# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STAVEBNÍ
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

## ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS


# STATICKÁ ANALÝZA ŽELEZNIČNÍHO MOSTU
STATIC ANALYSIS OF RAILWAY BRIDGE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS


AUTOR PRÁCE — Vojtěch Bureš
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — Ing. ZBYNĚK VLK, Ph.D.
SUPERVISOR


BRNO 2022

# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
# FAKULTA STAVEBNÍ

| | |
|---|---|
| **Studijní program** | B3607 Stavební inženýrství |
| **Typ studijního programu** | Bakalářský studijní program s prezenční formou studia |
| **Studijní obor** | 3647R013 Konstrukce a dopravní stavby |
| **Pracoviště** | Ústav stavební mechaniky |

# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

| | |
|---|---|
| **Student** | Vojtěch Bureš |
| **Název** | Statická analýza železničního mostu |
| **Vedoucí práce** | Ing. Zbyněk Vlk, Ph.D. |
| **Datum zadání** | 30. 11. 2021 |
| **Datum odevzdání** | 27. 5. 2022 |

V Brně dne 30. 11. 2021

| | |
|---|---|
| prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc. | prof. Ing. Miroslav Bajer, CSc. |
| Vedoucí ústavu | Děkan Fakulty stavební VUT |

## PODKLADY A LITERATURA

Normy :

ČSN EN 1991-1 Zatížení konstrukcí

ČSN EN 1991-2 Zatížení mostů dopravou.

Bittnar Z., Šejnoha J. - Numerické metody mechaniky 1,2

Kadlčák J., Kytýr J. : Statika stavebních konstrukcí I a II

## ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ

Cílem práce je statická analýza železničního mostu. Pro konkrétní konstrukci mostního objektu budou vytvořeny různé modely s různým zjednodušením. Jednoduché modely budou analyzovány pomocí ručních výpočtů, ostatní pomocí vybraného software. Získané výsledky budou vzájemně porovnány.

## STRUKTURA BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část závěrečné práce zpracovaná podle platné Směrnice VUT "Úprava, odevzdávání a zveřejňování závěrečných prací" a platné Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání a zveřejňování závěrečných prací na FAST VUT" (povinná součást závěrečné práce).

2. Přílohy textové části závěrečné práce zpracované podle platné Směrnice VUT "Úprava, odevzdávání, a zveřejňování závěrečných prací" a platné Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání a zveřejňování závěrečných prací na FAST VUT" (nepovinná součást závěrečné práce v případě, že přílohy nejsou součástí textové části závěrečné práce, ale textovou část doplňují).

Ing. Zbyněk Vlk, Ph.D.
Vedoucí bakalářské práce

## ABSTRAKT

Bakalářská práce se zabývá statickou analýzou železničního mostu. Pomocí softwaru AxisVM X6 jsem vytvořil 4 různé modely a porovnal je nejen mezi sebou, ale také s jednoduchými ručními výpočty. Dva modely jsou prutové, třetí je deskostěnový, čtvrtý je také deskostěnový ale s krajní římsou, která ztužuje celou konstrukci.

Konstrukce jsou zatíženy ručně spočítaným zatížením dle normy.



## KLÍČOVÁ SLOVA

železniční most, program AxisVM X6, prutový model, deskostěnový model, zatížení, napětí



## ABSTRACT

The bachelor thesis deals with the static analysis of a railway bridge. Using AxisVM X6 software, I created 4 different models and compared them not only with each other, but also with simple manual calculations. Two models are beam models, the third is shell model, the fourth is also shell but with an end ledge that reinforces the entire structure.

The structures are loaded by a manually calculated load according to the standard.



## KEYWORDS

railway bridge, software AxisVM X6, beam model, shell model, load, tension

## BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

Vojtěch Bureš *Statická analýza železničního mostu.* Brno, 2022. 51 s., 0 s. příl. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce Ing. Zbyněk Vlk, Ph.D.

# PROHLÁŠENÍ O SHODĚ LISTINNÉ A ELEKTRONICKÉ FORMY ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

Prohlašuji, že elektronická forma odevzdané bakalářské práce s názvem *Statická analýza železničního mostu* je shodná s odevzdanou listinnou formou.

V Brně dne 24. 5. 2022

Vojtěch Bureš
autor práce

# PROHLÁŠENÍ O PŮVODNOSTI ZÁVĚREČNÉ PRÁCE

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci s názvem *Statická analýza železničního mostu* zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 24. 5. 2022

Vojtěch Bureš
autor práce

# PODĚKOVÁNÍ

V první řadě bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Zbyňku Vlkovi, Ph.D. za jeho cenné rady a ochotu podílet se na této práci. Dále mé rodině a mým kolegům za veškerou podporu.

# OBSAH

1 ÚVOD ..... 10
2 KONSTRUKCE ..... 11
2.1 CHARAKTERISTIKA KONSTRUKCE ..... 11
2.2 MODELY KONSTRUKCE ..... 12
2.3 PRŮŘEZY ..... 14
2.3.1 MATERIÁLOVÉ VLASTNOSTI ..... 14
3 ZATÍŽENÍ ..... 16
3.1 ZATÍŽENÍ STÁLÉ ..... 16
3.1.1 VLASTNÍ TÍHA ..... 16
3.1.2 OSTATNÍ STÁLÉ ..... 16
3.2 PROMĚNNÁ ZATÍŽENÍ ..... 16
3.2.1 ZATÍŽENÍ OD DOPRAVY ..... 17
3.2.2 ZATÍŽENÍ VĚTREM ..... 21
3.3 KOMBINACE ZATÍŽENÍ ..... 21
4 PŘÍČINKOVÁ ČÁRA ..... 22
4.1 METODY ŘEŠENÍ PŘÍČINKOVÝCH ČAR ..... 22
4.1.1 KINEMATICKÁ DEFINICE A TVAR PŘÍČINKOVÉ ČÁRY ..... 22
4.1.2 POROVNÁNÍ METOD A MODELU ..... 22
4.2 ROZBOR ÚČINKŮ POHYBLIVÉHO ZATÍŽENÍ ..... 24
4.2.1 WINKLEROVO KRITÉRIUM ..... 24
4.2.2 BŘEMENOVÉ KRITÉRIUM ..... 25
4.2.3 ŠOLÍNOVO KRITÉRIUM ..... 27
5 PRŮHYB OHÝBANÝCH NOSNÍKŮ A POOTOČENÍ PRŮŘEZU ..... 29
5.1 MOHROVA METODA ..... 29
5.2 CLEBSHOVA METODA ..... 32
6 POROVNÁNÍ MODELŮ ..... 39
6.1 NAPĚTÍ ..... 42
7 ZÁVĚR ..... 47

8 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY ..... 48
9 SEZNAM OBRAZOVÝCH PŘÍLOH ..... 49
10 SEZNAM TABULEK ..... 51

# 1 ÚVOD

Cílem této bakalářské práce je zpracování statické analýzy železničního mostu a porovnání několika modelů. Předlohou pro mou bakalářskou práci je most, který je zatím ve stupni projektové dokumentace pro územní rozhodnutí. Železniční most by měl nahradit stávající železobetonovou konstrukci na trati Albrechtice – Český Těšín v Moravskoslezském kraji.

Na trati vedou 3 koleje, most je složen tedy ze 3 nosných konstrukcí. Pro bakalářskou práci jsem vypracoval 1 nosnou konstrukci.

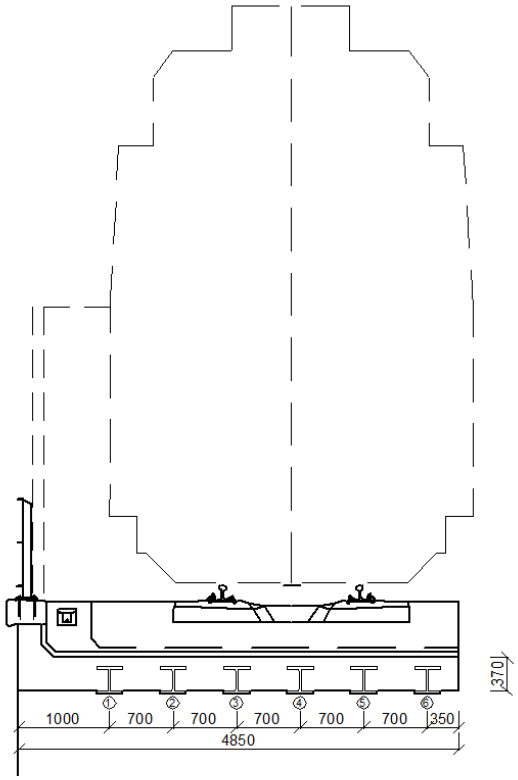
Zatížení je spočítané ručně. Patří sem stálé zatížení a proměnné zatížení od dopravy a větru. Konstrukce byly vymodelovány v programu AxisVM X6.

# 2 KONSTRUKCE

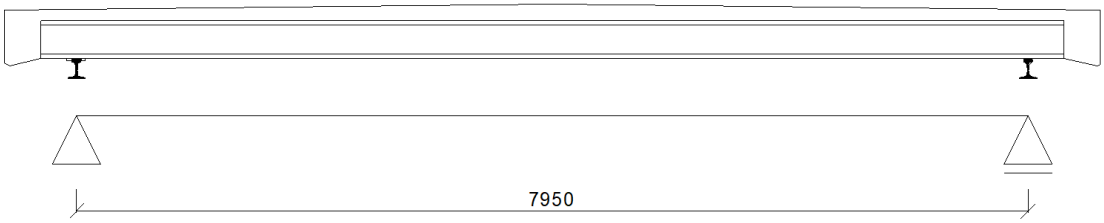
## 2.1 CHARAKTERISTIKA KONSTRUKCE

„Jedná se o most se zabetonovanými ocelovými nosníky, který je jedním z nejpoužívanějších nosných konstrukcí pro malá a střední rozpětí (cca do 25 m). Jeho hlavní výhodou je malá stavební výška, jednoduché konstrukční řešení, jednoduché provádění a krátká doba výstavby. Nevýhodou jsou vyšší ekonomické náklady oproti jiným srovnatelným konstrukcím, jako je například železobetonový nebo předpjatý beton.“ [1]

Mnou počítaný most se nachází v Moravskoslezském kraji, v obci Albrechtice na železniční trati Albrechtice – Český Těšín ev. km 9,640. Most je dlouhý 13,6 m, rozpětí nosné konstrukce činí 7,95 m. Šířka celého mostu je 14 m a skládá se z třech nosných konstrukcí. Počítaná konstrukce má šířku 4,850 m (viz obr. 1). Most se nachází na poddolovaném území, kvůli tomu je zde nevhodné umístit staticky neurčitou konstrukci (jako např. polorám nebo deska uložená na ozub). Zvolil jsem tedy staticky určitý prostý nosník uložený na kolejnici viz obr. 2.




*Obrázek 1. Příčný řez mostu*

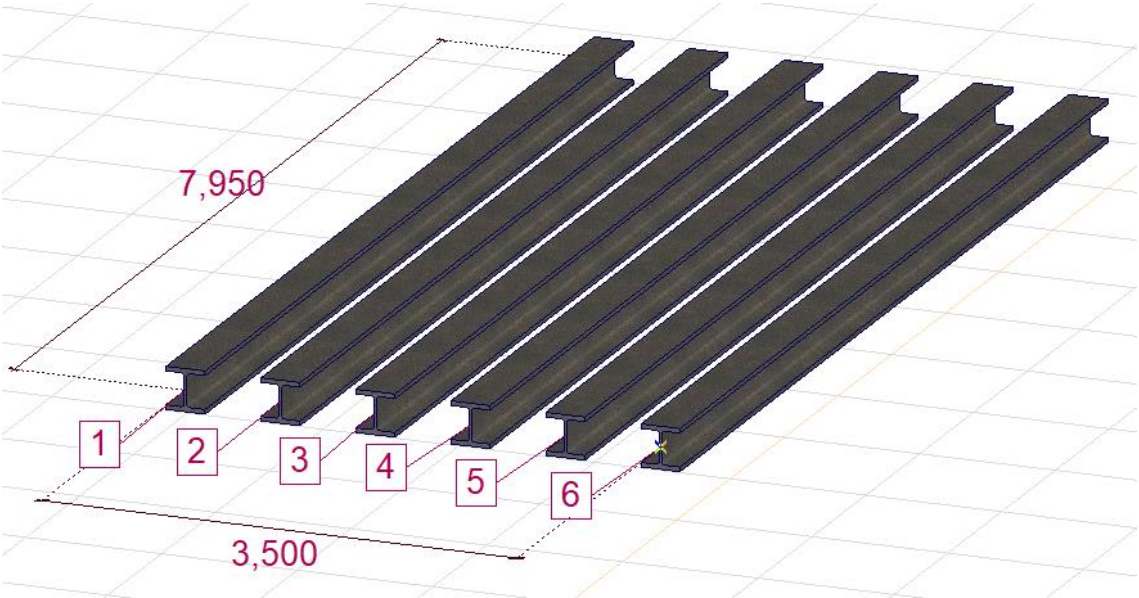



*Obrázek 2. Statické schéma konstrukce*

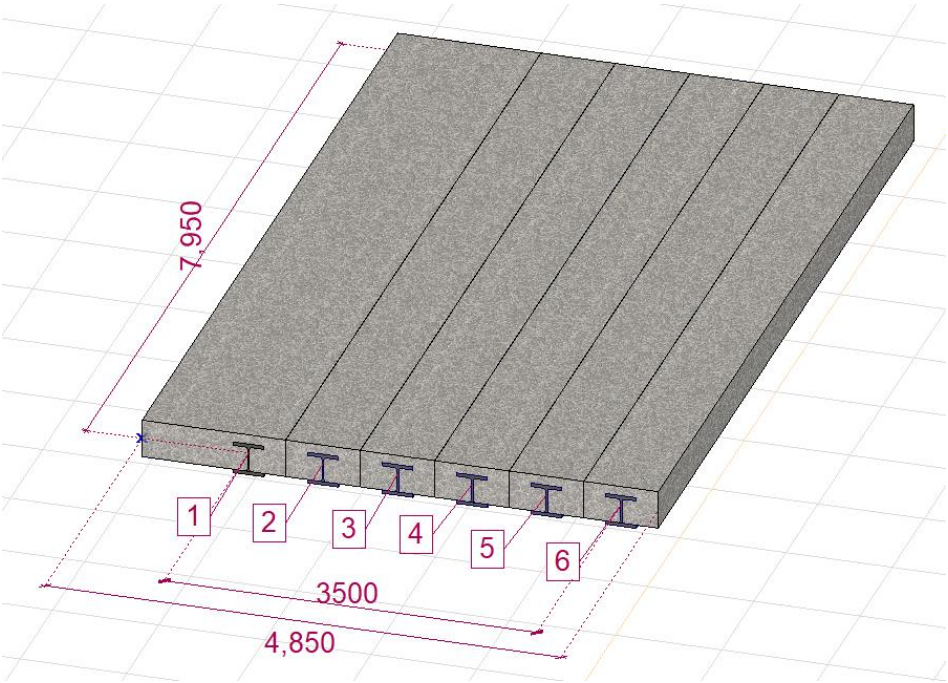
## 2.2 MODELY KONSTRUKCE

Vytvořil jsem 4 modely, jejichž výsledky byly dále porovnány. U prvního prutového modelu (dále jen ,,Model č. 1“) mají nosnou funkci pouze ocelové nosníky, u druhého prutového modelu (dále jen ,,Model č. 2“) plní nosnou funkci jak ocelový průřez, tak beton ve spolupůsobící šířce. Třetí model byl vytvořen jako deskostěnový (dále jen ,,Model č. 3“) a čtvrtý model je deskostěnový jako model č. 3 se ztužující římsou na levém okraji konstrukce (dále jen „Model č. 4“). Všechny čtyři modely byly vytvořeny v programu AxisVM X6.

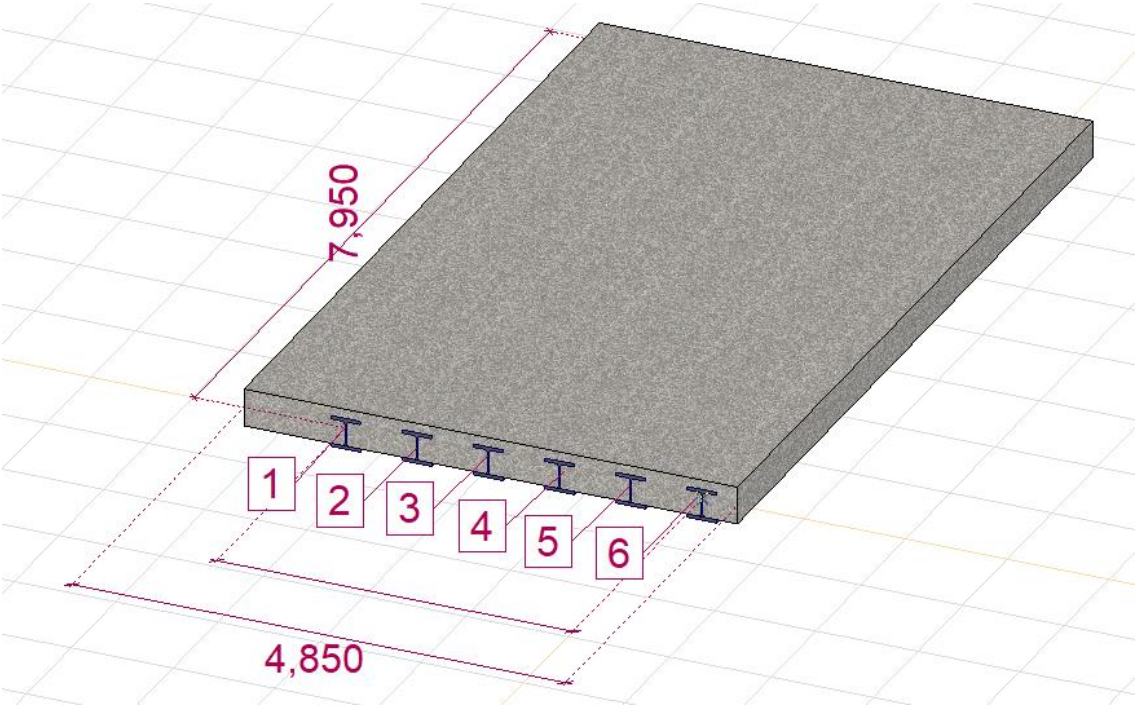
Bylo potřeba spočítat zatížení dle ČSN EN 1991-1 Zatížení konstrukcí, ČSN EN 1991-2 Zatížení mostů dopravou. Zatížení se podrobněji věnuji ve 3. kapitole.



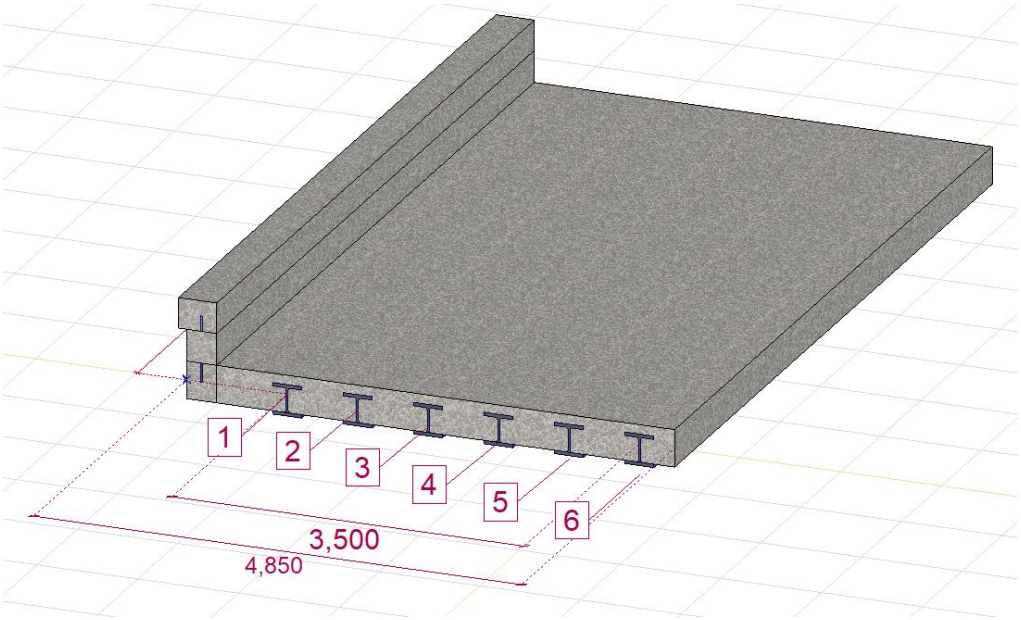

*Obrázek 3. Model č.1*




*Obrázek 4. Model č. 2*



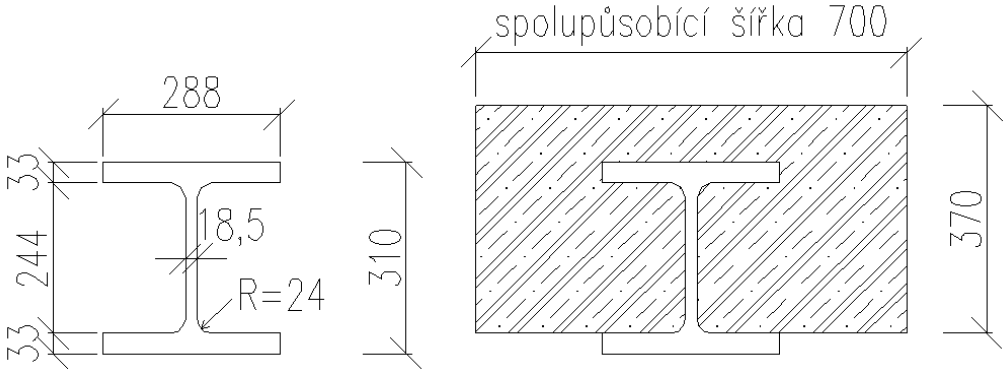

*Obrázek 5. Model č. 3*




*Obrázek 6. Model č. 4*

## 2.3 PRŮŘEZY

Pro ocelové nosníky jsem zvolil válcované HE profily HEM 280 z oceli S355, pro desku beton C30/37.




*Obrázek 7. Použité průřezy*

### 2.3.1 MATERIÁLOVÉ VLASTNOSTI

Beton:

$E_{c,1} = 32{,}8\ GPa$

$I_{c,1} = \frac{1}{12} \times b \times h^3 = \frac{1}{12} \times 0{,}7 \times 0{,}37^3 = 2{,}955 \times 10^{-3}\ m^4$

Ocel:

$E_{s,1} = 210\ GPa$

$I_{c,1} = 3{,}95 \times 10^{-4}\ m^4$

V 5. kapitole u modelu č. 2 jsem použil momenty setrvačnosti vypočítané vzhledem k celkovému těžišti průřezu pomocí Steinerovy věty.

$I_{c,2} = 2{,}968 \times 10^{-3} m^4$ $\qquad E_{c,2} = 32{,}8 \times 10^9 Pa$

$I_{s,2} = 4{,}622 \times 10^{-4} m^4$ $\qquad E_{s,2} = 210 \times 10^9 Pa$

$(EI)_2 = I_{c,2} \times E_{c,2} + I_{s,2} \times E_{s,2} = 1{,}944 \times 10^8\ Nm^2$

# 3 ZATÍŽENÍ

## 3.1 ZATÍŽENÍ STÁLÉ

### 3.1.1 VLASTNÍ TÍHA

Vlastní tíha byla vygenerována softwarem, pro ocelový průřez $G_s$=1,85 kN/m. Pro betonovou desku $G_c$=9,07 kN/m.

### 3.1.2 OSTATNÍ STÁLÉ

Mezi ostatní stále zatížení patří kolejové lože, železniční svršek a asfaltová izolace.

Přepočet ostatního stálého zatížení na nosník č. 5.

Kolejové lože: $\gamma_{kl}$= 20 kN/m$^3$

h= 0,55 m

b= 0,7m

$$G_{KL} = 20 \times 0{,}55 \times 0{,}7 = 7{,}7\ kN/m$$

Železniční svršek: $\gamma_{žs}$= 6 kN/m

roznos= 3,535 m

b= 0,7 m

$$G_{\check{z}S} = \frac{6}{3{,}535} \times 0{,}7 = 1{,}188\ kN/m$$

Asfaltová izolace: $\gamma_{al}$= 25 kN/m$^3$

t= 0,06 m

b= 0,7 m

$$G_{AI} = 25 \times 0{,}06 \times 0{,}7 = 1{,}05\ kN/m$$

## 3.2 PROMĚNNÁ ZATÍŽENÍ

### DYNAMICKÝ SOUČINITEL

Zatížení musíme dále vynásobit dynamickým součinitelem $\phi_3$, pro standartně udržovanou kolej. [2]

$$\Phi_3 = \frac{2{,}16}{\sqrt{L_\Phi} - 0{,}2} + 0{,}73 = \frac{2{,}16}{\sqrt{7{,}95} - 0{,}2} + 0{,}73 = \mathbf{1{,}555}$$

### 3.2.1 ZATÍŽENÍ OD DOPRAVY

Mezi zatížení od dopravy patří:

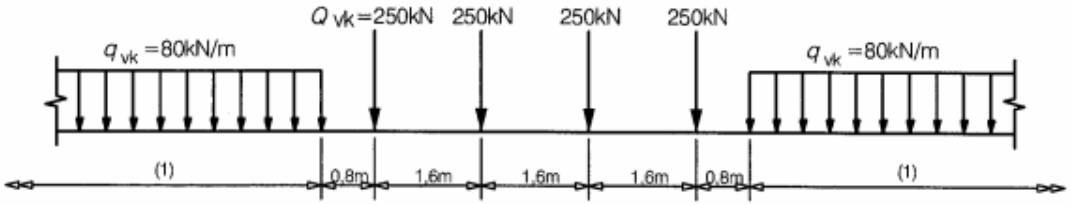
- Svislá zatížení – model LM71
- Svislé zatížení pro zemní těleso
- Dynamické účinky
- Odstředivé síly
- Boční ráz
- Rozjezdové a brzdné síly
- Aerodynamické zatížení od projíždějících vlaků
- Zatížení od trakčního vedení

Zatížení budu uvažovat jen následující:

- Svislá zatížení – model LM71
- Boční ráz

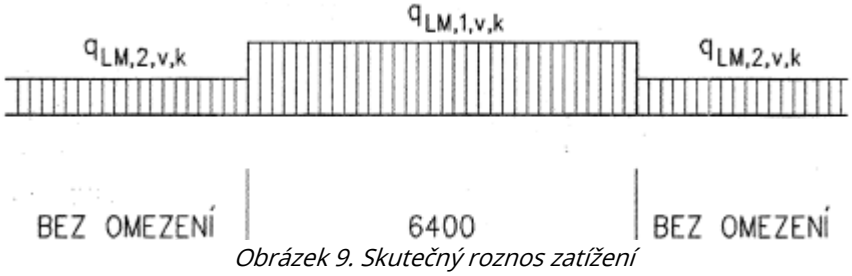
#### 3.2.1.1 MODEL ZATÍŽENÍ LM71

Model zatížení 71 reprezentuje statický účinek svislého zatížení od běžné železniční dopravy dle obr. 8. Charakteristické hodnoty se musí násobit součinitelem α na tratích, které jsou určeny pro těžší nebo lehčí dopravu, než je běžná železniční doprava. [2]

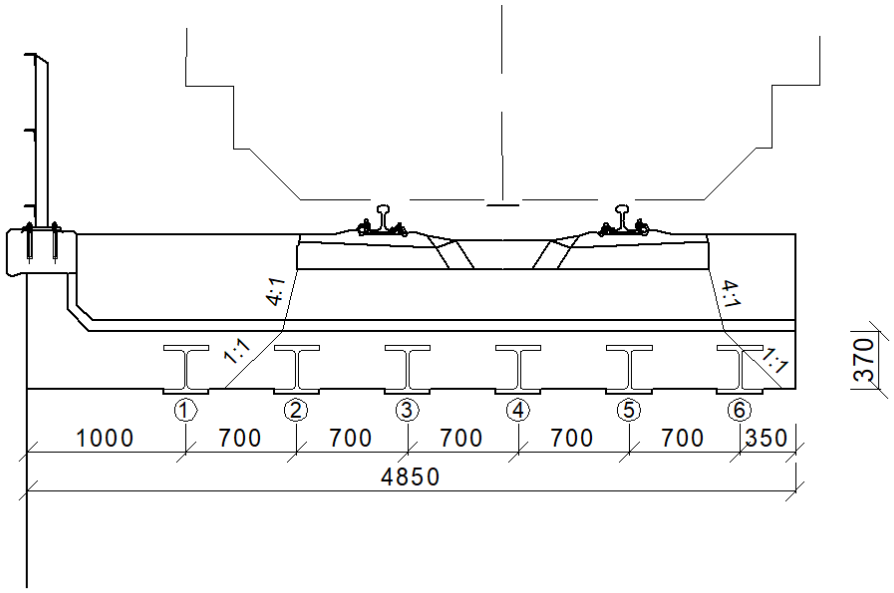



*Obrázek 8. Model LM-71*

Roznos zatížení uvažujeme 4:1 přes kolejové lože po hranu železobetonové desky a dále 1:1 až po horní hranu dolní pásnice HEM profilu dle obr. 10. Zatížení bude vypadat dle obr. 9.




*Obrázek 9. Skutečný roznos zatížení*

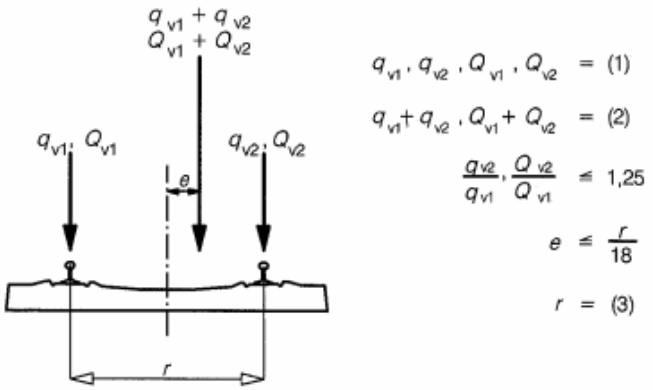



*Obrázek 10. Roznos přes kolejové lože a desku*

- $q_{LM,2,v,k} = 80 \times \alpha \times \Phi_3 = 80 \times 1{,}21 \times 1{,}555 = 150{,}524\ kN/m$
- $q_{LM,1,v,k} = \frac{4 \times Q_{vk}}{6{,}4} \times \alpha \times \Phi_3 = \frac{4 \times 250}{6{,}4} \times 1{,}21 \times 1{,}555 = 293{,}992 kN/m$

⇨ $q_{LM,2,v,k} = \frac{80}{br} \times \alpha \times \Phi_3 = \frac{80}{3{,}54} \times 1{,}21 \times 1{,}555 = 45{,}521\ kN/m^2$

⇨ $q_{LM,1,v,k} = \frac{4 \times Q_{vk}}{6{,}4 \times br} \times \alpha \times \Phi_3 = \frac{4 \times 250}{6{,}4 \times 3{,}54} \times 1{,}21 \times 1{,}555 = 83{,}049\ kN/m^2$

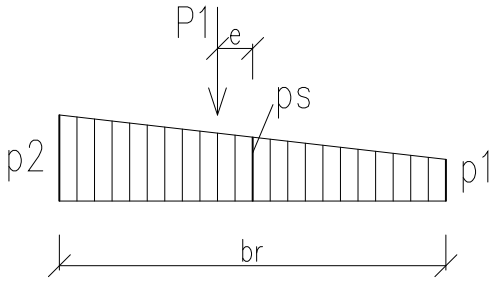



*Obrázek 11. Excentricita zatížení od vlaku*

Dále zde musíme uvažovat excentricitu svislého zatížení. Účinek bočního (příčného) posunutí svislých zatížení se musí uvažovat poměrem kolových zatížení u všech náprav dle obr. 11.

- r=1500 mm

$$e = \frac{1500}{18} = 83{,}33 \text{ mm}$$




*Obrázek 12. Pořadnice*

Jelikož se posune těžiště zatěžovacího obrazce o 83 mm, změní se i zatěžovací plocha z obdélníka na lichoběžník (viz obr.12). Výsledné zatížení spočítáme pomocí pořadnic. Pro zohlednění vlivu excentricity je zvolena jednotková nápravová síla $P_1$=1 kN.

$$M_1 = P_1 \times e = 1 * 0{,}083 = 0{,}083 \text{ kNm}$$

| | pořadnice $k_i = \frac{p_i}{p_s}$ |
|---|---|
| $p_1 = \frac{P_1}{b_r \cdot 1} - \frac{6 \cdot M_1}{b_r^2 \cdot 1} = \frac{1}{3{,}54 \cdot 1} - \frac{6 \cdot 0{,}083}{3{,}54^2 \cdot 1} = 0{,}242746$ kN/m$^2$ | $k_1 = 0{,}859320$ |
| $p_2 = \frac{P_1}{b_r \cdot 1} + \frac{6 \cdot M_1}{b_r^2 \cdot 1} = \frac{1}{3{,}54 \cdot 1} + \frac{6 \cdot 0{,}083}{3{,}54^2 \cdot 1} = 0{,}322225$ kN/m$^2$ | $k_2 = 1{,}140676$ |
| $p_s = \frac{P_1}{b_r \cdot 1} = \frac{1}{3{,}54 \cdot 1} = 0{,}282486$ kN/m$^2$ | $k_s = 1{,}0000$ |

*Tabulka 1. Pořadnice zatížení*

$$q_{LM,2,v,k,1} = q_{LM,2,v,k} \times k_1 = 45{,}521 \times 0{,}859320 = 39{,}117\ kN/m^2$$

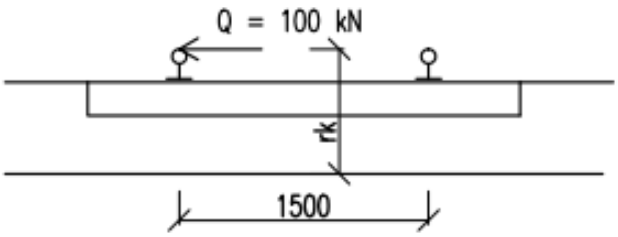
$$q_{LM,2,v,k,2} = q_{LM,2,v,k} \times k_2 = 45{,}521 \times 1{,}140676 = 51{,}925\ kN/m^2$$

$$q_{LM,1,v,k,1} = q_{LM,1,v,k} \times k_1 = 83{,}049 \times 0{,}859320 = 71{,}366\ kN/m^2$$

$$q_{LM,1,v,k,2} = q_{LM,1,v,k} \times k_2 = 83{,}049 \times 1{,}140676 = 94{,}732\ kN/m^2$$

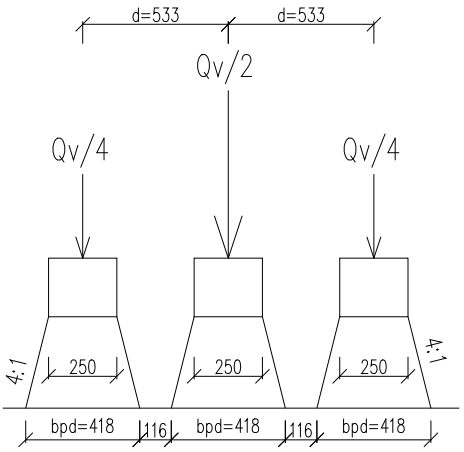
### 3.2.1.2 BOČNÍ RÁZ

Uvažujeme osamělou sílu, působící vodorovně v úrovni temene kolejnic kolmo na osu koleje. Charakteristická hodnota $Q_{sk}$=100 kN.

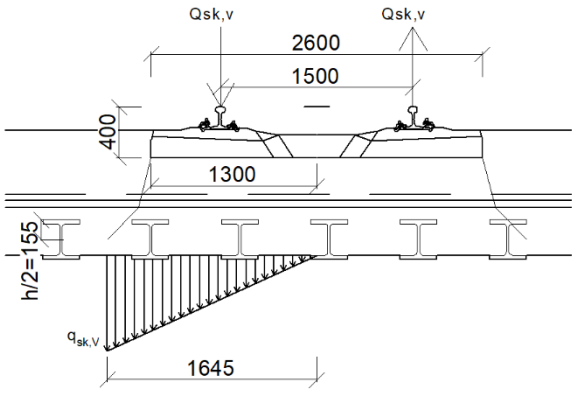



*Obrázek 13. Boční ráz*

Roznos zatížení budeme uvažovat dle obr 14 a 15. do poloviny výšky ocelového nosníku. Uvažujme bod otáčení na středu dolní hrany pražce. Moment vyvolaný osamělou silou můžeme nahradit 2 silami.




*Obrázek 14. Roznos bočního rázu v podélném směru*




*Obrázek 15. Roznos bočního rázu v příčném směru*

Jedna, která tlačí levou půlku a druhá, která tahá pravou půlku pražce. Pravou taženou část zanedbáme a budeme uvažovat pouze s tlačenou částí. Stejně tak spočítáme i zatížení větrem.

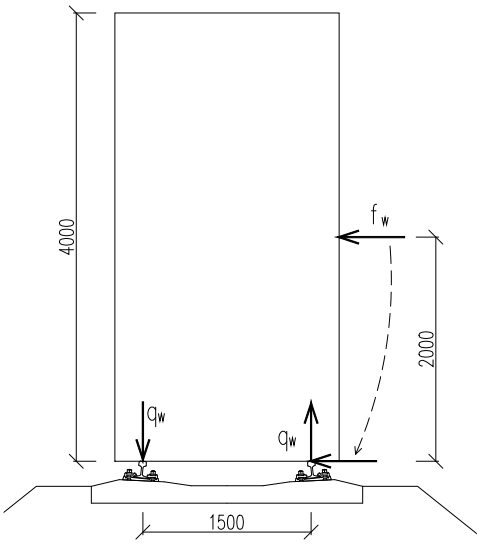
$$Q_{sk,V} = Q \times \alpha \times \frac{0{,}4}{1{,}5} = 100 \times 1{,}21 \times \frac{0{,}4}{1{,}5} = 32{,}266\ kN$$

$$q_{sk,V} = \frac{Q_{sk,V}}{0{,}5 \times b_{př} \times b_{pod}} = \frac{32{,}2\overline{66}}{0{,}5 \times 1{,}645 \times 1{,}685} = 23{,}282\ kN/m^2$$

### 3.2.2 ZATÍŽENÍ VĚTREM

Jedná se o vliv větru vanoucího kolmo na kolejové vozidlo nad mostem. Pro výpočet síly větru je použita zjednodušená metoda.

Byla použita normou doporučená hodnota součinitele zatížení větrem C pro mosty. Sílu větru je vypočítána na výšku vozidla 4,0 m a uvažována na metr běžný koleje. Maximální hodnota rychlosti větru, která se uvažuje při zatížení kolejovou dopravou, je 22,5 m/s. [3]




*Obrázek 16. Zatížení od větru*

$f_w = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_b^2 \cdot C \cdot A_{ref} =$
$\frac{1}{2} \cdot 1{,}25 \cdot 22{,}5^2 \cdot 2{,}21 \cdot 4 = 2{,}80 \text{ kN/m}$

Toto spojité vodorovné zatížení působí ve výšce 2,0 m nad temenem kolejnice a na nosnou konstrukci působí ve směru vodorovném i ve směru svislém. Svislá složka je vyvolaná excentricitou $r_k$ = 2 + 0,4 = 2,4 m, což je vzdálenost působící síly a spodní hrany pražce.

$q_w = f_w \cdot \frac{r_k}{1{,}3} = 2{,}80 \cdot \frac{2{,}4}{1{,}3} = 5{,}170 \text{ kN/m}$

$q_{wV} = \frac{q_w}{b_r \cdot 0{,}5} = \frac{5{,}170}{1{,}646 \cdot 0{,}5} = 6{,}282 \text{ kN/m}^2$

## 3.3 KOMBINACE ZATÍŽENÍ

Jako kombinaci jsem sečetl jednotlivé zatěžovací stavy bez součinitelů, vždy se stejným účinkem, např. „Vlak_0,50_P + boční ráz_0,50_P + vítr_0,50_P + stálé zatížení“. Kombinaci zatížení jsem použil v kapitole 6.1.

# 4 PŘÍČINKOVÁ ČÁRA

Nejen se stálým zatížením se můžeme setkat u stavebních konstrukcí. Další zatížení, které zde působí, je pohyblivé zatížení, které mění svou polohu na konstrukci. V mém případě je to spojité zatížení způsobené vlakem. Tento účinek můžeme řešit pomocí příčinkové čáry.

„Příčinková čára *Sx* statické veličiny *S* (ohybového momentu *M*, posouvající síly *V*, normálové síly *N*, reakce *R*) pro průřez x nosníku je čára, jejíž pořadnice $\eta$ v libovolném místě $u$ udává hodnotu veličiny *S* v průřezu *x* nosníku od břemen F = 1 působící v místě $u$.“ [4]

## 4.1 METODY ŘEŠENÍ PŘÍČINKOVÝCH ČAR

Příčinkové čáry veličin M, V, N, R lze stanovit např.:

a) metodou analytickou pomocí vzorců odvozených podle zásad statiky
b) metodou kinematickou s použitím kinematické definice příčinkové čáry
c) kombinací metody analytické a kinematické

### 4.1.1 KINEMATICKÁ DEFINICE A TVAR PŘÍČINKOVÉ ČÁRY

„Příčinková čára veličiny S v průřezu x konstrukce je ohybová čára, vyvozená na uvažované konstrukci jednotkovým impulsem v průřezu x duálním k veličině S, na kterém koná práci jen uvažovaná veličina S.“ [4] Tuto definici můžeme dokázat použitím virtuálních prací – přemístění.

### 4.1.2 POROVNÁNÍ METOD A MODELU

Pro porovnání jsem si zvolil umístění vlaku ve ¾ rozpětí dle obr. 14.

Výpočet reakcí ze statických podmínek rovnováhy:

$$\sum F_{ix} = 0: \quad R_{ax} = 0$$

$$\sum M_{ib} = 0: \quad -R_a \times L + q_1 \times L_1 \times \left(L_2 + \frac{L_1}{2}\right) + q_2 \times \frac{L_2^2}{2} = 0$$

$$R_a = \frac{q_1 \times L_1 \times \left(L_2 + \frac{L_1}{2}\right) + q_2 \times \frac{L_2^2}{2}}{L}$$

$$R_a = \frac{33{,}89 \times 2{,}762 \times \left(5{,}188 + \frac{2{,}762}{2}\right) + 61{,}82 \times \frac{5{,}188^2}{2}}{7{,}95} = \mathbf{181{,}992\ kN}$$

$$\sum M_{ia} = 0: \quad R_b \times L - Q_1 \times \frac{L_1^2}{2} - Q_2 \times L_2 \times \left(L_1 + \frac{L_2}{2}\right) = 0$$

$$R_b = \frac{q_1 \times \frac{L_1^2}{2} + q_2 \times L_2 \times \left(L_1 + \frac{L_2}{2}\right)}{L}$$

$$R_b = \frac{33{,}89 \times \frac{2{,}762^2}{2} + 61{,}82 \times 5{,}188 \times \left(2{,}762 + \frac{5{,}188}{2}\right)}{7{,}95} = \mathbf{232{,}334\ kN}$$

Kinematická metoda:

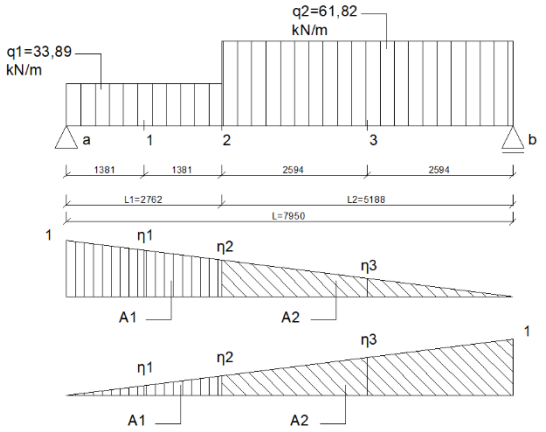
$R_a$:

$$\eta_1 = \frac{L_2 + \frac{L_1}{2}}{L} = \frac{5{,}188 + 1{,}381}{7{,}95} =$$

$$= 0{,}826289\ m$$

$$\eta_2 = \frac{L_2}{L} = \frac{5{,}188}{7{,}95} = 0{,}652579\ m$$

$$\eta_3 = \frac{\frac{L_2}{2}}{L} = \frac{2{,}594}{7{,}95} = 0{,}326289\ m$$




*Obrázek 17. Umístěné zatížení od vlaku*

$$A_1 = L_1 \times \eta_2 + 0{,}5 \times L_1 \times (1 - \eta_2) =$$

$$= 2{,}762 \times 0{,}652579 + 0{,}5 \times 2{,}762 \times (1 - 0{,}652579) = 2{,}2822\ m^2$$

$$A_2 = 0{,}5 \times L_2 \times \eta_2 = 0{,}5 \times 5{,}188 \times 0{,}652579 = 1{,}6928\ m^2$$

$$R_a = q_1 \times A_1 + q_2 \times A_2 = 33{,}89 \times 2{,}2822 + 61{,}82 \times 1{,}6928 = \mathbf{181{,}993\ kN}$$

$R_b$:

$$\eta_1 = \frac{1{,}381}{7{,}95} = 0{,}173711\ m$$

$$\eta_2 = \frac{2{,}762}{7{,}95} = 0{,}347421\ m$$

$$\eta_3 = \frac{5{,}356}{7{,}95} = 0{,}673711\ m$$

$$A_1 = 0{,}5 \times L_1 \times \eta_2 = 0{,}5 \times 2{,}762 \times 0{,}347421 = 0{,}4798\ m^2$$

$$A_2 = L_2 \times \eta_2 + 0{,}5 \times L_2 \times (1 - \eta_2) =$$

$$= 5{,}188 \times 0{,}347421 + 0{,}5 \times 5{,}188 \times (1 - 0{,}347421) = 3{,}4952\ m^2$$

$$R_b = q_1 \times A_1 + q_2 \times A_2 = 33{,}89 \times 0{,}4798 + 61{,}82 \times 3{,}4952 = \mathbf{232{,}334\ kN}$$

Porovnání výsledků:

| Nosník č.5 | | Ra [kN] | Rb [kN] |
|---|---|---|---|
| Statické podmínky rovnováhy | | 181,992 | 232,334 |
| Kinematická metoda | | 181,993 | 232,334 |
| Axis | Model č. 1 | 181,992 | 232,334 |
| | Model č. 2 | 181,992 | 232,334 |
| | Model č. 3 | 139,307 | 172,939 |

*Tabulka 2. Porovnání reakcí*

Můžeme vidět, že výsledky u prutových modelů se liší pouze u kinematické metody při výpočtu reakce $R_a$, to mohlo způsobit zaokrouhlení součinitelů $\eta$ a ploch $A$. Reakce u modelu č. 3 vychází podstatně jinak, to je způsobené příčným roznosem a celkovým spolupůsobením desky.

Součtem všech reakcí na konstrukci si můžeme ověřit, zda-li jsem vytvořil stejné zatížení na všech modelech.

| | Kol. lože | Vítr 0,25_L | Boční ráz 1,0_P | Vlak_0,75_P |
|---|---|---|---|---|
| Model č.1 | 367,296 | 50,634 | 16,125 | 1967,816 |
| Model č.2 | 367,296 | 50,634 | 16,125 | 1967,816 |
| Model č.3 | 367,290 | 51,862 | 17,095 | 1967,810 |

*Tabulka 3. Součet reakcí pro jednotlivé modely*

Výsledky se liší v řádech kN, můžeme tedy uvažovat, že zatížení bylo stanoveno na všech modelech stejně.

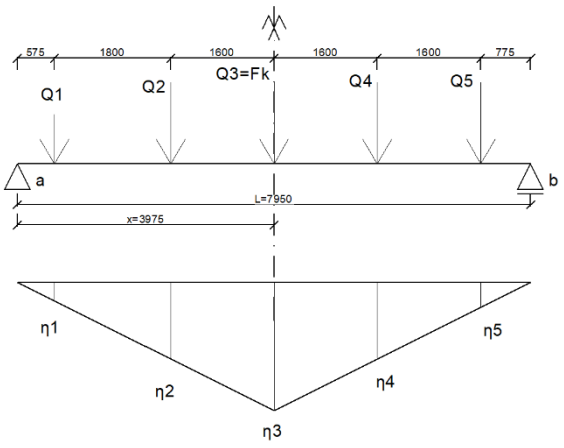
## 4.2 ROZBOR ÚČINKŮ POHYBLIVÉHO ZATÍŽENÍ

### 4.2.1 WINKLEROVO KRITÉRIUM

Pro použití všech kritérií jsem si upravil model zatížení na nesymetrickou soustavu břemen viz obr. 18.

Podle Winklerova kritéria určíme kritické břemeno $F_k$ soustavy břemen, které umístíme do průřezu $x$ prostého nosníku, abychom vyvodili $maxM_x$. Uvažujeme takové břemeno, jehož přičtením ostatních břemen

z leva dosáhne nebo přestoupí hodnoty Rx/L, kde R je výslednice soustavy sil, x je vzdálenost zleva zkoumaného průřezu a L je rozpětí nosníku. [4] Jelikož se jedná o prostý nosník, zvolíme x=L/2. [4]




*Obrázek 18. Soustava břemen*

Výpočet:

$$R = \sum F_i$$

$$R = 33{,}89 + 98{,}91 \times 4 =$$

$$R = 429{,}53\ kN$$

$$R\frac{x}{L} = 429{,}53 \times \frac{\frac{L}{2}}{L} = 214{,}765\ \text{kN}$$

Hodnotu Rx/L přestoupí výslednice prvních tří břemen.

$$R_3 = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 33{,}89 + 98{,}91 + 98{,}91 = 231{,}71\ > 214{,}765\ kN.$$

$$\eta_3 = \frac{x \times x'}{L} = \frac{\frac{L}{2} \times \frac{L}{2}}{L} = \frac{L}{4} = \frac{7{,}95}{4} = 1{,}9875\ m$$

$$\eta_1 = 0{,}2875, \quad \eta_2 = \eta_4 = 1{,}1875, \quad \eta_5 = 0{,}3875$$

$$\max M_x = \sum Q_i \times \eta_i$$

$$\max M_x = 33{,}89 \times 0{,}2875 + 98{,}91 \times (1{,}1875 \times 2 + 1{,}9875 + 0{,}3875)$$

$$\max M_x = \mathbf{479{,}566\ kNm}$$

### 4.2.2 BŘEMENOVÉ KRITÉRIUM

Na prostém nosníku je pohybující se soustava břemen. Snažíme se soustavu umístit tak, aby se pod břemenem $F_k$ vyvodil maximální ohybový moment $M_{Fk.}$

Z momentové podmínky rovnováhy k bodu *b*

$$\sum M_{ib} = 0: \quad -R_a \times L + R \times (L - u) = 0$$

můžeme odvodit vztah pro podporovou reakci

$$R_a = R \times \frac{L - u}{L}$$

kde *R* je výslednice soustavy břemen a *u* je vzdálenost od levého podpory *a*.

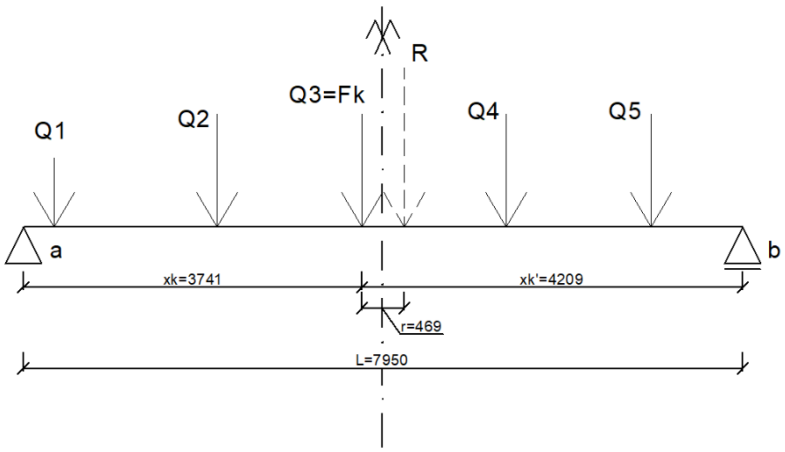
Extrém funkce pro $M_{Fk}(u)$ získáme z podmínky

$$\frac{dM_{Fk}(u)}{du} = \frac{R}{L}[L - u - (u - r)].$$

Po úpravě dostáváme tzv. břemenové kritérium

$$x_k = L - u = u'$$

„Maximální ohybový moment $maxM_{Fk}$ pod daným (zvoleným) břemenem $F_k$ vznikne tehdy, jestliže paprsek břemen $F_k$ je od jedné podpory prostého nosníku stejně vzdálen jako paprsek výslednice $R$ celé soustavy břemen od podpory druhé nebo též, když střed nosníku půlí vzdálenost $r$ paprsků břemene $F_k$ a výslednice $R$ soustav sil.“ [4]




*Obrázek 19. Břemenové kritérium*

Výpočet:

Výslednice $R$ soustavy břemen se rovná

$$R = 429{,}53\ kN$$

a působí ve vzdálenosti $r$ od paprsku břemene $F_k \equiv Q_3$, kterou stanovíme pomocí Varignonovy věty.

$$r = -\frac{M_s}{R} = -\frac{33{,}89 \times 3{,}4 + 98{,}91 \times 1{,}6 - 98{,}91 \times 1{,}6 - 98{,}91 \times 3{,}2}{429{,}53} = 0{,}469\ m$$

Vzdálenost břemene Q3 od levé a pravé podpory nosníku

$$x_k = \frac{L}{2} - \frac{r}{2} = \frac{7{,}95}{2} - \frac{0{,}469}{2} = 3{,}741\ m$$

$$x_k' = L - x_k = 7{,}95 - 3{,}741 = 4{,}209\ m = u$$

Hodnota max $M_{F_{Q3}}$ podle zásad statiky a vztahů:

$R_a = 202{,}089\ kN$

$maxM_{Q3} = 202{,}089 \times 3{,}741 - 33{,}89 \times 3{,}4 - 98{,}91 \times 1{,}6 = \mathbf{482{,}533\ kNm}$

### 4.2.3 ŠOLÍNOVO KRITÉRIUM

Prostý nosník dimenzujeme na největší ohybový moment. Abychom toho docílili u prostého nosníku, umístíme vlak do poloviny rozpětí.

Někdy se ale stává, je-li aritmeticky střední břemeno Fk značně menší než jeho sousední břemena, že maxmax M vzniká pod břemenem nacházejícím se vlevo nebo vpravo od aritmeticky středního břemene. Zda tento případ nastane nebo nenastane, rozhodne Šolínovo kritérium. [4]

Označíme vzdálenosti po sobě jdoucích břemen $\overline{F_{k-1}F_k} = c$, $\overline{F_kF_{k+1}} = d$ a vymezme na nosníku úseky

$m = x_k - \frac{c}{4}$, $n = x_k + \frac{d}{4}$.

Na délkách m, l, n nosníku jsou výslednice břemen

$$R_m = \sum F_i, \qquad R = \sum F_i, \qquad R_n = \sum F_i$$

a hodnoty průměrných zatížení

$$q_m = \frac{R_m}{m}, \qquad q = \frac{R}{l}, \qquad q_m = \frac{R_n}{n}.$$

Je-li splněna nerovnost

$q_m<q<q_n$

to znamená, je-li průměrné zatížení $q$ prostého nosníku větší než průměrné zatížení $q_m$ a menší než $q_n$, potom můžeme říct, že řešení je správné a pod daným břemenem vzniká největší ohybový moment. [4]

<u>Výpočet:</u>

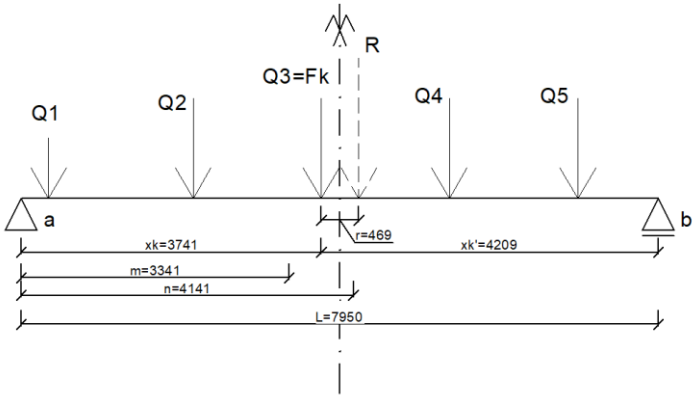
c=d=1,6 m

$m = 3{,}741 - \frac{1{,}6}{4} = 3{,}341\ m$

$n = 3{,}741 + \frac{1{,}6}{4} = 4{,}141\ m$

$R_m = 33{,}89 + 98{,}91 =$

$= 132{,}8\ kN$




*Obrázek 20. Šolínovo kritérium*

$$R_n = 33{,}89 + 98{,}91 + 98{,}91 = 231{,}71\ kN$$

$$q_m = \frac{132{,}8}{3{,}341} = 39{,}749\ kN/m$$

$$q = \frac{429{,}53}{7{,}95} = 54{,}029\ kN/m$$

$$q_n = \frac{231{,}71}{4{,}141} = 55{,}956\ kN/m$$

Podmínka:

$$\mathbf{39{,}749 < 54{,}029 < 55{,}956\ kN/m}$$

Šolínovo kritérium je splněno, maxmax *M* vzniká pod silou $Q_3$ a rovná se 482,656 kNm.

# 5 PRŮHYB OHÝBANÝCH NOSNÍKŮ A POOTOČENÍ PRŮŘEZU

V této kapitole si ručně vypočítám průhyby a pootočení podpor Mohrovou a Clebshovou metodou. Vyšetřovaným nosníkem je nosník č. 5.

## 5.1 MOHROVA METODA

Díky Mohrově metodě dokážeme určit průhyby nebo pootočení staticky určitých nosníků bez využití diferenciálního a integrálního počtu převedením úlohy na statické řešení nosníků. [5]

$$w(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \widetilde{M}(x)$$

$$\varphi(x) = w'(x) = \frac{dw(x)}{dx} \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{V}(x) = \widetilde{M}(x) = \frac{d\widetilde{M}(x)}{dx}$$

$$\kappa(x) = w''(x) = -\frac{M(x)}{EI(x)} \qquad \Leftrightarrow \qquad -\tilde{q}(x) = \frac{d\tilde{V}'(x)}{dx} = \widetilde{M}''(x)$$

+kinematické okrajové podmínky +statické okrajové podmínky

Určení průhybu w(x) ze známého průběhu ohybových momentů M(x) je analogické výpočtu ohybových momentů $\widetilde{M}(x)$ od příčného zatížení $\tilde{q}(x)$. Je nutno zaměnit kinematické podmínky ze statické. Řešení se tak provádí na „fiktivním nosníku“, tj. nosník se zaměněnými okrajovými podmínkami

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EI(x)} \qquad \Leftrightarrow \qquad \tilde{q}(x) = \widetilde{M}''(x)$$

neboli

$$\tilde{q}(x) = +\frac{M(x)}{EI(x)}$$

Postup řešení:

1. Zjistíme průběhy vnitřních sil na skutečném nosníku od skutečného zatížení, tím získáme obrazec ohybového momentu
2. Vytvoříme fiktivní nosník přidružený ke skutečnému nosníku, ten zatížíme momentovým obrazcem
3. Spočítáme hodnoty ohybového momentu $\widetilde{M}(x) \Rightarrow w(x)$ a posouvající síly $\tilde{V}(x) \Rightarrow \varphi(x)$. [5]

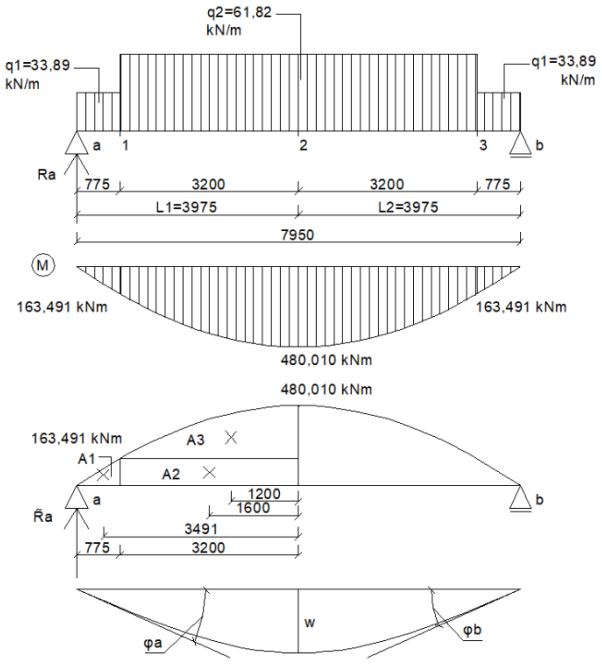
| Skutečný nosník | | Fiktivní nosník | |
|---|---|---|---|
| Kinematické okrajové podmínky | Typ uložení | Statické okrajo-vé podmínky | Typ uložení |
| $w = 0$<br>$\varphi \neq 0$ | | $\widetilde{M} = 0$<br>$\widetilde{V} \neq 0$ | |
| $w \neq 0$<br>$\varphi \neq 0$ | | $\widetilde{M} \neq 0$<br>$\widetilde{V} \neq 0$ | |
| $w = 0$<br>$\varphi = 0$ | | $\widetilde{M} = 0$<br>$\widetilde{V} = 0$ | |
| $w = 0$<br>$\varphi \neq 0$ | | $\widetilde{M} = 0$<br>$\widetilde{V} = 0$ | |
| $w \neq 0$<br>$\varphi \neq 0$ | | $\widetilde{M} \neq 0$<br>$\widetilde{V} \neq 0$ | |

*Obrázek 21. Přehled vzájemně si odpovídajících okrajových podmínek*

1. <u>Výpočet:</u>

V prvním výpočtu se zaměříme na zatížení spojité viz obr. 22.

Plochu $A_1$ spočítáme jen jako plochu trojúhelníku, zbytek plochy paraboly je zanedbatelně malý a neměl by vliv na výsledek.




*Obrázek 22. Mohrova metoda – spojité zatížení*

$$\mathrm{R_a} = q_1 \times 0{,}775 + q_2 \times 3{,}2$$

$$\mathrm{R_a} = 33{,}89 \times 0{,}775 +$$

$$+61{,}82 \times 3{,}2 = 224{,}089\ kN$$

$$\mathrm{M}_{\left(x=\frac{L}{2}\right)} = 224{,}089 \times 3{,}975 -$$

$$-33{,}89 \times 0{,}775 \times \left(3{,}2 + \frac{0{,}775}{2}\right) -$$

$$-61{,}82 \times \frac{3{,}2^2}{2} = 480{,}010\ kNm$$

$$\mathrm{A_1} = \frac{1}{2} \times 0{,}775 \times 163{,}491 = 63{,}353$$

$$\mathrm{A_2} = 3{,}2 \times 163{,}491 = 523{,}171$$

$$\mathrm{A_3} = \frac{2}{3} \times 3{,}2 \times (480{,}01 - 163{,}491) = 675{,}241$$

$$\widetilde{R_a} = \mathrm{A_1} + \mathrm{A_2} + \mathrm{A_3} = 63{,}353 + 523{,}171 + 675{,}241 = 1261{,}765\ kN$$

$$\widetilde{M_{\left(x=\frac{L}{2}\right)}} = \widetilde{R_a} \times 3{,}975 - \mathrm{A}_1 \times 3{,}491 - \mathrm{A}_2 \times 1{,}6 - \mathrm{A}_3 \times 1{,}2$$

$$\widetilde{M_{\left(x=\frac{L}{2}\right)}} = 1261{,}765 \times 3{,}975 - 63{,}353 \times 3{,}458 - 523{,}171 \times 1{,}6 - 675{,}241 \times 1{,}2$$

$$\boldsymbol{\widetilde{M_{\left(x=\frac{L}{2}\right)}} = 3149{,}078\ kNm}$$

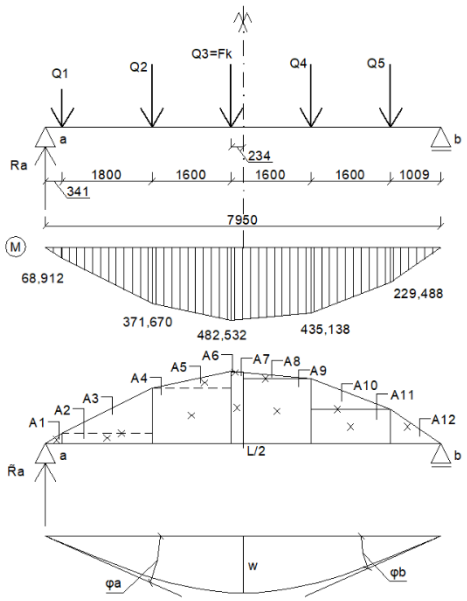
$$\boldsymbol{\widetilde{V} = \widetilde{R_a} = 1261{,}765\ kN}$$

$$\boldsymbol{w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{M_{\left(x=\frac{L}{2}\right)} \times 10^3}{E_s \times I_s} = \frac{3149{,}078 \times 10^3}{210 \times 10^9 \times 3{,}95 \times 10^{-4}} = 37{,}964\ mm}$$

$$\boldsymbol{\varphi = \frac{\tilde{V} \times 10^3}{E_s \times I_s} = \frac{1261{,}765 \times 10^3}{210 \times 10^9 \times 3{,}95 \times 10^{-4}} = 15{,}211 \times 10^{-3} rad}$$

2. <u>Výpočet:</u>

Ve druhém výpočtu se zaměřím na zatížení, které jsem použil u Břemenového kritéria, tedy osamělé síly viz obr. 23. Postup stejný jako u prvního výpočtu, nebudu tedy rozepisovat celý výpočet.




*Obrázek 23. Mohrova metoda - osamělé síly*

$R_a = 202{,}089\ kN$

$A_1 = 11{,}749$ $A_2 = 124{,}042$

$A_3 = 272{,}482$ $A_4 = 594{,}672$

$A_5 = 88{,}690$ $A_6 = 0{,}811$

$A_7 = 11{,}291$ $A_8 = 27{,}637$

$A_9 = 594{,}399$ $A_{10} = 164{,}520$

$A_{11} = 367{,}181$ $A_{12} = 115{,}777$

$\widetilde{R_a} = 1215{,}728\ kN$

$\widetilde{R_b} = 1257{,}523\ kN$

$\widetilde{M_{\left(x=\frac{L}{2}\right)}} = 3090{,}07\ kNm$

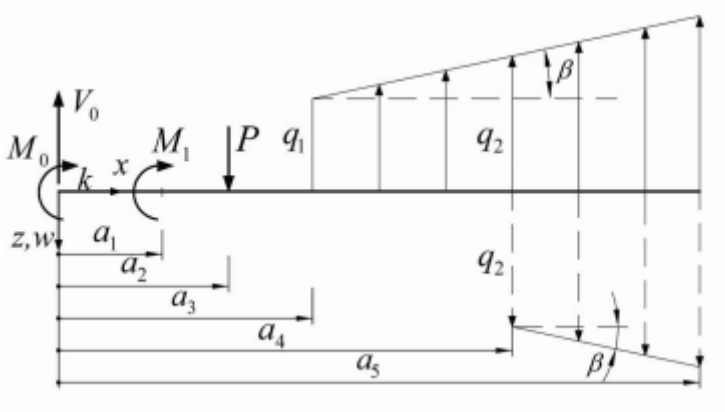
$$\boldsymbol{w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\widetilde{M_{\left(x=\frac{L}{2}\right)}} \times 10^3}{(EI)_2} = \frac{3090{,}07 \times 10^3}{210 \times 10^9 \times 3{,}95 \times 10^{-4}} = 37{,}252\ mm}$$

$$\boldsymbol{\varphi_a = \frac{\widetilde{R_a} \times 10^3}{(EI)_2} = \frac{1215{,}728 \times 10^3}{210 \times 10^9 \times 3{,}95 \times 10^{-4}} = 14{,}656 \times 10^{-3} rad}$$

$$\boldsymbol{\varphi_b} = \frac{\widetilde{R_b} \times 10^3}{(EI)_2} = \frac{1257{,}523 \times 10^3}{210 \times 10^9 \times 3{,}95 \times 10^{-4}} = \mathbf{15{,}160 \times 10^{-3} rad}$$

## 5.2 CLEBSHOVA METODA

Další metodou pro výpočet pootočení podpor a průhyb nosníku je Clebshova metoda. Ta vychází z předpokladu, že lze provést takové řešení, kde budou integrační konstanty stejné pro všechny části nosníku. To platí jen tehdy, kdy se v rovnicích momentů, pootočení a průhybů při přechodu z předchozího intervalu k následujícímu intervalu opakují všechny členy z předchozích intervalů. Nové členy, které vstoupí do rovnice jsou nulové na levé hranici svého intervalu. [5]



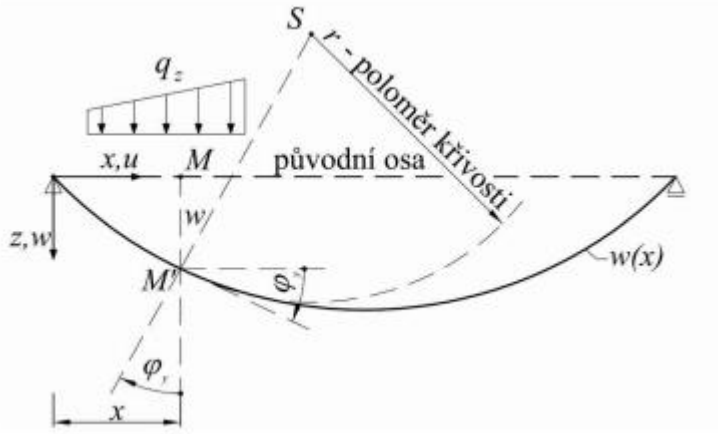

*Obrázek 24. Clebshova metoda*

Při sestavování diferenciálních rovnic ohybové čáry a při jejich integraci je nutno dodržet následující pravidla:

1. počátek souřadného systému volíme v krajním levém bodě vyšetřovaného nosníku a platí pro všechny intervaly
2. rovnici $M_y(x)$ sestavujeme od všech působících sil nalevo od sledovaného průřezu
3. v případě ukončení spojitého zatížení je nutno jej uvažovat až do konce nosníku a od místa ukončení zatížení počítat kompenzující zatížení, taktéž až do konce nosníku.
4. integrace se provádí bez odstranění závorek

Metoda vychází z diferenciálních rovnic ohybové čáry.

Průhyby a pootočení ohýbaných nosníků je důležité zjistit kvůli posouzení nosníku na mezní stav použitelnosti, tedy jestli jsou průhyby a pootočení ve stanovených mezích. [5]




*Obrázek 25. Ohybová čára prostého nosníku*

Máme-li dostatečně štíhlý prut, jeho stav je po deformaci určen tvarem ohybové čáry, tj. křivka do které přejde původní osa nosníku od vlivu zatížení. Funkci průhybu označíme *w*. Hodnota této funkce je kladná, jestliže bude posunutí odpovídat bodu ve směru osy *z*, viz obr. 25. Pootočení průřezu $\varphi_y$ je úhel, pod kterým se každý průřez pootočí vzhledem ke své původní poloze. Jelikož se jedná o úhly malých hodnot, můžeme uvažovat, že

$$\tan \varphi_y = \frac{dw}{dx},$$

potom, můžeme říct, že úhel pootočení $\varphi_y$ je roven derivaci funkce průhybu *w(x)* podle souřadnice x

$$\varphi_y \approx \frac{dw}{dx}.$$

Požaduje se, aby funkce průhybu *w(x)* byla po celé délce osy nosníku spojitá, včetně její derivace. Deformace každé části nosníku je dána zkřivením ohýbané osy, tj. křivostí. V obecném případě lze využít rovnici

$$\frac{1}{r(x)} = \frac{M_y(x)}{EI_y(x)}.$$

Je znám také výraz pro křivost rovinné čáry ve tvaru

$$\frac{1}{r(x)} = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

kde r je poloměr křivosti dle obr. 22. Spojením rovnic obdržíme vztah

$$-\frac{M_y(x)}{EI_y(x)} = \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Této rovnici říkáme přesná diferenciální rovnice ohybové čáry nosníku. Řešení je poměrně složité, ale v praktických úlohách dochází k malým průhybům. Lze tedy přesnou rovnici nahradit přibližnou

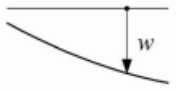
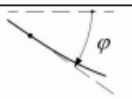
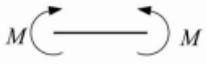
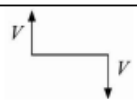
$$1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = 1+\tan\varphi_y.$$

Při malých průhybech vychází druhá mocnina tangenty malého úhlu 1° zhruba 0,00003, můžeme tedy napsat

$$w'' = \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_y(x)}{EI_y(x)}.$$

Tuto rovnici nazýváme diferenciální rovnice ohybové čáry 2. řádu. Dalším dvojím derivováním obdržíme diferenciální rovnici 4. řádu

$$w^{IV} = \frac{d^4w}{dx^4} = -\frac{q_z(x)}{EI_y}.$$

| Označení a kladný smysl | Veličina | Diferenciální závislost | |
|---|---|---|---|
| | | Obecný případ | Pro $EI$ = konst. |
|   | průhyb | $w$ | |
|   | pootočení | $\varphi = w'$ | |
|   | ohybový moment | $M = -EIw''$ | |
|   | posouvající síla | $V = -(EIw'')'$ | $V = -EIw'''$ |
| | příčné zatížení | $q = -(EIw'')''$ | $q = -EIw^{IV}$ |

*Obrázek 26. Diferenciální závislost veličin nosníku*

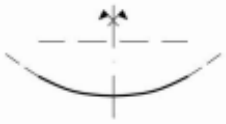
U staticky určitých nosníků lze určit průhyb od ohybových momentů M(x) přímo ze statických okrajových podmínek rovnováhy. Poté stačí dvakrát integrovat a dostaneme rovnici průhybu. [5]

$$w'' = -\frac{M_y}{EI_y}$$

$$w' = \varphi = -\int \frac{M_y}{EI_y} dx + C_1$$

$$w = -\int \left[ \int \frac{M_y}{EI_y} \right] + C_1 x + C_2.$$

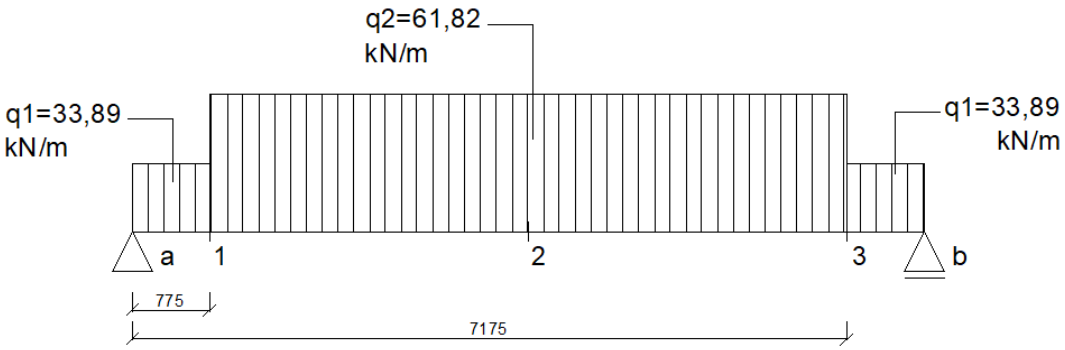
Integrační konstanty lze získat z okrajových podmínek rovnováhy.

| | | |
|---|---|---|
| $w = 0$ | | Prostě podepřený okraj |
| $w' = 0$<br>$w = 0$ | | Vetknutý okraj |
| $w' = 0$ |  | Na ose symetrie |

*Obrázek 27. Kinematické okrajové podmínky*

1. <u>Výpočet:</u>

Pro spojité zatížení viz obr. 28.




*Obrázek 28. Clebshova metoda – spojité zatížení*

$R_a = 224{,}089\ kN$

$$M = R_a \times x - q_1 \times \frac{x^2}{2} | - (q_2 - q_1) \times \frac{(x - 0{,}775)^2}{2} | + (q_2 - q_1) \times \frac{(x - 7{,}175)^2}{2}$$
$$\mapsto x > 0{,}775 \qquad \mapsto x > 7{,}175$$

Rovnice pootočení:

$$E_s I_s \varphi \times 10^{-3} = C_1 - R_a \times \frac{x^2}{2} + q_1 \times \frac{x^3}{6} | + (q_2 - q_1) \times \frac{(x - 0{,}775)^3}{6}$$
$$\mapsto x > 0{,}775$$

$$| - (q_2 - q_1) \times \frac{(x - 7{,}175)^3}{6}$$

$$\mapsto x > 7{,}175$$

Rovnice průhybu:

$$E_s I_s w \times 10^{-3} = C_1 \times x + C_2 - R_a \times \frac{x^3}{6} + q_1 \times \frac{x^4}{24} | + (q_2 - q_1) \times \frac{(x - 0{,}775)^4}{24}$$
$$\mapsto x > 0{,}775$$

$$| - (q_2 - q_1) \times \frac{(x - 7{,}175)^4}{24}$$
$$\mapsto x > 7{,}175$$

Zjištění integračních konstant:

$w_{(x=0)}=0$ -> dosadíme jen do 1. části rovnice

$0 = C_1 \times 0 + C_2 - R_a \times 0$ => $C_2 = 0$

$w_{(x=7{,}95)}=0$ -> dosadíme do celé rovnice

$$0 = C_1 \times 7{,}95 - 224{,}089 \times \frac{7{,}95^3}{6} + 33{,}89 \times \frac{7{,}95^4}{24} +$$
$$+(61{,}82 - 33{,}89) \times \frac{(7{,}95 - 0{,}775)^4}{24} - (61{,}82 - 33{,}89) \times \frac{(7{,}95 - 7{,}175)^4}{24}$$

$C_1 = 1263{,}081$

Po dosazení do rovnice pootočení vychází

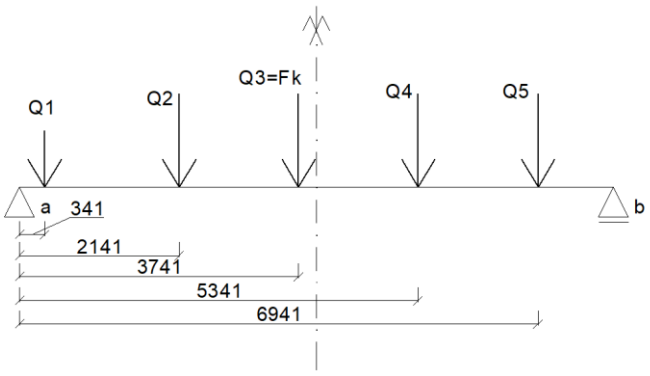
$$\boldsymbol{\varphi = \frac{1263{,}081 \times 10^3}{E \times I} = 15{,}227 \times 10^{-3} rad}$$

Po dosazení do rovnice průhybu vychází

$$\boldsymbol{w = \frac{3149{,}571 \times 10^3}{E \times I} = 0{,}037970\ m}$$

2. Výpočet:

Pro osamělé síly viz obr. 29.




*Obrázek 29. Clebshova metoda – osamělé síly*

$R_a = 202{,}089\ kN$

$$M = R_a \times x| - Q_1 \times (x - 0{,}341)| - Q_2 \times (x - 2{,}141)| + Q_3 \times (x - 3{,}741)$$

$\mapsto x > 0{,}341 \qquad \mapsto x > 2{,}141 \qquad \mapsto x > 3{,}741$

$$| - Q_4 \times (x - 5{,}341)| - Q_5 \times (x - 6{,}941)$$

$\mapsto x > 5{,}341 \qquad \mapsto x > 6{,}941$

Rovnice pootočení:

$$(EI)_2\varphi \times 10^{-3} = C_1 - R_a \times \frac{x^2}{2}| + Q_1 \times \frac{(x - 0{,}341)^2}{2}| + Q_2 \times \frac{(x - 2{,}141)^2}{2}$$

$\mapsto x > 0{,}341 \qquad \mapsto x > 2{,}141$

$$| + Q_3 \times \frac{(x - 3{,}741)^2}{2}\ | + Q_4 \times \frac{(x - 5{,}341)^2}{2}| + Q_5 \times \frac{(x - 6{,}941)^2}{2}$$

$\mapsto x > 3{,}741 \qquad \mapsto x > 5{,}341 \qquad \mapsto x > 6{,}941$

Rovnice průhybu:

$$(EI)_2 w \times 10^{-3} = C_1 x + C_2 - R_a \times \frac{x^3}{6}|\ + Q_1 \times \frac{(x - 0{,}341)^3}{6}| + Q_2 \times \frac{(x - 2{,}141)^3}{6}$$

$\mapsto x > 0{,}341 \qquad \mapsto x > 2{,}141$

$$|\ + Q_3 \times \frac{(x - 3{,}741)^3}{6}\ | + Q_4 \times \frac{(x - 5{,}341)^3}{6}| + Q_5 \times \frac{(x - 6{,}941)^3}{6}$$

$\mapsto x > 3{,}741 \qquad \mapsto x > 5{,}341 \qquad \mapsto x > 6{,}941$

Zjištění integračních konstant:

$w_{(x=0)}=0$ -> dosadíme jen do 1. části rovnice

$0 = C_1 \times 0 + C_2 - R_a \times 0 \qquad => C_2 = 0$

$w_{(x=7,95)}=0$ -> dosadíme do celé rovnice

$$0 = C_1 \times 7{,}95 - 202{,}089 \times \frac{7{,}95^3}{6} | + 33{,}89 \times \frac{(7{,}95 - 0{,}341)^3}{6}$$

$$| + 98{,}91 \times \frac{(7{,}95 - 2{,}141)^3}{6} | + 98{,}91 \times \frac{(7{,}95 - 3{,}741)^3}{6}$$

$$| + 98{,}91 \times \frac{(7{,}95 - 5{,}341)^3}{6} | + 98{,}91 \times \frac{(7{,}95 - 6{,}941)^3}{6}$$

$C_1 = 1215{,}721$

Po dosazení do rovnice průhybu vychází

$$\boldsymbol{w} = \frac{3090{,}01 \times 10^3}{(EI)_2} = \mathbf{0{,}037251}\ \boldsymbol{m}$$

Po dosazení do rovnice pootočení vychází

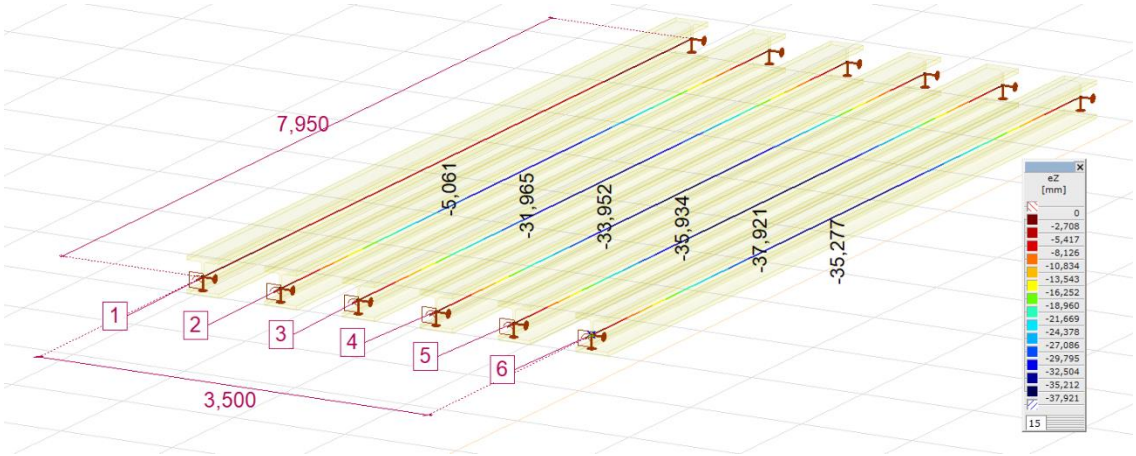
$$\boldsymbol{\varphi_a} = \frac{1215{,}721 \times 10^3}{(EI)_2} = \mathbf{14{,}656 \times 10^{-3}}\boldsymbol{rad}$$

$$\boldsymbol{\varphi_b} = \frac{1263{,}081 \times 10^3}{(EI)_2} = -\mathbf{15{,}160 \times 10^{-3}}\boldsymbol{rad}$$

# 6 POROVNÁNÍ MODELŮ

V této kapitole si porovnáme výsledky všech modelů od zatížení vlaku v polovině rozpětí s pravou excentricitou.

Výsledky porovnáme s ručními výpočty průhybu nosníku a pootočení podpor s modelem č. 1 a 2.




*Obrázek 30. Průhyb modelu č.1*

Porovnání s modelem č.1:

| | Průhyb $e_z$ [mm] | Pootočení podpor [rad] | |
|---|---|---|---|
| | | $\varphi_a$ | $\varphi_b$ |
| Mohrova metoda spojité zatížení | **37,964** | **0,01521** | |
| Clebshova metoda spojité zatížení | **37,970** | **0,01523** | |
| Model č.1 | **37,921** | **0,01521** | |
| Mohrova metoda osamělé síly | **37,252** | **0,01466** | **0,01516** |
| Clebshova metoda osamělé síly | **37,251** | **0,01466** | **0,01516** |

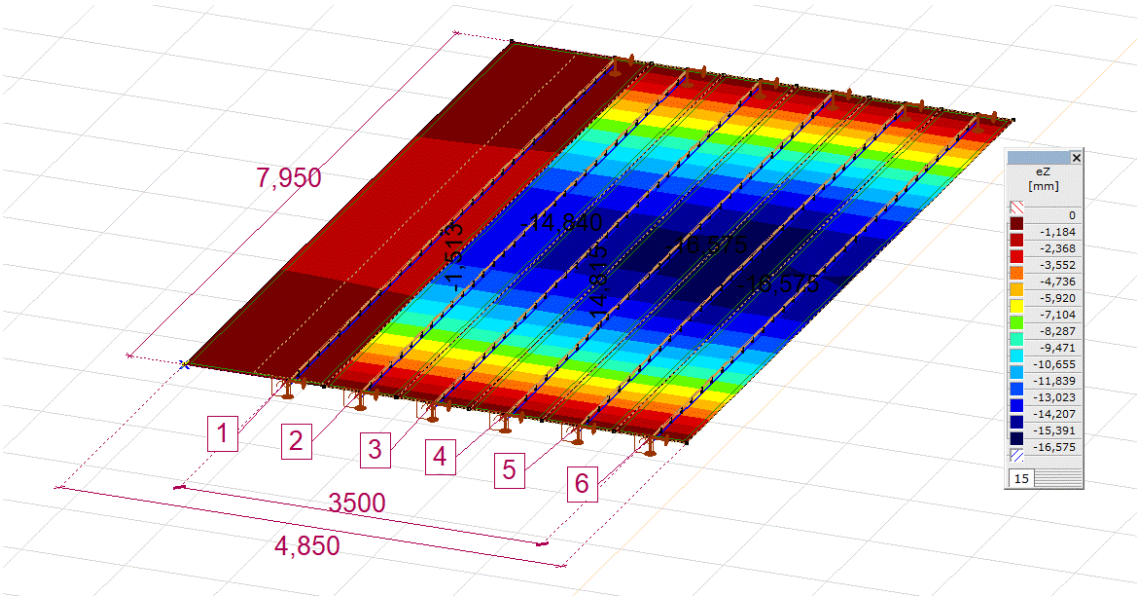
*Tabulka 4. Porovnání výpočtů s modelem č. 1*

Zde můžeme vidět, že výsledky se téměř neliší. Pro návrh je lepší počítat se spojitým zatížením, vyjdou nám horší průhyby. Pro posudek je to tzv. na stranu bezpečnou.

Porovnání s modelem č.2:

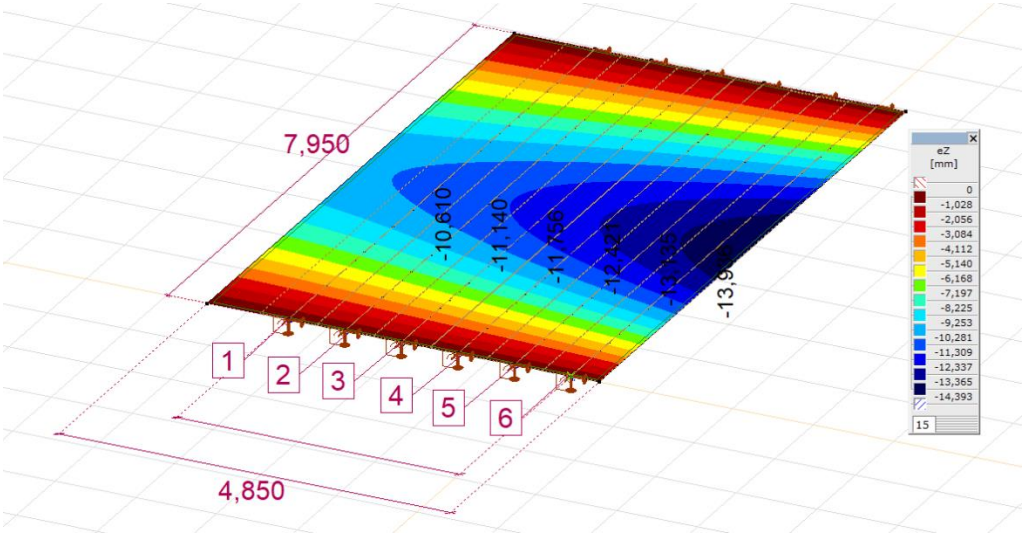
| | Průhyb $e_z$ [mm] | Pootočení podpor [rad] | |
|---|---|---|---|
| | | $\varphi_a$ | $\varphi_b$ |
| Mohrova metoda spojité zatížení | 16,199 | 0,00649 | |
| Clebshova metoda spojité zatížení | 16,201 | 0,00650 | |
| Model č.2 | 16,547 | 0,00656 | |
| Mohrova metoda osamělé síly | 15,895 | 0,00625 | 0,00647 |
| Clebshova metoda osamělé síly | 15,895 | 0,00625 | 0,00650 |

*Tabulka 5. Porovnání výpočtů s modelem č. 2*



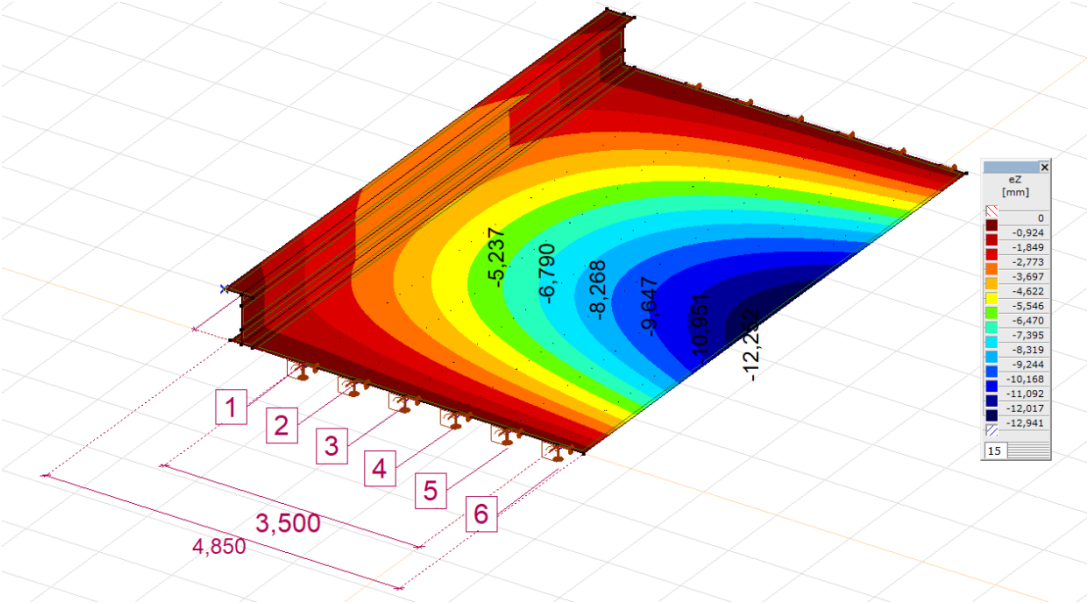

*Obrázek 31. Průhyb modelu č. 2*

Porovnání průhybu s modelem č. 3




*Obrázek 32. Průhyb modelu č.3*

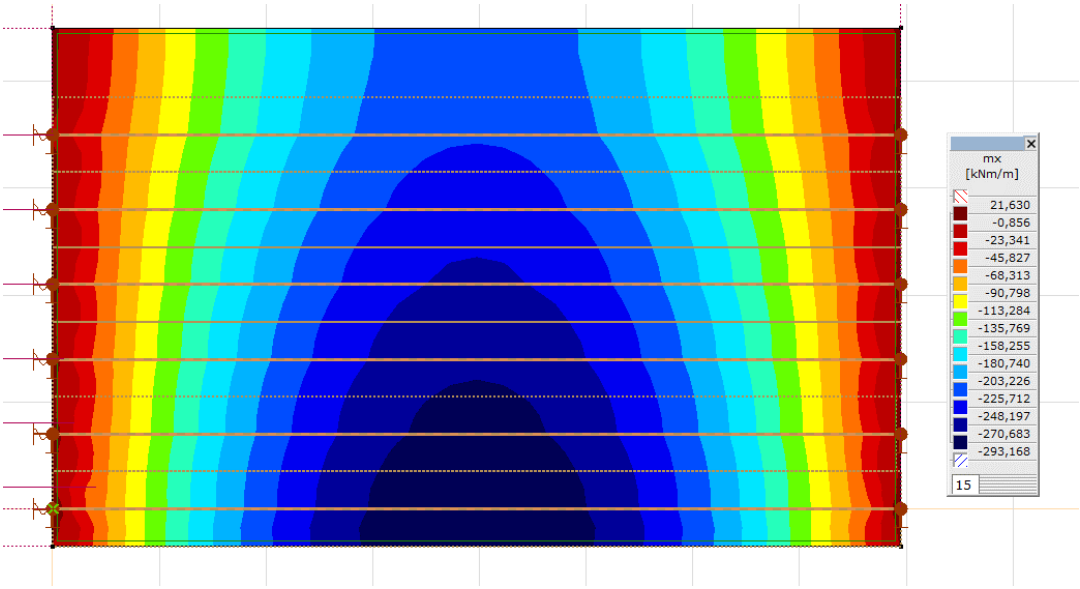
Průhyb u modelu č. 3 ve vyšetřovaném průřezu vychází 13,135 mm. Rozdíl cca 2 mm od modelu č. 2 je způsoben spolupůsobením celé desky v příčném směru. Dalším způsobem snížení průhybu je ztužení, např. přidáním na levý okraj římsy, která ztuží celou konstrukci dle obr. 33. Zde vychází průhyb ve vyšetřovaném místě 10,951 mm.




*Obrázek 33. Model č. 4*

Další zajímavostí u deskostěnových modelů je fakt, že na konstrukci vychází normálová síla, i když zatížení je jen svislé. To je dáno působením betonové desky a ocelového nosníku na excentricitě vůči těžišti celkového

průřezu. Od normálových sil poté vzniká moment nad podporami viz obr. 34.




*Obrázek 34. Ohybový moment kolem osy y – Model č. 3*

## 6.1 NAPĚTÍ

V této kapitole se zaměříme na normálové a smykové napětí na ocelovém nosníku. Pro normálové napětí proběhne ruční výpočet v polovině rozpětí nosníku č. 5 k okraji horní pásnice. Pro smykové napětí proběhne výpočet nad podporou nosníku č. 5 do těžiště nosníku.

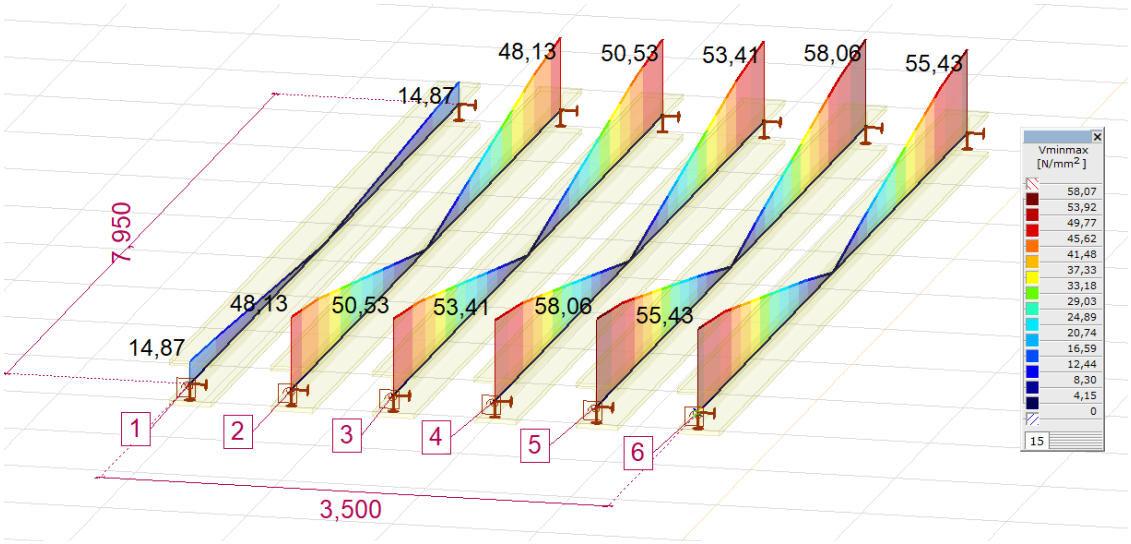
Výpočet:

$$\sigma = s = \frac{M_y}{I_y} \times z = \frac{480{,}10 \times 10^3}{3{,}95 \times 10^{-4}} \times 0{,}155 = 240{,}54\ MPa$$

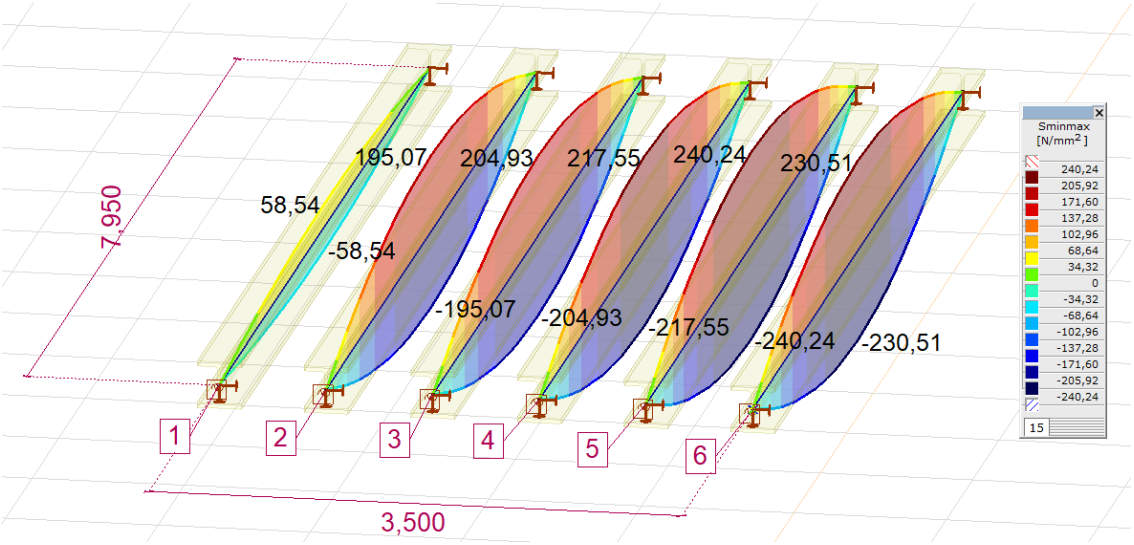
$$\tau = v = \frac{V_{Ed} \times \bar{S}_{y,max}}{I_y \times b} = \frac{224{,}089 \times 10^3 \times 1{,}477 \times 10^{-3}}{3{,}95 \times 10^{-4} \times 0{,}0185} = 57{,}49\ MPa$$

$$\bar{S}_{y,max} = A \times z_T = (0{,}288 * 0{,}033 + 0{,}122 \times 0{,}0185) \times 0{,}123 = 1{,}447 \times 10^{-3} m^3$$

Model č. 1

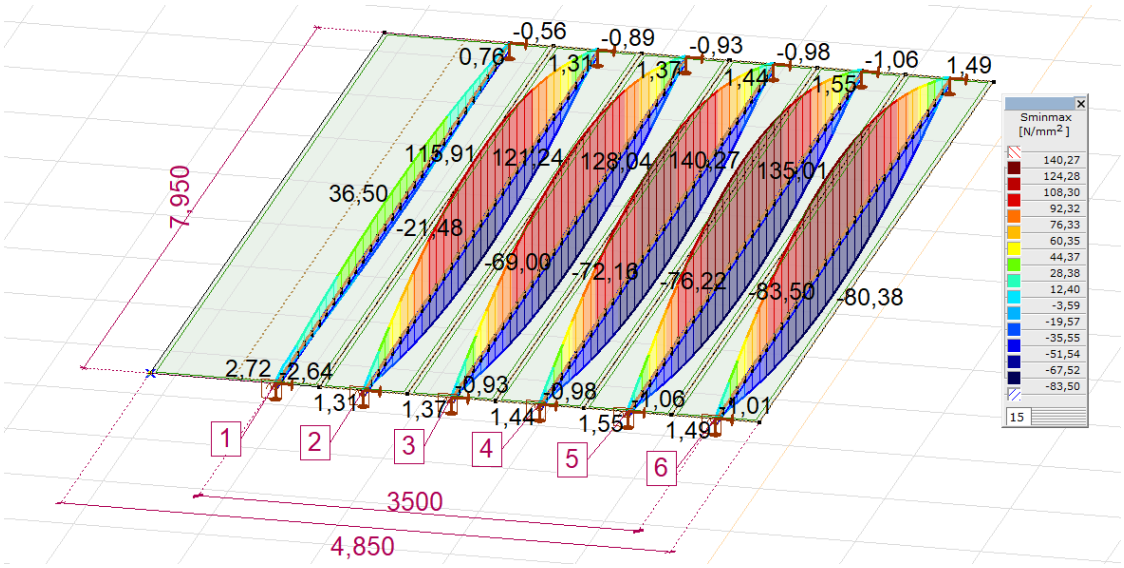



*Obrázek 35. Normálové napětí - Model č. 1*

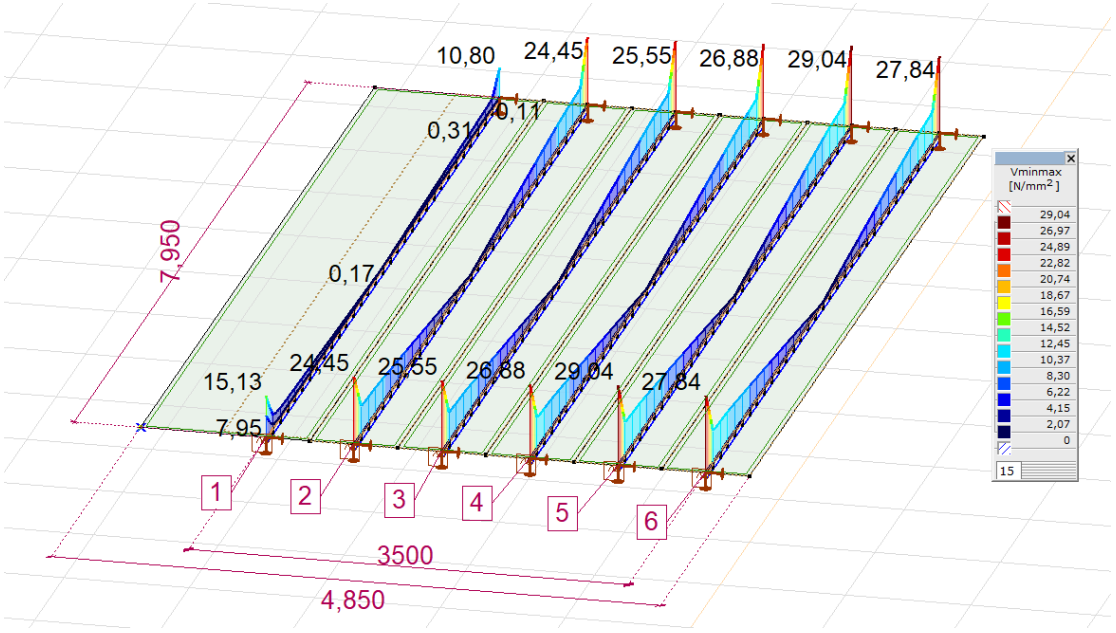



*Obrázek 36. Smykové napětí - Model č. 2*

## Model č. 2

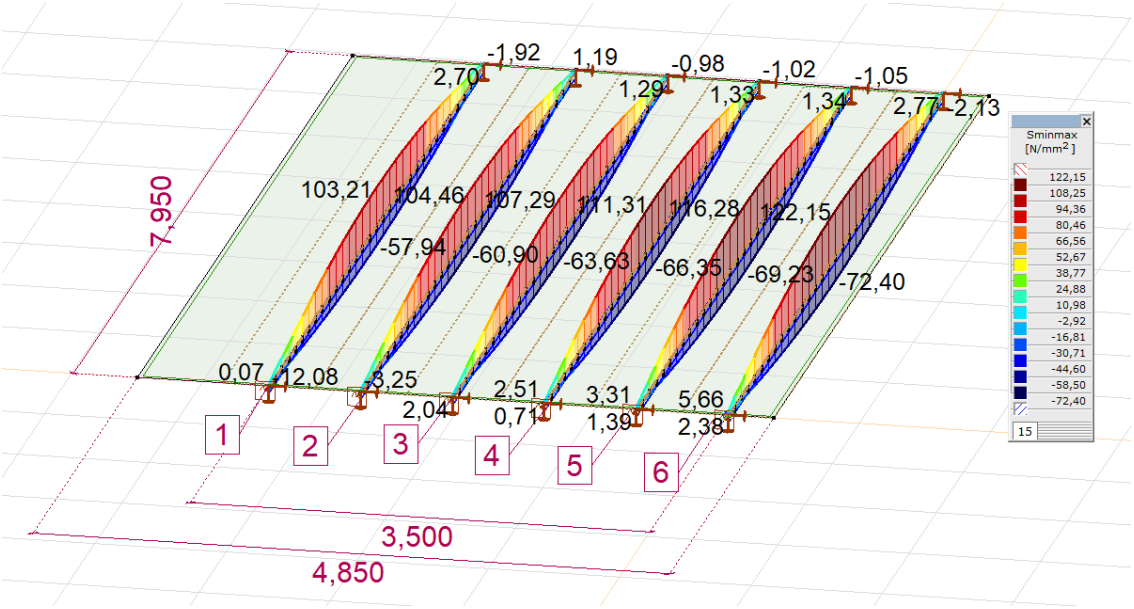



*Obrázek 37. Normálové napětí - Model č. 2*

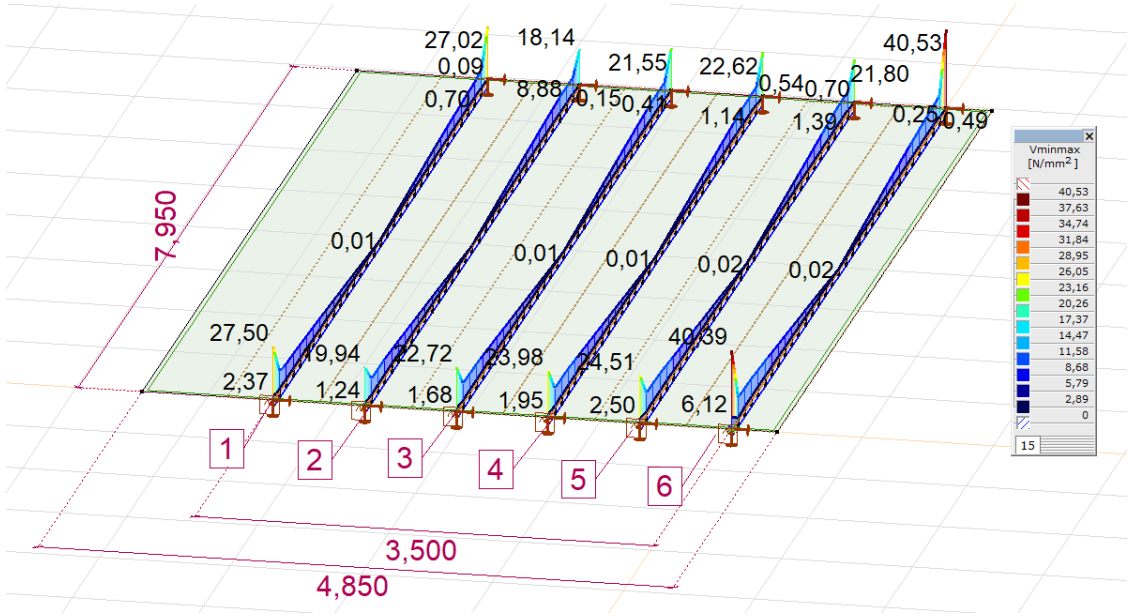



*Obrázek 38. Smykové napětí - Model č. 2*

## Model č. 3

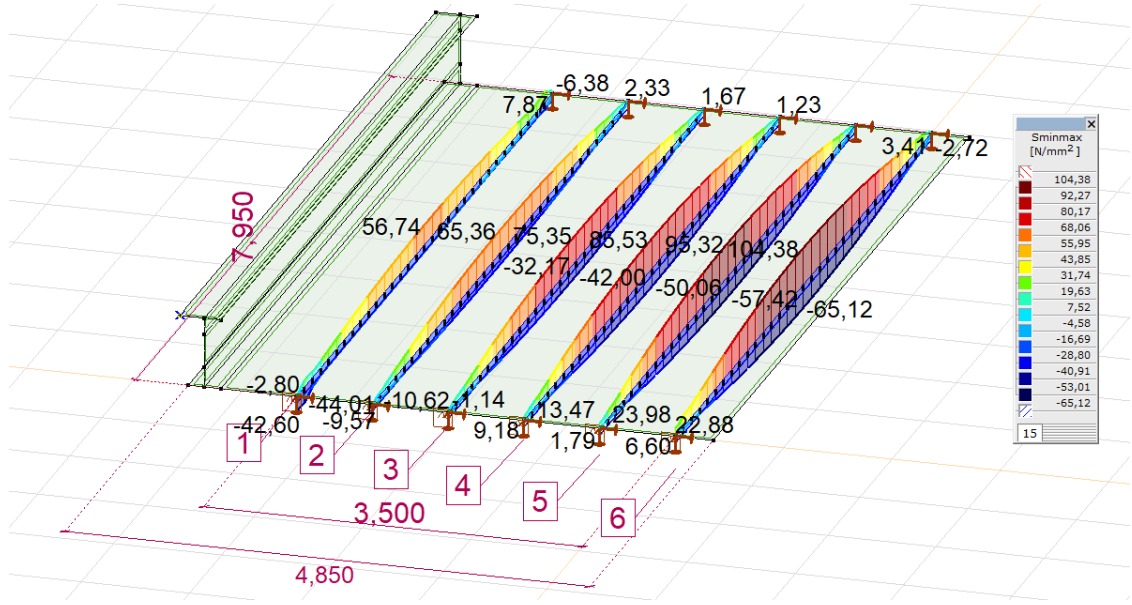



*Obrázek 39. Normálové napětí - Model č. 3*

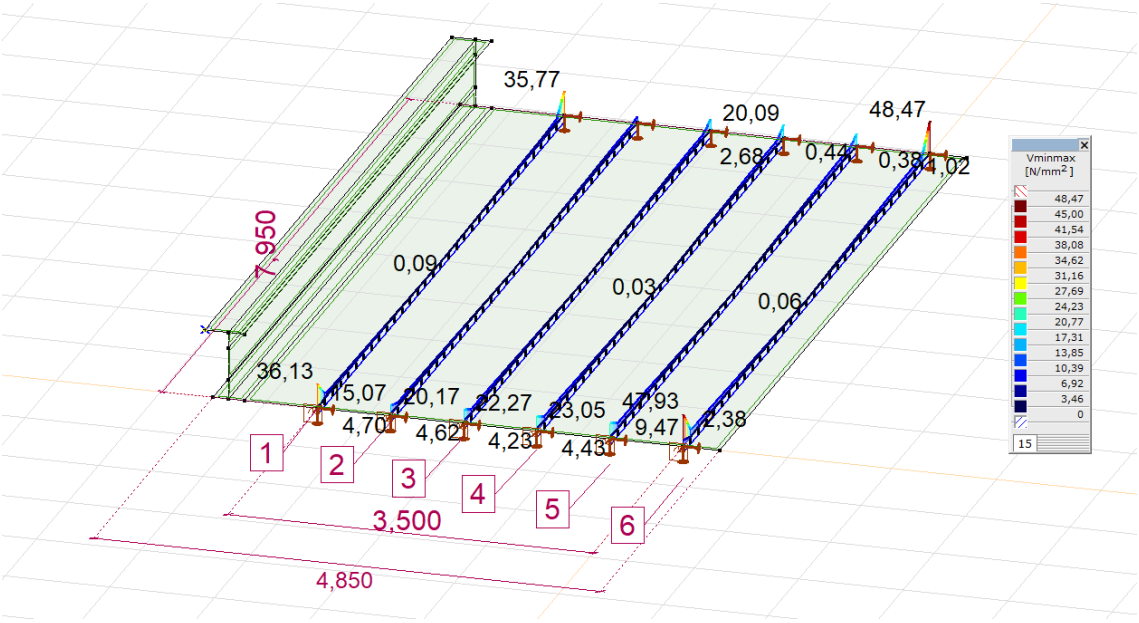



*Obrázek 40. Smykové napětí - Model č. 3*

Model č. 4:




*Obrázek 41. Normálové napětí - Model č. 4*




*Obrázek 42. Smykové napětí - Model č. 4*

Můžeme si všimnout, že jsou zde velké rozdíly mezi jednotlivými modely. Rozdíl v napětí je způsoben vnitřními silami a průřezovými charakteristikami, které se dost liší mezi prutovými a deskostěnovým modelem.

# 7 ZÁVĚR

Tato bakalářská práce se věnovala statické analýze železničního mostu. Co se zatížení týče, bylo zde počítáno s vlastní vahou, stálým zatížením, zatížením způsobené vlakem a větrem.

Ruční výpočty byly porovnány s modely vytvořené v programu AxisVM X6, který řeší výpočty metodou konečných prvků. Ručně jsem spočítal maximální moment způsobený pohyblivým zatížením od vlaku podle modelu LM71. Zatížení jsem si upravil na soustavu nesymetrických osamělých břemen. Dále jsem spočítal průhyb a pootočení podpor Mohrovou metodou a Clebshovou metodou, jak pro soustavu osamělých břemen, tak pro spojité zatížení. Ruční výpočty byly porovnány s jednotlivými modely. Výsledky ručních výpočtů byly srovnatelné s výsledky ze softwaru.

Mezi prutovými a deskostěnovými modely vznikaly velké rozdíly. Zvláště největší rozdíly byly u modelu č. 1 oproti ostatním modelům. To je dáno působením jen ocelových nosníků, jejich tuhost je tedy výrazně menší než u ostatních modelů.  Další rozdíly byly způsobené spolupůsobením celé desky v příčném směru. Zatížení se tedy mohlo roznést na všechny i nezatížené nosníky, čímž si rozdělily vnitřní síly. Modely se chovají tak, jak jsem předpokládal. Můžu se tedy spolehnout na jejich výsledky. Deskostěnové modely považuji tedy za přesnější modely. Ale jejich výsledky je mnohem těžší ověřit s ručními výpočty.

# 8 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

[1] Předpis ČD: MVL 511- Nosné konstrukce železničních mostů se zabetonovanými ocelovými nosníky

[2] Norma: ČSN EN 1991-2, Eurokód 1: Zatížení konstrukcí – Část 2: Zatížení mostů dopravou

[3] Norma: ČSN EN1991-1-4, Eurokód 1: Zatížení konstrukcí – Část 1-4: Obecná zatížení – zatížení větrem

[4] KADLČÁK, Jaroslav a Jiří KYTÝR. Statika stavebních konstrukcí I. Brno: VUTIUM, 1998. ISBN 80-214-1204-6.

[5] ŠMIŘÁK, Svatopluk. Pružnost a plasticita I. Brno: CERM, 1995. ISBN 80-214-1151-1.

# 9 SEZNAM OBRAZOVÝCH PŘÍLOH

Obrázek 1. Příčný řez mostu....11
Obrázek 2. Statické schéma konstrukce....12
Obrázek 3. Model č. 1....12
Obrázek 4. Model č. 2....13
Obrázek 5. Model č. 3....13
Obrázek 6. Model č. 4....14
Obrázek 7. Použité průřezy....14
Obrázek 8. Model LM-71 [2]....17
Obrázek 9. Skutečný roznos zatížení [2]....17
Obrázek 10. Roznos přes kolejové lože a desku....18
Obrázek 11. Excentricita zatížení od vlaku....18
Obrázek 12. Pořadnice....19
Obrázek 13. Boční ráz [2]....20
Obrázek 14. Roznos bočního rázu v podélném směru [2]....20
Obrázek 15. Roznos bočního rázu v příčném směru....20
Obrázek 16. Zatížení od větru [3]....21
Obrázek 17. Umístění zatížení od vlaku....23
Obrázek 18. Soustava břemen....25
Obrázek 19. Břemenové kritérium....26
Obrázek 20. Šolínovo kritérium....27
Obrázek 21. Přehled vzájemně si odpovídajících okrajových podmínek [5]....30
Obrázek 22. Mohrova metoda – spojité zatížení....30
Obrázek 23. Mohrova metoda – osamělé síly....31
Obrázek 24. Clebshova metoda [5]....32
Obrázek 25. Ohybová čára prostého nosníku [5]....33
Obrázek 26. Diferenciální závislost veličin nosníku [5]....34
Obrázek 27. Kinematické okrajové podmínky [5]....35
Obrázek 28. Clebshova metoda – spojité zatížení....35
Obrázek 29. Clebshova metoda – osamělé síly....37
Obrázek 30. Průhyb modelu č. 1....39
Obrázek 31. Průhyb modelu č. 2....40
Obrázek 32. Průhyb modelu č. 3....41
Obrázek 33. Průhyb modelu č. 4....41
Obrázek 34. Ohybový moment kolem osy y – Model č. 3....42
Obrázek 35. Normálové napětí – Model č. 1....43
Obrázek 36. Smykové napětí – Model č. 1....43
Obrázek 37. Normálové napětí – Model č. 2....44
Obrázek 38. Smykové napětí – Model č. 2....44
Obrázek 39. Normálové napětí – Model č. 3....45

Obrázek 40. Smykové napětí – Model č. 3.....45
Obrázek 41. Normálové napětí – Model č. 4.....46
Obrázek 42. Smykové napětí – Model č. 4.....46

# 10 SEZNAM TABULEK

Tabulka 1. Pořadnice zatížení ..... 19
Tabulka 2. Porovnání reakcí ..... 24
Tabulka 3. Součet reakcí pro jednotlivé modely ..... 24
Tabulka 4. Porovnání výpočtů s modelem č. 1 ..... 39
Tabulka 5. Porovnání výpočtů s modelem č. 2 ..... 40