

Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra experimentální fyziky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Nelineární termodynamika a její aplikace



Autor:	František Hodinka
Studijní program:	B1701 Fyzika
Studijní obor:	1701R003 Fyzika se zaměřením na vzdělávání
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí práce:	RNDr. Renata Holubová, CSc.
Termín odevzdání práce:	18. 8. 2015

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval(a) samostatně pod vedením a že jsem použil(a) zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci

Bibliografická identifikace:

Jméno a příjmení autora	František Hodinka
Název práce	Nelineární termodynamika a její aplikace
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	RNDr. Renata Holubová, CSc.
Rok obhajoby práce	2015
Abstrakt	<p>Práce se zabývá popisem a řešením nelineárních systémů. Ukazuje, kdy je možné použít linearizaci nelineárních diferenciálních rovnic a způsob kvalitativní analýzy fázových portrétů. Teoretická část se zabývá analýzou fázového portréту jedné diferenciální rovnice a podmínkami bifurkace, tatož problematika je rozšířena pro soustavu dvou diferenciálních rovnic. Řešené příklady jsou kyvadlo v odporujícím prostředí (bifurkace jednorozměrných systémů), soutěž o potravu (fázový portrét dvourozměrného systému). Je předvedeno řešení Lorentzových rovnic pomocí linearizace pro hodnotu Rayleighova čísla menší jak jedna a ukázána analogie s chaotickým vodním kolem. V části zabývající se termodynamikou je odvození Ljapunovovy funkce a transformace termodynamických potenciálů pomocí Legendrovy transformace. Jako alternativní metoda modelování nelineárních systémů jsou zde zmíněny celulární automaty.</p>
Klíčová slova	Nelineární systém, linearizace, fázový portrét, bifurkace, Lorentzovy rovnice, chaotické vodní kolo
Počet stran	50
Počet příloh	0
Jazyk	Český

Bibliographical identification:

Autor's first name and surname	František Hodinka
Title	Nonlinear Thermodynamics and its application
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	RNDr. Renata Holubová, CSc.
The year of presentation	2015
Abstract	Bachelor thesis considers the way of solving of one-dimensional and two-dimensional nonlinear systems through phase portrait analysis. There are examples: overdamped bead on rotating hoop (one-dimensional bifurcation), competition for food sources – Model Lotka – Voltera (two-dimensional phase portrait analysis). It is shown the analogy between equations of motion of Lorentz's equations and chaotic waterwheel. There are also thermodynamics potentials and Lyapunov function of Lorentz's system.
Keywords	Nonlinear system, linearisation, phase portrait, bifurcation, Lorentz's equations, chaotic waterwheel
Number of pages	50
Number of appendices	0
Language	Czech

Obsah

1 Úvod.....	6
2 Statistika a klasická dynamika.....	8
2.1 Determinismus a předpověditelnost jevů v přírodě.....	9
3 Fázový portrét jednodimenzionálního systému.....	11
3.1 Příklad analýzy systému z fázového portréту.....	11
3.2 Linearizace v okolí stacionárních bodů jednodimenzionálních systémů.....	14
3.2.1 Typy fázových portrétů jednodimenzionálních systémů.....	15
3.3 Bifurkace v jednodimenzionálním systému.....	16
3.3.1 Bifurkace sedlo – uzel.....	16
3.3.2 Transkritická bifurkace.....	17
3.3.3 Bifurkace vidle.....	19
3.3.4 Matematické kyvadlo jako volný rotátor v odporujícím prostředí.....	20
4 Fázové portréty dvoudimenzionálních systémů.....	23
4.1 Řešení soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic pomocí matice.....	23
4.2 Sestavení fázového portréту dvoudimenzionálních systémů z linearizace.....	24
4.3 Typy fázových portrétů dvoudimenzionálních systémů.....	26
4.3.1 Sedlo.....	26
4.3.2 Uzel.....	26
4.3.3 Spirála.....	27
4.3.4 Střed.....	28
4.3.5 Shrnutí.....	28
4.3.6 Fázový portrét v kanonických souřadnicích.....	29
4.3.7 Aplikace v ekologii – <i>Model soutěže o potravu (Lotka – Voltera)</i>	30
4.4 Bifurkace v dvoudimenzionálních systémech.....	33
4.4.1 Bifurkace pevných bodů.....	33
5 Lorentzovy rovnice a Bénárdova buňka.....	38
5.1 Linearizace Lorentzových rovnic.....	41
6 Nerovnovážná termodynamika – tok jako velké množství částic.....	43
6.1 Stabilita termodynamických systémů.....	45
6.1.1 Stabilita rovnovážných systémů.....	45
6.1.2 Stabilita nerovnovážných systémů.....	46
6.1.3 Ljapunovova funkce Lorentzova systému.....	47
7 Závěr.....	49
8 Seznam použitých pramenů.....	50

1 Úvod

Nelineární termodynamika je jedním z rychle se vyvíjejících oborů v současnosti. Jedná se o širokou problematiku, která má spoustu aplikací. Nelineární termodynamika má široký teoretický repertoár, který může výběrově používat na řešené problémy. I když se jedná o poměrně starou disciplínu s počátky v devatenáctém století, nový pohled na věc přinesl rozvoj počítačů. V nelineární termodynamice našly uplatnění jak přísně diskrétní systémy typu celulární automaty, tak i topologie s obsáhlou teorií spojitých přeměn.

Cílem práce je objasnění základních pojmů a ukázka řešení základních dynamických systémů.

Druhá kapitola stručně přibližuje historii nelineární termodynamiky a pokouší se o nástin a zařazení metod. Obsahuje i ukázku způsobu analýzy systému z fázového portréту sestaveného ze základních poznatků matematické analýzy.

Třetí kapitola ukazuje sestavení fázového portréту jednodimenzionálního systému a ukazuje způsob jeho řešení, linearizaci a její podmínky kolem stacionárních řešení diferenciálních rovnic. Zahrnuje vysvětlení bifurkace a její ukázku na příkladě rotátoru v odporujícím prostředí.

Čtvrtá kapitola přidává další rozměr k předchozí kapitole a týká se řešení dvourozměrných systémů. Má stejnou strukturu: Klasifikace fázových portréту, linearizace v okolí rovnovážných bodů a typy bifurkací. Příklad ukazuje ekologický model soutěže o omezené množství potravy dvou konkurujících si druhů.

Pátá kapitola ukazuje na analogii v dynamických systémech. Je zde předvedeno odvození dynamických rovnic z pohybu chaotického vodního kola (někdy též Lorentzova) a záměna proměnných, která vede ke klasickému tvaru rovnic Lorentzova systému. Je zde provedena linearizace v okolí stacionárních bodů pro dané hodnoty parametru.

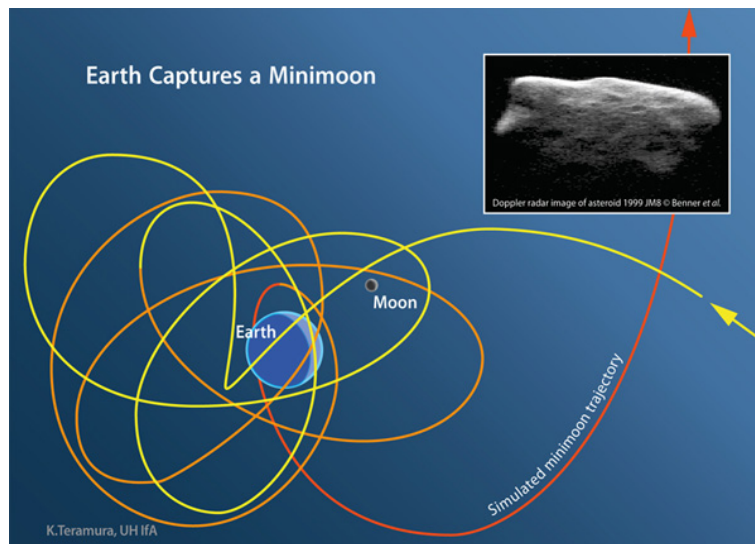
Šestá kapitola představuje modelování turbulence z celulárních automatů. Je zde nový aspekt rovnováhy dynamických systémů z pohledu růstu entropie. Dále jsou zde uvedeny termodynamické potenciály rovnovážných systémů. Pro

nerovnovážné systémy je definována Ljapunovova funkce a její tvar pro Lorentzův systém.

Práce zcela jistě nepostihuje celou problematiku. Neobsahuje mapování, teorii limitních cyklů ani některé typy bifurkací.

2 Statistika a klasická dynamika

Při popisu systému s velkým počtem částí se spoléháme na statistiku. Máme-li např. uzavřenou nádobu s plynem, nedokážeme popisovat pohyb každé molekuly. Můžeme si však vymezit, o jaké vlastnosti systému se budeme zajímat. Musíme najít takové vlastnosti, které budou pro určení vývoje a stavu systému optimální. U uzavřené nádoby s plynem můžeme jako „optimální vlastnosti“ sledovat tlak (p), objem (V), a termodynamickou teplotu (T). Jinými slovy, vytvořili jsme projekci mikroskopických vlastností molekul do makroskopických veličin. Navíc mezi těmito makroskopickými veličinami existuje závislost, proto je lze definovat jako dynamické proměnné systému. Zásadní problém tohoto přístupu je určení dynamických proměnných. Je otázka, jak zvolit „přibližné“ proměnné, aby skutečně vystihovaly stav systému. Zkusme si nyní položit jednoduchou otázku, co se stane, budeme-li uvažovat systém složený pouze ze dvou „částic“ (např. systém Země – Slunce). Dynamiku takového systému popisují lineární diferenciální rovnice s klasickým a známým průběhem potenciálu, který ukazuje na čtyři možná řešení: pohyb po kružnici, elipse, parabole a hyperbole. Situace se dramaticky změní, zvýšíme-li počet částic na tři. V takovém případě už není možné průběh jednotlivých drah jednoduše stanovit.



Obr. 1: Pohyb asteroidu dočasně zachyceného Zemí. Ukázka problému tří těles pro soustavu Slunce, Země, asteroid. (NASA). Dostupné z:

http://lunarscience.nasa.gov/wp-content/uploads/2012/03/Uhifa_EarthMinimoonSm.jpg

Tento problém v klasické mechanice je označován jako „problém tří těles.“ Na konci devatenáctého a na začátku dvacátého století francouzský matematik Henri Poincaré studoval problém tří těles a došel k závěru, že se nemohou tato tělesa pohybovat po drahách, které lze matematicky vyjádřit elementárními funkcemi.

Problém tří těles se stal hranicí, která vymezovala pole působnosti Newtonových diferenciálních lineárních rovnic. (Gaspard, 2000, s. 1)

2.1 Determinismus a předpověditelnost jevů v přírodě

V roce 1687 Newton vybudoval silný matematický aparát diferenciálního počtu, který umožňoval tehdejší poznatky klasické fyziky shrnout do jediného systému. Očekávalo se, že jistá míra pravděpodobnosti, se kterou se lze setkat u fyzikálních experimentů, je dána pouze nedostatečnou přesností měření. Jinými slovy, předvídatelnost fyzikálního systému je dána znalostí počátečních podmínek.

Přístup, který říká, že o průběhu procesů v přírodě můžeme rozhodnout, jakým způsobem probíhají v libovolné chvíli, známe-li podmínky jejich vzniku, nazýváme determinismus.

Francouzský matematik Simon Pierre de Laplace v roce 1841 přivedl

determinismus do krajnosti myšlenkou, známou jako *Laplaceův Démon*:
Intelligence, která by byla schopná v každém okamžiku rozpoznat a určit síly, které působí v přírodě, a současně byla schopná všechna takováto data podrobit analýze, by dokázala popsat pohyb vesmíru jako celku i pohyb jeho nejmenší možné části. Pro takovou inteligenci by nebylo nic neznámé, v jejím pohledu by probíhala budoucnost stejně jako minulost v jediném přítomném okamžiku.
(Korneck, 2006, s.287)

Takový mechanický pohled na svět byl napaden dvěma novými fyzikálními teoriemi: Kvantovou mechanikou a nelineární dynamikou.

V roce 1927 formuloval Heisenberg relace neurčitosti, ve kterých je zachycena nejistota ohledně stavu velmi malé částice: v daném okamžiku nejsme schopni současně určit její hybnost i pozici.

V roce 1963 Lorenz sestavil aproximaci Navier – Stokesovy rovnice pro Bénárdovu buňku, která sloužila jako testovací model k předpovědi počasí. Ukázalo se, že malé počáteční výchylky stačily k tomu, aby se průběh počasí úplně změnil. Časový horizont, do jakého mělo smysl předpovídat počasí, se výrazně přiblížil. (Korneck, s. 287)

3 Fázový portrét jednodimenzionálního systému

Analytické řešení diferenciálních rovnic nemusí být snadné, zvláště v případě nelineárních diferenciálních rovnic. Představu o řešení můžeme získat přímo z grafu $\dot{x}=f(x)$. Fázový portrét představuje výhodné znázornění dynamiky bez nutnosti analytického řešení. Pro bližší názornost budeme pokračovat příkladem.

3.1 Příklad analýzy systému z fázového portréту

Pokusíme se najít řešení jednorozměrné nelineární diferenciální rovnice

$$\dot{x}=\sin(x) \quad (3.1)$$

Provedeme separaci proměnných

$$\frac{dx}{\sin(x)}=dt \quad (3.2)$$

integrujeme, za pravou stranu dosadíme počáteční podmínku $t_0 = 0$

$$\int \frac{dx}{\sin(x)}=\int dt \quad . \quad (3.3)$$

Pravou stranu vyřešíme snadno

$$\int dt=t+C, \quad C=t_0=0 \Rightarrow \int dt=t \quad . \quad (3.4)$$

Levá strana je obtížnější. Můžeme použít identitu

$$\sin(2\alpha)=\sin(\alpha)\cos(\alpha) \quad (3.5)$$

a získat integrál

$$\int \frac{2d\alpha}{\sin(2\alpha)}=\int \frac{d\alpha}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)} \quad , \quad (3.6)$$

poté využijeme vzorec

$$\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1 \quad , \quad (3.7)$$

dosadíme, získáme

$$\int \frac{(\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha))d\alpha}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)} \quad , \quad (3.8)$$

zkrátíme

$$\int \frac{\sin(\alpha)d\alpha}{\cos(\alpha)}+\int \frac{\cos(\alpha)d\alpha}{\sin(\alpha)} \quad , \quad (3.9)$$

a protože platí

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln(f(x)) + C, \quad (3.10)$$

dostaneme

$$-\ln(\cos(\alpha)) + \ln(\sin(\alpha)) + C, \quad (3.11)$$

upravíme a vrátíme se ze substituce

$$\ln\left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right) + C = \ln(\tan(\alpha)) + C = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C, \quad (3.12)$$

což je hledané řešení levé strany diferenciální rovnice. Nyní dosadíme počáteční podmínky $x = x_0$ v čase $t = 0$.

$$\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \ln\left(\tan\left(\frac{x_0}{2}\right)\right) = t - 0, \quad (3.13)$$

z rozdílu logaritmů uděláme podíl logaritmu

$$\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x_0}{2}\right)}\right) = t, \quad (3.14)$$

a zbývá stanovit definiční obor řešení. Teď ale opustíme cestu klasické matematické analýzy a podíváme se, jestli bychom nenašli snazší způsob řešení, než počítání limity funkce. Takže, co bude výsledkem $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$, když položíme $x_0 = \frac{\pi}{4}$?

Zakresleme přímo závislost $\dot{x} = \sin(x)$, kde \dot{x} představuje směr a velikost rychlosti na ose x . Z obrázku 2 je patrné, že existují body, ve kterých se pomyslné částice, pohybující se ve směru šipek po ose x , „zastavují“. Kdyby se částice mezi dvěma body vyznačenými červeně, dostala mezi jiné dva body, byl by porušen směr pohybu daný šipkami. Např. pohyb z intervalu $(0; \pi)$ do intervalu $(\pi; 2\pi)$ po ose x není možný. Body, které splňují

$$\dot{x} = 0 \quad (3.15)$$

nazýváme *stacionární*, značíme je x_s . V našem případě, znázorněném na obrázku 2, se jedná o body

$$x_{S1, S2, S3, S4, S5} = -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi. \quad (3.16)$$

Je-li pohyb dán tak, že směřuje *do bodu*, nazveme takový stacionární bod *stabilní*. Je-li směr pohybu dán *ze stacionárního bodu*, nazveme jej *nestabilní*. V našem případě jsou stacionární body

$$x_{S2}, x_{S4} = -\pi, \pi \quad (3.17)$$

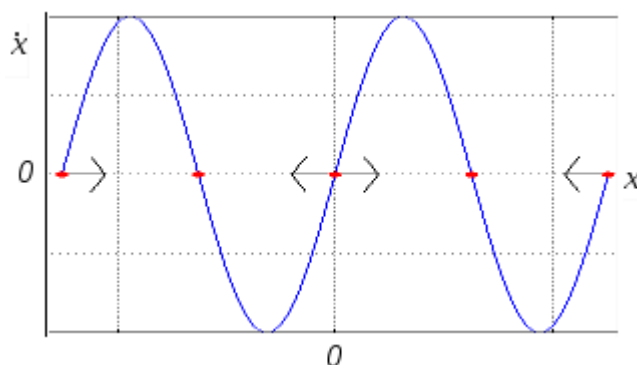
stabilní a stacionární body

$$x_{S1}, x_{S3}, x_{S5} = -2\pi, 0, 2\pi \quad (3.18)$$

nestabilní. Zbývá určit podmínku, za které je daný stacionární bod stabilní nebo nestabilní. K tomu použijeme větu:

Je-li derivace funkce kladná, je funkce rostoucí. Je-li derivace funkce záporná, je funkce klesající.

Z níž okamžitě plyne směr rychlosti na ose x .



Obr. 2: Fázový portrét jednodimenzionálního fázového prostoru. Červeně je vyznačena poloha stacionárních bodů. Fázová trajektorie probíhá v ose x . (Autor)

Z fázového portréту můžeme získat alespoň kvalitativní představu o tom, jak se mění rychlost při pohybu v ose x v závislosti na čase t . Bohužel, nemůžeme říct přesně, v kterých okamžicích se rychlost bude měnit. Můžeme ale odhadnout tvar křivky z odhadu průběhu funkce. Víme totiž, že sklon křivky je dán její derivací. Proto bychom mohli odhadnout

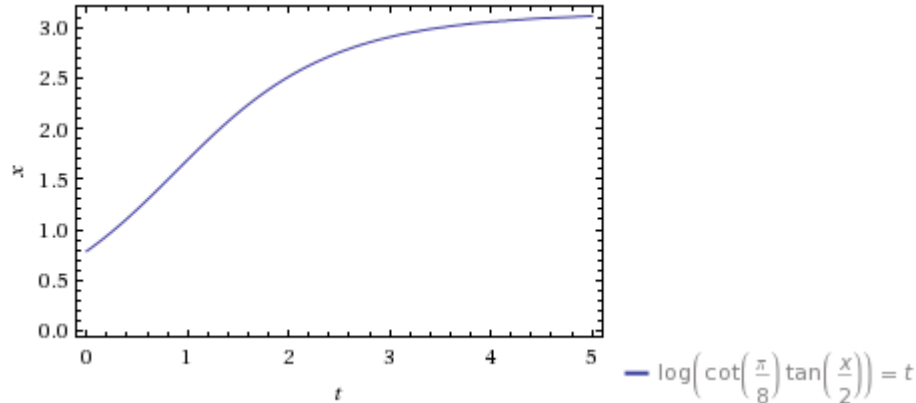
$$\sin(x) = f'(x) \sim \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = \arctan(f'(x)) \quad , \quad (3.19)$$

v našem případě

$$\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 35^\circ \quad , \quad (3.20)$$

takže můžeme říci, že v bodě $x = \pi/4$ má integrální křivka sklon 35° . Postup bychom opakovali pro několik různých pozic x , až k naší spokojenosti. My mů-

žeme využít analytické řešení, vypočítané v úvodu příkladu a zjistíme, že v bodě $x=\pi/4$ je $t = 0$. Z dostatečného množství takto vypočítaných přímk bychom sestavili náčrt podobný grafu níže. Pro sestrojení grafu byl využit analytický předpis.



Obr. 3: Závislost pozice x na čase t na intervalu $(0, \pi)$. V bodě $x = \pi$ leží asymptota. (Autor)

Graf můžeme interpretovat tak, že rychlost pomyslné částice na fázové trajektorii roste na intervalu $(0; \pi)$. Částice se dostane do pozice $x=\pi$ v čase $t \rightarrow \infty$. (Strogatz, 2014, podle 1)

3.2 Linearizace v okolí stacionárních bodů jednodimenzionálních systémů

Zabývejme se nyní dynamikou blízko pevného bodu x_s . Nechť

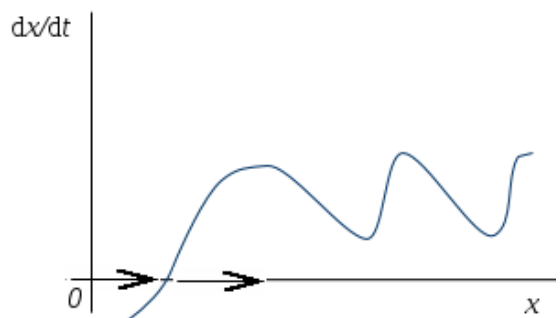
$$x(t) = x_s + \eta(t), \quad (3.21)$$

kde $|\eta| \ll 1$ a zároveň platí

$$\dot{x} = f(x). \quad (3.22)$$

Blízko pevného bodu můžeme provést linearizaci pomocí Taylorova rozvoje:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_s + \eta) = \\ &= f(x_s) + \eta f'(x_s) + \frac{\eta^2}{2} f''(x_s) + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$



Obr. 4: Náčrt funkce vyjadřující závislost rychlosti na souřadnici. (Autor)

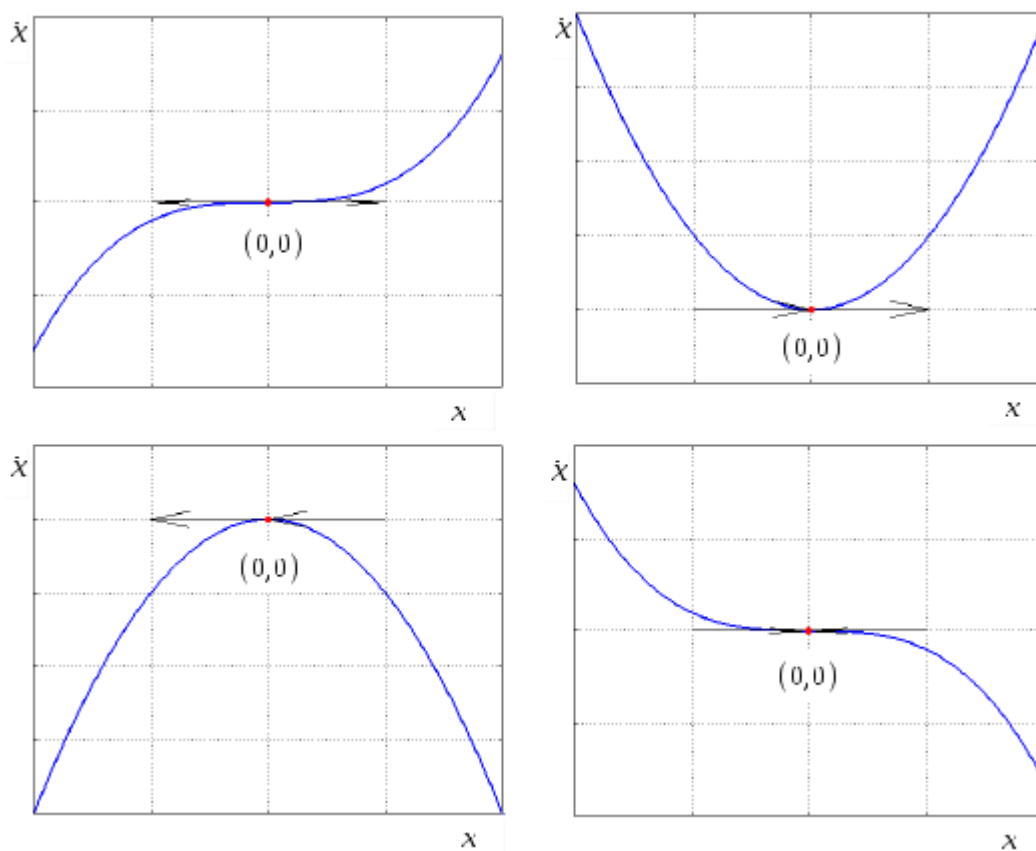
Protože z grafu vidíme, že $f(x_s) = 0$, zanedbáme první člen. Zajímavý bude další

člen s první derivací. Dosadíme-li hodnotu x_s do výrazu $f'(x_s)$ a tento výraz je nenulový, můžeme zde zanedbat derivace vyšších řádů pro dostatečně malé η . Potom platí $\dot{\eta} = r\eta$, kde

$$r = f'(x_s). \quad (3.23)$$

Výsledek (3.23) pro nás bude zajímavý z hlediska posouzení stability fázového portréту, společně s kritériem (3.19).

3.2.1 Typy fázových portrétů jednodimenzionálních systémů



Obr. 5: Fázový portrét vybraných jednodimenzionálních systémů. Na svislé ose leží rychlost \dot{x} , na vodorovné x . Jde tedy o závislost rychlosti na souřadnici. Počátek souřadnic označuje červený bod, který je zároveň pevným bodem všech jednodimenzionálních systémů výše. (Autor)

Na obrázku vlevo nahoře je znázorněna fázová trajektorie vycházející z nestabilního uzlu. V okolí bodu je rychlost malá, ale s postupující časem se zvyšuje. Systém je dán rovnicí $\dot{x} = x^3$. Stabilitu stacionárního bodu lze snadno zjistit, funkce je v celém oboru neklesající.

Na obrázku vpravo nahoře je fázová trajektorie dána rovnicí $\dot{x} = x^2$.

Vzhledem k tomu, že křivka má zápornou derivaci zleva a kladnou zprava v okolí svého počátku, ve kterém leží pevný bod, je tento bod polostabilní. Stabilní je zleva, odkud do něj směřuje fázová trajektorie, mající v něm současně svou asymptotu. Zprava ze stacionárního bodu vychází nestabilní fázová trajektorie.

Na obrázku vlevo dole je situace přesně opačná oproti předchozímu případu. Systém je dán rovnicí $\dot{x} = -x^2$. Stacionární bod je stabilní zprava a nestabilní zleva.

Na posledním obrázku je situace opačná oproti prvnímu fázovému portrétu. Jedná se o systém s předpisem $\dot{x} = -x^3$. Funkce je na celém svém oboru nerostoucí, takže v počátku leží stabilní uzel. (Strogatz, 2014, podle 2)

3.3 Bifurkace v jednodimenzionálním systému

Bifurkace je proces, při kterém se dramaticky mění vlastnosti systému. Typicky dochází ke změně pevného bodu ze stabilního na nestabilní (a naopak), nebo k jeho zániku. Příkladem může být výpočet pohybu kyvadla s pevným závěsem při velké rychlosti rotace uvedený dále, nebo velké zatížení nosníku, při kterém dochází k jeho deformaci. Koncept „větvičích se řešení“ byl zaveden matematikem *C. Jacobim*. První studie bifurkací se týkaly zejména bodů rovnováhy, ve kterých nastává dělení, větvení nebo separace rovnovážných stavů na několik částí. Tento obor bifurkací se stal hlavním předmětem výzkumu současné matematiky a aplikovaných věd. Pod současným termínem bifurkace se rozumí dvě poněkud odlišné věci. Za první – studium rovnovážných stavů, ve kterých se mění počet stacionárních bodů, když se mění hodnota parametru. A za druhé – dynamika, v jejímž průběhu se mění topologie fázového portréту. V našem případě se vyhneme topologii.

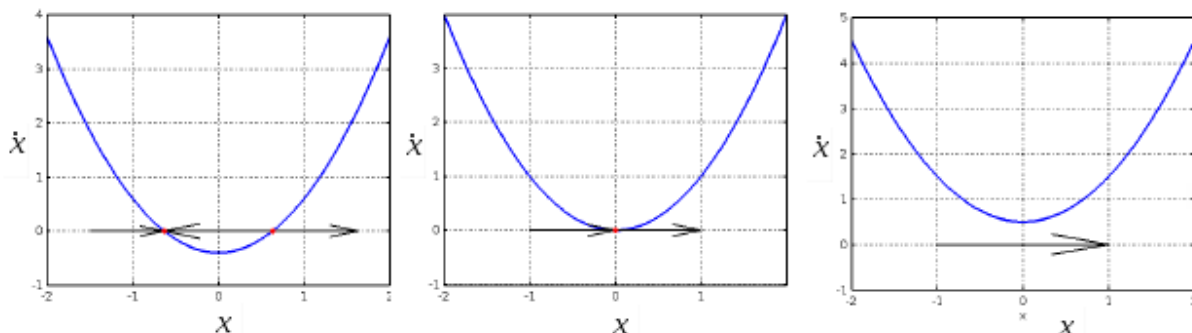
Méně technický, zato však fyzikálně názornější popis představuje *dynamika fázových přechodů*, které jsou důsledkem měnících se řídicích parametrů. Jedná se zejména o skupenské změny, změny v krystalické a biologické struktuře aj. (Jackson, 1992, s. 82)

Pro konkrétnější představu přistupme k jednotlivým typům bifurkací.

3.3.1 Bifurkace sedlo – uzel

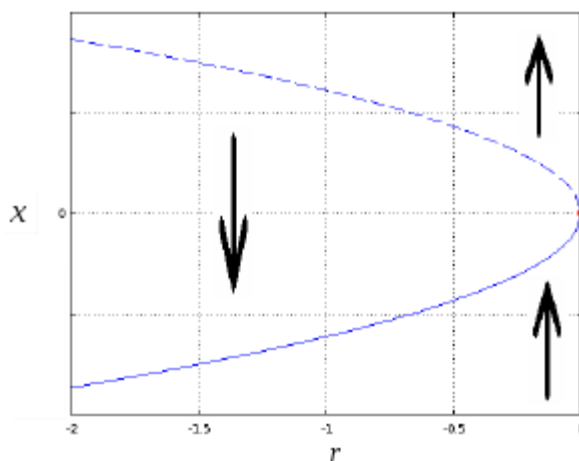
Bifurkace sedlo – uzel (*saddle – node*) je charakteristická pro diferenciální rovnici ve tvaru

$$\dot{x} = x^2 + r \quad (3.24)$$



Obr. 6: VLEVO: Poloha stabilního uzlu (vlevo) a nestabilního uzlu (vpravo). Hodnota parametru $r = -0,4$. UPROSTŘED: polostabilní uzel (stabilní zleva), $r = 0$. VPRAVO: zaniklý uzel ($r > 0$). (Autor)

V prvním případě charakteristická fázová trajektorie vede zleva ve směru růstu času do stabilního bodu. Zprava vchází do téhož stabilního uzlu jiná fázová trajektorie, která vede z nestabilního uzlu v záporném směru. V druhém případě fázová trajektorie vchází (asymptoticky) i vychází ze stejného polostabilního uzlu. Fázová trajektorie má kladný směr. V posledním případě uzel zaniká, protože parabola osu x neprotíná. Dále si můžeme tuto situaci znázornit na bifurkačním diagramu x_s v závislosti na hodnotě parametru r . Položíme-li $\dot{x} = 0$, získáme rovnici, odkud můžeme vyjádřit $x_s = x(r)$.



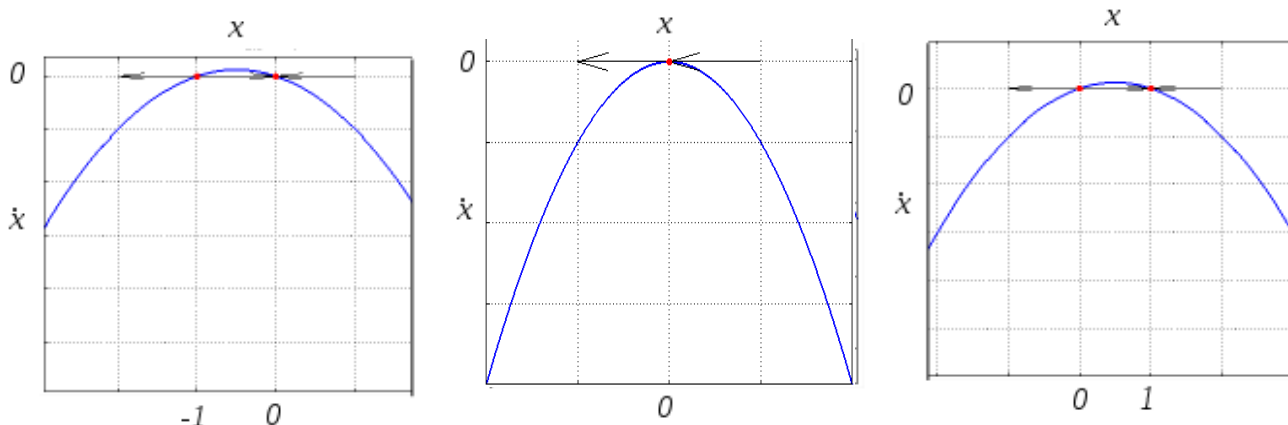
Obr. 7: Bifurkační diagram se stabilní a nestabilní větví stacionárních řešení. (Autor)

Podle průběhu křivky $x_s = x(r)$ můžeme snadno určit stabilitu bodu: záporná část křivky ukazuje, kdy derivace nebude kladná, a tudíž bod, který protíná osu ve směru růstu souřadnice, bude stabilní.

3.3.2 Transkritická bifurkace

Transkritická bifurkace (*transcritical bifurcation*) je charakteristická pro diferenciální rovnici ve tvaru

$$\dot{x} = rx - x^2 \quad (3.25)$$



Obr. 8: VLEVO: Poloha nestabilního uzlu $(x_S, \dot{x}) = (-1, 0)$ (vlevo) a stabilního uzlu $(x_S, \dot{x}) = (0, 0)$ (vpravo). Hodnota parametru $r = -1$. UPROSTŘED: polostabilní uzel, zprava stabilní. Poloha $(x_S, \dot{x}) = (0, 0)$, hodnota parametru $r = 0$. VPRAVO: Poloha nestabilního uzlu $(x_S, \dot{x}) = (0, 0)$ (vlevo) a stabilního uzlu $(x_S, \dot{x}) = (1, 0)$ (vpravo). Hodnota parametru $r = 1$. (Autor)

Směr fázových trajektorií nemusí být tak jasný jako v prvním případě, použijeme kritéria linearizace jednodimenzionálního systému ((3.23), (3.19)). Použijeme vztah

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(rx - x^2), \quad (3.26)$$

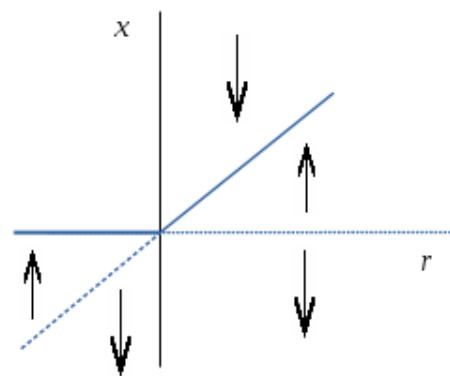
zderivujeme, tím získáme

$$f'(x) = r - 2x, \quad (3.27)$$

kam stačí dosadit hodnoty $x < 0$ a $x > 0$. V případě, že $x < 0$ vyjde $f(x) > 0$, z čehož vyplývá, že fázová trajektorie směřuje z nestabilního bodu. Analogicky postupujeme i pro $x > 0$, kde nám vyjde znaménko derivace $f(x) < 0$, takže uzel o souřadnici $x > 0$ je stabilní. Stabilita bodu $x = 0$ zleva nám vyplyne z nestability bodu $x < 0$ zprava (Obrázek 8, VLEVO). Druhý případ (Obrázek 8, UPROSTŘED) je zřejmý a v třetím případě (Obrázek 8, VPRAVO) postupujeme podle znaménka derivace zcela analogicky s případem prvním. Pro hodnotu $r > 0$ se zamění pořadí nestabilního a stabilního uzlu oproti prvnímu případu. U transkritické bifurkace nemůže dojít k zániku uzlu, na rozdíl od bifurkace

sedlo – uzel.

Celý postup analýzy stability fázového portrétu pro různé hodnoty parametru r si opět můžeme graficky znázornit na bifurkačním diagramu.

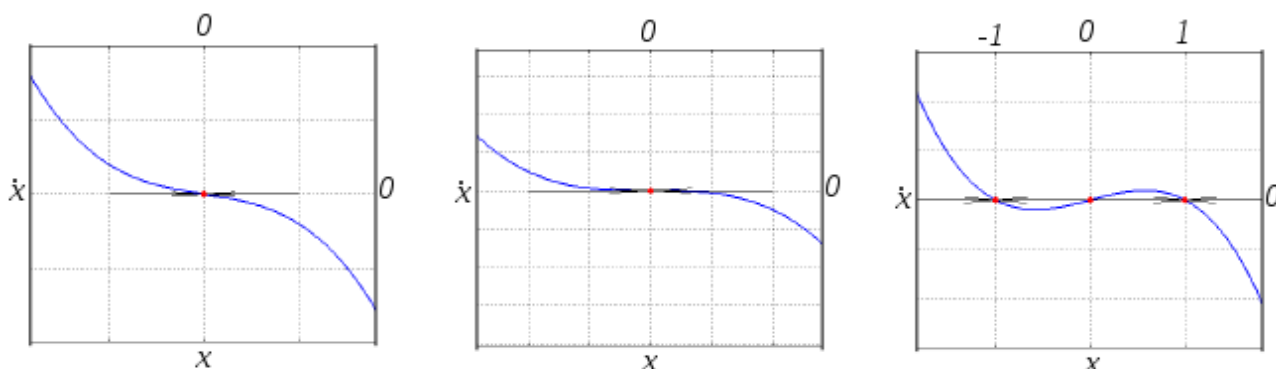


Obr. 9: Stabilní a nestabilní větev fázové trajektorie. Řešení s bifurkací pro $r = 0$. (Autor)

3.3.3 Bifurkace vidle

Bifurkace vidle (*pitchfork*) je charakteristická pro diferenciální rovnici ve tvaru

$$\dot{x} = rx - x^3 \quad (3.28)$$



Obr. 10: VLEVO: stabilní uzel ($r = -1$). UPROSTŘED: stabilní uzel ($r = 0$). VPRAVO: bifurkace: ze stabilního uzlu se stává nestabilní, vznikají dva nové stabilní uzly. (Autor)

Tento typ bifurkace je charakteristický

pro systémy se symetrií.

Je-li $r < 0$, je fázová trajektorie stabilní

s jedním pevným (stacionárním)

bodem v $x_s = 0$. Je-li $r > 0$, je fázová

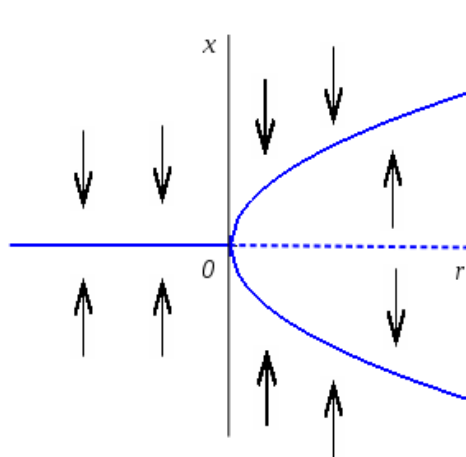
trajektorie rozdělena třemi body:

$$x_{s1} = 0 \quad (\text{nestabilní}), \quad x_{s2} = -\sqrt{r} \quad \text{a}$$

$$x_{s3} = \sqrt{r} \quad (\text{stabilní}).$$

V prvním případě charakteristická fázová

trajektorie vede zleva ve směru růstu času do stabilního uzlu. Zprava vchází do téhož stabi-



Obr. 11: Bifurkace vidle v bodě $r = 0$. (Autor)

lního uzlu jiná fázová trajektorie, která vede po ose $\dot{x}=0$ v záporném směru. V druhém případě se nemění stabilita uzlu, ale mění se rychlost na fázové trajektorii (možno odečíst ze změny sklonu křivky). V posledním případě se ze stabilního uzlu $(x_s, \dot{x})=(0,0)$ stává nestabilní a vznikají dva nové stabilní uzly $(x_{s1}, \dot{x})=(-\sqrt{r},0)$ a $(x_{s2}, \dot{x})=(\sqrt{r},0)$. Dále si můžeme tuto situaci znázornit na bifurkačním diagramu x_s v závislosti na parametru r . Položíme-li $\dot{x}=0$, získáme rovnici, odkud můžeme vyjádřit $x_s=x(r)$. (Strogatz, 2014, podle 2)

3.3.4 Matematické kyvadlo jako volný rotátor v odporujícím prostředí

V tomto příkladě se pokusíme najít podmínky, kdy dochází k bifurkaci v systému. Mějme matematické kyvadlo s pevným závěsem o zanedbatelné hmotnosti délky r se závěsem o hmotnosti m . Kyvadlo se pohybuje v rovině úhlu φ (v rovině papíru). Závěs je uchycen na tyči, která je kolmá ke směru pohybu (tyč „prochází“ kolmo rovinou papíru). Pohyb kyvadla má jeden stupeň volnosti, proto vektory budeme vyjadřovat pouze jedinou složkou ve směru pohybu. Její orientace bude dána znaménky. Ukážeme si nyní možný způsob sestavení pohybových rovnic a jejich řešení.

Stanovíme působící síly a rozložíme je do jednotlivých směrů:

$$F_{OD} = m\rho\omega^2, F_G = mg, \quad (3.29)$$

kde F_{OD} je odstředivá síla a F_G gravitační síla. Složky těchto sil ve směru pohybu kyvadla jsou:

$$F_{ODp} = m\rho\omega^2 \cos(\varphi), F_{Gp} = mg \sin(\varphi). \quad (3.30)$$

Protože uvažujeme pohyb kyvadla v odporujícím prostředí, získá pohybová rovnice tvar:

$$F_{výsl} = -F(v) \pm F_{ODp} \mp F_{Gp}, \quad (3.31)$$

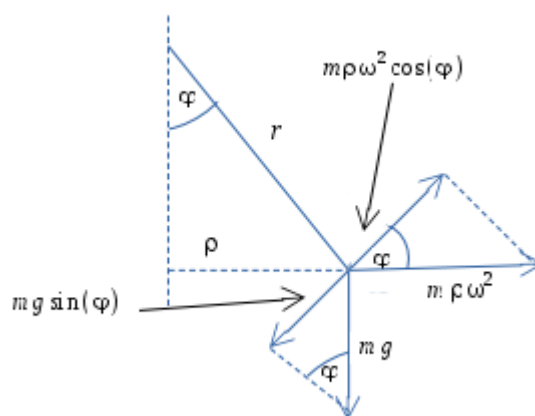
kde $F(v)$ je odporová síla proti směru pohybu kyvadla. V našem případě jsme si kladný směr zvolili nahoru, takže rovnice přechází na tvar

$$F_{výsl} = -F(v) + F_{ODp} - F_{Gp} \quad (3.32)$$

což je explicitně

$$mr\ddot{\varphi} = -br\dot{\varphi} + m\rho\omega^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) - mg \sin(\varphi), \quad (3.33)$$

kde b je koeficient tlumení ve viskózním prostředí, r délka závěsu kyvadla, $\rho = r \sin(\varphi)$ je vzdálenost volného konce kyvadla od svislice; ω představuje úhlovou rychlost otáčení



Obr. 12: Rozklad sil působících na pohyb kyvadla. (Autor)

kyvadla.

Nyní předpokládejme situaci, že působící síly jsou v rovnováze, tedy $F_{\text{výsl}}=0$ a pohybová rovnice přechází na tvar

$$br\dot{\varphi} = mr\omega^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) - mg \sin(\varphi) \quad , \quad (3.34)$$

odkud získáme úpravou

$$br\dot{\varphi} = mg \sin(\varphi) \left(\frac{r}{g} \omega^2 \cos(\varphi) - 1 \right) \quad . \quad (3.35)$$

Rovnice v tomto tvaru je zajímavá, protože už můžeme zkoumat stacionární řešení a jejich stabilitu z grafu $\dot{x}=f(x)$.

Stanovíme podmínku $\dot{\varphi}=0$ a dostaneme:

$$mg \sin(\varphi) \left(\frac{r}{g} \omega^2 \cos(\varphi) - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \sin(\varphi_s) = 0 \vee \cos(\varphi_s) = \frac{g}{r} \omega^{-2} \quad . \quad (3.36)$$

φ_s představuje hodnotu úhlu, ve kterém se kyvadlo nepohybuje. Řešení podmínky výše jsou dvě: $\varphi_s = 0 \vee \pi$. Stacionární řešení pro případ

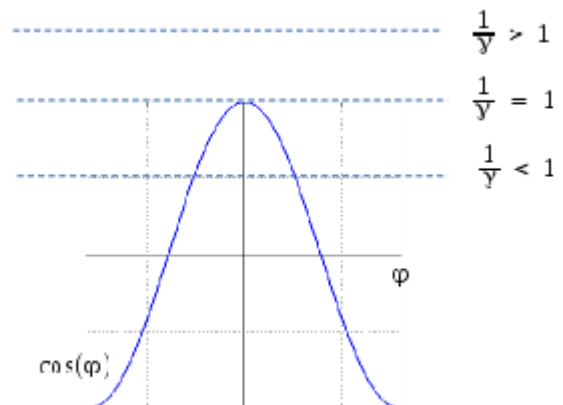
$\cos(\varphi_s) = \frac{g}{r} \omega^{-2}$ existuje jen tehdy, náleží-li výraz $\frac{g}{r} \omega^{-2}$ intervalu $\langle -1; 1 \rangle$.

Podmínka rovnováhy pro $\cos(\varphi_s)$ je zajímavá, protože se může objevovat jen pro určité hodnoty. Je otázka, jaké

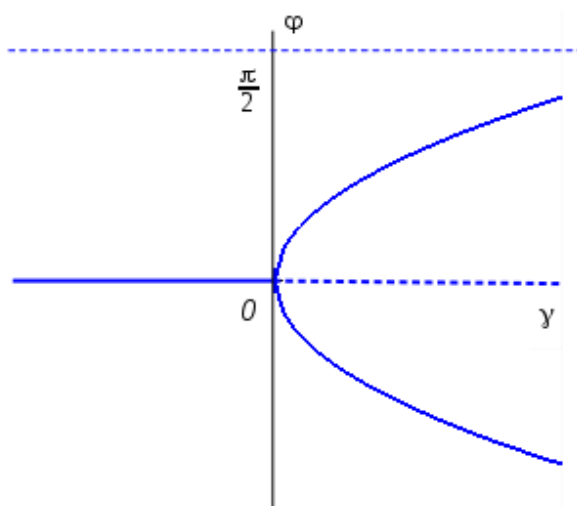
její hodnoty jakým způsobem ovlivní rovnováhu kyvadla. Zavedeme proto nový parametr

$\gamma = \frac{r}{g} \omega^2$. Další směr našich úvah

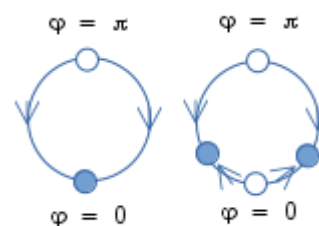
si můžeme ozřejmit na obrázku.



Obr. 13: Různá řešení pro $\cos(\varphi)$ v závislosti na hodnotě parametru $\frac{1}{\gamma}$.(Autor)



Obr. 14: Bifurkační diagram kyvadla pohybujícího se jako volný rotátor. (Autor)



Obr. 15: Fázová trajektorie vykreslená v souřadnicích rotujícího kyvadla. VLEVO: Fázová trajektorie pro pomalé otáčení ($\frac{1}{\gamma} > 1$). VPRAVO: Fázová trajektorie pro rychlou rotaci ($\frac{1}{\gamma} \leq 1$) (Autor)

Celou situaci si můžeme přiblížit schématem na Obrázku 15. Prázdný kroužek zastupuje nestabilní uzel, plný stabilní. Fázová trajektorie je vykreslená v souřadnicích rotujícího kyvadla. V případě, že $\frac{1}{\gamma} = 1$, vystupují z $\varphi = 0$ dvě nové fázové trajektorie, jež vstupují asymptoticky do stabilních uzlů $\varphi_{s1,s2} \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ pro maximální rychlost otáčení.

Mohli bychom pokračovat dále řešením systému. Sice víme, co se bude dít okolo bifurkačního bodu, ale to k postihnutí dynamiky celého systému nestačí. K tomu, abychom získali celkový fázový portrét, potřebovali bychom srovnat účinky jednotlivých sil: provedli bychom linearizaci pomocí vhodně volených sobě úměrných veličin. Nicméně, tento příklad byl dán pro ukázkou bifurkace, a proto se s bifurkačním diagramem spokojíme jako s výsledkem. (Strogatz, 2014, podle 3)

4 Fázové portréty dvoudimenzionálních systémů

Abychom mohli blíže prozkoumat některé vlastnosti dějů v přírodě, trochu nahlédneme do teorie diferenciálních rovnic, které často přesně popisují přírodní děje. Už dříve jsme se zastavili u funkce jedné proměnné, teď budeme pokračovat funkcemi dvou proměnných.

Budeme se zabývat analýzou fázového portréту rovnic typu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Nejprve si řekněme něco k jejich řešitelnosti. Rovnice v tvaru (4.1) představují vektorové pole, jehož řešením jsou trajektorie. Trajektorie znázorňují všechny možné stavy, ve kterých se systém může nacházet, prochází-li (námi) určenými body – počátečními podmínkami. Ve fázovém portrétu je znázorněno několik trajektorií s různými počátečními podmínkami současně.

Podmínka řešitelnosti je jednoduchá. Stačí, aby pravá strana rovnic (4.1) byla spojitě diferencovatelná. Potom řešení existuje, a je pro danou počáteční podmínku jedinečné. Tato podmínka aplikována ve fázovém portrétu znamená, že žádné dvě trajektorie z různých počátečních podmínek se nesmí protnout, ale mohou (a nemusí) dosáhnout stejného stacionárního bodu. Stacionární bod nazveme takový, který splňuje podmínku $\dot{x}=0, \dot{y}=0$.

4.1 Řešení soustavy dvou lineárních diferenciálních rovnic pomocí matice

K řešení soustavy rovnic lze využít maticového formalismu. Z tvaru matice lze rychle spočítat, o jaký typ stacionárního řešení jde.

Soustavu (4.1) lze maticově zapsat

$$\dot{\vec{x}} = A \vec{x}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

kde A je matice reálných čísel. O podobě řešení můžeme rozhodnout z *vlastních hodnot* λ a *vlastních vektorů* \vec{v} matice A . Odvodíme tvar řešení:

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= \vec{v} e^{\lambda t}, \vec{v} = \text{konst} \\
\Rightarrow \dot{\vec{x}} &= \vec{v} \lambda e^{\lambda t} \wedge \dot{\vec{x}} = A \vec{x} \\
\Rightarrow \dot{\vec{x}} &= A(\vec{v} e^{\lambda t}) \\
\Rightarrow \vec{v} \lambda e^{\lambda t} &= A(\vec{v} e^{\lambda t}) \\
\Rightarrow \vec{v} \lambda &= A \vec{v}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Pokud získáme řešení ve tvaru (4.3), řešení soustavy existuje. Navíc, z diskuze (4.3) vyplývají i řešení soustavy (4.1). Necht' je vlastní číslo dáno rovnicí

$$\det(A - \lambda \tau) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{4.4}$$

kde $\tau = a + d$ je stopa matice a $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \Delta$ je determinant matice A .

Vyjádřením determinantu (4.4) získáme *charakteristickou rovnici matice A* :

$$\lambda^2 - \tau \lambda + \Delta = 0 \tag{4.5}$$

s kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}. \tag{4.6}$$

Kořeny lze získat také z analogie s Vietovým vzorcem ze vztahů

$$\begin{aligned}
\tau &= \lambda_1 + \lambda_2 \\
\Delta &= \lambda_1 \lambda_2
\end{aligned} \tag{4.7}$$

(Strogatz, 2014, podle 5)

4.2 Sestavení fázového portréту dvoudimenzionálních systémů z linearizace

V předchozí kapitole jsme zavedli způsob analýzy lineárních systémů dvou nezávislých proměnných. Nyní se pokusíme prozkoumat okolí pevných bodů dvoudimenzionálních nelineárních systémů. Na konkrétních příkladech si ukážeme, kdy je možné provést linearizaci, a získat fázový portrét systému.

Předpokládejme existenci stacionárního řešení (x_s, y_s) rovnic $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$. Pro klasifikaci typu stability uvažujme malé odchylky v jejich okolí

$$u = x(t) - x_s, v = y(t) - y_s, \quad (4.8)$$

pro jejichž časovou derivaci platí

$$\begin{aligned} \dot{u} = \dot{x} &= f(x_s, y_s) + u \frac{\partial f(x_s, y_s)}{\partial x} + v \frac{\partial f(x_s, y_s)}{\partial y} + \text{vyšší mocniny} \\ \dot{v} = \dot{y} &= g(x_s, y_s) + u \frac{\partial g(x_s, y_s)}{\partial x} + v \frac{\partial g(x_s, y_s)}{\partial y} + \text{vyšší mocniny} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Maticovým zápisem můžeme napsat s přihlédnutím, že $f(x_s, y_s) = 0, g(x_s, y_s) = 0$:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_s, y_s)} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \text{vyšší mocniny} \quad (4.10)$$

nebo-li

$$\dot{\vec{w}}(u, v) = A \vec{w}(u, v) + \text{vyšší mocniny}, \quad (4.11)$$

kde \vec{w} je vektorová funkce, jejíž složky představují funkce u a v , A je *jakobián*.

Chceme-li získat linearizaci v okolí bodu (x_s, y_s) , zanedbáme ostatní členy Taylorova rozvoje (označeno *vyšší mocniny*). Je nasnadě otázka, kdy je linearizace možná, aby rovnice popisující systém neztratily kontakt s realitou. Linearizace je možná, jestliže je stacionární bod typu *sedlo*, *uzel*, nebo *spirála*. V případě, že se jedná o hraniční typ stacionárního bodu (platí $\tau^2 - 4\Delta = 0$) např. degenerovaný uzel, hvězda, střed, neuzavřený stacionární bod, nemusí linearizace podat správnou informaci o vývoji systému.

4.3 Typy fázových portrétů dvoudimenzionálních systémů

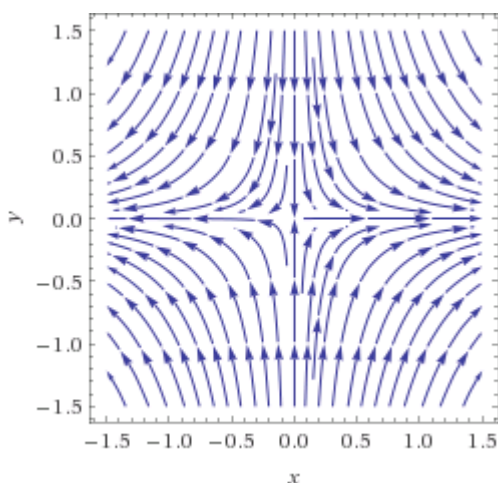
4.3.1 Sedlo

$$\text{Podmínka: } \Delta < 0 \quad (4.12)$$

Z podmínky plyne, že existují dvě navzájem opačná vlastní čísla, tedy i dva lineárně nezávislé vlastní vektory. Tvar řešení odpovídá obecnému vyjádření

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{(\lambda_1 t)} \vec{v}_1 + C_2 e^{(\lambda_2 t)} \vec{v}_2 \quad (4.13)$$

Vpravo můžeme vidět fázový portrét sedla. Jedná se o nestabilní pevný bod systému, i když ne v absolutním smyslu, protože do něj dvě trajektorie směřují. Kladné vlastní číslo odpovídá nestabilní trajektorii, záporné stabilní, směřující do pevného bodu.



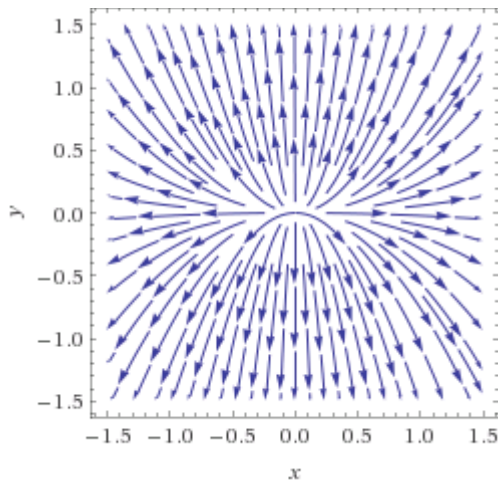
Obr. 16: Fázový portrét typu sedlo s předpisem $dx/dt = x$, $dy/dt = -2y$. Stacionární bod $(x_s, y_s) = (0, 0)$. (Autor)

4.3.2 Uzel

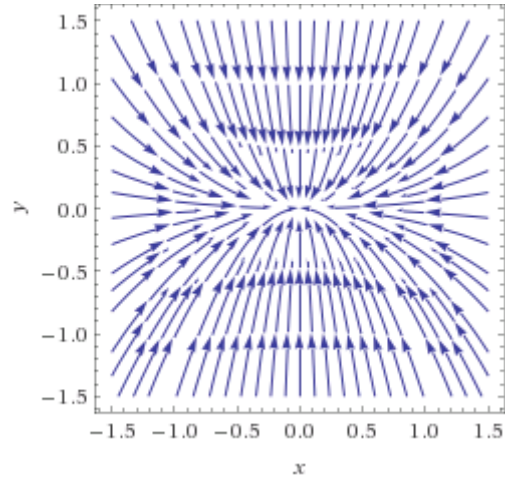
$$\text{Podmínka: } \tau^2 - 4\Delta > 0, \lambda_{1,2}: \text{reálné, se stejným znaménkem} \quad (4.14)$$

Další typy fázových trajektorií mají kladný determinant. Záporný determinant mají pouze *sedla*. V čem se odlišují zbývající typy fázových portrétů, kterými se zde zabýváme, jsou znaménka *stopy matice* τ . Je-li $\tau < 0$, pevné body „přitahují“ řešení (fázové trajektorie). Je-li hodnota stopy matice $\tau > 0$, trajektorie „obíhají“ (nemusí obíhat přesně po kružnici, resp. po uzavřených drahách, může se jednat také např. o spirálu). Nyní se zmíníme o samotných uzlech.

Vlastní vektory jsou opět lineárně nezávislé, vlastní čísla mají stejné znaménko, ale nejsou stejně velká. Ani velikost vlastních vektorů není stejně velká. Proto můžeme rozlišit, podél které osy jsou fázové trajektorie „rychlejší“ a podél které „pomalejší“. Matematicky řečeno, z rychlého směru jsou fázové trajektorie paralelní k ose „rychlého směru“ v čase $t \rightarrow -\infty$ a v čase $t \rightarrow \infty$ se blíží k uzlu pod velkým úhlem. Na obrázcích níže je rychlý směr podél osy y . Můžeme se o tom přesvědčit podle tvaru diferenciálních rovnic uvedených v popisících k obrázkům.



Obr. 17: Fázový portrét nestabilního uzlu s předpisem $dx/dt = x$, $dy/dt = 2y$. Stacionární bod $(x_s, y_s) = (0, 0)$. (Autor)



Obr. 18: Fázový portrét stabilního uzlu s předpisem $dx/dt = -x$, $dy/dt = -2y$. Stacionární bod $(x_s, y_s) = (0, 0)$. (Autor)

4.3.3 Spirála

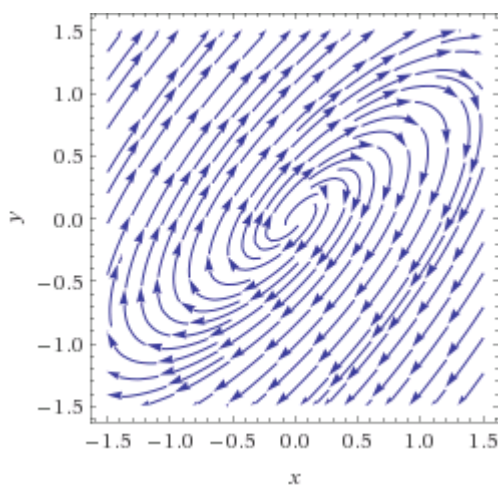
$$\text{Podmínka: } \tau^2 - 4\Delta < 0, \lambda_{1,2}: \text{komplexní}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad (4.15)$$

Z podmínky vyplývá, vlastní čísla nemohou být reálná. Jejich tvar je v komplexním čísle zapsán

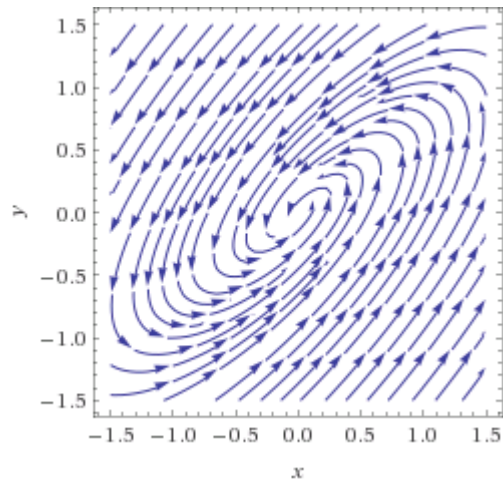
$$\lambda = \mu \pm i\omega, \quad (4.16)$$

kde $\mu < 0 \vee \mu > 0$ je reálná část komplexního čísla, která určuje míru, s jakou se spirála přibližuje k pevnému bodu nebo se od něj vzdaluje. Imaginární část komplexního čísla udává $\pm i\omega$ směr a rychlost otáčení spirály. V obecném tvaru lze řešení napsat

$$\vec{x} = C_1 e^{\mu_1 t} \cos(\omega t) \vec{v}_1 + C_2 e^{\mu_2 t} \sin(\omega t) \vec{v}_2. \quad (4.17)$$



Obr. 19: Fázový portrét nestabilní spirály s předpisem $dx/dt = -0,5x + y$, $dy/dt = -x + 0,5y$. Stacionární bod $(x_s, y_s) = (0, 0)$. (Autor)



Obr. 20: Fázový portrét stabilní spirály s předpisem $dx/dt = 0,5x - y$, $dy/dt = x - 0,5y$. Stacionární bod $(x_s, y_s) = (0, 0)$. (Autor)

4.3.4 Střed

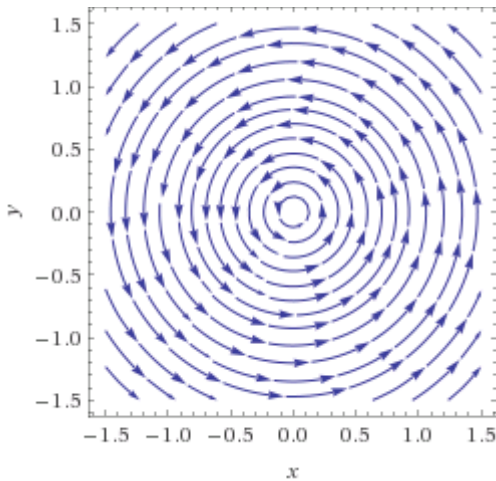
$$\text{Podmínka: } \tau^2 - 4\Delta < 0, \lambda_{1,2}: \text{komplexní}, \lambda_1 = \lambda_2 \quad (4.18)$$

Jako poslední z hlavních typů fázového portréту uvedeme *střed*, pro nějž platí $\Delta > 0$. Můžeme říct, že jde o limitní případ spirál, které ale nemají reálnou složku komplexního čísla. V komplexních číslech jej zapíšeme

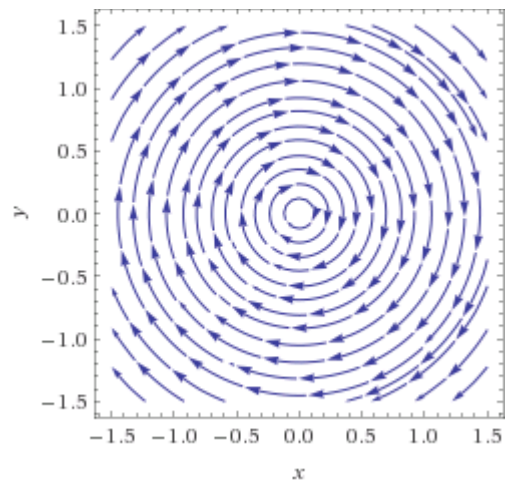
$$\lambda = \pm i\omega, \quad (4.19)$$

kde znaménko opět udává směr rotace fázové trajektorie. Velikost vlastního čísla λ je stejná pro směr v ose x i v ose y .

$$\vec{x} = C_1 e^{i\omega t} \vec{v}_1 + C_2 e^{-i\omega t} \vec{v}_2 \quad (4.20)$$



Obr. 21: Fázový portrét typu střed s předpisem $dx/dt = -y$, $dy/dt = x$. Stacionární bod $(x_s, y_s) = (0, 0)$. (Autor)



Obr. 22: Fázový portrét typu střed s předpisem $dx/dt = y$, $dy/dt = -x$. Stacionární bod $(x_s, y_s) = (0, 0)$. (Autor)

4.3.5 Shrnutí

Uvedli jsme si několik typů fázových portréतů pro hodnoty determinantu a stopy

$\Delta < 0$: sedlo

$\Delta > 0$, $\tau > 0$, $\tau^2 - 4\Delta > 0$: nestabilní uzel

$\Delta > 0$, $\tau < 0$, $\tau^2 - 4\Delta < 0$: stabilní uzel

$\Delta > 0$, $\tau = 0$: střed

$\Delta > 0$, $\tau > 0$, $\tau^2 - 4\Delta < 0$: nestabilní spirála

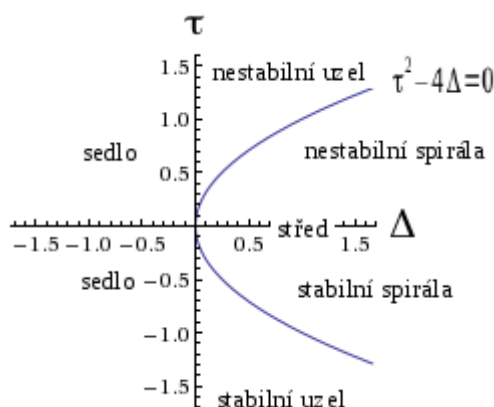
$\Delta > 0$, $\tau < 0$, $\tau^2 - 4\Delta > 0$: stabilní spirála

Pro úplnost nám chybí pouze případy

$\Delta = 0$: přímka pevných bodů

$\tau^2 - 4\Delta = 0$: degenerované uzly.

Jimi se zabývat nebudeme. Jedná se o případy, kdy v některém směru osy chybí vlastní vektor.



Obr. 23: Shrnutí Typizace fázových portrétů dvoudimenzionálních systémů podle determinantu a stopy matice. (Autor)

(Strogatz, 2014, podle 5)

4.3.6 Fázový portrét v kanonických souřadnicích

Mějme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + ax(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + ay(x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (4.21)$$

kde a je parametr. Nejprve zjistíme stacionární body tak, že položíme $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$. Získáme jedno řešení

$$(x_s, y_s) = (0, 0) \quad (4.22)$$

Dále vypočítáme jakobián:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_s, y_s)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 3ax^2 + ay^2 & -1 + 2axy \\ 1 + 2axy & 3ay^2 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Protože $\tau = 0, \Delta = 1$, je stacionární bod typu střed. Nyní se podíváme, zda jsme při lineárnízaci postupovali správně. Může se zdát podezřelé, že jsme při výpočtu zcela opomenuli hodnoty parametru a .

Vezměme opět soustavu $\begin{cases} \dot{x} = -y + ax(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + ay(x^2 + y^2) \end{cases}$. Z jejího tvaru můžeme vidět, že by

byla vhodná transformace do jiných souřadnic. Víme, že $r^2 = x^2 + y^2$ a pro jakobián nám vyšla kruhová fázová trajektorie. Provedme tedy transformaci $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

Při převodu do nových souřadnic výhodně použijeme vztah

$$\frac{d}{dt}(r^2) = \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \Rightarrow 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \Rightarrow r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} . \quad (4.24)$$

Dosadíme pravé strany pohybových rovnic, postupnými úpravami dostaneme

$$r\dot{r} = x(-y + axr^2) + y(x + ay r^2) = a(x^2 + y^2)r^2 = ar^4 . \quad (4.25)$$

Z toho plyne, že

$$\dot{r} = ar^3 . \quad (4.26)$$

Teď dopočítáme souřadnici θ . Využijme vztahu $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$, odkud získáme

$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Protože se nacházíme v okolí stacionárního bodu, můžeme pro malé

hodnoty úhlu θ derivovat přímo argument funkce:

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2 + y^2} . \quad (4.27)$$

Opět dosadíme pravé strany pohybových rovnic

$$\dot{\theta} = \frac{x(x + ay r^2) - y(-y + ax r^2)}{r^2} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1 . \quad (4.28)$$

Získali jsme soustavu rovnic v souřadnicích (r, θ)

$$\begin{cases} \dot{r} = ar^3 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases} , \quad (4.29)$$

ve které se nám při úpravách „neztratil“ parametr a . Nyní jeho hodnoty můžeme diskutovat.

Můžeme pozorovat změnu typu stacionárního bodu i jeho stability v závislosti na hodnotě parametru a . Pro $a < 0$ je fázový portrét stabilní spirála, pro $a = 0$ střed, pro $a > 0$ nestabilní spirála.

(Strogatz, 2014, podle 6)

4.3.7 Aplikace v ekologii – Model soutěže o potravu (Lotka – Voltera)

Mějme dva druhy živočichů, kteří se živí stejnou potravou. Zdroje potravy jsou omezené. V tomto příkladu užitíme ovce a králíky na společné pastvině. Zavedme označení x pro

populaci králíků a y pro populaci ovcí. Z konvence zřejmě vyplývá, že $x, y \geq 0$. Logistické rovnice rozšířené o „mezidruhovou soutěž“ mají tvar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(3-x) - 2xy \\ \dot{y} &= y(2-y) - xy \end{aligned} \quad (4.30)$$

Srovnáme-li obě rovnice, můžeme vidět, že králíci jsou rychlejší v reprodukci (člen $3x$ oproti $2y$ u ovcí), zato však při nedostatku potravy rychleji vymírají než ovce (člen $-2xy$ oproti $-xy$).

První stanovíme stacionární body:

$$(x_{S1}, y_{S1}) = (0, 0), (x_{S2}, y_{S2}) = (3, 0), (x_{S3}, y_{S3}) = (0, 2), (x_{S4}, y_{S4}) = (1, 1) \quad (4.31)$$

sestavíme jakobián, do kterého budeme dosazovat hodnoty stacionárních bodů

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2x-2y & -2x \\ -y & 2-x-2y \end{pmatrix}_{(x_{Sn}, y_{Sn})} \quad (4.32)$$

Nyní můžeme klasifikovat stacionární body.

$$(x_{S1}, y_{S1}) = (0, 0) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau = 5, \Delta = 6 \Rightarrow \text{nestabilní uzel} \quad (4.33)$$

Trajektorie z $(0, 0)$ se přimykají k ose y , protože vlastní vektory vychází

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ pro odpovídající vlastní čísla } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2 \text{ . System se bude vyvíjet}$$

pomaleji ve směru osy y . Pro další stacionární bod $(x_{S2}, y_{S2}) = (3, 0)$ je jakobián

$$(x_{S2}, y_{S2}) = (3, 0) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau = -4, \Delta = 3 \Rightarrow \text{stabilní uzel} \quad (4.34)$$

Vlastní vektory vychází $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ pro odpovídající vlastní čísla

$$\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1 \quad (4.35)$$

Dále stacionární bod $(x_{S3}, y_{S3}) = (0, 2)$:

$$(x_{S3}, y_{S3}) = (0, 2) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

$$\Rightarrow \tau = -3, \Delta = 2 \Rightarrow \text{stabilní uzel}$$

Vlastní vektory vychází $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pro odpovídající vlastní čísla

$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$. Pro poslední stacionární bod $(x_{S4}, y_{S4}) = (1, 1)$ vychází

$$(x_{s4}, y_{s4}) = (1, 1) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tau = -2, \Delta = -1 \Rightarrow \text{sedlo} \quad . \quad (4.37)$$

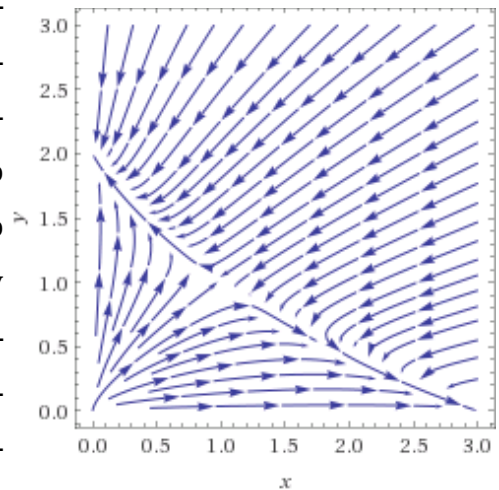
Vlastní vektory Matice A ze vztahu (4.37) jsou

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

pro odpovídající vlastní čísla

$$\lambda_1 = -\sqrt{2} - 1, \lambda_2 = -1 + \sqrt{2} \quad . \quad (4.39)$$

Tím jsme dokončili analýzu jednotlivých stacionárních bodů, z nichž můžeme sestavit fázový portrét. Na fázovém portrétu si můžeme všimnout „stabilního pole“ sedla (v našem případě se jedná o křivku). Křivka směřuje z nestabilního počátku do nestabilního bodu sedla, odkud se dál systém vyvíjí v neprospěch králíků nebo ovcí do té doby, dokud jeden z druhů na společné louce nevyhyne. Příklad, který ukazuje vyhynutí jednoho z druhů, znázorňují stabilní uzly. V případě stabilního uzlu (3,0) by došlo k vyhynutí ovcí, v případě (0,2) k vyhynutí králíků. Zajímavá okolnost pro odhadnutí toho, který druh vyhraje soutěž o potravu v budoucnosti, je to, že v okolí sedlového bodu jde velmi obtížně rozhodnout, který druh vítězí. Oba druhy při přibližování se k sedlu ztrácí populaci, a o tom, který druh zvítězí, rozhodne malý počet jedinců, který vstupuje do hry jako počáteční podmínky. (Strogatz, 2014, podle 6)



Obr. 24: Fázový portrét soutěže dvou druhů o potravu. Stacionární body (x_s, y_s) : $(0, 0)$ nestabilní uzel, $(1, 1)$ sedlo, $(3, 0)$ stabilní uzel, $(2, 0)$ stabilní uzel. Osy vyjadřují populaci jako míru (např. v tisících), ne jako absolutní počet v jedincích. (Autor)

4.4 Bifurkace v dvoudimenzionálních systémech

Už dříve jsme zmiňovali bifurkaci v jednodimenzionálním systému. Nyní, po analýze různých typů stability fázových portrétů, se zastavíme u toho, jak vypadá bifurkace u dvoudimenzionálního systému. Položme si otázku, jestli se může změnit řešení kvůli parametru. Odpověď je nasnadě: už dříve jsme viděli důležitost diskuze výsledku s ohledem na hodnoty parametru.

První si zmíníme nejjednodušší případy, které mohou nastat při řešení jednodušších diferenciálních rovnic. Základním typem bifurkací, kterým se budeme zabývat jsou *bifurkace stacionárních bodů*.

4.4.1 Bifurkace pevných bodů

Podle hodnoty vlastního čísla λ rozlišujeme případy

a) $\lambda=0$, bifurkace:

- i) *sedlo–uzel*,
- ii) *transkritická*,
- iii) *vidle*

b) $\lambda = \pm i\omega$, *Hopfova bifurkace*

Uvedeme si označení pro následující případy bifurkací: x, y jsou kanonické souřadnice (není-li uvedeno jinak), a je parametr. Jako typický případ byl vybrán $\dot{y} = -y$, v případě proměnné y však můžeme změnit znaménko i na opačné.

a) $\lambda=0$

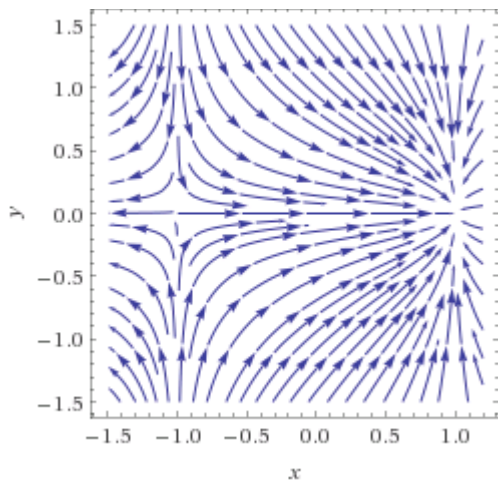
i) *bifurkace sedlo–uzel*

Nastává pro systémy dané soustavou

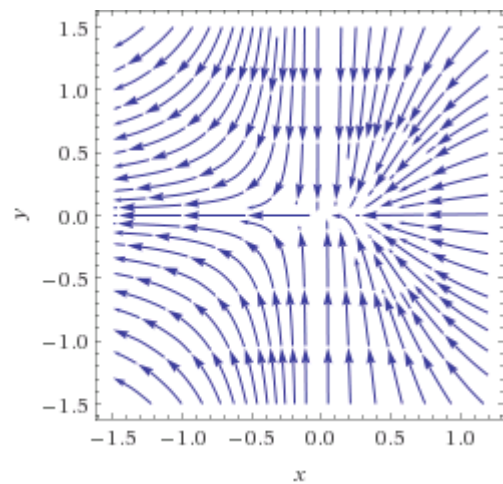
$$\begin{aligned} \dot{x} &= a - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \quad (4.40)$$

Nalezneme stacionární body

$$(x_{S1}, y_{S1}) = (\sqrt{a}, 0), \quad (x_{S2}, y_{S2}) = (-\sqrt{a}, 0) \quad (4.41)$$



Obr. 25: Fázový portrét, $a = 1$.
 Stacionární body jsou
 $(x_{S1}, y_{S1}) = (-1, 0)$ (sedlo) a
 $(x_{S2}, y_{S2}) = (1, 0)$ (uzel).
 (Autor)



Obr. 26: Fázový portrét, $a = 0$.
 Stacionární bod je
 $(x_s, y_s) = (0, 0)$ (polostabilní
 uzel). (Autor)

Položíme podmínku $a > 0$ pro existenci stacionárního bodu. Na fázovém portréту jde ukázat, jak se změnou parametru a v soustavě (v záporném smyslu) se k sobě přibližují stabilní a nestabilní body. V místě $a = 0$ oba body splynou v jediný. Jakmile $a < 0$, stacionární bod zaniká.

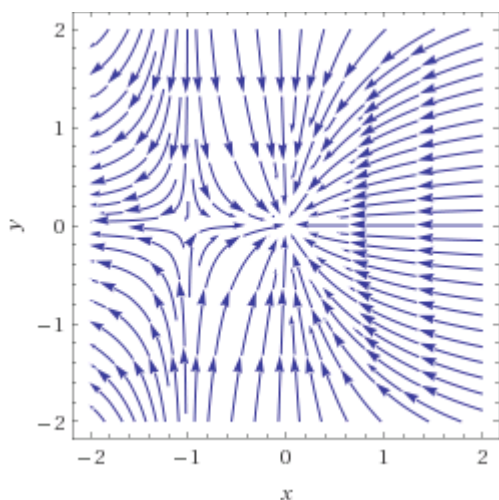
- a) $\lambda=0$
 ii) transkritická bifurkace

Nastává pro systémy dané soustavou

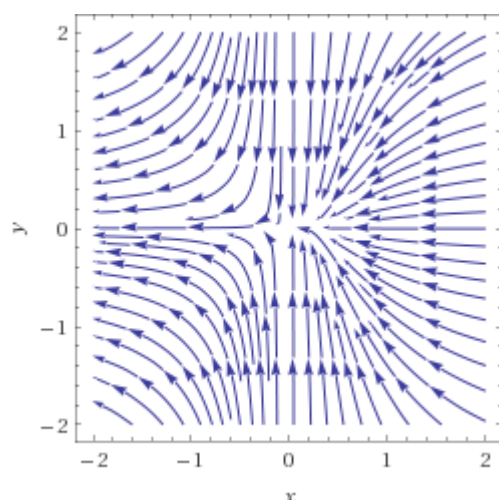
$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - x^2 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \quad (4.42)$$

Nalezneme stacionární body

$$(x_{S1}, y_{S1}) = (\sqrt{a}, 0), \quad (x_{S2}, y_{S2}) = (-\sqrt{a}, 0), \quad (x_{S3}, y_{S3}) = (0, 0) \quad .$$

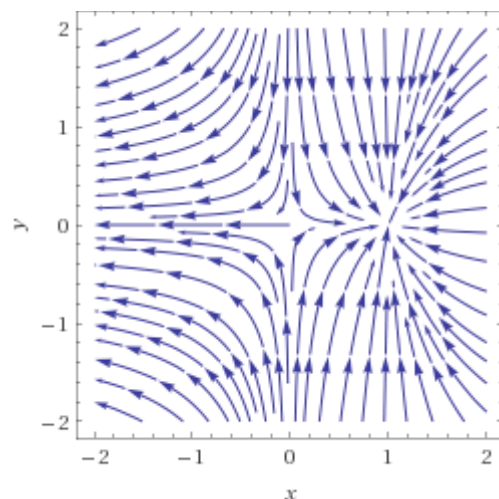


Obr. 27: Fázový portrét,
 $a = -1$. Stacionární body jsou
 $(x_{S1}, y_{S1}) = (-1, 0)$ (sedlo) a
 $(x_{S2}, y_{S2}) = (-1, 0)$ (uzel). (Autor)



Obr. 28: Fázový portrét,
 $a = 0$. Stacionární bod je
 $(x_S, y_S) = (0, 0)$ (polostabilní uzel).
 (Autor)

Transkritická bifurkace je přesně analogická k svému protějšku v jednodimenzionálním systému. V případě vlevo nahoře, fázové trajektorie směřují do stabilního bodu a vybíhají z nestabilního sedla. V druhém případě (Obr. 27) sedlo a uzel splynou, a stane se z nich jeden polostabilní bod. Zde je polostabilní bod stabilní zprava a nestabilní zleva. „Rychlejší směr“ probíhá ve směru trajektorií do $-x$. Poslední případ je posunutí sedla z $(-\sqrt{a}, 0)$ na $(0, 0)$ a bodu $(0, 0)$ na $(\sqrt{a}, 0)$.

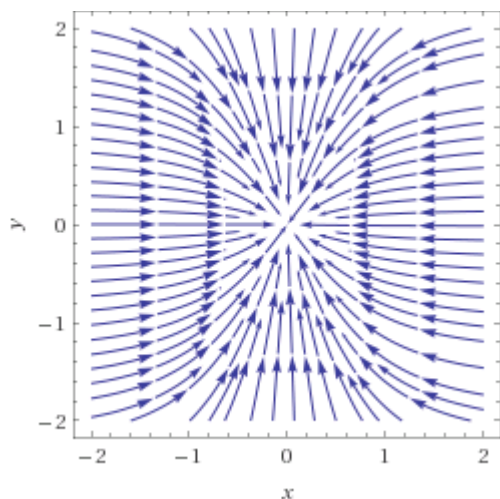


Obr. 29: Fázový portrét, $a = 1$.
 Stacionární body jsou $(x_{S1}, y_{S1}) = (0, 0)$ (sedlo) a $(x_{S2}, y_{S2}) = (1, 0)$ (uzel). (Autor)

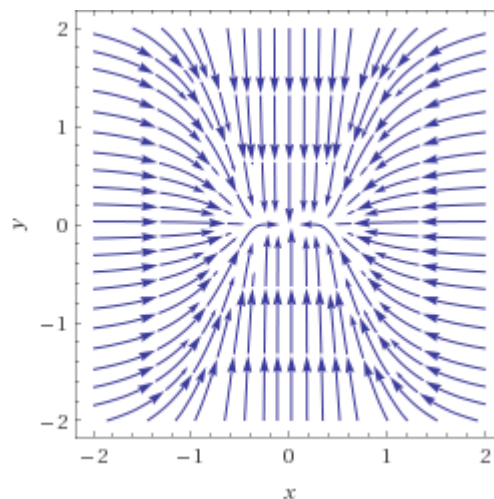
a) $\lambda = 0$
 iii) vidle

Nastává pro systémy dané soustavou

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - x^3 \\ \dot{y} &= -y\end{aligned}\tag{4.43}$$

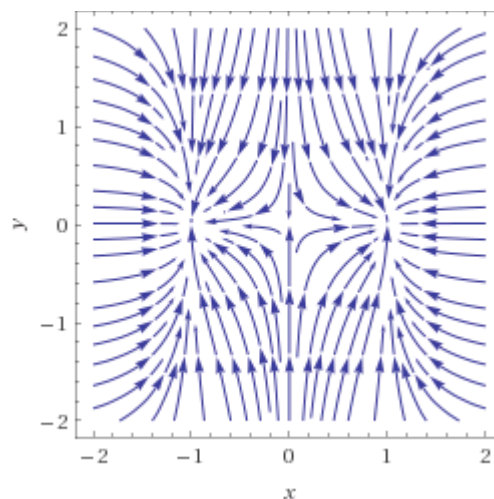


Obr. 30: Fázové trajektorie směřující do stabilního uzlu. Hodnota parametru $a = -1$. Rychlý směr je dán podél osy x (viz také předpis). (Autor)



Obr. 31: Fázový portrét pro hodnotu parametru $a = 0$. Stacionární bod je stabilní uzel $(0, 0)$. Na jeho okolí dochází ke kritickému zpomalení. (Autor)

Na Obrázku 30 je znázorněn stabilní uzel. Při přibližování se hodnoty parametru a zleva k nule dochází k zpomalování trajektorií v okolí stacionárního řešení (Obr. 31). Jakmile je $a > 0$, ze stabilního uzlu v počátku $(0,0)$, se stává bod sedla. v nestabilních fázových trajektoriích sedla vznikají symetricky na ose x dva stabilní uzly.



Obr. 32: Fázový portrét pro hodnotu parametru $a = 1$. V počátku $(0, 0)$ se nachází sedlo, na jehož trajektorii v ose x leží symetricky stabilní uzly. (Autor)

b) $\lambda = \pm i\omega$, Hopfova bifurkace

Hopfova bifurkace nastává pro systémy s fázovým portrétem typu střed. V kanonických proměnných jej vyjadřujeme

$$\begin{aligned} \dot{r} &= f(r) \\ \dot{\theta} &= g(r, \theta) \end{aligned} \quad (4.44)$$

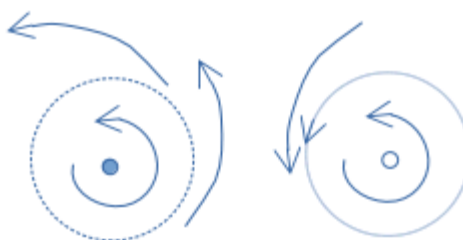
kde r je délka průvodiče a θ úhel otočení. Hopfova bifurkace často nastává v hydrodynamice a aerodynamice (např. při pohybu konvekčních buněk v kapalině, při obtékání křídla letadla).

V souvislosti s Hopfovou bifurkací je třeba zmínit *limitní cyklus*. Jedná se sice o uzavřenou fázovou trajektorii, ale do jejího okolí mohou vstupovat (nebo vystupovat) jiné fázové trajektorie, obvykle ve tvaru spirál.

Limitní cykly souvisí také s deterministickým chaosem. Limitní cyklus je případ, kdy se řešení soustavy diferenci-

álních rovnic blíží periodickému nebo kvaziperiodickému pohybu. Ve dvou dimenzích není možné, aby nějaká fázová trajektorie vstoupila dovnitř limitního cyklu zvnějšku, protože jinak by došlo k průniku trajektorií, a tím by byl porušen požadavek na jedinečnost řešení. Ve třech dimenzích je situace odlišná. Fázová trajektorie se může dostat dovnitř limitního cyklu, aniž by došlo k průniku trajektorií, a také jej může opustit. V takovém případě může být dlouhodobá předpověď systému značně ztížena, protože nevíme, která trajektorie může „odnést stav systému“ od jeho očekávaných hodnot v blízkosti limitního cyklu.

(Strogatz, 2014, podle 12)



Obr. 33: VLEVO: subkritická Hopfova bifurkace pro a_{krit} . Pro konkrétní systémy není univerzální hodnota. VPRAVO: stabilní limitní cyklus. Hopfova bifurkace se týká zejména změny stability limitních cyklů. (Autor)

5 Lorentzovy rovnice a Bénárdova buňka

Roku 1901 byl proveden experiment Henri Bénardem, při kterém došlo při ohřívání kapaliny k vytvoření struktury.

Henri Bénard nalil do nádoby kapalinu, kterou uzavřel, a poté pomalu rovnoměrně ohříval. Dokud síly povrchového napětí byly větší než síly vyvolané narůstajícím teplotním gradientem, v kapalině nedocházelo k vzniku konvekce. Později došlo u jedné části ohřívajícího dna k pohybu kapaliny směrem k povrchu. Na povrchu došlo k vytvoření konvektivní buňky. Kolem této buňky začaly vznikat nové, s tvarem šestistěnu, podobně jako u první buňky. Postupně byla celá hladina tvořena ze sobě podobných šestiúhelníků. „Šestiúhelníková struktura“ byla pojmenována podle svého objevitele – Bénardovy buňky.

Při pozornějším sledování lze pozorovat, že proudění uvnitř buňky je uzavřené: Středem stoupá kapalina nahoru, u povrchu se ochlazuje a klesá podél stěn zpět ke dnu. U dna se kapalina opět ohřeje a zase stoupá středem buňky.

Mnohem později se Bénárdova buňka dostala na popředí vědeckého zájmu. E. Lorentz prováděl výpočty na numerickém modelu, vytvořeném z fyzikální podstaty jako Bénárdova buňka. Nejednalo se o klasické Navier – Stokesovy rovnice popisující pohyb kontinua s přítomností vazkých sil, ale o soustavu tří nelineárních diferenciálních rovnic s třemi parametry.

V roce 1963 prováděl E. Lorentz výpočty na numerickém modelu Bénardovy buňky. Protože musel odejít, zaznamenal si výsledek na tři desetinná místa a výpočet přerušil. Později zaznamenané výsledky opět vložil do počítače, aby dokončil výpočet. Když došlo k porovnání s kontinuálním výpočtem (který pracuje se šesti desetinnými místy), ukázalo se, že výsledky si vůbec neodpovídají. Lorentz upozornil na zajímavou dynamiku tohoto systému a stal se průkopníkem v novém oboru. Jak může z deterministických rovnic vyvstat chaos? Odpověď na tuto otázku přišla díky rozsáhlé analýze nejen dynamických, ale i topologických kritérií. Bénárdova buňka našla matematiku, která ji vysvětlovala, a s novým pohledem přišlo i nové pojmenování: řídicí rovnice Bénardovy buňky se staly známé jako *Lorentzův systém*.

Pokusme se provést přibližnou analýzu Lorentzova systému. Lorentzův systém je zjednodušený fyzikální model, který sloužil pro testování statistických modelů pro předpověď počasí. Díky tomu, že Lorentz dobře rozpoznal podstatnou podobnost s dynamikou počasí, stal se z původně testovací metody nový přístup k vytváření nejlepších dostupných předpovědí pomocí numerických modelů.

Vytvoření počítačového modelu popsaném nelineárními diferenciálními rovnicemi před-

stavovalo velký krok vpřed. Dříve mohla být k předpovědi počasí použita pouze statistika. Lorentzovy rovnice popisují tepelnou konvekci vzduchu, který se u zemského povrchu ohřívá, stoupá a ve větší výšce nad zemským povrchem se ochlazuje, potom zpátky klesá k povrchu, kde se opět ohřívá. Je zřejmé, že takovýto model je oproti skutečnosti dost zjednodušený, přesto poskytuje překvapivě bohatou dynamiku.

Rovnice můžeme získat odvozením z pohybových rovnic chaotického pohybu vodního kola, které sice není původní, ale je názorné.

Navíc si tím předvedeme, jak provést správně fyzikální analogii mezi dvěma systémy.

Krátce se můžeme zastavit u odvození rovnic chaotického vodního kola.

První si uvědomíme proměnné a působící síly.

Proměnné v systému jsou voda v nádržkách:

$m = m(\theta, t)$, dále vtok vody do kola:

$Q = Q(\theta)$. Pro pohyb vodního kola platí zákon zachování hmotnosti ve tvaru

$$\frac{\partial m}{\partial t} = Q - K m - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \quad (5.1)$$

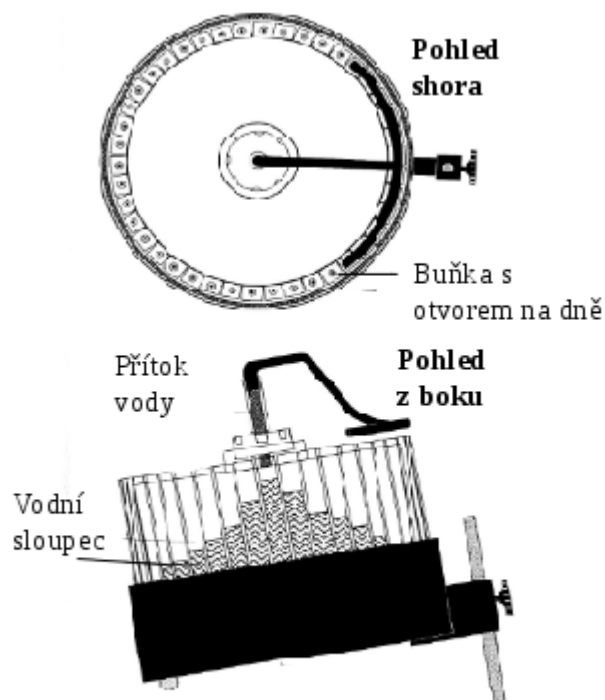
první člen vpravo představuje přitékající vodu, druhý odtékající otvorem na dně nádržky, třetí vodu, která se transportuje v souřadnicovém systému vodního kola. Protože se kolo otáčí, bude mít i moment setrvačnosti a ze zákona síly vyplývá výsledný moment

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = -\nu\omega + \tau \quad (5.2)$$

kde I je moment setrvačnosti, ω úhlová rychlost, první člen vpravo brzdný moment vyvolávající kmitání kola, τ moment síly v důsledku gravitace. Vzhledem k tomu, že pohyb kola má jeden stupeň volnosti, můžeme z vektorových veličin vzít jedinou složku, o jejíž výsledné orientaci rozhodne znaménko. V důsledku nerovnoměrného rozložení vody po obvodu kola je moment síly τ dán

$$\tau = g r_K \int_0^{2\pi} m(\theta, t) \sin(\theta) d\theta \quad , \quad (5.3)$$

kde r_K je poloměr kola. Rovnice získává tvar



Obr. 34: Lorentzovo chaotické vodní kolo. Moyerman, s. 2. Dostupné z:

<https://www.math.hmc.edu/~dyong/math164/2006/moyerman/finalreport.pdf>

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = -v\omega + gr_K \int_0^{2\pi} m(\theta, t) \sin(\theta) d\theta \quad (5.4)$$

a získali jsme soustavu

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} &= Q - Km - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt}(I\omega) &= -v\omega + gr_K \int_0^{2\pi} m(\theta, t) \sin(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (5.5)$$

Tato soustava není snadná k vyřešení kvůli nelineárnímu členu $\omega \frac{\partial m}{\partial \theta}$, v druhé diferenciální rovnici se vyskytuje integrál. Druhou rovnici můžeme zjednodušit, uvážíme-li, že po dostatečně dlouhé době se celková hmotnost M ve všech nádržkách po obvodu kola nemění a blíží se stálému poměru

$$M \rightarrow \frac{Q_{CELKEM}}{K}, t \gg \frac{1}{K} . \quad (5.6)$$

Nebude-li se měnit celková hmotnost vody, zachová se i celkový moment setrvačnosti kola s vodou, tak získáme

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} &= Q - Km - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \\ I\dot{\omega} &= -v\omega + gr \int_0^{2\pi} m(\theta, t) \sin(\theta) d\theta \end{aligned} . \quad (5.7)$$

Protože u proměnné $m = m(\theta, t)$ se souřadnice opakují po jednom otočení dokola (2π), můžeme k řešení použít Fourierovu analýzu. Jako řešení dosazujeme

$$\begin{aligned} m &= m(\theta, t) = \sum^n (a_n \sin(n\theta) + b_n \cos(n\theta)) \\ Q &= Q(\theta) = \sum^n q_n \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Po dosazení do rovnic dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} \dot{a}_n &= n\omega b_n - K a_n \\ \dot{b}_n &= -n\omega a_n + q_n - K b_n \\ \dot{\omega} &= \frac{-v\omega}{I} + \frac{\pi gr}{I} a_1 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Pohyb molekul tekutiny může nabývat konečného množství forem. Tyto formy pohybu nazýváme módy. Mezi možnými módy jasně převládá pouze jeden z nich. Zvyšováním amplitudy převládajícího módu se snižují amplitudy ostatních možných módů. Takže výsledná forma pohybu v makroskopickém měřítku je dána jistou převládající formou. (Korneck, 2006, s. 311). Vzhledem k tomu, že pro úplné oddělení pohybů stačí pouze první člen z každé sumy, můžeme psát:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \omega b_1 - K a_1 \\ \dot{b}_1 &= -\omega a_1 + q_1 - K b_1 \\ \dot{\omega} &= \frac{-\nu \omega}{I} + \frac{\pi g r_K}{I} a_1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Substitucí proměnných

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{K \nu}{\pi g r_K} y \\ b_1 &= \frac{-K \nu}{\pi g r_K} z + \frac{q_1}{K} \\ \omega &= K x \end{aligned} \quad (5.11)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= r x - y - x z \\ \dot{z} &= x y - b z \end{aligned} \quad (5.12)$$

kde $\sigma = \frac{\nu}{K I}$ je Prandtlovo číslo, $r = \frac{\pi g r_K q_1}{K^2 \nu}$ Rayleighovo číslo, $b=1$ v případě

konvektivní buňky (obvykle, ne nutně). Proměnné x, y, z nemají s *prostorovými souřadnicemi* nic společného. (Jackson, 1993, s. 138; Moyerman, 2006, s. 5)

Vidíme, že v soustavě diferenciálních rovnic se nachází dva nelineární členy. Můžeme se také přesvědčit o stabilitě stacionárních bodů a možné linearizaci v jejich okolí.

(Strogatz, 2014, podle 16)

5.1 Linearizace Lorentzových rovnic

K tomu, abychom zajistili, že se nedopustíme velké chyby, je důležité zjistit, o jaký typ stacionárního řešení jde a pro jaký rozsah hodnot parametrů je linearizace možná.

Můžeme si všimnout, že Lorentzovy rovnice jsou třírozměrné, zatímco my jsme se zabývali analýzou pouze dvourozměrného fázového prostoru. Naštěstí v tomto případě (i když ne obecně) lze vystačit pouze s analýzou dvou dimenzí. Určíme body, které jsou řešením pro derivace položené nule

$$\begin{aligned} \dot{x} = \sigma(y-x), \dot{x} = 0 &\Rightarrow \sigma(y-x) = 0 \\ \dot{y} = r x - y - x z, \dot{y} = 0 &\Rightarrow r x - y - x z = 0 \\ \dot{z} = x y - b z, \dot{z} = 0 &\Rightarrow x y - b z = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Pro stacionární body dostaneme

$$(x_S, y_S, z_S) = (\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1) \quad (5.14)$$

V literatuře se můžeme setkat s označením $x_S = C^+, y_S = C^-$. Položíme-li $r \rightarrow 1, r \neq 1$, stacionární body se blíží hodnotě

$$(x_S, y_S, z_S) \rightarrow (0, 0, 0) \quad (5.15)$$

Vypočítáme jakobián:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= r x - y - xz \\ \dot{z} &= x y - b z \end{aligned} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r-x & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}_{(0,0,0)} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

proměnná z se exponenciálně blíží nule, proto můžeme přepsat soustavu

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \dot{z} = -b z \quad (5.17)$$

a klasifikaci provedeme pouze pro proměnné x, y . Hodnoty parametrů jsou $\sigma=10, b=8/3$. Stopa τ a determinant Δ jakobiánu vychází

$$\tau = -\sigma - 1, \Delta = \sigma(1-r) \quad (5.18)$$

Z toho vyplývá pro stacionární řešení soustavy, že je-li hodnota parametru

$$r > 1, \quad (5.19)$$

je stacionární bod typu *sedlo* v počátku zobecněných souřadnic fázového portréту. Do stacionárního bodu směřují dvě trajektorie a jedna z něj vychází. Je-li hodnota parametru

$$r < 1, \quad (5.20)$$

stacionární bod je typu *stabilní uzel*. Pro úplnost dodejme, že v případě

$$r = 1 \quad (5.21)$$

dochází v systému k bifurkaci *vidle*.

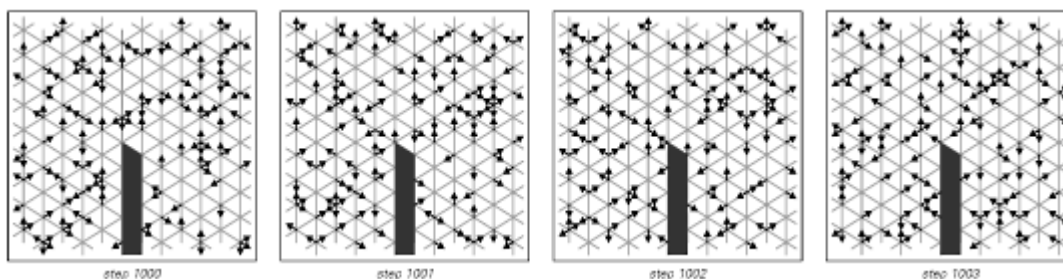
(Strogatz, 2014, podle 16)

6 Nerovnovážná termodynamika – tok jako velké množství částic

Tradiční věda s matematickým popisem proudění nedává příliš přesvědčivé vysvětlení k vzniku chaosu. Diferenciální rovnice, které popisují pohyb tekutiny, už v případě konvekce (viz Lorentzovy rovnice – Bénárdova buňka) se stávají natolik složitými, že o jejich analytickém řešení nemůže být řeč. K jejich řešení se používají modely vytvořené počítačem a poměrně efektivní analýza fázových portrétů. Kdybychom však chtěli proniknout do větší hloubky, záhy bychom se dostali do topologických obtíží. Vystává otázka, zda neexistuje jednodušší způsob modelování (a řešení) jevů, které v sobě zahrnují i prvky náhody a chaosu, mezi něž určitě patří i turbulentní proudění, Bénárdova buňka nebo počasí. Pokud by vytvoření chaosu bylo tak náročné, proč je v přírodě tak časté?

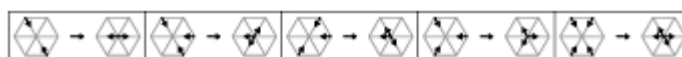
Odpověď na tuto otázku nabízí právě nelineární termodynamika. Nabízí nový pohled na problematiku toku jako na soubor spolu reagujících buněk, řídících se jednoduchými pravidly. Na mikroskopické úrovni reálné tekutiny představují ohromné množství molekul narážejících jedna na druhou. Takže bychom mohli v prvním přiblížení uvažovat, že molekuly jsou částice, které se pohybují na pevné mřížce a narážejí na sebe ve vymezeném prostoru. Tento pohled může výhodně aplikovat simulaci pomocí *celulární automatiky* (*cellular automaton*). (Wolfram, 2001, s. 376).

Podíváme se na model tekutiny obtékající překážku. Molekuly do sebe naráží a mohou se pohybovat vždycky po jednom ze šesti možných směrů.



Obr. 35: Molekuly narážející na sebe a na překážku. Ukázka celulárního automatu. (Wolfram, s. 378). Dostupné z:

<http://www.wolframscience.com/nksonline/page-378>

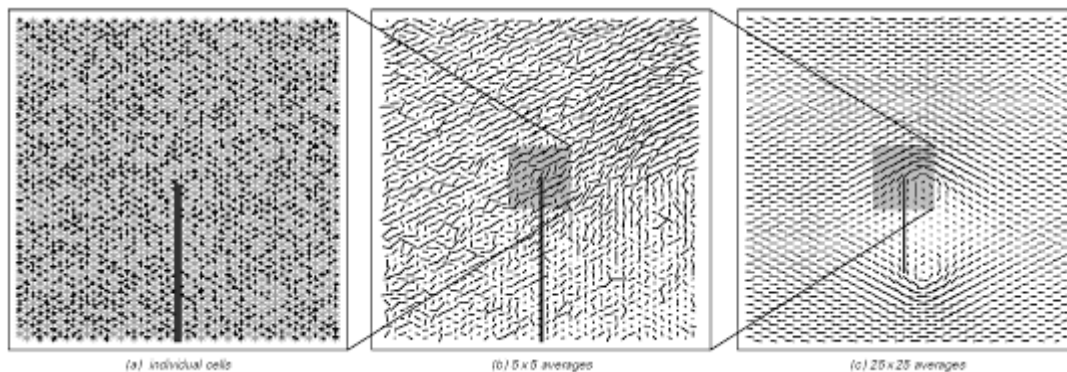


Obr. 36: Pravidla pro pohyb molekul. (Wolfram, s.378). Dostupné z:

<http://www.wolframscience.com/nksonline/page-378>

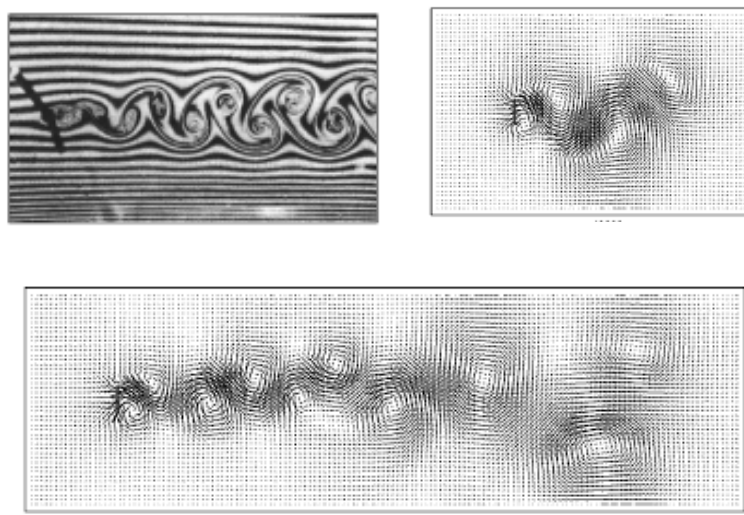
Naráží-li molekuly do sebe navzájem, odrazí se podle definovaných pravidel (viz Obr. 36).

Na Obrázku 35 (první zleva) můžeme vidět molekuly narážející do sebe. Počáteční podmínky (původní místa a směry pohybu) jsou dány náhodně. Při tomto přiblížení nejsme schopni uvnitř kapaliny pozorovat strukturu. Můžeme ale odhlédnout od mikroskopického měřítka a podívat se na celý jev po delší době (po větším počtu proběhlých iterací).



Obr. 37: Kapalina obtékající překážku. 1) jednotlivé buňky ; 2) Průměrný směr pohybu z buněk o velikosti 5*5 ; 3) Průměrný směr pohybu z buněk o velikosti 25*25 (Wolfram, s. 378). Dostupné z: <http://www.wolframscience.com/nksonline/page-378>

Z posledního Obrázku 38 můžeme vidět, že aproximace obtékání na kontinuální pohyb je již možná. Pro bližší představu aplikace celulárních automatů můžeme ještě porovnat ilustrace skutečné *Karmanovy vírové cesty* a její model vytvořený pomocí celulárních automatů.



Obr. 38: Kármánova vírová cesta (vlevo nahoře). Model 40 000 iterací (vpravo nahoře). Model 70 000 iterací (dole). (Wolfram, 2001, s. 380). Dostupné z: <http://www.wolframscience.com/nksonline/page-380>

6.1 Stabilita termodynamických systémů

V předchozích kapitolách jsme se zabývali posouzením stability systémů spíše z dynamického hlediska. Můžeme si ale předvést, že existuje alternativní posouzení stability systému z hlediska entropie.

Z matematického hlediska je nemožné vytváření makroskopických struktur v rovnovážných systémech, protože v rovnováze, kam tyto systémy směřují, dosáhnou maxima entropie. (Prokšová)

U nerovnovážných struktur dochází k zesilování fluktuací pozitivní zpětnou vazbou a tím k procesům, které vzdalují systém od rovnováhy ve smyslu rovnovážných systémů. Navíc nemůžeme říct, že ve stavu daném počátečními podmínkami nedojde k žádnému vytváření struktur, nebo pouze k procesům, které systém povedou monotónně k maximální nahodilosti, protože nerovnovážné systémy se od rovnovážných liší zásadním způsobem.

Uvedeme si charakteristické vlastnosti nerovnovážného systému:

1. Systém je tvořen z mnoha částí.
2. Vývoj systému je nelineární (popsaný nelineárními diferenciálními rovnicemi).
3. Systém je otevřený (dochází k výměně hmoty nebo energie s okolím, v případě Bénárdovy buňky k ohřívání a ochlazování kapaliny) a disipativní (část pohybové energie se mění na teplo). Jiné příklady otevřených disipativních systémů:
 - Plamen svíčky: Struktura plamene se nemění, spotřebovává se energie a hmota (vosk) při hoření
 - Živé organismy: Nachází se ve stavu dynamické rovnováhy s okolím. V případě přerušení transportu energie a hmoty (kyslík, živiny) umírají.

(Korneck, 2006, s. 305)

6.1.1 Stabilita rovnovážných systémů

Entropie u rovnovážných systémů představuje nejen stacionární bod z termodynamického

hlediska, ale její růst (nebo pokles) je i ukazatelem samovolnosti procesů.

V dynamických systémech je významná funkce, která zachycuje potenciál uvažovaného systému. V klasické termodynamice existují čtyři termodynamické potenciály, které se odvozují Legendrovou transformací z první věty termodynamiky. První věta termodynamická má tvar:

$$dU = TdS - pdV \quad (6.1)$$

Přirozené proměnné termodynamických potenciálů zachycuje následující tabulka:

Tab. 1: Termodynamické potenciály v rovnovážné termodynamice

	V	T	p	S
V		F		U
T	F		G	
p		G		H
S	U		H	

Uvedeme si značení potenciálů a jejich proměnných:

F ... Helmholtzova volná energie, $F = F(V, T)$, kde V je objem, T termodynamická teplota

G ... Gibbsova energie, $G = G(p, T)$, kde p je tlak

H ... entalpie, $H = H(S, p)$ kde S je entropie

U ... vnitřní energie, $U = U(S, V)$

Uvedme si příklad transformace z vnitřní energie na entalpii. Víme, že

$$H = H(S, p) \quad (6.2)$$

$$dU = TdS - pdV$$

takže musíme vyloučit člen pdV . Dosáhneme toho tak, že zderivujeme výraz $(pV)'$.

$$dX = TdS - pdV + (pV)'$$

$$dX = TdS - pdV + pdV + Vdp \Rightarrow X = X(S, p) \Rightarrow X = H \quad (6.3)$$

protože

$$dU = TdS - pdV \wedge (pV)' = pdV + Vdp \quad (6.4)$$

můžeme výraz

$$dH = dU + (pV)' \quad (6.5)$$

zinegrovat, čímž dostaneme vztah pro entalpii

$$H = U + pV \quad (6.6)$$

Stejně postupujeme i v případě dalších potenciálů.

6.1.2 Stabilita nerovnovážných systémů

Nerovnovážná termodynamika se zabývá systémy vzdálenými od termodynamické rovnováhy. Takové systémy blízko termodynamické rovnováhy ani nemohou existovat, jak je uvedeno výše při srovnání rovnovážného a nerovnovážného systému.

V nerovnovážných systémech existuje pozitivní zpětná vazba, která zesiluje fluktuace vy-

volané vnějšími silami, a tak se systém vzdaluje od termodynamické rovnováhy, který je statisticky nejpravděpodobnější pro rovnovážné systémy. Ale ani tento proces není zarmo. Systémy se pohybují kolem stavu dynamické rovnováhy. Aby udržely uspořádanost, disipují energii do okolí, čímž zvyšují jeho entropii.

V dynamice nerovnovážných systémů je těžké zjistit, zda spějí k nějakému bodu rovnováhy. Proto je také obtížné zjistit, jaký průběh má jejich funkce vyjadřující potenciál. Zatímco v případě rovnovážných systémů lze při transformaci potenciálů postupovat algoritmicky, v případě nerovnovážných systémů lze průběh potenciálu získat pouze z pohybových rovnic. Funkce, která zastupuje úlohu potenciálu u nerovnovážných systémů, se nazývá *Ljapunovova funkce*. Ljapunovova funkce (použijeme označení V) musí splňovat tyto požadavky:

$$\begin{aligned} 1. & V(x, y, z) \geq 0 \\ 2. & \frac{dV}{dt} \leq 0 \text{ na celém oboru hodnot} \\ 3. & \frac{dV}{dt} = 0 \text{ pouze v počátku} \end{aligned} \quad (6.7)$$

(Jackson, 1993, s. 228)

6.1.3 Ljapunovova funkce Lorentzova systému

Jak už bylo předesláno, Ljapunovova funkce zastupuje v otevřených systémech úlohu potenciálu. Vzhledem k tomu, že jsou kladeny náročné požadavky na její vlastnosti, a přitom není žádný návod na to, jak ji sestavit, zdaleka nebyla objevena u všech dynamických systémů. Naštěstí, pro Lorentzovy rovnice byla sestavena Ljapunovova funkce:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma} x^2 + y^2 + z^2 \quad (6.8)$$

O jejích vlastnostech (6.7) se můžeme přesvědčit. Můžeme začít hledat. Takže „stačí si všimnout“, že

$$\alpha(y\dot{y} + z\dot{z}) = \alpha(rx - y^2 - bz^2) \quad (6.9)$$

Vyjádríme x a dosadíme do výrazu

$$x\dot{x} = -\sigma x^2 + \sigma xy \quad (6.10)$$

Potom položíme $\alpha = \sigma$, obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2) = \\ \sigma (-x^2 + xy(1+r) - y^2 - bz^2) = \\ -\sigma \left(\left(x - \frac{1}{2}(1+r)y \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}(1+r)^2 \right) y^2 + bz^2 \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Za podmínky $r < 1$ získáme Ljapunovovu funkci

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma} x^2 + y^2 + z^2 . \quad (6.12)$$

(Jackson, 1993, s. 229)

7 Závěr

Práce se zabývá popisem a řešením nelineárních systémů. Ukazuje, kdy je možné použít linearizaci nelineárních diferenciálních rovnic a způsob kvalitativní analýzy fázových portrétů. Teoretická část se zabývá analýzou fázového portréту jedné diferenciální rovnice a podmínkami bifurkace, tatáž problematika je rozšířena pro soustavu dvou diferenciálních rovnic. Řešené příklady jsou kyvadlo v odporujícím prostředí (bifurkace jednorozměrných systémů), soutěž o potravu (fázový portrét dvourozměrného systému). Je předvedeno řešení Lorentzových rovnic pomocí linearizace a ukázána analogie s chaotickým vodním kolem. V části zabývající se termodynamikou je odvození Ljapunovovy funkce a transformace termodynamických potenciálů pomocí Legendrovy transformace. Jako alternativní metoda modelování nelineárních systémů jsou zde zmíněny celulární automaty.

Přínos práce spočívá ve zpracování poměrně obtížné látky. Matematický formalismus byl omezen na minimální míru. Problematika nelineárních systémů na této úrovni může být použita i pro základní kurz fyziky.

8 Seznam použitých pramenů

1. GASPARD, P.: *Chaos, fractals and thermodynamics*. Bulletin de la Classe des Sciences l'Académie Royale de Belgique, 6e série, tome XI (2000). 9-48.
2. JACKSON, E. Atlee. *Perspectives of nonlinear dynamics*. 1st pbk. ed. (with corrections). Cambridge [Cambridgeshire]: Cambridge University Press, 1992. ISBN 0521426324.
3. JACKSON, E. Atlee. *Perspectives of nonlinear dynamics*. Reprint. Cambridge [u.a.]: Cambridge Univ. Press, 1993. ISBN 0521426332.
4. KORNECK, F.: *Laminare stroemungen, turbulenz und strukturbildung in fluessigkeiten*. Dizertační práce. Dostupné na vyžádání u autora.
5. MOYERMAN, Stephanie. *Exploring the Lorenz Equations through a Chaotic Waterwheel* [online].:16 [cit. 2015-08-16]. Dostupné z: <https://www.math.hmc.edu/~dyong/math164/2006/moyerman/finalreport.pdf>
6. PROKŠOVÁ, J. a kol.: *Nerovnovážná termodynamika a její aplikace*. Dostupné in line: <http://nelterm.kof.zcu.cz>
7. STROGATZ, Steven. *Nonlinear dynamics and chaos*. Dostupné in line: https://www.youtube.com/watch?v=ycJEqmQvww&list=PLbN57C5Zdl6j_qJA-pARJnKsmROzPnO9V
(pozn. při citaci je používáno číslování podle pořadí lekcí)
8. WOLFRAM, Stephen. *A new kind of science*. Champaign, Ill.: Wolfram Media, c2001, xiv, 1197 s. ISBN 1579550088.

Použité obrázky:

Obr. 1: http://lunarscience.nasa.gov/wp-content/uploads/2012/03/Uhifa_EarthMinimoonSm.jpg

Obr. 34: <https://www.math.hmc.edu/~dyong/math164/2006/moyerman/finalreport.pdf>

Obr. 35-38: <http://www.wolframscience.com/nksonline/>