UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Funkcie 1. Baireovej triedy

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Pavel Ludvík, Ph.D.**
Vypracoval(a): **Jozef Haňo**
Studijní program: B1101 Matematika
Studijní obor Matematika a její aplikace
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2022

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Jozef Haňo

Název práce: Funkcie 1. Baireovej triedy

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Ludvík, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2022

Abstrakt: Cieľom práce je popísať funkcie 1. Baireovej triedy a skúmať ich vlastnosti. Tieto funkcie sú prirodzeným zovšeobecnením spojitých funkcií, hlavný dôraz práce je preto kladený na problém spojitosti (resp. nespojitosti) funkcií 1. Baireovej triedy. Ukazujeme, že tieto funkcie sú spojité na „veľkej“ množine, přičom „veľkosť“ množiny je vyšetrovaná z hľadiska kategórie. Jedna z kapitol sa venuje tiež Baireovej vete ako doležitej aplikácii kategoriálneho konceptu.

Klíčová slova: Funkcie 1. Baireovej triedy, Baireova veta, spojitosť, množina 1. kategórie

Počet stran: 35

Počet příloh: 0

Jazyk: slovenský

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Jozef Haňo

Title: Baire class one functions

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Pavel Ludvík, Ph.D.

The year of presentation: 2022

Abstract: The aim of this thesis is to describe Baire class one functions and examine their properties. These functions represent natural generalization of continuous functions, and thus the main emphasis of the thesis concerns the continuity (resp. discontinuity) of Baire class one functions. We show that the sets of points of continuity of such functions are „big", where the size of these sets is examined in terms of category. One chapter concerns also Baire category theorem as important application of category concept.

Key words: Baire class one functions, Baire category theorem, continuity, meagre set

Number of pages: 35

Number of appendices: 0

Language: Slovak

Prohlášení

Prehlasujem, že som bakalársku prácu spracoval samostatne pod vedením pána RNDr. Pavla Ludvíka, Ph.D. a všetky použité zdroje som uviedol v zozname literatúry.

V Olomouci dňa ....

podpis

Obsah

1 Úvod 7

2 Teoretické prerekvizity 8

3 Baireova veta 10

4 Čo sú to funkcie 1. Baireovej triedy a prečo se nimi zaoberať 13

5 Funkcie 1. Baireovej triedy a vzory otvorených množín 17

6 Funkcie 1. Baireovej triedy a kategórie 22

7 Funkcie 1. Baireovej triedy a body spojitosti 27

8 Príslušnosť rôznych funkcií k 1. Baireovej triede 32

9 Záver 34

Literatúra 35

Poděkování

Chcel by som poďakovať RNDr. Pavlovi Ludvíkovi, Ph.D. za jeho trpezlivosť, ochotu a nápomocnosť (často presahujúcu matematickú stránku), ktorými disponoval v celom priebehu vedenia tejto bakalárskej práce.

Kapitola 1

Úvod

René-Louis Baire bol francúzsky matematik, ktorý sa narodil v roku 1874 v Paríži do chudobnej rodiny robotníckej triedy. V roku 1886, keď mal 12 rokov, získal štipendium, čo mu umožnilo nadobudnúť kvalitné stredné vzdelanie napriek skromným pomerom, z ktorých pochádzal. V roku 1891 nastúpil na École Normale Supérieure, kde v roku 1895 získal titul B.S.

Po získaní potrebnej kvalifikácie bolo jeho prvým profesijným pôsobiskom lýceum v Bar-le-Duc, kde vyučoval medzi rokmi 1895 až 1897. V tomto období sa venoval výzkumu nespojitých reálnych funkcií. Zaviedol svoju klasifikáciu funkcií, podľa ktorej funkcie 1. triedy boli tie, ktoré boli limitami postupností spojitých funkcií, funkcie 2. triedy boli limitamy funkcií 1. triedy, a obdobne zaviedol aj 3. triedu. Baire svojimi výsledkami zaujal talianskeho matematika V. Volterru. Vďaka tomu získal štipendium, ktoré mu umožnilo vydať sa za Volterrom do Turína. Počas pobytu v Taliansku dokázal vetu, ktorá charakterizuje funkcie 1. Baireovej triedy. V roku 1898 Baire dokončil svoju dizertačnú prácu, a nastúpil opäť na lýceum. Vyššie spomenutá kategorizácia funkcií bola súčasťou Baireovej dizertačnej práce, ktorú obhájil v roku 1899.

Celý život ho sprevádzali zdravotné komplikácie, ktorých dôsledkom bola krátka akademická kariéra. Baire odišiel v roku 1925 do penzie. V roku 1932 spáchal samovraždu.

Ako napovedá názov, predmetom tejto práce sú primárne funkcie, ktoré sám Baire označoval ako funkcie 1. triedy.

Kapitola 2

Teoretické prerekvizity

Pojmy týkajúce sa topológie a metrických priestorov, ktoré sa v tejto práci vyskytujú, ale nie sú tu definované, možno nájsť v [1].

Definícia 1. Metrický priestor (X, ρ) nazveme separabilným, ak obsahuje spočítateľnú podmnožinu takú, že je hustá v X.

Lema 2. *Nech (X, ρ) je metrický priestor a $M \subseteq X$. Potom je M hustá v X práve vtedy, ak každé okolie každého bodu $x \in X$ má neprázdny prienik s M.*

Dôkaz. $(\Rightarrow)$ Uvažujme $x \in X$ ľubovoľné. Z predpokladu a známeho vzťahu vnútra a hranice uzavretých množín máme, že

$$X = \overline{M} = M^\circ \cup \partial M.$$

Ak $x \in M^\circ$, tak dané x leží v každom svojom okolí a zároveň aj v M, nakoľko $M^\circ \subseteq M$, a tvrdenie pre tento prípad platí. Ak $x \in \partial M$, tak podľa definície hraničného bodu platí, že každé okolie príslušné x má neprázdny prienik s M.

$(\Leftarrow)$ Uvažujme ľubovoľnú množinu $M \subseteq X$ takú, že spĺňa uvažovaný predpoklad. Potom platí, že každé $x \in X$ je hromadným bodom množiny M, a preto aj množiny $\overline{M}$. Nakoľko je množina $\overline{M}$ uzavretá, obsahuje všetky svoje hromadné body, a preto $X \subseteq \overline{M}$. Odtiaľ plynie, že M je hustá v X. $\square$

Lema 3. *Nech (X, ρ) je separabilný metrický priestor. Potom existuje spočítateľná množina okolí M taká, že každú otvorenú podmnožinu X je možné vyjadriť zjednotením množín z M (príslušným danej otvorenej množine).*

Dôkaz. Uvažujme spočítateľnú množinu $K \subseteq X$ takú, že je hustá v X. Definujme $M := \{U_{1/n}(x) : x \in K, n \in \mathbb{N}\}$. Ukážme, že takto definovaná množina M spĺňa naše požiadavky.

Nakoľko obsahuje spočítateľne mnoho okolí príslušných každému prvku $x \in K$, ktorých je tiež spočítateľne mnoho, ide o spočítateľnú množinu. Ďalej uvažujme ľubovoľnú otvorenú množinu G, $G \subseteq X$. Potom z otvorenosti G plynie, že pre každé $y \in G$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $U_{1/n_0}(y) \subseteq G$. Vzhľadom k tomu, že K je hustá v X, existuje podľa Lemy 2 $x_y \in K$ také, že $x_y \in U_{1/3n_0}(y)$. Potom $U_{1/2n_0}(x_y) \subseteq G$, a súčasne $y \in U_{1/2n_0}(x_y)$. Pre každé $y \in G$ teda existuje okolie v M také, že je podmnožinou G, a obsahuje dané y. Zjednotením týchto okolí dostaneme G. $\square$

Definícia 4. Metrický priestor (X, ρ) nazveme úplným, ak každá cauchyovská postupnosť prvkov z X má limitu v X.

Definícia 5. Nech (X, ρ) je metrický priestor a $M \subseteq X$. Povieme, že množina M je riedka v X, ak vnútro jej uzáveru je prázdne v X.

Definícia 6. Nech (X, ρ) je metrický priestor a $M \subseteq X$. Povieme, že množina M je hustá v X, ak jej uzáver je celé X.

Kapitola 3

Baireova veta

Súčasťou Baireovej dizertačnej práce bola taktiež veta, ktorá dnes nesie jeho meno. V tejto kapitole uvedieme jej znenie spolu s dôkazom, a následneme ukážeme konkrétny príklad jej aplikácie.

Definícia 7. Nech (X, ρ) je metrický priestor a $M \subseteq X$. Množinu M nazveme množinou 1. kategórie v X, ak je spočítateľným zjednotením množín riedkych v X.

Definícia 8. Nech (X, ρ) je metrický priestor a $M \subseteq X$. Množinu M nazveme množinou 2. kategórie v X, pokiaľ nie je množinou 1. kategórie v X.

Ilustrácia 9. Množiny $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ sú množiny 1. kategórie v $\mathbb{R}$. Nedegenerovaný interval je množinou 2. kategórie v $\mathbb{R}$.

Veta 10 (Baireova o kategóriách)**.** *Nech (X, ρ) je úplný metrický priestor a $M \subseteq X$ je množina 1. kategórie. Potom je $X \setminus M$ hustá v X.*

Dôkaz (podľa [6, Theorem 10.1, s. 398]). Nech $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, kde M_n je riedka pre každé $n \in \mathbb{N}$. Ak by platilo že $U_0 \cap M^c \neq \emptyset$ pre ľubovoľné okolie U_0, tak by bola množina M^c podľa Lemy 2 hustá v X, a odtiaľ by plynul nami žiadaný výsledok. Ukážme, že to platí.

Nech $U_0 = U_0(x_0, r_0)$ je ľubovoľné okolie. Zkonštruujme postupnosť do seba vnorených okolí $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ takú, že $U_n = U_n(x_n, r_n)$, kde $r_n < 1/n$ pre $n \in \mathbb{N}$ a

$$\overline{U_{n+1}} \subset U_n \setminus \overline{M_{n+1}}.$$

Nakoľko je M_{n+1} riedka, je riedka aj $\overline{M_{n+1}}$ a teda $U_n \setminus \overline{M_{n+1}} \neq \emptyset$. Odtiaľ plynie že môžme zvoliť $x_{n+1} \in U_n \setminus \overline{M_{n+1}}$. Vzhľadom k uzavretosti $\overline{M_{n+1}}$ platí, že $dist(x_{n+1}, M_{n+1}) > 0$.

Položíme $r_{n+1} = \min\{dist(x_{n+1}, M_{n+1}), \frac{1}{n+2}\}$, a získame U_{n+1} s nami žiadanými vlastnosťami. Zvoľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľne. Potom pre postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $m, n \geq n_0$ platí

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_{n_0}) + \rho(x_m, x_{n_0}) < \frac{2}{n_0} < \varepsilon,$$

kde sme využili fakt, že $x_m, x_n \in U_{n_0}$ a $r_{n_0} < \frac{1}{n_0}$. Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je teda cauchyovská, a vzhľadom k úplnosti X má limitu $x \in X$. Nakoľko $x_{n+1} \in \overline{U_n}$ pre $n \in \mathbb{N}$ a $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$ je uzavretá, platí že

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} \subset U_0 \cap M^c,$$

čo je žiadaný výsledok. □

Poznámka 11. Predchádzajúca veta sa niekedy uvádza v slabšej forme, a to že úplný metrický priestor je množina 2. kategórie. To je jednoduchý dôsledok nášho znenia vety. Plynie z toho, že ak predpokladáme že X je množinou 1.kategórie, potom podľa Vety 10 je $X \setminus X = \emptyset$ hustá v X, čo neplatí. Je teda 2. kategórie.

Ukážme si príklad, v ktorom použijeme Baireovu vetu o kategóriách.

Príklad 12 (prebraté z [4, Ex. 1.16., s. 2])**.** Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia, pre ktorú platí $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ pre každé pevné $x > 0$. Dokážme, že platí $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Riešenie: Definujme $F_n := \{x > 0 : |f(kx)| \leq \varepsilon \text{ pre všetky } k \geq n\}$, kde $\varepsilon > 0$. Z predpokladu a definície množín F_n plynie, že pre všetky $x > 0$ platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \geq n_0 : |f(kx)| \leq \varepsilon,$$

a teda pre každé $x > 0$ existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že $x \in F_n$. Dostávame, že $(0, \infty) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. Podľa Vety 10 musí existovať n_0 také, že F_{n_0} nie je riedka množina. Definujme $f_k(x) := |f(kx)|$ pre $k \in \mathbb{N}$. Potom zo spojitosti f plynie, že aj f_k je spojitá. Z vlastnosti spojitých funkcií, podľa ktorej vzorom každej uzavretej množiny je uzavretá množina, plynie, že $f_k^{-1}((-\infty, \varepsilon])$ je uzavretá. Pretože

$$F_{n_0} = \bigcap_{k=n_0}^{\infty} f_k^{-1}((-\infty, \varepsilon]),$$

je F_{n_0} prienikom uzavretých množín, a teda tiež uzavretá. Nakoľko F_{n_0} nie je riedka a súčasne je uzavretá, musí existovať nedegenerovaný interval $[a, b]$ taký, že $[a, b] \subseteq F_{n_0}$. To spolu s definícou množiny F_{n_0} dáva, že

$$\forall x \in [ka, kb],\ k \geq n_0 : |f(x)| \leq \varepsilon.$$

Zisťujeme, že F_{n_0} obsahuje nekonečne mnoho intervalov v tvare $[ka, kb]$, ktorých dĺžka s rastúcim k rastie. Ak by sa od určitého k_0 začali prekrývať, platila by nerovnosť $|f(x)| \leq \varepsilon$ na nejakom okolí nekonečna. Z toho by plynul nami žiadaný výsledok, nakoľko by takéto okolie existovalo pre každé $\varepsilon > 0$. Ako vyplýva z nasledujúceho sledu nerovností, takéto k_0 nájdeme vždy:

$$\begin{aligned} bk &\geq a(k+1), \\ (b-a)k &\geq a, \\ k &\geq \frac{a}{b-a}. \end{aligned}$$

Stačí teda položiť $k_0 = \lceil \frac{a}{b-a} \rceil$. $\square$

Kapitola 4

Čo sú to funkcie 1. Baireovej triedy a prečo se nimi zaoberať

Ako je známe z matematickej analýzy, limita rovnomerne konvergentnej postupnosti spojitých funkcií je taktiež spojitá funkcia. Pre bodovú konvergenciu to však neplatí. Existujú postupnosti spojitých funkcií, ktorých limity spojité nie sú. Demonštrujme takýto prípad.

Príklad 13. Postupnosť spojitých funkcií $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{pre } x < -\frac{1}{n}, \\ nx, & \text{pre } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{pre } x > \frac{1}{n}, \end{cases}$$

konverguje ku funkcii $sgn(x)$, ktorá spojitá nie je.

Riešenie: Uvažujme $x < 0$. Potom nájdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $x < -\frac{1}{n}$ pre $n \geq n_0$, a teda $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = -1$.

Ak $x = 0$, tak $f_n(0) = n \cdot 0 = 0$ pre všetky n, a $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.

Nakoniec, ak $x > 0$, tak obdobne ako v prvom prípade nájdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $x > \frac{1}{n}$ pre $n \geq n_0$, a teda $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. $\square$

Mohlo by nás teda zaujímať, ako sa spojitosť členov danej postupnosti podpíše na vlastnostiach výslednej limity. To nás motivuje zaviesť nasledujúcu definíciu.

Definícia 14. Nech X je metrický priestor a $f : X \to \mathbb{R}$. Povieme, že f je 1. Baireovej triedy, ak je bodovou limitou postupnosti spojitých funkcií.

Nasleduje veta o stabilite priestoru funkcií 1. Baireovej triedy.

Veta 15. *Nech X je metrický priestor, a $f, g : X \to \mathbb{R}$, kde f, g sú funkciami 1. Baireovej triedy, a $u : X \to X$, $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sú spojité zobrazenia. Potom*

1. $|f|, f \pm g, f \cdot g, f/g$, *kde $g(x) \neq 0$ pre všetky $x \in X$ v poslednom prípade,*
2. $f \circ u, v \circ f$,
3. $\max\{f(x), g(x)\}, \min\{f(x), g(x)\}$

sú funkciami 1. Baireovej triedy.

Dôkaz. Nech $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ pre $x \in X$, kde f_n, g_n sú spojité pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

1. Pre prípad f/g platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) \cdot g_n(x)}{g_n^2(x) + 1/n} = f(x)/g(x),$$

   kde $\frac{f_n(x) \cdot g_n(x)}{g_n^2(x)+1/n}$ je spojitá pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Zvyšné prípady plynú priamo z definície.

2. Platí

$$\lim_{n\to\infty} f_n(u(x)) = f(u(x)),$$
$$\lim_{n\to\infty} v(f_n(x)) = v(\lim_{n\to\infty} f_n(x)) = v(f(x)),$$

   kde sme v druhom prípade použili Heineho vetu a spojitosť v.

3. Môžme využiť vzťahy

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{|f(x) - g(x)| + f(x) + g(x)}{2},$$
$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{-|f(x) - g(x)| + f(x) + g(x)}{2}.$$

   Z predpokladov a predchádzajúcich výsledkov vyplýva, že zúčastnenými funkciami a prítomnými operáciami sa zachová príslušnosť 1. Baireovej triede.

□

Lema 16. *Nech X je metrický priestor, a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n : X \to \mathbb{R}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, je postupnosť funkcií 1. Baireovej triedy. Ak existuje konvergentný rad kladných čísel $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ taký, že $\alpha_n \geq |f_n(x)|$ pre všetky $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$, tak $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je tiež funkciou 1. Baireovej triedy.*

Dôkaz (podľa [2, Lemma 5.10, s. 74]). Pretože je $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosťou funkcií 1. Baireovej triedy, pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje postupnosť spojitých funkcií $\{g_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ taká, že konverguje bodovo ku f_n. Môžme predpokladať, že $|g_{n,k}(x)| \leq \alpha_n$ (inak by postačilo predefinovať na $-\alpha_n$, resp. α_n, v bodoch, kde je funkcia menšia než $-\alpha_n$, resp. väčšia než α_n) pre všetky $k \in \mathbb{N}$. Pre každé $m \in \mathbb{N}$ položme

$$h_m(x) := g_{1,m}(x) + g_{2,m}(x) + \ldots + g_{m,m}(x).$$

Ukážme, že $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ konverguje bodovo ku f. Zafixujme $x \in X$ a zvoľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľne. Potom platí, že existuje $N \in \mathbb{N}$ také, že $\sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n < \varepsilon$. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $M_n > N$ také, že $|g_{n,m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon/N$ pre všetky $m \geq M_n$. Definujme $M := \max\{M_n : 1 \leq n \leq N\}$. Potom pre každé $m \geq M$ platí

$$\begin{aligned}
|h_m(x) - f(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{m} g_{n,m}(x) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=1}^{m} (g_{n,m}(x) - f_n(x)) \right| + \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \right| \\
&\leq \left| \sum_{n=1}^{N} (g_{n,m}(x) - f_n(x)) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{m} (g_{n,m}(x) - f_n(x)) \right| + \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} |(g_{n,m}(x) - f_n(x)| + \sum_{n=N+1}^{m} |g_{n,m}(x)| + \sum_{n=N+1}^{m} |f_n(x)| + \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(x)| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} |(g_{n,m}(x) - f_n(x)| + \sum_{n=N+1}^{m} |g_{n,m}(x)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(x)| \\
&< \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{N} + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \alpha_n \\
&= 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Odtiaľ plynie, že $\{h_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ koverguje bodovo ku $f(x)$. Nakoľko je h_m pre každé $m \in \mathbb{N}$ súčtom konečného počtu spojitých funkcií, je tiež spojitá. $\square$

Z nasledujúcej vety vyplynie, že priestor funkcií 1. Baireovej triedy je uzavretý vzhľadom k rovnomernej konvergenci. To je obdoba tvrdenia, ktoré platí pre prietor spojitých funkcií.

Veta 17. *Nech X je metrický priestor, a $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n : X \to \mathbb{R}$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, je postupnosť funkcií 1. Baireovej triedy. Ak $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje rovnomerne ku f, potom je f tiež 1. Baireovej triedy.*

Dôkaz (podľa [2, Theorem 5.11, s. 74]). Z predpokladu plynie, že existuje podpostupnosť $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taká, že $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$, pre všetky $x \in X$. Uvažujme rozdiel $|f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$. Platí preň

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)| \leq |f_{n_k}(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n_{k-1}}(x)| < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{3}{2^k}.$$

Zároveň však

$$\sum_{k=2}^{\infty}(f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)) = \lim_{K\to\infty}\sum_{k=2}^{K}(f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)) = \lim_{K\to\infty}(f_{n_K}(x) - f_{n_1}(x)) = f(x) - f_{n_1}(x),$$

a teda

$$|f(x)| = \left|\sum_{k=2}^{\infty}(f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)) + f_{n_1}(x)\right| < \sum_{k=2}^{\infty}\frac{3}{2^k} + |f_{n_1}(x)|.$$

Z Lemy 16 plynie, že $\sum_{k=2}^{\infty}(f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}})$ je 1. Baireovej triedy, to že $f_{n_1}(x)$ je 1. Baireovej triedy plynie z predpokladu, a teda aj ich súčet, tzn. $f(x)$ je podľa Vety 15 funkciou 1. Baireovej triedy. $\square$

Kapitola 5

Funkcie 1. Baireovej triedy a vzory otvorených množín

Obsah tejto kapitoly vychádza z [7, Chapter 1, Section 10]. Uveďme najprv niekoľko pomocných tvrdení.

Lema 18. *Nech (X,ρ) je metrický priestor a $G \subseteq X$ je otvorená množina. Potom je G typu F_σ.*

Dôkaz. Položme $F_n = \{x \in G : \inf_{y \in X \setminus G} \rho(x,y) \geq 1/n\}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Potom zrejme $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = G$ a F_n je uzavretá pre všetky n. Naozaj, predpokladajme že existuje $n \in \mathbb{N}$ také, že F_n nie je uzavretá. Potom musí existovať $z \in \partial F_n$ také, že nepatrí do tohto F_n.

Uvažujme bod $z \in \partial F_n$, ktorý je zároveň hromadným bodom F_n takým, že nepatrí do F_n, teda $\inf_{y \in X \setminus G} \rho(z,y) < 1/n$. Vďaka hustote $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$ nájdeme m prirodzené také, že $\inf_{y \in X \setminus G} \rho(z,y) < 1/m < 1/n$. Pre každé $x \in U_{\frac{m-n}{mn}}(z)$ potom platí

$$\inf_{y \in X \setminus G} \rho(x,y) \leq \inf_{y \in X \setminus G} (\rho(x,z) + \rho(z,y)) = \rho(x,z) + \inf_{y \in X \setminus G} \rho(z,y) < \frac{m-n}{mn} + \frac{1}{m} = \frac{1}{n},$$

a teda $U_{\frac{m-n}{mn}}(z) \cap F_n = \emptyset$, a z by nebol hromadným bodom F_n.

Ak by mal byť $z \in \partial F_n$ izolovaným bodom F_n, tak $\inf_{y \in X \setminus G} d(z,y) = 0$, a z by nepatril do F_n, čo je v spore s izolovanosťou z.

Množina F_n teda obsahuje svoju hranicu, a ide o uzavretú množinu. $\square$

Lema 19. *Nech X je metrický priestor a A, B sú F_σ množiny. Potom existujú F_σ množiny $A^* \subseteq A$ a $B^* \subseteq B$ také, že $A \cup B = A^* \cup B^*$ a $A^* \cap B^* = \emptyset$.*

Dôkaz. Nech $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ sú pevné rozklady A a B na spočítateľne mnoho uzavretých množín. Definujme

$$A_n^* := A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i,$$

$$B_n^* := B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$$

pre $n \in \mathbb{N}$. Povšimnime si, že $A_n^* = A_n \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i)^c$, kde $(\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i)^c$ je otvorená množina. Z Lemy 18 máme

$$(\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i,$$

kde je F_i uzavretá pre všetky i. Potom

$$A_n^* = A_n \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_n \cap F_i),$$

kde $A_n \cap F_i$ je uzavretá pre všetky $i \in \mathbb{N}$, a množina A_n^* je teda F_σ. Obdobné tvrdenie platí pre B_n^*. Položme $A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \cap F_i) = \bigcup_{n,i=1}^{\infty} (A_n \cap F_i)$ a $B^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^*$. Tým sme našli A^* a B^* s nami žiadanými vlastnosťami. □

Lema 20 (Urysohnova)**.** *Nech X je metrický priestor. Potom pre každú dvojicu disjunktných a uzavretých množín A, $B \subseteq X$ existuje spojitá funkcia $f : X \to [0, 1]$ taká, že $f(x) = 0$ pre $x \in A$ a $f(x) = 1$ pre $x \in B$.*

Dôkaz. [1, 1.5.11 Theorem, s. 41]. □

Lema 21. *Nech X je metrický priestor a $A \subseteq X$ je súčasne F_σ a G_δ množina. Potom je χ_A funkciou 1. Baireovej triedy.*

Dôkaz. Podľa predpokladu existujú rozklady $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^*$ a $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^*$, kde A_n^* sú uzavreté a B_n^* otvorené množiny. Z druhého rozkladu dostávame $X \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus B_n^*)$, kde $(X \setminus B_n^*)$ je uzavretá. Môžme definovať

$$A_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i^*,$$

$$B_n := \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus B_i^*).$$

Platí, že A_n, B_n su konečnými zjednoteniami uzavretých množín, a preto sú samé uzavreté. Zároveň $A_n \cap B_n = \emptyset$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Z Lemy 20 plynie, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje spojitá $f_n : X \to [0,1]$ taká, že $f_n|_{A_n} = 1$ a $f_n|_{B_n} = 0$. Nakoľko

$$X = A \cup (X \setminus A) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n),$$

pre každé $x \in X$ nájdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že x bude patriť do práve jednej z množín A_{n_0}, B_{n_0}. To spolu s vlastnosťou $A_n \subseteq A_{n+1}, B_n \subseteq B_{n+1}$ a disjunktnosťou A_n, B_n zaistí, že $f_n(x) = \chi_A(x)$ pre všetky $n \geq n_0$. Nakoľko množiny A_n, B_n s rastúcim n postupne pokryjú celý priestor X, dostávame, že $\lim_{n\to\infty} f_n = \chi_A$. $\square$

Lema 22. *Nech X je metrický priestor a $f : X \to \mathbb{R}$. Pokiaľ pre každé racionálne číslo q platí, že $f^{-1}(-\infty, q)$ je F_σ množina, potom je $f^{-1}(-\infty, r)$ tiež F_σ pre každé reálne r. Obdobne, ak $f^{-1}(q, \infty)$ je F_σ množina pre každé racionálne číslo q, potom je $f^{-1}(r, \infty)$ tiež F_σ pre každé reálne r.*

Dôkaz. Vezmime $f^{-1}(-\infty, r)$ pre ľubovoľné, ale pevné reálne r. Uvažujme rastúcu postupnsť racionálnych čísel $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $\lim_{n\to\infty} q_n = r$. Potom platí

$$f^{-1}(-\infty, r) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(-\infty, q_n).$$

Nakoľko $f^{-1}(-\infty, q_n)$ je F_σ pre všetky n, dokážeme $f^{-1}(-\infty, r)$ vyjadriť ako spočítateľné zjednotenie F_σ množín, a ide teda o F_σ množinu.

Pre $f^{-1}(r, \infty)$ by sme uvažovali klesajúcu postupnosť racionálnych čísel, a dostali by sme rovnaký výsledok. $\square$

Lema 23. *Nech X je metrický priestor a $f : X \to \mathbb{R}$. Pokiaľ pre každé racionálne číslo q platí, že $f^{-1}(-\infty, q)$, $f^{-1}(q, \infty)$ sú F_σ množiny, potom je f funkciou 1. Baireovej triedy.*

Dôkaz. Uvažujme spojitú rastúcu funkciu $g : \mathbb{R} \to (0,1)$ (napr. $\frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$) . Potom platí, pre $q \in \mathbb{Q}$,

$$(g \circ f)^{-1}(-\infty, q) = f^{-1}(g^{-1}(-\infty, q)) = f^{-1}(-\infty, g^{-1}(q)),$$
$$(g \circ f)^{-1}(q, \infty) = f^{-1}(g^{-1}(q, \infty)) = f^{-1}(g^{-1}(q), \infty).$$

Nakoľko $g^{-1}(q) \in \mathbb{R}$, z Lemy 22 dostávame, že $(g \circ f)^{-1}(-\infty, q)$, $(g \circ f)^{-1}(q, \infty)$ sú F_σ množinami pre každé $q \in \mathbb{Q}$. Označme $F := g \circ f$. Potom F spĺňa predpoklady vety, kde $F : X \to (0, 1)$.

Pre každé $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ a $i = 0, 1, \ldots, n-2$ položme

$$A_n(i) := \{x \in X : F(x) \in (i/n, (i+2)/n)\}.$$

Pretože $A_n(i)$ môžme vyjadriť ako $F^{-1}(-\infty, (i+2)/n) \cap F^{-1}(i/n, \infty)$, je typu F_σ. Užitím Lemy 19 vyberme F_σ množiny $A_n^*(i) \subseteq A_n(i)$ také, že $A_n^*(i) \cap A_n^*(j)$ pre $i \neq j$ a $\bigcup_{i=0}^{n-2} A_n^*(i) = X$ pre všetky $n \geq 2$. Položme

$$F_n := \sum_{i=0}^{n-2} (i/n)\chi_{A_n^*(i)}.$$

Potom $\{F_n\}_{n=2}^{\infty}$ konverguje rovnomerne ku F. Naozaj, zvoľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľne. Všimnime si, že pre všetky $x \in X$ a každé n platí $\chi_{A_n^*(i)}(x) = 1$ vždy pre práve jedno i. To plynie z disjunktnosti množín $A_n^*(i)$ (vzhľadom k i) a toho, že $X = \bigcup_{i=1}^{n-2} A_n^*(i)$. Nakoľko $A_n^*(i) \subseteq A_n(i)$, platí pre všetky $x \in X$

$$F(x) \in (i/n, (i+2)/n) \Rightarrow |F_n(x) - F(x)| < \frac{2}{n}.$$

To znamená, že pre každé $\varepsilon > 0$ nájdeme n_0 nezávislé na x také, že

$$\forall n \geq n_0 : |F_n(x) - F(x)| < \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Podľa Lemy 21 je F_n funkciou 1. Baireovej triedy pre každé $n \geq 2$. Nakoľko $\{F_n\}_{n=2}^{\infty}$ rovnomerne konverguje ku F, z Vety 17 plynie, že F je tiež 1. Baireovej triedy. Konečne, $f = g^{-1} \circ F$, kde g^{-1} je spojitá funkcia, a teda podľa Vety 15 je f funkciou 1. Baireovej triedy. $\square$

Nasleduje záverečná veta tejto kapitoly, ktorá charakterizuje funkcie 1. Baireovej triedy pomocou vzorov otvorených množín.

Veta 24. *Nech X je separabilný metrický priestor a $f : X \to \mathbb{R}$. Funkcia f je 1. Baireovej triedy práve vtedy, ak pre každú otvorenú množinu $G \subseteq \mathbb{R}$ platí, že $f^{-1}(G)$ je typu F_σ.*

Dôkaz. $(\Rightarrow)$ Najprv dokážme, že pre každé $q \in \mathbb{Q}$ sú $\{x \in X : f(x) < q\}$ a $\{x \in X : f(x) > q\}$ typu F_σ. Nech $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, kde f_n je spojitá pre každé $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\{x \in X : f(x) < q\} = \bigcup_{\substack{p\in\mathbb{Q}\\ p<q}}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \leq p\},$$

$$\{x \in X : f(x) > q\} = \bigcup_{\substack{p\in\mathbb{Q}\\ p>q}}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \geq p\}.$$

Zo spojitosti f_n plynie, že $\{x \in X : f_n(x) \leq p\}$, resp.$\{x \in X : f_n(x) \geq p\}$ je uzavretá, a spočítateľný prienik uzavretých množín je taktiež uzavretá množina. Vzhľadom k spočítateľnosti $\mathbb{Q}$ máme na pravej strane spočítateľné zjednotenie F_σ množín, a to je F_σ množina. Rovnosť uvedených množín plynie z konvergencie $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a uvažovaných $p \in \mathbb{Q}$. Z Lemy 22 plynie, že $q \in \mathbb{Q}$ môžme nahradiť $r \in \mathbb{R}$. Pretože $f^{-1}(a, b) = \{x \in X : f(x) < a\} \cap \{x \in X : f(x) > b\}$ kde a, b sú reálne, ide o prienik dvoch F_σ množín a teda tiež F_σ množinu. Nakoľko každú otvorenú množinu $G \subset \mathbb{R}$ môžme vyjadriť v tvare $G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, kde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, dostávame že $f^{-1}(G) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}((a_n, b_n))$, čo je spočítateľné zjednotenie F_σ množín a teda tiež F_σ množina.

$(\Leftarrow)$ Pre každé $q \in \mathbb{Q}$ sú $(-\infty, q), (q, \infty)$ otvorenými množinami a z predpokladu teda máme, že $f^{-1}(-\infty, q), f^{-1}(q, \infty)$ sú F_σ množinami. Z Lemy 23 potom dostávame, že f je funkciou 1. Bairevej triedy. □

Poznámka 25. Veta 24 ponúka zaujímavé porovnanie funkcií 1. Baireovej triedy so spojitými funkciami. O spojitých funkciách vieme, že vzorom otvorenej množiny je taktiež otvorená množina. Z Lemy 18 však tiež vieme, že každá otvorená množina je typu F_σ.

Kapitola 6

Funkcie 1. Baireovej triedy a kategórie

Primárny cieľom tejto kapitoly je dozvedieť sa niečo o množine bodov nespojitosti funkcií 1. Baireovej kategórie. Pri ceste ku takému výsledku viackrát využijeme pojem oscilácie. Kapitola vychádza z [5, 7. Functions of First Class].

Definícia 26. Nech X je metrický priestor a $f : X \to \mathbb{R}$. *Osciláciu* f na M, kde $M \subseteq X$, definujeme výrazom

$$\omega(M) := \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{x \in M} f(x).$$

Osciláciu f v bode x, kde $x \in X$ a $\delta > 0$, definujeme ako

$$\omega(x) := \lim_{\delta \to 0} \omega(U_\delta(x)) = \inf_{\delta > 0} \omega(U_\delta(x)).$$

Lema 27. *Nech X je metrický priestor a $f : X \to \mathbb{R}$. Funkcia f je spojitá v bode x_0 práve vtedy, ak $\omega(x_0) = 0$.*

Dôkaz. ($\Rightarrow$) Zvoľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľne. Potom vďaka spojitosti f existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in U_\delta(x_0)$ je $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, a preto

$$\omega(x_0) \leq \omega(U_\delta(x_0)) \leq \left(\sup_{x \in U_\delta(x_0)} f(x) - f(x_0) \right) + \left(f(x_0) - \inf_{x \in U_\delta(x_0)} f(x) \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Odtiaľ plynie, že $\omega(x_0) = 0$.

($\Leftarrow$) Zvoľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľne. Potom existuje $\delta > 0$ také, že platí $\omega(U_\delta(x_0)) < \varepsilon$. Pre $x \in U_\delta(x_0)$ máme odhad

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in U_\delta(x_0)} f(x) - \inf_{x \in U_\delta(x_0)} f(x) = \omega(U_\delta(x_0)) < \varepsilon,$$

a teda f je spojitá v x_0. □

Veta 28. *Nech X je metrický priestor a $f : X \to \mathbb{R}$. Potom je množina bodov nespojitosti funkcie f typu F_σ.*

Dôkaz. Najprv si ukážme že ak $\omega(x_0) < \xi$, potom táto nerovnosť platí na nejakom okolí x_0. To plynie z toho, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_0 > 0$ také, že pre všetky $\delta \in (0, \delta_0)$ platí $|\omega(U_\delta(x_0)) - \omega(x_0)| < \varepsilon$. Položme $\varepsilon = (\xi - \omega(x_0))/2$. Potom nájdeme δ^* také, že platí

$$\omega(U_{\delta^*}(x_0)) - \omega(x_0) < \varepsilon < \xi - \omega(x_0)$$
$$\omega(U_\delta^*(x_0)) < \xi.$$

Odtiaľ plynie že množina $\{x \in X : \omega(x) < \varepsilon\}$ je otvorená, nakoľko s každým jej bodom do nej patrí aj nejaké jeho okolie.

Z Lemy 27 vyplýva že množinu bodov nespojitosti, ktorú označíme D, môžme vyjadriť ako

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : \omega(x) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Množiny $\{x \in X : \omega(x) \geq \frac{1}{n}\}$ sú uzavreté (pretože ich doplnok je otvorený), a D je teda F_σ. □

Veta 29. *Pre ľubovoľnú F_σ množinu $E \subseteq \mathbb{R}$ existuje ohraničená funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká, že E je jej množinou bodov nespojitosti.*

Dôkaz. Nech $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kde F_n sú uzavreté. Môžme predpokladať, že $F_n \subseteq F_{n+1}$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Označme A_n množinu racionálnych čísel, ktoré sú vnútornými bodmi F_n. Definujme $f_n := \chi_{F_n \setminus A_n}$. Funkcia f_n má osciláciu rovnú 1 pre všetky $x \in F_n$ a 0 inak. Naozaj, uvažujme všetky možné prípady výskytu bodov.

Ak by bol bod x z F_n^c, tak by vzhľadom k otvorenosti F_n^c existovalo nejaké jeho okolie obsahujúce výlučne body z tejto množiny, a oscilácia v tomto bode by bola nulová. Ak by bol bod x vnútorným bodom F_n, tak by bol prvkom nejakého podintervalu F_n a vzhľadom k hustote $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{I}$ v $\mathbb{R}$ by každé jeho okolie obsahovalo súčasne prvok F_n aj A_n, a oscilácia by bola rovná 1. Ak by bol bod x hraničným bodom F_n, tak by každé jeho okolie obsahovalo bod z F_n^c, a oscilácia by bola v tomto bode opäť rovná 1. Iné prípady nemôžu nastať.

Z Lemy 27 teda vyplýva, že f_n sú spojité na $\mathbb{R} \setminus E$. Položme

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n(x).$$

Z definície f_n plynie, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

pre všetky $x \in X$, a teda podľa Weierstrassovho kritéria, pozri [8, Věta 7.10, s. 179], rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f_n$ konverguje rovnomerne ku nejakej funkcii f, ktorá je spojitá na $\mathbb{R} \setminus E$, a vďaka odhadu vyššie je taktiež ohraničená.

Teraz uvažujme ľubovoľné $x \in E$. Ak je x hraničným bodom množiny E, tak $f(x) > 0$, a zároveň v každom jeho okolí sa nachádza bod $y \in E^c$, pričom $f(y) = 0$, a teda $\omega(x) > 0$. Ak je x vnútorným bodom množiny E, tak v každom jehom okolí sa nachádzajú $q \in \mathbb{Q}, i \in \mathbb{I}$ také, že sú tiež vnútornými bodmi E. Z definície f_n plynie, že pre racionálne vnútorné body množiny E existuje iba konečne mnoho $n \in \mathbb{N}$ takých, že $f_n(q) = 1$. Pre iracionálne ich však musí byť takých $n \in \mathbb{N}$ nekonečne mnoho, a teda vzhľadom k definícii f platí $f(q) \neq f(i)$ (vidieť napr. z toho, že $\frac{1}{n!} > \sum_{m>n} \frac{1}{m!}$). Aj v tomto prípade teda $\omega(x_0) > 0$. Z Lemy 27 a predchádzajúcich výsledkov plynie, že množina bodov nespojitosti f je práve E. □

Zaujímavým dôsledkom predošlej vety je, že existuje funkcia, ktorej množina bodov nespojitosti je práve $\mathbb{Q}$. Konkrétnym príkladom takejto funkcie je napr. Riemannova funkcia ,anglicky známejšia ako „Thomae's function", pozri [9]. Nasleduje hlavná veta kapitoly.

Veta 30. *Nech X je úplný metrický priestor a $f : X \to \mathbb{R}$ je funkciou 1. Baireovej triedy. Potom je množina bodov nespojitosti f 1. kategórie.*

Dôkaz. Pretože množina bodov nespojitosti funkcie f je

$$\{x \in X : \omega(x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in X : \omega(x) \geq \frac{1}{n}\},$$

postačí dokázať, že pre každé $\varepsilon > 0$ je množina $F = \{x \in X : \omega(x) \geq 5\varepsilon\}$ riedka. Z vlastností ω plynie, že F je uzavretá množina, a stačí teda ukázať, že má prázdne vnútro. Nech $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, kde f_n je spojitá. Zvoľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľne a definujme

$$E_n := \bigcap_{i,j\geq n} \{x \in X : |f_i(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon\}.$$

Potom je E_n uzavretá, $E_n \subseteq E_{n+1}$ a $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$, kde posledná rovnosť plynie z cauchyovskosti postupnosti $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ pre každé pevné $x \in X$. Uvažujme ľubovoľnú uzavretú množinu $G \subseteq X$ s neprázdnym vnútrom. Nakoľko $G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cap G)$ a G môžme uvažovať ako úplný metrický priestor, podľa Poznámky 11 musí existovať $n \in \mathbb{N}$ také, že $(E_n \cap G)^\circ \neq \emptyset$. Pre toto n označme $H = (E_n \cap G)^\circ$. Máme, že $|f_i(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon$ pre všetky $x \in H$; $i, j \geq n$. Ak položíme $j = n$ a necháme $i \to \infty$, dostávame, že $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ pre všetky $x \in H$. Vďaka spojitosti f_n existuje pre ľubovoľné $x_0 \in H$ okolie $U(x_0) \subseteq H$ také, že $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \varepsilon$ pre všetky $x \in U(x_0)$. Odtiaľ

$$|f(x) - f_n(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq 2\varepsilon$$

pre všetky $x \in U(x_0)$. Preto

$$\begin{aligned}\omega(x_0) \leq \omega(U(x_0)) &= \sup_{x\in U(x_0)} f(x) - \inf_{x\in U(x_0)} f(x) \\ &= \sup_{x\in U(x_0)} (f(x) - f(x_0)) - \inf_{x\in U(x_0)} (f(x) - f(x_0)) \leq 4\varepsilon,\end{aligned}$$

a z toho plynie, že žiaden bod z H nepatrí do F.

Teda pre každú uzavretú množinu G s neprázdnym vnútrom, existuje jej neprázdná otvorená podmnožina $H \subseteq (G \setminus F)$. Nakoľko je F uzavretá, dostávame, že F má prázdne vnútro, a preto je riedka. □

Lema 31. *Nech X je úplný metrický priestor a M je F_σ množina. Potom platí, že M je množinou prvej kategórie práve vtedy, keď $X \setminus M$ je hustá v X.*

Dôkaz. ($\Rightarrow$) Sú splnené predpoklady Vety 10, a $X \setminus M$ je teda hustá v X.
($\Leftarrow$) Nech $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, kde $F_n \subset X$ sú uzavreté množiny. Predpokladajme, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že F_{n_0} má neprázdne vnútro. Potom $X \setminus M$ nie je hustá v F_{n_0}, a preto nie je hustá ani v X. Odtiaľ plynie, že M je množinou prvej kategórie. □

Veta 32. *Nech X je úplný metrický priestor a $f : X \to \mathbb{R}$. Potom je množina bodov nespojitosti funkcie f 1. kategórie práve vtedy, keď množina bodov spojitosti f je hustá v X.*

Dôkaz. Z Vety 28 plynie, že množina bodov nespojitosti je F_σ. Nakoľko množina bodov, v ktorých je f spojitá je jej doplnkom, žiadaný vzťah medzi týmito množinami plynie z Lemy 31. □

Predchádzajúce vety hovoria, že funkcie 1. Baireovej triedy majú veľa bodov spojitosti. Uveďme príklad všade diferencovateľnej funkcie, ktorá nemá spojitú deriváciu. Pretože je derivácia funkciou 1. Baireovej triedy (ukážeme v Kapitole 8), musí však mať podľa Viet 30 a 32 hustú množinu bodov spojitosti.

Príklad 33. Funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{pre } x \neq 0, \\ 0, & \text{pre } x = 0, \end{cases}$$

má deriváciu f' definovanú na $\mathbb{R}$. Funkcia f' však nie je spojitá v bode $x = 0$.

Riešenie: Pre $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Pre $x = 0$ dostávame

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0,$$

kde sme využili to, že $h \to 0$ a $\sin\left(\frac{1}{h}\right)$ je ohraničená funkcia. Z predpisu f' vyplýva, že je spojitá pre $x \neq 0$. Spojitosť v $x = 0$ vyšetríme samostatne.

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \left(2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0} \left(-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \neq 0$$

Záver je taký, že f' je definovaná na celom $\mathbb{R}$ a má jeden bod, v ktorom nie je spojitá. □

Kapitola 7

Funkcie 1. Baireovej triedy a body spojitosti

Predmetom tejto kapitoly je veta, o ktorej bola zmienka v úvode. Z tejto vety vyplynie charakterizácia funkcií 1. Baireovej triedy pomocou bodov spojitosti vzhľadom k uzavretým množinám.

Veta 34. *Nech X je separabilný úplný metrický priestor a $f : X \to \mathbb{R}$. Potom je funkcia f 1. Baireovej triedy práve vtedy, keď jej reštrikcia na ľubovoľnú (neprázdnu) uzavretú podmnožinu $F \subseteq X$ má bod spojitosti.*

Dôkaz. ($\Rightarrow$) Z predpokladu plynie, že $f\big|_F$ je taktiež funkciou 1. Baireovej triedy pre každú uzavretú (neprázdnu) množinu $F \subseteq X$. Ak považujeme F za úplný metrický priestor, tak potom podľa Vety 30 má $f\big|_F$ množinu bodov spojitosti 2. kategórie v F, a teda neprázdnu.

($\Leftarrow$)*(podľa [7, Lemma 6, s. 42])* Podľa Lemy 23 postačí dokázať, že pre každé $q \in \mathbb{Q}$ sú

$$A_q := \{x \in X : f(x) < q\}, B_q := \{x \in X : f(x) > q\}$$

F_σ množinami. Definujme $F_p := \{x \in X : f(x) \leq p\}$. Ak by pre každé $p < q$, $p \in \mathbb{Q}$ existovala F_σ množina F_p^* taká, že $F_p \subseteq F_p^* \subseteq A_q$, A_q by sa rovnala spočítateľnému zjednoteniu F_σ množín, a bola by sama F_σ množinou.

Pre dôkaz existencie takýchto F_σ množín uvažujme pre každé p systém otvorených množín $\mathcal{O}_p$ taký, že $O \in \mathcal{O}_p$ práve keď existuje F_σ množina C_O taká, že

$$O \cap F_p \subseteq C_O \subseteq A_q.$$

Položme $G = \bigcup \mathcal{O}_p$. Nakoľko je G zjednotením otvorených množín, je sama otvorenou množinou. Z Lemy 3 vyplýva, že existuje spočítateľná množina M, ktorej prvky sú okolia, pomocou ktorých môžme vyjadriť každú množinu $O \in \mathcal{O}_p$. Uvažujme množinu $M' \subseteq M$, ktorá bude obsahovať len tie okolia, ktoré sú použité pri vyjadrení prvkov $\mathcal{O}_p$. Každé okolie z M' patrí taktiež do $\mathcal{O}_p$. To plynie z toho, že je otvorená, a existencie C_O príslušnej množine, na vyjadrení ktorej sa dané okolie podieľa. Zároveň platí

$$G \cap F_p = \bigcup_{O \in \mathcal{O}_p} (O \cap F_p) = \bigcup_{U \in M'} (U \cap F_p) \subseteq \bigcup_{U \in M'} C_U \subseteq A_q,$$

kde $\bigcup_{U \in M'} C_U$ je spočítateľné zjednotenie F_σ množín, a G teda patrí do $\mathcal{O}_p$.

Ak by sa G rovnalo X, tak by sme mohli pre každú množinu F_p položiť $F_p^* = C_G$. Predpokladajme, že $G \neq X$. Potom je G^c uzavretá, a teda podľa predpokladu existuje $y \in G^c$ také, že je bodom spojitosti $f\big|_{G^c}$. Potom vďaka spojitosti $f\big|_{G^c}$ v y existuje otvorená množina O taká, že $y \in O \cap G^c$ a

$$f(O \cap G^c) \subseteq (p, \infty) \text{ } alebo \text{ } f(O \cap G^c) \subseteq (-\infty, q)$$

v závislosti na tom, či $f(y) > p$ alebo $f(y) < q$. Plynie to z definície spojitosti $f\big|_{G^c}$ v y, kde zoberieme $\varepsilon = ||f(y)| - |p||$, resp. $\varepsilon = ||f(y) - |q||$ a $\delta = diam\, O$.

V prvom prípade dostávame, že $O \cap G^c \cap F_p = \emptyset$, pričom sme využili že $F_p = \{x \in X : f(x) \leq p\}$. Potom platí

$$O \cap F_p = O \cap (G \cup G^c) \cap F_p = (O \cap G \cap F_p) \cup (O \cap G^c \cap F_p) = O \cap G \cap F_p,$$

kde sme využili vyššie uvedenú rovnosť. Nakoľko je množina $O \cap G$ otvorená a $(O \cap G) \cap F_p \subseteq G \cap F_p \subseteq C_G$, kde C_G je F_σ, platí že $O \cap G \in \mathcal{O}_p$. To spolu s rovnosťou $O \cap F_p = (O \cap G) \cap F_p$ dáva, že aj $O \in \mathcal{O}_p$. To však znamená, že $y \in G$, čo dáva spor.

V druhom prípade máme

$$O \cap F_p = O \cap (G^c \cup G) \cap F_p = (O \cap G^c \cap F_p) \cup (O \cap G \cap F_p) \subseteq$$

$$\subseteq (O \cap G^c) \cup (O \cap G \cap F_p) \subseteq A_q,$$

kde posledná inklúzia vyplýva z uvažovaného prípadu a definície množiny F_p. Z predošlého prípadu vieme, že $O \cap G \in \mathcal{O}_p$. Ukážme, že $O \cap G^c$ je F_σ. Množina O je otvorená, a podľa Lemy 18 teda F_σ. Potom platí

$$O \cap G^c = (\bigcup_{n=1}^{\infty} O_n) \cap G^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (O_n \cap G^c),$$

kde G^c je uzavretá, $O_n \cap G^c$ je teda taktiež uzavretá, a $O \cap G^c$ skutočne je F_σ. Spolu teda dostávame

$$O \cap F_p \subseteq (O \cap G^c) \cup (O \cap G \cap F_p) \subseteq (O \cap G^c) \cup C_G \subseteq A_q,$$

kde $(O \cap G^c) \cup C_G$ je zjednotenie dvoch F_σ množín, čo je tiež F_σ množina, a to vedie ku rovnakému sporu ako v predošlom prípade. □

Definícia 35. Cantorovo diskontinuum definujeme ako množinu, ktorá vznikne opakovaným vyňatím prostrednej tretiny každého podintervalu množiny získanej v predchádzajúcom kroku, pričom počiatočný interval je $[0, 1]$. Formálne $\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$, kde $C_1 = [0, 1], C_2 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1], \ldots$, kde $\mathcal{C}$ je Cantorovo diskontinuum.

V nasledujúcom príklade demonštrujeme, že Veta 30 nedáva charakterizáciu funkcií 1. Baireovej triedy, tzn.

Príklad 36 (prebraté z [3, Příklad 12.8, s. 96])**.** Existuje funkcia f s množinou bodov nespojitosti, ktorá je 1. kategórie, ale f nie je funkciou 1. Baireovej triedy.

Riešenie: Uvažujme funkciu $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, ktorá nadobúda hodnotu 1 v krajných bodoch odstraňovaných intervalov pri konštrukcii Cantorovho diskontinua, pre $x = 0, x = 1$, a hodnotu 0 vo zvyšných bodoch intervalu $[0, 1]$.

Ukážme, že f je spojitá v každom bode $[0, 1] \setminus \mathcal{C}$. Cantorovo diskontinuum vzniká ako prienik uzavretých množín, a teda je uzavretou množinou. Platí $[0, 1] \setminus \mathcal{C} = (0, 1) \cap \mathcal{C}^c$, kde sú obe množiny na pravej strane otvorené, a teda $[0, 1] \setminus \mathcal{C}$ je otvorenou množinou. Vďaka otvorenosti pre každé $x \in [0, 1] \setminus \mathcal{C}$ existuje okolie $U_\delta(x) \subset [0, 1] \setminus \mathcal{C}$, pričom f je rovná nule na tomto okolí. Pre každé $\varepsilon > 0$ také okolie spĺňa podmineku pre spojitosť f v x, a f teda skutočne je spojitá v každom bode $[0, 1] \setminus \mathcal{C}$.

Ukážme, že $f\big|_{\mathcal{C}}$ nie je spojitá v žiadnom bode $\mathcal{C}$. Využijeme to na dôkaz toho, že f nie je 1. Baireovej triedy, a navyše z toho vyplynie, že ani f nemá bod spojitosti v $\mathcal{C}$.

(i) Nech $x_0 \in \mathcal{C}$ je také, že $f(x_0) = 0$. Potom vzhľadom k definícii $\mathcal{C}$ existuje postupnosť

$$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty} : x_0 \in [a_n, b_n] \ \forall n \in \mathbb{N},$$

kde a_n, b_n sú krajné body intervalov využívaných pri konštrukcii $\mathcal{C}$ a $diam([a_n, b_n]) \to 0$. Nech $\varepsilon < 1$. Potom pre každé $\delta > 0$ existuje n_0 také, že $diam([a_{n_0}, b_{n_0}]) < \delta$, teda

$|a_{n_0} - x_0| < \delta$ a platí $\left| f\big|_{\mathcal{C}}(a_{n_0}) - f\big|_{\mathcal{C}}(x_0) \right| = 1 > \varepsilon$. Funkcia $f\big|_{\mathcal{C}}$ teda nie je spojitá v bode x_0.

(ii) Nech $x_0 \in \mathcal{C}$ je také, že $f(x_0) = 1$. Potom je x_0 krajným bodom otvoreného intervalu odstraňovaného pri konštrukcii $\mathcal{C}$. Je preto tiež krajným bodom ľubovolne malého uzavretého intervalu F, ktorý je súčasťou množiny C_n z konštrukcie $\mathcal{C}$. Pretože je Cantorova množina nespočítateľná (pozri napr. [5, s. 4]), musí byť s ohľadom na iteračnú konštrukciu Cantorovej množiny nespočítateľná tiež množina $F \cap \mathcal{C}$. Bodov náležiacich $F \cap \mathcal{C}$, ktoré sú krajnými bodmi intervalov odstraňovaných pri konštrukci $\mathcal{C}$, je spočítateľne mnoho (v každom zo spočetne mnoho krokov konštrukcie vznikne konečne mnoho takých bodov). Preto musí existovať $y \in F \cap \mathcal{C}$ také, že $f(y) = 0$. Preto $f|_{\mathcal{C}}$ nie je spojitá v x_0.

Kedže je $\mathcal{C}$ uzavretou množinou, z Vety 34 teda plynie, že f nie je 1. Baireovej triedy. Na to, že $\mathcal{C}$ je množinou 1. kategórie postačí podľa Lemy 31 ukázať, že $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ je hustá v $[0,1]$. Nakoľko $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ je hustá sama v sebe a každé okolie každého $x \in \mathcal{C}$ má neprázdny prienik s nejakými intervalmi odstraňovanými pri konštrukcii $\mathcal{C}$, tak podľa Lemy 2 to platí. □

Definícia 37. Nech X je úplný metrický priestor a $F \subseteq X$. Povieme, že množina H je *relatívne otvorená* vzhľadom ku množine F, ak existuje otvorená množina G (vzhľadom ku X) taká, že $H = G \cap F$.

Veta 38 (prebraté z [7, Exercise 1, s. 43])**.** *Nech X je metrický priestor. Funkcia f je 1. Baireovej triedy práve vtedy, ak pre každú uzavretú množinu $F \subseteq X$ platí, že pre každé $\varepsilon > 0$ existuje neprázdna relatívne otvorená množinu H vzhľadom ku F taká, že*

$$\sup f(H) - \inf f(H) < \varepsilon.$$

Dôkaz. ($\Rightarrow$) Z Vety 34 plynie, že pre každú uzavretú množinu F existuje bod $x_0 \in F$ taký, že $f\big|_F$ v ňom je spojitá. Zvoľme $\varepsilon > 0$ ľubovoľne. Potom zo spojitosti v x_0 máme, že existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in U_\delta(x_0) \cap F$ platí $f(x) \in U_{\varepsilon/3}(f(x_0))$. Položme $H := U_\delta(x_0) \cap F$. Potom

$$\sup f(H) - \inf f(H) \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{3} - \big(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{3}\big) < \varepsilon.$$

Našli sme teda relatívne otvorenú množinu vzhľadom ku F s nami žiadanou vlastnosťou.

($\Leftarrow$)*(inšpirované podľa [7, Theorem 2, s. 43])* Dokážme obmenenú implikáciu, tj. že ak f nie je 1. Baireovej triedy, potom existujú uzavretá množina $F \subseteq X$ a $\varepsilon > 0$ také, že pre každú neprázdnu relatívne otevrenú množinu H v F platí $\sup f(H) - \inf f(H) \geq \varepsilon$.

Podľa Vety 34 existuje uzavretá $F_0 \subseteq X$ taká, že $f|_{F_0}$ nemá bod spojitosti. Pre racionálne $p < q$ položme

$$F_{p,q} := \{x \in F : \limsup_{y \to x, y \in F_0} f(y) \geq q \text{ a } \liminf_{y \to x, y \in F_0} f(y) \leq p\}.$$

Množiny $F_{p,q}$ sú uzavreté (plynie z definície lim sup a lim inf). Vďaka nespojitosti $f|_{F_0}$ leží každý bod F_0 v nejakom $F_{p,q}$ pre vhodnú voľbu racionálnych $p < q$. Množina F_0 je teda pokrytá spočetne mnoho uzavretými $F_{p,q}$. Z Vety 10 plynie, že existujú racionálné $p_0 < q_0$ také, že F_{p_0,q_0} má neprázdne vnútro v F_0, teda obsahuje množinu G, ktorá je otvorená v F_0.

Nájdime $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ také, že $p_0 < \alpha < \beta < q_0$. Položme $\varepsilon := \beta - \alpha$ a $F := \overline{G}$. Potom každá neprázdna relatívne otevorená množina $H \subset F$ obsahuje body x, y také, že $f(x) \geq \beta$ a $f(y) \leq \alpha$. Teda

$$\sup f(H) - \inf f(H) \geq f(x) - f(y) \geq \beta - \alpha = \varepsilon,$$

čo sme chceli dokázať. □

Kapitola 8

Príslušnosť rôznych funkcií k 1. Baireovej triede

V tejto kapitole si ukážeme rôzne druhy funkcií, prípadne konkrétne funkcie, ktoré patria či nepatria do 1. Baireovej triedy. Uvažujeme pre ľubovoľný separabilný úplný metrický priestor X, ak nie je uvedené inak.

Ilustrácia 39. Spojité funkcie sú 1. Baireovej triedy.

Dôkaz. Ak f je spojitá, tak $f_n(x) := f(x)$ je tiež spojitá pre každé $n \in \mathbb{N}$, a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. □

Ilustrácia 40. Funkcie so spočítateľne mnoho bodmi nespojitosti sú 1. Baireovej triedy.

Dôkaz. Nech $f : X \to \mathbb{R}$ má spočítateľnú množinu bodov nespojitosti D a $F \subseteq X$ je neprázdna uzavretá množina. Ak F obasahuje izolovaný bod, tak $f\big|_F$ je spojitá v tomto bode. Ak F nemá izolovaný bod, tak uvažujme F ako úplný metrický priestor. Potom môžme $D \cap F$ vyjadriť ako spočítateľné zjednotenie bodov nespojitosti, čo sú riedke množiny v uvažovanom F (pretože žiadny bod $D \cap F$ nie je izolovaný v F). Množina $D \cap F$ je teda 1. kategórie v F, a množina bodov spojitosti je podľa Vety 10 hustá v F, a teda neprázdna. Z Vety 34 potom plynie, že f je 1. Baireovej triedy. □

Ilustrácia 41. Monotónne funkcie sú 1. Baireovej triedy pre $X = \mathbb{R}$.

Dôkaz. Nakoľko majú monotónne funkcie spočítateľne mnoho bodov nespojitosti, pozri [5, Theorem 7.8, s. 35], podľa predchádzajúceho tvrdenia sú 1. Baireovej triedy. □

Ilustrácia 42. Derivácie diferencovateľných funkcií sú 1. Baireovej triedy pre $X = \mathbb{R}$.

Dôkaz. Nech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má deriváciu. Potom je f spojitá, a môžme definovať

$$f_n(x) := \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n},$$

kde f_n je spojitá pre každé $n \in \mathbb{N}$. To, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x)$, kde $x \in \mathbb{R}$, plynie z existencie derivácie. $\square$

Ilustrácia 43. Dirichletova funkcia nie je 1. Baireovej triedy.

Dôkaz. Z hustoty $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{I}$ v intervale $(0, 1)$, a z Lemy 2 plynie, že v každom okolí každého bodu tohto intervalu sa nachádza ako bod z $\mathbb{Q}$, tak i z $\mathbb{I}$. Pre každé $x \in (0, 1)$ teda $\omega(x) = 1$, a podľa Lemy 27 je Dirichletova funkcia nespojitá v každom bode svojoho definičného oboru. Pretože je interval $(0, 1)$ množinou 2. kategórie v $\mathbb{R}$ a Dirichletova funkcia nie je spojitá v žiadnom bode tohto intervalu, podľa Vety 30 nie je funkciou 1. Baireovej triedy. $\square$

Kapitola 9

Záver

Úvod práce je venovaný francúzskemu matematikovi René-Louisovi Bairovy, podľa ktorého sú funckie 1. Baireovej triedy pomenované. V Kapitole 2 sú uvedené definície a lemy, ktoré sa v práci vyskytujú, resp. využívajú opakovane. Tretia kapitola sa venuje Baireovej vete o kategóriách, ktorá neskôr poslúži ako užitočný nástroj pri práci s kategóriami množín. Kapitola 4 zoznamuje s funkciami 1. Baireovej triedy, taktiež popisuje, že „bežnou manipuláciou“ s nimi sa príslušnosť 1. Baireovej triede zachováva. V ďalšej kapitole je po sérii krokov dokázané tvrdenie, ktoré charakterizuje funkcie 1. Baireovej triedy pomocou vzorov otvorených množín. Nasleduje Kapitola 6, ktorá prináša poznatok o množinách bodov nespojitosti nami skúmaných funkcií. Siedma kapitola obsahuje centrálne tvrdenie práce, ktoré charakterizuje Baireovské funkcie 1. triedy pomocou existencie bodov spojitosti reštrikcií týchto funkcií vzhľadom k uzavretým množinám. V poslednej kapitole je ilustrované, ako funkcie 1. Baireovej triedy môžu vyzerať, no taktiež je uvedný príklad funkcie, ktorá 1. Baireovej triedy nie je.

Pri tvorbe tejto práce som využil viacero zdrojov, ktoré možno nájsť zozname literatúry. Väčšina dôkazov je prevzatá, sú však doplené o chýbajúce argumenty či komentáre. Kapitola 6 bola oproti [5] zovšeobecnená do metrických priestorov. Riešenia všetkých príkladov sú vlastné, platí to tiež pre dôkazy Lem 2, 3, 18, 22 a 27, či dôkazy Viet 15 a 38. Ilustrácie, a ich prípadné dôkazy, sú tiež vlastné.

Dúfam, že naplniť primárny cieľ tejto práce, a to popísať funkcie 1. Baireovej triedy sa podarilo, a že táto práca predstavuje prijateľnú formu pre zoznámenie sa s nimi.

Literatúra

[1] ENGELKING, R.: *General topology* . Berlin: Heldermann Verlag, 1989. [ISBN 3-88538-006-4]

[2] GORDON, R.A.: *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*. American Mathematical Society, 1994.[ISBN 0-8218-3805-9]

[3] LUKEŠ, J. a kol.: *Problémy z matematické analýzy*. Praha: SPN, 1982.

[4] MALEVA, O.: *The Baire Category Theorem and the Banach–Mazur game.* London, 2016. Dostupné z: https://www.lms.ac.uk/sites/default/files/maleva_exercises_questions-Revised.pdf

[5] OXTOBY, J.C.: *Measure and category, Second edition*. New York: Springer, 1980. [ISBN 0-387-90508-1]

[6] THOMSON, B.S.; BRUCKNER, J.B.; BRUCKNER, A.M.: *Real analysis, Second edition*. Prentice Hall, 2008.[ISBN 1434844129]

[7] TODORCEVIC, S.: *Topics in topology.* Berlin, Heidelberg: Springer, 1997. [ISBN 3-540-62611-5]

[8] TOMEČEK, J.: *Matematická analýza 2.* Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 2020. [ISBN 978-80-244-5853-3]

[9] Wikipedia: *Thomae's function.* Dostupné z https://en.wikipedia.org/wiki/Thomae%27s_function