Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Analýza žákovských řešení matematických úloh – slovní úlohy se zlomky

Vypracovala: Hana Valková
Vedoucí práce: doc. RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma *Analýza žákovských řešení matematických úloh – slovní úlohy se zlomky* jsem vypracoval(a) samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 23.4.2023 ……………………………

(podpis)

Poděkování

Chtěla bych poděkovat doc. RNDr. Libuši Samkové, Ph.D. za její ochotu a odbornou pomoc, která mě nasměrovala k dokončení této práce. Přínosná literatura doc. Samkové mi pomohla k lepšímu zpracování a získání nových poznatků.

Dále bych ráda poděkovala ředitelům a třídním učitelkám základních škol, ze kterých jsem získávala data pro tuto práci, za jejich spolupráci, věnovaný čas a za to, že mi vyšli ve všem vstříc.

Anotace

Diplomová práce *Analýza žákovských řešení matematických úloh – slovní úlohy se zlomky* se zabývá kvalitativní analýzou dat z písemných prací zaměřenou na různé postupy řešení matematických úloh, které žáci používají při řešení slovních úloh se zlomky. Cílem této práce je provést analýzu žákovských řešení a na základě výsledků analýzy dat vytvořit několik úloh Concept Cartoons. Teoretická část je zaměřena na teorii slovních úloh, způsoby jejich řešení, dále na vymezení pojmu zlomek a jak se s nimi pracuje a v konečné části je popsána metoda Concept Cartoons. V praktické části jsou poté analyzována získaná žákovská řešení slovních úloh se zlomky. Vše je doplněno obrázky obsahující žákovská řešení.

Klíčová slova: žákovská řešení, Concept Cartoons, slovní úlohy, zlomky

Annotation

The diploma thesis *An analysis of student solutions of mathematical tasks – word problems with fractions* deals with a qualitative analysis of data from written papers focused on different methods of solving mathematical problems that students use when solving word problems with fractions. The goal of this work is to analyze student solutions and create several Concept Cartoons tasks based on the data analysis results. The theoretical part is focused on the theory of word problems, ways of solving them, the definition of the concept of fractions and how to work with them. In the final part is described the Concept Cartoons method. In the practical part have been analysed the student solutions of word problems with fractions. Everything is complemented with pictures containing student solutions.

Keywords: student solutions, Concept Cartoons, word problems, fractions

Obsah

Úvod

Učivo zlomků je pro žáky prvního stupně obtížná látka a záleží na učiteli, jak se tohoto téma zhostí a vysvětlí, co to zlomek vlastně je, co představuje, aby si žáci mohli propojit pojem s pochopením. V teoretické části se zabývám právě popisem zlomků, jak se s nimi operuje a co představují.

Téma jsem si zvolila díky své vedoucí práce doc. RNDr. Libuši Samkové, Ph.D., která mi jej navrhla po předchozím rozhovoru. Analýza dat, která se týká zlomků, mě velmi lákala a možnost vytvořit si vlastní obrázky Concept Cartoons se mi jevilo, jako dobré téma pro diplomovou práci. Cílem této práce je zanalyzovat získaná žákovská řešení a na základě získaných dat zjistit, jaké chyby dělají žáci nejčastěji při řešení slovních úloh se zlomky a vypracovat podle těchto řešení několik Concept Cartoons, které by mohly být dále využívány v praxi.

První kapitolou jsou již zmíněné zlomky, kde zmiňuji základní teorii zlomků, jak s nimi operovat, rozšířit je nebo naopak zkrátit a také základní pojmy, které se zlomky souvisí. Tuto kapitolu završuji podkapitolou slovní úlohy se zlomky, ve které popisuji několik druhů slovních úloh, které se mohou na prvním stupni základních škol řešit.

V další kapitole jsou popsány slovní úlohy, co všechno obsahují a jak se řeší. Žáci mají obtíže s řešením slovních úloh. Hledají různá řešení a dělají spoustu chyb, které mají několik příčin, mohou dělat chyby z nepozornosti, kdy si špatně opíšou příklad, neporozumí zadání úlohy nebo jen neví, jak úlohu vyřešit.

Nakonec se v teoretické části zmiňuji o metodě Concept Cartoons. Čtenář se v této kapitole seznámí s počátky této metody, kdy a kdo tuto metodu vynalezl, co to vůbec Concept Cartoons je a k čemu slouží. Dále v této kapitole popisuji, jak mohou být úlohy využity ve výuce a popsána je také tvorba těchto úloh.

V praktické části se zaměřuji na kvalitativní analýzu žákovských řešení matematických úloh ze získaných písemných prací. První část obsahuje získaná data ze tří pátých tříd základních škol. Data jsou doplněna tabulkou pro lepší přehlednost. V následující kapitole je provedena analýza žákovských řešení právě z těchto získaných písemných prací pátých tříd. Řešení jsou rozdělena podle jednotlivých tříd a jsou řazena od nejlépe hodnocených až po ty nejhůře hodnocené. Dále jsem pro svou diplomovou práci vytvořila pracovní list s úlohami, který byl následně předložen žákům ve dvou ze tří těchto pátých tříd. Získala jsem tedy další data k analýze. Tato data jsou v praktické části zpracována a jednotlivá řešení jsou opět seřazena podle úspěšnosti řešení.

Konečná část této práce se zabývá opět metodou Concept Cartoons. Na základě získaných žákovských řešení jsem vytvořila několik obrázků Concept Cartoons, které popisují jednotlivé postupy. Každý obrázek je doplněn popisem. Závěr obsahuje zhodnocení získaných žákovských řešení.

1. Teoretická část

1.1. Zlomky

Se zlomky se žáci setkávají v podstatě celou školní docházku. Již malé děti ví, co znamená půlka chleba, půl hodiny nebo půl sklenice vody. Na prvním stupni se toto povědomí o zlomcích rozšiřuje, žáci se učí, co to znamená rozdělit koláč na třetiny, osminy atd. a co se stane s celkem, pokud ho takto rozdělíme. Teprve na druhém stupni se již pracuje se zlomky naplno a provádí se početní operace, protože zlomky patří k obtížnému učivu. (Šarounová et al., 1997)

Podle Hejného et al. (2004) je pro žáky zlomek jen jako „objekt aritmetických operací s uspořádanou dvojicí čísel." Žáci se většinou naučí, jak se se zlomky počítá a pracuje, ale bohužel to často není propojeno s pochopením, co zlomek představuje. (Hejný et al., 2004)

1.1.1. Vymezení pojmu zlomek

Zlomky, jak je obecně známo, patří mezi racionální čísla. Odvárko & Kadleček (1998) definují racionální čísla, jako čísla, která se dají znázornit pomocí zlomků, jejichž čitatele zapisujeme celým číslem a jmenovatel je přirozené číslo.

Kotyra & Sivošová (2004) popisují zlomek jako celek, který můžeme rozdělit na libovolný počet částí, které ale musí být stejně velké, tzn. nesmí mít každá část jinou velikost.

„Zlomek je jiný zápis podílu dvou čísel. Podíl dvou čísel můžeme zlomkem nebo smíšeným číslem vyjádřit přesně." (Kotyra & Sivošová, 2004, s.37)

Podle Blažkové et al. (1997) se zlomek ve druhém období 1.stupně ZŠ vykládá pomocí manipulativních činností, kde si žáci samostatně zkouší různými způsoby rozdělovat celek na části tak, aby si osvojili vědomost, že zlomek představuje část celku a také, že celek můžeme zapsat pomocí zlomku.

		čitatel
Zlomek má 3 části:	$\frac{2}{5}$	zlomková čára
		jmenovatel

„Jmenovatel pojmenovává celý zlomek. Vyjadřuje, na kolik stejných dílů jsme celek rozdělili. Čitatel určuje (čítá), kolik dílů z celku uvažujeme.“ (Herman, 1994)

Zlomky zapisujeme tak, že nejdříve napíšeme zlomkovou čáru, která je na úrovni početních znamének, a poté dopíšeme nahoru čitatele a dolu jmenovatele. (Kindl, 1980, s.42)

U zlomku se nejdříve přečte čitatel, tedy kolik dílků z celku zlomek vyjadřuje a poté na kolik částí vyjádřených jmenovatelem je celek rozdělen. „Rozdělíme-li celek na dvě stejné části, nazývají se poloviny, tři stejné části třetiny, deset stejných částí desetiny atd.“ (Slouka, 1994, s.33)

Slouka (1994) uvádí, že „každé celé číslo můžeme zapsat zlomkem: Např.: $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3}$ atd. Nebo $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$ atd. Rovněž lze zapsat nulu jako zlomek, např. $\frac{0}{2}$, $\frac{0}{10}$ atd.“ (Slouka, 1994, s.33)

Zlomek, který má ve jmenovateli 0 však nemá žádný význam, protože nelze dělit celek na 0 částí. (Herman, 1994, s.12)

1.1.2. Porovnávání zlomků

„Zlomky, které jsou různě zapsány, ale určují stejnou délku nebo obsah, se navzájem rovnají. Když máme dva zlomky, které se navzájem rovnají, můžeme nahradit jeden druhým.“ (Kotyra a Sivošová, 2004, s.19)

Např.: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$ atd. (Zlomky jsou různě zapsány, ale určují stejnou velikost)

<table>
<tr><td colspan="6">$\frac{1}{3}$</td><td colspan="6">$\frac{1}{3}$</td><td colspan="6">$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\frac{1}{6}$</td><td colspan="3">$\frac{1}{6}$</td><td colspan="3">$\frac{1}{6}$</td><td colspan="3">$\frac{1}{6}$</td><td colspan="3">$\frac{1}{6}$</td><td colspan="3">$\frac{1}{6}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{1}{9}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{9}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{9}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{9}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{9}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{9}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{9}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{9}$</td><td colspan="2">$\frac{1}{9}$</td></tr>
</table>

Pokud bychom měli dva zlomky, které se naopak vzájemně nerovnají, potom je jeden z nich větší než ten druhý a mezi zlomky se určuje vztah nerovnosti znaménkem > nebo <. (Kotyra a Sivošová, 2004, s.22)

Např.: $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$

<table>
<tr><td colspan="5">$\frac{1}{3}$</td><td colspan="5">$\frac{1}{3}$</td><td colspan="5">$\frac{1}{3}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\frac{1}{5}$</td><td colspan="3">$\frac{1}{5}$</td><td colspan="3">$\frac{1}{5}$</td><td colspan="3">$\frac{1}{5}$</td><td colspan="3">$\frac{1}{5}$</td></tr>
</table>

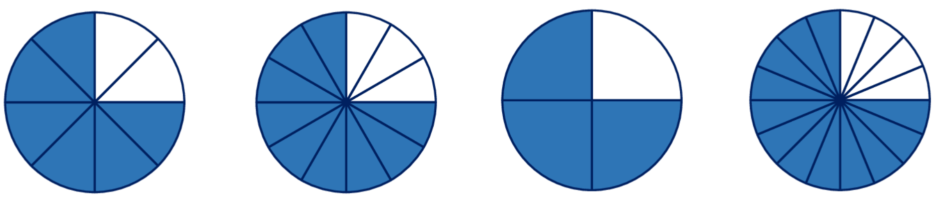
Kotyra a Sivošová (2004) určují, zda platí rovnost mezi zlomky, pomocí číselné osy a popisují obecná pravidla pro porovnávání zlomků, které se nerovnají:

a) „Pokud mají dva zlomky čitatele 1, tak větší je ten zlomek, který má menšího jmenovatele. Podle tohoto pravidla platí, že $\frac{1}{2} > \frac{1}{10}$, protože 2 < 10. Takovéto zlomky, které mají v čitateli jedničku, nazýváme kmenové zlomky.

b) Pokud mají dva zlomky stejné jmenovatele, větší je ten zlomek, který má většího čitatele. Podle tohoto pravidla tedy platí, že $\frac{7}{10} > \frac{4}{10}$, protože 7 > 4.

c) Pokud mají dva zlomky stejné čitatele, tak větší je ten zlomek, který má menšího jmenovatele. Podle tohoto pravidla platí, že $\frac{3}{5} > \frac{3}{10}$, protože 5 > 10.“ (Kotyra & Sivošová, 2004, s.22-23)

„Kterýkoliv zlomek z množiny všech navzájem rovnajících se zlomků ($\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \dots$) vyjadřuje totéž racionální číslo.“ (Čižmár, 1989, s.129)



$\frac{6}{8}$ $\frac{9}{12}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{12}{16}$

Čižmár (1989) vysvětluje v učebnici matematiky, jak poznáme racionální čísla. Pokud máme vyznačené stejné části kruhu, zlomky se vždy budou rovnat. Pokud bychom tato čísla znázornili na číselné ose, umístění těchto čísel by bylo na stejném místě, tudíž by se tato čísla vždy rovnala.

1.1.3. Rozšiřování a krácení zlomků

„Když máme dva zlomky, které nemají stejné jmenovatele ani čitatele, pak je musíme pomocí rozšiřování nebo krácení upravit. Úpravu zvolíme tak, abychom dostali zlomky se stejnými čitateli nebo jmenovateli. Říkáme také, že upravíme zlomky na společného jmenovatele nebo na společného čitatele.“ (Kotyra & Sivošová, 2004, s.24)

Herman (1994) vysvětluje, že „hodnota zlomku se nezmění, vynásobíme-li čitatele i jmenovatele zlomku stejným přirozeným číslem. Takové úpravě říkáme **rozšiřování zlomku.**“ Ján Čižmár (1989) v učebnici matematiky pro 6. ročník doplňuje toto tvrzení tím, že by mělo být rozšiřující číslo různé od nuly, jinak by zlomek neměl smysl.

Př.: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \cdots$

V příkladě je základní zlomek $\frac{1}{3}$, pokud tento zlomek rozšíříme číslem 2, vznikne následující zlomek $\frac{2}{6}$, atd.

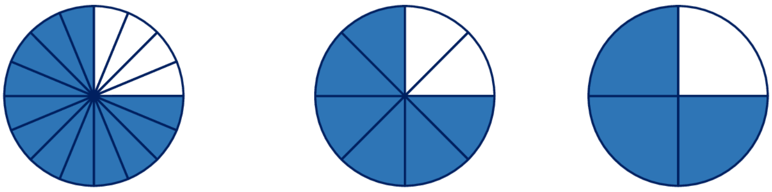
Krácení zlomků popisuje Slouka (1994) jako stejný proces, který se provádí u rozšiřování, jen místo násobení používáme dělení. Tedy pokud vydělíme čitatele i jmenovatele stejným číslem, zkrátíme ho. Oproti rozšiřování však můžeme provádět krácení jen v případě, kdy jsou obě čísla (tj. čitatel i jmenovatel) soudělná, tzn. že mají společného dělitele.

„Jsou-li čitatel a jmenovatel čísla nesoudělná, říkáme, že je zlomek v základním tvaru. Výsledky příkladů vždy upravujeme do základního tvaru.“ (Slouka, 1994, s.35) Nesoudělná čísla jsou přirozená čísla, která mají jediného vzájemného dělitele a to jedničku.

1.1.4. Základní pojmy zlomků

Zlomek v základním tvaru

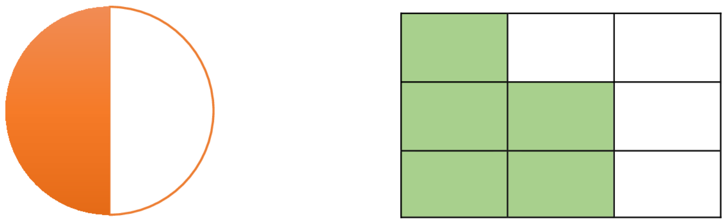
Jedná se o zlomek, jehož čitatel a jmenovatel již dále nejsou soudělná čísla. Pokud krátíme zlomek na základní tvar, hodnota zlomku se nemění.



$\frac{12}{16}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{3}{4}$

Zlomek pravý

Na 1. stupni se pracuje pouze s kladnými čísly, proto můžeme napsat, že „pravý zlomek je menší než 1 (jeho čitatel je menší než jeho jmenovatel).“ (Šarounová et al., 1997, s.93)



$\frac{1}{2}$ $\frac{5}{9}$

Zlomek nepravý

„Nepravý zlomek je větší než 1 (jeho čitatel je větší než jeho jmenovatel).“ (Šarounová et al., 1997, s.93)

„Nepravé zlomky můžeme zapsat celým číslem a zlomkem. Takto zapsaná čísla nazýváme smíšená čísla. Smíšená čísla se skládají z celého čísla a zlomkové části.“ (Šarounová et al., 1997, s.93)

Smíšená čísla

Smíšená čísla jsou čísla, která mají větší čitatel než jmenovatel a zapisujeme je pomocí celého čísla a zlomku.

„V běžném jazyce je zlomek zpravidla chápán jako část celku, která je menší než celek. Často však rozdělujeme několik celků. Pak je užitečné uvažovat i takové zlomky celku, které jsou větší než jeden celek.“ (Herman, 1994, s.11)

„Smíšená čísla používáme běžně v praktickém životě – kupujeme $2\frac{1}{2}$ kg jablek, spíme $7\frac{1}{2}$ hodiny, vydechneme $3\frac{3}{4}$ litru vzduchu. Při matematických výpočtech je však často výhodnější přejít od smíšených čísel ke zlomkům.“ (Herman, 1994, s.22)

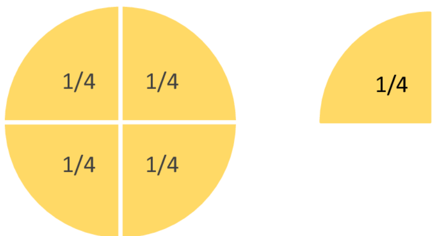
„Zlomky, které mají „malé“ čitatele i jmenovatele, dokážeme vyjádřit smíšenými čísli zpaměti. Nedokážeme-li zlomek vyjádřit smíšeným číslem zpaměti, provedeme písemné dělení čitatele jmenovatelem.“ (Herman, 1994, s.23)

Při převádění zlomku na smíšené číslo postupujeme podle popisu Slouky (1994) následovně:

Máme zlomek např. $\frac{5}{4}$

Vydělíme čitatele jmenovatelem: 5 : 4 = 1 (zbytek 1)

Vznikne nám smíšené číslo: $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$



$$\frac{5}{4} = 1\,\frac{1}{4}$$

Sčítání a odčítání smíšených čísel provádíme tak, že si převedeme smíšené číslo na zlomek a postupujeme podle pravidel sčítání a odčítání zlomků.

1.1.5. Operace se zlomky

„Když mám sčítat nebo odčítat zlomky s různými jmenovateli, nejdřív je upravím na společného jmenovatele. Při sčítání kladných zlomků mohu zaměnit pořadí sčítanců. Sčítance mohu sdružovat do menších skupin.“ (Kotyra & Sivošová, 2004, s.57)

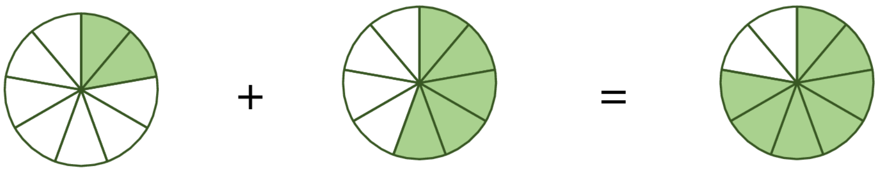
„Racionální čísla lze mezi sebou sčítat, odčítat, násobit i dělit. Výsledkem je vždy racionální číslo. Jedinou výjimkou je dělení nulou, které, jak víme, nemá smysl.“ (Herman, 1994, s.99)

Sčítání zlomků

„Sčítání zlomků má stejné vlastnosti jako sčítání celých čísel. Součet zlomků se nezmění, když změníme pořadí sčítanců. Říkáme, že sčítání je komutativní, tzn. že nezáleží na pořadí sčítanců.“ (Kotyra & Sivošová, 2004, s.55)

Justová (1997) vysvětluje v učebnici pro 5. ročník sčítání zlomků se stejným jmenovatelem tak, že stačí sečíst čitatele zlomku a jmenovatele stačí jen opsat, ten zůstává stejný.

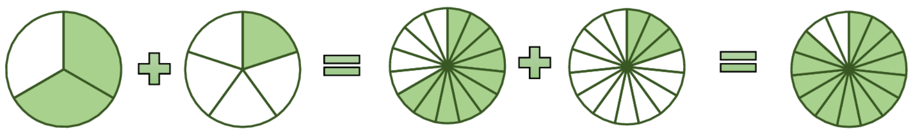
Např.: $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{7}{9}$



Sečetli jsme pouze čitatele, kdy ke 2 částem jsme přidali 5 a jmenovatel zůstal stejný.

Slouka (1994) vysvětluje sčítání zlomků s různými jmenovateli tak, že se nejdřív musí upravit zlomek a to tak, že vytvoříme společného jmenovatele. Společný jmenovatel se vytvoří určením společného násobku jmenovatelů. Po vytvoření společného jmenovatele se čitatel zvětší tolikrát, kolikrát se zvětšil jmenovatel.

Např.: $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15} = \frac{13}{15}$



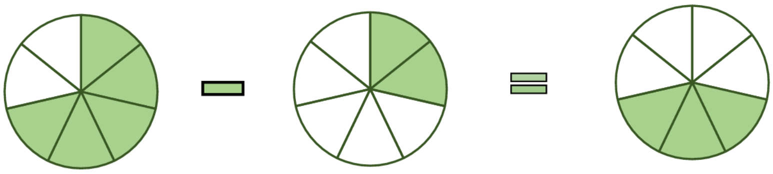
Společný jmenovatel 3 a 5 je 15, protože je to násobek těchto čísel (tj. $3 \cdot 5 = 15$). Čitatele se následně také zvětší podle zvětšení jmenovatele. Jmenovatel 3 se zvětšil 5krát, takže čitatel 2 se musí také zvětšit 5krát a vyjde první čitatel 10 (tj. $5 \cdot 2 = 10$) a druhý jmenovatel 5 se zvětšil 3krát, takže čitatel 1 se musí také zvětšit 3krát a vyjde druhý čitatel 3 (tj. $3 \cdot 1 = 3$). Takto upravené zlomky mají stejného jmenovatele 15 a postupuje se jako u sčítání zlomků se stejným jmenovatelem.

Odčítání zlomků

„Pomocí odčítání dvou zlomků můžeme zjistit, který z nich je větší. Pokud je rozdíl dvou čísel 0, tak se čísla vzájemně rovnají“ (Kotyra & Sivošová, 2004, s.57)

Zlomky se stejným jmenovatelem se, jak popisuje např. Justová (1997), odčítají tak, že se vzájemně odečtou čitatele zlomků a jmenovatel se pouze opíše, zůstane stejný.

Např.: $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$

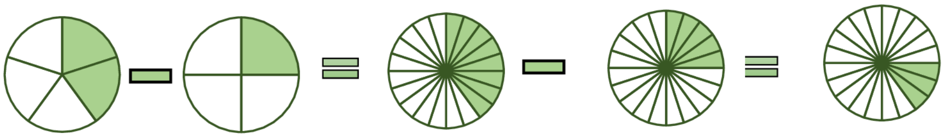


Odečetli jsme pouze čitatele 5–2 a jmenovatel zůstal stejný.

„Zlomky s různými jmenovateli odčítáme tak, že je nejprve převedeme na společného jmenovatele a teprve pak je odečteme.“ (Herman, 1994, s.62)

Postup odčítání zlomků s různými jmenovateli je stejný, jako u sčítání zlomků s různými jmenovateli. Nejprve se musí najít společný jmenovatel a poté se čitatele zvětší tolikrát, kolikrát se zvětšil jmenovatel. Teprve poté můžeme čitatele odečíst.

Např.: $\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{8}{20} - \frac{5}{20} = \frac{3}{20}$



Společný jmenovatel 5 a 4 je 20, protože je to jejich nejmenší společný násobek. Čitatel 2 se následně zvětší 4krát a vznikne čitatel 8 (tj. $4 \cdot 2 = 8$) a druhý čitatel se zvětší 5krát (tj. $5 \cdot 1 = 5$). Dále se postupuje jako u odčítání zlomků se stejným jmenovatelem, kde stačí čitatele odečíst a vyjde výsledek, který se pokud není v základním tvaru zkracuje, dokud nezůstane zlomek, který již není soudělný.

Násobení zlomků

„Zlomek násobíme celým číslem tak, že násobíme celým číslem čitatele a jmenovatele opíšeme.“ (Slouka, 1994, s,48)

Např.: $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 1}{4} = \frac{3}{4}$

Příklad se vypočítá tak, že se čitatel, v tomto případě 1, vynásobí celým číslem, tj. 3, takže ve výsledku vyjde čitatel 3 (tj. 3 · 1 = 3) a jmenovatel zůstane stejný.

„Součinem dvou zlomků je zlomek, jehož čitatel je roven součinu čitatelů obou zlomků, jmenovatel součinu jmenovatelů obou zlomků“ (Šarounová et al., 1997, s.146)

Např.: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

Příklad vypočítáme tak, že spolu vynásobíme čitatele, tj. 2 a 4 a vyjde čitatel 8 a jmenovatele spolu, tj. 3 a 5 a vyjde 15. Koncový výsledek je nesoudělný a je tedy v základním tvaru.

Kotyra & Sivošová (2004) vysvětlují vlastnosti násobení zlomků. Na příkladech součinu zlomků popisují, že stejně jako při násobení celých čísel, ani u zlomků nezáleží na pořadí čísel, protože se jedná o komutativnost a zároveň stejně jako u celých čísel, je i násobení zlomků asociativní, tzn. sdružování čísel pomocí závorek (např.: $\frac{2}{3} \cdot (\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{4})$ je stejné jako $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}\right) \cdot \frac{1}{4}$).

Při násobení zlomků můžeme také zlomky krátit mezi sebou a to tak, že čitatele můžeme zkrátit se jmenovatelem. Postup je stejný jako u krácení zlomků, kdy si musíme najít jejich společného dělitele a tímto dělitelem obě čísla zkrátit. Takovéto krácení nazýváme jako „křížové pravidlo“.

Např.: $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{16} = \frac{1}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{28}$

Nejprve se zlomky vzájemně zkrátily, a to první čitatel, tj. 4 s druhým jmenovatelem, tj. 16, protože společný dělitel čísel 4 a 16 je 4. Obě tato čísla se tedy vydělila čtyřmi. Zbylá čísla již byla vzájemně nesoudělná a pokračovalo se klasickým násobením zlomků, kdy se vzájemně vynásobily čitatele a poté i jmenovatele.

Dělení zlomků

Kotyra & Sivošová (2004) vykládají postup dělení zlomku celým číslem tak, že se oproti násobení zlomku celým číslem, kdy se vynásobí čitatel, násobí naopak jmenovatel.

Např.: $\frac{1}{6} : 2 = \frac{1}{2 \cdot 6} = \frac{1}{12}$

V příkladě, kde se jedna šestina dělí dvěma, násobí se společně celé číslo a jmenovatel zlomku, tj. $6 \cdot 2 = 12$ a čitatel zůstává nezměněný.

Šarounová et al. (1997) vysvětluje postup dělení dvou zlomků tak, že se musí nejdříve převrátit druhý zlomek (tzv. převrácený zlomek) a poté se postupuje jako u násobení dvou zlomků.

„Převrácený zlomek dostaneme, když ve zlomku změníme čitatele a jmenovatele." (Šarounová et al., 1997, s.150)

Např.: $\frac{3}{8} : \frac{2}{5} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{16}$

Při dělení zlomků nemůžeme použít „křížové pravidlo", to je možné až v momentě, kdy dojde k převrácení zlomku a vznikne násobení zlomků. V tomto případě nešlo krátit čitatel 2 a jmenovatel 8, protože mezi nimi byl vztah dělení a po převrácení byla obě tato čísla jmenovateli.

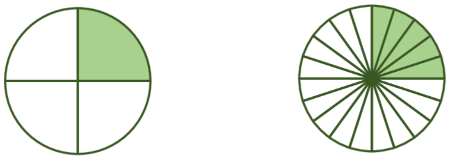
1.1.6. Zlomky a grafy

„Graf by měl být vnímán jako prostředek srozumitelného, přehledného a jednoduchého vyjádření zdánlivě složitého problému či vztahu." (Hošpesová, 2001, s.86)

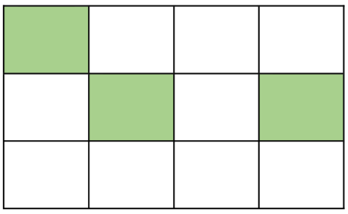
Grafické znázornění zlomků pomáhá žákům seznámit se a představit si, co zlomek vlastně znamená. Pomocí různých modelů, které se učí rozdělovat na stejně velké části a vybarvování těchto částí si žáci mohou uvědomit, co představuje část zlomku. Jmenovatel vždy určí, na kolik částí by se měl zvolený model rozdělit a čitatel, kolik z těchto částí se má vybarvit.

Takovými modely, které mohou žáci používat a jsou nejčastěji uváděny v učebnicích matematiky (Hošpesová, 2001; Novotný & Novák, 2021; Odvárko & Kadleček, 1998) jsou např.:

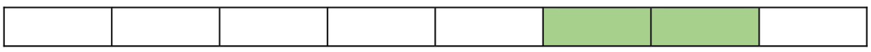
- kruhové, nebo-li „**koláčové**“, které mají tvar kruhu nebo n-úhelníku
    - tyto modely se hodí pro zlomky, které mají menší jmenovatele, ale zároveň by se měl dát daný jmenovatel dobře dělit
    - Dle mého názoru dělá žákům problém tímto modelem rozdělit lichá čísla na stejně velké části, především pak prvočísla větší než 5



- obdélníkové (čtvercové), pro lepší pochopení se používá za příklad tabulka **čokolády**



- **tyčové** modely
    - hodí se pro všechny zlomky, které mají menší čitatele, které jsou navíc těžce znázornitelné pomocí předchozích modelů, např. sedmina, pětina, třináctina, …
    - zároveň jsou tyto modely vhodné pro porovnávání dvou nebo více zlomků (viz kapitola *1.1.2. Porovnávání zlomků*)



Ve všech použitých modelech je znázorněna stejná část $\frac{1}{4}$ celého obrazce.

1.2. Slovní úlohy

Slovní úlohy jsou popisovány autory různě, nejčastěji je slovní úloha vymezována jako matematický problém, zasazený do nějaké reálné situace, který můžeme řešit určitými matematickými prostředky. Vondrová (2019) považuje za slovní úlohu takovou úlohu, která obsahuje nějaký kontext (který může být reálný, pseudo-reálný či imaginární) a v níž jsou některé numerické údaje dány a jiné se hledají. Jinak zase popisuje slovní úlohu Vyšín (1962), který je považuje za úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoliv matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešení aritmetické nebo algebraické úlohy.

„Z psychologického hlediska lze slovní úlohu spatřovat jako specifický problém, přičemž problém představuje situaci, která není řešitelná obvyklým způsobem, a její zvládnutí tedy vyžaduje nalezení nového řešení." (Sternberg, 2003 In: Vondrová, 2019)

Slovní úlohu můžeme dle Kaslové (2010) rozdělit na dvě části. Jedna část sděluje informace především slovy, a to pomocí popisu nebo vyprávění. Druhá část je ve formě otázky, výzvy či úkolu. „Část z popisu či vyprávění vytváří problém, jehož řešení vyžaduje matematické metody řešení, kam kromě kalkulu řadíme, např. i uvažování a usuzování, porovnávání, měření, odhad, určení limitů, konstrukci. K řešení jedné slovní úlohy lze použít i více metod řešení." (Kaslová, 2010)

Tedy můžeme říct, že každá slovní úloha obsahuje údaje a otázku. „Údajem nazýváme buď číslo samo nebo kteroukoliv z jeho funkcí." (Hejný & Stehlíková, 1999)

„Ve většině úloh v učivu 1. stupně jsou pouze ty údaje, které žák nezbytně potřebuje k vyřešení problému. pokud má být cílem řešení úlohy procvičení početních výkonů, jsou takové úlohy i z časových důvodů nejvhodnější. Pokud ale bude cílem rozvoj logického myšlení žáků, měl by učitel zařazovat i úlohy s chybějícími údaji a úlohy s nadbytečnými údaji. Hledání vztahů mezi údaji a otázkou je potom náročnější. Žák musí důkladně analyzovat text úlohy a určit, které údaje pro řešení problému ještě chybí, nebo naopak které jsou pro daný problém nepodstatné." (Coufalová, 2016, s.110)

„Ve slovních úlohách musíme přijít na to, jaké početní operace musíme s danými čísly provést, abychom našli čísla, která máme vypočítat. Úlohy, kde jsou početní operace předepsané, nezařazujeme mezi slovní úlohy." (Šedivý 1991, s. 117)

„Cílem vyučování slovních úloh na 1. stupni není jen naučit žáky provádět početní výkony, ale umět je správně použít v praktických situacích.“ (Coufalová, 1998)

V různých etapách vyučování rozděluje Coufalová (2016) cíle slovní úlohy na:

a) motivaci učiva
b) získávání nových poznatků
c) ilustraci učiva
d) procvičování učiva
e) prověřování zvládnutí učiva

Dle Vondrové (2019) je úkolem žáka situaci/příběh matematizovat. Žák má za úkol určit, které prvky budou vyjádřeny matematickými symboly, a poté zjistit, jaké operace bude nutné s těmito prvky provádět a v jakém pořadí, aby bylo nalezeno řešení problému. „Řešení je následně třeba ověřit, protože mnohé slovní úlohy sugerují více možností matematizace, kdy tvůrce úlohy vědomě postupuje opačným směrem, než očekává od žáka, který bude úlohu řešit.“ (Vondrová, 2019, s.15)

1.2.1. Řešení slovních úloh

Coufalová (2016) tvrdí, že se s řešením slovních úloh nejčastěji setkáváme na 1.stupni ZŠ při procvičování a upevňování učiva. „Řešením úloh učitel ověřuje, jak žáci zvládli učivo, diferencuje úlohy podle úrovně žáků, spojuje nové učivo s již dříve osvojenými poznatky. Schopnost žáků řešit slovní úlohy je pro ně výhodná nejen ve škole, ale i při řešení problémů z každodenního života.“ (Vondrová, 2020)

„Při řešení matematických slovních úloh žákům dochází, že v úlohách, ve kterých se objevují realistické situace, učitel zjišťuje, zda mají žáci potřebné dovednosti k aplikaci početní operace, ale reálnost kontextu pro ně není důležitá.“ (Rendl & Vondrová, 2013)

„Základním problémem řešení úloh je jejich atraktivnost, jako jedna z kladných složek motivace žáka. Mají-li se žáci něčemu naučit, musí se chtít učit.“ (Kuřina, 2011)

Žáci jsou podle Vondrové (2020) v řešení slovních úloh často neúspěšní, a to z různých důvodů. Přirozeně tomu tak může být proto, že nezvládají matematizaci slovní úlohy – „nedovedou vytvořit matematický model situace“. Podobně popisuje problém žáků řešit slovní úlohy Coufalová (2016) „dříve, než žák začne problém řešit, musí mu dokonale porozumět. První podmínkou je, aby dítě rozumělo textu úlohy.“

Vondrová et al. (2022) zmiňuje, že podle výzkumů Reussera (1985) žáci chybují v řešeních slovních úloh, protože si „neumějí vytvořit dostatečně kvalitní situační model.“

Rendl & Vondrová (2013) zase popisují, že problémy žáků se slovními úlohami jsou především „chybějící logické myšlení, nedostatečná čtenářská gramotnost – porozumění textu i porozumění některým slovům, nesprávné provedení zápisu úlohy nebo jejího znázornění a chybějící nebo špatná formulace odpovědi.“

Slovní úlohy můžeme řešit podle Blažkové et al. (2002) základními fázemi postupu:

a) **porozumění textu**

V první fázi porozumění textu musíme pochopit, co je předmětem otázky, a které údaje jsou zadány. „Pro žáky je obtížné se vyznat v textu slovní úlohy, pokud je příliš dlouhý, nebo se v něm objevují pojmy, kterým nerozumí, tudíž k pochopení úlohy přispívá také stručný zápis zadání úlohy.“ (Blažková et al., 2002)

b) **rozbor – zápis**

Druhou fází při řešení slovní úlohy je podle Blažkové et al. (2002) rozbor úlohy neboli jeho zápis v podobě nějakého grafického znázornění.

„Rozboru úlohy musíme věnovat dostatek času hlavně při řešení nového typu úloh. Když žák získá již dostatek zkušeností s úlohami daného typu, lze rozbor zkrátit.“ (Coufalová, 1998)

Vztahy mezi údaji v úloze je dle Blažkové et al. (2002) vhodné znázornit na konkrétním modelu nebo graficky. Žáci by měli poznávat různé možnosti grafického znázornění a vhodně si je podle charakteru úlohy vybírat. Význam správného a promyšleného grafického znázornění vzrůstá při řešení úloh složených, neboť zde bez grafického znázornění řada žáků nenajde správný postup řešení vůbec, nebo řeší úlohu špatně.

c) **matematizace reálné situace vyjádřené textem úlohy**

„Ve fázi matematizace vytváříme z údajů ve slovní úloze početní příklad, který v další fázi řešíme pomocí pamětných nebo písemných algoritmů.

Na základě rozboru slovní úlohy zapíšeme vztahy mezi zadanými a hledanými údaji pomocí matematických výrazů. K tomu je nutné zavést vhodné označení neznámých údajů (tím může být písmeno, otazník, rámeček aj.).“ (Blažková et al., 2002)

„Pro úspěšné zvládnutí této fáze řešení slovní úlohy je důležitý nácvik dovednosti přepsat text slovní úlohy do matematického vyjádření.“ (Blažková et al., 2002)

d) **řešení matematické úlohy**

V další fázi se snažíme „vyřešit matematickou úlohu (početní příklad, rovnici, nerovnici) pomocí pamětných nebo písemných algoritmů, tzn. že vypočítáme výsledek. Stupeň zvládnutí početních operací má vliv na úspěšnost řešení slovní úlohy.“ ((Blažková et al., 2002)

e) **zkouška správnosti**

„Zkoušku provádíme dosazením do textu úlohy. Nejen text úlohy, ale i řešení musí odpovídat reálné situaci.“ (Coufalová, 1998)

Zkouškou ověřujeme správnost získaného řešení, a to vzhledem k zadání úlohy. Návyk důsledného provádění zkoušky správnosti řadě žáků usnadní pochopení řešení úlohy a také přispívá k úspěšnosti řešení slovních úloh.

f) **odpověď na otázku**

„Řešení slovní úlohy završuje odpověď. Řada žáků obtížně formuluje, co vlastně vypočítali. Dovednost správně vyjádřit odpověď musí žák postupně získávat. Formulací odpovědi rozvíjíme vyjadřovací schopnost žáků, dbáme proto i na jazykovou stránku.“ (Coufalová, 1998)

Matematické řešení slovních úloh se transparentně liší od výpočtů, protože slovní úlohy jsou prezentovány lingvisticky a vyzývají studenty ke čtení a interpretaci problému, reprezentují sémantickou strukturu problému a volí strategii řešení. Pochopení jazyka slovních úloh (první krok v procesu) může studentům prvního stupně usnadnit schopnost reprezentovat strukturu slovních úloh, a proto úspěšně zvolit a dokončit strategii řešení. (Stern, 1993)

1.2.2. Slovní úlohy se zlomky řešené na 1.stupni ZŠ

Slovní úlohy na výpočet části z celku

V těchto úlohách je vždy údaj, který udává celek a údaj o části, kterou máme z celku vypočítat.

- Výpočet jedné části z celku

„Jednu část celku vypočítáme dělením.“ (Novotný & Novák, 2021, s. 51.)

Př.: Maminka napekla 24 koláčů. Martin jich $\frac{1}{3}$ snědl. Kolik koláčů Martin snědl?

- K vyřešení úlohy tedy musíme vypočítat, kolik je $\frac{1}{3}$ z 24.

Zápis: napekla … 24 koláčů

snědl … $\frac{1}{3}$ z 24

<u>Kolik snědl …?</u>

Výpočet: $24 : 3 = \underline{\underline{8}}$

Odpověď: Martin snědl 8 koláčů.

- Výpočet více částí z celku

„Při výpočtu více částí z celku nejdříve vypočítáme jednu část z celku. Poté vypočítáme více částí z celku.“ (Novotný & Novák, 2021, s.52)

Př.: Do třídy 4.A chodí celkem 30 žáků. $\frac{5}{6}$ ze všech žáků této třídy onemocnělo. Kolik žáků onemocnělo?

Zápis: žáků … 30

onemocnělo … $\frac{5}{6}$ ze 30

<u>kolik onemocnělo … ?</u>

Výpočet: $(30 : 6) \cdot 5 = \underline{\underline{25}}$

nebo

$30 : 6 = 5$

$5 \cdot 5 = \underline{\underline{25}}$

Odpověď: Onemocnělo 25 žáků.

Slovní úlohy na výpočet celku, známe-li jeho část

Oproti slovním úlohám na výpočet části z celku, které se běžně řeší na 1. stupni ZŠ, jsou tyto úlohy složitější a objevují se tak až na 2. stupni ZŠ. V těchto úlohách se nachází číselný údaj, který určuje danou část a druhým údajem je zlomek, který tuto část představuje. Úkolem v těchto úlohách je nejdříve vypočítat jednu část z dané části a poté vypočítat celek.

Př.: Lucie má na sobě 12 kusů oblečení, což jsou $\frac{3}{16}$ všeho oblečení v jejím šatníku. Kolik kusů oblečení má Lucie v šatníku celkem?

Zápis: $\frac{3}{16}$ všeho oblečení … 12 kusů

$\frac{16}{16}$ všeho oblečení … ?

Výpočet: (12 : 3) · 16 = 64

nebo

12 : 3 = 4

4 · 16 = 64

Odpověď: Lucie má v šatníků 64 kusů oblečení.

Slovní úlohy na sčítání a odčítání zlomků se stejným jmenovatelem

Slovní úlohy na sčítání a odčítání zlomků se řeší na základě operací sčítání a odčítání. V těchto úlohách jsou vždy alespoň dva údaje zlomků, které je nutno podle zadání sečíst nebo odečíst.

Př: Včera si Lukáš naskládal do poličky $\frac{2}{7}$ všech svých knížek. Dnes jich do poličky naskládal další $\frac{3}{7}$. Jakou část knížek již Lukáš do poličky naskládal?

Zápis: včera … $\frac{2}{7}$

dnes … $\frac{3}{7}$

celkem … ?

Výpočet: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$

Odpověď: Lukáš do poličky naskládal již $\frac{5}{7}$ všech svých knížek.

1.3. Concept Cartoons

První Concept Cartoons vytvořili Brenda Keogh a Stuart Naylor již v roce 1991, ale stručný popis, toho, co to Concept Cartoons je, zveřejnili až roku 1993. (Keogh & Naylor, 1993) Další roky rozvíjeli tuto metodu a vydali několik dalších publikací, které rozšířily povědomí o této metodě.

Metodu využívání Concept Cartoons ve vyučování Stephenson a Warwick (2002) charakterizují takto: „Concept Cartoons souvisí s určitým tématem ve vědě. Nachází se tam tři, čtyři nebo pět studentů, přičemž každý z nich zastává různé názory na konkrétní téma. Většina názorů jsou nesprávné představy, avšak jeden z nich je vědecky přijatelný. Ostatní jsou nelogické a jsou založené na zkušenostech studentů“

Keogh & Naylor (1999) ve své práci vysvětlují, že pojmem „cartoon“ je brán jako komiks, a tudíž může být Concept Cartoons mylně brán, jako nějaký vtipný text. Concept Cartoons však toto neobsahují, jedná se o obrázek, na kterém jsou lidé a bubliny, ale v bublinách se nachází psaný text, který obsahuje názory na nějakou otázku s více možnostmi.

Jednou z charakteristik Concept Cartoons podle autora Demirtase et al. (2012) je, že mohou být využity jako naučné prostředky, které za pomoci kreslených postav vysvětlují nějakou vědeckou situaci. V obrázku se nachází několik, dvě nebo více, postav, které jsou vloženy do konkrétního tématu a zabývají se těmi vědeckými situacemi, o kterých pomocí svých nápadů diskutují. „Témata v Concept Cartoons jsou situace, se kterými se můžeme opakovaně setkávat v běžném životě.“ (Demirtas et al., 2012, s.861). Proto se, dle názoru těchto autorů (Demirtas et al., 2012), tato metoda využívá hojně ve školství. Žáci mohou pomocí Concept Cartoons propojovat vědu s každodenním životem a zároveň je vhodná pro všechny věkové skupiny, protože bubliny obsahují minimum textu.

1.3.1. Concept Cartoons jako učební pomůcka v hodinách matematiky

Původně byly Concept Cartoons vytvořeny kvůli využití ve vzdělávání pro různé účely jako je zlepšení čtení, umět řešit problémy nebo získávání vědeckých poznatků. (Keogh & Naylor, 1999, s.431) Právě kvůli těmto vědeckým poznatkům se nejdříve tvořily úlohy do přírodovědných hodin a až později se začaly rozšiřovat do dalších okruhů např. matematiky. (Dabell et al., 2008)

Samková (2020) dělí jednotlivé bubliny na obrázcích podle „matematické správnosti bublin“, a to na „jednoznačně matematicky správné, jednoznačně matematicky nesprávné, případně jejich správnost může být nejasná či podmíněná.“

Pokud mají úlohy v pozadí čistě matematické početní úlohy nebo aplikační úlohy můžeme rozdělit bubliny do čtyř kategorií: bubliny jen s výsledky, s postupy řešení, s postupy řešení a výsledky, s komentáři. (Samková, 2020, s.35)

Při řešení úloh Concept Cartoons se žáci místo v roli řešitelů nachází spíše na místě soudců, kteří rozhodují o tom, zda výroky postav na obrázku jsou správné či nikoliv. Žáci si ve své podstatě vymění role s učitelem. Metoda učí žáky nebát se projevit svůj názor, i v případě, že by nemusel být správný. (Dweck, 2000)

Důvody, proč používat Concept Cartoons ve výuce popisuje ve své práci Kabapinar (2005). Je to kvůli stimulaci řeči, aby byly žákům poskytnuty spousty různých možností, spousty různých problémů, aby byli nuceni spolupracovat, vyslechnout si všechny nápady, a také je to dobrý výukový nástroj pro hodnocení, protože vám pomůže změřit, co již vědí. Concept Cartoons zapojí žáky do lekce, ponoří je do učení, dává jim příležitost sdílet své nápady a vyjádřit své možnosti v bezpečném prostředí. Žáci by měli být díky práci s Concept Cartoons vědět, že se nemusí bát vyjádřit: „Teď je v pořádku dělat věci špatně, na tom nezáleží. To je tvůj názor, to si myslíš.“ (Kabapinar, 2005)

Podle autorů Keogh et al. (1998) musí mít Concept Cartoons pro účelné využití v hodinách následující vlastnosti:

- je použito minimum textu
- vědecké situace jsou prezentovány ve vztahu s každodenními situacemi
- alternativní myšlenky jsou vybírány na základě výzkumu porozumění studentů tak, aby všechny myšlenky mohly být studenty považovány za důvěryhodné
- alternativní myšlenky zahrnují vědecky správnou myšlenku
- alternativní myšlenky se zdají mít rovnocenné postavení, takže studenti nemohou přijít na to, která alternativa je správná z kontextu

Stephenson a Warwick (2002) tyto vlastnosti doplňují ještě o jednu vlastnost:

- oddělení myšlenek od myšlenek konkrétních studentů ve třídě, které studentům umožňuje cítit, že při podpoře určitého názoru to nejsou oni, kdo může být dokázán jako "špatný", ale je to kreslená postava.

Obrázky Concept Cartoons jsou žákům předkládány s otázkami, díky kterým se nad bublinami žáci více zamýšlí. Takovými otázkami jsou např.: „Které z dětí má pravdu? Proč? Co můžeme doplnit do prázdné bubliny místo otazníku?“ (Samková, 2016)

„V některých případech funguje použití Concept Cartoons jako účinný stimul pro studenty učitelství, aby se zapojili do dalšího výzkumu s cílem rozvinout vlastní porozumění, propojit hodnocení a pokračující učení v integrovaném procesu.“ (Naylor et al., 2000)

1.3.2. Tvorba Concept Cartoons

Samková (2020) rozděluje vytváření nových úloh na dvě etapy, kterými jsou „výběr nebo tvorba vhodné úlohy, ze které se stane úloha v pozadí, a tvorba obsahu bublin.“

Samková (2020) ve své knize vypisuje druhy změn v originálních úlohách:

- pořadí bublin, kde by se bubliny prohodily a umístily se na vhodnější místo
- změna textu bez změny původního významu
- změna prázdné bubliny na bublinu s textem
- změna matematického obsahu bublin
- změna pozadí, kdy dochází k úpravě zadání buďto v pozadí nebo v první bublině
- změna kontextu úlohy v pozadí a drobné úpravy bublin, které ale nezmění původní prekoncepce a miskoncepce bublin
- změna úlohy v pozadí, při níž dochází ke změně některých nebo všech původních bublin, kdy se změní i jejich matematická správnost

2. Praktická část

V praktické části se zabývám kvalitativní analýzou dat z písemných prací zaměřených na různé postupy řešení matematických úloh, které žáci používají při řešení slovních úloh se zlomky. Zaměřila jsem se na slovní úlohy, které žáci řeší na prvním stupni, konkrétně v pátých třídách a vytvořila k jednotlivým získaným řešením analýzu. V praktické části analyzuji různé druhy postupů ať už správné, či chybné, které žáci využívali při řešení slovních úloh.

Data jsem získala celkem ze tří tříd ve dvou základních školách, které se nachází v okrese České Budějovice, z nichž jedna škola je malotřídní. Původně jsem chtěla do analýzy přidat i data ze školy s výukou matematiky podle prof. Hejného, abych mohla porovnat rozdíl v řešení úloh ve školách s různými typy výuky, ale bohužel se mi nepodařilo od dané školy získat souhlas pro práci s vyplněnými testy.

Abych si zajistila dostatečné množství dat pro svou diplomovou práci, vytvořila jsem navíc pracovní list, který osahuje několik slovních úloh se zlomky. Pracovní list jsem vytvořila po předchozí domluvě s třídními učitelkami daných tříd. Pracovní list byl předán třídním učitelkám ke schválení a následně byl předložen žákům k vypracování. Na základě analýzy dat jsem také vytvořila dvě úlohy Concept Cartoons, které jsem dále rozpracovala v této praktické části.

V analýzách slovních úloh nerozlišuji pohlaví žáků ani jejich věk. Všechna jména žáků i pracovníků školy jsou na prosbu obou škol anonymní.

2.1. Sběr a zpracování dat

Pro svou diplomovou práci jsem sehnala písemné práce se slovními úlohami se zlomky ze dvou základních škol. Abych od sebe školy a jednotlivé třídy odlišila budu nadále používat jen pojmenování ZŠ1, kde třídy rozdělím na 5.A a 5.C a malotřídní škola. Ředitelce a řediteli obou škol jsem poslala email s prosbou o spolupráci kvůli mé diplomové práci s dalšími potřebnými informacemi. Získala jsem jejich souhlas a poté už jsem komunikovala pouze s vyučujícími daných tříd.

V ZŠ1 jsem komunikovala s vyučujícími tříd 5.A a 5.C. Ve třídě 5.A bylo celkem 22 žáků a získala jsem pro svou analýzu slovní úlohu z první pololetní práce, kterou psalo

20 žáků. V 5.C bylo celkem 26 žáků a získala jsem data z druhé pololetní práce na konci roku, kterou psalo 21 žáků. A poté jsem v malotřídní škole získala data ze třídy, která se skládá z 9 žáků 4.třídy a z 11 žáků 5. třídy. I když probíhá výuka občas pro obě skupiny stejně, písemné práce měli žáci 4. a 5. tříd lehce odlišné. Proto jsem data z pololetní práce získala pouze od žáků 5. tříd, kde se objevila slovní úloha se zlomky.

Celkově jsem tedy pro svou diplomovou práci získala 52 písemných prací z celkového počtu 68 žáků, protože ne všichni žáci písemnou práci psali.

Po získání všech dat jsem vypracovala tabulku v MS Excel, kam jsem jednotlivá data zaznamenávala. Seřadila jsem testy podle známek žáků z celé pololetní práce, a poté jsem vytvořila tabulku s celkovým počtem získaných bodů za slovní úlohu se zlomky, kdy jsem nechala pořadí žáků stejné, jako pořadí v tabulce se známkami z testů. Tedy pokud žák 1 získal jedničku z celého testu, bude v další tabulce na prvním místě, ale jeho počet získaných bodů může být různý (např. nula).

žák	5.A - 1.PP	5.C - 2.PP	Mal.šk.
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	2
4	1	1	2
5	1	1	2
6	2	1	3
7	2	2	3
8	2	2	3
9	2	2	3
10	2	2	4
11	2	2	5
12	2	2	--
13	3	2	--
14	3	2	--
15	3	3	--
16	3	3	--
17	4	3	--
18	4	3	--
19	4	3	--
20	5	4	--
21	N	4	--
22	N	N	--
23	--	N	--
24	--	N	--
25	--	N	--
26	--	N	--
průměrná známka tř	2,4	2,14	2,6

žák	5.A - 1.PP	5.C - 2.PP	Mal.šk.
1	2	2	1
2	1	2	1
3	2	2	0
4	2	1	1
5	1	2	0
6	2	2	0
7	0	2	1
8	0,5	2	0
9	0	0	0
10	1	2	0
11	2	2	0
12	1	1	--
13	0,5	0	--
14	1	1	--
15	0	2	--
16	2	0,5	--
17	0	1	--
18	0,5	1	--
19	0	0,5	--
20	0	1	--
21	N	0	--
22	N	N	--
23	--	N	--
24	--	N	--
25	--	N	--
26	--	N	--
průměr získaných b.	0,98	1,285714	0,36

Obr. 1 - Tabulka se známkami z pololetních testů získaných ze všech tříd

Obr. 2 - Tabulka se získanými body za slovní úlohu v pololetních testech

Do tabulky (viz *Obr. 1)* jsem vypsala všechny známky z vypracovaných pololetních prací vždy od nejlepších po nejhorší a dále jsem písmenem *N* vyznačila žáky, kteří test nepsali. Z každé třídy jsem vypočítala průměrnou známku z testů, kde mi vyšel nejlepší průměr u třídy 5.C a to 2,14. Poté s průměrem 2,4 byla třída 5.A a nejhůře dopadla malotřídní škola, která měla průměr 2,6.

Poté jsem vytvořila tabulku (viz *Obr. 2)*, ve které jsem zanechala pořadí žáků podle dosažených známek z písemných prací a přiřadila k nim dosažené body za slovní úlohu, která byla v písemné práci. Obě třídy ze ZŠ1 mohly za slovní úlohu získat až dva body (dva – řešená úloha neobsahuje žádnou chybu; jeden – řešená úloha obsahuje jednu chybu, např. chybí odpověď nebo správný výsledek není zkrácen na základní tvar; půl bodu – alespoň jeden krok je správný, např. správný zápis) a v malotřídní škole pouze jeden, tedy buď žáci vyřešili úlohu zcela správně, bez žádné závažné chyby, nebo nezískali žádný bod.

Podle vypočítaného průměru ze získaných bodů celé třídy je na tom v řešení slovních úloh nejlépe třída 5.C, dále 5.A, kde z průměru vychází na každého žáka zhruba 1 bod. Za to v malotřídní škole je průměr pouze 0,36, tedy jen každý třetí žák úlohu vyřešil. Ale při porovnání obtížnosti slovních úloh jsou na tom, podle mého názoru, třídy na ZŠ1 velice podobně.

Myslím, že v ZŠ1, kde i přes chyby měli žáci možnost získat alespoň 0,5b., mají lepší přístup k hodnocení. Pokud žáci nedostanou žádný bod, i přesto, že mají úlohu téměř správně, počítání slovních úloh je může odradit.

2.2. Analýza slovních úloh

V této kapitole se zaměřím na analýzu slovních úloh řešených žáky ze získaných písemných prací. Úlohu z každé třídy budu analyzovat zvlášť podle úspěšnosti žáků z vypracovaných tabulek. Poté porovnám řešení slovních úloh z pracovních listů, které jsem žákům tříd 5.A a malotřídní školy rozdala na vypracování.

2.2.1. ZŠ1 – 5.A

První úlohou k analýze je úloha (viz Obr. 3). Jedná se o slovní úlohu se zlomky, kde se počítá část z celku. Tato úloha je podle mého názoru ze všech tří úloh nejtěžší, protože žáci musí pracovat s více údaji a mohou se bez porozumění textu lehce splést.

3) Vyřeš slovní úlohu:

V prodejně s čaji mají tři různé druhy čajů černý, ovocný a zelený. Prodávají celkem 54 ovocných čajů. Černých čajů prodávají o $\frac{1}{3}$ méně než ovocných, ale o $\frac{1}{4}$ více než zelených. Kolik čajů prodávají v obchodě celkem?

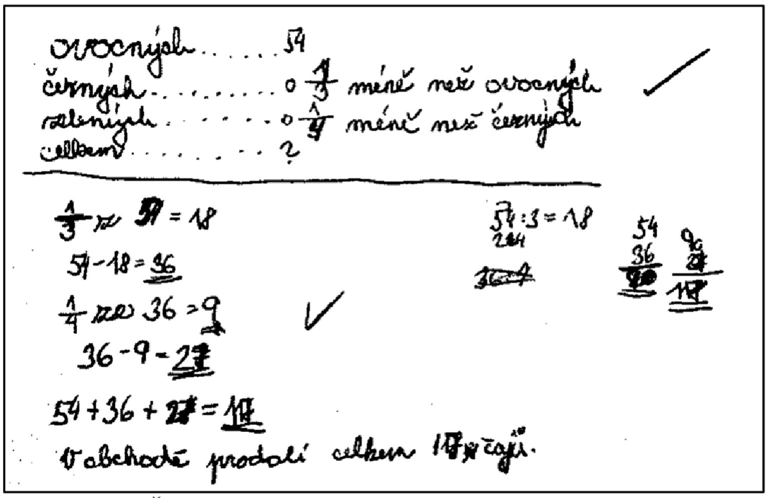
Obr. 3 - Slovní úloha z 1. pololetní práce třídy 5.A

Pro správné vyřešení této úlohy musí žáci nejprve vypočítat, o kolik méně se prodává černých čajů než ovocných. To spočítají pomocí matematizace $\frac{1}{3}$ z 54, což by jim mělo dát výsledek 18 (tj. 54:3=18). Poté musí spočítat, kolik černých čajů se prodává, tj. 54-18=36, vyjde, že se prodává celkem 36 černých čajů, ale poté musí žáci ještě vypočítat, kolik se prodává zelených čajů. Tento poslední úsek je podle mého názoru dost složitý na porozumění úloze. Nejtěžší na pochopení této slovní úlohy je podle mého názoru, že musíme tu část zelených čajů vypočítat z výpočtu, který jsme vypočítali u černých čajů, tedy $\frac{1}{4}$ ze 36, tudíž by mělo vyjít, že černých čajů prodávají o 9 více než zelených a vyšlo by nám, že zelených čajů prodávají 27 (tj. 36-9=27). Pokud žák zvládne všechny tyto kroky, už zbývá jen všechny konečné výsledky sečíst a vypočítat, že celkový počet čajů, které v obchodě prodávají je 117 (tj. 54+36+27=117) a zakončit úlohu odpovědí.

Na to, že se jedná o první pololetní test páté třídy, je v této úloze podle mého názoru až moc výpočtů, ale když jsem to konzultovala s třídní učitelkou, sdělila mi, že s žáky takovéto úlohy před testem trénovali a měli by tedy úlohu zvládnout vyřešit.

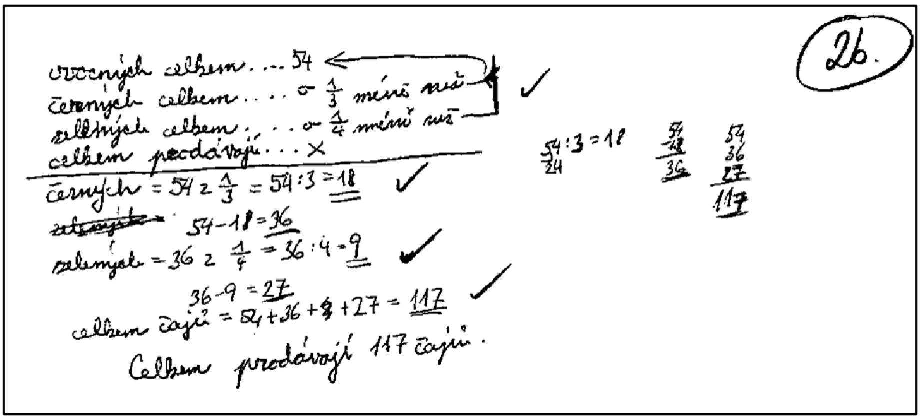
Úlohu řešilo celkem 20 žáků, z nichž žák **19** (viz Obr. 1*)* se o její vyřešení ani nepokusil a nechal úlohu bez řešení. Další dva žáci **20** a **15** vypracovali pouze poloviční zápis, ale k matematizaci úlohy už nedošli. Rozhodla jsem se analýzu řešení těchto žáků vynechat a zaměřit se na zbylé žáky.

Správné řešení, kde žáci získali celé 2 body, mělo celkem 6 žáků. Z těchto žáků jsem k analýze vybrala 2 žáky s různými možnostmi řešení, protože zbylí žáci měli stejné nebo podobné řešení.



Obr. 4 - Řešení slovní úlohy z pololetní písemné práce 5.A

První řešení od žáka **3** je správné a získal tak plný počet bodů. Žák použil slovní zápis, kde porozuměl textu úlohy a u obou údajů, které nám říkají, o kolik máme zlomek zmenšit nebo zvětšit, použil správný výraz *o n-méně*, i přesto, že v úloze je psáno *o n-více*, které nám právě ukáže, kdo dané úloze porozuměl a kdo pracuje pouze s psanými údaji. Dále použil matematizaci, kde počítal část z celku a nezapomněl výsledek od celku odečíst. Stejně tak u druhého výpočtu, kdy vypočítal již všechny potřebné údaje, které nakonec sečetl a došel ke správnému výsledku i s odpovědí. Takto vyřešenou úlohu měli pouze 3 žáci z celé třídy.

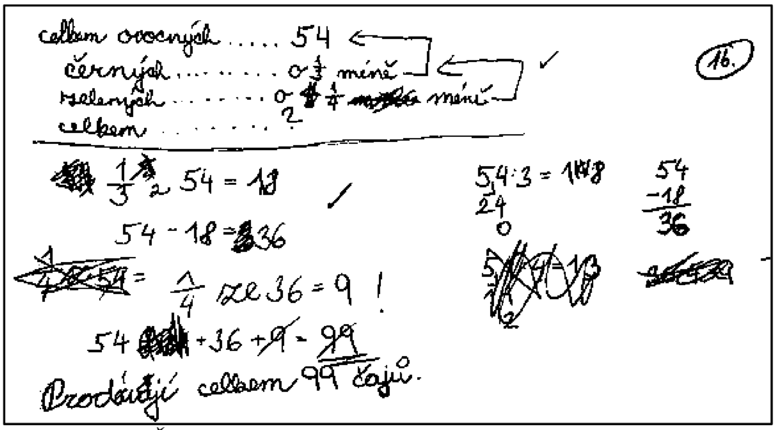


Obr. 5 - Řešení slovní úlohy z pololetní písemné práce 5.A

Další řešení, které získalo plný počet bodů měli podobně 3 žáci z celé třídy. Řešení je podobné tomu předešlému, ale již v zápise se odlišuje použitím šipek, které ukazují, k čemu se údaj vztahuje a také místo otazníku pro označení neznámé použila žákyně označení ‚x‘, což takto měli pouze 2 žáci, ostatní používají pro označení neznámé ve slovním zápise otazník. V matematizaci správně použila algoritmus pro výpočet části z celku, ale tato žákyně použila opačný zápis, takže místo části z celku je zapsán celek z části, výpočet je však poté správný, jako by počítala část z celku.

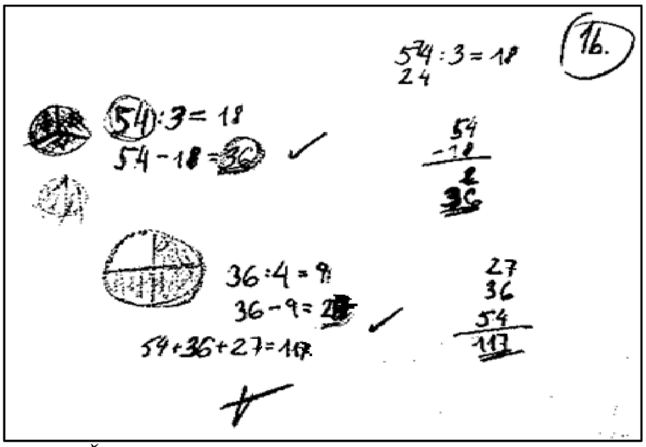
I přes všechny matematické chyby získala žákyně plný počet bodů, protože úlohu vyřešila. V zápise použila správné výrazy a až na těchto pár chyb bylo vše správně, takže s hodnocením souhlasím. Je tedy asi hlavně na vyučující, zda bude tyto chyby nadále přehlížet, nebo bude žáky vést ke správným zápisům.

V následujících řešeních získali žáci 1 bod z celkových 2, protože udělali nějakou z následujících chyb: opomenutí posledního kroku k vypočítání všech údajů; chybný zápis – neporozumění úloze, ale se správnými výpočty; opomenutí odpovědi. Žáků, kterým se podařilo získat 1 bod, bylo 5 z celkových 20.



Obr. 6 - Řešení slovní úlohy z pololetní písemné práce 5.A

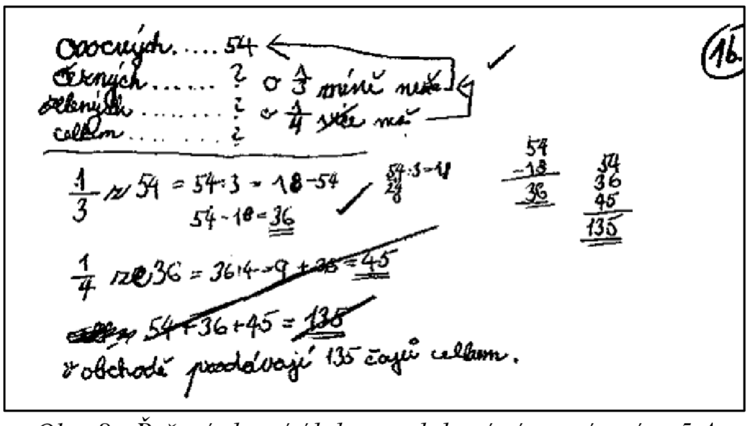
První řešení, které získalo 1 bod, je od žáka **12** a řešení je shodné s žákem **5**. Žáci zvládli zápis úlohy, kde porozuměli slovní úloze a u obou údajů napsali *o n-méně* se správně vedenými šipkami. Celkovou matematizaci žáci zvládli, a to dokonce bez opakujících se rovnítek. Úloze nechybí ani odpověď na otázku ze slovní úlohy. Jedinou chybou, kterou žáci udělali, je, že zapomněli na předposlední výpočet. Měli odečíst část, kterou vypočítali od daného celku, tudíž jim celkový výsledek nevyšel správně. Žák by také mohl dbát na celkovou úpravu a vyvarovat se takovýmto ‚škrtancům‘ a podtrhávat vypočítané výsledky. Vyučující ohodnotila oba žáky stejně a s daným ohodnocením souhlasím.



Obr. 7 - Řešení slovní úlohy z pololetní písemné práce 5.A

Druhým řešením, které získalo 1 bod ze dvou je řešení (viz Obr. 7) V tomto řešení použil žák místo zápisu grafické znázornění, které mělo představovat na kolik částí máme daný celek rozdělit. Takovýto způsob použili pouze 2 žáci z celé třídy, ale možná kdyby někteří z žáků, kteří ztratili body a řešili úlohu klasickým slovním zápisem, použili tento postup, mohlo by jim to pomoct ke správnému řešení úlohy, protože by si podle mě dokázali lépe představit rozdělení celků na části.

Žák v tomto případě správně rozdělil dané číslo na třetiny, poté třetinu odečetl a poté rozdělil výsledek na čtvrtiny a čtvrtinu znovu odečetl. Tento žák tedy počítal zcela správně, i když by měl znázornit místo jednoho ‚koláče' dva, protože jde spíše o porovnávání, kde první koláč představuje daný celek (v tomto případě je celek 54) a druhý koláč je o třetinu menší (tedy rozdělíme oba ‚koláče' na třetiny a poté vypočítáme, kolik představuje jedna část). Tomuto žákovi stačilo znázornění do jednoho ‚koláče', aby došel ke správnému řešení. Jedinou chybou, kvůli které má tento žák pouze jeden bod je, že zapomněl napsat odpověď.

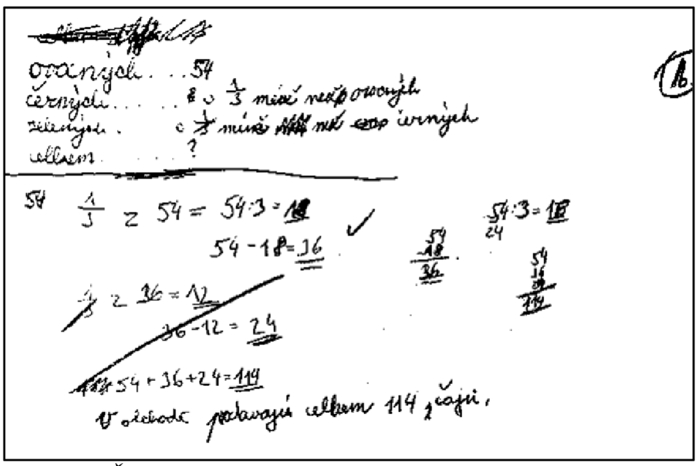


Obr. 8 - Řešení slovní úlohy z pololetní písemné práce 5.A

Další žák, který získal 1 bod z dané úlohy, řešil úlohu stejně jako většina třídy pomocí zápisu, ale bohužel neporozuměl zcela slovní úloze a u třetího údaje, kde by měl napsat *o n-méně*, napsal *o n-více*, takže se poté spletl i ve výpočtech, kde místo odčítání přičítal. Vyučující škrtla žákovi celou druhou část výpočtu, dokonce i výsledek, který je sice špatný vzhledem k úloze, ale z příkladu, který žák počítal, je výsledek správný. Škrtla bych tedy pouze jednou celý výpočet.

Oproti ostatním řešením žáků, které získaly 1 bod, mi přijde toto řešení horší. V ostatních řešeních žáci zapomněli jen odpověď nebo se jen přehlédli v údajích, ale v tomto případě vidíme, že žák dané úloze zcela neporozuměl.

Zarazilo mě, kolik žáků z této třídy používá ve výpočtech několik rovnítek za sebou, např. tento žák počítal celek z části, který se rovnal početní operaci 54:3 a poté, co vypočítal výsledek k němu připsala další operaci odčítání a stejně tak v dalším příkladě operaci sčítání, která následovala dalším rovnítkem a výsledkem. Takový postup použila téměř třetina třídy. To samé se opakovalo i při řešení pracovního listu, který jsem vytvořila a rozdala žákům této třídy na vyplnění. Zeptala jsem se tedy vyučující, zda to takto žákům vysvětluje, nebo z jakého důvodu řeší žáci úlohy tímto způsobem. Bylo mi odpovězeno, že se zaměřuje především na správnost výpočtů, aby žáci zvládli používat správné algoritmy. Vyučující je na to údajně upozorňuje, jen pokud počítají společně na tabuli, ale pokud píší testy, tak jim tyto chyby uznává. Na otázku, kde se takovýto postup naučili, odvětila vyučující, že neví, ale přisuzuje to lenosti žáků napsat více operací odděleně.

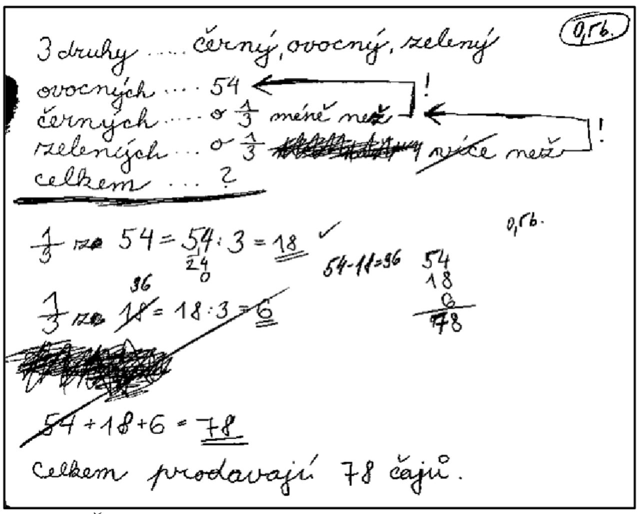


Obr. 9 - Řešení slovní úlohy z pololetní písemné práce 5.A

Posledním řešením, které získalo jeden bod, je řešení od žáka **14**. Žák použil slovní zápis, který je zapsaný správně, jen se žák přehlédl a místo $\frac{1}{4}$ napsal $\frac{1}{3}$, což se poté přeneslo i do špatné matematizace. Žák tedy zvládl vypočítat, kolik bylo černých čajů, ale zelené čaje už mu správně nevyšly, i přes to, že počítal správně.

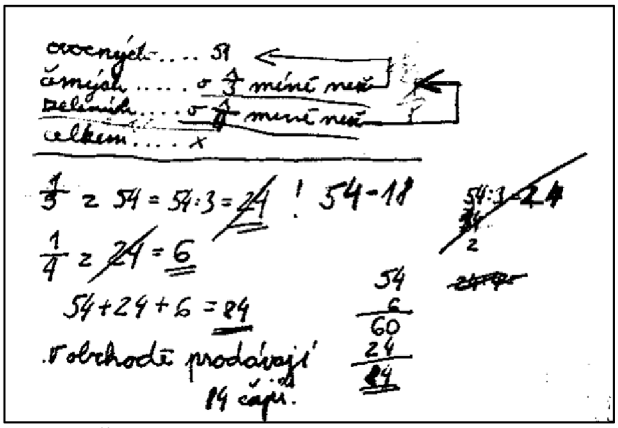
Toto je přesně příklad toho, kdy i přes to, že není slovní úloha vyřešena zcela správně, žák získal polovinu možných bodů za správně vyřešené části úlohy a nemusí být tolik zklamaný, protože ví, že počítal jinak správně až na danou chybu.

Žáky, kteří získali půl bodu nebo žádný jsem oproti zbylým s dvěma nebo jedním bodem, hodnotila jako nezvládnuté vyřešení úlohy. Žáci s 0,5 bodu byli v celé třídě 3 a bez bodu skončila úloha zbylých šesti žáků, z nichž tři, jak jsem zmiňovala již na začátku analýzy, úlohu buďto neřešili vůbec, nebo zvládli jen zápis. Z tohoto důvodu jsem řešení těchto žáků vynechala z analýzy.



Obr. 10 - Řešení slovní úlohy z pololetní písemné práce 5.A

První žák, který získal půl bodu, řešil úlohu podobně jako zbytek třídy pomocí klasického slovního zápisu se šipkami. U tohoto žáka můžeme v zápise vidět, že neporozuměl slovní úloze a místo *o n-méně* napsal *o n-více*, což poté vedlo ke špatné matematizaci. Správně vypočítal část z celku, ale poté už výsledek od celku neodečetl. Kdyby tento krok neopomněl, mohl tento žák získat ještě o půl bodu více, stejně jako předchozí žák.

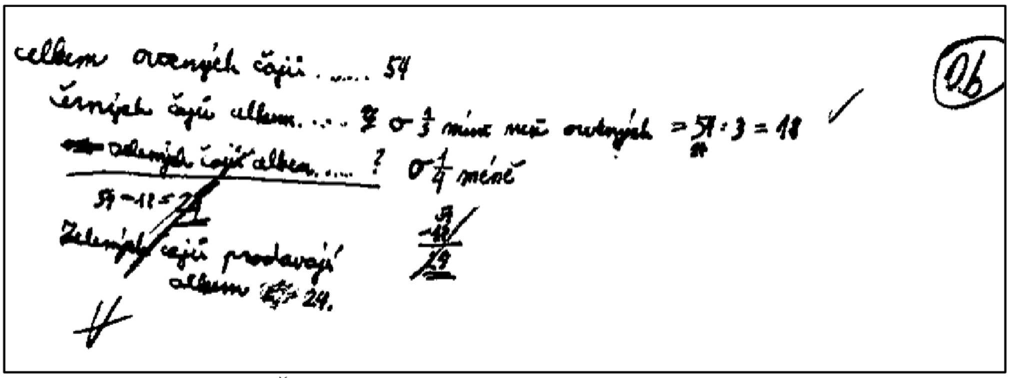


Obr. 11 - Řešení slovní úlohy z pololetní písemné práce 5.A

U tohoto řešení můžeme vidět, že žák nezvládá práci se slovními úlohami *o n-méně*, *o n-více*, protože z úlohy pochopil, že má u obou údajů počítat *o n-méně*, ale dál už s touto informací nepracoval. Žák počítal část z celku, ale bohužel mu operace dělení dělá problémy. Nezvládl vypočítat jednoduchý příklad na dělení jednociferným číslem, tudíž mu ani jeden výsledek nevyšel správně.

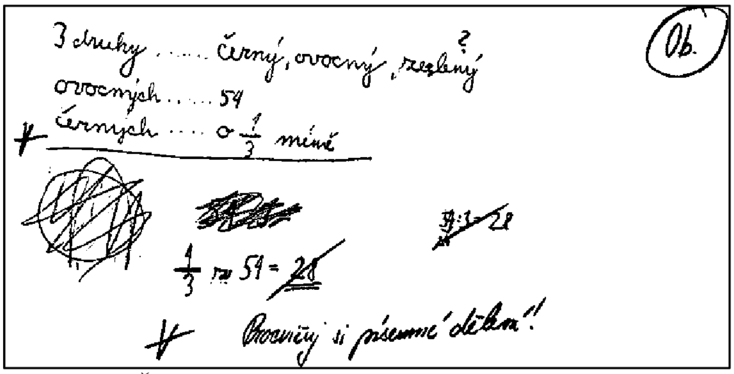
Oproti ostatním žákům, kteří získali alespoň část bodů, mi přijde toto hodnocení nefér, protože žák nezvládl kromě zápisu a odpovědi se špatným výsledkem z potřebné matematizace vůbec nic. V páté třídě, by měl žák ovládat operaci dělení i víceciferným číslem, a v tomto případě šlo pouze o dělení jednociferným číslem. Žák je podle vyučující v matematice pomalejší, a proto i tohle považuje u něj za ‚úspěch' a proto dala žákovi půl bodu. Ale žák nemá žádnou poruchu učení, proto mi přijde nefér ho hodnotit jinak než ostatní žáky.

Poslední řešení jsou od tří žáků, kteří z dané úlohy nezískali žádný bod.



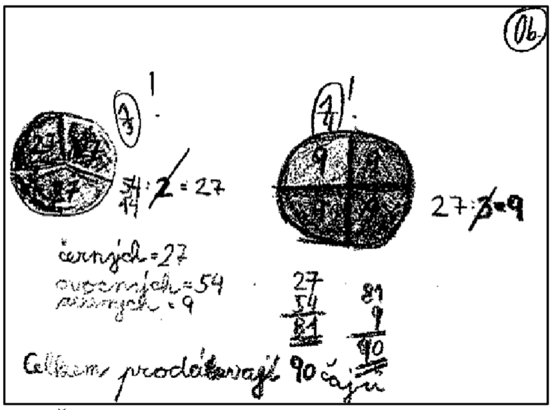
Obr. 12 - Řešení slovní úlohy z pololetní písemné práce 5.A

Prvním takovým řešením je řešení od žáka **7**. Již ze zápisu je zřejmé, že žák slovní úloze neporozuměl. Správně vyjádřil, o kolik méně je černých čajů než ovocných, ale další výpočty již nezvládl. Žák pokládal za koncový údaj, kolik je zelených čajů, místo, aby vypočítal, kolik se prodává čajů celkem, tudíž se nedopočítal ke správnému výsledku. Nezvládl ale ani předchozí operace, kde správně spočítal část z celku, ale už danou část zapomněl od celku odečíst, aby vypočítal, kolik černých a poté kolik zelených čajů se v obchodě prodávalo. Žák tedy nezvládl zápis, ani matematizaci úlohy. V první části, vypočítal část z celku u černých čajů přímo v zápise, což takto udělal jako jediný z celé třídy. Na konci žák neopomněl napsat odpověď. Ani tak nezískal žádnou část bodů.



Obr. 13 - Řešení slovní úlohy z pololetní písemné práce 5.A

Druhý žák na tom byl podobně jako předchozí žák. Udělal zápis, kterému chybělo polovina údajů a poté v matematizační části počítal správně část z celku, ale bohužel nezvládl operaci písemného dělení jednociferným číslem, tudíž mu ani jeden ze všech příkladů nevyšel správně. Žák dokonce opomněl i na odpověď a získal tedy za celkové řešení nula bodů.



Obr. 14 – Řešení slovní úlohy z pololetní písemné práce 5.A

Poslední řešení z celé třídy bylo, jako u žáka s jedním bodem (viz Obr.7), znázorněno graficky pomocí ‚koláčů‘. Předchozí žák řešil úlohu správně, kde pochopil, jakou část koláče dané číslo tvoří, ale tento žák sice správně rozdělil koláče na dané části, ale vždy vybarvil jednu z částí a celek poté rozpočítal už jen do zbylých částí.

V prvním koláči můžeme vidět, že si vybarvil jednu část (tj. $\frac{1}{3}$) černě, což mělo představovat „o 1/3 méně černých čajů“, tedy na zbylé části mu zbyly ovocné čaje, kterých je 54, a ty poté rozdělil do těch dvou zbylých částí (tj. 54:2=27). To samé poté provedl i u druhého koláče, kde měl rozdělovat celek na čtvrtiny, ale ¼ vyznačil již jako zelené čaje a na černý čaj mu zbyly již jen tři části, tedy rozdělil předchozí výsledek 27 do tří částí a vyšlo mu, že každá část je 9, tedy i zelených čajů. A poté již všechny výsledky sečetl a napsal odpověď.

Podle mého názoru si tento žák počínal s úlohou lépe než několik jeho spolužáků, jen nezvládl vyjádření zlomku pomocí grafického znázornění, pokud by počítal pomocí klasického slovního zápisu, získal by alespoň část bodů. Grafické znázornění prý žáci občas s vyučující procvičují. Pokud je úloha složitá na představu o zlomku, řeší slovní úlohy pomocí slovního zápisu.

2.2.2. ZŠ1 – 5.C

Druhou úlohu k analýze jsem získala z druhé pololetní práce třídy 5.C na ZŠ1. Slovní úloha (viz Obr. 15) je opět na výpočet části z celku. Tato úloha, i když je jednodušší na porozumění, má zlomek s větším čitatelem než jedna, a proto je podle mě pro žáky pátých tříd složitá. Ptala jsem se vyučující, zda už se takto žáci učí počítat s větším čitatelem a dozvěděla jsem se, že se dané učivo už opravdu učí a jsou na takovéto úlohy zvyklí.

6. Slovní úloha

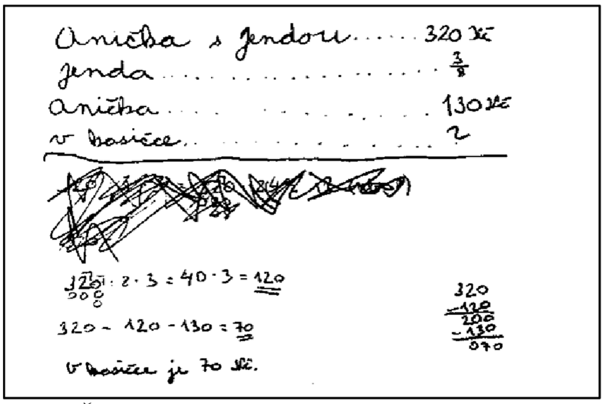
Anička s Jendou měli v prasátku **našetřeno 320Kč. Jenda si za $\frac{3}{8}$ z těchto peněz koupil novou** encyklopedii a **Anička si za 130Kčkoupila čelenku.**
Kolik peněz jim v prasátku zbylo?

Obr. 15– Slovní úloha z 2. pololetní práce třídy 5.C

V této úloze museli žáci vypočítat část z celku tedy $\frac{3}{8}$ z 320 Kč. Nejprve se musel rozdělit celek na dané části tedy na osminy (tj. 320:8=40) a poté vynásobit počtem částí (tj. 40·3=120). Vypočítá se tedy nejprve, kolik z našetřených peněz utratil Jenda a poté se z celku tedy našetřených peněz odečtou obě věci, za které Anička s Jednou utratili peníze a vyjde, že jim v prasátku zbylo 70 Kč (tj. 320-120-130=70), což je výsledek, ke kterému se měli žáci dopočítat.

Tuto slovní úlohu řešilo celkem 21 žáků z celkového počtu 26 a správně ji vyřešilo 10 žáků, kteří získali celé 2 body. Ddále 6 žáků udělalo nějakou z chyb: opomenutí posledního kroku k vypočítání všech údajů nebo opomenutí odpovědi, a získali tak pouze 1 bod z celkových dvou. Zbylých 5 žáků slovní úlohu vyřešit nedokázalo a nedostali žádný bod nebo jen půl bodu, pokud měli alespoň nějakou část z řešení správně.

Vybrala jsem k analýze dvě řešení z celkových 10 úspěšných žáků, kterým se podařilo získat za správné vyřešení úlohy celé 2 body, protože mi přišla nejzajímavější a byla podobná zbylým devíti řešením.

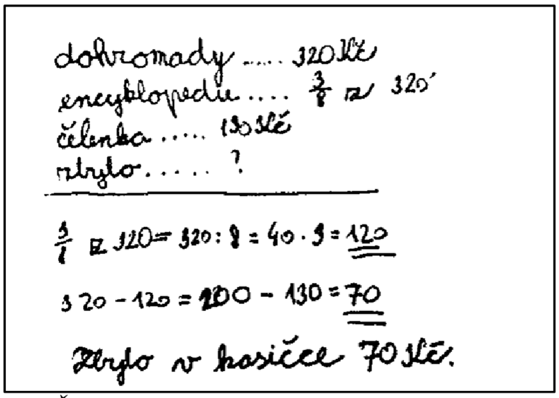


Obr. 16 – Řešení slovní úlohy z 2. pololetní práce třídy 5.C

První řešení, které správně vyřešil žák **6** (viz Obr. 2Obr. 2), je zapsáno pomocí písemného zápisu, ve kterém si žák správně rozepsal jednotlivé údaje a neznámou označil otazníkem. V matematizaci poté použil operaci dělení a násobení pro výpočet části z celku, i když vynechal zápis $\frac{3}{8}$ z 320, který jinak většina třídy udělala. V matematizaci žák vynechal závorky, které nám určují, jakou operaci máme dělat jako první. V tomto případě bychom mohli postupovat více způsoby, jako tomu bylo i u přeškrtaného původního řešení žáka, kde nejdříve udělal součin ($3 \cdot 8=24$) a až poté počítal s operací dělení, kde mu výsledek vyšel se zbytkem. Poté se žák opravil a počítal postupně operace, jak jdou za sebou a vypočítal tedy potřebnou část pro vyřešení další operace odčítání. Žák nezapomněl napsat ani odpověď a za správné vyřešení úlohy získal celkový počet bodů.

Druhé řešení (viz Obr. 17), které jsem si vybrala k analýze a získalo plný počet bodů, je od žáka 3 a je podobné prvnímu řešení (viz *Obr. 16*), až na pár odlišností.

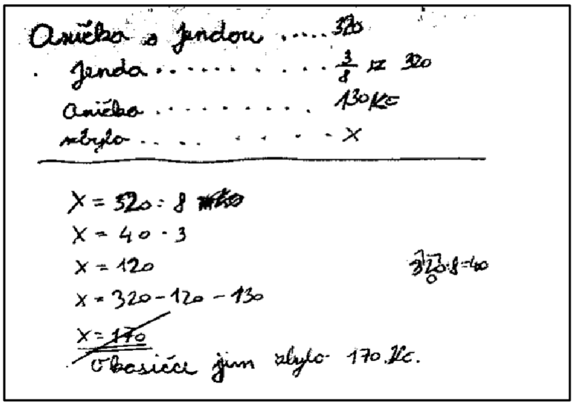
Žák opět použil klasický slovní zápis a zapsal všechny potřebné údaje. U druhého údaje, který udává, jaká část z celku má být vypočítána, dopsal oproti předchozímu řešení i celek, ze kterého se má část vypočítat.



Obr. 17 – Řešení slovní úlohy z 2. pololetní práce třídy 5.C

V matematizační části použil zápis pro výpočet části z celku, který v předchozím řešení chyběl a poté počítal dané operace, aby vypočítal výsledek. V tomto řešení opět vidíme nesprávné, opakované používání znaménka rovná se, jako tomu bylo u žáků z 5.A (viz *Obr. 8*). Žák nejprve rozdělil celek na celkový počet částí (tj. 320:8=40), což se, ale nerovná zápisu $\frac{3}{8}$ z 320, ale poté ještě k danému výpočtu přidal další operaci násobení a vypočítal potřebnou část z celku. Žák tedy sice došel ke správnému výsledku, ale zápis matematizace těchto výpočtů správný není. Žák i přesto dostal celý počet bodů, protože se správně dopočítal výsledku a nevynechal žádnou část.

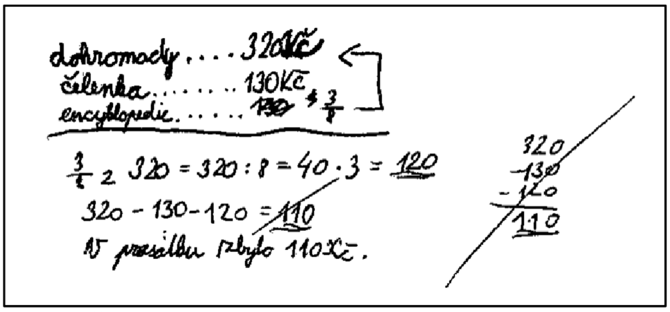
Následující řešení získaly jen jeden bod ze dvou, protože v nich žáci udělali nějakou z následujících chyb: zapomněli napsat odpověď; špatně vypočítali poslední příklad s operací odčítání a vyšel jim tedy nesprávný výsledek.



Obr. 18 – Řešení slovní úlohy z 2. pololetní práce třídy 5.C

V prvním vybraném řešení je použit slovní zápis, kde žák k vyjádření neznámé použil *x*, což takto udělalo pouze 6 žáků z celé třídy. Nevím, zda jsou žáci vedeni k určitému označení, kdy v páté třídě by už podle mě mohli všichni označovat neznámou jako *x*, aby tak mohli snáze navázat na budoucí učivo, nebo nechává vyučující toto rozhodnutí na žácích. Žák tedy v matematizační části používal pro zápis výpočtu neznámé *x*, kde můžeme vidět, že si ještě neumí propojit, co danou neznámou představuje a před každý jednotlivý výpočet dal danou neznámou.

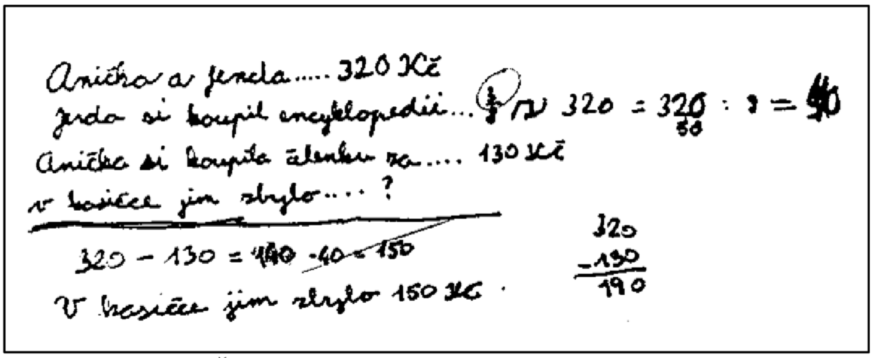
Žák se správným počítáním dopátral výpočtu části z celku, ale poté chybně počítal při operaci odčítání, které dělal zřejmě pamětně a výsledek mu tedy vyšel chybně, neboť se spletl v řádu stovek a místo správného výsledku 70, mu vyšlo 170. Žák jinak vyřešil úlohu správně a nevynechal žádnou z částí úlohy, proto získal jeden bod.



Obr. 19 – Řešení slovní úlohy z 2. pololetní práce třídy 5.C

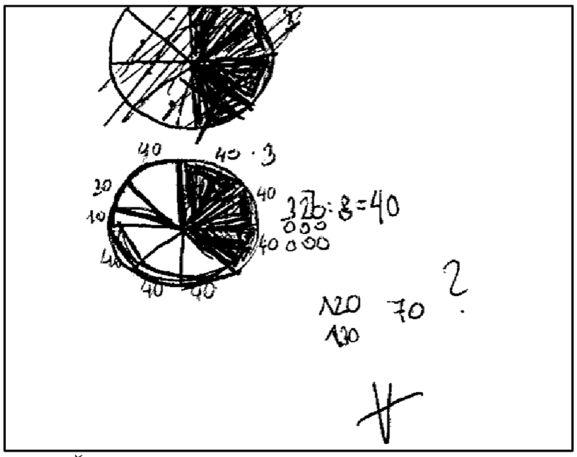
Podobný případ, kdy žák přišel o jeden bod kvůli špatnému výpočtu u poslední operace, je i v tomto řešení. Žák udělal slovní zápis, kde vynechal údaj s neznámou, co chce vypočítat. V matematizaci žák správně počítá část z celku, ale znovu používá i tento žák opakující se znaménko rovná se, kdy po zápisu části z celku počítá jen příklad na rozdělení na celkový počet částí a teprve za dalším rovnítkem dopočítává operací násobení počet částí, za kterou udělal žák další rovná se s konečným výsledkem. Dopočítal se správného výsledku části z celku, ale při další operaci odčítání od celku si žák zapsal všechna čísla pod sebe a odčítal je všechny najednou, takže mu nakonec vyšel špatný výsledek.

Další žákovská řešení získala pouze půl bodu ze dvou, protože se jim povedla jen nějaká část ze všech výpočtů.



Obr. 20 – Řešení slovní úlohy z 2. pololetní práce třídy 5.C

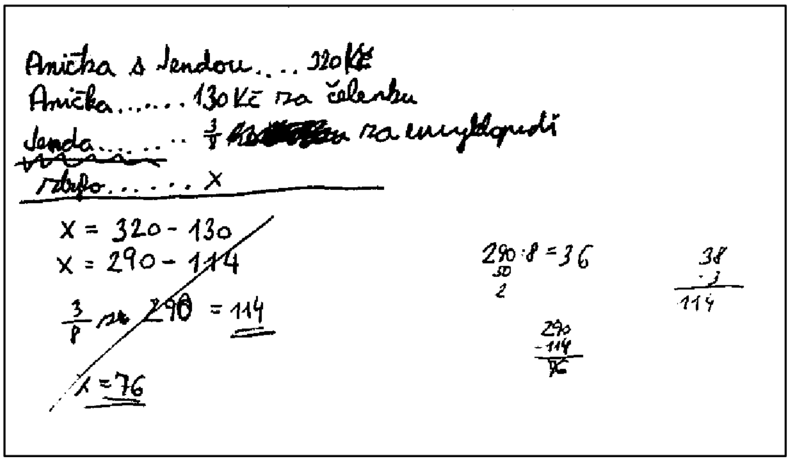
První řešení, které získalo půl bodu je od žáka **19** (viz Obr. 2). Žák opět použil klasický slovní zápis, ve kterém rovnou prováděl i výpočet části z celku. Bohužel udělal jen polovinu výpočtu a zapomněl rozdělený celek vynásobit počtem částí. Neznámou, jako většina třídy, označil žák otazníkem. V matematizační části žák rovnou počítal příklad, kdy odčítal utracenou část od celku, ale jelikož jeho předchozí výpočet části z celku byl chybný, nevyšel mu poté správný konečný výsledek.



Obr. 21 – Řešení slovní úlohy z 2.pololetní práce třídy 5.C

Druhým řešením, které získalo půl bodu bylo od žáka 16 (viz tabulka *Obr. 2*). Oproti předešlému řešení nepoužil žák slovní zápis, ale grafický v podobě kruhového modelu. Ten žák správně rozdělil na osm částí, ze kterých prvně vybarvil polovinu, ale poté správně překreslil do druhého grafického modelu jen tři části a znázornil tak $\frac{3}{8}$, jak je dáno v zadání. Poté si žák rozdělil tedy celek spravedlivě na osm částí, kdy mu vyšlo, že jedna část je 40 (320:8=40) a vypočítal, kolik jsou 3 části, ale už neuvedl daný výpočet, pouze zapsal výsledek a stejně tak koncovou částku zapsal pouze výsledkem, který ani nepodtrhl a nemůžeme tedy s jistotou říct, zda žák úlohu vědomě vyřešil. Proto mu tam zřejmě vyučující připsala otazník a dala žákovi pouze půl bodu. Z grafického zápisu jde poznat, že žák úloze porozuměl a všechno vypočítal správně, jen nezapsal příklady, neurčil, jaký je konečný výsledek a nezapsal ani odpověď. V porovnání s ostatními úlohami se toto řešení téměř neliší od řešení, kde chybí pouze odpověď a získalo celý jeden bod.

Nakonec jsem k analýze vybrala 2 úlohy ze tří, které nezískaly žádný bod, protože je žáci nedokázali vyřešit. Jeden žák udělal pouze zápis, ale již v řešení nepokračoval a zbylé dvě řešení analyzuji dále.



Obr. 22 – Řešení slovní úlohy z 2.pololetní práce třídy 5.C

Žákovi se podařil správný zápis, i když prohodil pořadí údajů, a to poté zřejmě vedlo k neúspěšnému řešení úlohy. Neznámou označil žák *x* a stejně jako v předchozím řešení (viz *Obr. 18*) si žák ještě neosvojil, co neznámá představuje a počítal s ní všechny příklady. Žák kvůli prohozeným údajům nejprve odečetl od celku čelenku (tj. 320-130) a ze zbytku teprve počítal část z celku. Nevadilo by, že si prohodil údaje, kdyby správně porozuměl úloze a počítal poté část ze správného celku.

Žák se dopustil chyby v operaci dělení, kdy připočetl zbytek k výsledku a počítal dále s ním. I přesto, že již žák nepočítal se správnými údaji, neměl by dělat takovéto chyby, naopak mu operace dělení, kdy mu výsledek vyšel se zbytkem, mohla napovědět, že to nebude správné řešení. Žákův výsledek se od správného moc nelišil, ale jelikož neměl ani jeden správný výpočet, kromě prvního, nezískal za řešení žádný bod.

Celkově mě u této úlohy překvapilo, kolik žáků jí zvládlo vyřešit správně, zvládli to i žáci, kteří přišli o nějaký bod, protože úloze správně porozuměli, jen poté udělali chybičku v koncovém výpočtu nebo něco zapomněli. Ze všech tří získaných úloh z pololetních prací měla tato největší úspěšnost v řešení, ale v porovnání s dalšími úlohami, byla zároveň o něco lehčí.

2.2.3. Malotřídní škola

Poslední slovní úloha se zlomky je z malotřídní školy. Jedná se o výpočet části z celku a poté se s vypočítanými údaji pracuje. K vyřešení této úlohy tedy potřebují žáci více výpočtů, aby dosáhli konečného výsledku. Tato úloha mi přijde, vzhledem k nedostatečnému osvojení učiva žáků dané třídy, docela obtížná.

5) Vyřeš slovní úlohu:

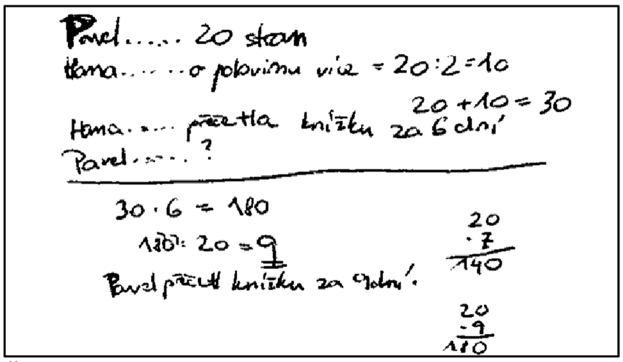
Pavel a Hana četli stejnou knížku. Pavel přečetl každý den 20 stránek. Hana přečetla celou knížku za 6 dní a každý den přečetla o polovinu více stránek než Pavel.
Za jak dlouho přečetl knížku Pavel?

Obr. 23 – Zadání slovní úlohy z 2.pololetní práce třídy 5.C

K vyřešení této úlohy musí nejprve žáci vypočítat, kolik je polovina z 20 a výsledek (tj. 10) přičíst k danému celku. Žákům by mělo poté vyjít, že Hana přečetla 30 stránek denně (tj. 20+10=30). Poté musí vypočítat, kolik stránek má kniha celkem tak, že vynásobí počet přečtených stran Hanou s celkovým počtem dní, za které přečetla celou knihu a vyjde, že celkový počet stran je 180 (tj. 30·6=180) a daný výpočet poté vydělit počtem stran, které přečetl Pavel, aby dosáhli výsledku, kolik dní trvalo Pavlovi přečíst knihu. Konečný výsledek by měl vyjít 9 (tj. 180:20=9). Zadání je zvláštní v tom, že s těmito čísly, která jsou zadána, stačí polovinu spočítat pouze ze dní, protože pokud Hana přečetla o polovinu více stránek denně, potom Pavel četl o polovinu dní déle. Tedy stačí vypočítat polovina z 6 dní a vyjde 9 dní a nemusí se počítat stránky knihy.

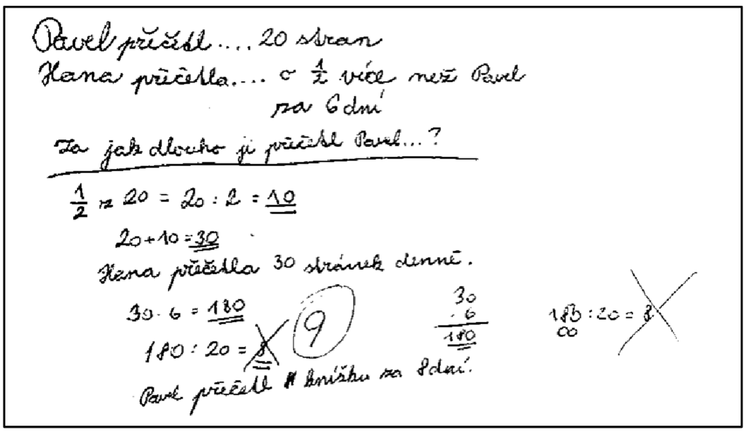
Zlomek v této úloze nedělal žákům problém, a spíše než se zlomkem ½, pracovali s číslem 2. Nezáleží, v jaké podobě bude daný zlomek ve výpočtech figurovat, ale zda si žák dokáže propojit, co daný zlomek představuje nebo v tomto případě, co představuje pojmenování „polovina“. Největší problém byl v této úloze zřejmě úplné porozumění nebo spíše orientace v údajích zadání.

Úlohu zvládli správně vyřešit pouze 4 žáci z celkových 11, ale většina žáků měla alespoň polovinu úlohy správně vyřešenou.



Obr. 24 – Žákovské řešení slovní úlohy z pololetní práce malotřídní školy

První řešení poslední ze získaných slovních úloh řešilo obdobným způsobem celkem pět žáků, z nichž pouze 2 byli úspěšní. Jedním z těchto úspěšných žáků je řešení na obrázku výše. Žák použil klasický slovní zápis, kde již provedl výpočet daného zlomku, který určuje, na kolik částí se má celek rozdělit. Žákův výpočet je správný, protože nezapomněl po vypočítání části z celku danou část k celku přičíst a mohl tedy dále počítat se správným údajem. K označení neznámé použil otazník. V matematizační části počítal s výpočtem provedeným v zápise a ten vynásobil počtem dní, za které přečetla Hana knihu, aby vypočítal, kolik má kniha stran. Žákův výpočet byl opět správný a zbývalo už jen vypočítat, za kolik dní přečetl knihu Pavel. V řešení nechybí správný výsledek ani odpověď, tudíž žák získal za své řešení plný počet bodů.

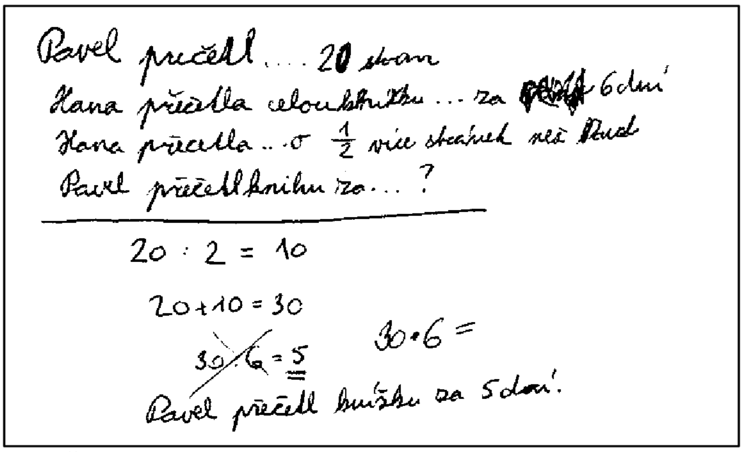


Obr. 25 – Žákovské řešení slovní úlohy z pololetní práce malotřídní školy

Další řešení je podobné předešlému řešení, kdy žáci použili k zápisu slovní zápis. Toto řešení je jedním z předchozích zmíněných neúspěšných řešení, protože se žákovi nepodařilo vypočítat správný konečný výsledek, ten je opraven vyučující.

V matematizační části je správně vypočítána část z celku a ta následně k celku připočtena. Dokonce byla přidána i odpověď na skrytou otázku, kdy bylo třeba vypočítat, kolik stránek přečte Hana každý den. S tímto údajem poté žák správně počítal operaci násobení a vyšel mu správný součin, který představoval celkový počet stran knihy a následně toto číslo vydělil počtem stran, které přečte denně Pavel. Všechny příklady udělal žák správně, pouze tento poslední výsledek nevypočítal správně, protože se zmýlil při písemném dělení a vyšel mu tedy špatný koncový výsledek.

Žák i přes zahrnutý zápis, všechny správné výpočty a odpověď, nezískal žák žádný bod, což je právě podle mého názoru nespravedlivé, jelikož úloze zcela porozuměl, pouze se spletl v písemném dělení.

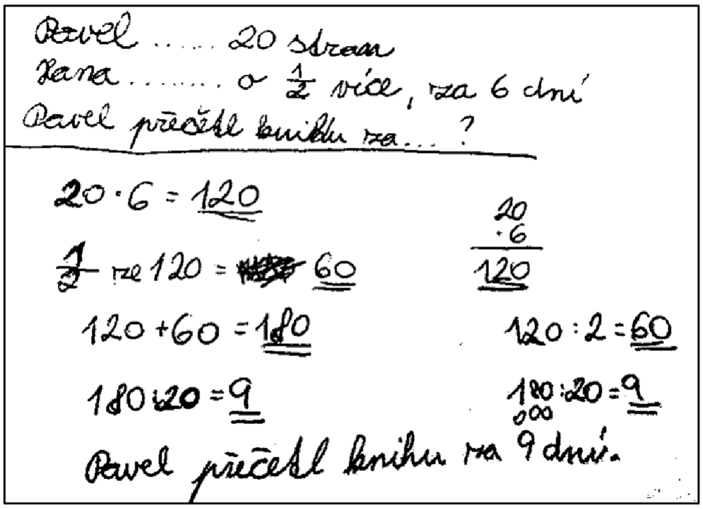


Obr. 26 – Žákovské řešení slovní úlohy z pololetní práce malotřídní školy

Žádný bod nezískalo ani řešení z obrázku 26, které je podobné předchozím řešením. Žák použil klasický slovní zápis, kde uvedl všechny údaje a dokonce zapsal „polovinu“ jako zlomek, což takto udělali pouze 3 žáci z celé třídy.

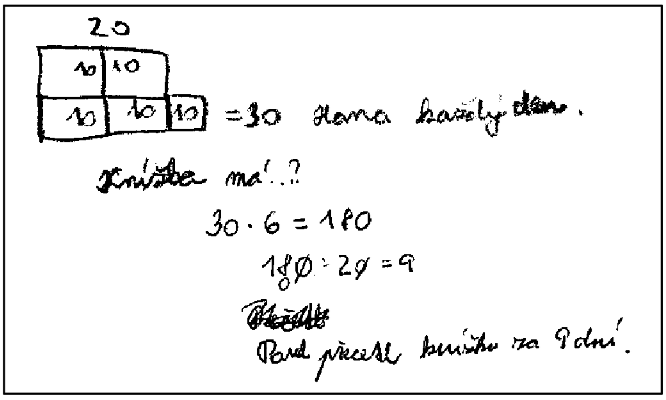
V matematizační části je správně vypočítána část z celku a následně k celku přičtená, ale další výpočty již správné nejsou. Žák výpočet stran, které denně přečetla Hana vydělil počtem dní, místo, aby použil operaci násobení a vypočítal, kolik má kniha stran. Takto mu vyšel výsledek pouze 5 (tj. 30:6=5) a to považoval za konečný výsledek.

Je zcela očividné, že žák neporozuměl zadání úlohy, jelikož konečný výsledek, který představuje počet dní, za které přečte knihu Pavel, nemůže být menší než počet dní, za které přečte knihu Hana. Pokud by si tuto skutečnost uvědomil, jistě by odhalil vytvořenou chybu a úlohu by vyřešil správně.



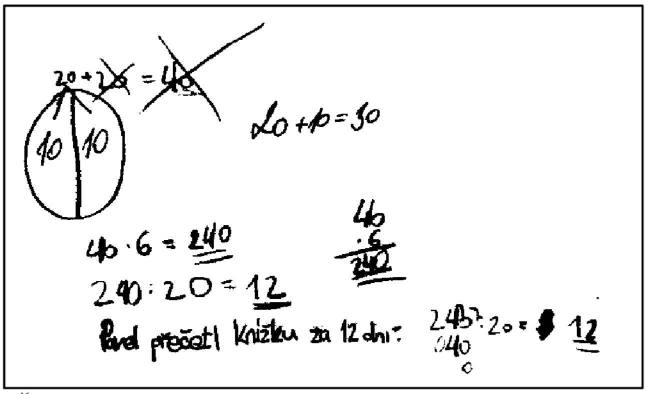
Obr. 27 – Žákovské řešení slovní úlohy z pololetní práce malotřídní školy

Dalším řešením, které získalo bod je podobné tomu prvnímu, ale žák v tomto případně nejdříve vypočítával, kolik stránek by měla kniha, kdyby Hana přečetla denně to, co Pavel a až poté dělil na poloviny. Tímto způsobem řešili úlohu celkem tři žáci, z nichž pouze tento jeden žák byl úspěšný a úlohu vypočítal správně. Zbylí žáci udělali chybu v opomenutí vypočítání a přičtení zlomkové části k celku.



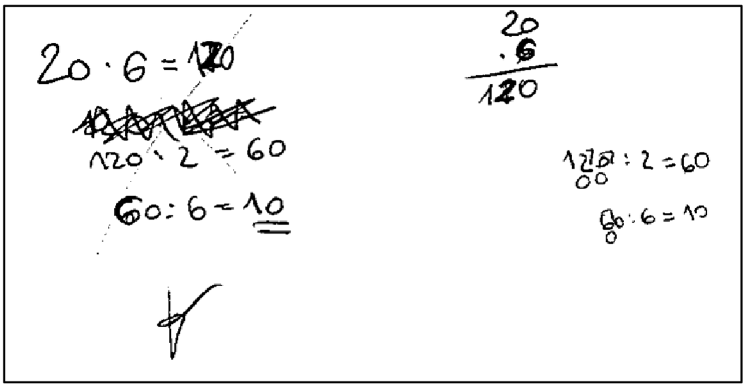
Obr. 28 – Žákovské řešení slovní úlohy z pololetní práce malotřídní školy

Posledním řešením, které získalo bod za správně vyřešenou úlohu je z obrázku 28. V tomto řešení žák použil grafický zápis, kdy si vyznačil, že daná část je 20 a tu si následně rozdělil na poloviny. Poté danou polovinu přikreslil k druhému údaji, aby zjistil, kolik stránek přečte denně Hana a vyšel mu správný výsledek, který následně vynásobil počtem dní a vyšel mu celkový počet stránek knihy. Tento počet poté vydělil počtem stran, které přečte denně Pavel a došel ke správnému výsledku. Žák při operaci písemného dělení použil krácení desítek, což mu usnadnilo výpočet a stačilo pracovat s malou násobilkou. Tento postup zvolili pouze dva žáci z celé třídy.



Obr. 29 – Žákovské řešení slovní úlohy z pololetní práce malotřídní školy

Grafický zápis byl použit také v tomto řešení, kdy žák použil k zápisu kruhový model, ale nesprávně určil, že polovina je 20, což je celek, který se měl rozdělit na poloviny a k celku přičíst. Tento žák sečetl dvakrát celek a vyšlo mu 40 (tj. 20+20=40), tudíž mu následně nemohl vyjít ani konečný výsledek, který je jinak početně správně, ale neodpovídá správnému výsledku úlohy.



Obr. 30 – Žákovské řešení slovní úlohy z pololetní práce malotřídní školy

Posledním řešením všech získaných úloh je z obrázku 30. V tomto řešení zcela chybí zápis i odpověď, a navíc žák neporozuměl úloze. Žák přeskočil počítání se zlomkem a rovnou udělal operaci násobení, aby vypočítal počet stránek. Dokonce správně vypočítal potřebnou „polovinu“ pro vypočítání celkového počtu stránek, ale poté už danou část nepřičetl. Vydělil ji počtem dní, za který přečetla knížku Hana.

I přes to, že úlohu zvládli vyřešit pouze čtyři žáci z jedenácti, většina žáků zadání úlohy porozuměla a o to v řešení slovních úloh jde především.

2.3. Slovní úlohy z pracovního listu

Pro svou diplomovou práci jsem vytvořila pracovní list se čtyřmi slovními úlohami, které jsem poté rozdala žákům v 5.A a malotřídní škole na vypracování. Ze třídy 5.A, kde je celkem 22 žáků, jsem získala 18 vypracovaných pracovních listů a z malotřídní školy, kde je v dané páté třídě 11 žáků, jsem získala 8 vypracovaných listů. Celkem jsem tedy k analýze získala 26 pracovních listů.

Za správně vyřešené úlohy mohli žáci získat až 2 nebo 3 body a za chyby jim byly body strženy. Pracovní listy jsme poté s vyučujícími, daných tříd obodovaly a podle počtu získaných bodů udělovaly známky, ale pouze žákům, kteří danou známku chtěli. Celkem mohli žáci za celý list získat až 11 bodů, z toho pouze 8 bylo povinných, ze kterých se poté počítala známka a poslední úloha za 3 body byla volitelná, takže v případě jejího úspěšného vyřešení, se žákovi přičetly získané body, aby si mohl případně vylepšit známku.

Vypracované úlohy nebyly vytvořené, aby byly lehce vyřešeny, proto jsem udělala první úlohu lehčí, aby žáci zvládli alespoň jednu úlohu, pokud by si s ostatními nevěděli rady a zbylé jsou složitější úlohy, kde žáci musí porozumět zadání, aby úlohu správně vyřešili a zároveň jsou to obtížnější úlohy, na které nejsou žáci zvyklí.

1) Stáří **2 b.**

Pokud je nyní rok 2022, tak se tento indián narodil v roce, který je $\frac{1}{6}$ tohoto roku.
V jakém roce se indián narodil?

Obr. 31 – První slovní úloha z pracovního listu

První slovní úloha se zlomky z pracovního listu je na výpočet části z celku, kdy měli žáci přijít na to, kolik je $\frac{1}{6}$ z 2022. Úkolem žáků bylo tedy vypočítat, že šestina z 2022 je 337 (tzn. 2022:6=337).

Za tuto úlohu mohli žáci získat až 2 body a za každou chybu jim byly body odečteny.

3 b.

2) Hasič

Dva hasiči musí uhasit celý hotel, který má 63 pokojů. První hasič uhasil už $\frac{1}{3}$ pokojů a druhý hasič uhasil $\frac{2}{7}$ ze zbývajících pokojů. Kolik pokojů zbývá ještě uhasit?

Obr. 32 – Druhá slovní úloha z pracovního listu

Druhou slovní úlohou se zlomky, je opět úloha na výpočet části celku, ale tato úloha je složená, tzn. že oproti předchozí úloze musí žáci provést několik výpočtů a porozumět úloze, aby se dopočítali správnému výsledku a zároveň musí ve druhém výpočtu počítat se zlomkem, který má v čitateli větší číslo než jedna, na což žáci nejsou zvyklí a zajímalo mě, jak si s danou úlohou poradí.

Nejdříve měli žáci za úkol vypočítat kolik je část $\frac{1}{3}$ z celkových 63, tedy vypočítat část z celku, kdy by jim správně mělo vyjít 21 (tj. 63:3=21), ale aby úlohu správně vypočítali, museli porozumět slovní úloze a daný výpočet ještě od celku odečíst. Vyšlo by jim tedy na další příklad, že mají počítat $\frac{2}{7}$ ze 42 (tj. 63-21=42). Dále by tedy vypočítali, že druhý hasič uhasil 12 pokojů (tj. (42:7) ·2=12) a výsledek znovu odečíst, aby jim vyšel konečný výsledek.

Tato úloha byla mnohem složitější než předchozí a žáci tedy mohli celkem získat až 3 body.

3 b.

3) Akvárium – 3 body

Martinova rybička žije v akváriu, které má objem 6 l a chtěl by pro ni koupit o $\frac{2}{3}$ větší akvárium. Jaký objem vody bude mít větší akvárium?

Obr. 33 – Třetí slovní úloha z pracovního listu

Ve třetí úloze měli žáci za úkol vypočítat část z celku, o kterou se daný celek zvětší, tzn. že by měl výpočet vypadat následovně: $\frac{2}{3}$ ze 6 a vyšlo by, že daná část je 4 (tj.

(6:3)·2=4), poté se musí vypočítaná část k celku ještě připočíst, aby vyšel správný výsledek (tj. 6+4=10).

I přesto, že k této úloze není potřeba tolik výpočtů jako k předchozí, může být pro žáky obtížné porozumět zadání, proto mohou žáci za tuto úlohu získat až 3 body. Stejně jako v předchozí úloze se i v této nachází zlomek s větším čitatelem než je jedna.

Náhradní otázka **3 b.**

4) Kostka ledu

Sochař nechal roztát velkou kostku ledu a snaží se zjistit, kolik ledu roztaje za 5 hodin. Po 2 hodinách roztála $\frac{1}{8}$ z celé kostky a za další 3 hodiny roztály ještě $\frac{3}{8}$. Jaká část kostky roztála za 5 hodin?

Obr. 34 – Čtvrtá slovní úloha z pracovního listu

Poslední slovní úloha se zlomky je pouze náhradní a není povinná, tzn. že ji žák nemusí řešit a zároveň, pokud žák vyřeší úlohu správně, započítají se jeho body k „dobru“ a může mu to vylepšit celkový počet získaných bodů a tím pádem i známku, ale pokud se žákovi úloha nepovede a vypočítá ji chybně, žádné body se neodečtou, ani nepřičtou.

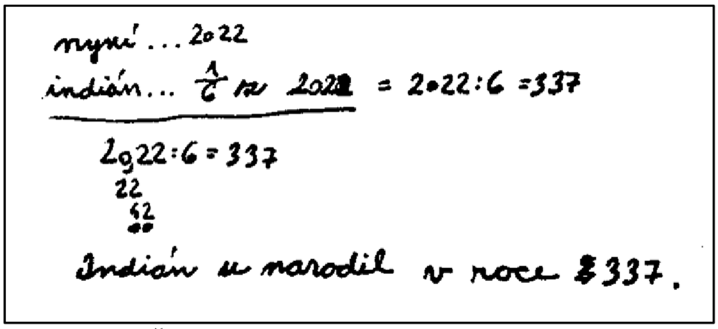
Tato slovní úloha je na sčítání zlomků, kde mají žáci vypočítat, jaká část ledové kostky roztaje za 5 hodin. Žáci měli za úkol porozumět textu a poznat, že se jedná o sčítání zlomků, aby úlohu správně vyřešili. Výsledek také záměrně nevyjde v základním tvaru, protože jsem chtěla zjistit, zda si to žáci uvědomí a zlomek zkrátí.

2.3.1. Analýza řešení slovních úloh z pracovního listu

Pracovní listy jsem celkem 26 žákům tříd 5.A a třídě z malotřídní školy, z toho nejvíce získaných bodů bylo 10 z celkových 11, kdy za 11 až 8 bodů udělovaly obě vyučující jedničky a zbylé známky nechaly na rozhodnutí žáků, zda je chtějí zapsat.

Úlohy jsem k analýze roztřídila a popisuji je postupně od první slovní úlohy, kdy zhodnotím všechna řešení a postupuji k další až po poslední úlohu.

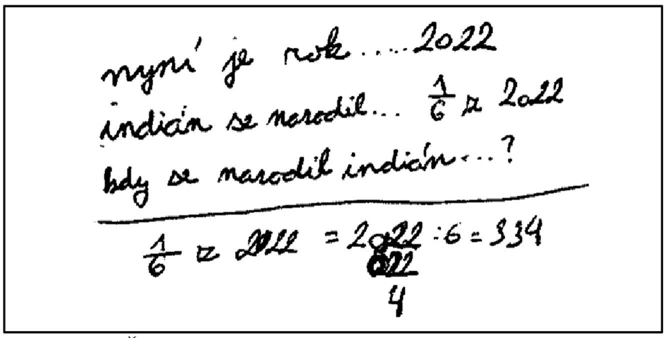
První úloha (viz Obr. 31) byla ze všech čtyř slovních úloh nejjednodušší a zvládli ji téměř všichni žáci. U někoho chyběl např. zápis nebo odpověď, ale dopočítali se správnému výsledku.



Obr. 35 – Žákovské řešení první úlohy z pracovního listu

První řešení mělo podobným způsobem zapsáno celkem 12 žáků z 26. Žáci řešili úlohu slovním zápisem a v matematizační části správně počítali danou část z celku tedy 2022:6 a vyšel jim správný výsledek 337. Takto vyřešenou úlohu i s odpovědí jsem hodnotila dvěma body.

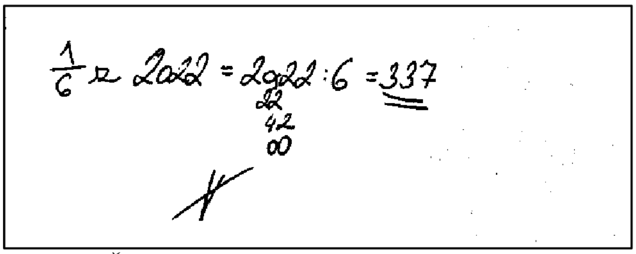
Konkrétně v tomto řešení žák zapsal stejný výpočet dvakrát, a to jak ve slovním zápisu, tak i v matematizační části, kde příklad vypočítal a výsledek poté připsal k zápisu. Takovéto řešení měli stejně zapsané i další dva žáci, zbylých 9 žáků mělo příklad zapsáno pouze jednou. V zápisu žákovi také chybí údaj s otázkou.



Obr. 36 – Žákovské řešení první úlohy z pracovního listu

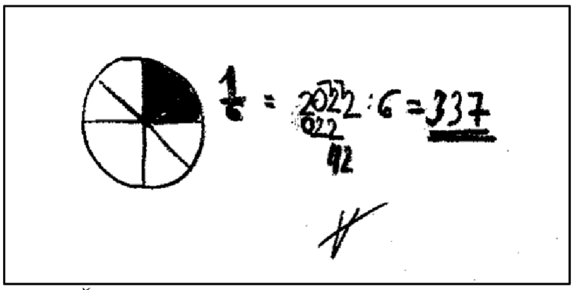
Stejně jako předchozí skupina žáků, řešili úlohu i další 4 žáci, kterým se, ale bohužel nepovedla operace dělení a nedopočítali se tak správnému výsledku. Např. v tomto řešení žák udělal správně zápis, i správně zapsal příklad, ale při písemném dělení se dopustil chyby, kdy zapomněl počítat s poslední číslicí v čísle 2022. Zbytek, který mu tam zbyl pouze připsal k výsledku a vyšel mu tedy výsledek 334, což se o mnoho neliší od výsledku, ale správný výsledek to není.

Žák udělal správně zápis a zapsal správně i příklad, pouze špatně počítal při operaci písemného dělení, a také zapomněl na odpověď, a tak byl ohodnocen pouze půl bodem.



Obr. 37 – Žákovské řešení první úlohy z pracovního listu

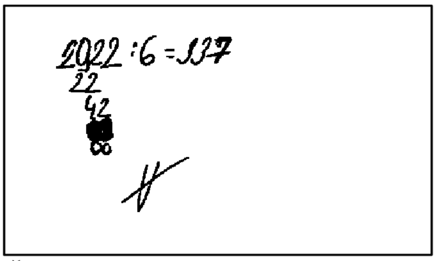
Další řešení jsou již za jeden bod, protože v daných úlohách chyběla část řešení. Konkrétně v řešení z obrázku 37 žák, pokud pomineme, že neudělal slovní zápis, ale rovnou úlohu matematizoval, zapomněl napsat odpověď, takže bohužel přišel o jeden bod. Na řešení můžeme vidět, že žák počítal písemné dělení rovnou v příkladě.



Obr. 38 – Žákovské řešení první úlohy z pracovního listu

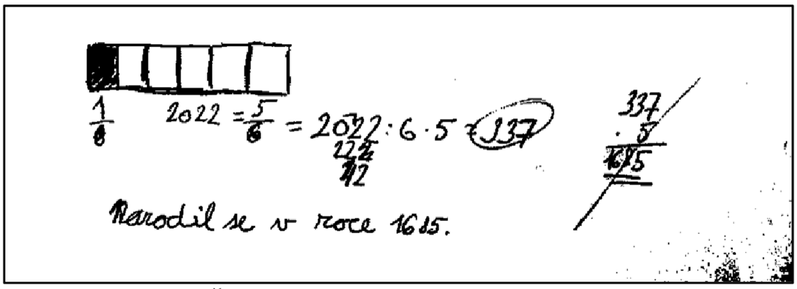
Řešení na obrázku 38 se shoduje s dalšími 4 žáky a je počítáno pomocí kruhového modelu „koláče“, který tento žák rozdělil na šest částí tak, že si rozdělil kruh na čtvrtiny a z toho dvě části ještě přepůlil, vyšlo mu tedy šest částí, které nejsou stejně velké, ale v tomto případě počítal žák správně i přes nestejně velké části.

Žák správně vybarvil jednu část kruhu, která znázorňuje $\frac{1}{6}$ a tu poté i daným zlomkem pojmenoval. Za tento zlomek zapsal rovná se a počítal příklad, který je správně, ale 2022:6 se nerovná $\frac{1}{6}$, tudíž je toto rovnítko použito nesprávně. Příklad vypočítal žák pomocí písemného dělení správně a získal tak za celé řešení jeden bod.



Obr. 39 – Žákovské řešení první úlohy z pracovního listu

Následující řešení nemá žádnou formu zápisu a nemá ani odpověď, ale úloha je vypočítaná správně. Nevím, zda žák výpočet pouze opsal od spolužáka nebo opravdu úlohu takto vyřešil samostatně, ale výsledek je správný. Na úlohách hodnotila, zda žáci porozumí úloze a vypočítají jí správně. Tento žák získal také jeden bod.



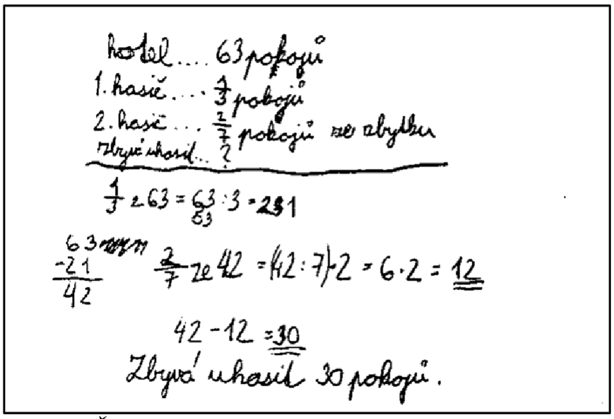
Obr. 40 – Žákovské řešení první úlohy z pracovního listu

Posledním druhem řešení této úlohy je znovu pomocí grafického zápisu, ale tentokrát místo kruhového modelu je model obdélníku. Tento žák má rozdělený obdélník na poměrně stejné části, ale ostatním žákům (tj. 3 žáci) přesné rozdělení moc nevyšlo a bylo tomu tak u vícero úloh. Můžeme tedy říct, že žákům dělá problém odhadnout správnou velikost daných částí. V tomto případě mohli žáci rozdělit obdélník napůl a tyto poloviny poté rozdělit dvěma čarami na 3 stejné části

Žák v grafickém zápisu správně znázornil danou část, ale dále vidíme, že si žák chybně propojil zadání se znázorněním a daný celek (tj. 2022) určil jako zbývajících pět částí. Počítal tedy příklad $\frac{5}{6}$ z 2022, kdy správný výsledek této úlohy vypočítal, ale poté ho vynásobil danými pěti částmi, tudíž koncový výsledek byl chybný. Za toto řešení získal žák půl bodu, protože používal správné operace. Měl zápis i odpověď a výsledek úlohy v řešení zazněl, proto získal půl bodu.

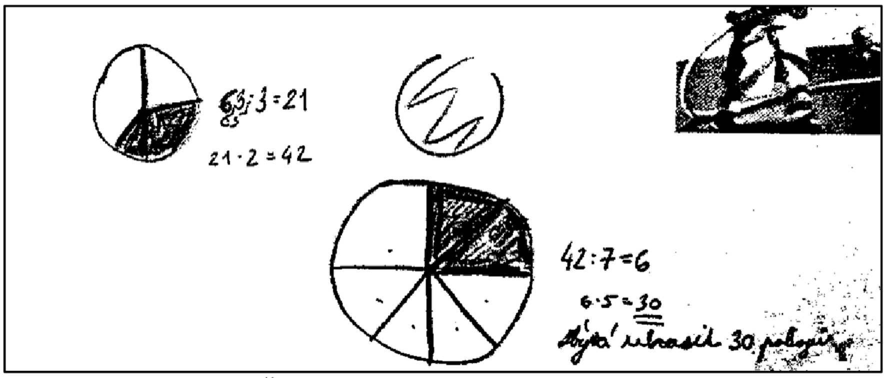
Druhá slovní úloha (viz Obr. 32) už byla pro žáky složitější, protože byla těžší na pochopení a nacházelo se v ní mnohem více potřebných početních operací než v předchozí jednoduché slovní úloze.

Úlohu vyřešilo zcela správně pouze 9 žáků z 26, ale tato úloha byla velmi složitá, už jen proto, že se jedná o složenou slovní úlohu. Žákům dělalo u této úlohy největší potíže pochopení úlohy a vzniklo tak celkem 9 druhů řešení, které analyzuji dále v této práci.



Obr. 41 – Žákovské řešení druhé úlohy z pracovního listu

První řešení druhé slovní úlohy řešilo podobně 10 žáků, z nichž pouze 6 ji vyřešilo správně. Žáci použili slovní zápis, kde zapsali všechny údaje ze zadání a poté počítali příklad s prvními údaji (tj. $\frac{1}{3}$ z 63) vypočítali tedy, že daná část je 21 a správně pochopili zadání a výsledek od celku odečetli. Poté pracovali s daným zbytkem, který představoval v následujícím výpočtu celek (tj. $\frac{2}{7}$ ze 42) a vyšlo jim, že druhý hasič uhasil 12 pokojů. Zbývalo už jen daný výsledek od zbytku odečíst (tj. 42-12) a správný výsledek měl být 30, což tito žáci vypočítali správně a získali tak za celkovou úlohu 3 body.



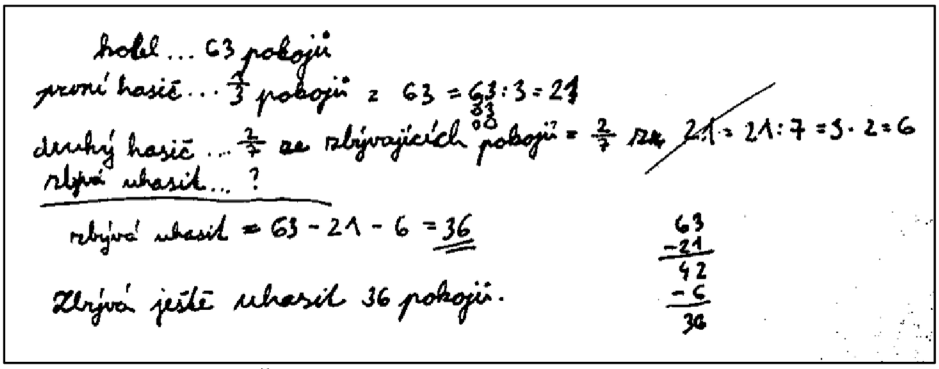
Obr. 42 – Žákovské řešení druhé úlohy z pracovního listu

Dalším způsobem, jakým žáci danou úlohu řešili a získali plný počet bodů je pomocí grafického zápisu. Tímto způsobem řešilo úlohu celkem 6 žáků, z nichž 3 ji vypočítali správně.

Na obrázku 42 můžeme vidět, že si žák nejprve rozdělil celek na třetiny, kdy jednu část vybarvil a vypočítal, kolik je třetina z 63. Vyšlo mu tedy, že jedna ta část je 21 a poté správně vypočítal zbývající část tak, že vynásobil 21·2, tedy zbývající dvě třetiny.

Stejný princip poté zopakoval u dalšího grafického zápisu, kdy „koláč“ rozdělil na sedminy. Jedna část zůstala větší než ostatní, protože žák rozděloval kruh jakoby na osminy. V rozděleném kruhu si vyznačil dvě části a vypočítal, že jedna část z celku je 6 (tj. 42:7). Tento výsledek vynásobil počtem zbylých částí a vyšel mu správný výsledek 30. Žák nezapomněl ani na odpověď a za celé řešení tak získal 3 body.

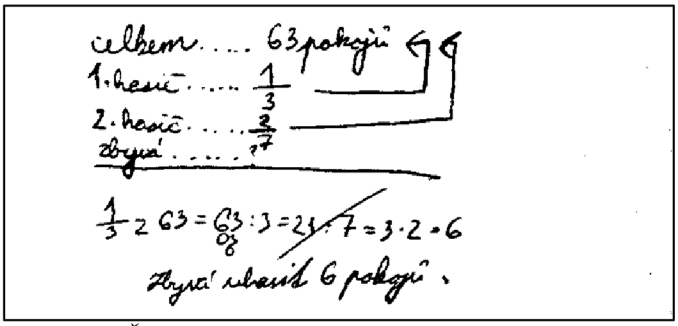
Následující řešení získaly pouze jeden bod, protože žáci vyřešili vždy jen určitou část úlohy. Největší problém dělalo porozumění zadání.



Obr. 43 – Žákovské řešení druhé úlohy z pracovního listu

V tomto řešení žák použil slovní zápis, kde vypsal správně všechny údaje. Žák vypočítával příklady rovnou v zadání, kdy správně vypočetl, kolik pokojů uhasil první hasič. V dalším výpočtu nepočítal se zbývajícími pokoji, jak si i sám do zápisu zapsal, počítal s předchozím výpočtem pokojů, co uhasil první hasič. Všechny další výpočty již tedy nebyly vzhledem k zadání správné. U tohoto řešení můžeme opět pozorovat opakované používání rovnítek u třetího údaje v zápise, kdy žák zapsal, že dvě sedminy z 21 se rovná 21:7, to se rovná 3·2 a dokončil to, rovná se 6. Rovnost mezi těmito výpočty by platila pouze, kdyby žák spojil výpočty 21:7 a 3·2. Vznikl by mu tedy příklad (21:7)·2 a to už se rovná zbylým údajům, ale v tomto případě je rovnítko použito chybně.

V matematizační části správně žák odečetl všechny vypočítané pokoje od celku, ale bohužel neměl správný druhý výpočet, tudíž mu nemohl vyjít správný výsledek celé úlohy. Žák udělal zápis, nezapomněl na odpověď a první výpočet měl správně, proto byl ohodnocen jedním bodem.

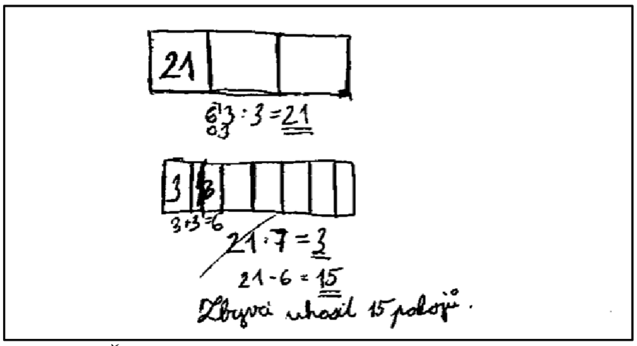


Obr. 44 – Žákovské řešení druhé úlohy z pracovního listu

Toto žákovské řešení je podobné předchozímu řešení. Žák opět použil slovní zápis, ale u vztahujících se údajů k jiným údajům udělal žák šipky. Takovýto zápis použili celkem 2 žáci, z nichž pouze jeden byl úspěšný. Bohužel u tohoto žáka došlo k neporozumění zadání a druhá šipka vede místo ke druhému údaji k prvnímu.

V matematizační části se svým zápisem řídil jen v prvním výpočtu, kdy správně spočítal, kolik pokojů uhasil první hasič. Dále se už druhou šipkou v zápise neřídil a počítal rovnou s vypočítaným výsledkem, což byla také chyba, tudíž se nedopočítal správného konečného výsledku. Za takovéto řešení získal žák jeden bod, protože úloha obsahovala zápis, odpověď a žák zvládl vypočítat první příklad.

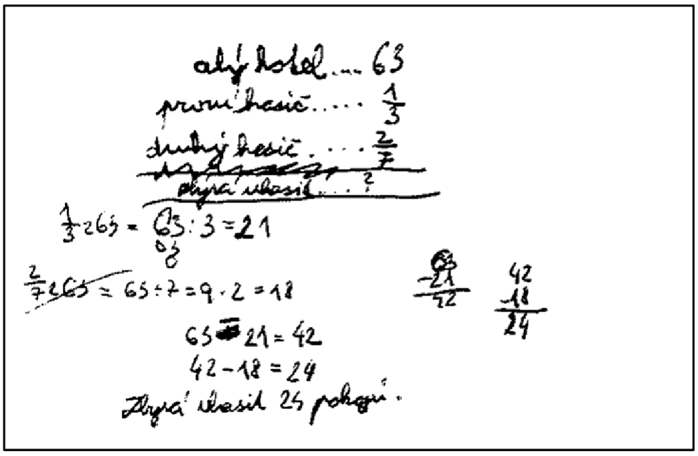
Opět můžeme vidět nesprávné používání rovná se. Žák vypočítal první příklad a hned na výsledek navázal další příklad, místo, aby udělal příklad nový.



Obr. 45 – Žákovské řešení druhé úlohy z pracovního listu

Další žák uvažoval podobně, jako předchozí dvě řešení, ale liší se od nich použitím grafického zápisu, který takto použili celkem tři žáci.

V prvním grafickém zápisu si žák rozdělil celek na třetiny, kdy správně vypočítal, že jedna třetina je 21. Tento žák bohužel stejně jako několik jeho spolužáků neporozuměl zadání a dále nepočítal se zbylou částí, ale s částí, kterou vypočítal. Jeho další celek tedy představoval číslo 21 a rozdělil ho na sedm částí, kdy určil, že dvě části jsou tedy 6. Teprve po výpočtu tohoto výsledku žák vypočítanou část odečetl od celku. Kdyby takto postupoval i s předchozím výsledkem, mohl získat plný počet bodů, kdežto s takto řešenou úlohou byl ohodnocen pouze jedním bodem.

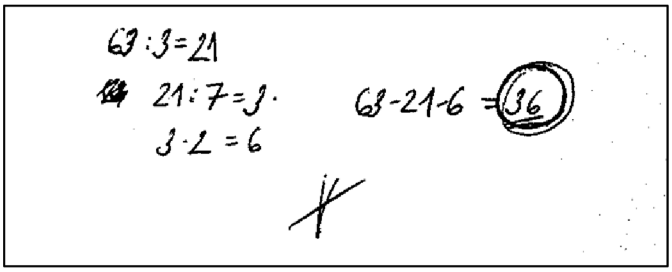


Obr. 46 – Žákovské řešení druhé úlohy z pracovního listu

Poslední řešení, které získalo jeden bod je z obrázku 46. Tento žák si udělal správný zápis, jen u třetího údaje zapomněl napsat, že se má počítat ze zbylé části, a to poté vedlo k nesprávnému vyřešení úlohy.

Žák správně vypočítal první výpočet, ale stejně jako předchozí úlohy už neodečetl vypočítaný výsledek od celku, v dalším příkladě počítal znovu s celým celkem, kde opět můžeme vidět špatně použité opakované rovná se, protože dvě sedminy z 63 se nerovná 63:7 a to se nerovná 9·2. Znovu mohl stejně jako žák předtím sjednotit výpočty a znaménko rovná se by bylo použito správně.

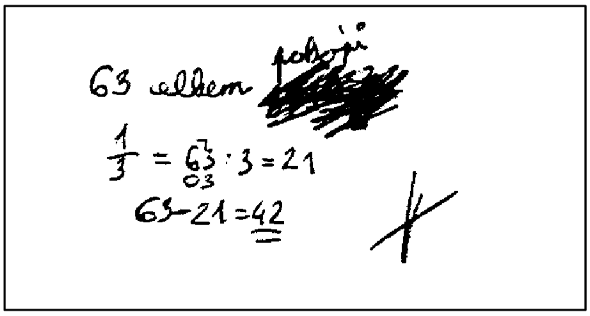
Další řešení jsou již jen za půl bodu, protože žáci zvládli jen jeden z výpočtů a neudělali ani zápis ani odpověď. Takto řešené úlohy, kdy žáci neudělali zápis ani odpověď měli pouze následující tři žáci.



Obr. 47 – Žákovské řešení druhé úlohy z pracovního listu

V tomto řešení žák neudělal zápis a myslím, že to je důvod, proč nezvládl vypočítat úlohu správně. Žákovi se podařilo vypočítat správně první příklad, ale bez zápisu a správného porozumění již další příklady správné nejsou. V tomto řešení žák opět počítal pouze s vypočítanou částí místo zbylé části a konečný výsledek v tom případě neodpovídal správnému výsledku.

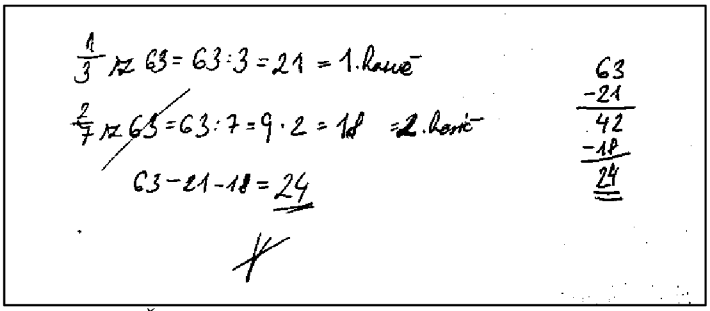
I přesto, že žák zvládl první výpočet stejně jako předchozí žáci, kvůli absenci zápisu a také odpovědi byl žák ohodnocen pouze půl bodem.



Obr. 48 – Žákovské řešení druhé úlohy z pracovního listu

I v tomto řešení chybí zápis i odpověď. Žák uvedl pouze jeden údaj, ale zbývající už nikoliv a z výpočtů se mu podařilo vypočítat správně první část úlohy, dokonce i odečetl vypočítanou část od celku oproti předchozím žákovským řešením, ale tím řešení úlohy u tohoto žáka končí.

Ohodnotila jsem toto řešení půl bodem proto, že žák nemá všechny výpočty, nemá zápis, ani odpověď. I když je toto řešení lepší než předchozí dvě, nepokládala jsem ji za stejně rovnou předchozím řešením, která získala jeden bod.



Obr. 49 – Žákovské řešení druhé úlohy z pracovního listu

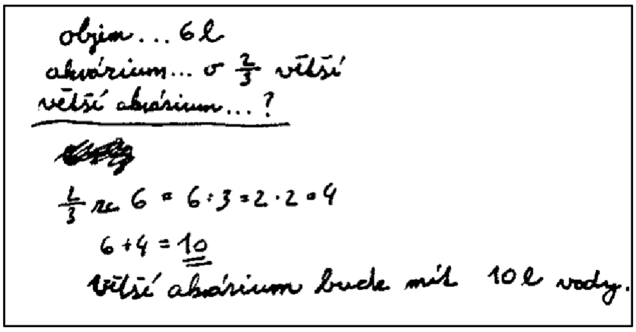
Posledním řešením, které získalo pouze půl bodu je z obrázku 49. Žák v tomto případě zapsal některé údaje ze zadání, se kterými dále počítal. U druhého výpočtu došlo k nepochopení úlohy a počítal místo se zbylou částí znovu s původním celkem.

Znovu můžeme vidět opakovaně nesprávné použití rovnítek ve druhém řádku. Žákovo řešení jsem hodnotila pouze půl bodem, protože měl správně pouze jeden výpočet a pokud bych nepočítala zápis, stále mu v řešení chybí odpověď.

Třetí slovní úloha (viz *Obr. 33*) byla o něco kratší a pro vyřešení stačilo méně výpočtů než k vyřešení druhé úlohy, ale i tak měli žáci s touto úlohou problém, protože zatím nepracovali se zlomky, které mají v čitateli větší číslo než jedna. Zadala jsem tyto těžší úlohy záměrně, abych mohla pozorovat, jak si s úlohami žáci poradí a velice mne překvapilo, kolik žáků zvládlo tyto složité úlohy vyřešit.

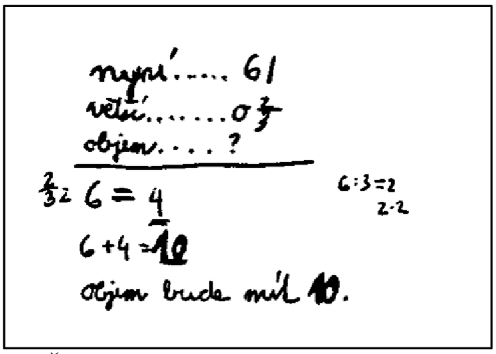
Úlohu vyřešilo správně 12 žáků z 26, což považuji s ohledem na složitost úlohy za úspěch. Zcela správně vyřešené úlohy jsem oceňovala celými třemi body, kdežto úlohy, které měli nějakou chybu, i když se příliš nelišili od zcela správného řešení, jsem hodnotila pouze jedním bodem a chybně vyřešené úlohy žádným bodem.

Největší potíže dělal údaj *o n-více*, kdy se muselo nejprve vypočítat část z celku, která má ale v čitateli číslo 2, a poté tuto vypočítanou část k danému celku přičíst. Žákům také dělal problém porozumět slovíčku objem, protože s daným pojmem ještě moc nepracovali a hledali tak v zadání zbytečné složitosti.



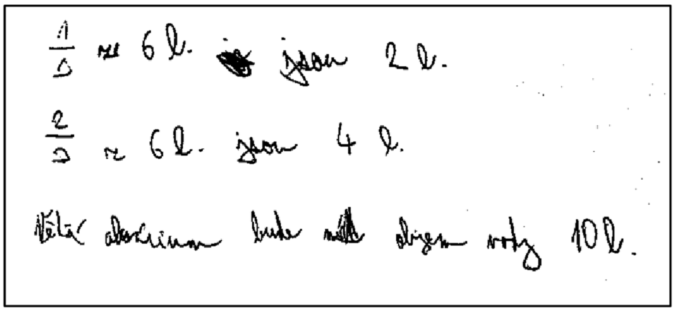
Obr. 50 – Žákovské řešení třetí úlohy z pracovního listu

Prvním řešením, které získalo celé 3 body je z obrázku 50. Žák použil slovní zápis pro vypsání všech potřebných údajů a neznámou označil otazníkem. V další části počítal část z celku, která mu vyšla správně, ale znovu můžeme na obrázku vidět nesprávně opakované používání rovná se. Žák správně počítal nejprve se jmenovatelem, aby vypočítal, kolik je jedna třetina a až poté vynásobil výsledek počtem částí, které určoval čitatel ve zlomku. Nezapomněl přičíst vypočítanou část k celku a za celkové řešení i s odpovědí byl ohodnocen třemi body ze tří. Takto správně vyřešenou úlohu měli celkem 3 žáci. Ostatní žáci, kteří řešili úlohu tímto způsobem, byli z části nebo zcela neúspěšní a získali méně bodů.



Obr. 51 – Žákovské řešení třetí úlohy z pracovního listu

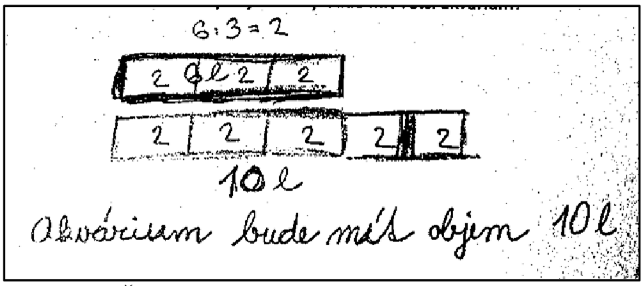
Stejné řešení jako předchozí můžeme vidět na obrázku 51. V tomto případě však žák nepoužil znaménko rovná se nesprávně, ale udělal si samostatné výpočty mimo daný příklad a poté zapsal rovnou výsledek. Jinak jsou úlohy řešeny stejným způsobem, a tak i toto řešení bylo ohodnoceno třemi body a tyto dva jediné druhy řešení, které žáci řešili slovním zápisem, jsou úspěšné a získaly celé tři body. Z odpovědi „Objem bude mít 10." můžeme vyčíst, že žák neví, co „objem" znamená a nespojil si tedy, co vypočítal.



Obr. 52 – Žákovské řešení třetí úlohy z pracovního listu

V řešení žák rovnou počítal části z celku, kdy si nejprve vypočetl jednu část z celku a poté výsledek vynásobil počtem částí v čitateli. Konečný výsledek sice nepočítal, ale je uveden v odpovědi. Z tohoto důvodu jsem úlohu považovala na správně vyřešenou.

Žák zřejmě počítal vše zpaměti, protože v řešení nejsou uvedeny žádné výpočty. I když se jedná o jednoduché počty, uvědomění si pro žáky pátých tříd, co tyto zlomky představují, a co tedy počítají je složité. Tento žák s představou, co znamená zlomek zřejmě takové problémy nemá, protože zatím s takovými zlomky nepracovali a úlohu vyřešil správně. Byl ale jediný, který použil takto zapsané řešení.

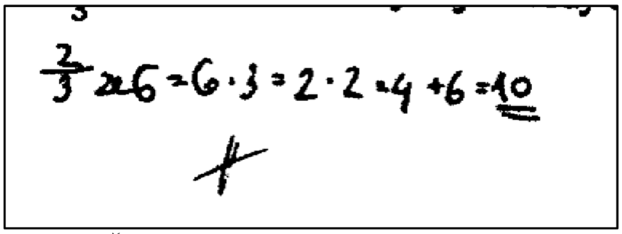


Obr. 53 – Žákovské řešení třetí úlohy z pracovního listu

V posledním řešení, které získalo plný počet bodů, je použit grafický zápis. Žák v tomto případě udělal dva grafické zápisy, kdy v prvním rozdělil celek na části a správně vypočítal, že jedna část je 2. Poté vytvořil druhý grafický zápis. Kam přikreslil další dvě části, které představovaly určenou část čitatelem a vyšlo mu, že má celkem pět částí po 2, tedy $5 \cdot 2 = 10$.

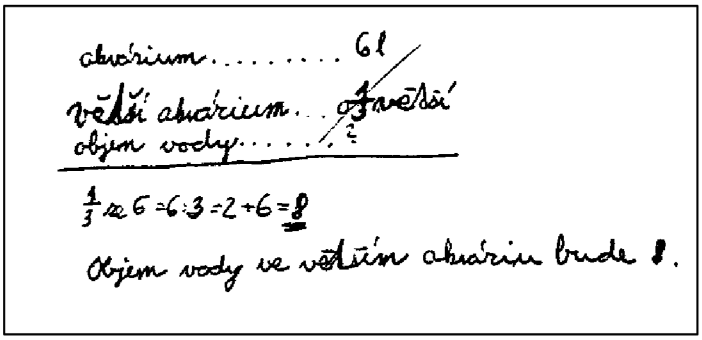
Grafický zápis (tyčový či kruhový) použili a správně vyřešili celkem 6 žáků, což je zatím nejvíce úspěšně vyřešených grafických zápisů ze všech získaných řešení.

Následující řešení byla ohodnocena jedním nebo dvěma body. U dvoubodového hodnocení žáci nezvládli vypočítat správný výsledek, nebo neudělali zápis, příp. odpověď, ale minimálně nějaká část výpočtů byla správná. Řešení se moc nelišila od žáků, kteří zvládli úlohu vyřešit zcela správně. U jednobodově ohodnocených řešení žáci pracovali se zlomkem, kdy sice neřešili správně úlohu, ale výpočty, které vymysleli byli správné, a proto, že se jednalo o úlohu, se kterou žáci zatím neměli zkušenost, hodnotila jsem způsoby řešení.



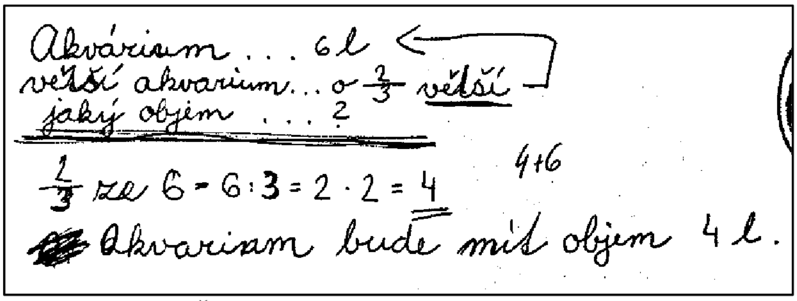
Obr. 54 – Žákovské řešení třetí úlohy z pracovního listu

Řešení nemá zápis ani odpověď, ale výpočet úlohy je správný, proto toto řešení získalo dva body ze tří. Dala jsem tomuto řešení dva body, protože to byla složitá úloha pro žáky pátých tříd a žák porozuměl zadání a úlohu správně vypočítal, odebrala jsem body za chybějící údaje a za zápis výpočtů, u kterých můžeme opět vidět opakující se rovná se, která jsou použita nesprávně.



Obr. 55 – Žákovské řešení třetí úlohy z pracovního listu

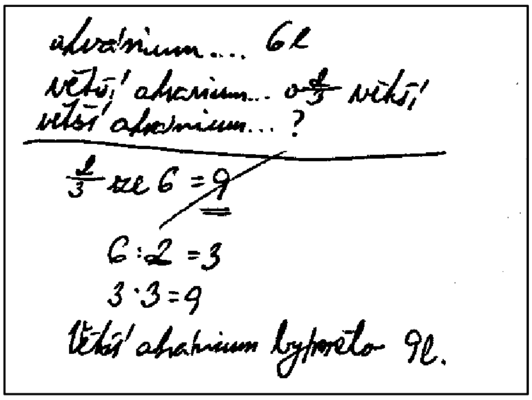
Žákovské řešení obsahuje zápis s chybnou informací, kdy si žák zapsal místo dvou pouze jednu třetinu. S takovým údajem je úloha vypočítána správně, ale není to správný výsledek úlohy, proto jsem ji ohodnotila jedním bodem. V matematizační části žák správně zapsal příklady, aby vypočítal část z celku a došlo také k porozumění úloze, protože k výsledku přičetl původní celek. Stejně jako v předchozím řešení se i zde opakují nesprávně zapsaná rovnítka, je překvapující, jak velká část třídy tuto chybu dělá i přes upozorňování od vyučující.



Obr. 56 – Žákovské řešení třetí úlohy z pracovního listu

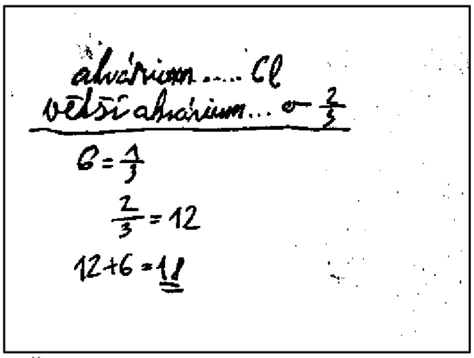
V tomto řešení nechybí žákovi zápis ani odpověď, a dokonce zvládl vypočítat správně danou část z celku. Neproběhlo sice celé porozumění úloze a část, která měla být poté ještě přičtena k celku, zůstala jako konečný výsledek. Většina úlohy je správně, proto jsem úlohu hodnotila dvěma body.

V zápise je použita šipka k určení, k jakému údaji se daný údaj vztahuje. Žák si ke druhému údaji správně zapsal „o $\frac{2}{3}$ větší“, ale poté už tuto informaci při výpočtech vynechal a vypočítal pouze danou část. Opět je i v tomto řešení použito opakované rovnítko u příkladů, které se nerovnají.



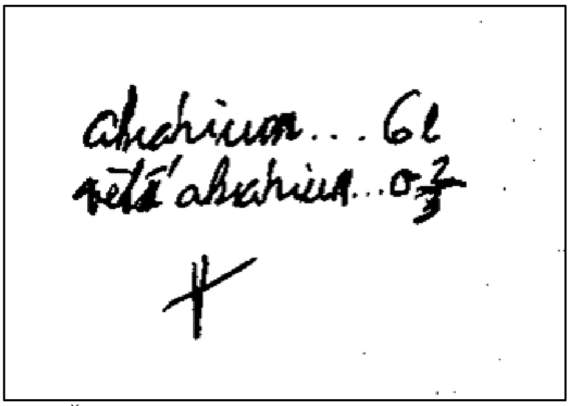
Obr. 57 – Žákovské řešení třetí úlohy z pracovního listu

V řešení je udělán správně zápis, ale v matematizaci byl použit opačný způsob výpočtu. Takovýto způsob řešení použili celkem 4 žáci. Žák nejprve rozdělil údaj „6 litrů“ na dvě části, které udává čitatel a poté je vynásobil jmenovatelem, aby dostal celek. Tímto způsobem se vypočítává celek známe-li jeho část, kdy by údaj „6 litrů“ představoval část, a to přesně dvě třetiny, ale v této úloze se mělo počítat část z celku, kde údaj „6 litrů“ představuje celek a dvě třetiny se z něj mají vypočítat. Žáci i přes neúspěšné vyřešení získali jeden bod, protože zatím nepracovali se zlomky s větším čitatelem, ale ocenila jsem práci se zlomkem i přes to, že si nepropojili, co tento zlomek představuje.



Obr. 58 – Žákovské řešení třetí úlohy z pracovního listu

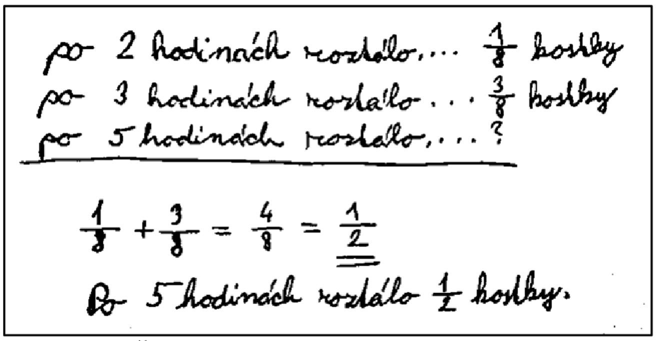
Úloha je řešena chybně pomocí určení části, kdy částí zde žák určil daných 6 litrů, které při správném řešení představují celek. Tuto část označil zlomkem jedna třetina, protože se mělo zvětšovat o dvě třetiny. Žák tedy určil, že 6 je zbylá třetina, která chybí do celku a spočítal, že 2 třetiny jsou tedy dvakrát tolik, tj. 12 a poté tyto části spolu sečetl, aby vyšel celek. Úlohu jsem opět hodnotila jedním bodem, i když řešení není správné. Hodnotila jsem však úvahu nad vyjádřením představy o zlomku. Takovouto úvahu měli celkem 2 žáci ze všech získaných prací.



Obr. 59 – Žákovské řešení třetí úlohy z pracovního listu

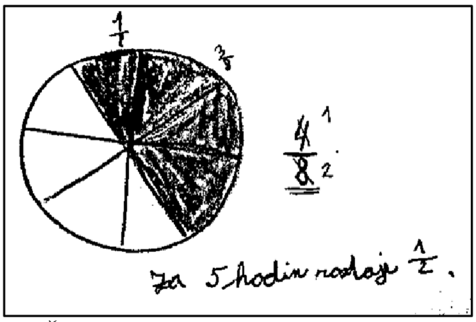
Zbylá řešení jsem hodnotila nula body, protože se žáci nepokusili o žádný výpočet a udělali maximálně zápis. Takových žáků bylo celkem pět.

Čtvrtá slovní úloha (viz Obr. 34) byla pouze náhradní a žáci ji nebyli povinni řešit. Mohli si však jejím vyřešením přidat až 3 body, které mohli na předchozích úlohách ztratit. Jedná se o úlohu na sčítání zlomků, oproti předchozím, které byly na výpočet části z celku. Žáci měli za úkol poznat, jak úlohu vyřešit. V úloze se nachází údaje navíc, tyto údaje jsou v hodinách, žákům ale stačí pro vyřešení úlohy pouze údaje se zlomky se stejnými jmenovateli, které musí sečíst. Za zcela správné vyřešení úlohy i se zkrácením zlomku na základní tvar získávali žáci 3 body. Pokud zapomněli zkrátit zlomek na základní tvar, hodnotila jsem úlohy jedním bodem a chybně vyřešené úlohy nula body.



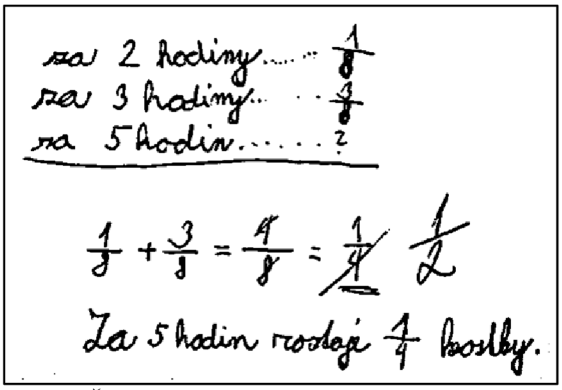
Obr. 60 – Žákovské řešení čtvrté úlohy z pracovního listu

Zvolila jsem jako první toto řešení, protože je zcela správné a žák získal celé 3 body. Takto vyřešenou úlohu, s použitím slovního zápisu, měli celkem 3 žáci z celkových 26. Žáci si správně vypsali všechny potřebné údaje a poté zlomky se stejným jmenovatelem sčítali. Správně vypočítali součet zlomků, kdy udělali společného jmenovatele, tj. 8 a poté sečetli čitatele, kteří zůstali nezměněni, tj. 1 + 3 = 4. Součet obou zlomků $\frac{4}{8}$ nezapomněli tito žáci zkrátit a úlohu doplnili i o odpověď, tudíž jsem tato řešení hodnotila třemi body.



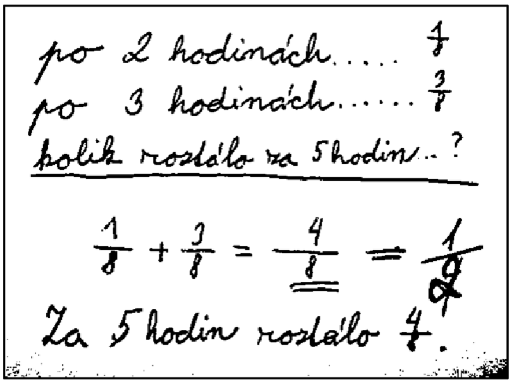
Obr. 61 – Žákovské řešení čtvrté úlohy z pracovního listu

Druhými řešeními, které byly také správné, byly řešení s grafickými modely místo slovního zápisu. Žák si do kruhového modelu znázornil barevně osminu, která představovala první zlomek a poté další tři osminy, které představovaly druhý zlomek. Dále žák spočítal, kolik částí má vybarvených z celku a výsledek zapsal zlomkem, který následně rovnou zkrátil. Nezapomněl napsat odpověď, a tak i přes jednoduchý zápis výpočtů, získal žák za toto řešení 3 body. Takto zcela správně vyřešenou úlohu, i se zkráceným zlomkem, měli pouze 2 žáci.



Obr. 62 – Žákovské řešení čtvrté úlohy z pracovního listu

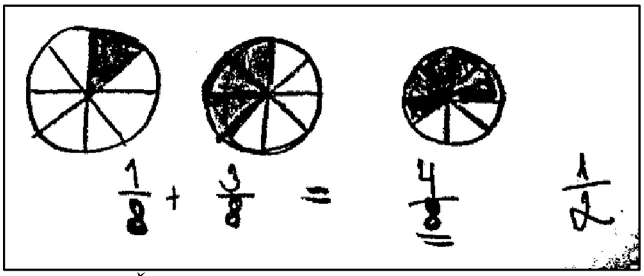
Dalším řešením, které žáci vymysleli, je zcela podobné prvnímu řešení s rozdílem, že u tohoto řešení žák špatně zkrátil součet zlomků. Žák si správně zvolil společného dělitele 4 a vydělil jím čitatele, tj. 4 : 4 = 1. Poté nesprávně vydělil jmenovatele, který je vydělen pouze dvěma, tj. 8 : 2 = 4, tudíž má sice správně vypočítaný součet zlomků, ale nesprávně zkrátil zlomek na základní tvar. Z tohoto důvodu získalo řešení pouze jeden bod. Úloha je mnou opravena a konečný základní tvar je mnou dopsán. Takto zkrácený zlomek se však objevil pouze u tohoto žáka, ostatní krácení zlomků, pokud ho prováděli, udělali správně.



Obr. 63 – Žákovské řešení čtvrté úlohy z pracovního listu

V řešení žák opět použil slovní zápis, kam uvedl potřebné údaje a v matematizaci správně zapsal příklad na sčítání zlomků. Úloha je řešena stejně jako první řešení, ale v tomto řešení chybí poslední krok, a to zkrácení zlomku na základní tvar. Úlohu jsem opravovala a poslední základní tvar je tam poté dopsán. Takto vyřešenou úlohu bez zkrácení zlomku na základní tvar mělo celkem 6 žáků a získali tak pouze jeden bod.

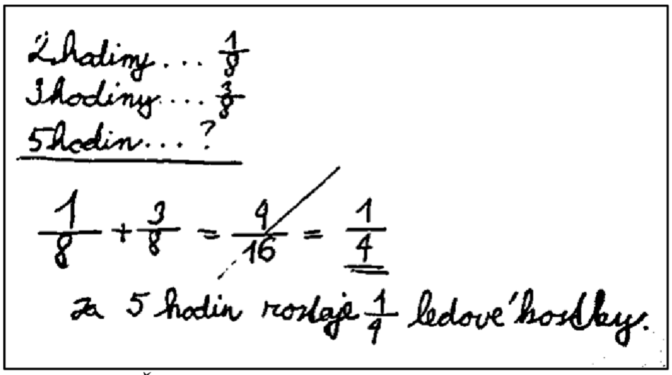
Hodnotila jsem tato řešení jedním bodem, protože se jednalo o náhradní otázku, a to, že si žáci uvědomí, že musí výsledky zkracovat do základního tvaru je důležité pro další navazující učivo.



Obr. 64 – Žákovské řešení čtvrté úlohy z pracovního listu

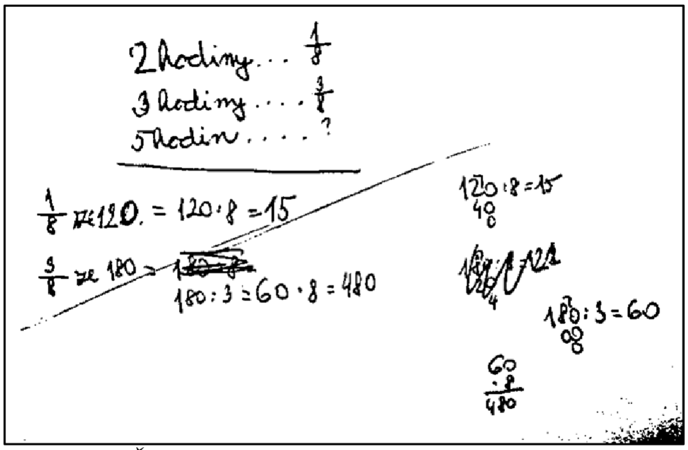
V následujícím řešení byl opět použit grafický zápis pomocí kruhových modelů. Tato úloha je oproti předchozímu řešení s grafickým zápisem řešena pomocí několika kruhových modelů „koláčů“, které žák správně rozdělil na osminy, jak udávají jmenovatele obou zlomků. Poté v každém „koláči“ vyznačil určenou část zlomku, tj. 1 část určenou zlomkem $\frac{1}{8}$ a 3 části určené zlomkem $\frac{3}{8}$. Obě tyto části poté společně vyznačil ve třetím „koláči“, kde měl vyznačit celkem 4 části, ale vyznačil jich 5. Poté však napsal ke každému modelu daný zlomek a vytvořil příklad, jehož výsledek je správně. Žák se tedy při výpočtu neřídil modelem, kde si vyznačil 5 částí, protože by jinak jeho výsledek byl $\frac{5}{8}$. I přes nesprávné zakreslení částí do modelu, jsem hodnotila úlohu jako správně vyřešenou, jen bez zkráceného zlomku do základního tvaru a chybějící odpovědi. Toto řešení tedy získalo jeden bod a konečný zkrácený zlomek byl mnou poté dopsán. Řešení pomocí grafického zápisu se získáním jednoho bodu měli z celkových 26 získaných řešení dohromady 4 žáci.

Zbylá dvě řešení nezískaly žádný bod, jelikož jejich výsledek nebyl správný, i přes správný zápis příkladu se zlomky. Žádný bod nezískalo celkem 10 žáků z 26. Mezi řešeními ohodnocené nula body se nenacházelo žádné řešení s grafickým zápisem, pouze řešení se slovními zápisy. Z těchto 10 žáků, kteří nezískali žádný bod v této úloze, byli 4 žáci, kteří úlohu neřešili vůbec.



Obr. 65 – Žákovské řešení čtvrté úlohy z pracovního listu

Předposlední řešení poslední čtvrté úlohy z pracovního listu je řešeno pomocí slovního zápisu a celkově se podobá prvnímu řešení této úlohy. V tomto řešení však žák špatně vypočetl součet zlomků. Místo vytvoření společného jmenovatele, který je v tomto případě u obou zlomků stejný, jmenovatele sečetl. V případě, že by tedy místo 8 nalezl jiného společného jmenovatele, tj. 16, měl by výsledek správně pouze v případě, rozšířil by také čitatele daných zlomků, a to právě dvakrát, stejně jako u jmenovatele. Žák však čitatele nezvětšil a pouze je sečetl. Udělal tedy součet jmenovatelů i nerozšířených čitatelů a výsledný součet vyšel nesprávně. I přes to, že žák poté vypočítaný výsledek správně zkrátil, jeho výpočet správný nebyl a nezískal tedy žádný bod. Takovéto řešení, kdy se sečetli jmenovatelé místo vytvoření společného jmenovatele, měli celkem 2 žáci.



Obr. 66 – Žákovské řešení čtvrté úlohy z pracovního listu

Posledním řešením všech vytvořených úloh je řešení z obrázku 66. Toto řešení bylo neúspěšné a nezískalo žádný bod. Žák místo sčítání zlomků použil stejně jako v předchozích úlohách výpočet části z celku. Ve druhém výpočtu žákovi vyšel výsledek při výpočtu části z celku se zbytkem a zkusil tedy zlomek obrátit a pracovat s ním, jako při výpočtu celku, známe-li jeho část. Úloze chybí i odpověď. Takovýto způsob řešení použili 2 žáci z celkových 26. Podle mého názoru žáci při této poslední úloze neuvažovali o smyslu úlohy, ale pouze opakovali výpočty z předchozích úloh.

2.3.2. Zhodnocení analýzy slovních úloh

Pro tuto práci jsem získala tři slovní úlohy z pololetních písemných prací, ve kterých se vyskytoval výpočet části z celku a v poslední úloze se vypočítával celek za pomoci údaje *o n-více*. Dále jsem vytvořila pracovní list se čtyřmi slovními úlohami, kde tři úlohy se týkaly výpočtu části z celku a poslední úloha byla na operaci sčítání zlomků. Pracovní list jsem rozdala ve dvou pátých třídách, ze kterých jsem získala předchozí data. Získala jsem tedy další řešení pro svou analýzu.

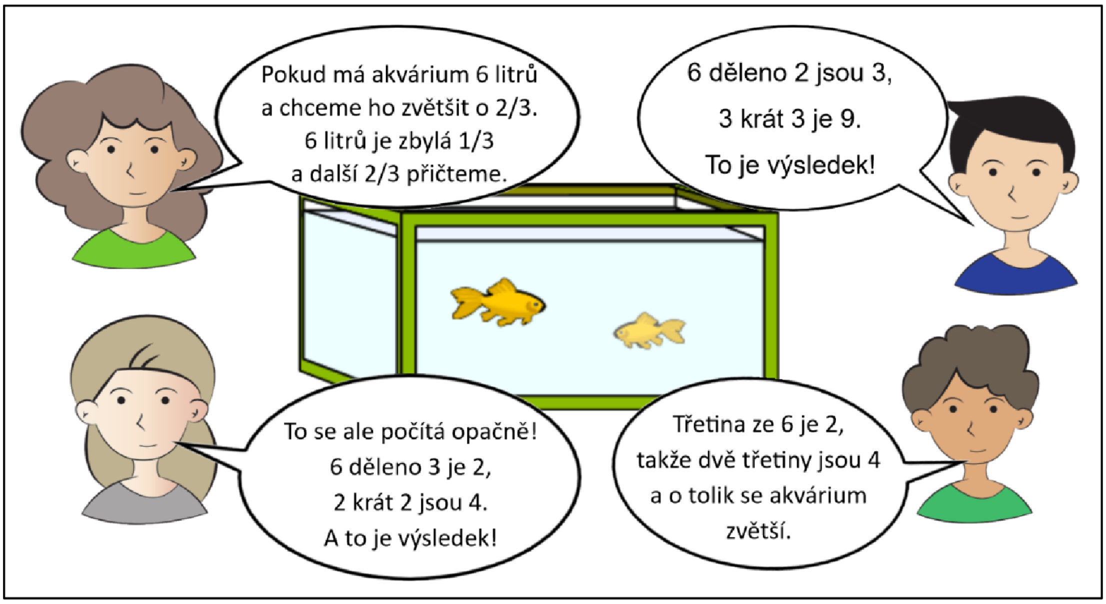
Celkový počet získaných řešení z pololetních prací je 52, z nichž pouze 20 žákovských řešení je zcela správně a získaly plný počet bodů. Nejvíce chybných řešení je v první slovní úloze (viz Obr. 3Obr. 3) ze třídy 5.A. Zcela správně vyřešilo úlohu pouze 6 žáků z 21 žáků. Zbylá řešení obsahují chybu.

Nejčastější chybou v řešení této slovní úlohy (viz Obr. 3) je neporozumění zadání úlohy, ať už částečné nebo úplné. Pokud bych však měla tuto slovní úlohu, která získala nejméně správných řešení, porovnat s druhou slovní úlohou (viz Obr. 15), kde je téměř polovina získaných řešení správná, musela by se porovnávat také obtížnost daných úloh. V porovnání s druhou slovní úlohou (viz Obr. 15) obsahuje první slovní úloha více údajů a potřebných výpočtů a je mnohem složitější na porozumění.

Dále jsem získala celkem 26 vyřešených pracovních listů, z nichž první úlohu vyřešilo správně 12 žáků, druhou úlohu 9 žáků, třetí úlohu 12 žáků a poslední úlohu vyřešilo zcela správně pouze 5 žáků. Za chybu se u poslední úlohy považovalo nezkrácení zlomku do základního tvaru, jinak by měla úloha nejlepší výsledky ze všech čtyř. Celkem je 38 zcela správných řešení z celkových 104 řešení. Nejčastější chybou v úlohách z pracovního listu je chybějící odpověď a stejně, jako u slovních úloh z písemných prací, neporozumění zadání.

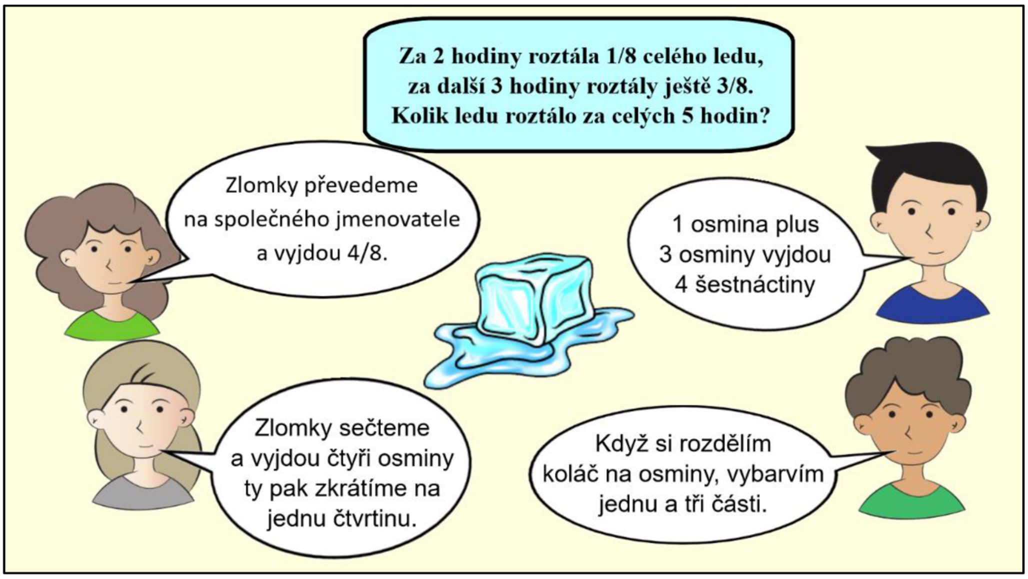
2.4. Vytvořené úlohy Concept Cartoons

Pro vytvoření obou úloh Concept Cartoons jsem využila obrázky z aplikace SMART Notebook. Každá úloha je v této aplikaci vytvořena a každý z těchto Concept Cartoons je naprogramován tak, aby se zobrazovaly jednotlivé bubliny postupně po kliknutí na postavu.



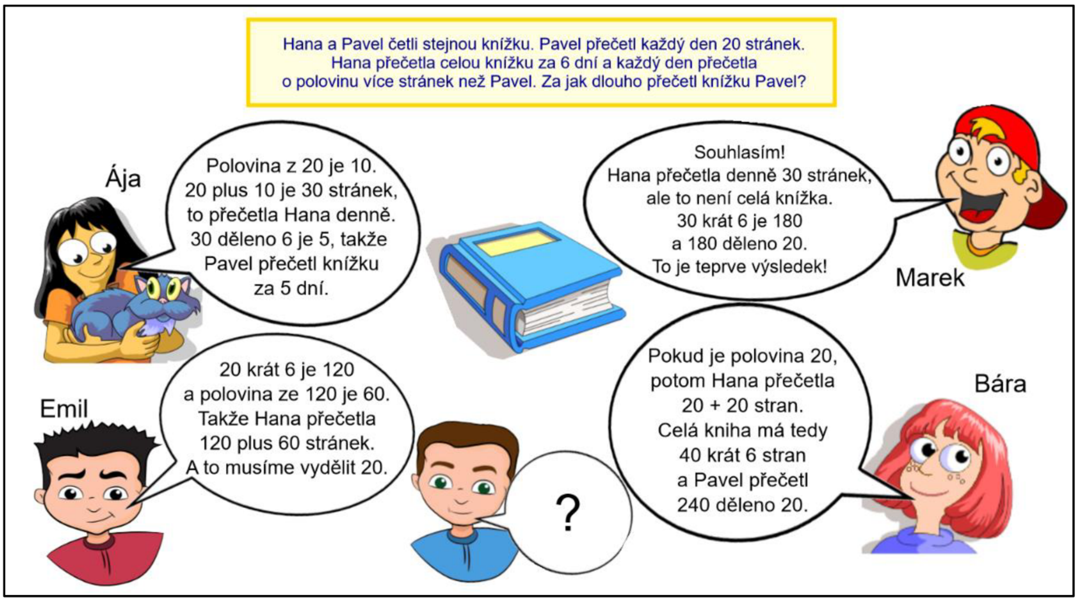
Obr. 67 – Concept Cartoons – úloha s „akváriem" z pracovního listu

První Concept Cartoons je vytvořen podle žákovských řešení u úlohy s „akváriem" (viz Obr. 33). Pro vytvoření tohoto Concept Cartoons byla využita čtyři různá řešení, která žáci vymysleli při řešení této úlohy. Obrázek obsahuje čtyři postavy, které danou úlohu řeší pomocí diskuse a obrázek na pozadí, který doplňuje zadání v první bublině. Poslední dvě bubliny obsahují správné výpočty, ale ve třetí bublině chybí dopočítání výsledku, zbylé dvě bubliny jsou chybné.



Obr. 68 – Concept Cartoons – úloha s „ledem“ z pracovního listu

Druhý Concept Cartoons byl vytvořen na základě získaných řešení ze čtvrté úlohy z pracovního listu (viz Obr. 34). V pozadí je opět tematicky dosazen obrázek k řešené úloze a také zadání úlohy. Slovní úloha je na sčítání zlomků. Správně řešenou úlohu mají celkem tři bubliny ze čtyř, ale pouze jedna má zlomek zkrácený do základního tvaru. Tři správná řešení jsou v této úloze proto, že ji vyřešila správně většina žáků, pokud bych nepočítala zkrácení zlomku do základního tvaru, každá bublina však obsahuje jiný postup, protože bylo více způsobů řešení.



Obr. 69 – Concept Cartoons – úloha s „knihou" z pololetní práce malotřídní školy

Třetím vytvořeným Concept Cartoons je úloha z písemné pololetní práce malotřídní školy (viz Obr. 23). Úloha je opět na výpočet části z celku, ale jedná se o složenou slovní úlohu, která k úplnému vyřešení potřebuje více výpočtů. Na obrázku je tentokrát pět postav, ale pouze čtyři z nich uvádí v bublinách své nápady, jak by úlohu řešily. Pátá bublina s otazníkem ukazuje na to, že se dá úloha řešit ještě jiným způsobem, který jsem uvedla u popisu dané úlohy (viz Obr. 23). Konečný výsledek je 9 a to v tomto Concept Cartoons správně vyřešily dvě úlohy. V bublinách u této úlohy je více textu oproti zbylým třem, protože se jedná o složenou slovní úlohu a chtěla jsem, aby v případě využití této úlohy v praxi byl postup řešení jasný.

Obr. 70 – Concept Cartoons – vlastní vytvořená úloha (údaje jsou převzaty z internetové stránky dostupné z

(https://www.pleva.cz/a/jak-vcely-vyrabeji-med-kde-vznika)

Poslední úlohu Concept Cartoons jsem vytvořila navíc, kvůli jejímu využití v hodině matematiky. Tento Concept Cartoons zároveň propojuje i oblast Člověk a jeho svět, protože se týká života včel, tudíž se hodí i do hodin přírodovědy nebo přírodopisu pro 5.-7. ročník. Do pozadí jsem dala obrázky včel a úlu týkající se úlohy. V tomto Concept Cartoons je celkem pět dětí, z nichž v první bublině se nachází sdělení, které obsahuje údaje k řešení úlohy a zbylé čtyři děti popisují své nápady, jak by úlohu řešili.

Děti musí přijít na to, kolik musí včely nasbírat nektaru celkem, aby získaly po jeho vysušení potřebných 72 kg medu. Úloha mi přijde složitější na porozumění, proto bych ji zařadila až na 2. stupeň ZŠ. Jedná se o matematickou úlohu s výpočtem celku, známe-li jeho část. Správné řešení je pouze v jedné bublině, a to ve třetí „Emil“.

Závěr

Smyslem této diplomové práce bylo vytvoření analýzy žákovských řešení získaných ze tří pátých tříd základních škol. K analýze bylo vybráno z každé slovní úlohy několik zajímavých druhů řešení od správných až po chybné. Dalším cílem bylo také všechna získaná žákovská řešení analyzovat a na základě získaných dat zjistit, jaké chyby dělají žáci nejčastěji při řešení slovních úloh se zlomky a vypracovat podle těchto řešení několik Concept Cartoons, které by mohly být dále využívány v praxi.

V teoretické části byly zmíněny zlomky, jak se s nimi pracuje a základní pojmy, které se na prvním stupni využívají. Další kapitolou byly slovní úlohy a jak se řeší a poslední kapitolou Concept Cartoons, kde jsem tuto metodu popsala a završila tím teoretickou část.

V praktické části jsem prováděla kvalitativní analýzu žákovských řešení matematických slovních úloh se zlomky ze získaných písemných prací. V první části jsem vytvořila tabulku pro lepší přehlednost získaných známek za pololetní práci a bodů z dané úlohy. Tabulku jsem poté využívala pro zorientování se v získaných řešení a pro jejich srovnávání od správných po ty chybné. Ve druhé části jsem již prováděla analýzu těchto řešení. Jednalo se celkem o tři slovní úlohy, ve kterých se vyskytoval výpočet části z celku a v poslední úloze se vypočítával celek za pomoci údaje *o n-více*. Dále jsem také vytvořila pracovní list se čtyřmi slovními úlohami, tři se týkaly opět výpočtu části z celku a poslední úloha byla na operaci sčítání zlomků. Pracovní list jsem rozdala ve dvou pátých třídách, ze kterých jsem získala předchozí data. Získala jsem tedy další řešení pro svou analýzu.

Celkový počet získaných řešení z pololetních prací bylo 52, z nichž pouze 20 žákovských řešení bylo zcela správně a získaly plný počet bodů. Nejvíce chybných řešení bylo v první slovní úloze (viz Obr. 3) ze třídy 5.A. Zcela správně vyřešilo úlohu pouze šest žáků z 21 a zbylá řešení obsahují nějakou chybu. Nejčastější chybou v řešení této slovní úlohy (viz Obr. 3) bylo neporozumění zadání úlohy, ať už částečné nebo úplné. V porovnání s druhou slovní úlohou (viz Obr. 15) ale obsahovala první slovní úloha více údajů a potřebných výpočtů a byla mnohem složitější na porozumění. Dále jsem získala celkem 26 vyřešených pracovních listů, z nichž první úlohu vyřešilo správně 12 žáků, druhou úlohu 9 žáků, třetí úlohu 12 žáků a poslední úlohu vyřešilo zcela správně pouze 5 žáků. Celkem bylo 38 správných řešení z celkových 104. Nejčastější chybou v úlohách z pracovního listu byla chybějící odpověď a stejně, jako u slovních úloh z písemných prací, neporozumění zadání.

Podle dat z vytvořené analýzy bych učitelům navrhla lépe pracovat se zadáním slovní úlohy, protože nejčastěji žáci chybovali právě v neporozumění zadání. Nápomocné mohou být například otázky typu „Co jsme právě vypočítali?“, „Jak velká je zbývající část?“

Na základě získaných dat jsem v poslední části této práce vytvořila několik úloh Concept Cartoons. Tři tyto úlohy jsou vytvořeny na podkladě získaných žákovských řešení, která jsou v bublinách obsažena a čtvrtá je úloha vytvořena navíc jako pomůcka do hodiny matematiky nebo přírodovědy. V metodě Concept Cartoons vidím budoucnost, protože by to žáky mohlo naučit, jak lépe pracovat s údaji, aniž by se báli, že sami udělají nějakou chybu, což by pak mohlo vést k lepším výsledkům při řešení slovních úloh. Mé doporučení je, že metoda Concept Cartoons by se měla více využívat ve výuce na 1. stupni ZŠ. Metoda Concept Cartoons dovede lépe rozvíjet matematickou představivost žáků a zlepšit logické uvažování, které dovede žáky ke správnému výsledku.

Tato diplomová práce může přispět k většímu zájmu o metodu Concept Cs na základních školách. Je určena jak pro pedagogy, tak pro žáky, pro které může sloužit jako zdroj informací.

Seznam použité literatury

1) Blažková, R. et al. (1997) Metodický návod k Matematice pro 4. ročník základních a obecných škol. 3. díl. Všeň: Alter.
2) Blažková, R. et al. (2002) Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty). Brno: Masarykova univerzita. ISBN 80-210-3022-4.
3) Coufalová, J. (1998) Matematika s didaktikou pro 2. ročník učitelství 1. stupně ZŠ. 2. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita. ISBN 80-7082-439-5.
4) Coufalová, J. (2016) Matematika s didaktikou pro 2. ročník učitelství 1. stupně ZŠ. 5. vydání. Plzeň: Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni. ISBN 978-80-261-0650-0.
5) Čižmár, J. (1989) Matematika pro 6. ročník základní školy. 3.vyd. Praha: SPN. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-04-26298-8.
6) Dabell, J. et al. (2008). Concept Cartoons in mathematics education. Sandbach: Millgate House.
7) Demirtas, Z. et al. (2012) Concept Cartoons in science education: availability and students opinions about the cartoons. In: Energy Education Science and Technology Part B: Social and Educational Studies [online], vol. 4, s. 861-865 [cit. 2023-04-10]. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/292411284_Concept_Cartoons_in_Science_Education_Availability_and_Students'_Opinions_about_the_Cartoons.
8) Dweck, C. (2000). Self theories: their role in motivation, personality and development. London: Taylor & Francis.
9) Hejný, M. & Stehlíková, N. (1999) Zkoumání číselných představ dítěte a žáka In: Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. roč. 44, 1999, č.: 2, s. 148-167 Praha: Jednota českých matematiků a fyziků. ISSN 0032-2423.
10) Hejný, M. et al. (2004) Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta. ISBN 80-7290-189-3
11) Herman, J. (1994) Matematika: racionální čísla : procenta : učebnice pro nižší třídy víceletých gymnázií. Praha: Prometheus. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-85849-49-6.

12) Hošpesová, A. (2001). Svět čísel a tvarů: metodická příručka k výuce matematiky v 5. ročníku základní školy. 1. vyd. Praha: Prometheus. 96 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-211-2.
13) Justová, J. (1997) Matematika pro 5. ročník základních škol. Všeň: Alter, 1997. ISBN 80-85775-63-8.
14) Kabapinar, F. (2005). Effectiveness of teaching via concept cartoons from the point of view of constructivist approach. EducationalScience: Theory & Practice, 5(1), 135–146.
15) Kaslová, M. (2010) Předmatematické činnosti v předškolním vzdělávání. Praha: Raabe. ISBN 978-80-86307-96-1.
16) Keogh, B. & Naylor, S. (1993). Learning in science: another way in. Primary Science Review, 26, 22-23.
17) Keogh, B. et al. (1998). Concept cartoons: a new perspective on physics education. Physics Education, 33 (4), 219-224.
18) Keogh, B., & Naylor, S. (1999). Concept cartoons, teaching and learning in science: an evaluation. International Journal of Science Education, 21(4), 431–446. doi:10.1080/095006999290642
19) Kindl, K. (1980) Matematika: přehled učiva základní školy. Vyd. 3. Praha: Státní pedagogické nakladatelství. 406 s. Kostka.
20) Kotyra, D. & Sivošová, A. (2004) Úlohy se zlomky: příručka pro žáky základních škol a nižších tříd gymnázií. Havlíčkův Brod: Fragment. Já na to mám--, --já se to naučím. ISBN 80-7200-905-2.
21) KUŘINA, F. (2011) Matematika a řešení úloh. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7394-307-3.
22) Naylor, S. et al. (2000). Researching formative assessment: concept cartoons as an auditing strategy. In R. Duit (Ed.). Research in Science Education: Past, Present and Futurep137-142.
23) NOVOTNÝ, M., NOVÁK, F. (2021) Matýskova matematika: pro 4. ročník. Třetí vydání. Brno: Nová škola, 2021-. ISBN 978-80-7600-238-8.
24) ODVÁRKO, O. & KADLEČEK, J. (1998) Matematika pro 7. ročník základní školy 1. Praha: Prometheus.

25) Rendl, M., VONDROVÁ, N. (2013) Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta. ISBN 978-80-7290-723-6
26) Reusser, K. (1985). From situation to equation. On formulation, understanding and solving situation problems. Technical report no. 143. Institute of Cognitive Science, University of Colorado. In: Vondrová, N. et al. (2022) Zadání slovních úloh jako podklad pro rozvoj čtení s porozuměním a dovednosti slovní úlohy řešit. Pedagogika, roč. 72, č. 1, 2022, s. 3–24
27) Samková, L. (2016). Didaktické znalosti obsahu budoucích učitelů 1. stupně základní školy před studiem didaktiky matematiky. Scientia in Educatione, 7(2), 71-99. https://doi.org/10.14712/18047106.254
28) Samková, L. (2020). Metoda Concept Cartoons. V Českých Budějovicích: Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta. Pedagogica et psychologica. ISBN 978-80-7394-798-9.
29) Slouka, R. (1994) Matematika: pro žáky 5.-9. tříd ZŠ, studenty víceletých gymnázií a třídy s rozšířenou výukou matematiky. Olomouc. ISBN 80-85572-78-8.
30) Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children? Journal of Educational Psychology, 85, 7-23.
31) Sternberg, R.J. (2003). Teaching for Successful Intelligence: Principles, Procedures, and Practices Journal for the Education of the Gifted. Vol. 27, No. 2/3, 2003, pp. 207–228. In: Vondrová, N. (2019) Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum. ISBN 978-80-2464-516-2.
32) Stephenson, P., Warwick, P. (2002) Using concept cartoons to support progression in students understanding of light. In: Physics Education, vol. 37, no. 2, 2002, s. 135-141. ISSN 0031-9120
33) Šarounová, A. et al. (1997) Matematika 7: [učebnice pro základní školy zpracovaná ve spolupráci s JČMF]. Praha: Prometheus, 1997. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-085-3.

34) Šedivý et al. (1991) Matematika pro 8. ročník základní školy. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1991. 215 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-04-25091-2.
35) Vondrová, N. (2019) Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum. ISBN 978-80-2464-516-2
36) Vondrová, N. et al. (2020) Slovní úlohy ve výuce matematiky a českého jazyka: Metodický materiál pro učitele. Praha: Pedago-gická fakulta Univerzity Karlovy.
37) Vyšín, J. (1962) Metodika řešení matematických úloh. Praha: SPN. Na pomoc učiteli.

Seznam obrázků

Seznam příloh

Příloha 1 – Informovaný souhlas pro ředitele škol

Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Vážená paní ředitelko, vážený pane řediteli,

jsem studentkou 4. ročníku studijního programu Učitelství pro 1. stupeň ZŠ na Jihočeské univerzitě v Českých Budějovicích. Píšu Vám s prosbou o spolupráci ohledně mé diplomové práce, která se zabývá analýzou žákovských řešení matematických úloh. Pro získání potřebných materiálů bych na základě Vašeho souhlasu, a souhlasu učitelů, nahlédla do písemných prací z matematiky žáků pátých tříd. V těchto pracích budu vyhledávat a zaznamenávat si řešení slovních úloh se zlomky, které použiji v praktické části své diplomové práce. Veškerá získaná data budou anonymní. Tato analýza bude následně využita nejen v praktické části diplomové práce, ale i k tvorbě matematických úloh Concept Cartoons.

Hana Valková

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

3. dubna 2022

Prohlášení:

Prohlašuji, že souhlasím s účastí na výše uvedeném výzkumu. Student mne informoval o podstatě výzkumu a seznámil mne s postupy, které budou při výzkumu používány, stejně jako se skutečnostmi, které pro mne z účasti na výzkumu vyplývají, včetně případných výhod a rizik. Souhlasím s tím, že všechny získané údaje budou anonymně zpracovány a použity pro účely vypracování závěrečné práce studenta.

Měl jsem možnost vše řádně, v klidu a v dostatečně poskytnutém čase zvážit. Měl jsem možnost se zeptat na vše pro mne podstatné a potřebné. Na tyto dotazy jsem dostal jasnou a srozumitelnou odpověď.

Prohlašuji, že beru na vědomí informace obsažené v tomto informovaném souhlasu a souhlasím se zpracováním svých údajů v rozsahu, způsobem a za účelem uvedeným v tomto informovaném souhlasu.

Jméno a příjmení:

Datum: Podpis: