruovány, žáci „hledali v paměti“ jim již známé návody (geometrické vzorce), jak postupovat. Následně dle těchto návodů postupovali. Během vyučovací hodiny nebyly předávané informace podmíněny zkušenostmi žáků. Nebyl zmíněn žádný příklad z reálného světa žáků. Klima třídy bylo příjemné, nicméně nebyl zde dostatek prostoru pro žákovskou tvořivost, program vyučovací hodiny byl striktně stanoven. Žáci měli k dispozici u každé úlohy jednu vizuální reprezentaci (obrázek rovinného útvaru či tělesa). Tato vyučovací hodina byla zaměřena na zvládnutí matematického řemesla, které je nezbytnou součástí vzdělávacího procesu v matematice. „Rozvíjení matematického řemesla vyžaduje trénink a případně i paměťové zvládnutí určitých pravidel, algoritmů a definic.“ (Hejný & Kuřina, 2001, s. 159)

Za aspekt výuky vyžadující zlepšení považujeme podobně jako v didaktické kazuistice 1 pedagogickou komunikaci, konkrétně práci učitele Šťastného s žákovskými chybami, které vznikly při pedagogické komunikaci. Učitel Šťastný poskytoval direktivní zpětnou vazbu na žákovská nesprávná tvrzení bez další argumentace či otázek. (Kosíková & Černá, 2013)

Dále bychom doporučili zařadit více druhů reprezentací. Při psychodidaktické transformaci (zpřístupňování a přibližování vzdělávacího obsahu žákům) obsahu by měla být zajištěna návaznost na kognitivní možnosti a subjektivní zkušenosti žáků. Právě koncept reprezentací je jedním ze způsobů, jak zajistit návaznost na kognitivní možnosti žáků. (Janko, 2012) Slovo reprezentace je složeno z předpony *re-* (znovu) a z latinského slova *praesento* (představovat, zpřítomňovat). Jeho význam tedy odkazuje k tomu, že

něco opětovně představujeme či zpřítomňujeme. V případě didaktické kazuistiky 2 by se jednalo o znovu zpřítomnění důvodů, proč jsou geometrické vzorce uváděny v podobě, v jaké je měli někteří žáci v paměti. Reprezentace tedy zároveň slouží jako nástroj, pomocí kterého aktivně reprezentujeme aspekty vnějšího světa. Tyto aspekty poté v mysli jedince utváří strukturu poznatků, která ovlivňuje zpracování, organizování a zapamatování nových informací. (Ruisel & Ruiselová, 1990) Konkrétně u geometrických vzorců je zásadní, aby se žáci setkali nejprve s různými druhy reprezentací za účelem vytvořit vztahy mezi vzorcem a tím, z čeho tento vzorec vychází a k čemu odkazuje (vlastnosti geometrických útvarů a těles). V případě, že žáci ve vzorcích tápají a jejich znění jim není jasné, můžeme předpokládat, že vztah nebyl pevně vytvořen.

Na základě všech výše zmíněných aspektů výukovou situaci celkově hodnotíme jako pro žáky méně přínosnou a nerozvinutou. Nerozvinutá situace je na kognitivní úrovni dle metodiky 3A charakteristická „zapamatováním a vybavováním faktů/deklarativních znalostí“. (Janík et al., 2022b, s. 20) Naléhavost alterace souhrnně vyhodnocujeme jako vyšší než u didaktické kazuistiky 1. Toto hodnocení bylo diskutováno s učitelem Šťastným, který souhlasně v D2 uvedl, že realizovanou úrovní vzdělávacích cílů v kognitivní oblasti bylo zapamatování a vybavování a dimenzí výukových cílů v kognitivní doméně kurikula byla právě znalost faktů. Ačkoliv byla tato výuková situace vyhodnocena jako nerozvinutá, je nutné upozornit na fakt, že byla „vytažena“ z kontextu. Nemáme k dispozici záznamy z předchozích hodin, které mohly učitele Šťastného nasměrovat k nezbytné volbě převážně transmisivního pojetí výuky, zaměřeného na slovně-vizuální výukovou koncepci. (Zormanová, 2014) Žáci si během této výuky vytvořili jasné představy o geometrických vzorcích na výpočet obvodu, obsahu rovinných útvarů a povrchu některých těles. Důvodem k nezbytnosti tvorby jasných představ o geometrických vzorcích mohla být právě některá z předchozích vyučovacích hodin.

Závěr

Navrhovaná alterace se snaží nenásilně obohatit a kultivovat vyučovací hodiny matematiky. Výše jsme se pokusili stručně nastínit důležitost a přínos rozvoje pedagogických pracovníků v rámci práce s žákovskou chybou. Dále jsme apelovali na porozumění matematice, konkrétně na význam vytváření představ, pojmů, postupů, a především uvědomování si souvislostí u žáků. Kriticky jsme hodnotili ukládání informací do krátkodobé či dlouhodobé paměti bez vztahu či vazby k informacím, které již

v dlouhodobé paměti uloženy jsou (především na základě zkušeností). Zároveň jsme poukázali na význam reprezentací v procesu psychodidaktické transformace obsahu, která je běžnou pracovní činností všech vyučujících.

Na závěr zmíníme, že každá školní třída je unikátní stejně tak jako každý školní den. Zlepšování a kultivace kultury vyučování a učení se matematice na vybrané základní škole je činnost dlouhodobá a zároveň velmi náročná a v praxi ne vždy realizovatelná, proto od této kazuistiky neočekáváme, že by obratem přinesla zásadní změny v praxi, nicméně věříme, že může vést některé učitele matematiky k zamyšlení se nad dalším možným seberozvojem či kultivací vyučovacích hodin.

5.3 Didaktická kazuistika 3

V tabulce 18 uvádíme výsledky dotazníkového šetření 1 (příprava na vyučovací hodinu a didaktická analýza učiva), které vyplňoval učitel Milý před pořízením videozáznamu. V tabulce 19 uvádíme také transkripci rozhovoru, který byl s učitelem Milým proveden těsně před námi analyzovanou vyučovací hodinou matematiky.

Tabulka 18 Učitel Milý – dotazníkové šetření 1

Číslo otázky	Otázka	Odpověď
1	Délka pedagogické praxe	Méně než 5 let nebo 5 let
3	Tematický okruh	Číslo a proměnná
4-5	Učivo a jeho specifikace	Sčítání zlomků vícero způsoby
6	Očekávané výstupy dle RVP ZV 2023	M-9-1-01, M-9-1-04, M-9-1-09
7	Klíčové kompetence ⁸⁷	B, C, F
8	Úroveň vzdělávacích cílů v kognitivní oblasti	Aplikace
9	Dimenze výukových cílů v kognitivní doméně kurikula	Procedurální znalost
10	Úroveň učebních úloh	Úlohy vyžadující jednoduché myšlenkové operace s poznatky

⁸⁷ Odpovědi pro tuto otázku značíme písmeny vzhledem k délce těchto odpovědí, čtenář znění těchto odpovědí nalezne v příloze 1.

11	Úroveň vzdělávacích cílů v afektivní doméně kurikula	Reagování
12	Úroveň vzdělávacích cílů v psychomotorické doméně kurikula	Manipulace (praktická cvičení)
13	Vyučovací metoda	Metoda řešení problémů
14	Organizační forma	Hromadná (frontální) výuka
15	Didaktické pomůcky	„interaktivní tabuli, hybridní učebnici“
16	Nejčastější způsob začlenění ICT	„pomocí interaktivní tabule“
17	Náročnost rozvoje digitální kompetence u žáků při výuce matematiky	poměrně snadný
18	Žákovské prekoncepty	„Žáci znají, jak nakrájet dort či pizzu, to by jim mohlo, při práci se zlomky velmi pomoci.“
19	Žákovská kritická místa konkrétního učiva	„hledání nejmenšího společného jmenovatele“
20	Aktivizace žáků	Diskusní metoda
23	Organizační typ	Hromadné vyučování
24	Nejdelší fáze vyučovací hodiny	Aplikace
25	Důvod volby nejdelší fáze vyučovací hodiny	„Žáci již byly seznámeni s postupem, jak sčítat či odčítat zlomky, nyní je čas, znalosti aplikovat.“
27-28	Mezipředmětové vztahy	Ne

Tabulka 19 Rozhovor před vyučovací hodinou – učitel Milý

Otázka	Odpověď
Došlo k nějakým změnám v programu vyučovací hodiny matematiky po vyplnění dotazníkového šetření 1?	„Ne..“
V dotazníku jste uvedl(a), že hodláte žákům během plánované výuky zadat úlohy vyžadující jednoduché myšlenkové operace s poznatky, můžete nám zadání jedné takové úlohy přečíst?	„Do hry Fraktík zapojili Marek s Kamilou ještě Veroniku, Lukáše a Pavla. V každém kole se vzestupně uspořádají zlomky, které se opět sestavují na základě hodu dvěma

	dvacetistěny. První, tj. ten, kdo má nejmenší zlomek, zikává bod, druhý půl bodu, třetí jednu třetinu bodu, čtvrtý jednu čtvrtinu bodu a pátý nula bodů. V tabulce jsou zaznamenány body všech hráčů ve třech kolech.“ (Kašparová et al., 2023, s. 32)
Jaké pocity ve Vás aktuálně pořizování videozáznamu vyvolává? Pokuste se srovnat tento způsob reflexe např. s běžnou hospitací.	„Své vyučovací hodiny matematiky nahrávám už delší dobu, vnímám tedy tento způsob sebereflexe jako velmi užitečný v rámci profesního rozvoje.“
Co by Vám účast v tomto výzkumu mohla přinést, co od ní očekáváte?	„Pevně věřím, že mě tento výzkum znalostně a dovednostně obohatí v rámci didaktiky matematiky.“
Vnímáte tento způsob reflexe pedagogické činnosti jako přínosný?	„Určitě ano. Ve srovnání s běžnou hospitací přináší analýza pomocí metodiky 3A detailní rozbor.“

5.3.1 Teoretická východiska

Výuková situace, kterou představíme v této kapitole, je zaměřena na tematický okruh Číslo a proměnná, konkrétně na sčítání a odčítání zlomků. Na začátek stručně uvedeme některá teoretická východiska, která s obsahem této vyučovací hodiny souvisí. V anotaci, analýze a alteraci, které budou tuto kapitolu následovat, budeme z těchto teoretických východisek čerpat.

Budeme-li na zlomky nahlížet jako na učivo, které je součástí základního vzdělávání, můžeme mu přisoudit důležitost na základě toho, že jeho znalost bude žák po ukončení základního vzdělávání běžně v reálném kontextu využívat (Norton & Alibali, 2018). Z matematického hlediska jsou zlomky zároveň učivem, které tvoří důležitý základ pro další učivo v matematice zejména algebru. (Booth & Newton (2012); Booth et al. (2013), Norton & Alibali (2018), Petit et al. (2022))

„Učení se zlomkům však vyžaduje reorganizaci numerických znalostí, která umožňuje hlubší porozumění číslům, než které je obvykle získáno skrze zkušenosti s celými či přirozenými čísly.“ (Siegler et al., 2013, s. 1) Z hlediska kognitivní psychologie vyžaduje

porozumění zlomkům vyšší schopnost abstrakce než u přirozených čísel. (DeWolf, Bassok & Holyok (2015); Norton & Alibi (2018)) Nedojde-li u žáka k této reorganizaci, může se stát, že vlastnosti kladných celých čísel, popř. přirozených čísel bez nuly⁸⁸ bude považovat za vlastnosti všech čísel, tzn. např. číslo má jedinečného následovníka, je reprezentováno jediným symbolem, násobením se číslo nikdy nezmenšuje, dělením se číslo nikdy nezvětšuje. Tyto vlastnosti však pro zlomky a další číselné obory neplatí. (Siegler et al., 2013)

Geary et al. (2008, s. 50) vnímají jako pro žáky velmi problematické a těžko uchopitelné právě to, že zlomky nevytvářejí z důvodu své nekonečné dělitelnosti „fixního následovníka“ na rozdíl od sekvence přirozených čísel. „Nekonečná dělitelnost vytváří nekonečně proměnlivé strukturace a restrukturace číselného kontinua, nutí žáky uvažovat o každém čísle jako o elementu možných strukturací a volit pro řešení úlohy tu vhodnou, přičemž i ta má opět nekonečné množství ekvivalentních podob.“ (Vondrová & Rendl 2015, s. 183) Jako příklad uvedeme porovnávání dvou zlomků: $\frac{1}{2} > \frac{3}{7}$ ačkoliv $1 < 3$ a $2 < 7$, tato problematika je v zahraniční literatuře označována jako *whole number bias* (předpojatost z celých čísel) nebo *natural number bias* (předpojatost z přirozených čísel). (Norton & Alibali, 2018, s. 143) Jedním z důvodů, proč jsou zlomky pro žáky kritickým místem, mohou být tedy právě zmíněné chybné předpoklady vlastností. Dalším zdrojem obtíží mohou být samotné početní operace se zlomky⁸⁹, jejichž pravidla se opět liší od pravidel početních operací s přirozenými či celými čísly. Zlomky byly jako kritické místo matematiky u žáků na 2. stupni ZŠ vyhodnoceny také v rámci výzkumu GAČR *Kritická místa matematiky na základní škole 2011-2014* na základě stejných důvodů.

⁸⁸ „Písmenem Z označujeme celá čísla (záporná, nulu a kladná); písmenem N označujeme přirozená čísla (kladná celá čísla).“ (Carothers, 2000, s. 3)

⁸⁹ Při sčítání či odčítání zlomků je jmenovatel zlomku zachován, při násobení a dělení tomu tak není. Jsou-li zlomky představeny pouze jako části celku, mohou mít žáci problém při pochopení zlomku, ve kterém je v čitateli vyšší číslo než ve jmenovateli. (Siegler et al., 2013, s. 2) „Podle učitelů působí žákům obtíže zejména osvojení si základních početních operací, ale také operací spojených s ekvivalencí zlomků (krácení zlomků, převod mezi zlomkem a smíšeným číslem).“ Dochází také k nepochopení významu zlomku jinak, než je vztah částí a celku (např. ekvivalent operace dělení – zlomek jako podíl). S tím souvisí absence představy o vztahu mezi zlomky a desetinnými čísly. (Vondrová et al., 2015, s. 72) Žáci, kteří si osvojí jednotlivé operace zvlášť, mohou jako problematické vnímat kombinování těchto operací a použití distributivního zákona. (Vondrová & Žalská, 2013, s. 74)

Se zlomkem se zároveň žáci (nejen) základních škol setkávají ve vícero interpretacích: „zlomek jako míra⁹⁰; zlomek jako poměr⁹¹; zlomek jako operátor⁹², zlomek jako číslo⁹³.“ (Vondrová et al., 2015, s. 77) „Žáci tedy potřebují silné konceptuální znalosti čísla a číselných oborů, aby zvládli počítání, odhady a řešení problémů napříč číselnými obory.“ Aby žák korektně aplikoval početní operace je nutné, aby porozuměl základním vlastnostem čísel, byl procedurálně zdatný, plynule počítal a konceptuálně porozuměl. Zmíněné vytváří základ pro zobecněné aplikace algoritmů při řešení aritmetických a algebraických úloh. (Ketterlin-Geller & Chard, 2011) Konceptuální znalost poskytuje odpověď na otázky typu: „Co to je? Proč to je? Co to znamená? Aplikace takového typu znalosti vede k věděni, případně až k moudrosti (poznání).“ (Kučerová, 2017, s. 83) Povahou jsou konceptuální znalosti statické a mají formu tvrzení či výroků, u nichž lze určit, zda jsou pravdivé. Chceme-li získat přístup k této znalosti, je nutné porozumět smyslu daného výroku. Konceptuální znalost je na rozdíl od znalosti procedurální snáze oddělitelná od toho, kdo ji vytvořil, má tedy lepší „znovu použitelnost,“ tou míníme aplikaci, která je použitelná ve více prostředích a při více nerutinních úlohách, které žák řeší generováním nových postupů a využívá tak konceptuální znalosti. (Kučerová, 2017, s. 83-84)

Do konceptuální znalosti zlomků můžeme zahrnout, že žák ví, že „zlomky jsou čísla, která se rozprostírají od záporného do kladného nekonečna; že mezi jakýmkoliv dvěma zlomky je nekonečný počet dalších zlomků; že velikost zlomku určuje spíše vztah mezi

⁹⁰ Jedním z autorů, který vyčleňuje zlomek jako míru je Lamon (1999, 1993); přičemž zlomek jako míru může žák vidět např. na metru, teploměru, ciferníku nebo odměrném válci. Tvoří ho značky stupnice těchto nástrojů, které označují podíly celku (např. 1 metru, hodiny, litru). Dělení celku může dále pokračovat dle potřeby, zlomek ve smyslu míry je tedy spojen s procesem rozdělování. (Lamon, 1999, s. 121)

⁹¹ Zlomek jako poměr můžeme charakterizovat kontextem „část-část-celek“, což základní vztah u zlomků „část-celek“ komplikuje, tato interpretace zlomku tak může být pro žáky problematická. (Vondrová et al., 2015, s. 77)

⁹² Zlomek jako operátor znají žáci z klasických slovních úloh typu „kolik je $m \cdot n - \text{tin}$ z x ,“ u kterých si dle rozhovorů projektu GA ČR nebyli jistí, zda zadání znamená násobit či dělit číslo $x \cdot m \cdot n - \text{tinou}$ či $n \cdot m - \text{tinou}$. Problém je tedy v tomto případě způsoben korespondencí předložky „z“ s konkrétní číselnou operací. V základu definice (kmenového) zlomku je tak dělení (demonstrace např. krájení pizzy, koláče). Stane-li se však tento kmenový zlomek prototypem zlomku, „je operace násobení vyřazena ze hry“. Abychom se vytvoření takového prototypu vyhnuli, můžeme bez delší časové prodlevy začít s žáky pracovat s nekmenovými zlomky nebo zavést jako celek počet větší než jedna. (Vondrová et al., 2015, s. 78) Pro žáky bývá také poměrně obtížné přijmout zlomek jako číslo, vzhledem k jeho (oproti celým a přirozeným číslům) „neobvyklému“ zápisu $\frac{a}{b}$; $a, b \in \mathbb{Z}$; $b \neq 0$. (Vondrová et al., 2015, s. 77-78)

⁹³ Porozumění zlomku jako číslu je základem pro žákovu práci při početních operacích se zlomky a při určování ekvivalence zlomků, porovnávání a řazení zlomků. (Petit, Laird, Ebby, Marsden, 2022, s. 8-9) Zároveň je doporučováno při zavádění zlomku jako čísla zlomky opakovaně umísťovat na číselnou osu (Common Core State Standards Initiative, 2010 in Mix, Battista, 2018, s. 8), žáci tak získávají představu o jejich „velikosti“ a mnohem snáze řeší např. slovní úlohy, ve kterých je se zlomky operováno. (Mix & Battista, 2018, s. 8)

čitatelem a jmenovatelem než každé z těchto čísel samo o sobě; že velikost zlomků roste s velikostí čitatele a klesá s velikostí jmenovatele; že zlomky mohou být reprezentovány jako body na číselné ose apod.“ (Siegler & Pyke, 2013, s. 1994-1995) Procedurální znalost poskytuje odpověď na otázky typu: „Jak to probíhá? Jak se to dělá? Jak to funguje? Aplikace tohoto typu znalosti umožňuje úspěšnou realizaci nějaké akce nebo činnosti. Často je označována jako metoda či metodika, svou povahou je dynamická má formu pravidla, otázka pravdivosti v tomto případě nemá smysl. Podmínkou získání přístupu k této znalosti je provedení operace neboli spuštění procedury.“ (Kučerová, 2017, s. 83-84) Na závěr bychom pouze dodali, že konceptuální a procedurální znalosti jsou spíše póly téže škály a většina znalostí obsahuje oba aspekty. (Vondrová, Rendl a kol., 2015, s. 186) V odstavcích níže uvádíme, jak si s výukou sčítání a odčítání zlomků poradil učitel Milý.

5.3.2 Anotace

Kontext výukové situace

Sledovaná vyučovací hodina matematiky byla realizována 1. listopadu školního roku 2023/2024 na ZŠ Dobrá. Ve třídě bylo přítomno 21 žáků a učitel Milý. Dle učitele Milého bylo cílem vyučovací hodiny „aplikovat znalost operace sčítání a odčítání zlomků a poukázat na variabilitu sčítání a odčítání zlomků“. Žáci byli údajně předchozí hodinu seznámeni se způsobem, jak sčítat či odčítat dva zlomky. Vyučovací hodina, které se věnuje tato didaktická kazuistika měla být zaměřena na praktické využití sčítání a odčítání zlomků v reálném kontextu. Učitel Milý během vyučovací hodiny čerpal z hybridní učebnice Matematika 7 pro každého sedmáka a sedmačku (Kašparová et al., 2023). Úlohu, kterou žáci řešili, zachycuje obrázek 29.

Sčítání a odčítání zlomků

Do hry Fraktik zapojili Marek s Kamilou ještě Veroniku, Lukáše a Pavla. V každém kole se vzestupně uspořádají zlomky, které se opět sestavují na základě hodů dvěma dvacetistými. První, tj. ten, kdo má nejmenší zlomek, získává bod, druhý půl bodu, třetí jednu třetinu bodu, čtvrtý jednu čtvrtinu bodu a pátý nula bodů. V tabulce jsou zaznamenány body všech hráčů ve třech kolech.



	Marek	Kamila	Veronika	Lukáš	Pavel
1. kolo	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
2. kolo	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
3. kolo	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Úkoly

- Kolik bodů má každý hráč po druhém kole?
- Jaké jsou výsledky po třetím kole?
- Kolik kdo ztrácí bodů na vítěze?

Obrázek 29 Slovní úloha 1 - didaktická kazuistika 3 (Kašparová et al., 2023, s. 32)

Didaktické uchopení obsahu – činnosti učitele a žáků

Část 1: Slovní úloha 1 – sčítání zlomků (0:00 – 31:21)

Na začátku vyučovací hodiny řešila třída společně s učitelem Milým datum 1. čtvrtletní práce z matematiky. Následně učitel Milý požádal žáka 1, aby přečetl zadání slovní úlohy, kterou měla třída za úkol vyřešit. Vzhledem k tomu, že slovní zadání úlohy bylo poměrně komplexní, učitel Milý požádal žáky o rozbor slovního zadání této úlohy a o rekapitulaci tohoto zadání vlastními slovy. Tento krok provedl za účelem zjistit, jak žáci úlohu porozuměli. Tabulka 20 zachycuje, jak toto zjišťování probíhalo. Čtenář videozáznam z této části výukové situace nalezne také online na: https://drive.google.com/file/d/1WeSWasC0d9UavDISdMbcfJHoZVnZOPbB/view?usp=share_link

Tabulka 20 Pohled do výuky 1 - didaktická kazuistika 3

Výuková situace 1– učitel Milý (U), žáci (Ž2-Ž10) (8:21-12:02) počet slov učitel: 220; počet slov žáci: 48, počet zapojených žáků: 9
U: „Dokázal by mi někdo svými slovy popsat tu situaci, co se tam děje? Co tam ti lidé vůbec dělají?“
Ž2: „Hází kostkou.“
U: „Dobře, jakou kostkou? Standartní?“
Ž3: „Ne, dvacetistěn.“
U: „Tak, je to dvacetistěn. Je jedna ta kostka?“
Ž4: „Dvě.“
U: „Ano, jsou dvě ty kostky výborně. A jakou odměnu, nebo jaká pravidla tam fungují v téhle hře? Oni tedy hrají asi nějakou hru...“
Ž5: „Kdo bude první, jakože kdo má nejmenší počet, jakože toho..., no prostě nejmíň, co hodil, tak je první a dostává jeden bod, druhý dostává jednu polovinu...“
U: „Přesně tak, takže první je ten, kdo má nejmenší zlomek. Ty kostky se budou skládat z nějakých zlomků a vyhrává ten, který má ten zlomek nejmenší. Představit si to můžeme na situaci, kdybychom měli jednu standartní kostku a vy byste hodili, tak které číslo by vyhrávalo v případě této hry?“
Ž6: „Šestka.“
U: „To je to číslo právě největší a tady v té hře oni hrají na číslo...“

Ž7: „Nejmenší.“
Ž8: „Jednička.“
U: „Ano, nejmenší. Takže to můžeme připodobnit k situaci, že hodíte kostkou, ten, kdo má jedničku, tak je vítězem.“
Ž9: „A co když hodí nulu?“
U: „Jak by mohl hodit nulu?“
Ž6: „Na kostce není nula.“
U: „Na normální kostce nula není, přesně tak.“
Ž10: „Ale tahle přece není normální.“
U: „Ano, tato není normální, budou na ní asi nějaké zlomky. Každopádně víme, že ten kdo vyhraje tu soutěž dostane jeden bod, ten kdo bude druhý dostane půl bodu, ten kdo je třetí v pořadí dostane třetinu bodu, ten kdo je čtvrtý v pořadí dostane čtvrtinu bodu. A máme tuto krásnou tabulku, kde je zaznamenán počet bodů a nás teď zajímá, kolik bodů má každý hráč po druhém kole.“

Poté měli žáci za úkol určit kolik bodů mají po druhém kole hráči Marek, Kamila, Veronika a Lukáš. Ke správným výsledkům došli žáci samostatně pomocí součtů bodů jednotlivých hráčů. V případě hráče Pavla bylo již nezbytné při sčítání bodů, najít společný jmenovatel zlomků $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$. Pedagogickou komunikaci během hledání tohoto řešení zachycuje tabulka 21 a zároveň videozáznam s titulky dostupný na: https://drive.google.com/file/d/1McdUX5mpTjxsJZYAemWBjC3o211At5fO/view?usp=share_link.

Tabulka 21 Pohled do výuky 2 - didaktická kazuistika 3

Výuková situace 2– učitel Milý (U), žáci (Ž6-Ž17) (14:01-18:33) počet slov učitel: 192; počet slov žáci: 64, počet zapojených žáků: 7
U: „Nyní budeme mít Pavla a máme u něj tento součet, ten si rozebereme.“ (píše na tabuli příklad: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$). „Tento příklad si napište do sešitu a jdeme postupovat jako včera.“ (vyvolán k tabuli je žák 11)
Ž6: „Žák 11 tu včera nebyl.“
U: „Aha, tak předej fix někomu jinému.“ (Žák 11 mezitím píše na tabuli výsledek $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$). „Předej někomu.“
U: „Žák 11 tedy napsal, že jsou to dvě šestiny intuitivně. Je to správně?“

Ž12: „Není.“ (původní výsledek $\frac{2}{6}$ maže, místo něj píše $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{6}{8}$).
U: „Dokážete říci, proč žák 12 píše do jmenovatele číslo 8? Jak na to přišel(a)?“
Ž13: „Čtyři krát dva.“
U: „Dobře, takže osmička vznikne jako čtyři krát dva, ale proč zrovna osmička, proč ne čtyři krát dva krát dva?“
Ž12: „Protože on by to měl být nejmenší společný násobek.“
U: „Výborně, takže my hledáme nejmenší společný násobek čísel čtyři a dva.“ (píše na tabuli $n(4,2)$). „Vzpomene si někdo, jak se tento násobek hledal?“
Z14: „Rozložíme ta čísla na prvočísla.“
U: „Jak tomu říkáme tomu rozkladu?“
Ž15: „Prvočíselný rozklad.“
U: „U každého z čísel provedeme prvočíselný rozklad.“ (píše na tabuli $4 = 2 \cdot 2$; $2 = 2$) „Poté udělám co, když je to násobek?“
Ž15: „Převeru to na mocniny.“
U: „Ano, převedeme to na mocniny.“ (píše na tabuli $4 = 2^2$; $2 = 2^1$) „Co potom?“
Ž16: „Teď vybereme tu, která je nejvíc, což je 2^2 .“
U: „Super, no a 2^2 je kolik?“
Ž16: „Čtyři.“
U: „No, tak co teď, to vypadá jako zmatek, nejmenší společný násobek je číslo čtyři, ale v příkladu $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{6}{8}$ jsme zvolili číslo 8.“ Co by se stalo, kdybychom do jmenovatele zvolili to číslo 4?“
Ž17: „U prvního zlomku už čtvrtina je.“
U: „Ano, u prvního zlomku čtvrtinu už máme.“
Ž17: „Byl by tedy stejný. A z $\frac{1}{2}$ uděláme taky čtvrtiny.“
U: „Takže výsledek $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$. Tak, co je tedy správně?“
Ž16: „Oboje, kdybychom tamto zkrátili, tak to vyjde stejně.“
U: „Přesně tak zlomek $\frac{6}{8}$ zkrátím dvěma a dostanu také $\frac{3}{4}$.“

Vzhledem k tomu, že se poté od žáka 6 ozvalo, že řešení tohoto příkladu nerozumí, celý proces učitel Milý prošel detailně s žáky ještě jednou. Poté, co bylo vše zopakováno provedl učitel Milý shrnutí toho, co společně třída zjistila.

Pedagogická komunikace během tohoto shrnutí je zaznamenána v tabulce 22 a také ve videozáznamu, který je také online dostupný na: https://drive.google.com/file/d/1bdMSdLpeMMGIA2UK9NoCITHcV630Yz4c/view?usp=share_link.

Tabulka 22 Pohled do výuky 3 - didaktická kazuistika 3

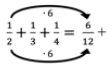
Výuková situace 3– učitel Milý (U), žáci (Ž5-Ž18) (20:09-23:21) počet slov učitel: 208; počet slov žáci: 15, počet zapojených žáků: min. 3
U: „Co nám z toho plyne? Žák 12 přišel(a) a při sčítání jedné čtvrtiny a jedné poloviny si zvolila za jmenovatele číslo 8, výsledek mu/jí vyšel správně. Poté jsme zkusili najít nejmenší společný násobek čísel čtyři a dva, to byla čtyřka, převedli jsme tedy na čtvrtiny a výsledek byl také správně. Takže, co z toho plyne?“
Ž5: „Když máme prostě jakýkoliv násobek ve jmenovateli, tak to vyjde stejně a správně.“
U: „Výborně, nám je tedy prakticky jedno, jaký násobek těch jmenovatelů do společného jmenovatele zvolíme. Jaký další násobek čísel 4 a 2 bychom mohli zvolit?“
Ž8: „Třeba 16.“
U: „Výborně, tak to pojď zkusit převést na šestnáctiny. Zda to vyjde také správně, abychom se toho potom nemuseli bát, že nezvolíme úplně nejmenší společný násobek.“
Ž8: Píše na tabuli $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{4}{16} + \frac{8}{16} = \frac{12}{16}$.
U: „Nyní si vyber někoho ze třídy, ten nám výsledek zkrátí.“
Ž18: Píše na tabuli $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{4}{16} + \frac{8}{16} = \frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.
U: „Super, takže na tabuli máme tři ukázky toho, že u sčítání zlomků je prakticky úplně jedno, jakého toho jmenovatele si zvolíte, jenom to musí být společný násobek těch čísel. Ale jaký ten způsob byl úplně nejsnazší, který nám vychází na nejméně práce? Můžeme si je označit jako a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{6}{8}$ b) $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{4}{16} + \frac{8}{16} = \frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$?“
Žáci vícehlasně: „Béčko.“
U: „Přesně tak, za b) by mělo úplně nejkratší zápis. A je to z toho důvodu, že čtyřka je nejmenší společný násobek. Nicméně napadne-li Vás jiný násobek, je to úplně jedno, pouze nesmíte zapomenout výsledek zkrátit na zlomek v základním tvaru.“

Po této pedagogické komunikaci žáci zjistili, že se jedna ze strašilek, kterou ve své třídě chovají, pohybuje mimo prostor terária. Bylo ji tedy nezbytné do terária vrátit.

Část 2: Slovní úloha 2 – sčítání zlomků (31:29–44:03)

Učitel Milý vynechal otázky 2 a 3 původní úlohy z obrázku 29. Místo nich doplnil úlohu o dalšího hráče, Lenku, která v prvním kole získala $\frac{1}{2}$ bodu, ve druhém kole $\frac{1}{3}$ a ve třetím kole získala $\frac{1}{4}$. Žáci měli za úkol spočítat kolik bodů bude mít celkem po třetím kole. Důvodem této volby, byl údajně fakt, že chtěl učitel Milý zjistit, jak si žáci poradí se součtem tří zlomků, přičemž každý z nich má ve jmenovateli jiné číslo. Tabulka 23 zachycuje, jak si žáci s řešením tohoto úkolu poradili. Čtenář videozáznam z této části výukové situace nalezne také online na: https://drive.google.com/file/d/1RGiLeW-Odr_0hinWMKC9FwuU3Y2MuYJ/view?usp=drive_link.

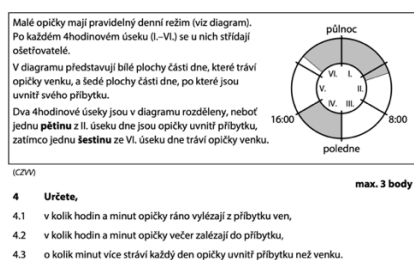
Tabulka 23 Pohled do výuky 4 - didaktická kazuistika 3

Výuková situace 4– učitel Milý (U), žáci (Ž5-Ž18) (34:03-35:24) počet slov učitel: 107; počet slov žáci: 16, počet zapojených žáků: 1	
U:	„Takže najednou máme ve hře ne dvě čísla, ale tři čísla. Napadá Vás tedy nějaký společný násobek čísel 2, 3 a 4.“
Ž6:	„12.“
U:	„Výborně, tak se pusť do toho.“
Ž6:	Píše na tabuli: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{\quad}{12}$, na chvíli se odmlčí a kouká po třídě. „Hm, přemýšlím.“
U:	„Posbírej rady po třídě.“
Ž6:	„6.“
U:	„A víš proč?“
Ž6:	„Ano, 12: 2 = 6.“
U:	„A proč je ve jmenovateli 12?“
Ž6:	„Protože se dá vydělit všema.“
U:	„Ano, číslo 12 skutečně můžeme vydělit dvěma, třemi i čtyřmi. Dobře, jdeme zápis doplnit. Jak jsem z dvojky udělala dvanáctku, násobením či dělením?“
Ž6:	„Krát 6.“
U:	„Výborně. Stejnou operaci tedy zopakuj tady nahoře.“ Zápis doplňuje o šipky. 
U:	„Nyní pokračujeme na zlomek další.“

Ž6: „Už to mám.“

U: „Tak z $\frac{1}{3}$ jsme udělali $\frac{4}{12}$ a z $\frac{1}{4}$ jsme udělali $\frac{3}{12}$. Teď to pouze posčítáme, $6 + 4 + 3$ je 13 a jmenovatel zůstává stejný, takže výsledek je $\frac{13}{12}$.“

Ve zbývajícím čase učitel Milý zadal další slovní úlohu (viz obr. 30), kterou si třída společně přečetla a žáci ji měli za úkol ve dvojicích vyřešit a připravit si prezentaci svého řešení pro své spolužáky. Žáci již svá řešení odprezentovat nestihli z důvodu konce vyučovací hodiny. Prezentace řešení učitel Milý přesunul na následující vyučovací hodinu.



Obrázek 30 Slovní úloha 2 - didaktická kazuistika 3 (MŠMT ČR, CERMAT, 2023⁹⁴)

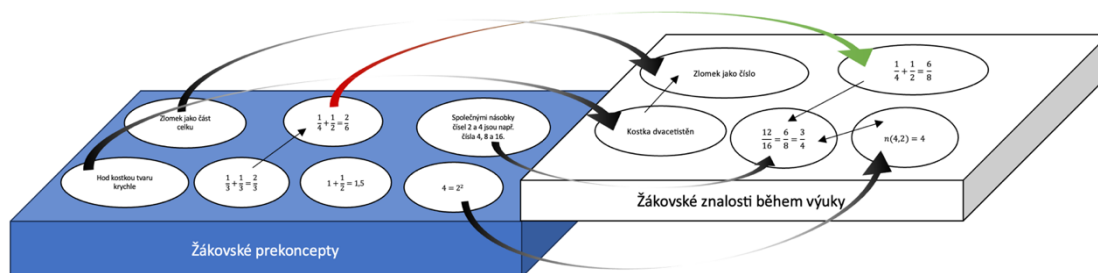
5.3.3 Analýza

Strukturace obsahu

K základnímu popisu využijeme námi upravený model hloubkové struktury výuky, který je složen ze tří vrstev. Jako první představíme tematickou vrstvu, která disponuje fenomény, které jsou nejbližší smyslové zkušenosti žáků. V našem případě jde o žákovské prekoncepty týkající se především vyjádření vztahu celek-část zlomkem a sčítání a odčítání zlomků. Žáci měli za sebou dle učitele Milého 6 vyučovacích hodin věnovaných zlomkům. Poslední vyučovací hodina, která byla zlomkům věnována, žáky seznámila se způsobem, jak zlomky sčítat či odčítat. Zavedena byla pravidla pro tyto operace se zlomky. Učitel Milý se tedy rozhodl pro aplikaci těchto pravidel při řešení slovních úloh. Do žákovských prekonceptů jsme zařadili také mocniny s přirozeným mocnitelem, vzhledem k tomu, že je z pedagogické komunikace patrné, že se žáci s tímto pojmem již setkali během seznamování se s učivem dělitelnosti. S tímto učivem jsou však žáci ZŠ Dobrá běžně seznamováni dle ŠVP až v 8. ročníku. Jako důvod zařazení mocnin s přirozeným mocnitelem uvedl učitel Milý fakt, že jeden z žáků již v 6. ročníku vznesl

⁹⁴ Dostupné online: https://prijimacky.ceremat.cz/files/files/M7D_2023_DT.pdf.

dotaz na zápis 5^6 , se kterým se setkal u svého staršího sourozence. Učitel Milý tedy žákům hromadně představil operaci umocňování jako „nástroj“, který usnadňuje zápis „líným“ matematikům (místo $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ napíše 5^6). Tento „nástroj“ žáky zaujal a jeho využití považovali za velmi „lákavé“, proto se učitel Milý, rozhodl pro jeho použití při určování nejmenšího společného násobku. Sám však konstatoval, že toto začlenění není realizovatelné ve všech třídních kolektivech.



Obrázek 31 Tematická vrstva - didaktická kazuistika 3

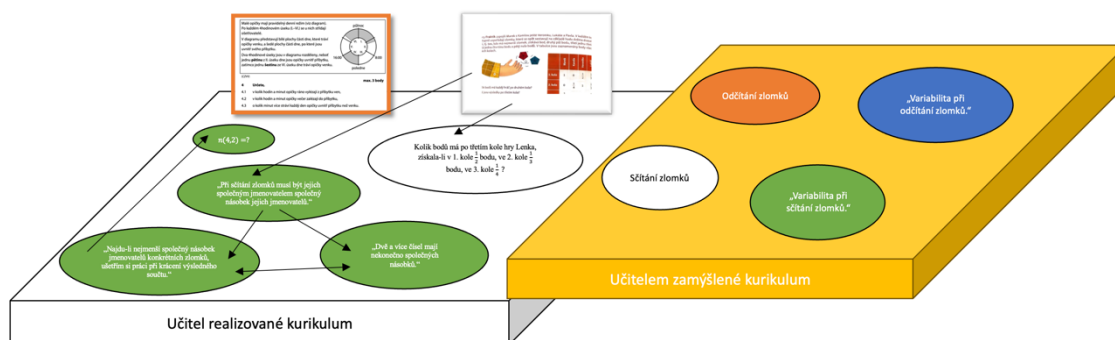
Dle šipek v tematické vrstvě můžeme konstatovat, že od žáků nezaznělo mnoho miskonceptů, u kterých by třídní kolektiv nebo učitel Milý museli provádět korekci. Miskoncept, který zmíníme, uvedl žák 11, do výsledku na tabuli napsal, že „ $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$ “. Toto řešení je příkladem žákovské předpojatosti z celých či přirozených čísel. Žák 11 sečetl čísla v číselnících a následně ve jmenovatelích zlomků $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$, výsledky pak napsal pod sebe do zlomku.

Dále v tematické vrstvě uvádíme, že se žáci během výuky setkali se zlomkem jako číslem, které je uvedeno na kostce tvaru dvacetistěnu. Učitel Milý přirovnával čísla na standardní kostce tvaru krychle se zlomky na kostce tvaru dvacetistěnu. Můžeme předpokládat, že se žákům snažil naznačit, že zlomek může fungovat jako číslo stejně jako část celku, se kterou se již žáci setkali v předchozích vyučovacích hodinách.

Žáci pomocí návodných otázek učitele Milého také našli nejmenší společný násobek čísel 2 a 4. Společně došli k závěru, že správné řešení součtu zlomků by měli najít vždy, zvolí-li společným jmenovatelem těchto zlomků libovolný násobek jejich jmenovatelů. Podaří-li se jim najít nejmenší společný násobek, ušetří tak čas krácením součtu zlomků do základního tvaru.

Druhá vrstva, tj. konceptová (obr. 32) obsahuje strukturu obsahu výuky této vyučovací hodiny. V našem případě se jedná především o řešení a rozbor slovní úlohy z obrázku 29. Učitel Milý tuto úlohu promítal na interaktivní tabuli a žáky vedl k řešení této úlohy

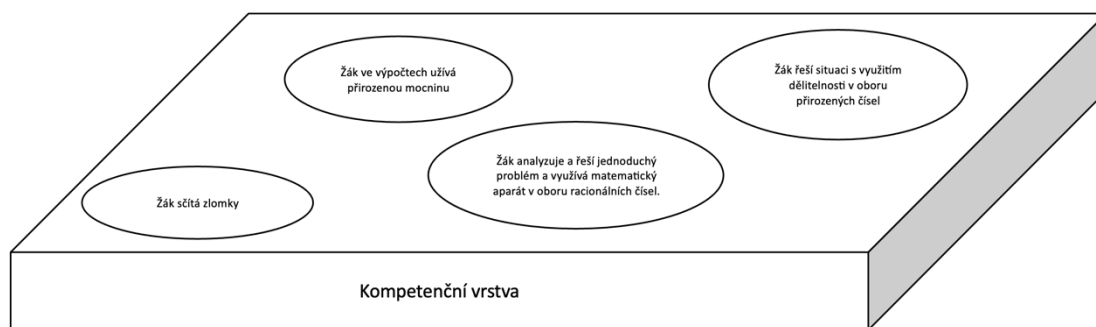
pomocí návodných otázek. Učitel Milý během své přípravy zamýšlel aplikovat znalost operace sčítání a odčítání zlomků a poukázat na „variabilitu sčítání a odčítání zlomků“. Tím mínil nekonečně proměnlivé strukturace a restrukturace číselného kontinua, tzn. např. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{20} + \frac{10}{20} = \frac{2}{8} + \frac{4}{8} = \dots$. Z důvodu přehlednosti jsme u této konceptové vrstvy nevyužívali šipky, stejnou barvou jsme však označili učitelem realizované kurikulum, které přispělo k naplnění učitelem zamýšleného kurikula.



Obrázek 32 Konceptová vrstva - didaktická kazuistika 3

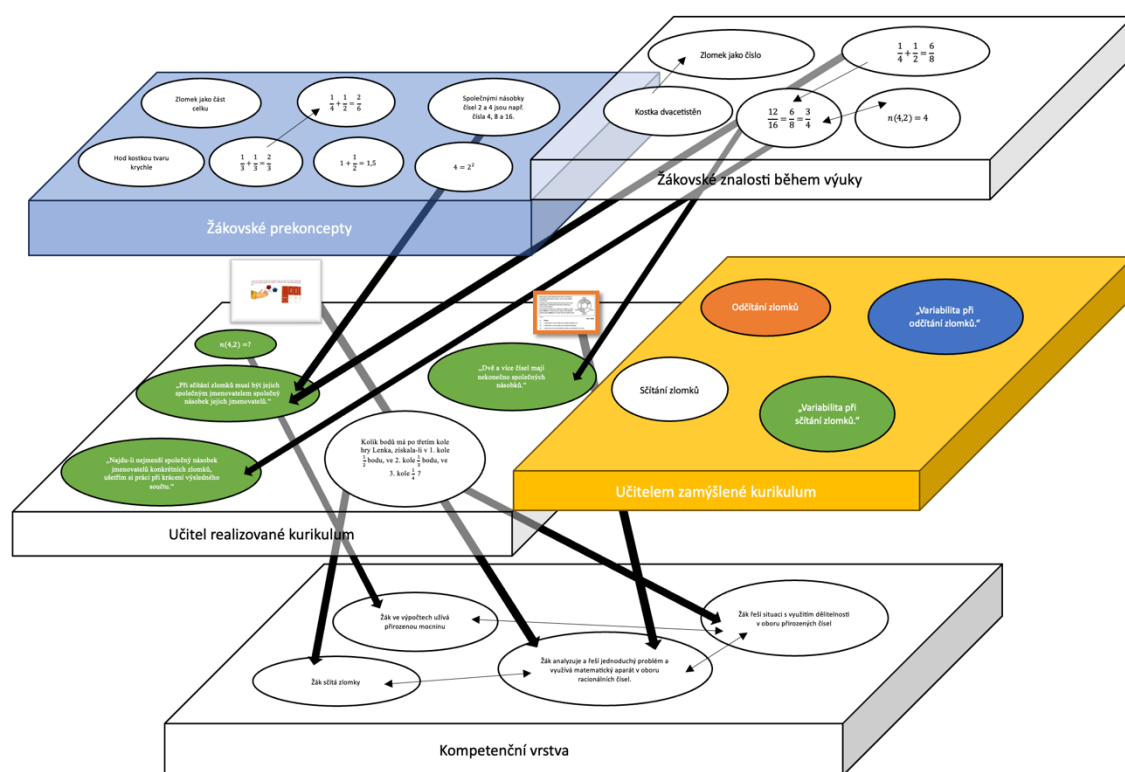
Realizované kurikulum bylo zaměřeno především na sčítání zlomků a jeho vlastnosti. Na odčítání zlomků nezbylo příliš času, můžeme se tedy pouze domnívat, že žáci zlomky odčítali při samostatném řešení 2. úlohy (obr. 32). Nekonečně proměnlivé strukturace a restrukturace číselného kontinua byly zmíněny pouze u sčítání zlomků, u odčítání zlomků nikoliv.

Třetí kompetenční vrstva (obr. 33) je standartně tvořena nadoborovými kompetencemi. V našem případě budeme vycházet z kompetencí, které plánoval učitel Milý rozvíjet během této vyučovací hodiny (viz tab. 18). V dotazníkovém šetření 1 učitel Milý plánoval cílit na tři očekávané výstupy z RVP ZV. Po zhlédnutí videa jsme jejich znění upravili, nicméně zařazeny do kompetenční vrstvy byly všechny.



Obrázek 33 Kompetenční vrstva - didaktická kazuistika 3

Na závěr všechny tyto vrstvy (obr. 31, obr. 32, obr. 33) propojíme do jednoho společného modelu hloubkové struktury výukové situace (obr. 34).



Obrázek 34 Diagram hloubkové struktury - didaktická kazuistika 3

Pro přehlednost jsou vynechány některé šipky na úrovni vrstev, jejich platnost je však i nadále neměnná.

Rozbor transformace obsahu s výhledem k alteraci

Zde budeme analyzovat vybrané části vyučovací hodiny matematiky vedené učitelem Milým. Vzhledem k tomu, že je naším cílem kulturu vyučování a učení kultivovat, zaměříme se především na momenty vyžadující změnu. Předtím než tak učiníme, zmíníme pozitivní momenty této výukové situace.

Učitel Milý vytvořil ve třídě optimální pracovní klima. Na začátku vyučovací hodiny zadal žákům slovní úlohu s reálným kontextem. Třída řešila úlohu společně, do pedagogické komunikace ve třídě se zapojili téměř všichni žáci. Učitel Milý položil během řešení mnoho otázek, které žáky při řešení naváděly a činnost jim usnadňovaly. Učitel Milý nezavrhoval chybná či nepřesná tvrzení žáků. Slovní zadání úlohy bylo poměrně obsáhlé, proto se učitel Milý rozhodl pro jeho rozbor. Cílem tohoto rozboru bylo, aby všichni žáci slovní zadání pochopili. Učitel Milý připodobnil hru Fraktík k hodu kostkou tvaru krychle, to mohlo některým žákům usnadnit uchopení obsahu této slovní úlohy.

Část 1: První část výukové situace 1, která byla vybrána k analýze, byla věnována rozboru slovního zadání úlohy o hře Fraktík. Učitel Milý sice připodobnil hru Fraktík k hodu kostkou, nicméně další část pedagogické komunikace nasvědčuje tomu, že pro žáky nebyla pravidla hry Fraktík příliš srozumitelná. Učitel Milý totiž opakoval zadání úlohy a poté se žáků zeptal, jaké číslo by muselo výherci padnout na kostce tvaru krychle (standardní s čísly 1 až 6), platila by-li stejná pravidla jako při hře Fraktík. Na tuto otázku žák 6 odpověděl: „šestka“. Sousedství nejmenší zlomek by tedy mohlo pro tohoto žáka být nesrozumitelné. Zda tomu tak skutečně bylo, mohl učitel Milý zjistit doptáním se dotyčného na to, jaký význam pro něj toto sousloví má. Učitel Milý konstatoval, že je číslo 6 na standardní kostce číslem nejvyšším, přičemž hru Fraktík vyhrává ten, kdo hodí číslo nejnižší, kterým je na standardní kostce číslo 1. Tuto diskusi doplnil žák 9 o dotaz, ve kterém se táže na situaci, ve které hráč hodí nulu. Jeden z žáků a učitel Milý na tento dotaz reagovali tak, že na „normální“ kostce nula není, nicméně žák 10 oponoval, že kostka tvaru dvacetistěnu „normální“ není. Nabízela se tedy diskuze na téma, jak zapsat nulu zlomkem.

Část 2: V této části výukové situace měli žáci za úkol sečíst zlomky $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$. Tyto zlomky jsou počty bodů, které hráč Fraktíku získal v prvních dvou kolech hry. Slovní úloha tedy představila žákům zlomek jako číslo (počet bodů a čísla na kostce). Žáci správně zvolili

početní operaci, kterou mají s body provádět. Žák 11 byl vyvolán, aby součet těchto bodů provedl. Ten považoval příklad za „skládanku“ ze dvou příkladů, na řádku prvním pro něj byl příklad $1 + 1$ a na řádku druhém příklad $4 + 2$. Aby od sebe výsledky oddělil, zvolil mezi ně vložit zlomkovou čáru dle zadání příkladu. Učitel Milý konstatoval, že žák výsledek $\frac{2}{6}$ určil intuitivně nicméně nesprávně. K tabuli vyzval žáka 12, který výsledek smazal a zapsal postup a výsledek jiný. Dále se učitel Milý dotázal, proč žák 12 převedl oba jmenovatele zlomků $\frac{1}{4}$ a $\frac{1}{2}$ na společný jmenovatel 8. Na tuto otázku však nedostal odpověď, protože ihned za ní položil další otázku, jak na číslo 8 žák 12 přišel. Otázka začínající slovem proč byla poměrně zásadní, vezmeme-li v potaz, že je ve třídě, alespoň jeden žák, který na předchozích vyučovacích hodinách nebyl přítomen a tudíž nechápe důvod nezbytnosti převodu zlomků na společný jmenovatel při početní operaci sčítání. Funkčnost této otázky byla však omezena položením další otázky nižší kognitivní náročnosti: „Jak na číslo 8 žák 12 přišel?“ Tuto otázku žáci využili k interakci a učitel Milému odpověděli, že na číslo 8 přišli jako na $4 \cdot 2$. Toto byla určitě jedna ze správných odpovědí, nicméně neobjasnila důvod nutnosti hledat společný jmenovatel. Učitel Milý se tedy znovu pokusil vznést dotaz: „Proč zrovna osmička?“ Opět však položil další otázku, která diskusi dovedla k pojmu nejmenší společný násobek. Dvojitě otázky mohou plnit různé funkce, nicméně je potřeba vyvarovat se jejich dysfunkčnosti. Logicky nespojené otázky mohou být pro žáky značně matoucí.

Pedagogická komunikace ve třídě dále konstruovala poznatek vedoucí k objevení nekonečně proměnlivé struktury a restruktury číselného kontinua u zlomků. Žáci společnými silami došli ke dvěma výsledkům součtu $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ a to k $\frac{3}{4}$ a $\frac{6}{8}$. Učitel Milý zakončil tuto část výukové situace otázkou: „Který z těchto výsledků je vlastně správně?“ Žáci samostatně došli k závěru, že se výsledky rovnají a oba jsou tedy správně.

Část 3: Ve třetí části výukové situace třída společnými silami ověřovala platnost tvrzení, že zvolíme-li při sčítání zlomků společného jmenovatele, který je libovolným násobkem jmenovatelů sčítanců tohoto součtu, měli bychom vždy dojít ke správnému výsledku. Za společného jmenovatele volili v této části číslo 16. Došli k výsledku $\frac{12}{16}$. Dále žáci porovnávali délky výpočtů (včetně úpravy výsledného zlomku na základní tvar) při volbě různých společných jmenovatelů při sčítání dvou zlomků. Společně došli k závěru, že

podají-li se jim najít nejmenší společný násobek, ušetří čas při krácení výsledného zlomku do základního tvaru.

Část 4: Ve čtvrté části výukové situace se učitel Milý rozhodl zadat žákům vlastní slovní úlohu, ve které měli žáci za úkol sečíst tentokrát tři zlomky s různými jmenovateli. Žákům se podařilo dojít ke správnému řešení. Učitel Milý ani u této slovní úlohy nepožadoval písemnou či slovní formulaci řešení, ta však může být zásadní. Žáci mnohdy dojdou ke správnému výsledku, nicméně neví, co přesně tento výsledek znamená nebo k jaké veličině patří.

5.3.4 Alterace

Posouzení kvality výukové situace

Tato výuková situace může být považována za příklad poměrně zdařilé výuky. Forma výuky byla sice frontální, avšak učitel Milému se podařilo v žácích probudit zájem o danou problematiku. Většina žáků se aktivně zapojovala svými nápady. Učitel dal příležitost nejen žákům, kteří hovořili dobrovolně, ale vyvolával i další žáky za účelem zapojení celé třídy.

Budeme-li vycházet z konstruktivistického pojetí vyučování (desatera konstruktivismu), jakožto odborníky a výzkumníky doporučeného přístupu k vyučování matematice (kap. 2.4), dojdeme k následujícímu shrnutí této výukové situace: Žáci a učitel Milý během této vyučovací hodiny vykazovali aktivitu, tzn. řešili slovní úlohu. Během tohoto řešení hledali souvislosti a na základě výpočtu se pokoušeli sestavovat obecně platná tvrzení. Poznatky vznikaly v mysli žáků během procesu počítání. Vzhledem k tomu, že při hledání společného jmenovatele zlomků hledali (nejmenší) společný násobek čísel, opírali se o zkušenosti a informace z učiva dělitelnosti. Ve třídě probíhala diskuse, žáci a učitel Milý srovnávali výsledky a pokoušeli se o formulaci jejich domněnek a tvrzení.

Za aspekt výuky vyžadující zlepšení považujeme pedagogickou komunikaci, konkrétně dvojité dysfunkční otázky učitele Milého. Gavora (2005) dvojité otázky dělí dle jejich záměru. Záměrem dvojité otázky může být žáky aktivizovat k odpovědi (např. pobídkou k odpovědi); snižovat zátěž krátkodobé paměti žáků (učitel doplní původní delší otázku otázkou kratší zestručněnou); ulehčovat žákovo vyvozování (učitel blíže svou druhou otázkou dotaz specifikuje); získat více odpovědí během kratší doby. Posledním typem je

dysfunkční dvojitá otázka, se kterou jsme se setkali i u učitele Milého, který ji nezáměrně položil.

Dále můžeme opět pozorovat práci s žákovskou chybou obsahující „pouze“ korekci chyby bez další racionální argumentace. Tuto korekci provedl učitel Milý a žák 12 poté, co žák 11 uvedl, že $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6}$. Tuto chybu můžeme považovat za zásadní, už jen např. na základě výzkumů, které jsme uvedli v kapitole 5.3.1, proto u ní považujeme zdůvodnění za nezbytné. Na obrázku 35 uvádíme názornou ukázkou, pomocí které mohl učitel Milý žáka poměrně rychle „přesvědčit“ o nesprávnosti jeho postupu při sčítání dvou zlomků.



Obrázek 35 Sčítání zlomků – názorná ukáзка

Dále bylo možné do výuky zařadit více druhů reprezentací (podobně jako na obrázku 35) především pro žáky, kteří při sčítání zlomků ještě váhali. Obrázkové reprezentace v tomto případě slouží jako nástroj, pomocí kterého názorně reprezentujeme aspekty vnějšího světa. Zároveň by tyto obrázkové reprezentace propojili žákovské znalosti o zlomku jako části celku s poměrně novým učivem početními operacemi se zlomky. Tyto aspekty by mohli v mysli žáka utvářet strukturu poznatků, která ovlivňuje zpracování, organizování a zapamatování nových informací. (Ruisel & Ruiselová, 1990)

Na základě všech výše zmíněných aspektů výukovou situaci celkově hodnotíme jako podnětnou situaci. Podnětná situace je na kognitivní úrovni dle metodiky 3A charakteristická „porozuměním a povrchním zobecněním (obvykle konceptuální znalosti) aplikací a analýzou obsahu (obvykle procedurální a konceptuální znalosti)“. (Janík et al., 2022, s. 20) Naléhavost alterace souhrnně vyhodnocujeme jako nižší. Toto hodnocení bylo diskutováno s učitelem Milý, který souhlasně v D2 uvedl, že realizovanou úroveň vzdělávacích cílů v kognitivní oblasti bylo pochopení (porozumění) a výuka cílila především na konceptuální znalost.

Závěr

Navrhovaná alterace se snaží nenásilně obohatit a kultivovat vyučovací hodiny matematiky. Výše jsme se pokusili stručně nastínit důležitost a přínos rozvoje pedagogických pracovníků v rámci práce s žákovskou chybou a studia a kultivace otázek, které žákům pokládáme. Dále jsme apelovali na porozumění matematice, konkrétně na

význam vytváření představ, pojmů, postupů, a především uvědomování si souvislostí u žáků. Zároveň jsme poukázali na význam reprezentací v procesu psychodidaktické transformace obsahu, která je běžnou pracovní činností všech vyučujících. Znovu na závěr zmíníme, že každá školní třída je unikátní stejně tak jako každý školní den. Zlepšování a kultivace kultury vyučování a učení se matematice na vybrané základní škole je činností dlouhodobou a zároveň velmi náročnou. V praxi tak výše uvedené aspekty, jejichž zlepšení navrhujeme, nemusí být vždy realizovatelné. Předpokládáme však, že by didaktická kazuistika 3 mohla sloužit jako příklad z praxe k dalšímu rozvoji pedagogických pracovníků na ZŠ Dobrá.

6 Závěr

V této práci jsme se zabývali mapováním kultury vyučování a učení se matematice na vybrané základní škole. V této části rekapitulujeme náš přístup k výzkumnému tématu, zvolený metodologický postup. Pokusíme se také naznačit, jakým dalším směrem by se mohl výzkum v dané oblasti ubírat.

Uvedli jsme, že kultura vyučování a učení se matematice je velmi komplexní. Její zkoumání je relevantní v různých oborech vzdělávání. My jsme se na tuto kulturu rozhodli nahlížet z hlediska změn a zlepšování. Toto hledisko nás dovedlo k výzkumu, jehož účelem „...je přímo ovlivňovat či zlepšovat určitou část vzdělávací praxe, řešit aktuální potřeby vzdělávací instituce, uplatňovat intervenční strategie, navrhnout určitá doporučení a pokoušet se je realizovat a průběžně sledovat efekty změn“ (Průcha, Walterová & Mareš, 2003, s. 14). V domácím prostředí bývá tento druh výzkumu nazýván akčním výzkumem. Během našeho mapování vybrané kultury vyučování a učení jsme se především zabývali problematikou psychodidaktické transformace, tzn. tím, jak učitelé zprostředkovávají vzdělávací obsah žákům.

Čtenáři jsme nabídli stručný vhled do běžné pracovní činnosti pedagogického pracovníka na základní škole, který se na každou vyučovací hodinu připravuje, poté ji realizuje a po jejím skončení ji může reflektovat. Představili jsme také stručný exkurs způsobů realizace nové produktivní kultury vyučování a učení se matematiky, jehož smyslem bylo nastínit aspekty „ideálního“ modelu vyučovací hodiny matematiky. Vzhledem k tomu, že na kulturu nahlížíme z hlediska změn a zlepšování, byl pro nás tento model zásadní. V souvislosti s „ideálním“ modelem výuky jsme také definovali gramotnosti (matematickou, digitální), k jejichž rozvoji by měla výuka matematiky ve 21. století přispívat.

Uvedená teoretická východiska jsme využili k formulaci výzkumných otázek. Zodpovězení výzkumných otázek jsme se rozhodli rozdělit do dvou výzkumných šetření. V prvním výzkumném šetření jsme se zaměřili na komparaci přípravy na vyučovací hodinu se samotnou realizací vyučovací hodiny, ve smyslu toho, jak se učitelům matematiky na ZŠ Dobrá daří realizovat své vyučovací hodiny dle původního plánu. K analyzování této problematiky jsme přistupovali z hlediska kvantitativního. Ve druhém výzkumném šetření jsme usilovali o zaznamenání několika vyučovacích hodin

matematiky, které bychom následně mohli hloubkově analyzovat. Zvolili jsme proto kvalitativní přístup k problematice.

Za nejzásadnější zjištění výzkumných šetření považujeme dominanci hromadné frontální výuky. Z celkového počtu 18 (video)záznamů vyučovacích hodin matematiky se hromadná frontální výuka neobjevila ve dvou vyučovacích hodinách. Obě tyto vyučovací hodiny navíc vedl stejný učitel. Dále se ve všech hloubkově analyzovaných videozáznamech ukázala práce s žákovskou chybou jako pro učitele matematiky 2. stupně ZŠ Dobrá mnohdy problematická. Práci s žákovskou chybou a učitelské otázky tedy považujeme za oblast, ve které by mohl probíhat další případný profesní rozvoj učitelů ZŠ Dobrá. Této oblasti zároveň přikládáme náležitou důležitost z důvodu, že má zásadní vliv na žákův poznávací proces a další rozvoj. Pro objasnění tohoto tvrzení uvedeme příklad: nepochopí-li žák podstatu sčítání např. u přirozených čísel, tato početní operace pro něj bude problematická i u čísel celých, racionálních, reálných atd. Bude-li pro žáka prototypem pojmu trojúhelník rovnoramenný trojúhelník, může se žák později potýkat s problémy při výpočtu povrchu či objemu trojbokého hranolu, podobných příkladů bychom našli bezpočet. *Matematické souvislosti* jsou trochu speciální, kvůli tomu, že matematika není odpozorovaná, ale vymyšlená. Většina souvislostí není souvislostmi v běžném slova smyslu (dvě věci, které mají něco společného), ale vyjádření skutečnosti, že jde stále o jednu věc jenom dvakrát různě popsanou nebo využitou. (Krynický, 2010) Dále dotazníková šetření 1 a 2 ukázala, že je pro přibližně 75 % učitelů matematiky ZŠ Dobrá rozvoj digitální kompetence u žáků ve vyučovacích hodinách matematiky poměrně či velmi náročný. Dotazníková šetření 1 a 2 zároveň poukázala na to, že učitelé matematiky na ZŠ Dobrá především cílí na tyto úrovně vzdělávacích cílů v kognitivní oblasti: zapamatování, pochopení a aplikace. Žádný z 12 učitelů nezvolil úroveň analýzy, hodnocení či tvorby. Zároveň se žádnému z učitelů nepodařilo realizovat výuku matematiky, která by cílila na procedurální či metakognitivní znalostní dimenzi u žáků. (Anderson & Krathwohl, 2001) Obě tyto informace pro nás byly neočekávané. Tato oblast tedy také nabízí prostor pro další kultivaci a zlepšování v rámci profesního rozvoje pedagogických pracovníků.

Vedle odpovědí na námi formulované výzkumné otázky nám výzkum přinesl také řadu dalších otázek. Všechny výše zmíněné oblasti, které nabízí prostor pro další kultivaci a zlepšování jsou zároveň místem pro další výzkum a hlubší zkoumání. Domníváme se, že

je žádoucí, aby další výzkumy směřovaly k prohlubování poznatků o tomto komplexním problému. Dalším předmětem zkoumání by se mohla stát například právě práce s žákovskou chybou u jednotlivých učitelů matematiky na ZŠ Dobrá, vzhledem k tomu, že jsme v této oblasti shledali prostor pro další kultivaci a rozvoj. Zároveň bylo během akčního výzkumu pořízeno osmnáct (video)záznamů vyučovacích hodin, nám se však vzhledem k rozsahu této práce podařilo detailně analyzovat tři z nich. Zbývající (video)záznamy nabízejí další prostor pro výzkum a hloubkovou analýzu. Stejně tak nebyla vzhledem k rozsahu této rigorózní práce využita všechna data, která jsme získali prostřednictvím dotazníkových šetření 1 a 2.

Na závěr bychom chtěli podotknout, že se nám během mapování kultury vyučování a učení na námi vybrané škole podařilo přimět několik učitelů matematiky k výstupu z běžné školní „rutiny“ a jejich komfortní zóny. Ač se tento krok může zdát být snadným, mnohdy je v praxi velmi odolný vůči pokusům o změnu. Zároveň došlo během výzkumu k prohloubení kolegiálních vztahů na pracovišti a vzájemnému profesnímu obohacení pedagogických pracovníků. Všichni učitelé matematiky na 2. stupni ZŠ Dobrá potvrdili, že způsob (sebe)reflexe pomocí metodiky 3A z videozáznamů vyučovacích hodin je ideálním nástrojem při didaktickém rozboru klíčových situací výuky a navrhování didaktických změn, které mají přinést zvýšení kvality výuky. Shodli jsme se, že budeme i nadále pokračovat v tomto způsobu (sebe)reflexe s cílem kultivovat svou pedagogickou činnost. Ačkoliv výzkum nepřinesl zásadní změny či poznatky pro vzdělávací systém všeobecně, obohatil skupinu učitelů matematiky, kteří v rámci jedné společné kultury vzdělávají na jednom místě stovky žáků. Proto můžeme konstatovat, že byl tento výzkum přínosem pro vybranou základní školu ZŠ Dobrá, její žáky a pedagogické pracovníky.

Literatura

- Aabo, S. (2005). The Role and Value of Public Libraries in the Age of Digital Technologies. *Journal of Librarianship and Information Science* 37(4), 205–211.
- Adey, P. (2006). A model for the professional development of teachers of thinking. *Thinking Skills and Creativity*, 1(1), 49–56. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2005.07.002>
- Alexander, R. J. (2006). *Towards dialogic teaching: Rethinking classroom talk*. Dialogos.
- Anderson, J. (1993). *Dobry start do školy: Jak můžete připravit vašemu dítěti dobrý vstup do školy*. Portál.
- Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing*. Addison Wesley Longman.
- Angeli, C., & Valanides, N. (2014). *Technological Pedagogical Content Knowledge: Exploring, Developing, and Assessing TPACK*. Springer.
- Apaydin, Ç., & Kaya, F. (2020). An Analysis Of The Preschool Teachers' Views On Alpha Generation. *European Journal of Education Studies*, 6(11), 123–141. <https://core.ac.uk/download/pdf/328006406.pdf>
- Babiaková, S. (2018). *Evaluácia v materskej škole: sprievodca evaluačným procesom v materskej škole*. Dr. Josef Raabe Slovensko.
- Baden, S. M., & Major, C. H. (2004). *Foundations of Problem Based Learning*. McGraw-Hill.
- Bakhtin, M. M. (1986). *Speech genres and other late essays*. University of Texas.
- Barták, J. (2021). *Osobnostní management*. Grada Publishing.
- Bartholomew, J. C. (1972). *The Teacher as Researcher: a Key to Innovation and Change*. Nuffield Teacher Enquiry.
- Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843–908). Information Age.
- Bawden, D. (2001). Information and Digital Literacies: A Review of Concepts. *Journal of Documentation*, 57, 218–259.
- Bawden, D. (2008). Origins and Concepts of Digital Literacy. In C. Lankshear & M. Knobel (Eds.), *Digital Literacies: Concepts, Policies and Practices* (pp. 16–32). Peter Lang.
- Bawden, D., Robinson, L. (2002). Promoting literacy in a digital age: approaches to training for information literacy. *Lear. Publish.* 15, 4.
- Bednárek, A., Mynářová, G., Václavík, M., & Červenková, I. (2021). Typy a způsoby užívání výukových zdrojů žáky osmých tříd základních škol. *Pedagogika*, 71(1), 101–119.
- Beeson, M. J. (1985). *Foundations of Constructive Mathematics: Metamathematical Studies*. Springer.

- Bélisle, C. (2006). Literacy and the Digital Knowledge Revolution. https://www.researchgate.net/publication/278745156_Literacy_and_the_digital_knowledge_revolution
- Bendl, V., Duňková, J., Fuchs, E., Havlínová, H., Jirotková, D., Lišková, H., Nováková, E., Slezáková, J., & Zelendová, E. (2020). *Matematická gramotnost v uzlových bodech vzdělávání (metodický podpůrný materiál pro projekt PPUČ)*. NPI ČR. <https://digifolio.rvp.cz/artefact/file/download.php?file=94098&view=13192>
- Bertrand, Y. (1998) *Soudobé teorie vzdělávání*. Studium (Portál). Praha: Portál.
- Beyranevand, M. L. (2017). *Teach Math Like This, Not Like That: Four Critical Areas to Improve Student Learning*. Rowman & Littlefield Publishers.
- Biesta, G. J. J. (2014). *The Beautiful Risk of Education*. Paradigm Publishers.
- Bílek, M., Rychtera, J., & Slabý, A. (2008). *Konstruktivismus ve výuce přírodovědných předmětů*. Univerzita Palackého v Olomouci.
- Binterová, H. (2012). Klima výuky matematiky v angličtině (metodou CLIL). *Pedagogická orientace*, 22(1), 66–81. <https://doi.org/10.5817/PedOr2012-1-66>
- Binterová, H., & Dvorožňák, M. (2009). Matematika s počítačem a svobodný software. *Učitel Matematiky*, 17(2), 86–98.
- Binterová, H., & Šulista, M. (2013). GeoGebra Software Use within a Content and Language Integrated Learning Environment. *European Journal of Contemporary Education*, 4(2-1), 100–116.
- Binterová, H., Fuchs, E., & Pech, P. (2010). On introduction of quadratic function by computers at school. *South Bohemia Mathematical Letters*, 17(1), 51–60.
- Binterová, H., Hašek, R., Pech, P., & Petrášková, V. (2015). *Klíčové kompetence v badatelsky orientované výuce matematiky*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- Blatný, M. (2017). *Psychologie celoživotního vývoje*. Karolinum.
- Blažek, R., Janotová, Z., Potužníková, E., & Basl, J. (2019). *Mezinárodní šetření PISA 2018: Národní zpráva*. Česká školní inspekce. https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el._publikace/Mezinárodní%20šetření/PISA_2018_narodni_zprava.pdf
- Blažková, R. (2013). *Didaktika matematiky I*. Masarykova univerzita. https://is.muni.cz/el/ped/podzim2015/SZ_9005/um/DM.pdf
- Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123–139. <https://doi.org/10.1093/teamat/22.3.123>
- Bloom, B. S. (1976). *Human characteristics and school learning*. McGraw-hill.
- Booth, J. L., & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really bet he gatekeeper's door-man? *Contemporary Educational Psychology*, 37(4), 247–253. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2012.07.001>

- Booth, J. L., Lange, K. E., Koeinger, K. R., & Newton, K. J. (2013). Using example problems to improve student learning in algebra: Differentiating between correct and incorrect examples. *Learning and Instruction*, 25, 24–34. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.11.002>
- Boudová, S., Šťastný, V., & Basl, J. (2019). *Mezinárodní šetření TALIS 2018: národní zpráva*. Česká školní inspekce. https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el_pu_blikace/Mezinárodní%20šetření/Narodni-zprava-z-setreni-TALIS-2018_web.pdf
- Boudová, S., Tomášek, V., & Halbová, B. (2023). *Národní zpráva PISA 2022: Matematická, čtenářská a přírodovědná gramotnost*. Česká školní inspekce. https://www.csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/2023_přilohy/Mezinárodní%20šetření/PISA_2022_e-verze-9.pdf
- Boudová, S., Tomášek, V., & Klement, L. (2022). *Mezinárodní šetření PISA 2022 – koncepční rámec: Matematika | Tvůrčí myšlení*. Česká školní inspekce.
- Bright, B. (1996). Reflecting on ‘Reflective Practice’. *Studies in the Education of Adults*, 28(2), 162–184. <https://doi.org/10.1080/02660830.1996.11730638>
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics: didactique des mathématiques, 1970-1990*. Kluwer Academic Publishers.
- Brown, T. (2012). *Mathematics Education and Language: Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism*. Springer Netherlands.
- Bruner, J. (1996). *The culture of education*. Harvard University Press.
- Budínová, I. (2018). Vytváření představ základních geometrických pojmů u žáků prvního stupně základní školy: trojúhelník a kruh. *Učitel matematiky*, 26(1), 1–11.
- Burgos, M., Castillo Céspedes, M. J., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Godino, J. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema*, 34(66), 40–68. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03>
- Bydžovský, B. (1937). *Naše středoškolská reforma*. Profesorské nakladatelství a knihkupectví.
- Cakirpaloglu, P. (2012). *Úvod do psychologie osobnosti*. Grada Publishing.
- Calandra, B., & Rich, J. P. (Eds.) (2014). *Digital video for teacher education: Research and practice*. Routledge.
- Carfora, J. M., & Blessinger, P. (2015). *Inquiry-Based Learning for Multidisciplinary Programs: A Conceptual and Practical Resource for Educators*. Emerald Group Publishing.
- Carlsnaes, W., Risse-Kappen, T., Risse, T., & Simmons, B. A. (2002). *Handbook of International Relations*. SAGE.
- Carothers, N. L. (2000). *Real analysis*. Cambridge University Press.
- Carr, W., & Kemmis, S. (1986). *Becoming Critical: knowing through action research*. Deakin University Press.

- Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání – Oddělení analýz. (2023). Jednotná přijímací zkouška 2023. Cermat. https://data.cermat.cz/files/files/JPZ2023_signalni_vysledky.pdf
- Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. (2023). Matematika 5: Didaktický test. Cermat. https://prijimacky.cermat.cz/files/files/M5PAD23C0T01_web.pdf
- Clarke, B., Grevholm, B., & Millman, R. (2008). *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education: Purpose, Use and Exemplars*. Springer.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192–212. <https://doi.org/10.2307/749610>
- Comiti, C., & Moreira Baltar, P. (1997). Learning process for the concept of area of planar regions in 12-13 year-olds. *Proceedings of the 21th of PME Conference*, 3(1), 264–271.
- Cutugno, P. & Spagnolo, F. (2002). Misconceptions about triangle in elementary school. In A. Rogerson (Ed.), *Conference The Mathematics Education into the 21st Century Project*(89–93). Italy, Palermo
- Čáp, J., & Mareš, J. (2001). *Psychologie pro učitele*. Portál.
- Čapek, V. (1981). Metodologické otázky didaktik vědních, uměleckých a technických oborů. In *Speciální didaktiky jako vědní obory a jako studijní předměty* (s. 8–16). Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy.
- Čejková, V., & Jandová, J. (2018). Motivace žáka v hodině matematiky. *Učitel matematiky*, 26(4), 193–204.
- Česká školní inspekce. (2017). *Využívání digitálních technologií v mateřských, základních, středních a vyšších odborných školách: Tematická zpráva*. https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el_publicace/Tematicke%20zpravy/F_TZ-Vyuzivani-digitalnich-technologii-v-MS,-ZS,-SS-a-VOS_kor.pdf
- Česká školní inspekce. (2021). Info duben 2021. https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/2021_přilohy/Dokumenty/INFO_duben_2021_mini.pdf
- Česká školní inspekce. (2022). Kvalita a efektivita vzdělávání v České republice – Výroční zpráva 2021/2022. https://www.csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/2022_přilohy/Dokumenty/Vyrocnizprava_2021_2022_everze.pdf
- České školní inspekce. (2022a). Mezinárodní šetření PISA 2022-Koncepční rámec-matematika-tvůrčí myšlení. https://www.csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/2022_přilohy/Mezinarodni%20šetření/PISA_2022_koncepcni_ramec_24-9-22_FINAL.pdf
- Česká školní inspekce. (2024). *O šetření PISA*. <https://www.csicr.cz/cz/Mezinarodni-setreni/PISA/O-setreni-PISA>
- Davis, R., Mahler, C. & Noddings, N. (1990). *Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Dawes, L. (2010). *Creating a Speaking and Listening Classroom: Integrating Talk for Learning at Key Stage 2*. Routledge.
- DeCesare, M. (2007). A textbook approach to teaching: Structural uniformity among american high school sociology courses. *American Sociologist*, 38(2), 178–190. <https://doi.org/10.1007/s12108-007-9007-9>
- Desimone, L. M. (2009). Improving Impact Studies of Teachers' Professional Development: Toward Better Conceptualizations and Measures. *Educational Researcher*, 38(3), 181–199. <https://doi.org/10.3102/0013189X08331140>
- Dewey, J. (1910). *How We Think*. D. C. Heath & Co. <https://archive.org/stream/howwethink00838mbp#page/n25/model/1up>
- Dewey, J. (1916). *Democracy and Education*. The Macmillan Company. https://en.wikisource.org/wiki/Democracy_and_Education
- Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. Holt.
- DeWolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2015). Conceptual structure and the procedural affordances of rational numbers: Relational reasoning with fractions and decimals. *Journal of Experimental Psychology*, (144), 127–150. <https://10.1016/j.jecp.2015.01.013>
- DiNucci, D. (1999). Fragmented Future. *Print*, 53(4), 32.
- Dombrovská, M. (2018). *Informační gramotnost jako veřejný zájem, politika a norma: návod na tvorbu koncepčních dokumentů v oblasti informačního vzdělávání*. Karolinum.
- Domino, G., & Domino, M. L. (2006). *Psychological Testing: An Introduction*. Cambridge University Press.
- Dostál, J. (2015). *Badatelsky orientovaná výuka: pojetí, podstata, význam a přínosy*. Univerzita Palackého v Olomouci.
- Dostál, J., & Kožuchová, M. (2016). *Badatelský přístup v technickém vzdělávání: teorie a výzkum*. Univerzita Palackého v Olomouci.
- Drury, D. H. (2018). *How to Teach Mathematics for Mastery*. OUP Oxford.
- Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehensions in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Dvořák, D. (2011). *Česká základní škola: vícepřípadová studie*. Karolinum.
- Dvořák, D., Janík, T., Průcha, J., Rabušicová, M., Greger, D., Spilková, V., Starý, K., Straková, J., & Walterová, E. (2015). *Srovnávací pedagogika: Proměny a výzvy*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Dyrtová, R., & Krhutová, M. (2009). *Učitel: příprava na profesi*. Grada Publishing.
- Ebbutt, D. (1985). Educational action research: Some general concerns and specific quibbles: Some general concerns and specific quibbles. In *Issues in Educational Research*. Falmer Press.

- Efron, S. E., & R. Ravid. (2013). *Action Research in Education: a Practical Guide*. The Guilford Press. https://www.daneshnamehicsa.ir/userfiles/files/1/9-%20Action%20Research%20in%20Education_%20A%20Practical%20Guide.pdf
- Eilu, E., Baguma, R., Pettersson, J. S., & Bhutkar, G. D. (2021). *Digital Literacy and Socio-Cultural Acceptance of ICT in Developing Countries*. Springer.
- Elliott, J. (1991). *Action Research for Educational Change*. Open University Press.
- Elliott, J. (1981). *Action-research: A framework for self-evaluation in schools*. Cambridge TIQL-Working.
- Erickson, F. (1987). Conceptions of School Culture: An Overview. *Educational Administration Quarterly*, 23(4). <https://doi.org/10.1177/0013161X87023004003>
- Ernest, P. (2012). *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematical Education*. Routledge.
- Eshet-Alkalai, Y. (2004). Digital Literacy: A Conceptual Framework for Survival Skills in the Digital Era. *Journal of Educational Multimedia & Hypermedia* 13(1), 93–106.
- Eurofound. (2021). Business not as usual: How EU companies adapted to the COVID-19 pandemic, Publications Office of the European Union, Luxembourg.
- Faltýšek, P. (2021) řešitelský kolektiv projektu Centra celoživotního vzdělávání Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.
- Feng, J. (2012). *Teacher as Researcher: Action Research by Elementary Teachers*. Lulu.com.
- Ferrance, E. (2000). *Action research*. Brown University. https://www.brown.edu/academics/education-alliance/sites/brown.edu.academics/education-alliance/files/publications/act_research.pdf
- Ficová, L., & Pavelková, M. (2018). *Teorie a metody rozvoje matematických představ v předškolním vzdělávání*. Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně.
- Filová, H., Maňák, J., Strach, J., Šimoník, O., Šťáva, J., & Švec, V. (1997). *Vybrané kapitoly z obecné didaktiky*. Masarykova univerzita.
- Fosnot, C. T. (2015). *Constructivism: Theory, Perspectives, and Practice*, Second Edition. Teachers College Press.
- Freudenthal, H. (1971) Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3(3/4), 413–435. <https://doi.org/10.1007/BF00302305>
- Frick, T., & Semmel, M. I. (1978). Observer Agreement and Reliabilities of Classroom Observational Measures. *Review of Educational Research*, 48(1), 157–184. <https://doi.org/10.3102/00346543048001157>
- Frišová, P. (2010, 5. května). Potenciál reflexe ve vyučování. NPI Metodický portál RVP.CZ. <https://clanky.rvp.cz/clanek/s/Z/8331/POTENCIAL-REFLEXE-VE-VYUCOVANI.html>
- Fuchs, E. (1993). Přehled vývoje matematiky. In J. Bečvář & E. Fuchs (Eds.), *Historie matematiky. I. Seminář pro vyučující na středních školách Jevíčko, 19.8.-22.8.1993* (s. 4–19). Jednota českých matematiků a fyziků.
- Gavora, P. (1988). *Pedagogická komunikácia v základnej škole*. Veda.

- Gavora, P. (2005) *Učitel a žáci v komunikaci*. Brno: Paido.
- Geary, D. C., Boykin, A. W., Embretson, S., Reyna, V., Siegler, R., Berch, D. B., Graban, J. (2008) . Chapter 4: Report of the task group on learning processes. In *The final report of the National Advisory Mathematics Panel*. USA: U.S. Department of Education
- Ghere, G. S., York-Barr, J., Montie, J., & Sommers, W. A. (2005). *Reflective Practice to Improve Schools: An Action Guide for Educators*. SAGE.
- Gilster, P. (1997). *Digital literacy*. John Wiley, 1997
- Glaserfeld, E. v. (1974). Piaget and the radical constructivist epistemology. In C. D. Smock & E. v. Glaserfeld (Eds.), *Epistemology and education* (pp. 1–24). Follow Through Publications.
- Glaserfeld, E. v. (1984). An introduction to radical constructivism. In P. Watzlawick (Ed.), *The Invented Reality* (pp. 17–40). Norton. <http://www.vonglaserfeld.com/070.1>
- Glaserfeld, E. v. (1990). An exposition of constructivism: Why some like it radical. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, 4, 19–29. <https://doi.org/10.2307/749910>
- Glaserfeld, E. v. (2006) A constructivist approach to experiential foundations of mathematical concepts revisited. *Constructivist Foundations* 1(2): 61–72.
- Glaserfeld, E., & Steffe, L. P. (1991). Conceptual Models in Educational Research and Practice. *The Journal of Educational Thought*, 25(2), 91–103.
- Góral, A., Jałocha, B., Mazurkiewitch, G., & Zawadzki, M. (2021). *Action Research: A Handbook for Students*. Instytut Spraw Publicznych. https://www.researchgate.net/publication/356635022_Action_Research_A_Handbook_for_Students
- Goulding, M. (2013). *Learning to Teach Mathematics* (2nd ed.). Taylor & Francis.
- Greathouse, A. (2022). *Developing Mathematical Literacy Through Adolescent Literature*. Rowman & Littlefield Publishers.
- Greger, D., Straková, J., Simonová, J., & Chvál, M. (2020). *Když výzkum mění praxi: deset příběhů učitelů a akademiků zapojených do akčního výzkumu*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Guha, S. (2021). *Teacher as Researcher: Becoming Familiar with Educational Research to Connect Theory to Practice*. Rowman & Littlefield Publishers.
- Halas, Z. (2012). *Využití matematiky v praxi*. Nakladatelství P3K. <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/OPPA48-Halas.pdf>
- Hannula, M. S., Di Martino, P., Heyd Metzuyanım, E., Pantziara, M., Zhang, Q., Morselli, F., Lutovac, S., Goldin, G. A., Kaasila, R., Jansen, A., & Middleton, J. A. (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education: An Overview of the Field and Future Directions*. Springer.
- Hartl, P., Hartlová, H. (2000). *Psychologický slovník*. Praha: Portál.

- Hartl, P., Hartlová, H. (2015). *Psychologický slovník*. Třetí, aktualizované vydání. Praha: Portál.
- Hassler, L. R. (2021). *The Effects of Mathematical Literacy on Standardized Tests*. West Texas A & M University.
- Hatton, N., & Smith, D. (1995). Reflection in Teacher Education: Towards Definition and Implementation. *Teaching and Teacher Education*, 11(1), 33–49. [https://doi.org/10.1016/0742-051X\(94\)00012-U](https://doi.org/10.1016/0742-051X(94)00012-U)
- Havlíčková, D. (2015). *Metodika – Kompetence, Kvalita, Kvalifikace, (Sebe)Koncepce pro neformální vzdělávání*. Národní institut pro další vzdělávání.
- Havránek, B., Bělič, J., Helcl, M., Jedlička, A., Červená, V., Filipec, J., Havlová, F., Churavý, M., Janský, L., Kozlová, K., Kroupová, L., Machač, J., Marešová, H., Mejstřík, V., Michálek, E., Papírníková, B., Pokorná, E., Poštolková, B., Roudný, M., ... Vachek, J. (2011). *Slovník spisovného jazyka českého*. Ústav pro jazyk český ČSAV.
- Hecht, T. (1994). *O pripravovaných učebniciach matematiky pre stredne školy*. Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzita Komenského.
- Hejný, M. (2007). Budování matematických schémat. In A. Hošpesová, N. Stehlíková, & M. Tichá (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (pp. 81–122). Jihočeská univerzita.
- Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika I. stupně*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Hejný, M., & Kuřina, F. (2000). Tři světy Karla Poppera a vzdělávací proces. *Pedagogika*, (1), 38–50. <https://pages.pdf.cuni.cz/pedagogika/?p=2306>
- Hejný, M., & Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Portál.
- Hejný, M., & Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování* (2. vyd.). Portál.
- Hejný, M., & Kuřina, F. (2015). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování* (3. vyd.). Portál.
- Hejný, M., & Rybářová, J. (1984). Pojmotvorný proces vo vyučování matematiky. *Pedagogika*, 5, 599–611.
- Hejný, M., Novotná, J., & Vondrová, N. (Ed.). (2004). *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Helus, Z. (2007). *Sociální psychologie pro pedagogy*. Grada Publishing.
- Hendl, J. (2022). *Základy matematiky, logiky a statistiky pro sociologii a ostatní společenské vědy v příkladech*. Karolinum.
- Henney, C., & Stemhagen, K. (2021). *Democracy and Mathematics Education: Rethinking School Math for Our Troubled Times*. Taylor & Francis.
- Herring, M. C., Koehler, J., & Mishra, P. (2014). *Handbook of Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK) for Educators*. Taylor & Francis.

- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61–76.
- Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on students' Learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371–404). Information Age.
- Hloušková, L. (2008) Proměna kultury školy v pedagogických diskurzích. Brno: Masarykova univerzita.
- Hofmann, E., & Löhle M. (2017). *Jak se úspěšně učit: Nejlepší strategie a techniky*. Grada Publishing.
- Holcová, M., Trávníček, J., & Vorlíček, J. (2019). *Akční výzkum v profesním rozvoji učitelů (model CIVIS)*. Lipka – školské zařízení pro environmentální vzdělávání Brno. https://www.lipka.cz/soubory/av_zaverecna-zprava_final--f11642.pdf
- Holeček, V. (2015). *Psychologie v učitelské praxi*. Grada Publishing.
- Holubová, R. (2007). *Soubor podpůrných materiálů pro transformaci didaktického modelu výuky přírodovědných předmětů*. Univerzita Palackého v Olomouci.
- Honzíková, J., & Sojková, M. (2016). *Tvůrčí technické dovednosti*. Západočeská univerzita v Plzni.
- Horsley, M., & Sikorova, Z. (2014). Classroom Teaching and Learning Resources: International Comparisons from TIMSS – A Preliminary Review. *Orbis Scholae*, 8(2), 43–60. <https://doi.org/10.14712/23363177.2015.65>
- Hošpesová, A. (2012). *Kvalitativní a akční výzkum*. Gaudeamus.
- Hošpesová, A., Stehlíková, N., & Tichá, M. (Ed.). (2007). *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- Hrabal, V., & Pavelková, I. (2010). *Jaký jsem učitel*. Portál.
- Hříbek, T. (2017). Empirismus, naturalismus a ideje. *Filosofický časopis*, 65(2), 297–315.
- Hudecová, D. (2004). Revize Bloomovy taxonomie edukačních cílů. *Pedagogika*, (3), 274–283. online dostupné: <https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?p=1809>
- Hussein, H. B. B. (2023). Global Trends in Mathematics Education Research. *International Journal of Research in Educational Sciences*, 6(2), 309–319. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/369230142_Global_Trends_in_Mathematics_Education_Research
- Chinn, S. (2020). *How to Teach Maths: Understanding Learners' Needs*. Taylor & Francis.
- Chocholoušková, Z., & Müllerová, L. (2019). *Didaktika biologie ve vztahu mezi obecnou a oborovou didaktikou*. Západočeská univerzita v Plzni.
- Chráška, M. (2016). *Metody pedagogického výzkumu: Základy kvantitativního výzkumu* (2., aktualiz. vyd.). Grada Publishing.
- Chvál, M. (2013). Změna postojů českých žáků k matematice během školní docházky *Orbis scholae*, 7(3), 49–71.

- Ingram, J., Pitt, A., & Baldry, F. (2015). Handling errors as they arise in whole-class interactions. *Research in Mathematics Education*, 17(3), 183–197. <https://doi.org/10.1080/14794802.2015.1098562>
- Inzlicht, M., & Schmader, T. (2012). *Stereotype threat: Theory, process, and application*. Oxford University Press.
- Isaacson, W. (2015). *Inovátoři: Jak skupinka vynálezců, hackerů, génů a nadšenců stvořila digitální revoluci*. Práh.
- Jáchim, F. (1984). K některým problémům motivace žáků v matematice na základní škole: výběr z pedagogického čtení. Krajský pedagogický ústav.
- Jančaříková, K. (2019). *Didaktické přístupy k přírodovědnému vzdělávání předškolních dětí a mladších žáků*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Janík, T. (2003). *Akční výzkum pro učitele: Příručka pro teorii a praxi*. Pedagogická fakulta Masarykovy univerzity. https://is.muni.cz/el/1441/jaro2006/ZS1BP_ZPM/um/um/TJ_akcni_vyzkum.pdf
- Janík, T. (2004). Význam Shulmanovy teorie pedagogických znalostí pro oborové didaktiky a pro vzdělávání učitelů. *Pedagogika*, 54(3), 243–250.
- Janík, T. (2005). *Znalost jako klíčová kategorie učitelského vzdělávání*. Paido.
- Janík, T. (2013). Od reformy kurikula k produktivní kultuře vyučování a učení. *Pedagogická orientace*, 23(5), 634–663. <https://doi.org/10.5817/PedOr2013-5-634>
- Janík, T. (2018). Od obsahu vzdělávání k žakově znalosti: kritická místa na cestě do školy a ze školy. *Arnica*, 8(1), 1–8.
- Janík, T., Knecht, P., Najvar, P. (2010). *Nástroje pro monitoring a evaluaci kvality výuky a kurikula*. Brno: Paido, Pedagogický výzkum v teorii a praxi.
- Janík, T., Brebera, P., Dobrý, L., Kansanen, P., Píšová, M., Najvar, P., Seebauerová, R., Slavík, J., Švec, V., & Trna, J. (2007). *Pedagogical content knowledge nebo didaktická znalost obsahu?* Paido. http://www.paido.cz/pdf/PEDAGOGICAL_CONTENT_KNOWLEDGE.pdf
- Janík, T., & Najvar, P. (2008). Videostudie ve výzkumu vyučování a učení. *Orbis Scholae*, 2(1), 7–28.
- Janík, T., & Slavík, J. (2009). Obsah, subjekt a intersubjektivita v oborových didaktikách. *Pedagogika*, 59(2), 116–135.
- Janík, T., Maňák, J., & Knecht, P. (2009). *Cíle a obsahy školního vzdělávání a metodologie jejich utváření*. Paido.
- Janík, T., Slavík, J., Mužík, V., Trna, J., Janko, T., Lokajíčková, V., Lukavský, J., Minaříková, E., Sliacky, J., Šalamounová, Z., Šebestová, S., Vondrová, N., & Zlatníček, P. (2013). *Kvalita (ve) vzdělávání: obsahově zaměřený přístup ke zkoumání a zlepšování výuky*. Masarykova univerzita.
- Janík, T., Slavík, J., & Češková, T. (2022a). *Produktivní kultura vyučování a učení v didaktických kazuistikách*. Masarykova univerzita.
- Janík, T., Slavík, J., Najvar, P., & Češková, T. (2022b). *Metodika 3A: nástroj pro reflexi výuky a hodnocení její kvality*. Masarykova univerzita.

- Janko, T. (2012). Reprezentace obsahu: psychologická východiska a didaktické souvislosti. *Pedagogická orientace*, 22(1), 23–40. <https://doi.org/10.5817/PedOr2012-1-23>
- Jaworski, B. (2002). *Investigating Mathematics Teaching: A Constructivist Enquiry*. Routledge.
- Jedlička, R., Kořa, J., & Slavík, J. (2018). *Pedagogická psychologie pro učitele: Psychologie ve výchově a vzdělávání*. Grada Publishing.
- Jelemenská, P. (2009). Model didaktické rekonstrukce z metodologického pohledu. In M. Janíková, K. Vlčková, P. Doulík, M. Chvál, T. Janík, P. Jelemenská, J. Maňák, K. Starý, & J. Škoda (Eds.), *Výzkum výuky: tématické oblasti, výzkumné přístupy a metody* (s. 145–170). Paido.
- Jelemenská, P., Sander, E., & Kattmann, U. (2003). Model didaktickej rekonštrukcie impulz pre výskum v odborových didaktikách. *Pedagogika*, 53(2), 190–201.
- Jeřábek, J., & Tupý, J. (Eds.). (2021). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. MŠMT ČR.
- Jeřábek, T., Rambousek, V., & Vaňková, P. (2019). Digitální gramotnost v kontextu současného vzdělávání. *Gramotnost, pregramotnost a vzdělávání*, 2(2), 7–19. https://pages.pdf.cuni.cz/gramotnost/files/2019/01/01_Jerabek.pdf
- Jeřábek, T., Vaňková, P., Fialová, I., & Fillipi, Z. (2018). *VMI.1 Rozpracovaný koncept digitální gramotnosti*. Edu.cz. https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2021/05/180901_Koncept-digitalni-gramotnosti.pdf
- Jirotková, D., Vighi, P., & Zemanová, R. (2019). Misconceptions about the relationship between perimeter and area. In *Opportunities in Learning and Teaching Elementary Mathematics* (pp. 221–230). Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.
- Jones, P., & Hammond, J. (2018). *Talking to Learn*. Taylor & Francis.
- Jones, R., & Hafner, C. A. (2012). *Understanding Digital Literacies: A Practical Introduction*. Routledge.
- Jonsson, A. (2013). Facilitating productive use of feedback in higher education. *Active Learning in Higher Education*, 14(1), 63–76. <https://doi.org/10.1177/1469787412467125>
- Jurdak, M. (2016). *Learning and Teaching Real World Problem Solving in School Mathematics: A Multiple-Perspective Framework for Crossing the Boundary*. Springer.
- Jorna, R.J.(1990). Knowledge representation and symbols in the mind. Tubingen, Stauffenberg Verlag.
- Jůvová, A., Duda, O., Stuit, P., & Velthuis, C. (2023). Evropský učitel jako reflektivní praktik: Dovednosti pro 21. století v edukaci. Univerzita Palackého v Olomouci.
- Kaldrimidou, M., & C. Sakonidis. (2011). Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for The Psychology of Mathematics Education. PME.
- Kalhous, Z., & Obst, O. (2002). Školní didaktika. Portál.

- Kalhous, Z., & Obst, O., et al. (2009). Školní didaktika. Praha: Portál.
- Kasačová, B., & Cabanová, M. (2013). Pedagogická diagnostika v teorii a aplikacích. Belianum.
- Kašćák, O. (2002). Je pedagogika připravená na změny perspektiv? Rekontextualizace pohledů na výchovně-vzdělávací proces pod vlivem radikálního individuálního konstruktivismu a postmoderního sociálního konstruktivismu. *Pedagogika*, 52(4), 388–414.
- Kašparová, M., Frank, J., Honzík, L., Pěchoučková, Š., Hašek, R. (2023). Matematika 7 pro každého sedmáka a sedmačku. Škola s nadhledem. Plzeň: Fraus.
- Kattmann, U. (2009). Didaktická rekonstrukce: učitelské vzdělávání a reflexe výuky. In T. Janík (Ed.), *Možnosti rozvíjení didaktických znalostí obsahu u budoucích učitelů* (s. 17–31). Paido. http://www.paido.cz/pdf/moznosti_rozvijeni_didaktickyh_znalost_i_obsahu.pdf
- Kelly, D. L., Centurino, V. A. S., Martin, M. O., & Mullis, I. V. S. (2020). *TIMSS 2019 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science*. Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center. <https://timssandpirls.bc.edu/timss2019/encyclopedia/>
- Ketterlin-Geller, L., & Chard, D. J. (2011). Algebra readiness for students with learning difficulties in grades 4-8: Support through the study of number. *Australian Journal of Learning Difficulties*, 16(1), 65–78. <http://doi.org/10.1080/19404158.2011.563478>
- Killion, J. P., & Todnem, G. R. (1991). A Process for Personal Theory Building. *Educational Leadership*, 48(6), 14–16. <https://eric.ed.gov/?id=EJ422847>
- Kincheloe, J. L. (2003). *Teachers as researchers: qualitative inquiry as a path to empowerment*. Routledge.
- Klečková, M., & Bílek, M. (2007). *Soubor podpůrných materiálů pro transformaci didaktického modelu výuky přírodovědných předmětů*. Univerzita Palackého v Olomouci.
- Klement, M., Bártek, K., Dostál, J., & Kubrický, J. (2017). *ICT nástroje a učitelé: adorace, či rezistence?* Univerzita Palackého v Olomouci.
- Knecht, P. (2007). Didaktická transformace aneb od „didaktického zjednodušení“ k „didaktické rekonstrukci“. *Orbis Scholae*, 2(1), 68. <https://www.ped.muni.cz/weduresearch/publikace/0011.pdf>
- Komenský, J. A. (1947) Didaktika analytická. Praha.
- Kontorovich, I. (2021). Minding mathematicians' discourses in investigations of their feedback on students' proofs: A case study. *Educational Studies in Mathematics*, 107(1), 213–234. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10035-2>
- Kope, M. (2006). Understanding e-Literacy. Published in the Book Digital Literacies for Learning. Facet Publishing.

- Kopecký, K., Szotkowski, R., Kubala, L., Krejčí, V. (2021). Moderní technologie ve výuce. O moderních technologiích ve výuce s pedagogy pro pedagogy. Univerzita Palackého v Olomouci.
- Korthagen, F.A.J. (2011). Making teacher education relevant for practice: The pedagogy of realistic teacher education. *Orbis Scholae*, 5(2), 31–50. <https://doi.org/10.14712/23363177.2018>
- Kosíková, V. (2011). *Psychologie ve vzdělávání a její psychodidaktické aspekty*. Grada Publishing.
- Kosíková, V., & Černá, K. (2013). Výzkum kvality informační funkce hodnocení ve středoškolské praxi. *Pedagogika*, 63(3), 372–392.
- Kospentaris, G., Spyrou, P., & Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics* 77(1), 105–127. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9303-8>
- Koucký, J., Bartušek, A., Kostecká, Y., Šťastný, V., Zelenka, M., Boudová, S., Pražáková, D., Basl, J., Suchomel, P., Pavlas, T., & Modráček, Z. (2023). *Kvalifikace, příprava a kompetence učitelů*. Česká školní inspekce a Pedagogická fakulta UK. https://www.csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/2023_přilohy/Dokumenty/Kvalifikace-priprava-a-kompetence-ucitelu_studie_F.pdf
- Kreber, C., & Craton, P. (2000). Exploring the scholarship of teaching. *The Journal of Higher Education*, 71(4), 476–495. <https://doi.org/10.2307/2649149>
- Krynický, M. (2010). Souvislosti a matematika, https://krynicky.cz/martin/Uceni/Souvislosti/01_Matematika.htm
- Kučerová, H. (2017). *Organizace znalostí: klíčová témata*. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum.
- Kubicová, S. (2015). *Badatelsky orientovaná výuka biologie*. Ostravská univerzita v Ostravě.
- Kuhn, D. (2016). What Do Young Science Students Need to Learn About Variables? *Science Education*, 100(2), 392–403.
- Kulič, V. (1971). *Chyba a učení: funkce chybného výkonu v učení a v jeho řízení*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství.
- Kůrka, P. (2023). *Prostory a geometrie: Od Eukleida k Einsteinovi*. Karolinum.
- Kursch, M. (2018a). Trendy v digitalizaci metod vzdělávání. In J. Veteška (Ed.), *Proceedings of the 8th International Adult Education Conference 11-12 December 2018: Vzdělávání dospělých 2018 – transformace v éře digitalizace a umělé inteligence* (s. 199–210). Česká andragogická společnost.
- Kursch, M. (2018b). *Využití informačních technologií ve vzdělávání*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Kursch, M. (2019). Trendy v digitalizaci metod vzdělávání. In J. Veteška (Ed.), *Vzdělávání dospělých 2018 – transformace v éře digitalizace a umělé inteligence*. Česká andragogická společnost.

- Kursch, M. (2022). Využití informačních a komunikačních technologií ve vzdělávání: monografie. Praha: Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova.
- Kuřina, F. (2009). Didaktická transformace obsahu a školská praxe. *Pedagogika*, *LIX*, 298–308. https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/files/2013/12/P_2009_3_07_Didaktická_298_308.pdf
- Kuřina, F. (2014). Reforma naší školy a problémy matematického vzdělávání. *Matematika – fyzika – informatika*, (23), 241–248. https://mfi.upol.cz/files/23/2304/mfi_2304_241_248.pdf
- Květoň, P., Ott, M., & Vavroš, M. (2010). *Metodika výuky matematiky na 2. stupni základních škol a středních školách z pohledu pedagogické praxe – náměty pro začínajícího učitele*. Ostravská univerzita v Ostravě.
- Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24* (1), 41-61.
- Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Landis, J. R., & Koch, G. G. (1977). The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data. *Biometrics*, *33*(1), 159–174. <https://doi.org/10.2307/2529310>
- Langr, L. (1984). *Úloha motivace ve vyučování na základní škole*. SPN.
- Lankshear, C., & M. Knobel. (2008). Introduction. In C. Lankshear & M. Knobel (Eds.), *Digital Literacies: Concepts, Policies and Practices* (pp. 1–15). Peter Lang.
- Lawton, D., & Gordon, P. (1993). *Dictionary of education*. Hodder & Stoughton.
- Leont'jev, A. N. (1978). *Činnost, vědomí, osobnost*. Svoboda.
- Lesh, R. A., Kaput. J. J., & Hamilton, E. (2020). *Foundations for the Future in Mathematics Education*. Taylor & Francis.
- Lew, K., Fukawa-Connelly, T. P., Mejia-Ramos, J. P., & Weber, K. (2016). Lectures in advanced mathematics: Why students might not understand what the mathematics professor is trying to convey. *Journal for Research in Mathematics Education*, *47*(2), 162–198. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.47.2.0162>
- Lewin, K. (1946). Action Research and Minority Problems. *Journal Of Social Issues*, *2*(4), 34–46. <https://doi.org/10.1111/j.1540-4560.1946.tb02295.x>
- Lezcano, A. (2022). *Advancing STEM Education and Innovation in a Time of Distance Learning*. IGI Global.
- Lyle, S. (2008). Dialogic teaching: Discussing theoretical context and reviewing evidence from classroom practice. *Language and Education*, *22*(3), 222–240.
- Majcík, M. (2022). *Práce učitele s žákovskou chybou v komunikaci s celou třídou*. Masarykova univerzita.
- Maňák, J. (1998). *Rozvoj aktivity, samostatnosti a tvořivosti žáků*. Masarykova univerzita.
- Maňák, J., & Švec, V. (2003). *Výukové metody*. Paido.

- Mareš, J. (1975). Interakce učitel – žáci v zjednodušeném modelu hromadného vyučování. *Pedagogika*, 25(5), 617–628.
- Mareš, J. (1983). Jak zjišťovat reliabilitu pozorování? *Pedagogika*, 2, 169–189. <https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?p=4951>
- Mareš, J. (2015). Tvorba případových studií pro výzkumné účely. *Pedagogika*, 65(2), 113–142.
- Mareš, J., & Krivohlavý, J. (1995). *Komunikace ve škole*. Masarykova univerzita.
- Maršák, J. (2009, 10. srpna). *PISA a TIMSS – různé tváře matematické gramotnosti*. NPI Metodický portál RVP.cz. <https://clanky.rvp.cz/clanek/o/z/3250/PISA-A-TIMSS---RUZNE-TVARE-MATEMATICKE-GRAMOTNOSTI.html>
- Martin, A. (2006a) The Landscape of Digital Literacy. Glasgow. DigEuLit Project.
- Martin, A. (2006b) Towards a Framework for Digital Literacy. Glasgow. DigEuLit Project.
- Martin, A. (2008). Digital Literacy and the "Digital Society". In C. Lankshear & M. Knobel (Eds.), *Digital Literacies: Concepts, Policies & Practices* (pp. 151–176). Peter Lang Inc. https://pages.ucsd.edu/~bgoldfarb/comt109w10/reading/Lankshear-Knobel_et_al-DigitalLiteracies.pdf
- Martin, P., & Bateson, P. (2009). *Úvod do teorie a metodologie měření chování*. Portál.
- Matasová, B.; Štaffová, I.; Pobořil, M.; Šrubař, K.; Vojta J. et al.. (2019) *Hravá matematika 6*. Praha: Taktik.
- Matthews, M. (2012). *Constructivism in Science Education: A Philosophical Examination*. Springer.
- Matusov, E. (2009). *Journey into dialogic pedagogy*. Nova Publishers.
- Matusov, E., & Hayes, R. (2000). Sociocultural critique of Piaget and Vygotsky. *New Ideas in Psychology*, 18(2-3), 215–239. [https://doi.org/10.1016/S0732-118X\(00\)00009-X](https://doi.org/10.1016/S0732-118X(00)00009-X)
- McCridle, M. (2020). *Understanding Generation Alpha*. McCrindle Research Pty. <https://generationalalpha.com/wp-content/uploads/2020/02/Understanding-Generation-Alpha-McCrindle.pdf>
- McLaughlin, C., Black-Hawkins, K., & Townsend, A. (2005). *Practitioner Research and Enquiry in Networked Learning Communities*. University of Cambridge, Faculty of Education.
- Medlíková, O. (2021). *Umění motivace: návody a tipy pro pracovní i rodinný život*. Grada Publishing.
- Meyers, E. M., Erickson, I., & Small, R. V. (2013). Digital literacy and informal learning environments: an introduction. *Learning, Media and Technology*, 38(4), 355–367. <https://doi.org/10.1080/17439884.2013.783597>
- Mieg, H. A. (2019). *Inquiry-Based Learning - Undergraduate Research: The German Multidisciplinary Experience*. Springer.

- Miles, H. R., Kobett, B. M., & Williams, L. A. (2018). *The Mathematics Lesson-Planning Handbook, Grades 6-8: Your Blueprint for Building Cohesive Lessons*. Corwin.
- Millar, M., & Schrier, T. (2015). Digital or Printed Textbooks: Which do Students Prefer and Why? *Journal of Teaching in Travel & Tourism*, 15(2), 166–185. <https://dx.doi.org/10.1080/15313220.2015.1026474>
- Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, 63(2), 81–97.
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017–1054. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>
- Mishra, R. C. (2009). *Lesson Planning*. APH Publishing Corporation.
- Močnik, F. (1875). *Frant. Močníka základové měřictví a rejsování*. Tempsky.
- Mojžíšek, L. (1969). Formalismus v pracovních dovednostech mládeže. *Sborník prací Filozofické fakulty brněnské univerzity*, 18(14), 89–112. https://digilib.phil.muni.cz/_flysystem/fedora/pdf/112535.pdf
- Molnár, J., Schubertová, S., & Vaněk, V. (2008). *Konstruktivismus ve vyučování matematice: [učební text]*. Univerzita Palackého v Olomouci.
- Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children views of the difference between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), 179–196. <https://doi.org/10.1023/A:1004175020394>.
- Mourshed, M., Chijioke, C., & Barber, M. (2010). *How the world's most improved school systems keep getting better*. McKinsey & Company. https://www.mckinsey.com/~media/mckinsey/industries/public%20and%20social%20sector/our%20insights/how%20the%20worlds%20most%20improved%20school%20systems%20keep%20getting%20better/how_the_worlds_most_improved_school_systems_keep_getting_better.pdf
- MPSV ČR. (2015) Strategie digitální gramotnosti ČR na období 2015-2020. https://www.mpsv.cz/documents/20142/848077/strategie_dg.pdf/2c044975-1c29-fcba-ba22-f1c1388c1865
- MŠMT ČR. (2014). Strategie digitálního vzdělávání do roku 2020. <https://www.msmt.cz/uploads/DigiStrategie.pdf>
- MŠMT ČR. (2020). Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2030+. https://www.msmt.cz/uploads/Brozura_S2030_online_CZ.pdf
- MŠMT ČR. (2023). *RVP – Rámcové vzdělávací programy*. Edu.cz. <https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/>
- MŠMT ČR, & NPI ČR. (2023a). Co je nového v RVP. *Revize edu.cz*. <https://revize.edu.cz/co-se-meni>
- MŠMT ČR, & NPI ČR. (2023b). *Matematika a její aplikace – 2. stupeň*. Revize RVP edu.cz. <https://revize.edu.cz/clanky/matematika-a-jeji-aplikace-2-stupen>
- Müllerová, O., & Hoffmanová, J. (1994). *Kapitoly o dialogu*. Pansofia.

- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International results in mathematics*. TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- Najder, K. (1989). *Reprezentacje i ich reprezentjace*. Wroclaw - Warszawa - Krakow - Gdańsk - Lodź, WPAN.
- Nelešovská, A. (2005). *Pedagogická komunikace v teorii a praxi*. Grada Publishing.
- Neumajer, O. (2019). *Digitální technologie a vzdělávání ve světle výzkumů, našich přesvědčení a otázek*. Minikonference PPUČ, Plzeň, Česká republika. https://clanky.rvp.cz/wp-content/uploads/prilohy/22160/neumajer_minikonferen-ceppuc.pdf
- Nezvalová, D. (2003). Akční výzkum ve škole. *Pedagogika*, (3), 300–308. <https://pages.pdf.cuni.cz/pedagogika/?p=1942%20title=>
- Nezvalová, D. (Ed.). (2005). *Konstruktivismus a jeho aplikace v integrovaném pojetí přírodovědného vzdělávání. Bibliografie publikací k projektu GAČR 406/05/0188*. Univerzita Palackého v Olomouci.
- Nezvalová, D. (Ed.). (2006a). *Integrovaná přírodověda*. Univerzita Palackého v Olomouci.
- Nezvalová, D. (Ed.). (2006b). *Konstruktivismus a jeho aplikace v integrovaném pojetí přírodovědného vzdělávání. Úvodní studie k projektu GAČR 406/05/0188*. Univerzita Palackého v Olomouci.
- Nezvalová, D. (2007). *Projekt didaktického systému integrované výuky přírodovědných předmětů (biologie, fyzika, chemie)*. Univerzita Palackého v Olomouci.
- Nicosia, L., & Nicosia, F. J. (2022). *Digital Literacy: Skills & Strategies*. Salem Press.
- Norton, A., & Alibali, M. W. (2018) *Constructing Number: Merging Perspectives from Psychology and Mathematics Education*. Německo: Springer International Publishing.
- Novosák, J., Pražáková, D., Suchomel, P., Dvořák, J., & Folwarczný, R. (2020). *Rozvoj matematické gramotnosti na základních školách ve školním roce 2019/2020: Tematická zpráva*. Česká školní inspekce. https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el_publicace/Tematicke%20zpravy/TZ_Rozvoj-matematicke-gramotnosti-na-ZS-2019-2020.pdf
- Novosák, J., Suchomel, P., Dvořák, J., Zatloukal, T., & Pražáková, D. (2022). *Vyhodnocení výsledků vzdělávání žáků 5. a 9. ročníků základních škol a víceletých gymnázií: Tematická zpráva*. Česká školní inspekce. https://www.csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/2022_prilohy/Dokumenty/TZ_Vyhodnoceni-vysledku-vzdelavani-zaku-5-a-9-rocniku-ZS-a-VG.pdf
- Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Novotná, J. (2012). *Motivace nadaných žáků a studentů v matematice a přírodních vědách*. Masarykova univerzita.
- Novotná, J. (2013). *Motivace nadaných žáků a studentů v matematice a přírodních vědách II*. Masarykova univerzita.

- Novotná, J., Pelantová, A., Hrabáková, H., & Krátká, M. (2006). Příprava a analýza didaktických situací. In *Podíl podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: studijní materiály k projektu*. JČMF.
- Nowlan, R. A. (2017). *Masters of Mathematics: The Problems They Solved, Why These Are Important, and What You Should Know about Them*. Sense Publishers.
- NPI. (2021). *Čtenářská, matematická a digitální gramotnost v uzlových bodech vzdělávání: výstup projektu Podpora práce učitelů (PPUČ)*. Národní pedagogický institut České republiky.
- O'Brien, R. (1998). An Overview of the Methodological Approach of Action Research. In R. Richardson (Ed.), *Theory and Practice of Action Research*. University of Toronto, Faculty of Information Studies. <https://www.web.ca/~robrien/papers/arfinal.html>
- Odvárko, O., & Kadleček, J. (2011). *Matematika pro 7. ročník základní školy* (3. vyd.). Prometheus.
- OECD. (2018). *PISA 2021 Mathematics Framework (Draft)*. OECD Publishing. <https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa-2021-mathematics-framework-draft.pdf>
- OECD. (2019a). *TALIS 2018 Results (Volume I): Teachers and School Leaders as Lifelong Learners*. TALIS, OECD Publishing.
- OECD. (2019b). *PISA 2021 Creative Thinking Framework*. OECD Publishing. <https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA-2021-creative-thinking-framework.pdf>
- Okoň, W. (1966). *K základům problémového vyučování*. SPN.
- Opava, Z. (1989). *Matematika kolem nás*. Albatros.
- Palečková, J., & Tomášek, V. (2001). *Posun ve znalostech čtrnáctiletých žáků v matematice a přírodních vědách*. ÚIV.
- Pavelková, I., & Hrabal, V. (2012). Mathematics in perception of pupils and teachers. *Orbis Scholae*, 6(2), 119–132. <https://doi.org/10.14712/23363177.2015.44>
- Pecina, P., & Zormanová, L. (2009). *Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi*. Masarykova univerzita.
- Pech, P., Činčurová, L., Günzel, M., Hájková, R., Hašek, R., Hraniček, A., Kazda, M., Kopecký, J., Kotlasová, M., Petrášková, V., Samková, L., Suchopárová, T., Šimandl, V., & Vaníček, J. (2015). *Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií*. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- Pelcák, S. (2021). *Psychologie vývojová: průvodce předmětem pro studijní program: Sociální patologie a prevence*. Univerzita Hradec Králové, Pedagogická fakulta. https://www.uhk.cz/file/edee/pedagogicka-fakulta/pdf/pracoviste-fakulty/ustav-socialnich-studii/dokumenty/studijni_opory/socialni_patologie_a_prevence_2021/psychologie-vyvojova.pdf
- Petit, M.M., Laird, R.E., Ebby, C.B., & Marsden, E.L. (2022). *A Focus on Fractions: Bringing Mathematics Education Research to the Classroom* (3rd ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003185475>

- Piaget, J. (1947). *La psychologie de l'intelligence*. [The psychology of intelligence]. Armand Colin. <https://doi.org/10.4324/9780203278895>
- Pivarč, J. (2017). *Poznatky o žákovských prekonceptcích mentálního postižení v kontextu proměny paradigmatu současného vzdělávání*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Podlahová, L., Vaněčková, M., Heřmánková, P., Klement, M., & Marešová, J. (2012). *Didaktika pro vysokoškolské učitele: Vybrané kapitoly*. Grada Publishing.
- Podroužek, L. (1998). *Úvod do didaktiky předmětů o přírodě a společnosti*. Vydavatelství Západočeské univerzity.
- Polák, J. (2016a). *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně. Obecná didaktika matematiky II. část*. Fraus.
- Polák, J. (2016b). Minkowského metoda měření délek, obsahů a povrchů geometrických útvarů. *Matematika – fyzika – informatika*, 25, 321–334. https://mfi.upol.cz/files/25/2505/mfi_2505_321_334.pdf
- Polák, J. (2020). Didaktika matematiky v 21. století a realita výuky. *Matematika–Fyzika–Informatika*, 29(4), 256–276. <https://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/514>
- Popper, K. (1978). *Three Worlds*. The University of Michigan. https://tannerlectures.utah.edu/_resources/documents/a-to-z/p/popper80.pdf
- Posamentier, A. S., & Krulik, S. (2016). *Effective Techniques to Motivate Mathematics Instruction*. Taylor & Francis.
- Posnick-Goodwin, S. (2010) Meet generation Z. *California Educator*. Vol 14, No. 5.
- Průcha, J. (1997) *Moderní pedagogika*. Praha: Portál.
- Průcha, J. (1982). Psychodidaktická teorie B. S. Blooma. *Pedagogika*, 2, 209–219. <https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?p=5120>
- Průcha, J. (1983). *Perspektivy vzdělání*. Praha: SPN.
- Průcha, J. (1989). *Hodnocení vzdělávacích výsledků školské soustavy*. Praha: Ústav školských informací.
- Průcha, J. (2000). *Přehled pedagogiky: úvod do studia oboru*. Portál.
- Průcha, J. (2001). *Multikulturní výchova: teorie - praxe - výzkum*. ISV.
- Průcha, J. (2002). *Učitel: současné poznatky o profesi*. Portál.
- Průcha, J. (2009a). *Přehled pedagogiky: úvod do studia oboru* (3. vyd.). Portál.
- Průcha, J. (2009b). *Pedagogická encyklopedie*. Portál.
- Průcha, J. (2017). *Moderní pedagogika – brožovaná* (6. vyd.). Portál.
- Průcha, J. (2020). *Psychologie učení: Teoretické a výzkumné poznatky pro edukační praxi*. Grada Publishing.
- Průcha, J., & Veteška, J. (2014). *Andragogický slovník* (2. vyd.). Grada Publishing.
- Průcha, J., Mareš, J., Walterová, E. (2003). *Pedagogický slovník*. 4. aktualiz. vyd. Praha: Portál.

- Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (1995). *Pedagogický slovník*. Portál.
- Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (1998). *Pedagogický slovník* (2. vyd.). Portál.
- Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (2001). *Pedagogický slovník*. (3. vyd.). Portál.
- Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (2009). *Pedagogický slovník* (6. vyd.). Portál.
- Průcha, J., Walterová, E., & Mareš, J. (2013). *Pedagogický slovník* (7. vyd.). Portál.
- Pupala, B., & Osuská, L. (2000). Vývoj, podoby a odkazy teorie konstruktivismu. *Pedagogická revue*, 52(2), 101–113.
- Radovanović, D. (2023). *Digital Literacy and Inclusion: Stories, Platforms, Communities*. Springer.
- Raelin, J. A. (2002). 'I Don't Have Time to Think!' (vs. The Art of Reflective Practice). *Reflections*, 4(1), 66–79. <https://ssrn.com/abstract=3190188>
- Rakušanová, A. (1957). K řešení složených slovních úloh. *Matematika ve škole*, 7(5), 274–291.
- Rao, M. S. (2010). *Achievement Motivation and Achievement in Mathematics*. Discovery Publishing.
- Reich, K. (1997). *Systemisch-konstruktivistische Pädagogik: Einführung in Grundlagen einer interaktionistisch-konstruktivistischen Pädagogik*. Luchterhand.
- Reich, K. (2005). *Konstruktivistische Didaktik auf dem Weg, die Didaktik neu zu erfinden*. In R. Voss, *LernLust und EigenSinn: systemisch-konstruktivistische Lernwelten*. Carl-Auer-Verlag.
- Reininger, M., & Karbginsky, D. (2021). *Digital Literacy*. Chemeketa Press.
- Rendl, M. (2008). O konstruktivismu ve vyučování matematiky. *Pedagogika*, 58(2), 167–203.
- Rendl, M., & Vondrová, N. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, L., Páchová, A., Pavelková, I., Smetáčková, I., Tauchmanová, E., & Žalská, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Reusser, K. (2001). Unterricht zwischen Wissensvermittlung und Lernen lernen. In C. Finkbeiner & G. W. Schnittmann (Eds.), *Lehren und Lernen im Kontext empirischer Forschung und Fachdidaktik* (pp. 106–140). Auer.
- Reusser, K. (2006). Konstruktivismus – vom epistemologischen Leitbegriff zur Erneuerung der didaktischen Kultur. In M. Baer, M. Fuchs, P. Füglistner, K. Reusser, & H. Wyss (Eds.), *Didaktik auf psychologischer Grundlage. Von Hans Aebli's kognitions-psychologischer Didaktik zur modernen Lehr- und Lernforschung* (pp. 152–166). Verlag.
- Reznitskaya, A., & Gregory, M. (2013). Student thought and classroom language: Examining the mechanisms of change in dialogic teaching. *Educational Psychologist*, 48(2), 114–133.

- Richardson, V. (2005). *Constructivist Teacher Education: Building a World of New Understandings*. Taylor & Francis.
- Richterová, B., Seberová, A., Kubíčková, H., Sekera, O., CISOVSKÁ, H., & ŠIMLOVÁ, Ž. (2020). *Akční výzkum v teorii a praxi*. Ostravská univerzita Pedagogická fakulta.
- Robb, M. (2017). Screenagers: growing up in the digital age. *Journal of Children and Media*, 11(3), 1–4. <http://dx.doi.org/10.1080/17482798.2017.1341121>
- Robertson, S. A., & Graven, M. (2019). Exploratory mathematics talk in a second language: A sociolinguistic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 215–232. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9840-5>
- Robová, J., Moravcová, V., Halas, Z., & Hromadová, J. (2019). Žákovské koncepty trojúhelníku a obdélníku na začátku druhého stupně vzdělávání. *Scientia in Educatione*, 10(1), 68–89. <https://doi.org/10.14712/18047106.1211>
- Ronis, D. L. (2008). *Problem-Based Learning for Math & Science: Integrating Inquiry and the Internet*. SAGE.
- Rosado, E., & Bélisle, C. (2006). *Analysing Digital Literacy Frameworks*. Université Lumière Lyon 2.
- Roth, K. J., Druker, S. L., Garnier, H. E., Lemmens, M., Chen, C., Kawanaka, T., Rasmussen, D., Trubacova, S., Warvi, D., Okamoto, Y., Gonzales, P., Stigler, J., & Gallimore, R. (2006). *Teaching Science in Five Countries: Results From the TIMSS 1999 Video Study (NCES 2006-011)*. U. S. Department of Education, Institute of Education Sciences, National Center for Education Statistics. <https://nces.ed.gov/pubs2006/2006011.pdf>
- Roth, L. (1991). *Pädagogik Handbuch für Studium und Praxis*. Ehrenwirth Verlag.
- Roubíček, F. (2014). Geometrické konstrukce a pravidelné mozaiky. In M. Uhlířová (Ed.), *Matematika 6. Matematické vzdělávání v primární škole – tradice a inovace* (s. 227–231). Univerzita Palackého.
- Rudduck, J. (2001). Teachers as researchers: the quiet revolution. In *DfES and TTA Conference*.
- Ruisel, I., & Ruiselová, Z. (1990). *Vybrané problémy psychológie poznávania*. Veda.
- Runco, M., & Pritzker, S. (2020). *Encyclopedia of Creativity*. Elsevier Science.
- Ryan, J., Glasswell, K., Jones, M., & Brandenburg, R. (2017). *Reflective Theory and Practice in Teacher Education*. Springe.
- Rys, S. (1975). *Hospitace v pedagogické praxi*. SPN.
- Sagor, R. (2005). *The Action Research Guidebook. A Four-Step Process for Educators and School Teams*. Corwin Press.
- Samková, L., Hošpesová, A., Roubíček, F., & Tichá, M. (2015). Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*, 6(1), 91–122.
- Santagata, R. (2005). Practices and beliefs in mistake-handling activities: A video study of Italian and US mathematics lessons. *Teaching and Teacher Education*, 21(5), 491–508.

- Scott, P., Ametller, J., Mortimer, E., & Emberton, J. (2010). Teaching and learning disciplinary knowledge: developing the dialogic space for an answer when there isn't even a question. In K. Littleton & C. Howe (Eds.), *Educational dialogues. Understanding and promoting productive interaction* (pp. 289–303). Routledge.
- Sedláček, J. (1981). *Slovník školské matematiky*. SPN.
- Sedláková, M. (1992) Příspěvek k analýze pojmu mentální reprezentace v soudobé psychologické teorii. *Československá psychologie*, 36, č. 4, s. 289 - 308.
- Sedláková, M. (1995). Mentální reprezentace: formy, druhy a vlastnosti. *Sborník prací Filozofické fakulty brněnské univerzity*, 44(129), 37–46.
- Sedláková, M. (2004). *Vybrané kapitoly z kognitivní psychologie*. Grada Publishing.
- Seifried, J., & Wuttke, E. (2010). Student errors: how teachers diagnose them and how they respond to them. *Empirical Research in Vocational Education and Training*, (2), 147–162. <https://doi.org/10.1007/BF03546493>
- Sell, K., & Lynch, D. E. (2014). *The Teacher as Researcher: Case Studies in Educational Research*. Lulu.com.
- Sellars, M. (2012). Teachers and change: The role of reflective practice. *Social and Behavioral Sciences*, 55, 461–469.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.
- Sfard, A. (2018). Commognition. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 1–7). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100031-1
- Sfard, A., & Lavie, I. (2005). Why Cannot Children See as the Same What Grown-Ups Cannot See as Different? – Early Numerical Thinking Revisited. *Cognition and Instruction*, 23(2), 309–237. http://dx.doi.org/10.1207/s1532690xci2302_3
- Sfard, A., & Prusak, A. (2005) Telling identities: in search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, 34(4), 14–22. <https://doi.org/10.3102/0013189X034004014>
- Sherin, M. G., & Es, van E. A. (2005). Using Video to Support Teachers' Ability to Notice Classroom Interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 13(3), 475–491.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–11. <https://www.wcu.edu/webfiles/pdfs/shulman.pdf>
- Schank, R. C., & Abelson, R. P. (1977). *Scripts, Plans, Goals and Understanding*. Psychology Press.
- Sieglová, D. (2019). *Konec školní nudy: didaktické metody pro 21. století*. Grada Publishing.
- Siegler, R. S., & Pyke, A. A. (2013). Developmental and individual differences in understanding of fractions. *Developmental Psychology*, 49(10), 1994–2004. <https://doi.org/10.1037/a0031200>

- Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(1), 13–19. <https://sieglertc.columbia.edu/wp-content/uploads/2019/02/2013-SieglerFazioBaileyZhou-fac.pdf>
- Skalková, J. (1971) Aktivita žáků ve vyučování. Praha
- Skalková, J. (1999). *Obecná didaktika*. ISV.
- Skalková, J. (2007). *Obecná didaktika* (2. vyd.). Grada Publishing.
- Skarupská, H. (2017). Kulturní identita jako součást výchovy k občanství u adolescentů. *Sociální pedagogika*, 5(2), 15–26. <https://doi.org/10.7441/soced.2017.05.02.02>
- Skidmore, D., & Murakami S. (2016). *Dialogic Pedagogy: The Importance of Dialogue in Teaching and Learning*. Multilingual Matters.
- Slavík, J. (2011). K předmětu didaktik v estetických oborech vzdělávání. *Pedagogická orientace*, 21(2), 207–225.
- Slavík, J., & Janík, T. (2007). Fakty a fenomény v průniku didaktické teorie, výzkumu a praxe vzdělávání. *Pedagogika*, 57(3), 263–274.
- Slavík, J., Janík, T. (2012). Kvalita výuky: obsahově zaměřený přístup ke studiu procesů vyučování a učení. *Pedagogika*, 62(3), 262–286.
- Slavík, J., Knecht, P., Najvar, P., & Janík, T. (2017). *Transdisciplinární didaktika: o učitelském sdílení znalostí a zvyšování kvality výuky napříč obory*. Brno: Masarykova univerzita
- Slavík, M., Dyrtrtová, R., Hanušová, M., Husa, J., Krahulcová, B., Kučírková, D., Linhartová, D., Miller, I., Oudová, D., & Votava, J. (2012). *Vysokoškolská pedagogika: Pro odborné vzdělávání*. Grada Publishing.
- Slavík, J., & Najvar, P. (2016). Editorial Kultury vyučování a učení v oborech školního vzdělávání. *Orbis Scholae*, 10(2), 7.
- Slavík, J., Janík, T., Najvar, P., & Knecht, P. (2017a). *Transdisciplinární didaktika: o učitelském sdílení znalostí a zvyšování kvality výuky napříč obory*. Masarykova univerzita.
- Slavík, J., Stará, J., Uličná, K., & Najvar, P. (Eds.). (2017b). *Didaktické kazuistiky v oborech školního vzdělávání*. Masarykova univerzita. <https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-8768-2017>
- Smejkalová, K. (2014). K pojetí konstruktivismu jakožto modernímu paradigmatu vzdělávání, *Paideia: filozofický e-journal Univerzity Karlovy XI/I*
- Smetáčková, I. (2018). Obliba školní matematiky a její souvislost s externím hodnocením a sebehodnocením. *Scientia in educatione*, 9(2), 44–56. <https://doi.org/10.14712/18047106.1049>

- Smith, D. L., Waugh, F., & Ewing, R. (2022). *Reflective Practice in Education and Social Work: Interdisciplinary Explorations*. Taylor & Francis.
- Smith, K. (2011). Cultivating innovative learning and teaching cultures: a question of garden design. *Teaching in Higher Education*, 16(4), 427–438. <https://doi.org/10.1080/13562517.2011.560374>
- Sochacka, N. W., Walther, J., Morelock, J. R., Hunsu, N. J., & Carnell, P. H. (2020). Cultivating a culture of scholarly teaching and learning in a college of engineering: An ecological design approach. *Australasian Journal of Engineering Education*, 25(2), 165–176. <https://doi.org/10.1080/22054952.2020.1864087>
- Sousedík, P. (2015). Co zkoumá epistemologie? *Theologica*, 5(2), 151–170.
- Sparks-Langer, G. M., & Colton, A. B. (1991). Synthesis of Research on Teachers' Reflective Thinking. *Educational Leadership*, 48(6), 37–44. https://files.ascd.org/staticfiles/ascd/pdf/journals/ed_lead/el_199103_sparks-langer.pdf
- Spilková, V., & Tomková, A. (2010). *Kvalita učitele a profesní standard*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Spitzer, M. (2014). Digitální demence: jak připravujeme sami sebe a naše děti o rozum. Brno: Host.
- Stacey, K., & Turner, R. (2014). *Assessing Mathematical Literacy*. Springer.
- Stará, J., Chvál, M., & Starý, K. (2017). The Role of Textbooks in Primary Education. *e-Pedagogium*, 17(4), 60–69.
- Steffe, P. L., & Gale, J. (2012). *Constructivism in Education*. Taylor & Francis.
- Stehlíková, N. (2007). Úvod. In A. Hošpesová, N. Stehlíková, & M. Tichá (Eds.), *Cesty zdokonalování kultury vyučování matematice* (s. 7). Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.
- Stehlíková, N., & Cachová, J. (2006). *Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe*. Ministerstvo školství mládeže a tělovýchovy ČR.
- Stehlíková, N., & Tichá, M. (2011). Didaktika matematiky a její proměny. *Pedagogická orientace*, 21(2), 156–170.
- Stenhouse, L. (1975). *An introduction to curriculum research and development*. Heinemann.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1998). Teaching is a Cultural Activity. *American Educator*, Winter 1998, 1–12.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving in the classroom*. The Free Press.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2000). The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom. *Journal of Curriculum Studies*, 32(6), 867–874. <https://doi.org/10.1080/00220270050167215>
- Straková, J. (2016). *Mezinárodní výzkumy výsledků vzdělávání: Metodologie, přínosy, rizika a příležitosti*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

- Střelec, S. (2005). Studie z teorie a metodiky výchovy II. Brno, MSD.
- Suchoradský, O. (2010, 16. června). *Aktivizující činnosti ve výuce matematiky*. NPI Metodický portál RVP.CZ. <https://clanky.rvp.cz/clanek/r/ZBBADA/8463/AKTIVIZUJICI-CINNOSTI-VE-VYUCE-MATEMATIKY.html>
- Svobodová, J. (2007) Výběr z reformních i současných edukačních koncepcí. Brno: MSD
- Swargiary, K., & Kavita, R. (2023). *Crafting Effective Lesson Plans: A Comprehensive Guide for Educators*. LAP.
- Sylva, K., Hurry, J., & Peters, S. (1997). Why is reading recovery successful? A Vygotskian critique of an early reading intervention. *European Journal of Psychology of Education*, 12, 373–384. <https://doi.org/10.1007/BF03172799>
- Šafránková, D. (2019). *Pedagogika* (2. vyd.). Grada Publishing.
- Šed'ová, K. (2011). Od pseudodialogu k dialogickému vyučování. In T. Janík, P. Knecht, & S. Šebestová (Eds.), *Směšený design v pedagogickém výzkumu: Sborník příspěvků z 19. výroční konference České asociace pedagogického výzkumu* (s. 39–45). Masarykova univerzita. Dostupné z: <http://www.ped.muni.cz/capv2011/sbornikprispevku/sedova.pdf>
- Šed'ová, K., & Šalamounová, Z. (2016). *Jak se učitelé učí: cestou profesního rozvoje k dialogickému vyučování*. Masarykova univerzita.
- Šed'ová, K., Švaříček, R., Sedláček, M., Šalamounová, Z. (2016) *Jak se učitelé učí: cestou profesního rozvoje k dialogickému vyučování*. Brno: Masarykova univerzita.
- Šimik, O. (2017). Pinterest – using the picture social network in classes. *Rocznik Lubuski*, 43, 203–214. http://www.roczniklubuski.uz.zgora.pl/wydania/tom_43/RL_T43_1_Simik.pdf
- Škoda, J. (2005) Současné trendy v přírodovědném vzdělávání. In Acta Universitatis Purkynianae 106. *Studia Paedagogica*. Ústí nad Labem: UJEP.
- Štech, S. (2004a). O vlamování se do otevřených dveří. *Pedagogika*, 54(2), 173–175.
- Štech, S. (2004b). Psychodidaktika jako obrat k tématu účinného vyučování. Komentář na okraj Kansanenovy úvahy „Didaktika a její vztah k pedagogické psychologii“. *Pedagogika*, 54(1), 58–63.
- Štěpáník, S. (2019). *Vztah jazyka a komunikace v česko-slovensko-polské didaktické reflexi*. Karolinum.
- Švamberg Šauerová, M. (2018). *Techniky osobnostního rozvoje a duševní hygieny učitele*. Grada Publishing.
- Švaříček, R., & Šed'ová, K. (2007). *Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách*. Portál.
- Švaříček, R., Šed'ová, K., Šalamounová, Z., & Sedláček, M. (2017). *Jak se učitelé učí: Cestou profesního rozvoje k dialogickému vyučování*. Masarykova univerzita.
- Švec, V. (1996). Sebereflexe studentů v pregraduální didaktické přípravě. *Pedagogika*, 46(3), 266–276.

- Technologická agentura ČR (TAČR), (2017). Definice technického vzdělávání. https://www.mpo.cz/assets/cz/prumysl/zpracovatelsky-prumysl/2017/5/V2_Definice-obsahu-TeV-na-ZS.pdf
- Taylor, T. (2019). Evolutionary innovations and where to find them: Routes to open-ended evolution in natural and artificial systems. *Artificial Life*, 25(2), 207–224. https://doi.org/10.1162/artl_a_00290
- Thompson, D. (2014). Reasoning-and-proving in the written curriculum: Lessons and implications for teachers, curriculum designers, and researchers. *International Journal of Educational Research*, 64, 141–148. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2013.09.013>
- Tirosh, D., Tsamir, P., Tabach, M., Levenson, E., & Barkai, R. (2011). Geometrical knowledge and geometrical self-efficacy among abused and neglected kindergarten children. *Scientia in educatione*, 2(1), 23–36. <https://doi.org/10.14712/18047106.52>
- Tollingerová, D. (1970). *Úvod do teorie a praxe programované výuky a výcviku*. Středisko pro výzkum učeb. metod a prostředků.
- Tomášek, V., & Potužníková, E. (2004). *Netradiční úlohy: Problémové úlohy mezinárodního výzkumu PISA*. Ústav pro informace ve vzdělávání.
- Tomášek, V., Boudová, S., Klement, L., Basl, J., Zatloukal, T., Pražáková, D., & Janoušková, S. (2020). *Mezinárodní šetření TIMSS 2019: Národní zpráva*. Česká školní inspekce. https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el._publikace/Mezi_narodni%20setreni/TIMSS_2020_e-verze.pdf
- Tuohilampi, L. (2022). *Seriously Fun Maths: The Complete Guide to Motivational Mathematics*. Amba Press.
- Turek, I. (1982). *O problémovom vyučovaní*. Bratislava:SPN.
- UNESCO. (2004). *The Plurality of literacy and its Implications for Policies and Programmes*. United Nations Educational Scientific and Cultural Organization.
- Vácha, Z., & Bohdalová, M. (2021). Analýza didaktické vybavenosti učebnic přírodopisu pro 2. stupeň základních škol. *e-Pedagogium*, 21(1), 36–53. <https://dx.doi.org/10.5507/epd.2021.004>
- Vališová, A., & Kovaříková, M. (2021). *Obecná didaktika: A její širší pedagogické souvislosti v úkolech a cvičeních*. Grada Publishing.
- Vališová, A., Kasíková, H., & Bureš, M. (2011). *Pedagogika pro učitele* (2. vyd.). Grada Publishing.
- Von Glasersfeld, E. (1984). An introduction to radical constructivism. In P. Watzlawick (Ed.), *The invented reality* (17-40), New York, NY:Norton.
- Vondrová, N. (2014). *Úvod dodidaktiky matematiky*. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy
- Vondrová, N. (2019). *Didaktika matematiky jako nástroj zvládnání kritických míst v matematice*. Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.
- Vondrová, N., & Žalská, J. (2013). Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In M. Rendl, N. Vondrová, & et al. *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů* (s. 63–126). Univerzita Karlova v Praze.

- Vondrová, N., Havlíčková, R., Rendl, M., Žalská, J. (2015) *Kritická místa matematiky základní školy: metodický materiál pro učitele*. Praha. Univerzita Karlova. Karolinum.
- Vondrová, N., Rendl, M. (2015) *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Praha. Univerzita Karlova. Karolinum.
- Vondrová, N., Rendl, M., Havlíčková, R., Hříbková, L., Páchová, A., & Žalská, J. (2016). *Kritická místa matematiky základní školy v řešení žáků*. Karolinum.
- Vondrová, N., Havlíčková, R., Hirschová, M., Chvál, M., Novotná, J., Páchová, A., Smetáčková, I., Šmejkalová, M., & Tůmová, V. (2019). *Matematická slovní úloha: Mezi matematikou, jazykem a psychologií*. Karolinum.
- Vondrová, N., Novotná, M., Pavlasová, L., Robová, J., Stará, J., & Uličná, K. (2020). *Video-interventions: Bridges between theory and practice in pre-service teachers' development*. Karolinum.
- Vygotsky, L.S. (1968). *Thought and language* (newly revised, translated, and edited by Alex Kozulin). Cambridge, MA: MIT Press.
- Vygotskij, L. S. (1970). *Myšlení a řeč*. SPN.
- Vygotskij, L. S. (1976). *Vývoj vyšších psychických funkcí*. Státní pedagogické nakladatelství.
- Vygotskij, L. S. (2004). *Psychologie myšlení a řeči*. Portál.
- Walle Van de, J., Karp, K., & Bay-Williams, J. (2016). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*. Pearson.
- Watson, A., Jones, K., & Pratt, D. (2013). *Key ideas in teaching mathematics: Research-based guidance for ages 9-19*. Oxford University Press.
- Wegerif, R. (2006). Dialogic Education. In *Oxford Research Encyclopaedia of Education*. Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/acrefore/9780190264093.013.396>
- Weinert, F. E. (1997). Lernkultur im Wandel. In E. Beck, T. Guldemann, & M. Zuber (Eds.), *Lern- kultur im Wandel* (pp. 11–29). UVK.
- Wertsch, J. V. (1985). *Vygotsky and the social formation of mind*. Cambridge: Harvard University Press.
- Weinstein, A. M., & Siste, K. (2022) Excessive and Problematic Smartphone Usage. (n.p.): Frontiers Media SA.
- Wiater, W. (2005). Die neue Lernkultur im Widerstreit der Meinungen. In E. M. Lanthaler, & R. Meraner (Eds.), *Neue Lernkultur im Kindergarten und Schule* (s. 46–62). Pädagogisches Institut
- William, P., & Minnian, A. (2007). Exploring the challenges of developing digital literacy in the context of special education needs. Australia: Auslib Pr.
- Zatloukal, T., Beneš, T., Basl, J., Bláhová, A., Borkovcová, I., Colledani, M., Čámský, P., Dobalová, L., Dvořák, D., Erhart, J., Folwarczný, R., Fürstová, A., Guziurová Tomiczková, G., Hedvíková, E., Hlásenská, I., Holomek, J., Chaloupková, P., Janošek, L., Jíšová, M., ... Žilka, L. (2023). *Kvalita vzdělávání v České republice ve školním*

roce 2022/2023: Výroční zpráva České školní inspekce. Česká školní inspekce. https://www.csicr.cz/CSICR/media/Prilohy/2023_přilohy/Dokumenty/VZ_2023_e-verze_final.pdf

- Zeichner, K. M., & Tabachnick, B. R. (1991). Reflections on reflective teaching. In B. R. Tabachnick & K. M. Zeichner (Eds.), *Issues and practices in inquiry-oriented teacher education* (pp. 1–18). Falmer Press.
- Zormanová, L. (2012). *Výukové metody v pedagogice: tradiční a inovativní metody, transmisivní a konstruktivistické pojetí výuky, klasifikace výukových metod*. Grada Publishing.
- Zormanová, L. (2014). *Obecná didaktika: Pro studium a praxi*. Grada Publishing.
- Zormanová, L. (2017). *Didaktika dospělých*. Grada Publishing.
- Zounek, J., & Šedřová, K. (2009). *Učitelé a technologie: mezi tradičním a moderním pojetím*. Paido.
- Zwozdiak-Myers, P. (2009). *An analysis of the concept reflective practice and an investigation into the development of student teachers' reflective practice within the context of action research*. Semantic Scholar.

Seznam obrázků

<i>Obrázek 1</i> Proces uchopování čísla tři (Hejný & Kuřina, 2015, s. 100).....	31
<i>Obrázek 2</i> Tři roviny existence prezentovaného obsahu (Janko, 2012, s. 34).....	33
<i>Obrázek 3</i> Formy existence obsahu vzdělávání; Průcha (2017, s. 246, tab. 6.2).....	35
<i>Obrázek 4</i> Roviny existence obsahu a obsahové transformace; Janík et al. (2009, s. 38, obr. 7).....	37
<i>Obrázek 5</i> Bloomova taxonomie a slovník aktivních sloves používaných k vymezení cílů vyučování (Skalková, 2007, s. 122, tab. 9).....	39
<i>Obrázek 6</i> Didaktická analýza učiva (Kalhous & Obst, 2002, s. 358–359).....	42
<i>Obrázek 7</i> Struktura vyučovací hodiny (Miles et al., 2018, s. 107, obr. 9.1, volně přeloženo).....	45
<i>Obrázek 8</i> Proces sebereflexe a její struktura (Dytrtová & Krhutová, 2009, s. 57, tab. 8).....	49
<i>Obrázek 9</i> PISA 2022 testová úloha The beauty od powers (OECD, 2018, s. 55–57, volně přeloženo).....	60
<i>Obrázek 10</i> Badatelsky orientovaná úloha (Samková et al., 2015, s. 110).....	62
<i>Obrázek 11</i> PISA 2022 (ČŠI, 2022a, s. 12).....	65
<i>Obrázek 12</i> PISA 2022 testová úloha Dice and stories (OECD, 2018, s. 32, volně přeloženo).....	66
<i>Obrázek 13</i> Zájmy napříč generacemi, (McCridle, 2020, s. 9, volně přeloženo).....	79
<i>Obrázek 14</i> Graduující cyklus akce a výzkumu (Janík, 2004, s. 9, obr. 1).....	88
<i>Obrázek 15</i> Učebnice Taktik – Hravá matematika 6 (Matasová et al., 2019, s. 22).....	114
<i>Obrázek 16</i> Tematická vrstva – Didaktická kazuistika 1.....	120
<i>Obrázek 17</i> Konceptová vrstva – Didaktická kazuistika 1.....	121
<i>Obrázek 18</i> Kompetenční vrstva – Didaktická kazuistika 1.....	121
<i>Obrázek 19</i> Diagram hloubkové struktury – Didaktická kazuistika 1.....	122
<i>Obrázek 20</i> Filtrování informací ve třech typech paměti (Hofmann & Löhle, 2017, s.15, obr. 2).....	131
<i>Obrázek 21</i> Počet paměťových míst – vzorec na výpočet povrchu kvádrů.....	132
<i>Obrázek 22</i> Netradiční úloha na výpočet obvodu a obsahu.....	133
<i>Obrázek 23</i> Řešení netradiční úlohy na výpočet obvodu a obsahu.....	133

<i>Obrázek 24</i> Zápis učitele Šťastného na tabuli.....	137
<i>Obrázek 25</i> Tematická vrstva – Didaktická kazuistika 2.....	140
<i>Obrázek 26</i> Konceptová vrstva – Didaktická kazuistika 2	141
<i>Obrázek 27</i> Kompetenční vrstva – Didaktická kazuistika 2	141
<i>Obrázek 28</i> Diagram hloubkové struktury – Didaktická kazuistika 2	142
<i>Obrázek 29</i> Slovní úloha 1 - didaktická kazuistika 3 (Kašparová et al., 2023, s. 32)...	153
<i>Obrázek 30</i> Slovní úloha 2 - didaktická kazuistika 3 (MŠMT ČR, CERMAT, 2023)	159
<i>Obrázek 31</i> Tematická vrstva - didaktická kazuistika 3	160
<i>Obrázek 32</i> Konceptová vrstva - didaktická kazuistika 3.....	161
<i>Obrázek 33</i> Kompetenční vrstva - didaktická kazuistika 3.....	162
<i>Obrázek 34</i> Diagram hloubkové struktury - didaktická kazuistika 3.....	162
<i>Obrázek 35</i> Sčítání zlomků – názorná ukázka	166

Seznam tabulek

Tabulka 1 Literatura pro tvorbu dotazníkového šetření 1.....	91
Tabulka 2 Shoda odpovědí respondentů v opakovaném šetření.....	97
Tabulka 3 Úrovně učebních úloh (Tollingerová, 1970)	98
Tabulka 4 Vysvětlivky využití barev – hloubkový model struktury výuky	100
Tabulka 5 Upravený model hloubkové struktury výuky	101
Tabulka 6 Neshoda v odpovědi mezi D1 a D2 u učitelů na 2. stupni.....	106
Tabulka 7 Učitel Veselý – Dotazníkové šetření 1	109
Tabulka 8 Učitel Veselý – rozhovor před vyučovací hodinou	111
Tabulka 9 Pohled do výuky 1: Didaktická kazuistika 1	115
Tabulka 10 Pohled do výuky 2 – Didaktická kazuistika 1	117
Tabulka 11 Pohled do výuky 3: Didaktická kazuistika 1	119
Tabulka 12 Učitel Šťastný – Dotazníkové šetření 1	128
Tabulka 13 Učitel Šťastný – Rozhovor před pořízením záznamu vyučovací hodiny .	129
Tabulka 14 Pohled do výuky 1 – Didaktická kazuistika 2	135
Tabulka 15 Pohled do výuky 2 – Didaktická kazuistika 2	136
Tabulka 16 Pohled do výuky 3 – Didaktická kazuistika 2	137
Tabulka 17 Pohled do výuky 4 – Didaktická kazuistika 2	138
Tabulka 18 Učitel Milý – dotazníkové šetření 1.....	148
Tabulka 19 Rozhovor před vyučovací hodinou – učitel Milý	149
Tabulka 20 Pohled do výuky 1 - didaktická kazuistika 3	154
Tabulka 21 Pohled do výuky 2 - didaktická kazuistika 3	155
Tabulka 22 Pohled do výuky 3 - didaktická kazuistika 3	157
Tabulka 23 Pohled do výuky 4 - didaktická kazuistika 3	158

Přílohy

Příloha 1 – Dotazníkové šetření 1 (pro 2. stupeň ZŠ)

- 1) Délka Vaší pedagogické praxe je...
 - a. méně než 5 let nebo 5 let
 - b. více než 5 let
- 2) Matematiku vyučuji na...
 - a. 1. stupni ZŠ
 - b. 2. stupni ZŠ
- 3) Jakému tematickému okruhu bude Vámi plánovaná vyučovací hodina věnována?
 - a. Číslo a proměnná
 - b. Závislosti, vztahy a práce s daty
 - c. Geometrie v rovině a v prostoru
 - d. Nestandardní aplikační úlohy a problémy
- 4) Na jaké učivo bude plánovaná vyučovací hodina zaměřena?

Číslo a proměnná – dělitelnost, celá čísla, desetinná čísla, zlomky, poměr, procenta, mocniny a odmocniny, výrazy, rovnice

Geometrie v rovině a v prostoru - rovinné útvary, metrické vlastnosti v rovině, prostorové útvary, konstrukční úlohy

Závislosti, vztahy a práce s daty - závislosti a data, funkce

Nestandardní aplikační úlohy a problémy – číselné a logické řady, číselné a obrázkové analogie, logické a netradiční geometrické úlohy

- 5) Vámi vybrané učivo blíže specifikujte.
- 6) Z nabídky vyberte očekávaný výstup, ke kterému by měla plánovaná vyučovací hodina přispět: Žák...

M-9-1-01: provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu

M-9-1-02: zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor

M-9-1-03: modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel

M-9-1-04: užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek–část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)

M-9-1-05: řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracuje s měřítky map a plánů

M-9-1-06: řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek)

M-9-1-07: matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním

M-9-1-08: formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav

M-9-1-09: analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel

M-9-2-01: vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data

M-9-2-02: porovnává soubory dat

M-9-2-03: určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti

M-9-2-04: vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem

M-9-2-05: matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů

M-9-3-01: zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku

M-9-3-02: charakterizuje a třídí základní rovinné útvary

M-9-3-03: určuje velikost úhlu měřením a výpočtem

M-9-3-04: odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů

M-9-3-05: využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh

M-9-3-06: načrtne a sestrojí rovinné útvary

M-9-3-07: užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků

M-9-3-08: načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově středově souměrný útvar

M-9-3-09: určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti

M-9-3-10: odhaduje a vypočítá objem a povrch těles

M-9-3-11: načrtne a sestrojí síť základních těles

M-9-3-12: načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině

M-9-3-13: analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu

M-9-4-01: užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

M-9-4-02: řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí

7) Vámi plánovaná vyučovací hodina matematiky směřuje k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vede žáka k...

- a. užívání prostředků výpočetní techniky (především kalkulátory, vhodný počítačový software, určité typy výukových programů) a používání některých dalších pomůcek. Zdokonalují se rovněž v samostatné a kritické práci se zdroji informací.
- b. využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech – odhady, měření a porovnávání velikostí a vzdáleností, orientace
- c. rozvíjení paměti žáků prostřednictvím numerických výpočtů a osvojování si nezbytných matematických vzorců a algoritmů
- d. rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů
- e. rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, k poznávání jejich charakteristických vlastností a na základě těchto vlastností k určování a zařazování pojmů
- f. vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu
- g. vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model

může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely

- h. provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému
 - i. přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke zdokonalování grafického projevu
 - j. rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně k využití získaného řešení v praxi; k poznávání možností matematiky a skutečnosti, že k výsledku lze dospět různými způsoby
 - k. rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, k soustavné sebekontrolě při každém kroku postupu řešení, k rozvíjení systematickosti, vytrvalosti a přesnosti, k vytváření dovednosti vyslovovat hypotézy na základě zkušenosti nebo pokusu a k jejich ověřování nebo vyvracení pomocí protipříkladů
- 8) Na jakou úroveň vzdělávacích cílů v kognitivní oblasti Vámi plánovaná výuka především cílí? (Za pomlčkou jsou uvedena typická aktivní slovesa k vymezení cílů Bloomovy taxonomie.)
- a. Zapamatování specifické informace (znalost) - Žáci mají např. definovat, doplnit, napsat, opakovat, pojmenovat, popsat, reprodukovat, vybrat, určit, vyjmenovat, memorovat, postupovat podle instrukce, používat z paměti.
 - b. Pochopení (porozumění) - Žáci mají např. dokázat, jinak formulovat, ilustrovat, interpretovat, objasnit, odhadnout, opravit, přeložit, převést, vyjádřit vlastními slovy, vyjádřit jinou formou, vysvětlit, vypočítat, zkontrolovat, změřit
 - c. Aplikace - Žáci mají např. aplikovat, demonstrovat, diskutovat, interpretovat údaje, načrtnout, navrhnout, plánovat, použít, prokázat, registrovat, řešit, uvést vztah mezi, uspořádat, vyčíslit, vyzkoušet...

- d. Analýza - Žáci mají např. analyzovat, provést rozbor, rozčlenit, sjednotit, nadřadit, podřadit, seřadit, vyčlenit, připojit, komunikovat, porovnat vztahy, srovnat s normou, kategorizovat, sjednotit
- e. Hodnocení - Žáci mají např. argumentovat, obhájit, ocenit, oponovat, podpořit, provést kritiku, posoudit, prověřit, vybrat, uvést klady a zápory, zdůvodnit, zhodnotit, shrnout, prokázat....
- f. Tvorba - Žáci mají např. předložit, objevit, nalézt řešení, napadnout, zkonstruovat, zhotovit, vynalézt, sestrojít, zabezpečit, dokázat, vytvořit, přepracovat, modifikovat, optimalizovat ...

9) Na jakou znalostní dimenzi výukových cílů v kognitivní doméně kurikula Vámi plánovaná výuka především cílí?

- a. Znalost faktů - základní prvky, které musí studenti znát, aby byli obeznámeni s disciplínou a byli schopni řešit její problémy
- b. Konceptuální znalost - „vědět o...“, vzájemné vztahy a souvislosti mezi základními prvky uvnitř větších struktur, které umožňují jejich vzájemné fungování
- c. Procedurální znalost - vědět jak něco dělat, metody dotazování, kriteria pro používání dovedností algoritmů, technik a metod
- d. Metakognitivní znalost - obecné znalosti o tom, jak poznáváme a uvažování o vlastním myšlení

- 10) Jaké úrovně učebních úloh hodláte žákům během plánované výuky zadat?
- Úlohy vyžadující paměťovou reprodukci poznatků - úlohy začínají např. slovy: „Kolik..., Jak velký je..., Jak vypadá vzorec..., Jak se nazývá..., Vyjmenujte..., Uveďte pravidlo ..., Definujte...“
 - Úlohy vyžadující jednoduché myšlenkové operace s poznatkem - úlohy začínají např. slovy: „Zjistěte..., Popište..., Co se stane, když ..., Jaký vliv na... má..., Jaký je vztah... k..., Čím se liší..., Porovnejte..., Jaký je postup při..., Jakými prostředky lze dosáhnout cíle...“
 - Úlohy vyžadující složité myšlenkové operace s poznatkem - úlohy začínají např. slovy: „Označte ve schématu..., Přečtěte diagram..., Vysvětlete význam..., Jak rozumíte..., Dokažte, že..., Vyvoďte závěry...“
 - Úlohy vyžadující sdělení poznatků - úlohy začínají např. slovy: „Zpracujte stručně..., Vypracujte zprávu o ..., Na internetu najděte a porovnejte..., Udělejte přehled..., Napište stručný obsah...“
 - Úlohy vyžadující tvořivé myšlení - úlohy začínají např. slovy: „Jak se dá v praxi využít..., Navrhněte praktickou aplikaci..., Na základě vlastního pozorování..., Formulujte úlohu na..., Sestavte dotazy k ...“
- 11) Na jakou úroveň výukových cílů v afektivní doméně kurikula Vámi plánovaná výuka cílí?
- Přijímání (vnímavost) - Žák věnuje pozornost vnějším podnětům. Na této úrovni je žák ochotný vnímat podněty. Na podněty však aktivně nereaguje.
 - Reagování - Žák projevuje dobrovolnou aktivitu ve výuce. Svou aktivitou nezvýrazňuje svůj hodnotový žebříček.
 - Oceňování hodnoty - Žák již ve své činnosti dává najevo vyznávání konkrétních hodnot nebo hodnotové posouzení okolních jevů.
 - Integrace hodnot - Žák ve svém chování vychází ze systému osobně vyznávaných hodnot, v jejichž rámci uzpůsobuje své projevy. Tento systém osobních hodnot je otevřený možným úpravám.
 - Zvnitřnění hodnot v charakteru - Žák již má ujasněnou životní filozofii a žebříček osobních hodnot, v jejichž rámci lze usuzovat na jeho předpokládané projevy chování.

12) Na jakou úroveň výukového cíle v psychomotorické doméně kurikula Vámi plánovaná výuka cílí?

- a. Imitace (nápodoba) - Žák prostřednictvím pozorování napodobuje činnost, a to spontánně nebo pod vedením učitele.
- b. Manipulace (praktická cvičení) - Žák postupuje podle návodu nebo vybírá dle vlastní volby optimální způsoby řešení úkolu.
- c. Zpřesňování - Žák zvolenou činnost ovládá samostatně bez výrazných pochybení.
- d. Koordinace - Žák dokáže spojit různé činnosti, aniž by narušil plynulost dosahování cíle zvolených činností.
- e. Automatizace - Žák pracuje maximálně efektivně, což znamená, že účinně dosahuje cíle a přitom vynakládá relativně málo úsilí.

13) Jaká vyučovací metodu bude během plánované vyučovací hodiny převládat?

- a. Metoda slovní (vyprávění, vysvětlování, rozhovor, práce s textem)
- b. Metoda názorně-demonstrační (předvádění a pozorování, práce s obrazem, instruktáž)
- c. Metoda dovednostně-praktická (napodobování, manipulování, laborování a experimentování...)
- d. Metoda diskusní (alespoň většina žáků je součástí diskuze)
- e. Metoda řešení problémů - učitel klade problémové otázky, žáky motivuje k řešení
- f. Metoda inscenační - simulace reálné situace
- g. Didaktická hra
- h. Jiná...

14) Jaká organizační forma výuky budeme během plánované vyučovací hodiny převládat?

- a. Individuální výuka
- b. Hromadná (frontální) výuka
- c. Individualizovaná výuka
- d. Projektová výuka
- e. Diferenciovaná výuka - přizpůsobená rozdílné úrovni žáků
- f. Skupinová, kooperativní výuka

- g. Týmová výuka
- h. Otevřené vyučování - žáci se mohou volně pohybovat, práce je také volná...
- i. Jiná...

- 15) Jaké didaktické pomůcky či techniku plánujete během vyučovací hodiny použít?
- 16) Jakým způsobem nejčastěji začleňujete ICT do výuky matematiky?
- 17) Jak je pro Vás rozvoj digitální kompetence u žáků ve vyučovacích hodinách matematiky náročný?
- a. Velmi snadný
 - b. Poměrně snadný
 - c. Poměrně náročný
 - d. Velmi náročný
- 18) Pokuste se odhadnout, jaké mají žáci o tématu předběžné znalosti, prekoncepty?
Prekoncept = intuitivní „dětské představy o světě, jejímž prostřednictvím se snaží dát smysl dění okolo sebe.“
- 19) Pokuste se odhadnout, co z Vámi plánované vyučovací hodiny bude pro žáky nejobtížnější?
- 20) Jak budu žáky během plánované výuky aktivizovat?
- a. Diskusní metodou - diskuse (metoda sněhové koule, panelová diskuse ...)
 - b. Heuristickou metodou - metoda řešení problémů, projektová metoda, brainstorming...
 - c. Situační metoda - rozborová metody, řešení konfliktních situací...
 - d. Inscenační metoda - metody dramatické výchovy...
 - e. Didaktickou hrou
 - f. Práci s textem
 - g. Myšlenkovým mapováním
 - h. Skupinovou metodou
 - i. Jiné...
- 21) Jak zajistíte diferencovaný a individuální přístup k žákům s PO? Kolik žáků s PO ve třídě je?
- 22) Připravujete na plánovanou vyučovací hodinu také úlohy, které žákům zadám jako domácí práci?

a. Ano

b. Ne

23) Jaký organizační typ bude během plánované vyučovací hodiny převládat?

a. Individuální vyučování

b. Skupinové vyučování

c. Hromadné vyučování

d. Kooperativní formy vyučování

e. Týmové vyučování

f. Jiné...

24) Jaká fáze vyučovací hodiny je ve Vámi plánované vyučovací hodině nejdelší?

a. Motivace - podnícení zájmu a pozornosti žáka

b. Expozice - zprostředkování, osvojování nového učiva

c. Fixace - upevňování osvojených vědomostí a dovedností

d. Diagnóza - zpětná vazba o žákově práci

e. Aplikace - používání získaných dovedností a vědomostí v praktické činnosti

25) Proč jste tuto fázi zvolili jako nejdelší?

26) Jak a kdy budete zjišťovat pracovní výsledky z této plánované vyučovací hodiny?

27) Plánujete během vyučovací hodiny uplatnit některé mezipředmětové vztahy?

a. Ano

b. Ne

28) S jakými dalšími předměty bude Vámi plánovaná vyučovací hodina matematiky „souviset“?

29) Přiměl Vás tento dotazník k hlubšímu zamyšlení se nad Vámi plánovanou vyučovací hodinou než je při Vaší přípravě běžné?

a. Ano

b. Ne

30) Připomíná tento dotazník Vaši běžnou přípravu na vyučovací hodinu matematiky?

a. Ano

b. Ne

31) Jak dlouho běžně trvá Vaše příprava na vyučovací hodinu matematiky?

32) Z jakých zdrojů nejčastěji při přípravě vyučovacích hodin čerpáte?

33) Byly pro Vás položky v tomto dotazníku jasné a srozumitelné?

a. Ano

b. Ne

34) Byla dle Vás formulace položek dotazníku naprosto jednoznačná?

a. Ano

b. Ne

35) Zdály se Vám některé položky dotazníku sugestivní, tj. takové, že již svou formulací napovídají, jak mají být zodpovězeny?

a. Ano

b. Ne

Příloha 2 – Dotazníkové šetření 1 (pro 1. stupeň ZŠ)

Dotazníkové šetření 1 je shodné pro 1. i 2. stupeň ZŠ vyjma tří otázek níže.

- 3) Jakému tematickému okruhu bude Vámi plánovaná vyučovací hodina věnována?
 - a. Číslo a početní operace
 - b. Závislosti, vztahy a práce s daty
 - c. Geometrie v rovině a v prostoru
 - d. Nestandardní aplikační úlohy a problémy

- 4) Na jaké učivo bude plánovaná vyučovací hodina zaměřena?

Číslo a početní operace – přirozená čísla, celá čísla, desetinná čísla, zlomky, zápis čísla v desítkové soustavě a jeho znázornění, násobilka, vlastnosti početních operací s čísly, písemné algoritmy početních operací

Geometrie v rovině a v prostoru – základní útvary v rovině, základní útvary v prostoru, délka úsečky, jednotky délky a jejich převody, obvod a obsah obrazce, vzájemná poloha dvou přímk v rovině, osově souměrné útvary

Závislosti, vztahy a práce s daty - závislosti a jejich vlastnosti, diagramy, grafy, tabulky, jízdní řády

Nestandardní aplikační úlohy a problémy – slovní úlohy, číselné a obrázkové řady, magické čtverce, prostorová představivost

- 6) Z nabídky vyberte očekávaný výstup, ke kterému by měla plánovaná vyučovací hodina přispět: Žák...

M-3-1-01: používá přirozená čísla k modelování reálných situací, počítá předměty v daném souboru, vytváří soubory s daným počtem prvků

M-3-1-02: čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1 000, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti

M-3-1-03: užívá lineární uspořádání; zobrazí číslo na číselné ose

M-3-1-04: provádí z paměti jednoduché početní operace spřirozenými čísly

M-3-1-05: řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace

M-9-1-06: řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek)

M-5-1-01: využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení

M-5-1-02: provádí písemné početní operace voborupřirozených čísel

M-5-1-03: zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací voboru přirozených čísel

M-5-1-04: řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace vcelém oboru přirozených čísel

M-5-1-05: modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku

M-5-1-06: porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem voboru kladných čísel

M-5-1-07: přečte zápis desetinného čísla a vyznačí na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty

M-5-1-08: porozumí významu znaku „-“pro zápis celého záporného čísla a toto číslo vyznačí na číselné ose

M-3-2-01: orientuje se včase, provádí jednoduché převody jednotek času

M-3-2-02: popisuje jednoduché závislosti zpraktického života

M-3-2-03: doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel

M-5-2-01: vyhledává, sbírá a třídí data

M-5-2-02: čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy

M-3-3-01: rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary ajednoduchá tělesa; nachází vrealitě jejich reprezentaci

M-3-3-02: porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky

M-3-3-03: rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině

M-5-3-01: narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník akružnici); užívá jednoduché konstrukce

M-5-3-02: sčítá a odčítá grafickyúsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran

M-5-3-03: sestrojí rovnoběžky a kolmice

M-5-3-04: určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu

M-5-3-05: rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary aurčí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru

M-5-4-01: řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je doznačné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

Příloha 3 – Posuzování reliability dotazníkového šetření 1

Otázka 1

	Skupina II			
	A	B	Σ	
Skupina I	A	(4)	1	5
	B		(1)	1
	Σ	4	2	6

$$p_p = \frac{1}{6} (4 + 1) = 0,8\bar{3}$$

$$p_o = \frac{1}{6^2} (4 \cdot 5 + 1 \cdot 2) = 0,6\bar{1}$$

$$\kappa = \frac{0,8\bar{3} - 0,6\bar{1}}{1 - 0,6\bar{1}} \doteq 0,57$$

Otázka 2

	Skupina II			
	A	B	Σ	
Skupina I	A	(4)		4
	B	1	(1)	2
	Σ	5	1	6

$$p_p = \frac{1}{6} (4 + 1) = 0,8\bar{3}$$

$$p_o = \frac{1}{6^2} (4 \cdot 5 + 1 \cdot 2) = 0,6\bar{1}$$

$$\kappa = \frac{0,8\bar{3} - 0,6\bar{1}}{1 - 0,6\bar{1}} \doteq 0,57$$

Otázka 8

		Skupina II							
Skupina I		A	B	C	D	E	F	Σ	
	A	(2)							2
	B		(2)						2
	C	1		(1)					2
	D				(0)				0
	E					(0)			0
	F						(0)		0
	Σ	3	2	1	0	0	0	0	6

$$p_p = \frac{1}{6} (2 + 2 + 1 + 0 + 0 + 0) = 0,8\bar{3}$$

$$p_o = \frac{1}{6^2} (2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0,30\bar{5}6$$

$$\kappa = \frac{0,8\bar{3} - 0,30\bar{5}}{1 - 0,30\bar{5}} \doteq 0,76$$

Otázka 9

		Skupina II					
Skupina I		A	B	C	D	Σ	
	A	(3)		1			4
	B		(2)				2
	C			(0)			0
	D				(0)		0
	Σ	3	2	1	0		6

$$p_p = \frac{1}{6} (3 + 0 + 2 + 0) = 0,8\bar{3}$$

$$p_o = \frac{1}{6^2} (3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0) = 0,4\bar{4}$$

$$\kappa = \frac{0,8\bar{3} - 0,4\bar{4}}{1 - 0,4\bar{4}} \doteq 0,7$$

Otázka 10

				Skupina II			
Skupina I		A	B	C	D	E	Σ
	A	(2)					2
	B		(3)				3
	C			(0)			0
	D				(0)		0
	E		1			(0)	1
	Σ	2	4	0	0	0	6

$$p_p = \frac{1}{6} (2 + 3 + 0 + 0 + 0) = 0,8\bar{3}$$

$$p_o = \frac{1}{6^2} (2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0,4\bar{4}$$

$$\kappa = \frac{0,8\bar{3} - 0,4\bar{4}}{1 - 0,4\bar{4}} \doteq 0,7$$

Otázka 11

								Skupina II						
Skupina I		A	B	C	D	E	Σ							
	A	(3)						3						
	B	1	(2)					3						
	C			(0)				0						
	D				(0)			0						
	E						(0)	0						
	Σ	4	2	0	0	0	0	6						

$$p_p = \frac{1}{6} (3 + 2 + 0 + 0 + 0) = 0,8\bar{3}$$

$$p_o = \frac{1}{6^2} (3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0,5$$

$$\kappa = \frac{0,8\bar{3} - 0,5}{1 - 0,5} \doteq 0,67$$

Otázka 12

		Skupina II					
Skupina I		A	B	C	D	E	Σ
	A	(2)					2
	B		(2)				2
	C		1	(0)			1
	D				(0)		0
	E					(1)	1
	Σ	2	3	0	0	1	6

$$p_p = \frac{1}{6} (2 + 2 + 0 + 0 + 1) = 0,\bar{6}$$

$$p_o = \frac{1}{6^2} (2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) = 0,30\bar{5}$$

$$\kappa = \frac{0,\bar{6} - 0,30\bar{5}}{1 - 0,30\bar{5}} \doteq 0,5$$

Otázka 13

		Skupina II								
Skupina I		A	B	C	D	E	F	G	Σ	
	A	(1)								1
	B		(1)	1						2
	C		1	(0)						1
	D				(0)	1				1
	E						(1)			1
	F							(0)		0
	G								(0)	0
	Σ	1	2	1	0	2	0	0	0	6

$$p_p = \frac{1}{6} (1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 + 0) = 0,5$$

$$p_o = \frac{1}{6^2} (1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0,3\bar{8}$$

$$\kappa = \frac{0,5 - 0,3\bar{8}}{1 - 0,3\bar{8}} \doteq 0,18$$

Otázka 14

		Skupina II									
Skupina I		A	B	C	D	E	F	G	H	Σ	
	A	(0)									0
	B		(3)								3
	C			(0)							0
	D		1		(0)						1
	E					(0)					0
	F		1				(0)				1
	G		1					(0)			1
	H								(0)		0
	Σ	0	6	0	0	0	0	0	0	0	6

$$p_p = \frac{1}{6} (0 + 3 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0) = 0,5$$

$$p_o = \frac{1}{6^2} (0 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = 0,5$$

$$\kappa = \frac{0,5 - 0,5}{1 - 0,5} = 0$$

Otázka 17

		Skupina II				
Skupina I		A	B	C	D	Σ
	A	(1)				1
	B		(0)	1		1
	C			(3)	1	4
	D				(0)	0
	Σ	1	0	4	1	6

$$p_p = \frac{1}{6} (1 + 0 + 3 + 0) = 0,6\bar{6}$$

$$p_o = \frac{1}{6^2} (1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 1) = 0,36\bar{1}$$

$$\kappa = \frac{0,6\bar{6} - 0,36\bar{1}}{1 - 0,36\bar{1}} \doteq 0,48$$

Otázka 22

	Skupina II			
Skupina I		A	B	Σ
	A	(2)	1	3
	B		(3)	3
	Σ	2	4	6

$$p_p = \frac{1}{6} (2 + 3) = 0,8\bar{3}$$

$$p_o = \frac{1}{6^2} (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4) = 0,5$$

$$\kappa = \frac{0,8\bar{3} - 0,5}{1 - 0,5} \doteq 0,67$$

Otázka 23

	Skupina II						
Skupina I		A	B	C	D	E	Σ
	A	(0)					0
	B		(1)	1			2
	C			(3)			3
	D			1	(0)		1
	E					(0)	0
	Σ	0	1	5	0	0	6

$$p_p = \frac{1}{6} (0 + 1 + 3 + 0 + 0) = 0,\bar{6}$$

$$p_o = \frac{1}{6^2} (0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) = 0,47\bar{2}$$

$$\kappa = \frac{0,\bar{6} - 0,47\bar{2}}{1 - 0,47\bar{2}} \doteq 0,37$$

Otázka 24

		Skupina II					
Skupina I		A	B	C	D	E	Σ
	A	(1)					1
	B		(1)	1			2
	C		1	(1)			2
	D				(0)		0
	E		1			(0)	1
	Σ	1	3	2	0	0	6

$$p_p = \frac{1}{6} (1 + 1 + 1 + 0 + 0) = 0,5$$

$$p_o = \frac{1}{6^2} (1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = 0,1\bar{6}$$

$$\kappa = \frac{0,5 - 0,1\bar{6}}{1 - 0,1\bar{6}} \doteq 0,4$$

Otázka 27

		Skupina II		
Skupina I		A	B	Σ
	A	(2)	1	3
	B		(3)	3
	Σ	2	4	6

$$p_p = \frac{1}{6} (2 + 3) = 0,8\bar{3}$$

$$p_o = \frac{1}{6^2} (2 \cdot 3 + 3 \cdot 4) = 0,5$$

$$\kappa = \frac{0,8\bar{3} - 0,5}{1 - 0,5} \doteq 0,67$$

Příloha 4 – Dotazníkové šetření 2 (pro 2. stupeň ZŠ)

- 1) Délka Vaší pedagogické praxe je...
 - a. méně než 5 let nebo 5 let
 - b. více než 5 let
- 2) Matematiku vyučuji na...
 - a. 1. stupni ZŠ
 - b. 2. stupni ZŠ
- 3) Jakému učivu byla Vámi realizovaná vyučovací hodina věnována?
 - a. číselné a logické řady
 - b. číselné a obrázkové analogie
 - c. logické a netradiční geometrické úlohy
 - d. rovinné útvary
 - e. metrické vlastnosti v rovině
 - f. prostorové útvary
 - g. konstrukční úlohy
 - h. závislosti a data
 - i. funkce
 - j. dělitelnost přirozených čísel
 - k. celá čísla
 - l. desetinná čísla, zlomky
 - m. poměr
 - n. procenta
 - o. mocniny a odmocniny
 - p. výrazy
 - q. rovnice
- 4) Vámi vybrané učivo blíže specifikujte.
 - 4a) Toto učivo se shoduje s učivem, na které jsem plánoval(a) vyučovací hodinu zaměřit během mé přípravy.
 - a. Ano, vše proběhlo dle původního plánu
 - b. Ne, došlo ke změně
 - 4b) Proč k této změně došlo? Na jaké učivo měla být vyučovací hodina zaměřena původně?

- 5) Vámi realizovaná vyučovací hodina matematiky nakonec směřovala k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že vedla žáka k...
- a. užívání prostředků výpočetní techniky (především kalkulátory, vhodný počítačový software, určité typy výukových programů) a používání některých dalších pomůcek. Zdokonalují se rovněž v samostatné a kritické práci se zdroji informací.
 - b. využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech – odhady, měření a porovnávání velikostí a vzdáleností, orientaci
 - c. rozvíjení paměti žáků prostřednictvím numerických výpočtů a osvojování si nezbytných matematických vzorců a algoritmů
 - d. rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci prostřednictvím řešení matematických problémů
 - e. rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, k poznávání jejich charakteristických vlastností a na základě těchto vlastností k určování a zařazování pojmů.
 - f. vytváření zásoby matematických nástrojů (početních operací, algoritmů, metod řešení úloh) a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu
 - g. vnímání složitosti reálného světa a jeho porozumění; k rozvíjení zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), k vyhodnocování matematického modelu a hranic jeho použití; k poznání, že realita je složitější než její matematický model, že daný model může být vhodný pro různorodé situace a jedna situace může být vyjádřena různými modely
 - h. provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému

- i. přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke zdokonalování grafického projevu

5a) Tyto klíčové kompetence se shodují s těmi, které jsem původně plánoval(a) během vyučovací hodiny rozvíjet.

- a. Ano, podařilo se rozvíjet dle původního plánu
- b. Ne, došlo k odklonu od původního plánu

5b) Proč k této změně došlo? Které klíčové kompetence měly být rozvíjeny původně?

6) Z nabídky vyberte očekávaný výstup(y), ke kterému nakonec Vámi realizovaná vyučovací hodina především přispěla: Žák....

M-9-1-01: provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu

M-9-1-02: zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor

M-9-1-03: modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel

M-9-1-04: užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek–část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)

M-9-1-05: řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracuje s měřítky map a plánů

M-9-1-06: řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek)

M-9-1-07: matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním

M-9-1-08: formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav

M-9-1-09: analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel

M-9-2-01: vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data

M-9-2-02: porovnává soubory dat

M-9-2-03: určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti

M-9-2-04: vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem

M-9-2-05: matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů

M-9-3-01: zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku

M-9-3-02: charakterizuje a třídí základní rovinné útvary

M-9-3-03: určuje velikost úhlu měřením a výpočtem

M-9-3-04: odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů

M-9-3-05: využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh

M-9-3-06: načrtne a sestrojí rovinné útvary

M-9-3-07: užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků

M-9-3-08: načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově středově souměrný útvar

M-9-3-09: určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti

M-9-3-10: odhaduje a vypočítá objem a povrch těles

M-9-3-11: načrtne a sestrojí síť základních těles

M-9-3-12: načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině

M-9-3-13: analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu

M-9-4-01: užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací

M-9-4-02: řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí

6a) Tyto očekávané výstupy se shodují s těmi, k jejichž rozvoji měla původně plánovaná vyučovací hodina přispět.

a. Ano, původní plán byl naplněn

b. Ne, došlo k odklonu od původního plánu

6b) Proč k této změně došlo? K rozvoji kterých očekávaných výstupů vyučovací hodina měla přispět původně?

7) Na jakou úroveň vzdělávacích cílů v kognitivní oblasti Vámi realizovaná výuka především cílila? (Za pomlčkou jsou uvedena typická aktivní slovesa k vymezení cílů Bloomovy taxonomie.)

- a. Zapamatování specifické informace (znalost) - Žáci mají např. definovat, doplnit, napsat, opakovat, pojmenovat, popsat, reprodukovat, vybrat, určit, vyjmenovat, memorovat, postupovat podle instrukce, používat z paměti.
- b. Pochopení (porozumění) - Žáci mají např. dokázat, jinak formulovat, ilustrovat, interpretovat, objasnit, odhadnout, opravit, přeložit, převést, vyjádřit vlastními slovy, vyjádřit jinou formou, vysvětlit, vypočítat, zkontrolovat, změřit
- c. Aplikace - Žáci mají např. aplikovat, demonstrovat, diskutovat, interpretovat údaje, načrtnout, navrhnout, plánovat, použít, prokázat, registrovat, řešit, uvést vztah mezi, uspořádat, vyčíslit, vyzkoušet...
- d. Analýza - Žáci mají např. analyzovat, provést rozbor, rozčlenit, sjednotit, nadřadit, podřadit, seřadit, vyčlenit, připojit, komunikovat, porovnat vztahy, srovnat s normou, kategorizovat, sjednotit
- e. Hodnocení - Žáci mají např. argumentovat, obhájit, ocenit, oponovat, podpořit, provést kritiku, posoudit, prověřit, vybrat, uvést klady a zápory, zdůvodnit, zhodnotit, shrnout, prokázat....
- f. Tvorba - Žáci mají např. předložit, objevit, nalézt řešení, napadnout, zkonstruovat, zhotovit, vynalézt, sestrojít, zabezpečit, dokázat, vytvořit, přepracovat, modifikovat, optimalizovat ...

7a) Tato úroveň vzdělávacích cílů se shoduje s tou, na kterou měla původně plánovaná vyučovací hodina cílit.

- a. Ano, původní plán byl naplněn
- b. Ne, došlo k odklonu od původního plánu

7b) Proč k této změně došlo? Na kterou úroveň vzdělávacích cílů měla vyučovací hodina původně cílit?

8) Na jakou znalostní dimenzi výukových cílů v kognitivní doméně kurikula Vámi realizovaná výuka především cílila?

- a. Znalost faktů - základní prvky, které musí studenti znát, aby byli obeznámeni s disciplínou a byli schopni řešit její problémy

- b. Konceptuální znalost - „vědět o...“, vzájemné vztahy a souvislosti mezi základními prvky uvnitř větších struktur, které umožňují jejich vzájemné fungování
- c. Procedurální znalost - vědět jak něco dělat, metody dotazování, kritéria pro používání dovedností algoritmů, technik a metod
- d. Metakognitivní znalost - obecné znalosti o tom, jak poznáváme a uvažování o vlastním myšlení

8a) Tato znalostní dimenze se shoduje s tou, na kterou jsem původně plánoval(a) během vyučovací hodiny cílit.

- a. Ano, podařilo se dle původního plánu
- b. Ne, došlo k odklonu od původního plánu

8b) Proč k této změně došlo? Na kterou znalostní dimenzi měla výuka cílit původně

9) Jaké úrovně učebních úloh jste žákům během realizované výuky zadal(a)?

- a. Úlohy vyžadující paměťovou reprodukci poznatků - úlohy začínají např. slovy: „Kolik..., Jak velký je..., Jak vypadá vzorec..., Jak se nazývá..., Vyjmenujte..., Uveďte pravidlo ..., Definujte...“
- b. Úlohy vyžadující jednoduché myšlenkové operace s poznatky - úlohy začínají např. slovy: „Zjistěte..., Popište..., Co se stane, když ..., Jaký vliv na... má..., Jaký je vztah... k..., Čím se liší..., Porovnejte..., Jaký je postup při..., Jakými prostředky lze dosáhnout cíle...“
- c. Úlohy vyžadující složité myšlenkové operace s poznatky - úlohy začínají např. slovy: „Označte ve schématu..., Přečtěte diagram..., Vysvětlete význam..., Jak rozumíte..., Dokažte, že..., Vyvodte závěry...“
- d. Úlohy vyžadující sdělení poznatků - úlohy začínají např. slovy: „Zpracujte stručně..., Vypracujte zprávu o ..., Na internetu najděte a porovnejte..., Udělejte přehled..., Napište stručný obsah...“
- e. Úlohy vyžadující tvořivé myšlení - úlohy začínají např. slovy: „Jak se dá v praxi využít..., Navrhněte praktickou aplikaci..., Na základě vlastního pozorování..., Formulujte úlohu na..., Sestavte dotazy k ...“

9a) Tato úroveň učebních úloh se shoduje s tou, která měla být původně během vyučovací hodiny zadána.

- a. Ano, podařilo se dle původního plánu

b. Ne, došlo k odklonu od původního plánu

9b) Proč k této změně došlo? Která úroveň měla být během výuky zadána původně?

10) Na jakou úroveň výukových cílů v afektivní doméně kurikula Vámi realizovaná výuka cílila?

- a. Přijímání (vnímavost) - Žák věnuje pozornost vnějším podnětům. Na této úrovni je žák ochotný vnímat podněty. Na podněty však aktivně nereaguje.
- b. Reagování - Žák projevuje dobrovolnou aktivitu ve výuce. Svou aktivitou nezvýrazňuje svůj hodnotový žebříček.
- c. Oceňování hodnoty - Žák již ve své činnosti dává najevo vyznávání konkrétních hodnot nebo hodnotové posouzení okolních jevů.
- d. Integrace hodnot - Žák ve svém chování vychází ze systému osobně vyznávaných hodnot, v jejichž rámci uzpůsobuje své projevy. Tento systém osobních hodnot je otevřený možným úpravám.
- e. Zvnitřnění hodnot v charakteru - Žák již má ujasněnou životní filozofii a žebříček osobních hodnot, v jejichž rámci lze usuzovat na jeho předpokládané projevy chování.

10a) Tato úroveň výukových cílů v afektivní doméně se shoduje s tou, na kterou měla původně vyučovací hodina cílit.

- a. Ano, podařilo se dle původního plánu
- b. Ne, došlo k odklonu od původního plánu

10b) Proč k této změně došlo? Na kterou úroveň měla výuka cílit původně?

11) Na jakou úroveň výukového cíle v psychomotorické doméně kurikula Vámi realizovaná výuka cílila?

- a. Imitace (nápodoba) - Žák prostřednictvím pozorování napodobuje činnost, a to spontánně nebo pod vedením učitele.
- b. Manipulace (praktická cvičení) - Žák postupuje podle návodu nebo vybírá dle vlastní volby optimální způsoby řešení úkolu.
- c. Zpřesňování - Žák zvolenou činnost ovládá samostatně bez výrazných pochybení.
- d. Koordinace - Žák dokáže spojit různé činnosti, aniž by narušil plynulost dosahování cíle zvolených činností.

- e. Automatizace - Žák pracuje maximálně efektivně, což znamená, že účinně dosahuje cíle a přitom vynakládá relativně málo úsilí.

11a) Tato úroveň výukových cílů v psychomotorické doméně se shoduje s tou, na kterou měla původně vyučovací hodina cílit.

- a. Ano, podařilo se dle původního plánu
- b. Ne, došlo k odklonu od původního plánu

11b) Proč k této změně došlo? Na kterou úroveň měla výuka cílit původně?

12) Jaká vyučovací metoda během realizované vyučovací hodiny převládala?

- a. Metoda slovní (vyprávění, vysvětlování, rozhovor, práce s textem)
- b. Metoda názorně-demonstrační (předvádění a pozorování, práce s obrazem, instruktáž)
- c. Metoda dovednostně-praktická (napodobování, manipulování, laborování a experimentování...)
- d. Metoda diskusní (alespoň většina žáků je součástí diskuze)
- e. Metoda řešení problémů - učitel klade problémové otázky, žáky motivuje k řešení
- f. Metoda inscenační - simulace reálné situace
- g. Didaktická hra
- h. Jiná...

12a) Tato vyučovací metoda se shoduje s tou, která měla původně ve vyučovací hodině převládat.

- a. Ano, podařilo se dle původního plánu
- b. Ne, došlo k odklonu od původního plánu

12b) Proč k této změně došlo? Která vyučovací metoda měla ve výuce převládat původně?

13) Jaká organizační forma výuky převládala během realizované vyučovací hodiny?

- a. Individuální výuka
- b. Hromadná (frontální) výuka
- c. Individualizovaná výuka
- d. Projektová výuka
- e. Diferenciovaná výuka - přizpůsobená rozdílné úrovni žáků
- f. Skupinová, kooperativní výuka

- g. Týmová výuka
- h. Otevřené vyučování - žáci se mohou volně pohybovat, práce je také volná...
- i. Jiná...

13a) Tato organizační forma se shoduje s tou, která měla původně ve vyučovací hodině převládat.

- a. Ano, podařilo se dle původního plánu
- b. Ne, došlo k odklonu od původního plánu

13b) Proč k této změně došlo? Která organizační forma měla ve výuce převládat původně?

14) Jaké didaktické pomůcky či ICT byly během realizované vyučovací hodiny použity?

15) Jakým způsobem byly tyto pomůcky či ICT během výuky využity?

16) Jaké prekoncepty měli žáci o tématu během realizované vyučovací hodiny?

17) Co bylo pro žáky během realizované vyučovací hodiny nejobtížnější?

18) Jak jste žáky během realizované výuky aktivizoval(a)?

- a. Diskusní metodou - diskuse (metoda sněhové koule, panelová diskuse ...)
- b. Heuristickou metodou - metoda řešení problémů, projektová metoda, brainstorming...
- c. Situační metoda - rozborová metody, řešení konfliktních situací...
- d. Inscenační metoda - metody dramatické výchovy...
- e. Didaktickou hrou
- f. Práci s textem
- g. Myšlenkovým mapováním
- h. Skupinovou metodou
- i. Jiné...

18a) Tento způsob aktivizace se shoduje s tím, který měl žáky původně ve vyučovací hodině aktivizovat.

- a. Ano, podařilo se dle původního plánu
- b. Ne, došlo k odklonu od původního plánu

18b) Proč k této změně došlo? Který způsob aktivizace měl být původně do výuky začleněn?

19) Jaký organizační typ během realizované vyučovací hodiny převládal?

- a. Individuální vyučování
- b. Skupinové vyučování
- c. Hromadné vyučování
- d. Kooperativní formy vyučování
- e. Týmové vyučování

19a) Tento organizační typ se shoduje s tím, který měl původně ve vyučovací hodině převládat.

- a. Ano, podařilo se dle původního plánu
- b. Ne, došlo k odklonu od původního plánu

19b) Proč k této změně došlo? Který organizační typ měl původně ve výuce převládat?

20) Jaká fáze vyučovací hodiny je ve Vámi plánované vyučovací hodině nejdelší?

- a. Motivace - podnícení zájmu a pozornosti žáka
- b. Expozice - zprostředkování, osvojování nového učiva
- c. Fixace - upevňování osvojených vědomostí a dovedností
- d. Diagnóza - zpětná vazba o žakově práci
- e. Aplikace - používání získaných dovedností a vědomostí v praktické činnosti

20a) Tato fáze se shoduje s tou, která měl být původně ve vyučovací hodině nejdelší.

- a. Ano, podařilo se dle původního plánu
- b. Ne, došlo k odklonu od původního plánu

20b) Proč k této změně došlo? Jaká fáze měla být původně ve výuce nejdelší?

21) Jak často provádíte samostatně sebereflexi své pedagogické činnosti po vyučovací hodině matematiky?

- a. Velmi často (1 až 5 krát týdně)
- b. Často (1 až 5 krát měsíčně)
- c. Zřídka (1 až 5 krát za rok)
- d. Velmi zřídka (1 až 5 krát za 5 let)
- e. Jiné

22) Jak často (za rok) jste zapojen(a) do vzájemné hospitace?

23) Jaké pocity ve Vás vzájemná hospitace vyvolává?

- a. Velmi příjemné
- b. Spíše příjemné
- c. Spíše nepříjemné
- d. Nepříjemné

24) Do jaké míry vnímáte reflexi své pedagogické činnosti jako přínosnou?

- a. Velmi přínosnou
- b. Spíše přínosnou
- c. Spíše nepřínosnou
- d. Nemá pro mě žádný přínos

Příloha 5 – Dotazníkové šetření 2 (pro 1. stupeň ZŠ)

Dotazníkové šetření 2 je shodné pro 1. i 2. stupeň ZŠ vyjma dvou otázek, které uvádíme níže.

3) Jakému učivu byla Vámi realizovaná vyučovací hodina věnována?

- a. přirozená čísla
- b. celá čísla
- c. desetinná čísla
- d. zlomky
- e. zápis čísla v desítkové soustavě a jeho znázornění
- f. násobilka
- g. vlastnosti početních operací s čísly
- h. písemné algoritmy početních operací
- i. základní útvary v rovině
- j. základní útvary v prostoru
- k. délka úsečky
- l. jednotky délky a jejich převody
- m. obvod a obsah obrazce
- n. vzájemná poloha dvou přímek v rovině
- o. osově souměrné útvary
- p. závislosti a jejich vlastnosti
- q. diagramy
- r. grafy
- s. tabulky
- t. jízdní řády
- u. slovní úlohy
- v. číselné a obrázkové řady
- w. magické čtverce
- x. prostorová představivost

5) Z nabídky vyberte očekávaný výstup(y), ke kterému nakonec Vámi realizovaná vyučovací hodina především přispěla: Žák....

M-3-1-01: používá přirozená čísla k modelování reálných situací, počítá předměty v daném souboru, vytváří soubory s daným počtem prvků

M-3-1-02: čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1 000, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti

M-3-1-03: užívá lineární uspořádání; zobrazí číslo na číselné ose

M-3-1-04: provádí z paměti jednoduché početní operace spřírozenými čísly

M-3-1-05: řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace

M-9-1-06: řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek)

M-5-1-01: využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení

M-5-1-02: provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel

M-5-1-03: zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel

M-5-1-04: řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel

M-5-1-05: modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku

M-5-1-06: porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel

M-5-1-07: přečte zápis desetinného čísla a vyznačí na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty

M-5-1-08: porozumí významu znaku „-“ pro zápis celého záporného čísla a toto číslo vyznačí na číselné ose

M-3-2-01: orientuje se v čase, provádí jednoduché převody jednotek času

M-3-2-02: popisuje jednoduché závislosti z praktického života

M-3-2-03: doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel

M-5-2-01: vyhledává, sbírá a třídí data

M-5-2-02: čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy

M-3-3-01: rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci

M-3-3-02: porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky

M-3-3-03: rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině

M-5-3-01: narýsuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce

M-5-3-02: sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran

M-5-3-03: sestrojí rovnoběžky a kolmice

M-5-3-04: určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu

M-5-3-05: rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru

M-5-4-01: řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky

Příloha 6 – Informované souhlasy

Vážený/á pane/í řediteli/ředitelko,

obracím se na Vás s prosbou o spolupráci Vaší školy. V současné době vypracovávám rigorózní práci na Jihočeské univerzitě v Českých Budějovicích. Do této závěrečné práce hodlám zařadit akční výzkum, který bych velmi ráda provedla ve vyučovacích hodinách matematiky ve třídách Vaší školy.

Cílem této práce je mapovat a reflektovat schopnosti učitelů připravovat, realizovat a hodnotit svou výuku matematiky. Reflexe vyučovacích hodin bych prováděla na základě videozáznamu, který by byl pořízen bez přítomnosti jiných osob. Výzkum by byl soustředěn pouze na učitele a způsob komunikace mezi učitelem a žáky. Videozáznamy by nebyly nikde uveřejněny, sloužily by pouze jako materiál k tvorbě anonymních didaktických kazuistik (tzn. neuvádí žádná jména, žádné informace o škole).

Výzkum by přispěl k rozvoji hlubší spolupráce učitelů matematiky ZŠ a k rozvoji schopnosti objektivně reflektovat efektivitu námi zvolených způsobů ve výuce matematiky.

Prohlášení

Prohlašuji, že souhlasím s účastí školy ZŠ Dobrá Voda ve výše uvedeném výzkumu. Souhlasím s tím, že všechny získané údaje budou anonymně zpracovány a použity pro účely vypracování závěrečné práce autora tohoto informovaného souhlasu.

V dne:

Podpis ředitele/ředitelky školy:

Vážení rodiče,

obracím se na Vás s prosbou o spolupráci Vašeho syna/dcery. V současné době vypracovávám rigorózní práci na Jihočeské univerzitě v Českých Budějovicích. Do této závěrečné práce hodlám zařadit akční výzkum, který bych velmi ráda provedla ve vyučovacích hodinách matematiky ve třídě, do které Váš/e syn/ dcera chodí.

Cílem této práce je mapovat a reflektovat schopnosti učitelů připravovat, realizovat a hodnotit svou výuku matematiky. Reflexe vyučovacích hodin bych prováděla na základě videozáznamu, který by byl pořízen bez přítomnosti jiných osob. Výzkum by byl soustředěn pouze na učitele a způsob komunikace mezi učitelem a žáky. Videozáznamy by nebyly nikde uveřejněny, sloužily by pouze jako materiál k tvorbě anonymních didaktických kazuistik (tzn. neuvádí žádná jména, žádné informace o škole).

Výzkum by přispěl k rozvoji hlubší spolupráce učitelů matematiky ZŠ a k rozvoji schopnosti objektivně reflektovat efektivitu námi zvolených způsobů ve výuce matematiky.

Prohlášení

Prohlašuji, že souhlasím s účastí školy ZŠ Dobrá Voda ve výše uvedeném výzkumu. Souhlasím s tím, že všechny získané údaje budou anonymně zpracovány a použity pro účely vypracování závěrečné práce autora tohoto informovaného souhlasu.

V dne: Jméno žáka/žákyně:

Podpis zákonného zástupce žáka/žákyně: