Ekonomická fakulta
Faculty of Economics
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Ekonomická fakulta
Katedra aplikované matematiky a informatiky

Bakalářská práce

Diferenciální a integrální počet v ekonomických úlohách

Vypracovala: Bc. Lenka Radová
Vedoucí práce: Mgr. Petr Chládek, Ph.D.

České Budějovice 2024

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH

Ekonomická fakulta

Akademický rok: 2021/2022

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Lenka RADOVÁ**
Osobní číslo:	**E20111**
Studijní program:	**B0411A050005 Finance a účetnictví**
Téma práce:	**Diferenciální a integrální počet v ekonomických úlohách**
Zadávající katedra:	**Katedra aplikované matematiky a informatiky**

Zásady pro vypracování

Student nastuduje pokročilejší pasáže diferenciálního a integrálního počtu. Uvede některé podstatné vlastnosti a ukáže metody výpočtů. V praktické části budou navrženy typy ekonomických úloh řešitelné prostřednictvím derivací a integrálů, a to včetně rozboru jak a proč se v daném typu úlohy tyto matematické postupy uplatní. V souladu se studijním programem budou řešeny především úlohy týkající se financí, finančního a obchodního sektoru. Závěrem bude práce ilustrativně doplněna o ukázky takovýchto modelových příkladů a úloh – cenová elasticita, nabídka a poptávka apod. Bude též ukázáno řešení úloh pomocí matematického software, se kterým se student seznámí v teoretické části práce.

Metodický postup:

1. Seznámení se základy diferenciálního počtu a používanými metodami.
2. Seznámení se základy integrálního počtu a používanými metodami.
3. Studium diferenciálních rovnic a dalších oblastí využívajících derivaci a integrál.
4. Studium matematicko-ekonomických problémů a vhodných algoritmů pro jejich řešení.
5. Popis vybraných problémů a zvolených metod řešení, včetně použití matematického software.
6. Srovnání výsledků v ekonomických souvislostech, diskuse a formulace závěrů.

Rozsah pracovní zprávy:	**40 – 50 stran**
Rozsah grafických prací:	**dle potřeby**
Forma zpracování bakalářské práce:	**tištěná**

Seznam doporučené literatury:

1. Baronti, M., De Mari, F., van der Putten, R. & Venturi, I. (2016). *Calculus Problems.* Cham: Springer International Publishing.
2. Mezník, I. (2011). *Úvod do matematické ekonomie pro ekonomy.* Brno: Akademické nakladatelství CERM.
3. Moučka, J. & Rádl, P. (2015). *Matematika pro studenty ekonomie.* Praha: Grada Publishing.
4. Samuelson, P. A., & Nordhaus, W. D. (1995). *Ekonomie.* Praha: Nakladatelství Svoboda.
5. Stará, D. (2018). *Základy ekonomických teorií.* Praha: Česká zemědělská univerzita.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Petr Chládek, Ph.D.**
Katedra aplikované matematiky a informatiky

Datum zadání bakalářské práce: **11. ledna 2022**
Termín odevzdání bakalářské práce: **14. dubna 2023**

JIHOČESKÁ UNIVERZITA
V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
EKONOMICKÁ FAKULTA
Studentská 13
370 05 České Budějovice

doc. Dr. Ing. Dagmar Škodová Parmová
děkanka

doc. RNDr. Tomáš Mrkvička, Ph.D.
vedoucí katedry

V Českých Budějovicích dne 9. března 2022

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury. Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce v nezkrácené podobě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných Ekonomickou fakultou - elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

Datum Podpis studenta

V první řadě bych chtěla poděkovat svému školiteli panu doktoru Mgr. Petru Chládkovi Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a ochotu, kterou mi poskytoval během celého vzniku práce. Dále bych chtěla poděkovat své rodině za oporu, kterou mi byla nejen při psaní této práce, ale i během celého studia.

Lenka Radová

Obsah

1. Úvod a cíle práce

Práce se věnuje teorii diferenciálního a integrálního počtu a dále jeho aplikaci v ekonomických problémech. Hlavním cíle práce je vytvořit ucelený soubor příkladů a ukázat široké spektrum uplatnění diferenciálních a integrálních rovnic v ekonomii.

Většina lidí využívá matematiku v běžném životě jen v omezené míře, třeba jednoduchou aritmetiku při manipulaci s penězi. Mnoho problémů však v ekonomii, biologii a zahrnuje rychlost změny závislé na vzájemném působení dalších prvků – aktiv, populace, nábojů, sil atd. na sebe. (Zhang, 2005)

Matematické modely, které popisují běžné každodenní problémy, většinou obsahují aplikace diferenciálních rovnic. Tato práce ukazuje významné ukázky použití matematických modelů z různých oblastí ekonomie.

Ekonomické modely lze rozdělit do dvou hlavních skupin: statické a dynamické. Zatímco ve statických modelech se předpokládá, že s časem vše zůstává stejné, v dynamických modelech se s časem mění další různé veličiny. Navíc rychlost změny může být někdy vyjádřena jako funkce ostatních zahrnutých veličin neboli dynamické modely lze popsat přímo diferenciálními rovnicemi. Nelineární dynamika se zabývá systémy, jejichž rovnice časového vývoje jsou nelineární. Pokud se změní parametr, který popisuje lineární systém, kvalitativní povaha chování zůstane zpravidla stejná. Naopak u nelineárních systémů může malá změna parametru vést k náhlým a dramatickým změnám v kvantitativním i kvalitativním chování systému. Moderní počítač umožňuje prozkoumat mnohem širší úroveň jevů, než jaké by bylo možné si představit. Nové techniky poskytují výkonné metody pro modelování a simulaci trajektorií náhlých a nevratných změn i v ekonomických systémech. (Zhang, 2005)

Obyčejné diferenciální rovnice jsou ve fyzikálních vědách všudypřítomné a jsou zásadní pro pochopení i dalších složitých inženýrských systémů. V ekonomii se používají k modelování například ekonomického růstu, hrubého domácího produktu, spotřeby, příjmu a investic. Ve financích jsou stochastické diferenciální rovnice nepostradatelné při modelování dynamiky cen aktiv a oceňování opcí. Diferenční rovnice se zdají být přirozenější volbou při modelování ekonomických procesů, jelikož klíčové ekonomické proměnné jsou sledovány v diskrétních časových jednotkách, na druhou stranu mohou představovat komplikace v jejich asymptotickém chování a bývá obtížnější je analyzovat. Diferenciální rovnice tak mohou být přístupnější analýze asymptotické stability. Parciální diferenciální rovnice, obvykle druhého řádu pro funkce alespoň dvou proměnných, se hojně využívají v moderní makroekonomii pro řešení optimalizačního problému formulovaného ve stochastickém prostředí. (Tsoularis, 2021)

Nelineární dynamická teorie našla široké uplatnění v různých oblastech ekonomiky. Aplikace zahrnují katastrofy, bifurkace, obchodní cykly, ekonomický chaos, ekonomický růst, rychlé a pomalé socioekonomické procesy anebo vztahy mezi mikroskopickými a makroskopickými strukturami. Všechna tato témata nelze efektivně zkoumat tradičními analytickými metodami zabývající se linearitou, stabilitou a statickými rovnováhami. Nelineární teorie ukazuje, jak komplikovaná chování mohou vzniknout z jednoduchých pravidel. A přestože ekonomické vztahy v těchto modelech bývají komplikované, ukazuje se, že dynamika všech těchto modelů je určena pohybem jednorozměrných diferenciálních rovnic. Aplikace diferenciálních rovnic se v dnešní době používají při modelování změn ve všech oblastech vědy. Studium teorií byla rozšířena zejména s vývojem techniky a teorie diferenciálních rovnic se stala základním nástrojem ekonomické analýzy. (Zhang, 2005)

Cílem práce je zahrnout a ukázat aplikaci vyšší matematiky v praxi a ilustrovat problematiku na praktických příkladech. Část příkladů v této práci je simulována pomocí softwaru Maple. Grafické schopnosti Maple umožňují prozkoumat ekonomické jevy mnohem podrobněji, než by bylo možné jen na papíře. Použití Maple umožňuje nahradit nezajímavé symboly matematických manipulací v ekonomických vzorcích tak, aby uživatel mohl trávit více času přemýšlením o problému a pochopit ekonomické pozadí řešeného problému. Použití nástrojů Maple k řešení matematických modelů ekonomických problémů je skvělým nástrojem, jak umožnit ekonomům začít zkoumat širší škálu funkcí a dalších matematických modelů ekonomických jevů. (Chvátolová, Hřebíček, 2022)

Na rozdíl od většiny standardních učebnic matematické ekonomie používáme počítačovou simulaci k demonstraci ekonomických jevů. Tato práce poskytuje nejen komplexní úvod do aplikace teorie lineárních a linearizovaných diferenciálních rovnic v ekonomické analýze, ale zmiňuje také nelineární dynamické systémy, které byly široce aplikovány na ekonomickou analýzu teprve v posledních pár desítkách let. (Baronti a kol., 2016)

2. Přehled řešené problematiky

Téměř každý ekonomický úkol má dvě odlišná hlediska problému: stránku kvantitativní a stránku kvalitativní. Při řešení kvantitativních otázek mohou být matematické metody ekonomovi velmi nápomocné. Ovšem na kvantitativní rozbor musí navázat kvalitativní zhodnocení, jež je konečnou a rozhodující fází rozboru. Úloha ekonoma je rozhodující při převádění ekonomických problémů do matematické symboliky, tj. určení mezí a hranic použitelnosti matematiky na ekonomické problémy. Ekonom může být tak spolehlivým strážcem, aby úloha matematiky pro řešení ekonomických problémů nebyla například přeceněna, nebo aby matematické metody zůstaly jen tak nápomocné, jak mají být. (Bojarskij, 1959)

Makroekonomie se zabývá studiem velkých ekonomických systémů, nejčastěji ekonomikou státu či země. Může se ale jednat i o složitější systém např. svět jako jeden celek, složený z velkého množství interagujících menších geografických regionů. Makroekonomická teorie se tradičně zaměřovala na systémy diferenčních nebo obyčejných diferenciálních rovnic popisující nějaký vývoj. Modely heterogenních činitelů jsou obvykle nastaveny v diskrétním čase. Aby se dosáhlo pokroku, některé teorie shrnují verze těchto modelů v kontinuálním čase. Makroekonomické modely tak s heterogenními činiteli sdílejí společnou matematickou strukturu, kterou lze v nepřetržitém čase popsat systémem sdružených nelineárních diferenciálních rovnic. (Achdou et al., 20114)

Ekonomika obvykle kolísá kolem své trendové dráhy s nepravidelnými výkyvy. Často jsou tyto výkyvy cyklické a trend je výsledkem faktorů odpovědných za dlouhodobý růst ekonomiky, například přírůstek kapitálu, nárůst pracovní síly, nebo vědecký a technický pokrok. Hospodářské cykly představují odchylky reálného agregátního produktu od jeho dlouhodobého trendu způsobené distribuovanými náhodnými nabídkovými šoky v čase. V 50. letech 20. století byly vyvinuty některé elegantní matematické modely cyklů včetně neoklasické teorie růstu využívající produkční funkce. Staly se výchozím bodem pro všechny následující výzkumy v ústředních otázkách makroekonomické dynamiky. Hlavní nevýhodou těchto modelů bylo izolované zohlednění růstu a cyklických fluktuací. (Akaev, 2018)

Diferenciální rovnice vyjadřuje rychlost změny stavu pomocí funkce aktuálního stavu. Většina modelů v makroekonomii je formulována v diskrétním čase. To znamená, že existují časové úseky $t = 0, 1, 2, \dots$, kde jednotka času je obecně libovolná a může odkazovat na den, měsíc nebo dekádu. Tato libovolnost naznačuje, že může být žádoucí, zejména při pohledu na dynamiku modelu, aby časová jednotka byla co nejmenší. Řada modelů v makroekonomii je tedy formulována v nepřetržitém čase. Spojité systémy mají řadu výhod. Umožňují flexibilnější analýzu dynamiky a poskytují explicitní řešení v širším souboru okolností. To platí zejména pro heterogenní modely. (Margues, 2014)

V této části jsou uvedeny některé z nejdůležitějších diferenciálních rovnic vyvinuté ekonomy během posledních desítkách let, zmíníme Solowovův model růstu, který byl částečně motivován autory děl Harroda a Domara a mnoho dalších. Ekonomický růst je důležitým tématem v ekonomii a Solowův růstový model je prvním tématem vyučovaným v ekonomii kvůli jeho základní jednoduchosti a důležitosti. Mnoho dalších prací zahrnuje diferenciální rovnice s časovými prodlevami, které jsou neodmyslitelně přítomny ve výrobě a akumulaci kapitálu, avšak volba diferenciálních rovnic uvedených v této kapitole má poskytnout jen letmý pohled na to, jak matematické myšlení některých slavných ekonomů ovlivnilo moderní vědu. (Tsoularis, 2021)

Ekonomický růst současné doby

Jestliže se v industriálním období změny projevovaly v řádech desetiletí, u mnohých současných technologií se progrese sledují v řádech jednotek let. V soudobé ekonomice není příliš velký problém manévrovat s produkčními kapacitami. Jejich existence je ale závislá na celé řadě faktorů a produkčních podmínek, souvisejících především s dostupností informací a koncentrací kapitálu, která umožňuje budovat a provozovat celosvětové sítě. (Varadzin et., 2004)

Předmětem teorie růstu je sledovat ekonomickou dynamiku z hlediska jejích kvantitativních změn. Pro současné ekonomické teorie je charakteristické, že pracují jen s exaktními modely, při kterých dochází k silnému procesu redukce komplexity. Existuje totiž nepsané pravidlo, že dobrá teorie je teorie jednoduchá. Mnohdy tato teze bývá nahrazena primitivními úvahami nad komplexními problémy, neboť do předchozích interpretací nejsou zahrnuty nepostradatelné vlivy. Klade-li například makroekonomická teorie dnešní doby velký důraz na makroekonomické agregáty, aniž by brala v úvahu vnitřní strukturu ekonomiky, způsobí tak uspokojení potřeb v odlišných sociálních vrstvách a vytváří tak zcela nesprávné závěry vzhledem k realitě. Účel redukce vlivů a vytváření kritérií měření v modelu je tedy potřeba popsat a interpretovat realitu z určitého zorného úhlu a nelze přizpůsobovat realitu potřebám teorie. Je třeba přistupovat k teorii růstu a její aplikaci na základě dalších dodatečných podmínek a chápat tento přístup jako myšlenkový návod a základ pro hospodářskou a sociální politiku. (Varadzin et., 2004)

V potaz berme i problémy týkající se časoprostorových uspořádání, historických a sociálních podmínek. Odlišné pochopení a interpretace vytváří značnou variantnost představ u jednotlivých autorů. Vliv na charakter modelu mají vlastnosti objektu, způsoby modelování i cíle, tj. za jakým účelem model konstruujeme. (Varadzin et., 2004)

V polovině 20. století se zformovalo hned několik základních ekonomicko-historických modelů vývoje. Na evropském území převládal marxisticko-schumpeterovský model založený na syntéze sociálních vztahů na základě tvůrčí schopnosti jedince. Nový podnět pro rozvoj ekonomicko-historických myšlenek představil ve druhé polovině 20. století W. Rostow, který svou práci „Nekomunistický manifest“ o stádiích ekonomického růstu přímo založil jako polemiku s marxistickým pojetím. Rostow souhlasil s myšlenkou, že hlavním hybným momentem člověka jsou jeho zájmy ovlivňující formy společenského života. Obdobně uznával existenci tříd, ale nedomníval se, že by třídy byly rozhodujícím faktorem. Stejně jako Marx, i Rostow akceptoval význam práce, nicméně větší váhu přisuzoval podmínkám existence individua než jeho samotné aktivitě. V 70. letech 20. století se začal prosazovat nový přístup k ekonomickému vývoji. Tato nová koncepce ekonomického vývoje reinterpretovala v neoinstitucionálním pojetí problematiku změn ekonomiky. Jeho novost spočívala v aplikaci transakčních nákladů, procesů učení a rozhodování za nejistoty aj. na ekonomické procesy velmi explicitně. Tyto myšlenky uznávaly platnost neoklasických principů tržního a konkurenčního principu a taktéž předpokládala individua jako základní jednotky analýzy. Koncem 20. století se oblast ekonomických modelů růstu změnila ve dvou základních rysech. Došlo k vypracování představ na základě syntézy institucionalismu a neoklasického směru myšlení a zároveň jako protiklad k marxistickému pojetí sociálně ekonomických formací byla zformována představa o stádiích ekonomického růstu. Společným jmenovatelem modelů bylo přesvědčení o zákonitosti probíhajících změn a odmítání univerzálních závěrů. Panovaly však nadále mezi nimi rozdílné představy o metodologických východiscích a způsobu spojení jednotlivých prvků ekonomického mechanismu. (Varadzin et., 2004)

Obecná problematika matematicko-ekonomických modelů růstu

V matematickém modelování ekonomických procesů je nutné, aby základní faktory, které ovlivňují předpoklady pro formulaci ekonomických procesů, byly vyjádřeny v jazyce matematiky.

Ekonomické modely v zásadě rozlišujeme na dvou úrovních, makro- a mikroekonomické modely. Mikroekonomické modely představují modely dílčích částí ekonomického systému, např. podniku. A základem je analýza izolovaného prvku a jeho chování v závislosti na změně jiných veličin. Makroekonomické modely oproti tomu skýtají rozbor fungování ekonomiky v celé její celistvosti. (Varadzin et., 2004)

Rozhodnutí spotřebitelů, vlády a firem o poptávce a nabídce určují úroveň ekonomické aktivity, a protože tato rozhodnutí hrají zásadní roli v obchodních a spotřebitelských aktivitách, je důležité mít matematické nástroje, které nám umožní je analyzovat. Vztah mezi finančním sektorem, podnikáním a ekonomickým růstem je důležitou otázkou, která byla zkoumána v celé řadě výzkumných prací, jak teoretických, tak empirických. Mnoho z nich se zaměřilo na dopad finančního sektoru prostřednictvím derivátů na ekonomický růst. Existuje několik proměnných, které ovlivňují poptávku po produktu. Nejjednodušší model pro funkci poptávky lze zapsat jako

$$D = f(p)$$

kde požadované množství závisí pouze na ceně, ostatní proměnné, na kterých závisí poptávka, zůstávají konstantní. Funkci poptávky, $D = f(p)$, lze modelovat jednoduchou lineární rovnicí

$$D = a + (-b)p,$$

kde a a b jsou reálné konstanty. Jedná se o rovnici přímky, kladná konstanta a určuje vertikální průsečík funkce poptávky se svislou osou soustavy souřadnic, záporný koeficient $(-b)$ určuje sklon funkce poptávky. Záporná hodnota koeficientu $(-b)$ znamená, že cena klesá o b jednotek za každý jednotkový nárůst množství. (Bradley & Patton, 2002)

Rovnice popisuje zákon poptávky, základní ekonomickou hypotézu, která říká, že existuje negativní vztah mezi poptávaným množstvím s cenou. To znamená, že když se cena zboží zvýší, poptávané množství se sníží a všechny ostatní proměnné zůstanou stále konstantní. Křivka poptávky je tedy klesající, může mít lineární či nelineární tvar. Nelineární funkce znamená vztah mezi poptávaným množstvím a cenovými formami jiný než přímka, pokud ji vykreslíme. Její matematická rovnice může být kvadratická, exponenciální nebo i jiná. Nejjednodušší model funkce nabídky lze zapsat jako

$$S = n(p),$$

kdy opět dodávané množství závisí pouze na ceně, pokud ostatní proměnné, na kterých závisí nabídka, zůstávají konstantní. Rovnici nabídky $S = n(p)$ lze modelovat jednoduchou lineární rovnicí

$$S = c + dp\,,$$

kde c a d jsou reálné konstanty. Konstanta c určuje vertikální průsečík a je vždy kladná. Stejně tak konstanta d je vždy kladná a vyjadřuje strmost funkce nabídky. Cena se tak zvyšuje o d jednotek za každé jednotkové zvýšení dodaného množství. Rovnice popisuje zákon nabídky, další ekonomickou hypotézu, která říká, že existuje pozitivní vztah mezi dodaným množstvím a cenou neboli to znamená, že když se cena zboží zvýší, zvýší se i nabízené množství, přičemž všechny ostatní proměnné zůstanou konstantní. (Bradley & Patton, 2002)

A protože se cena komodity a dodávané množství nemusí měnit ve stejném poměru, existují tak i funkce nabídky, které jsou nelineární. Jinými slovy, pokud se sklon křivky nabídky mění po celé délce křivky, tvoří pak nelineární křivku funkce nabídky. Takovou nelineární funkci nabídky lze vyjádřit pomocí kvadratické, exponenciální aj. funkce. (Bradley & Patton, 2002)

2.1 Základní představa ekonomického růstu

K definování obecné představy ekonomického růstu existuje řada názorů, které jsou jen konečnou výslednicí určitých úvah. Zpravidla se vychází z předpokladu, že ekonomika roste, jestliže roste výstup na základě zvýšení množství výrobních faktorů, eventuálně výstup roste na jednotku vstupu. Růst lze nejobecněji definovat jako změnu reálného důchodu Y_r na osobu mezi jednotlivými časovými intervaly $(t, t+1, t+2, \dots, t+n)$.

Míru reálného růstu G_r, tak můžeme vyjádřit jako

$$G_r = \frac{\frac{Y_{r(t+1)}}{N_{b(t+1)}} - \frac{Y_{r(t)}}{N_{b(t)}}}{\frac{Y_{r(t)}}{N_{b(t)}}} .100\% ,$$

kde N_b značí celkový počet osob. (Varadzin et., 2004)

Vzorec udává procentuální změnu vůči předchozímu období, při aplikaci vzorce v praxi ale můžeme nalézt několik problémů. Vliv růstu obyvatelstva může vést k nulové míře růstu, jestliže celkový růst Y_r se rovná růstu počtu obyvatel. Jelikož vzorec ukazuje růst reálné ekonomiky, další nedostatek tkví v tom, že je zde nutné provést výpočty změn cenové hladiny. A v případě, že bychom porovnávali růst mezi zeměmi, výsledek by závisel na předchozích dvou faktorech; na obyvatelstvu a cenové hladině. (Varadzin et., 2004)

Pro zjednodušení následujících poznatků zavedeme několik předpokladů.

1) Cenová hladina je konstantní neboli důchod Y_t je totožný s nominálním a s reálným důchodem tj.

$$Y_t = Y_n = Y_r .$$

2) Hospodářství je zcela uzavřené, bez zahraničního vlivu na obchod, a bez jakýchkoliv státních aktivit, tj.

$$Y = C + S$$

$$Y = C + I$$

$$I = S = Y - C$$

kde C je spotřeba, S úspory a I investice.

3) Existuje makroekonomická rovnováha, kdy se agregátní nabídka reálného produktu rovná agregátní poptávce reálného produktu

$$Y_s = Y_d.$$

A proto můžeme zapsat

$$I_t = S_t = Y_t - C_t.$$

4) Existuje plná zaměstnanost.

5) Investice mají důchodotvorný a kapitálotvorný efekt, tj. s růstem investic roste reálný kapitál K i důchod

$$I = \frac{dK}{dt}.$$

Za těchto pět předpokladů se růstové modely skládají ze tří základních funkcí.

Mezi ně patří funkce nabídky pracovní síly, která se mění v čase a spolu s kapitálem K vytváří výstup. Druhá funkce dává do souvislosti vstup a výstup, mluvíme tedy o produkční funkci. Produkční funkce modelů růstu vyjadřují hospodářské souvislosti mezi nezávisle proměnnými vstupy kapitálu K_t a práce L_t a závisle proměnnou výstupu Y_t, tj.

$$Y_t = t(K_t, L_t).$$

Třetí funkce propojuje vztah mezi úsporami a investicemi. Funkci úspor a investic lze nejjednodušší formu zapsat jako

$$S_t = s.Y_t = (1-c)Y_t\,,$$

kde s vyjadřuje sklon k úsporám, c vyjadřuje sklon ke spotřebě (Varadzin et., 2004).

Nejjednodušeji ekonomický růst lze zapsat rovnicí

$$Y = A.f(L, K, H, N),$$

kde A je proměnná závislá na efektivitě a úrovni produkčních technologií, L množství práce, K množství kapitálu, H množství lidského kapitálu a N velikost dostupných přírodních zdrojů. V makroekonomických modelech obvykle produkční funkce zahrnuje konstantní výnosy z rozsahu. Tato vlastnost implikuje, že zvýšení všech faktorů o násobek změní ve stejném poměru i výstup, tj.

$$\lambda Y = A.f(\lambda L, \lambda K, \lambda\, H, \lambda\, N).$$

Je-li $\lambda = \frac{1}{L}$, pak rovnici přepíšeme do tvaru

$$\frac{Y}{L} = Af(1, \frac{K}{L}, \frac{H}{L}, \frac{N}{L})$$

Rovnice říká, že celospolečenská produktivita práce, měřená množstvím produktu na 1 zaměstnaného, závisí na růstu kapitálové intenzity $\frac{K}{L}$, růstu kvality pracovní síly $\frac{H}{L}$, na velikosti přírodních zdrojů na jednoho pracovníka $\frac{N}{L}$ a na růstu technologické úrovně A. Od této interpretace veličin postupuje *de facto* většina růstových modelů.

Pro interpretaci veličin růstu platí vztah

$$Y_t = Y_0 . (1 + G_r)^t$$

z kterého vyplývá, že

$$G_r = \sqrt[t]{\frac{Y_t}{Y_0}} - 1.$$

Neboli průměrné roční tempo růstu produktu představuje střední geometrické tempo růstu během t let. (Varadzin et., 2004) V průběhu 20. a 30. let minulého století sílily pochyby o užitečnosti neoklasického přístupu k analýze ekonomických jevům a tyto myšlenky se nevyhnuly ani mikroekonomii. Zpochybňovaly se předpoklady dokonalé konkurence a postupně docházelo ke vzniku teorie nedokonalé a monopolistické konkurence. Zároveň sílily snahy ekonomů o nalezení alternativního teoretického rámce pro výklad cyklického vývoje tržní ekonomiky. Nová makroekonomická teorie pochybovala o schopnostech samoregulačních tržních sil stabilizovat tržní ekonomiku na tehdejším stupni vývoje. A ačkoliv se tímto směrem ubíralo mnoho významných ekonomů té doby, za zakladatele nové makroekonomické teorie je považován anglický ekonom a politik J. M. Keynes. Tento nový makroekonomický směr dostal označení keynesiánství a přechod k tomuto přístupu byl nazván keynesovskou revolucí. Keynes je nesporně teoretikem, jehož myšlenky ovlivnily nejvíce vývoj ekonomie 20. století, přičemž keynesovská makroekonomie se stala teoretickým základem hospodářské politiky u vyspělých tržních ekonomik, s malými výjimkami, až do poloviny 70. let. První snahou o dynamizaci Keynesovy teorie byl model ekonomického růstu ekonoma R. F. Harroda, jehož model je založen na principu akcelerátoru, který vyjadřuje vliv přírůstku národního důchodu na poptávku po investicích. Přitom Harrod rozlišoval tři typy temp růstu. Skutečné tempo růstu, které definoval jako tempo růstu, které zkoumané hospodářství v daném období skutečně dosahuje, přirozené tempo růstu, které odpovídá tempu růstu jeho obyvatel a zaručené tempo růstu neboli rovnovážné tempo růstu. (Sojka, 2000)

Tzv. keynesiánská revoluce znamenala minimálně ve třech zásadních změnách pokrok v dosavadním pojetí ekonomie. Do popředí se dostala aktivní role peněz, princip efektivní poptávky a nové pojetí úspor. Tyto proměnné spojuje mechanismus multiplikátoru, který objasňuje, jakým způsobem mohou výkyvy v rozsahu investic ovlivnit výkyvy celkové nezaměstnanosti a důchodu ve značně větším rozsahu. (Varadzin et., 2004) Zkoumání vztahů mezi jednotlivými tempy růstu činí z Harrodových teorií růstu i dynamickou teorii krizí. (Sojka, 2000)

2.2 Harrodův model

Harrodův model se následně stal východiskem keynesovských a postkeynesovských teorií ekonomického růstu. Nejblíže se tomuto modelu přibližoval model E. D. Domara a jelikož Domar ve svých teorií dospívá v podstatě ke stejným závěrům, často se v literatuře setkáme s pojmem Harrod-Domarův model ekonomického růstu. Formální shodou modelů je idea, že tempo růstu investic se rovná tempu růstu důchodu. Hlavní rozdíl spočívá v tom, že Domarův model je založen na principu multiplikátoru, kdežto Harrodův na principu akcelerátoru. (Sojka, 2000)

Investice, jako součást efektivní poptávky, zvětšují důchod prostřednictvím multiplikátoru a pro nastolení stavu dynamické rovnováhy musí platit, že $S = I$. A protože podíl úspor, nebo sklon k úsporám, se považuje za stálou veličinu, je ústředním zájmem objasnit faktory, které určují velikost očekávaných investic. Domarovy myšlenky zahrnují nejen důchodotvorný, ale i kapacitutvorný efekt investic. Velikost čisté výroby, kterou je možné docílit při plné zaměstnanosti, definujeme výrobní kapacitou X a zároveň přírůstek poptávky dD se musí rovnat přírůstku nabídky dS. Takového stavu je možné docílit určitým tempem růstu kapitálu, neboť jedině investice vytvářejí přírůstek kapacit a současně přírůstek důchodu. Přírůstek nabídky pak definujeme jako

$$dS = I.\varepsilon\,,$$

kde ε zastupuje produktivitu investic $\frac{1}{X}$, která určuje, kolik nového produktu se vytvoří na jednotku investice. Tento ukazatel zahrnuje i technický pokrok, který lze zapsat jako $\frac{Y}{K}$ a ukazuje, kolik důchodu vytvoříme na jednotku kapitálu. (Varadzin et., 2004)

Přírůstek poptávky zapíšeme rovnicí

$$dD = dI.\frac{1}{\alpha}\,,$$

kde mezní sklon k úsporám α se rovná $\frac{dS}{dY}$, z čehož vyplývá, že převrácenou hodnotu $\frac{1}{\alpha}$ vyjadřuje multiplikátor $\frac{1}{1-\frac{dC}{dY}}$.

Jestliže platí vztah $\frac{dC}{dY} + \frac{dS}{dY} = 1$, pak multiplikátor můžeme zapsat ve tvaru $\frac{1}{\frac{dS}{dY}}$.

Pak

$$dI.\frac{1}{\alpha} = I.\sigma$$

a rovnice vyjadřující hledanou míru investic je

$$\frac{dI}{I} = \alpha.\sigma.$$

To znamená, že rovnovážné tempo růstu investic se rovná součinu mezního sklonu k úsporám a produktivity investic σ. Při tomto tempu růstu investic a při plné zaměstnanosti podle Domara poptávka D zabezpečuje využití výrobní kapacity X a přírůstek investic musí být tak velký, aby multiplikační efekt vyvolal takový růst poptávky, aby zabezpečil plné využití neustále se rozšiřující výrobní možnosti společnosti. Zjednodušeně řečeno, pouze akumulace může udržet dynamickou rovnováhu mezi agregátní nabídkou a poptávkou.

R. Harrod vycházel ze dvou předpokladů. Podle něj úspory tvořily stabilní část důchodu, tj. platí

$$S_t = s.Y_t$$

kde s je sklon k úsporám. Neboli objem úspor v daném čase t je dán důchody v tomto období.

Akcelerační princip investic dává do vztahu dY a dI. Harrod vycházel z Aftalionova tvrzení, tzn. přírůstek investic je funkcí přírůstku důchodu a jestliže multiplikátor vyjadřoval závislost důchodu na investicích, akcelerátor představuje závislost investic na důchodu. (Varadzin et., 2004)

Harrod zvažoval indukované investice, tj. investice vyvolané změnou důchodu dY, které představují extenzivní rozšíření kapitálu. Lze tedy zapsat rovnici

$$dI = A.dY\ ,$$

kde A je akcelerátor, který závisí na technickém pokroku. Je-li $A > 1$, technický pokrok je investičně náročný, pro $A < 1$ jde o investičně úsporný typ technického pokroku.

Autonomní investice v Harrodově modelu vznikají na základě růstu obyvatelstva a obměny kapitálu.

Velikost investic lze určit podle

$$I_t = C.(Y_{t+1} - Y_t),$$

kde C je spotřeba. Podle rovnováhy úspor a investic, $I = S$, rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$s.Y_t = C.(Y_{t+1} - Y_t).$$

Poslední rovnici upravíme podle sklonu k úsporám s a sklonu ke spotřebě c do rovnice

$$s = C.\frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t}$$

a získáme vztah $\frac{s}{c} = G,$ což je podle Harroda tzv. skutečná míra růstu.

V tomto jsou modely Harroda a Domara podobné, i když Domar řešil rovnovážnou míru růstu investic a Harrod rovnovážnou míru růstu důchodu Y.

Předpokládáme-li rovnost $dY = dI$, pak

$$\frac{dI}{I} = \frac{dY}{Y} = d\sigma = s.\frac{1}{c}.$$

Proto se často hovoří o tzv. Harrod-Domarově modelu.

Tento model ukazuje nutnost udržovat určitou míru investic, jinak by nastala nerovnováha způsobující inflaci a nezaměstnanost. Zásadním nedostatkem Harrod-Domarova modelu tkví v tom, že nezahrnuje mechanismus, pomocí kterého by docházelo k výše zmíněné rovnováze. Někdy bývá tento model nazýván modelem s rovnováhou na ostří nože. Na dalším zkoumání mechanismu dosažení rovnováhy v Harrodově modelu se podílelo mnoho postkeynesiánských ekonomů. Nejznámějším pokračováním je však model spjatý s jménem pana N. Kaldora. (Varadzin et., 2004)

2.3 Kaldorův model

Kaldorův model je popsán v mnoha učebnicích ekonomické dynamiky. Na kaldorovský model lze velmi často narazit v kapitolách nelineární ekonomické dynamiky, kde se tento model stal jádrem všech nelineárních modelů uzavřených ekonomik. (Kodera_& Vosvrda, 2005)

Kaldorův model představuje nelineární investiční a spořící funkce, které se v čase v reakci na akumulaci nebo dekumulaci kapitálu posouvají tak, že systém přechází ze stabilní rovnováhy přes nestabilní stav do další rovnováhy. Kaldor použil systém diferenciálních rovnic s obecnými nelineárními tvary, kde funkce investic I a úspor S jsou nelineární s ohledem na úroveň aktivity a měřené z hlediska zaměstnanosti.

Čistá investice I a úspory S jsou funkce národního důchodu Y a kapitálu K takové, že:

$$I = I(Y, K)$$

$$S = S(Y, K)$$

$$\frac{\partial I}{\partial Y} > 0\,, \frac{\partial S}{\partial Y} > 0\,, \frac{\partial I}{\partial K} < 0, \frac{\partial S}{\partial K} < 0\,,$$

$$\frac{\partial I}{\partial K} < \frac{\partial S}{\partial K},$$

kde Y, K závisí na čase. Investice určují růst kapitálu tak, že

$$\frac{dK}{dt} = I(Y, K)$$

a v rovnováze, platí

$$\frac{dK}{dt} = 0.$$

(Tsoularis, 2021)

Tradiční podoba Kaldorova modelu

Jelikož důchod roste, pokud jsou investice větší než úspory, dynamika národního důchodu je zachycena diferenciální rovnicí

$$\frac{dY}{dt} = \alpha[I(Y,K) - S(Y,K)],$$

pro $\alpha > 0$.

Rovnice popisuje dynamiku produkce, která je vyjádřena jako důsledek nerovnováhy mezi investicemi a úsporami. (Tsoularis, 2021)

Přírůstek kapitálu K se rovná rozdílu investic a spotřeby kapitálu. Předpokládá se, že spotřeba kapitálu je rostoucí funkcí kapitálových zásob $Z(K)$. Rovnice vyjadřující dynamiku kapitálu má následující tvar

$$K = I(Y,K) - Z(K).$$

Nezbytným a dostatečným předpokladem pro generování trvale cyklického pohybu pro normální úroveň příjmu je

$$\frac{\partial I}{\partial Y} > \frac{\partial S}{\partial Y}.$$

Naopak pro extrémní úroveň příjmu platí nerovnice

$$\frac{\partial I}{\partial Y} < \frac{0S}{\partial Y}.$$

(Tsoularis, 2021)

2.4 Cobb-Douglasova funkce

Nejznámější produkční funkce tzv. Cobb-Douglasova funkce, kterou matematik Ch. W. Cobb a P. H. Douglas zformulovali do zápisu

$$Q = A.L^{\alpha}.K^{\beta} ,$$

kde Q vyjadřuje hodnotu produkce , L a K jsou již známé symboly, koeficient A zastupuje vliv nezměřitelných faktorů, např. technický pokrok, organizace, kvalifikace aj., koeficienty α a β zastupují elasticity výdajů na práci a kapitálu. Fakt, že $\alpha + \beta = 1$ ukazuje na pružnost, s jakou je možné navzájem substituovat práci kapitálem a naopak. (Varadzin et., 2004)

Nejznámějším neoklasickým modelem růstu je Solowův-Swanův model, někdy se udává jen jako Solowův model. Tento model pojmenovaný po nositeli Nobelovy ceny Roberta Solowa a ekonoma Trevora Swana se zaměřuje na růstovou úlohu úspor, kapitálové akumulace, populační expanze a také na technický pokrok.

2.5. Solowův model

Solowův model vychází z předpokladu, že ekonomika v každém časovém okamžiku disponuje určitým počtem pracujícího obyvatelstva L_t, které roste stabilním tempem n a platí, že

$$L_{t+1} = (1 + n)L_t.$$

V daném časovém okamžiku má ekonomika k dispozici i určitou kapitálovou zásobu K_t a s těmito zdroji ekonomika vyrábí reálný důchod Y_t. Ve stavu, kdy je ekonomika uzavřená a neexistuje státní sektor, platí makroekonomická identita

$$C_t + S_t = C_t + I_t$$

a zároveň část reálného důchodu, která není investována, je spotřebována:

$$C_t = Y_t - I_t \, .$$

(Fuente, 2000)

Solow se ve svém modelu nezaměřuje na růst celkového reálného důchodu Y, ale na růst reálného důchodu na osobu $\frac{Y}{L}$ neboli na průměrnou produktivitu práce. Solowův model zejména studuje, jak se reálný důchod na osobu, spotřeba na osobu a poměr kapitálu a práce vyvíjejí v čase.

Základem Solowova modelu je produkční funkce

$$Y_t = F(K_t, A_t, L_t),$$

kde Y je důchod, K kapitál, L práce a A úroveň technologie.

Pro funkci Y_t musí platit několik podmínek. Tyto předpoklady jsou též známé jako podmínky Inada. (Fuente, 2000)

První důležitou podmínkou modelu je, aby produkční funkce $Y(t)$ byla dvakrát diferencovatelná podle kapitálu K a práce L a platí, že

$$\frac{\partial F}{\partial K} > 0 \, , \frac{\partial F}{\partial L} > 0 \, , \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \, , \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0.$$

a

$$\lim_{K \to 0} \frac{\partial F}{\partial K} = \infty \, , \lim_{L \to 0} \frac{\partial F}{\partial L} = \infty \, , \lim_{K \to \infty} \frac{\partial F}{\partial K} = 0 \, , \lim_{L \to \infty} \frac{\partial F}{\partial L} = 0 \, .$$

V důsledku Inadových podmínek se $\frac{F}{K}$ mění od nekonečna k nule podle toho, jak se K mění od nuly do nekonečna. (Fuente, 2000)

Mezní produkt faktoru, jehož množství se blíží nule, roste nade všechny meze a mezní produkt faktoru, jehož množství se blíží nekonečnu je nulový. Podmínky Inada zajišťují, že funkce F je konkávní se sklonem klesajícím z nekonečna na nulu. Z ekonomického hlediska to lze interpretovat jako konstantní výnosy z rozsahu, kdy zvýšení kapitálu a práce o určité množství, povedou k proporcionálnímu růstu výroby.

Za podmínky konstantních výnosů můžeme produkční funkci vyjádřit ve tvaru

$$y = f(k)$$

kde $y = \frac{Y}{AL}$ a $k = \frac{K}{AL}$.

Tedy v produkční funkci je důchod na jednotku efektivní práce vztažen ke kapitálu na efektivní jednotku práce.

Zákon klesajících mezních výnosů zajistí, že se časem vyčerpá možnost zvyšovat životní úroveň pomocí akumulace kapitálu a v tomto okamžiku se ekonomika dostane do ustáleného stavu, kdy

$$\frac{dK}{dt} = 0.$$

Pro změnu kapitálu $\frac{dK}{dt}$ platí, že

$$\frac{dK}{dt} = sf(k) - (n + g + z),$$

kde s je míra růstu úspor, n míra růstu populace, g míra růstu technologie a z míra znehodnocení kapitálu. V ustáleném stavu musí platit rovnost

$$sf(k) = (n + g + z)k\,.$$

Solowův model lze na závěr shrnout do několika poznatků.

Podle modelu, celkový reálný důchod Y roste tempem, které odpovídá míře růstu populace a míře růstu technického pokroku $(n + g)$. Samotný reálný důchod na osobu $\frac{Y}{L}$ roste tempem odpovídající míře technického pokroku g. (Varadzin et., 2004)

V úspěšně rozvíjející se ekonomice, kde je míra růstu kapitálu $(n+z)k$ vyšší, než míra růstu členu $(n+g)$, bude míra růstu reálného důchodu na osobu vyšší, než míra růstu odpovídající dlouhodobému růstu. U stagnujících ekonomik bude tempo růstu reálného důchodu na osobu stejné nebo nižší, než tempo odpovídající dlouhodobému růstu. Díky ale technickému pokroku bude stále pozitivní. (Varadzin et., 2004)

Dále se neoklasická teorie růstu rozvíjela v rámci pozornosti zkoumání podmínek stability, vlivu státního dluhu na hospodářský růst, zavádění heterogenního kapitálu, či vytváření generačních modelů, které berou v úvahu stáří výrobních zařízení a snažila se diferencovat vliv různých kapitálových statků na ekonomický růst. První, kdo se touto problematikou zabýval byl P. A Samuelson. (Sojka, 2000)

2.6 Samuelsonův model

I pan Paul Samuelson použil ve svém článku jednoduché diferenciální rovnice ke zkoumání stability rovnováhy poptávky a nabídky. Samuelsonova analýza stability byla zavedena na základě Walrasových a Marshalliových předpokladů. Nadměrná poptávka vyjadřuje rozdíl mezi množstvím, které jsou kupující ochotni koupit, a množstvím, které jsou dodavatelé ochotni dodat za stejnou cenu. Cena nadměrné poptávky je rozdíl mezi cenou, kterou jsou kupující ochotni zaplatit za dané množství, a cenou požadovanou dodavateli. Walrasův předpoklad popisuje, jak se cena zvyšuje, resp. klesá, pokud je nadměrná poptávka kladná, resp. záporná, zatímco Marshalliův předpoklad udává, jak se množství zvyšuje, resp. snižuje, pokud je cena nadměrné poptávky kladná, resp. negativní. (Tsoularis, 2021)

Nechť $D(p,\alpha)$ a $S(p)$ označují poptávkovou a nabídkovou funkci ceny p, s α parametrem představující sklon k nakupování. Dynamickou formulaci Walrasova předpokladu lze zapsat ve tvaru

$$\frac{dp}{dt} = f\big(D(p) - S(p)\big),$$

$$f(0) = 0,$$

$$f'(0) > 0.$$

Marshalliovy podmínky lze zapsat diferenciální rovnicí

$$\frac{dq}{dt} = g\big(p_D(q) - p_S(q)\big),$$

$$g(0) = 0,$$

$$g'(0) > 0.$$

V rovnováze jsou cena p^*,a množství q^*, dány vztahem

$$q^* = D(p^*, \alpha) = S(p^*)$$

a platí, že

$$\frac{dD}{d\alpha} > 0 \text{ a } \frac{dD}{dp} < 0.$$

Zachováním členu prvního řádu v rozvoji Taylorovy řady blízko rovnovážného bodu p^*,získáme následující lineární diferenciální rovnici

$$\frac{dp}{dt} = a_0 \left(\frac{dD}{dp} - \frac{dS}{dp} \right) (p - p^*),$$

s řešením s počáteční podmínkou p_0

$$p(t) = p^* + (p^* - p_0) e^{a_0 t \left(\frac{dD}{dp} - \frac{dS}{dp} \right)} \; .$$

Jestliže poptávka roste, cena musí být také rostoucí a následně nastane rovnovážný stav v bodě p^*, když platí

$$\left(\frac{dD}{dp} \right) < \left(\frac{dS}{dp} \right) \; .$$

(Tsoularis, 2021)

2.7 Evansův model

Smysl tržní rovnováhy je v nastolení určité tržní konjunktury, tedy určité stabilní vzájemné vazby poptávky a nabídky neboli tržních „nůžek". Vnímání způsobů nastolení tržní rovnováhy umožňuje realizovat úkoly ekonomického plánování a prognózování. Protože existuje jistá funkční závislost a poptávky na ceně produkce, odpovídá bod křížení křivek poptávky a nabídky bodu rovnováhy, přičemž cena produkce v tomto bodě vyrovnává nabídku a poptávku. Proces modelování tržní rovnováhy neboli stanovení rovnovážné ceny formuluje předmět zkoumání. Evansův model je jedním z modelů pro stanovení rovnovážné ceny. (Zabolotnii, S. & Mogilei, S.)

Nechť $S(p) = S[p(t)]$ a $D(p) = D[p(t)]$ jsou funkcemi ceny $p = p(t)$. Hlavním předpokladem modelu je, že rychlost změny ceny, její první derivace podle času, se rovná součinu rozdílu mezi nabídkou a poptávkou vynásobeného koeficientem $k \epsilon R$ označuje počet jednotek komodity dodávané na trh za jednotkovou cenu p Kč a nechť $D(p)$ odpovídá počtu jednotek poptávaných trhem za tu stejnou cenu p. Za okolností, kdy se nabídka rovná poptávce nastává tržní rovnováha za cenu p. Některé pokročilejší modely berou v potaz i to, že se cena, nabídka, poptávka v čase mění. Jeden takový model, Evansův model, předpokládá, že rychlost změny ceny v čase t je úměrný rozdílu $(D - S)$, takže

$$\frac{dP}{dt} = k(D - S),$$

pro $k > 0$. (Hoffmann & Bradley, 2010)

3. Metodika

Práce rozšiřuje pohled na matematicko-ekonomické problémy a užívá vhodné algoritmy pro jejich řešení z teoretické části práce. Praktická část pojednává o typech ekonomických úloh řešitelné prostřednictvím derivací a integrálů, a to včetně rozboru jak a proč se v daném typu úlohy tyto matematické postupy uplatní.

V ekonomické praxi veličiny jako nabídka, poptávka, cena nebo stav zásob bývá zvykem uvažovat jako funkce závislé na čase. Proměnné je možné rozdělit na měnící se pomalu veličiny, jako zásoba kapitálu, populace, přírodní zdroje a na ty, které se mění rychle, např. nezaměstnanost, zásoba zboží, platební bilance atd. V ekonomice se často setkáváme s případy, kdy proměnná y je závislá na více proměnných, zejména u dlouhodobých jevů. Produkční funkce je typickým příkladem tohoto chování.

V mnoha příkladech jevů má důležitý význam spolu s hodnotou funkce i její rychlost změny funkce v závislosti na změně argumentu. Při konečné velikosti intervalu, v němž se argument mění, je mírou této rychlosti poměrná diference. Smysl takové úvahy je zvlášť názorný, je-li argumentem čas. V takovém případě změna připadající na jednotku změny argumentu znamená změnu za jednotku času – rok, měsíc, den, hodina. K dosažení nejpřesnějšího možného výsledku musíme uvažovat, pokud možno, nejmenší interval. Obecně, mírou rychlosti změny funkce $f(x)$ v okamžiku x je veličina, která se nazývá $derivace\ funkce\ f(x)$. Rovněž u samotné derivace se můžeme ptát na rychlost její změny. Odpověď dostaneme jejím dalším derivováním. Zatímco první derivace je mírou rychlosti změny funkce, druhá derivace vyjadřuje míru rychlosti změny rychlosti neboli zrychlení funkce. I derivace vyšších řádů mohou mít reálný význam v oblasti ekonomických jevů. (Bojarskij, 1959)

Při zkoumání průběhu funkce více proměnných je přirozené vyšetřovat změnu funkce v závislosti na každém argumentu samostatně za předpokladu, že se ostatní argumenty měnit nebudou a jsou fixní. Parciální derivace funkce více proměnných nazýváme derivace podle jednoho z argumentů, za stanovených předpokladů, že ostatní argumenty jsou neměnné, tj. považujeme je za konstanty. (Bojarskij, 1959)

Ve většině úloh statické optimalizace existuje účelová funkce $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x)$, reálná funkce n proměnných, jejíž hodnota má být optimalizována. Existuje také množina omezení nebo přípustná množina, která je podmnožinou R^n, euklidovského n rozměrného prostoru $(n \geq 1)$. (Baronti a kol., 2016)

Funkci $f(x) = f\ (x_1, x_2, \dots, x_n\ )$ můžeme chápat jako speciální případ zobrazení $D_f\ \subset R^n$ do R. Grafem funkce $f(x)$ je množina bodů $[x, f(x)] \in R^n \times R$. (Škrášek, 1989)

Má-li funkce $f(x)$ na intervalu I v bodě c druhou derivaci $f''(c)$, má v bodě c i první derivaci definovanou v jistém okolí $(c - \delta, c + \delta),\ \delta > 0.$

Symbolem $f^{(n)}(c)$ rozumíme hodnotu $n - t$é derivace funkce f v bodě $c, n \geq 1.$

Existuje-li obecně $f^{(n)}(c)$, kde $n \geq 1$, pak $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n-2)}(x)$, …, $f'(x)$, $f(x)$ jsou definovány v jistém okolí $(c - \delta, c + \delta),\ \delta > 0$. (Kaňka, Henzel, 1997)

Nejjednodušším způsobem analýzy funkce n proměnných je považovat tuto funkci jako funkci jedné proměnné x_k a ostatních $n - 1$ proměnných pokládat za fixní a zkoumat změny funkce $y = f\ (x_1, x_2, \dots, x_n\ ), n\ >\ 1$, podle toho, jak se mění proměnné $x_k = t$, $k = 1, 2, \dots, n.$

Tuto formulaci lze taktéž zapsat jako

$$y = h_k(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n) \tag{1}$$

Jestliže funkce $h_k(t)$ má derivaci $h_k'(t)$ v bodě x_k, tuto derivaci nazveme parciální derivací funkce f v bodě x podle proměnné x_k, neboli

$$f_{x_k}(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = h_k'(x), \qquad k = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

Zderivujeme-li funkci $f_{x_i}(x_1, x_{2,\dots,} x_n),$, $i = 1, 2, \dots, n$, podruhé podle proměnnéx_k, dostaneme druhou parciální derivaci funkce f podle proměnných x_i, x_k neboli

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{d}{dx_k}\left(\frac{df(x)}{dx_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right)\ . \tag{3}$$

(Kaňka, Henzel, 1997)

Má-li spojitá funkce f v každém vnitřním bodě intervalu I má druhou derivaci $f''(c)$, pak pro

$$f''(x) > 0, resp. f''(x) < 0 \tag{4}$$

je funkce f konvexní, resp. konkávní na intervalu I.Neboli, funkce f je konvexní, resp. konkávní na intervalu I, je-li f' rostoucí, resp. klesající funkcí na intervalu I. (Kaňka, Henzel, 1997)

Podstata sestavení diferenciální rovnice spočívá ve vyšetřování nekonečně malých změn daných veličin, přičemž zanedbáme nekonečně malé veličiny vyšších řádů. (Bojarskij, 1959)

Obyčejné diferenciální rovnice jsou diferenciální rovnice, jejichž řešením jsou funkce jedné nezávisle proměnné, kterou obvykle označujeme x. Proměnná x často znamená čas a řešení $y(x)$, které hledáme, obvykle znamená nějakou ekonomickou veličinu, která se mění s časem. Proto považujeme $y(x)$ za závisle proměnnou. Pokud rovnice zahrnuje až $i - tou$ derivaci, je nazývaná jako diferenciální rovnice $i - tého$ řádu $(i \geq 1)$. (Baronti a kol., 2016)

Obyčejnou diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, v níž vystupuje neznámá funkce $y(x)$ s proměnnou x a její derivací $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$. Řádem diferenciální rovnice se rozumí řád nejvyšší derivace neznámé funkce $y(x)$ v rovnici.

Diferenciální rovnice prvního řádu

Spojitá reálná funkce $f(x, y)$ dvou reálných proměnných definovaná na množině $(a, b) \times (c, d)$. Řešením diferenciální rovnice prvního řádu

$$y' = f(x, y) \tag{5}$$

rozumíme každou reálnou funkci jedné reálné proměnné $\phi(x)$ definovanou na intervalu $I \subseteq (a, b)$ takovou, že pro každé $x \in I$ platí

$$\phi'(x) = f\big(x, \phi(x)\big). \tag{6}$$

Nechť I_1 a I_2 jsou otevřené intervaly, řešení rovnice (2.1) jsou určena počáteční podmínkou $\phi(x_0) = y_0$ jednoznačně, jestliže jsou $\phi_1 : I_1 \to R$ a $\phi_2 : I_2 \to R$ řešení a existuje

$x_0 \in I_1 \cap I_2$ takové, že $\phi_1(x_0) = \phi_2(x_0)$, pak $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ pro každé $x \in I_1 \cap I_2$. (Kaňka, 1996)

Řešit diferenciální rovnice znamená najít vztah mezi samotnými proměnnými, tj. vyjádřit některé jako funkce ostatních. Za vyřešenou diferenciální rovnici pokládáme i takovou, kdy jednu proměnnou vyjádříme pomocí integrálů obsahující další proměnnou jako *integrand*. Přičemž výpočet samotného integrálu pokládáme za jinou úlohu, úlohu integrování. (Bojarskij, 1959)

Víme, že je-li spojitá funkce $f(x)$ na intervalu (a, b), pak takových funkcí na (a, b) splňujících podmínku $y' = f(x)$, existuje nekonečně mnoho.

Obyčejnou diferenciální rovnici $n - t\acute{e}ho$ řádu s nezávisle proměnnou x a neznámou funkcí y zapíšeme ve tvaru

$$\phi(x, y, y', y'', \dots, y(n)) = 0, \tag{7}$$

kde ϕ je funkce $(n + 2)$ proměnných. Řešit diferenciální rovnici (4.1), znamená nalézt všechny funkce

$$y = \phi(x),$$

které vyhovují dané diferenciální rovnici. Takovou rovnici lze psát obecně ve tvaru

$$\phi(x, y, y') = 0. \tag{8}$$

Dokážeme-li z rovnice (8) vypočítat y' jako funkci proměnných x, y, dostaneme rovnici ve tvaru

$$y' = f\,(x, y).$$

Nejjednodušší typ této rovnice můžeme zapsat ve tvaru

$$y' = f\,(x). \tag{9}$$

Dokážeme-li nalézt k funkci $f(x)$ funkci primitivní, zvládneme již také vyřešit diferenciální rovnici (9).

Funkce

$$y(x) = \int f(x)dx + c \tag{10}$$

je obecným řešením diferenciální rovnice prvního řádu $y' = f(x)$ na intervalu (a, b). Řešení ve tvaru (10), které obsahuje libovolnou konstantu c, nazýváme *obecné řešení diferenciální rovnice 1. řádu*. Máme-li $y_1(x)\ a\ y_2(x)$ dvě řešení rovnice $y' = f(x)$, pak pro každé $x \in (a, b)$ se $y_1(x)\ a\ y_2(x)$ liší o integrační konstantu.

Partikulární řešení diferenciální rovnice je právě to řešení, které dostaneme, když z množiny všech řešení vybereme to řešení, které prochází pevně zvoleným bodem $[x_0, y_0] \in (a, b) \times R$. Takové řešení rovnice $y' = f(x)$ vyhovuje počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$.

Některé diferenciální rovnice lze formálně přepsat tak, že všechny členy obsahující nezávisle proměnnou bude na jedné straně rovnice a všechny členy se závisle proměnnou budou na druhé straně. Takové diferenciální rovnice se nazývají separovatelné a lze je vyřešit metodou dvojí integrací.

Řešením diferenciální rovnice se rozumí reálná funkce jedné reálné proměnné

$$y = \phi(x) \tag{11}$$

definované na otevřeném intervalu $I \subseteq (a; b)$ taková, aby platilo, že

$$\phi^{(n)}(x) = f\left(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n-1)}(x)\right) \tag{12}$$

pro každé $x \in I$, kde I je definiční obor řešení ϕ. (Kaňka, 1996)

Řešení diferenciální rovnice s počáteční podmínkou.

Nechť I_1 a I_2 jsou otevřené intervaly, řešení ϕ_1, ϕ_2 rovnice

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \tag{13}$$

jsou určena jednoznačně počátečními podmínkami, jestliže platí, že $\phi_1: I_1 \to R$ a $\phi_2: I_2 \to R$ jsou řešením a zároveň existuje $x_0 \in I_1 \cap I_2$, takové, že platí

$$\phi_1(x_0) = \phi_2(x_0),\ \phi_1'(x_0) = \phi_2'(x_0),\ \dots,\ \phi_1^{(n-1)}(x_0) = \phi_2^{(n-1)}(x_0).$$

Pak platí

$$\phi_1(x) = \phi_2(x)$$

pro každé $x \in I_1 \cap I_2$.

Počáteční úloha rovnice (13) je řešení $\phi(x)$ diferenciální rovnice takové, aby platilo

$$\phi(x_0) = y_0$$

$$\phi'(x_0) = y_1, \phi''(x_0) = y_2, \dots, \phi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

kde $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in I \times (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$ jsou reálné konstanty. (Kaňka, 1996)

Separace proměnných

Diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ zapsané ve tvaru

$$y' = f(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)} \tag{14}$$

nazveme rovnicemi se separovatelnými proměnnými, kde $g(x)$ je spojitá funkce na intervalu (a, b) a funkce $h(y)$ je spojitá na intervalu (c, d), za podmínky, že pro každé $y \in (c, d)$ se $h(y) \neq 0$.

Rovnici (14) pak lze zapsat ve tvaru

$$h(y)y' = g(x). \tag{15}$$

Označíme-li funkcí $y = \phi(x)$ řešení rovnice (4.3) na intervalu $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$, pak pro každé $x \in (\alpha, \beta)$ je $\big(x, \phi(x)\big) \in (\alpha, \beta) \times (c, d)$ a platí, že

$$h\big(\phi(x)\big).\phi'(x) = g(x). \tag{16}$$

Integrací obou stran rovnice dostaneme

$$\int h\big(\phi(x)\big).\phi'(x) = \int g(x)$$

a z věty o integrací metodou substituce plyne vztah

$$\int h(y)dy = \int g(x). \tag{17}$$

Máme-li řešení rovnice na intervalu $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$ funkci ϕ, pak platí

$$H\big(\phi(x)\big) = G(x) + C, \tag{18}$$

kde $H(y)$ je primitivní funkce k funkci $h(y)$ a $G(x)$ je primitivní funkce k funkci $g(x)$ na tomto intervalu.

Je-li funkce $\phi(x)$ řešení rovnice (9) na intervalu (α, β), které vyhovuje počáteční podmínce $\phi(x_0) = y_0$ pro $(x_0, y_0) \in (\alpha, \beta) \times (c, d)$, pak lze (12) lze zapsat

$$c = H\big(\phi(x_0)\big) - G(x_0) = H(y_0) - G(x_0). \tag{19}$$

(Kaňka, 1996)

Řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu

Nechť h a g jsou reálné spojité funkce jedné reálné proměnné na intervalu (a, b).

Při řešení diferenciální rovnice ve tvaru

$$y' + hy = g \tag{20}$$

rovnici vyřešíme pro případ, kdy g je na intervalu (a, b) nulová funkce:

$$y' + hy = 0. \tag{21}$$

Je-li P primitivní funkce k funkci p a existuje-li řešení $y = y(x)$ na intervalu (a, b), pak platí

$$(y' + hy)e^P = 0$$

Ze vztahu $(y'e^P + hye^P) = (ye^P)'$ plyne, že

$$(ye^P)' = 0$$

$$ye^P = c$$

$$y = c.e^{-P}, \tag{22}$$

kde c je libovolná reálná konstanta.

Existuje-li právě jedno řešení rovnice $y' + hy = 0$ vyhovující počáteční podmínce $\phi(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in (a, b)$, pak platí, že

$$\phi(x) = ce^{-\int_{x_0}^{x} h(t)dt} \tag{23}$$

je řešením rovnice (16) na intervalu (a, b). Z počáteční podmínky $\phi(x_0) = y_0$ plyne, že $y_0 = c$. Řešení vyhovující této počáteční podmínce pak lze zapsat ve tvaru

$$\phi = y_0 e^{-H}. \tag{24}$$

(Stepanov, 1950)

Řešení lineárních rovnic 1. řádu se pomocí integračního faktoru

Řešení lineárních rovnic 1. řádu se pomocí integračního faktoru redukují na výpočet 2 primitivních funkcí, kdy integrační faktor je vhodně zvolená funkce, kterou násobíme studovanou rovnici tak aby se stala zobecněnou lineární diferenciální rovnicí 1. řádu, tzv. rovnicí ve tvaru totálního diferenciálu.

Lineární diferenciální rovnicí 1. řádu rozumíme rovnici

$$y' = g(x) - h(x)y. \tag{25}$$

Rovnice je lineární, protože závislost na pravé straně jé lineární na neznámé funkci $y = y(x)$, koeficienty rovnice $h(x)$ a $g(x)$ jsou obecně nelineární funkce x.

Pro rovnici (25) a pro $h(x)$ a $g(x)$ spojité na I platí

$$G(x) = \int g(x)e^{H(x)}dx,$$

$$H(x) = \int h(x)dx.$$

Nechť $c \in R$ je libovolné, potom

$$y(x) = e^{-H(x)}[G(x) + c] \tag{26}$$

je řešení rovnice (25) na I a výraz $F(x) = e^{H(x)}$ se nazývá integrační faktor. (Stepanov, 1950)

Software Maple

Matematický software Maple vyvinula kanadská společnost Maplesoft2 během třiceti let špičkového výzkumu počítačové algebry. Tento software představuje uživatelsky přívětivé prostředí pro provádění matematického modelování a matematických výpočtů, včetně propočtů ekonomických problémů. Ekonomie je společenská věda, jejíž předmětem je zkoumání chování společnosti, institucí a jednotlivců, ze kterých se skládá. Nazývá se vědou, protože odráží skutečnost a jako v každé vědní disciplíně se znalosti budují prostřednictvím vědeckých metod. To jednoduše znamená, že poznatky v ekonomické oblasti jsou podrobeny zkoumání, které je logické a zároveň empirické. Ekonomové jsou tak často vyzýváni těmi, kdo zastávají rozhodovací pozice, ve vládě a soukromém sektoru, aby poskytli ekonomický vhled do rozhodovacího procesu. Základ pro ekonomické analýzy na úrovni rozhodování je zaměřen na matematické modelování reálných ekonomických jevů, které může mít různé rysy vyplývající z odlišného přístupu, metod nebo dostupnosti prostředků. Maple pomáhá analyzovat, zkoumat, vizualizovat a řešit matematické problémy v ekonomii a finančním inženýrství. Maple poskytuje také různé balíčky, například balíček Finance obsahující mnoho nástrojů pro pokročilé finanční modelování a také dostupné nástroje pro osobní finance. Na straně osobních financí existují nástroje, které lze použít pro výpočet hypoték nebo penzijních balíčků. Balíček finančního modelování podporuje širokou škálu stochastických procesů používaných ve finančním inženýrství, včetně procesů pro modelování cen akcií. Všechny výpočty v Maplu jsou prováděny výpočetní technikou, na základě principu příkazového procesoru, který se skládá ze dvou částí, jádra a matematické knihovny. Jádro je výpočetní podstatou Maple a obsahuje základní vybavení potřebné pro provoz a funkci programu Maple. Maple se také skládá z rozšíření jádra, kolekcí externích zkompilovaných knihoven, které jsou součástí, aby poskytovaly nízkoúrovňové programovací funkce. Načež matematická knihovna obsahuje většinu příkazů a obsahuje funkce pro mnohé matematické oblasti, včetně počtu, lineární algebry, teorie čísel a kombinatoriky. (Chvátolová, Hřebíček, 2022)

Všechny příkazy knihovny jsou implementovány v programovacím jazyce Maple na vysoké úrovni, takže je mohou uživatelé prohlížet a upravovat. Naučením se programovacího jazyka Maple mohou uživatelé vytvářet vlastní programy a balíčky a rozšiřovat knihovnu Maple. Většina tamních matematických algoritmů je napsána v programovacím jazyce Maple. Uživatelé Maple mohou psát programy pomocí stejných základních nástrojů, které používají sami vývojáři Maple. Základní grafické uživatelské rozhraní Maple se skládá z pracovních listů, což jsou soubory, které dokumentují, jak řešit matematické problémy z oblasti matematiky, vědy a techniky. Maple poskytuje pracovní listy, které jsou interaktivní a opakovaně použitelné. Mohou být použity místo kalkulaček, tabulkových aplikačních programů a místo programů psané v jazycích jako C, Java, Visual Basic atd. Konkrétně v pracovních listech mohou uživatelé Maple provádět výpočty, manipulovat s matematickými výrazy a popsat proces řešení problémů. Během procesu řešení problému může Maple vzít výsledek jednoho výpočtu a použít jej jako vstup pro další výpočet. Maple tak může řešit velmi komplikované matematické problémy v ekonomii. (Chvátolová, Hřebíček, 2022)

4. Praktické příklady s využitím softwaru Maple

4.1 Produkční funkce

Produkční funkce popisuje technologii výrobního procesu a ukazuje, jak produkce komodity závisí na výrobních inputech - práci, kapitálu a případně půdě. Obecně můžeme příklad produkční funkce zapsat jako

$$Q = f(K, L),$$

kde Q je produkce, tj. počet jednotek na jednotku času, K je kapitál a L je práce, tj. počet zaměstnanců nebo počet hodin práce.

Mezi produkční funkce, které jsou široce využívány v ekonomické analýze, patří Cobb-Douglasova funkce, kterou lze obecně zapsat jako

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta},$$

kde $A > 0$ je konstanta dostupné úrovně technologie, $0 < \alpha < 1$ značí výstupní elasticitu práce, $0 < \beta < 1$ značí výstupní elasticitu kapitálu a zároveň platí, že $L > 0, K > 0$.

Pokud $\alpha + \beta = 1$, návraty z rozsahu jsou konstantní. To znamená, že zdvojnásobení množství kapitálu i práce by vedlo k dvojnásobnému výstupu. Výstupní elasticita je citlivost celkového množství produkce na změny množství výrobního faktoru. Je to procentní změna celkové produkce vyplývající z procentní změny faktoru. Čím více kapitálu nebo práce použijeme, tím více zboží získáme. Každá z těchto hodnot je kladná konstanta, a ne větší než 1 a jsou závislé na úrovni dostupné technologie. V praxi musí být menší než 1, protože dokonalý výrobní proces neexistuje, dochází k neefektivitě práce a kapitálu, tedy

$$Q = AL^{\alpha}K^{\beta} = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}.$$

Parciální derivace Cobb-Douglasovy funkce vyjadřují mezní funkce, označované jako mezní produkty. (Bradley & Patton, 2002)

Mezní produkt kapitálu je definován jako derivace produktu podle kapitálu s konstantními dalšími vstupy (práce), tedy

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$$

Podobně, mezní produkt práce lze zapsat

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}.$$

Jeli

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = A\alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha} = A\alpha\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha-1} > 0\,,$$

pak pro konstantní kapitál K, produkce Q vzroste s tím, jak roste vstup práce L, jeli

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = A(1-\alpha)L^{\alpha}K^{-\alpha} = A(1-\alpha)\left(\frac{L}{K}\right)^{\alpha} > 0\,,$$

pak pro konstantní vstup práce L, produkce Q vzroste s tím, jak roste kapitál K. (Bradley & Patton, 2002)

Dvouvstupovou Cobb-Douglasovu produkční funkci lze graficky znázornit ve formě izokvant, to je kombinací obou vstupů, pro které je výstup konstantní. Izokvanta vyjadřuje implicitní vztah mezi K a L dávající kombinace, které vedou k růstu v dané úrovni výstupu. Typická izokvanta má rovnici

$$Q(K, L) = \bar{Q}\,,$$

kde $\bar{Q}$ je kladná konstanta představující konkrétní výstupní úroveň. Vzhledem k tomu, že mezní produkty jsou kladné, bude tato izokvanta klesající křivka v souřadnicích os K a L. Pokud se kapitálový vstup zvýší, zatímco výstup Q zůstane nezměněn, vstup práce musí být pro kompenzaci snížen. (Bradley & Patton, 2002)

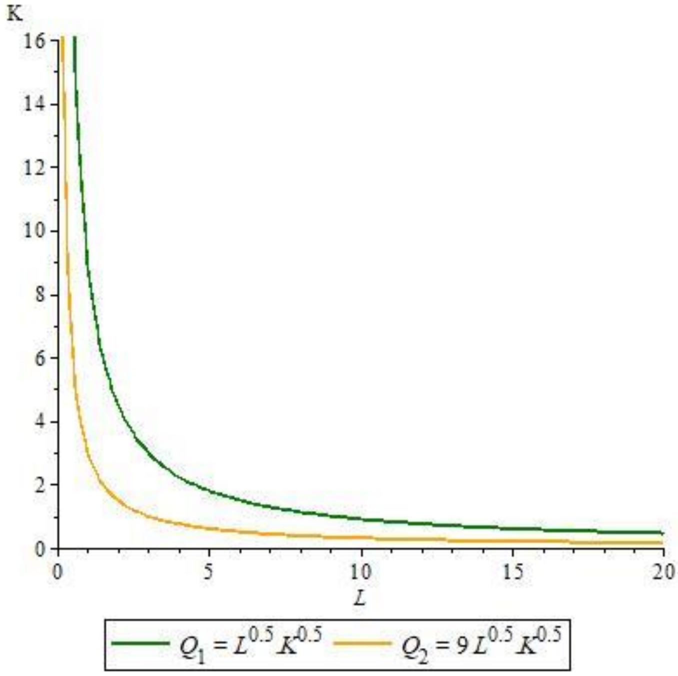
Izokvanty vyjadřují implicitní vztah mezi K a L dávající kombinace (K, L), které vedou k růstu v dané úrovni výstupu.

Typická izokvanta má rovnici

$$F(K, L) = \bar{Q}\ ,$$

kde $\bar{Q}$ je kladná konstanta představující konkrétní výstupní úroveň. Vzhledem k tomu, že mezní produkty jsou kladné, bude tato izokvanta klesající křivka v souřadnicích os K a L. Pokud se kapitálový vstup zvýší, zatímco výstup Q zůstane nezměněn, vstup práce musí být pro kompenzaci snížen. (Bradley & Patton, 2002)

Izokvanty dvouvstupové Cobb-Douglasovy produkční funkce pro dvě různé hodnoty technické úrovně, $A_1 = 1\ a\ A_2 = 9$, je znázorněn na Obrázku 1.



Obrázek 1: Izokvanty produkční funkce

Situaci snadno namodelovat pro případ, kdy firma zvýší stav přesně o p pracovníků $(p > 0)$, což implicitně znamená, že její kapitál se sníží o k jednotek při zachování množství produkci $\bar{Q}$, neboli

$$\bar{Q} = A(L_0 + p)^{\alpha}(K_0 - k)^{1-\alpha}$$

$$\frac{\bar{Q}}{A(L_0 + p)^{\alpha}} = (K_0 - k)^{1-\alpha}$$

$$k = \sqrt[1-\alpha]{\frac{\bar{Q}}{A(L_0 + p)^{\alpha}}} - K_0\ .$$

Právě funkce k vyjadřuje kompenzaci neboli snížení kapitálu pro zachování stejné produkce v závislosti na proměnné p, například v případě zvýšení stavu právě o p pracovníků s původními vstupy kapitálu K_0, práce L_0 a konstantou technické úrovně A.

Cobb-Douglasova funkce vykazuje klesající výnosy z každého faktoru, což je potvrzeno zápornými druhými derivacemi

$$Q_{LL} = \frac{\partial(MP_L)}{\partial L} = (\alpha - 1)\frac{A\alpha L^{\alpha}K^{\beta}}{L^2} = (\alpha - 1)\frac{\alpha Q}{L^2} < 0$$

$$Q_{KK} = \frac{\partial(MP_K)}{\partial K} = (\beta - 1)\frac{A\beta L^{\alpha}K^{\beta}}{K^2} = (\beta - 1)\frac{\beta Q}{K^2} < 0$$

Zákon klesajících výnosů z práce pro $Q_{LL} < 0$ říká, že při konstantním kapitálu K, se produkce Q zvyšuje, ale zpomalujícím se tempem, protože MP_L klesá, když se zvyšuje vstup práce L.

Naopak zákon klesajících výnosů z kapitálu $Q_{KK} < 0$ vyjadřuje situaci, kdy při konstantní práci L, se produkce Q zvyšuje, ale zpomalujícím se tempem, protože MP_K klesá, když se zvyšuje vstup kapitálu K. (Bradley & Patton, 2002)

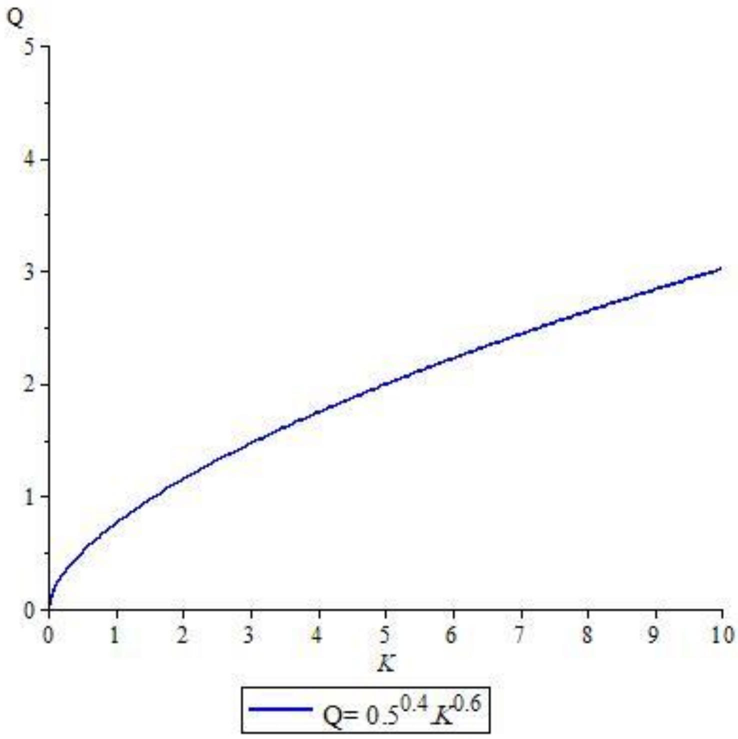
Pro názornost, předpokládejme, že máme funkci

$$Q = L^{\alpha}K^{1-\alpha},$$

kde $\alpha \in [0,1]$, konstanta $A = 1$. Pro první případ si představme Cobb-Douglasovu produkční funkci s výstupem jako funkcí kapitálu, přičemž množství práce je konstantní na L.

Obrázek 2. zobrazuje nahoru se svažující konkávní křivku funkce Q s rostoucím kapitálem pro $L = 0{,}5$:

$$Q = 0{,}5^{0{,}4}K^{0{,}6}.$$

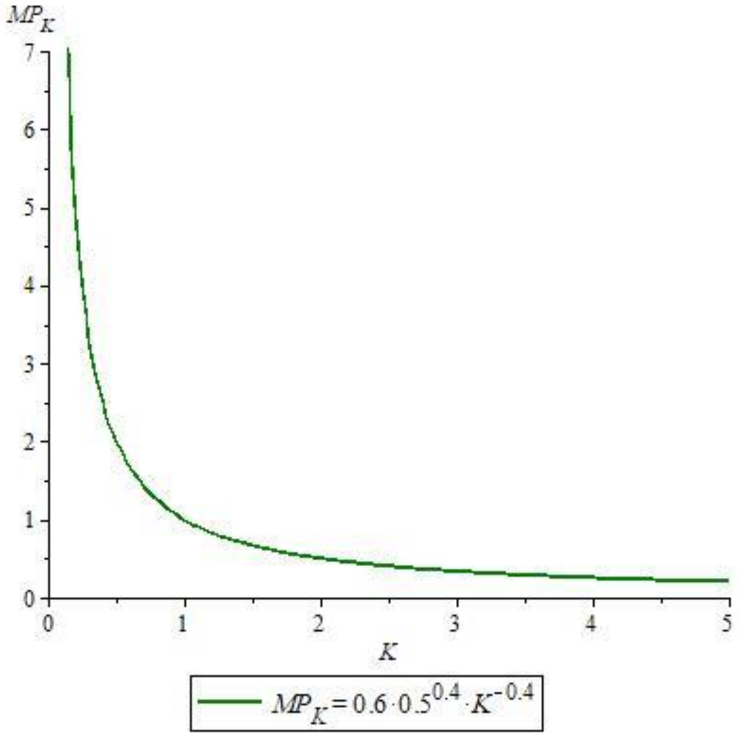


Obrázek 2: Cobb-Douglasova funkce s ohledem na kapitál K

Funkce je rostoucí, tedy vykazuje rostoucí návratnost kapitálu, kde jakékoli zvýšení kapitálu povede ke zvýšení výstupu za předpokladu, že práce zůstane konstantní. Navíc funkce je konkávní a zvyšuje se tedy klesající rychlostí. To dokazuje klesající mezní výnosy z kapitálu, přičemž jakákoli další jednotka kapitálu povede k menšímu a menšímu nárůstu kapitálu.

Pro lepší představu si vezměme parciální derivaci Cobb-Douglasovy funkce s ohledem na kapitál. Obrázek 3. ukazuje konvexní klesající křivku MP_K pro konstantní práci L = 0,5:

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = 0{,}6.\,0{,}5^{0{,}4}.\,K^{-0{,}4}$$



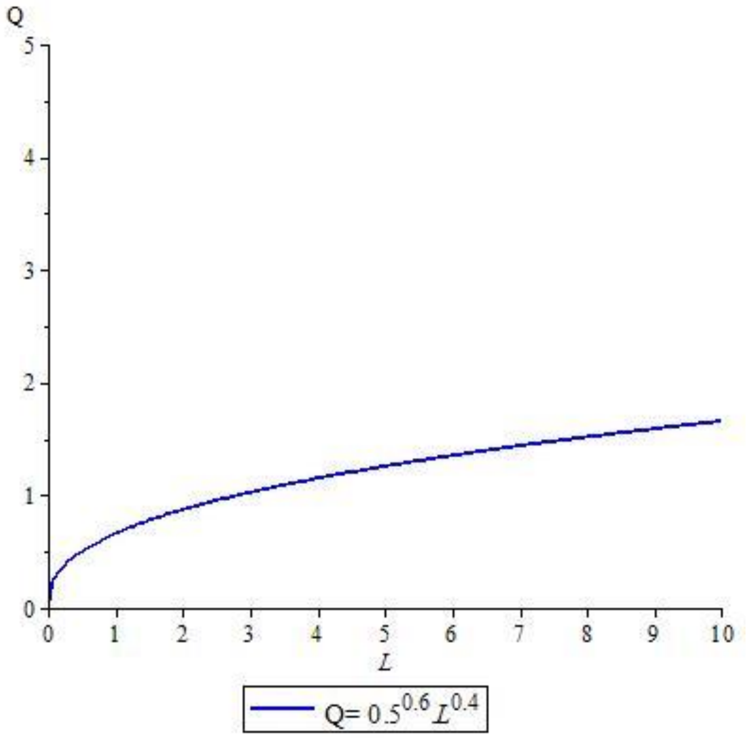
Obrázek 3: Mezní výnosy z kapitálu K

MP_K monotónně klesá, konverguje k asymptotě při $MP_K = 0$. To znamená, že míra růstu výstupu v důsledku nárůstu kapitálu bude nulová, což znamená, že množství výstupu přidaného na jednotku dodatečného kapitálu bude konstantní. Proměnná K je zde umocněna na záporný exponent, de facto je ve jmenovateli, takže derivace produkce je klesající funkcí této proměnné a tato produkční funkce splňuje zákon klesajícího produktu, takže pro ostatní fixní proměnné, rostoucí objem kapitálu K přinese menší dodatečnou produkci.

Nyní přejdeme k použití Cobb-Douglasovy funkce pro výstup jako funkci práce, přičemž množství kapitálu zůstane konstantní na K.

Na obrázku 4. lze vidět konkávní křivku produkční funkce Q pro $K = 0{,}5$:

$$Q = 0{,}5^{0{,}6} L^{0{,}4}.$$

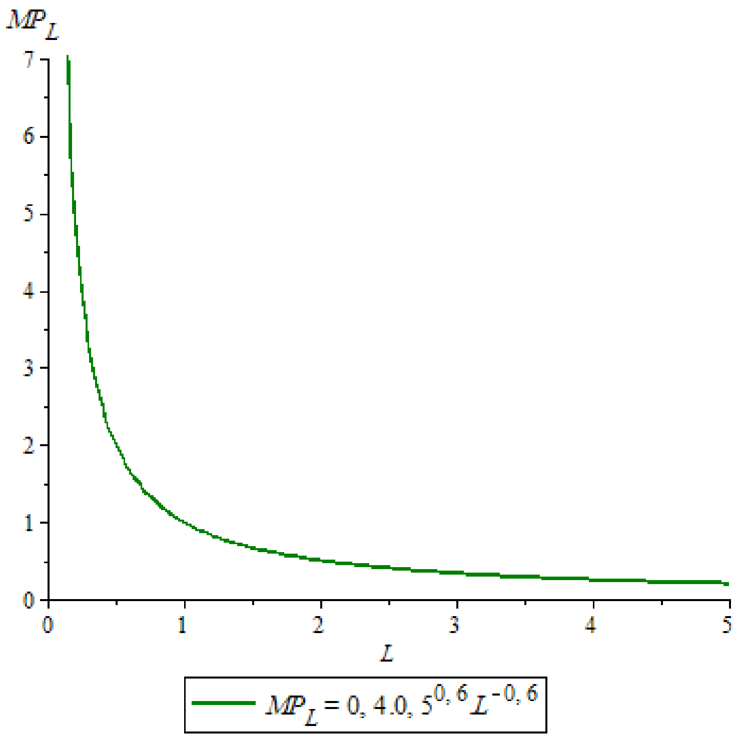


Obrázek 4: Cobb-Douglasova funkce s ohledem na práci L

Vlastnosti pracovní funkce jsou podobné jako u kapitálové funkce.

Vezměme parciální derivaci Cobb-Douglasovy funkce s ohledem na práci, následující Obrázek 5. ukazuje konvexní klesající křivku s MP_L klesající s prací a $K = 0{,}5$:

$$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = 0{,}4.\, 0{,}5^{0{,}6}.\, L^{-0{,}6}$$



Obrázek 5: Mezní výnosy z práce L

Podobně jako MP_K, MP_L monotónně klesá a konverguje k asymptotě při $MP_L = 0$. To znamená, že míra růstu výstupu v důsledku zvýšení práce bude nulová. Podle zákona klesajícího produktu platí, že je-li kapitál jako výrobní faktor považován za fixní, derivace produkce podle práce L je, nad určitý minimální rozsah užití faktoru práce, klesající funkcí objemu faktoru práce.

Implicitní diferenciací, sklon křivky izokvanty je

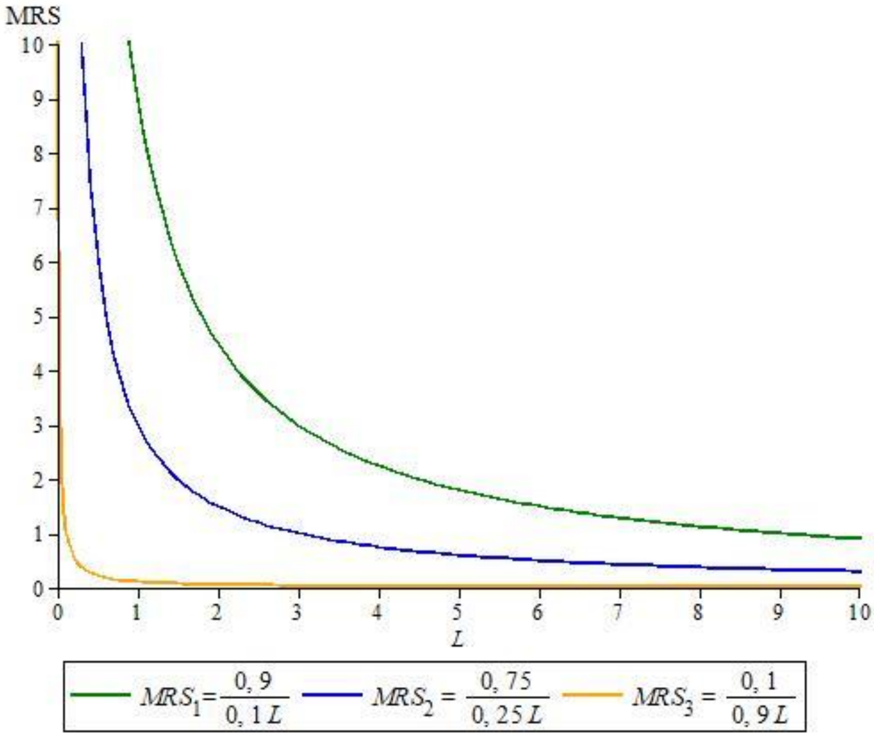
$$MRS = \frac{\frac{dQ}{dL}}{\frac{dQ}{dK}} = \frac{A\alpha L^{\alpha-1}K^{1-\alpha}}{A(1-\alpha)L^{\alpha}K^{-\alpha}} = \frac{\alpha K}{(1-\alpha)L}$$

kde výraz v čitateli měří míru, kterou musí být práce nahrazena kapitálem, aby se zachoval stejný celkový výstup, a je znám jako mezní míra substituce práce kapitálem, zkráceně MRS.

Produkční funkce Q má vlastnost zmenšující se mezní míry substituce. Pokud MRS klesá, když se kapitál zvyšuje a práce snižuje podél izokvanty, snížení MRS znamená, že sklon izokvanty se stává mírnějším, když se po ni pohybujeme doprava. MRS je tedy poměr mezního produktu práce k meznímu produktu kapitálu. (Bradley & Patton, 2002)

Definice MRS jako kladného čísla nám například umožňuje říci, že MRS je vyšší v bodech, kde je indiferenční křivka strmější, zatímco sklon indiferenční křivky je v takových bodech zápornější.

Grafy funkcí $MRS_{1,2,3}$ s konstantním kapitálem $K = 1$ a různými hodnotami $\alpha_1 = 0{,}9$, $\alpha_2 = 0{,}75$, $\alpha_3 = 0{,}1$ je na následujícím Obrázku 6:



. **Obrázek 6: Mezní míra substituce práce kapitálem**

Je důležité poznamenat, že MRS je funkce a ukazuje strmost křivky v bodě.

Derivace

$$\frac{dMRS}{d\alpha} = \frac{K}{(1-\alpha)^2 L}$$

ukazuje, o kolik strmější bude indiferenční křivka procházející v bodě, pokud změníme parametr α. Pokud α stoupá, pak vstup na ose *x* pokládáme za více vážený.

4.2 Evansův model

Model je popsán pomocí diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty. Model připouští, že cena produktu je známá a vlastní cenová funkce souvisí s časem. Výsledkem řešení problému v jeho současné podobě je tedy změna ceny související s časem. Klasický Evansův model předpokládá lineární vztah nabídky a poptávky k ceně produktu. (Zabolotnii, S. & Mogilei, S.)

Evansův model řešený pomocí integračního faktoru

Mějme lineární funkce poptávky D a nabídky S dané předpisem $D = 100 - 2p$ a $S = 40 + 2p$.

Úkolem je najít cenu $P(t)$, jestliže v čase $t = 0$ je cena 50 Kč a v čase $t = 2$ komodita stojí 48 Kč za každou jednotku. Co by s cenou stalo v dlouhodobém horizontu?

Rychlost změny ceny $P(t)$ je dána diferenciální rovnicí

$$\frac{dp}{dt} = k(D - S) = k[(100 - 2p) - (40 + 2p)] = k(60 - 4p)$$

$$\frac{dp}{\mathrm{dt}} = (60k - 4pk)$$

$$\frac{dp}{\mathrm{dt}} + 4pk = 60k$$

Integrační faktor $F(t)$ je

$$F(t) = e^{\int 4kdt} = e^{4kt}$$

a podle rovnice (26) dostaneme

$$P_1(t) = \frac{1}{e^{4kt}}\left(\int e^{4kt}(60k)dt + C\right) = e^{-4kt}\left(\frac{60ke^{4kt}}{4k} + C\right) = 15 + Ce^{-4kt}.$$

Pro $P_1(0) = 50$ dostaneme rovnici

$$P_1(0) = 50 = 15 + C,$$

tedy

$$C = 35$$

a

$$P_1(t) = 15 + 35e^{-4kt}.$$

Pro úplnost dopočteme konstantu k ze vztahu $p = 48$, když $t = 2$:

$$48 = p(2) = 15 + 35e^{-4k(2)} = 15 + 35e^{-8k}$$

Osamostatněním e^{-8k} a zlogaritmováním rovnice dostaneme

$$e^{-8k} = \frac{33}{35}$$

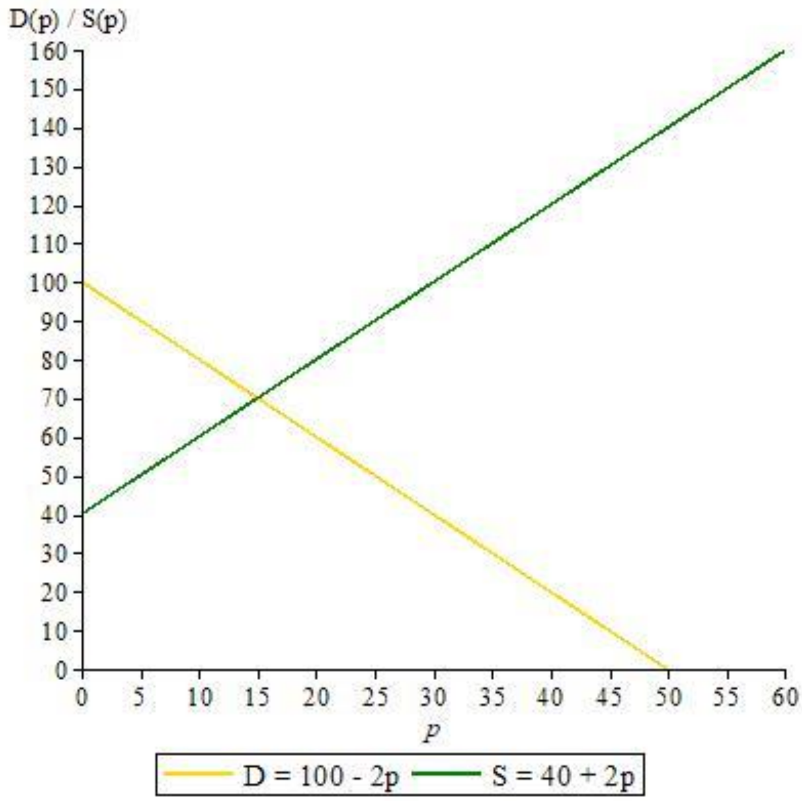
$$-8k = \ln\left(\frac{33}{35}\right) \approx -0{,}059$$

$$k \approx 0{,}007.$$

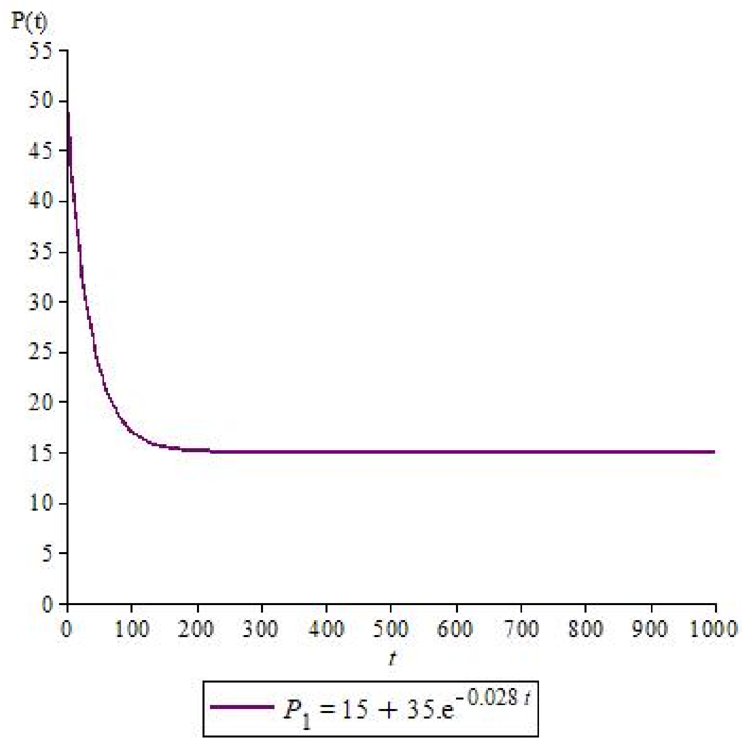
Podle konstanty k se každém okamžiku cena mění rychlostí 0,7 % rozdílu $D(p) - S(p)$, v dlouhodobém horizontu se cena $P_1(t)$ blíží limitě

$$\lim_{t\to\infty} P_1(t) = \lim_{t\to\infty} 15 + 35e^{-0{,}028t} = 15 + 0 = 15\ K\text{č}.$$

Jak čas t neomezeně roste, hodnota $e^{-0{,}028t}$ se blíží k nule a cena $P_1(t)$ se limitně blíží k 15 Kč, což je cena, při které se nabídka rovná poptávce, viz Obrázek 7.. To znamená, že v dlouhodobém horizontu se $P_1(t)$ blíží rovnovážné ceně komodity 15 Kč tak, jako ze ukázáno na Obrázku 8..



Obrázek 7: Graf lineárních funkcí poptávky D(p) a nabídky S(p)



Obrázek 8: Graf ceny $P_1(t)$

Evansův model nelineární nabídky řešený separací proměnných

Mějme lineární funkci poptávky D a nelineární funkci nabídky S dané předpisem $D = 100 - 2p$ a $S = 40 + 2p^2$.

Úkolem je najít cenu $P(t)$, jestliže v čase $t = 0$ je cena $50\ K\check{c}$ a v čase $t = 2$ komodita stojí $48\ K\check{c}$. Opět se ptáme, co by s cenou stalo v dlouhodobém horizontu?

Rychlost změny ceny $P(t)$ je dána diferenciální rovnicí

$$\frac{dp}{dt} = k(D - S) = k[(100 - 2p) - (40 + 2p^2)] = k(60 - 2p - 2p^2).$$

Separací proměnných obdržíme rovnici

$$\int \frac{dp}{-2(-30 + p + p^2)} = \int k\, dt\,.$$

Úpravou zlomku na parciální zlomky a integrací dostaneme

$$\int \left[\frac{22}{(p+6)} - \frac{22}{(p-5)}\right] dp = \int k\, dt$$

$$22\, ln|P(t) + 6| - 22\, ln|P(t) - 5| = kt + C_1$$

$$22\, ln\left|\frac{P_2(t) + 6}{P_2(t) - 5}\right| = kt + C_1$$

$$ln\left|\frac{P_2(t) + 6}{P_2(t) - 5}\right| = \frac{kt + C_1}{22}$$

$$\frac{P_2(t) + 6}{P_2(t) - 5} = e^{\frac{kt + C_1}{22}} = e^{\frac{kt}{22}} e^{\frac{C_1}{22}} = Ce^{\frac{kt}{22}},$$

kde $C = e^{\frac{C_1}{22}}$ je libovolná konstanta.

Dále algebraickými úpravami vyjádříme z rovnice funkci ceny tak, že

$$P_2(t) = \frac{6 + 5Ce^{\frac{kt}{22}}}{-1 + Ce^{\frac{kt}{22}}}.$$

Pro výpočet konstanty C, dosadíme vztah $p(0) = 50$:

$$50 = P_2(0) = \frac{6 + 5Ce^{\frac{k0}{22}}}{-1 + Ce^{\frac{k0}{22}}} = \frac{6 + 5C}{-1 + C}$$

$$C = \frac{56}{45}.$$

Tedy

$$P_2(t) = \frac{6 + \frac{56}{9}e^{\frac{kt}{22}}}{-1 + \frac{56}{45}e^{\frac{kt}{22}}}.$$

Pro úplnost dopočteme konstantu k ze vztahu $p = 48$, když $t = 2$:

$$P_2(2) = \frac{6 + \frac{56}{9}e^{\frac{k2}{22}}}{-1 + \frac{56}{45}e^{\frac{k2}{22}}} = \frac{6 + \frac{56}{9}e^{\frac{k}{11}}}{-1 + \frac{56}{45}e^{\frac{k}{11}}} = 48.$$

Opět algebraickými úpravami obdržíme

$$k = 11 \ln \frac{1215}{1204}$$

$$k \approx 0{,}1.$$

Tedy v každém okamžiku se cena mění rychlostí 10 % rozdílu $D(p) - S(p)$.

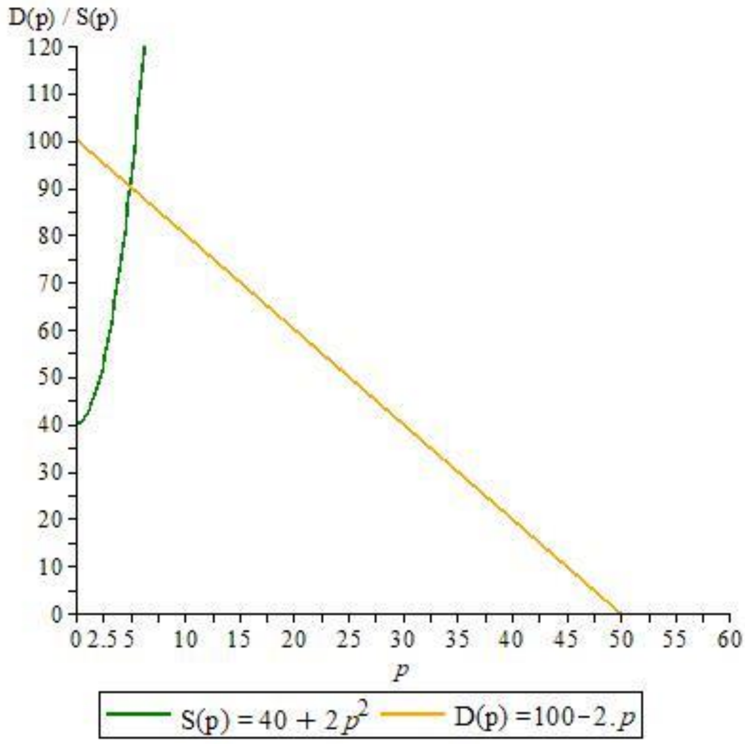
Rovnice ceny P_2 v čase t je

$$P_2(t) = \frac{6 + \frac{56}{9}e^{\frac{0,1t}{11}}}{-1 + \frac{56}{45}e^{\frac{0,1t}{11}}}.$$

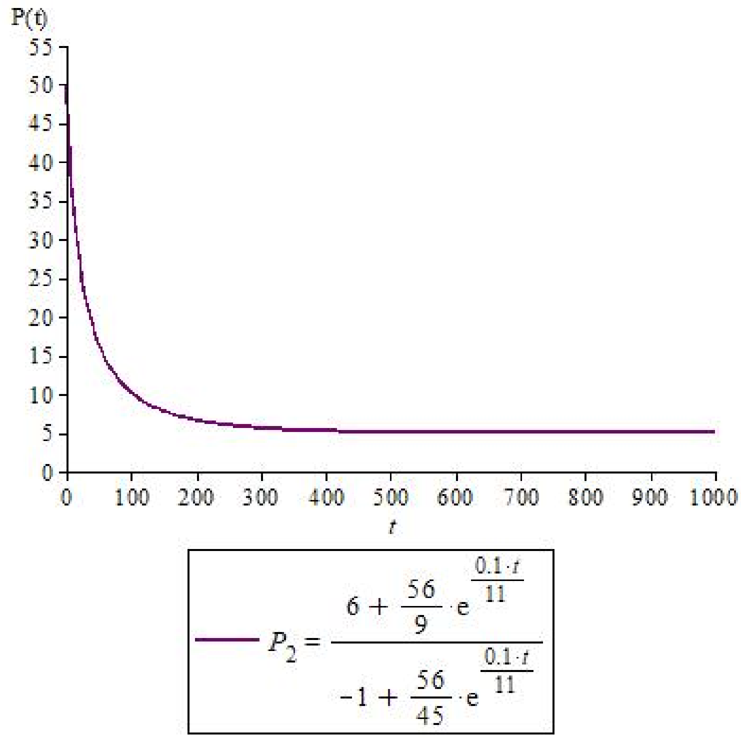
V dlouhodobém horizontu se cena $P(t)$ blíží limitě

$$\lim_{t\to\infty} P_2(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{6 + \frac{56}{9}e^{\frac{0,1t}{11}}}{-1 + \frac{56}{45}e^{\frac{0,1t}{11}}} = 5\,,$$

cena $P_2(t)$ se limitně blíží k 5 Kč, což je cena, při které se nabídka rovná poptávce, cenu zobrazuje průsečík křivek $D(p)$ a $S(p)$ na Obrázku 9.. Průběh funkce ceny P_2 (t) je znázorněn na Obrázku 10..



Obrázek 9: Graf kvadratické funkce poptávky D(p) a lineární nabídky S(p)



Obrázek 10: Graf funkce ceny P_2(t)

5. Diskuse

V návaznosti na téma řešení ekonomických problémů jsme zkoumali nástroj řešení lineárních i nelineárních diferenciálních rovnic pokrývající homogenní a nehomogenní případy. Abychom viděli aplikace těchto rovnic na ekonomické problémy, byla uvedena časová cesta makroekonomické proměnné, národního důchodu, v případě jednoduchého keynesiánského multiplikačního modelu a Samuelsonova modelu byla zmíněna interakce multiplikátor - akcelerátor.

Při zkoumání reálného světa můžeme sledovat dvojí záměr. Chtěli bychom jevy obsáhnout v jejich celku, sledujeme jakýsi makrosvět, a naopak, sledujeme-li průběh určitého jevu, je snahou proniknout do jeho nejnepatrnějších částí, jde naopak o jakýsi mikrosvět. V obou případech, okamžitý stav a celkový průběh jevu je spjat toutéž zákonitostí. V ideálním případě se podaří souvislost veličin určující jev přímo zapsat, např. rovnicí platnou pro tyto veličiny. Mnohem častěji ale lze matematickými postupy zapsat pouze okamžitý stav jevu, z nějž se snažíme popsat celkový obraz jevu. V integrálním počtu jsme hledali zákonitost, která ze závislosti nekonečně malé změny funkčních hodnot na nekonečně malé změně proměnné odvodí obecnou funkční závislost. Tato myšlenka je v souladu s představou malých intervalů jevu, u kterého se domníváme, že má spojitý průběh a infinitezimální počet tuto myšlenku převyšuje tím, že zmenšování intervalů a zvětšování jejich množství lze provést neomezeně. (Kadeřábková, Kopáčková, 1997)

Praktická část obsahuje grafy Cobb-Douglasovy produkční funkce pro konkrétních hodnoty vstupů práce L a kapitálu K. Dále se zabýváme parciálními derivacemi funkce neboli mezními produkty MP_k a MP_L pro dané hodnoty. Na Obrázku 1 je zobrazena dvouvstupová Cobb-Douglasova funkce pro dvě různé hodnoty technické úrovně. Jedním kontraintuitivním aspektem izokvant je skutečnost, že zvýšení technické úrovně vede k posunu izokvant k počátku souřadnic. Je to proto, že lepší technologie znamená, že můžete vyrobit dané množství s menším počtem vstupů (méně kapitálu a práce), takže izokvanta pro jakékoli dané množství se posouvá směrem k počátku, když se technologie zvyšuje. Čím více kapitálu v poměru k práci použijeme, tím strmější je izokvanta. Jedním ze způsobů, jak o tom přemýšlet, je uvědomit si, že práce posiluje kapitál: hodnota MP_k roste s L. Takže přidat trochu práce je extrémně cenné, pokud máte hodně kapitálu v poměru k práci, a méně hodnotné, pokud máte hodně práce a velmi málo kapitálu. Vizuálně to znamená, že izokvanty jsou skloněny více směrem k počátku.

Produkční funkce splňuje zákon klesajícího produktu, takže pro ostatní fixní proměnné, rostoucí objem kapitálu K, nebo práce L přinese menší dodatečnou produkci. Například řekněme, že pekař má 1 pec a 5 zaměstnanců. Existuje pevný limit na to, kolik chleba lze upéct za dané časové období. Pokud však pekař pořídí druhou pec, najednou mohou zaměstnanci upéct víc chlebů najednou, čímž se zvýší počet, které lze upéct za stejnou dobu. V tomto případě by MP_K byla velmi vysoká, protože produkce výrazně vzrostla pouze mírným přidáním do základního kapitálu společnosti. V případě ale, kdy má pekárna 100 pecí a 5 zaměstnanců, přidání další pece by zvýšilo výkon jen málo, protože 5 zaměstnanců může udělat jen nějaké omezené množství. V tomto případě by MP_K byla velmi nízká, protože produkce se příliš nezvýšila, ani když se kapitál společnosti zvýšil.

Naopak, řekněme, že pekárna má 5 pecí a 5 zaměstnanců. Jedna pec na zaměstnance se zdá být přehnaná, ale poskytuje významnou dodatečnou kapacitu z hlediska kapitálu, což by společnosti poskytlo velkou flexibilitu při výrobě chleba. Pokud však společnost najme 1 dalšího pracovníka, může být každá trouba využita efektivněji, protože další zaměstnanec může jít na přípravu chleba před pečením. To značně zvyšuje počet chleba upečených za danou jednotku času. MP_L by byla velmi vysoká, protože výkon výrazně vzroste s přidáním jednoho dalšího pracovníka. Na výše uvedeném grafu bychom se nacházeli na strmé části funkce.

Opět, v případě, kdy má společnost 5 pecí, ale 20 zaměstnanců, najmutí dalšího pracovníka by ke zvýšení výkonu jen málo přispělo. MP_L by byla velmi nízká, jelikož výstup se příliš nezvýšil, i když se zvýšilo množství pracovní síly pekárny. Byli bychom v oblasti ploché části grafu, kdy MP_L se blíží 0.

MRS lze interpretovat i tak, že se přibližně rovná produktu navíc získanému z jedné jednotky volného času navíc, vydělenému extra produktem kapitálu získaným z další jednotky. Jak se pohybujeme po izokvantě doprava, čitatel ve výrazu MRS snižuje a jmenovatel roste. Všimněte si, že čím vyšší α je, tím produktivnější je každá jednotka práce. Je-li práce produktivnější, MRS je větší (tj. izokvanta je strmější), protože by bylo zapotřebí více kapitálu k doplnění produkce ztracené snížením daného vstupu práce.

Problém tržní rovnováhy a modelování zakládání rovnovážné ceny na trhu výrobků je předmětem vědeckého zájmu pro vědecká studia a aplikované specializace v mnoha pobočkách. Existuje celá řada modelů tržní rovnováhy a také metod a způsobů jejich popisu. V těchto studiích vědců i praktických pracovníci kromě uplatňování populárních přístupů nejvíce oceňují zásadní omezení modelů a ta souvisí s jejich aplikovaným charakterem. Tato studie se věnuje a analyzuje možné způsoby modifikace klasického modelu tržní rovnováhy, kterým je Evansův model.

Zkoumali jsme časovou dráhu přizpůsobení cenové proměnné a zkoumali jsme podmínky dynamické stability různých systémů, tedy zda v čase ekonomické proměnné cena konverguje ke stabilní rovnováze. Bylo ukázáno řešení pro lineární funkce nabídky a poptávky pomocí integračního faktoru, ale i řešení modelu nelineární funkce nabídky pomocí separace proměnných. Ukázán je zde příklad na Evansův model diferenciální rovnicí typu

$$\frac{dy}{dt} = r(E - y),$$

ve které proporcionální změny ceny zastupuje konstantní libovolná konstanta r a E zastupuje absolutní reálný člen. Diferenciální rovnice tohoto typu popisují systém, který z počátku rychle klesá, ale následně se změny vyrovnávají těsně nad hranicí hodnoty $y = E$. Obecně, řešením rovnice je funkce, jejíž křivka je dána

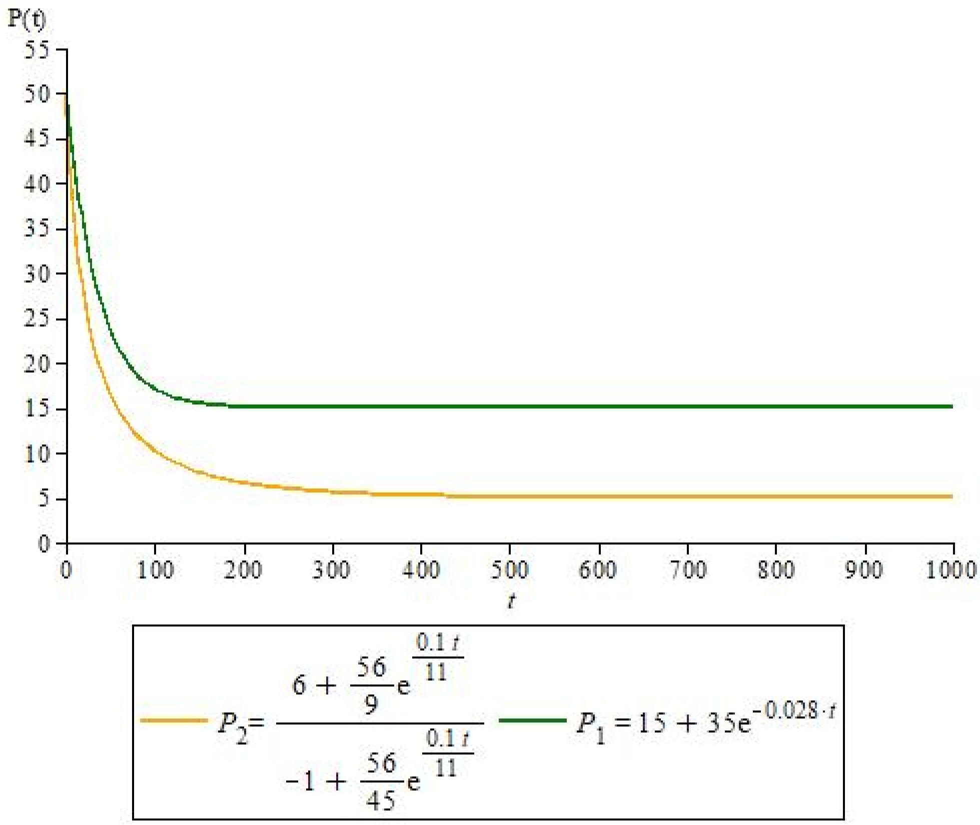
$$y = E + Ce^{-rt}$$

Pro $C \in R$.

U Evansonova modelu cena s časem klesá a postupně se dostává do bodu, kdy přestane klesat a dostane se na limitní hodnotu E.

V druhém modelu vystupuje nabídka jako kvadratická funkce proměnné ceny, tedy v případě, kdy například nabídka prodejců a jejich zájem prodat v závislosti na rostoucí ceně roste rychleji než lineárně. Tak jako např. růst populace bývá limitně omezen, tak i v tomto modelu se jednalo o limitní růst křivky ceny v čase.

Pro porovnání průběhu funkce ceny P_1 a P_2 lze zobrazit do jednoho společného grafu, viz Obrázek 11. V případě, kdy nabídka byla lineární, cena P_1 se limitně blíží hodnotě 15 Kč, v případě ale když nabídka byla kvadratickou funkcí ceny, cena P_2 klesne až na hodnotu 5 Kč.



Obrázek 11: Graf funkcí cen $P_1(t)$ a $P_2(t)$

Jelikož není znám univerzální postup pro řešení diferenciálních rovnic, je potřeba vždy zvážit tvar zadané funkce a podle toho se rozhodnout pro vhodný postup řešení. V prvním případě Evansonova modelu se jednalo o diferenciální rovnici lineárního tvaru a postupem pro řešení takové rovnice se hodilo zvolit postup za pomocí integračního faktoru. Naopak v druhém případě, derivace funkce ceny p v diferenciální rovnici vystupovala v kvadratickém tvaru, zvolen byl postup pomocí separace proměnných za současné úpravy na parciální zlomky.

Co to tedy znamená řešit diferenciální rovnice? Odpověď se zdá zřejmá; znamená to, že všechny výsledné funkce jsou uspokojivé původní zadané rovnici. Často v nich vystupuje jako nezávislá proměnná čas. Funkce je, zhruba řečeno, pravidlo, které ke každému t přiřadí hodnotu $x(t)$, a její řešení bude specifikovat toto pravidlo. Funkce většinou znamenají vzorec, do kterého když zapojíme t, získáme x. Pro obvyklé diferenciální rovnice tento vzorec neexistuje – přinejmenším neznáme způsob, jak jej najít. A když existuje, tak je často nevyhovující.

Ekonomie pojednává o lidském chování, a právě principy takového chování nejlépe pochopíme na jednoduchých příkladech. Při práci s grafy pak již jen zobrazíme veličiny do křivek a 2D modelů. Příklady však nejsou žádnými případovými studiemi, jejich jediným smyslem je ukázat logiku věci a základní principy v názorných příkladech. Příklady uvádějí čtenáře do problému a pomůže mu k jeho snadnějšímu pochopení a propojení souvislostí. Metoda výkladu s demonstrací na grafických modelech činí problematiku méně abstraktní a lépe přístupnou.

6. Závěr

Obsahem práce byl výběr ekonomických problémů s výkladem určeným pro každého, kdo se chce seznámit se základní podstatou hospodářských jevů. Čtenář se nejdříve seznámí s modely využívající diferenciální rovnice v teoriích moderní ekonomie a na základě je schopen porozumět praktické stránce hospodářského života.

Praktická část zahrnuje vizualizaci dvouvstupové Cobb-Douglasovy produkční funkce pro konkrétních hodnoty vstupů práce L a kapitálu K a zabýváme se parciálními derivacemi funkce neboli mezními produkty MP_k a MP_L pro dané hodnoty. Dále práce zahrnuje pár vybraných úloh ekonomických situací Evansonova modelu s využitím vhodného způsobu řešení diferenciálních rovnic včetně demonstrace modelů pomocí softwaru Maple. Práce ukazuje, že při studiu by měl mít každý na paměti, že ekonomie není exaktní věda a k prověření hypotéz tak nelze v hospodářství provést experimenty. V ekonomii pracujeme s abstrakcemi a s výroky vyjadřující určité modelové situace, se kterými se v tak čisté podobě v reálném životě pravděpodobně nesetkáme. Přesto jejich prostřednictvím dokážeme rozpoznat povahu konkrétních hospodářských jevů, uvědomit si jejich význam ve fungování ekonomického mechanismu s důsledky jejich působení.

Tato je práce je věnována všem zájemcům o rozšíření znalostí vyšší matematiky a jejím užití v ekonomické praxi. Úroveň práce odpovídá znalostem studentu vysoké školy, popř. veřejnosti znalejší ekonomických zákonitostí. Použití matematických modelů pro studium zákonitostí národního hospodářství a při hledání optimálního rozhodnutí slouží tak účelům spíše ilustračním, než aby zcela odpovídaly realitě a byly zcela použitelné v praxi. (Holman, 1999)

7. Summary

The topic of this bachelor's thesis is Differential and integral calculus in economic problem.

The theoretical part focuses and presents practical use of differential and integral calculus in economic problems. The theoretical part represents the theoretical base for the practical part. This part includes concerned economic theories, etc.

The theoretical knowledge is further applied to economic problems that can be solved by means of derivatives and integrals, including analysis of how and why are these mathematical procedures applied to a given type of problem. This subsection contain brief characteristics of concerned theories, relevant methods, characteristics of applied models, etc.

The aim of practical part is the use of software named Maple for graphing economic models. This mathematical software can simplify work with functions created from real data. The most important part of the methodology is the use of graphics, such as graphs, for a clear display of data. Maple allows to model various economic situations and see immediately how changes of conditions affect the output.

Thesis shows examples of how Maple can be used in calculus in economic problems. The study of mathematical-economic problems results in their solution, comparison of results in economic contexts, discussion, and formulation of conclusions.

8. Seznam použitých zdrojů

Achdou, Y., Buera, F. J., Lasry, J. M., Lions, P. L., & Moll, B. (2014, November). Partial differential equation models in macroeconomics. Philosophical transactions. Series A, Mathematical, physical, and engineering sciences, 372(2028), 20130397. DOI: 10.1098/rsta.2013.0397

Akaev, A. (2018). Nonlinear Differential Equation of Macroeconomic Dynamics for Long-Term Forecasting of Economic Development. Applied Mathematics, 9, 512-535. doi: 10.4236/am.2018.95037.

Baronti, M., De Mari, F., Van Der Putten, R., & Venturi, I. (2016). Calculus Problems. Springer.

Boianovsky, M. (2021, July). Domar, expectations, and growth stabilization. Cambridge Journal of Economics, Volume 45, Issue 4, 723–750. DOI:10.1093/cje/beab019

Bojarskij, A. J. (1959). Matematika pro ekonomy: elementy infinitesimálního počtu. Orbis.

Bronson, R., & Bredensteiner E. J. (2003). Differential equations: based on Schaum's outline of theory and problems of differential equations (2nd ed.) McGraw-Hill Publishing Co.

Fuente A. (2000). Mathematical Methods and Models for Economists . Cambridge University Press

Hoffmann, L. D. & Bradley, G. L. (2010). Calculus for business, economics, and the social and life sciences (10th ed.). McGraw-Hill

Holman, R. (1999). Ekonomie. C.H. Beck.

Chvátalová, Z. & Hřebíček, J. (2022, January). Scientific Computing and Visualization with Maple in Economics and Economic Research. International Journal of Economics and Statistics, 10, 73-79 DOI:10.46300/9103.2022.10.12

Kadeřábková, B. & Kopáčková, M.. Stručný úvod do matematické ekonomie. FinEco, 1997.

Kaňka, M. & Henzler, J. (1997). Matematika pro ekonomy. Ekopress.

Kaňka, M. (1996). Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty. Victoria Publishing.

Karásek, J. (2002). Matematika II. CERM.

Kodera J. & Vosvrda M. (2005). Production, Capital Stock and Price Dynamics in Simple Model of Closed Economy. Computing in Economics and Finance 2005, 287, Society for Computational Economics

Laitochová, J. (2004). Matematická analýza 1. Univerzita Palackého

Maňas, M. (1989). Reálie matematických metod v ekonomice. Vysoká škola ekonomická.

Marques, J. (2014). An application of ordinary differential equations in economics: modeling consumer's preferences using marginal rates of substitution. Wseas Press, 46-53. DOI:10.13140/2.1.1144.9288

Marsitin, R. (2019). Analysis of Differential Calculus in Economics. Journal of Physics: Conference Series, 1381(1) DOI:10.1088/1742-6596/1381/1/012003

Sojka, M. (2000). Dějiny ekonomických teorií. Karolinum.

Stepanov, V. V. (1950). Kurs diferenciálních rovnic. Přírodovědecké nakladatelství

Stewart, I. (2012). In Pursuit of the Unknown 17 Equations That Changed the World. Basic Books.

Škrášek, J. (1989). Základy aplikované matematiky. Státní nakladatelství technické literatury.

Tsoularis, A. (2021). On Some Important Ordinary Differential Equations of Dynamic Economics (In B. Carpentieri ed.) Recent Developments in the Solution of Nonlinear Differential Equations. IntechOpen. DOI:10.5772/intechopen.97130

Varadzin, F., Frait, J. & Červenka, M. (2004). Ekonomický rozvoj a růst. Professional Publishing
Vlček, J. (1998). Ekonomie pro neekonomy. Codex Bohemia.
Zabolotnii, S., & Mogilei, S. (2023). Modifications of Evans price ekvilibrium model. Informatyka, Automatyka, Pomiary W Gospodarce I Ochronie Środowiska, 13(1), 58–63. DOI: 10.35784/iapgos.3507
Zhang, W.B. (2005). Differential Equations, Bifurcations and Chaos in Economics (4th ed.). World Scientific Publishing. DOI:10.1142/5827

9. Seznam obrázků