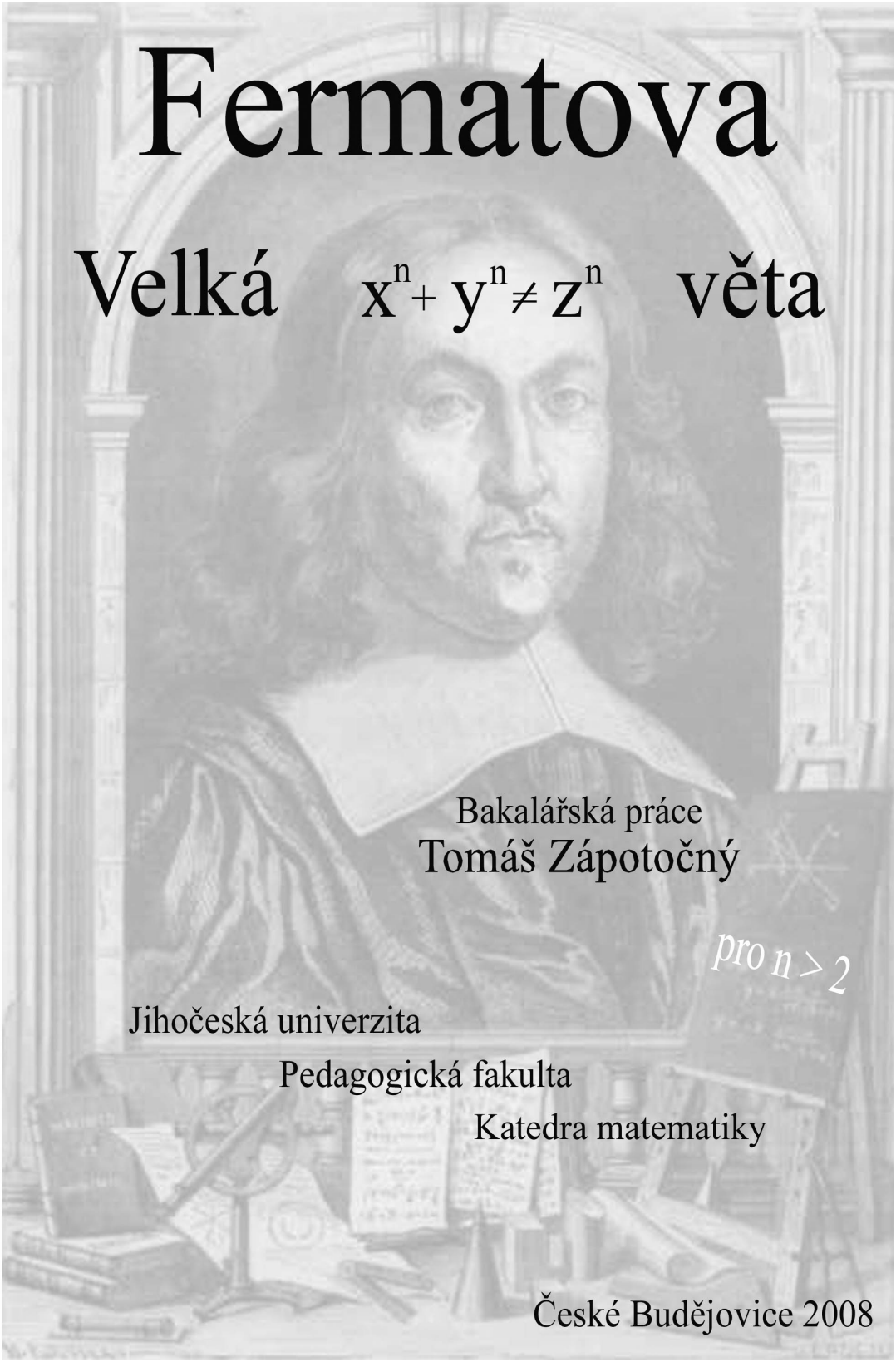
Fermatova

Velká $x^n + y^n \neq z^n$ věta



Bakalářská práce

Tomáš Zápotočný

pro $n > 2$

Jihočeská univerzita
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

České Budějovice 2008

Anotace

Tato práce pojednává o vzniku a vývoji jedné z nejbizardnější a přitom tak prostě formulované matematické věty „$x^n + y^n \neq z^n$, pro $n > 2$“, která čekala na svůj důkaz více než 350 let. Dějiny této věty začal psát autor a matematický genius své doby Pierre de Fermat, jehož důkaz je ztracen a o znovunalezení důkazu se pokusili takový geniové jako byli Pascal, Euler, Germaniová, Lamé, Kummer,… Až A. Wiles porazil tohoto matematického fantóma na sklonku dvacátého století.

This project describes the history and evolvement one of the most bizzare and at that simple definition mathematic proposition, too. The proposition „$x^n + y^n \neq z^n$, for $n > 2$“, which waited for its proof for more then 350 years. History of this definition begun from quill of mathematics genius of his age Pierre de Fermat, which proof of proposition was lost. Mathematics geniuses like Pascal, Euler, Germani, Lamé, Kummer,… tryed to recover it. Until A. Wiles defeat this mathematic phantom in the fall of 20th century.

Poděkování

Chtěl bych na této straně poděkovat Mgr. Petru Chládkovi, Ph.D. za jeho odborné vedení problematikou a nasměrování k vytýčenému cíli.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně, a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Českých Budějovicích 3.4.2008

Obsah

1. Pierre de Fermat (1601-1665)

Peirre de Fermat se narodil 20. srpna 1601 ve městě Beaumont-de-Lomagne v jihozápadní Francii. Jeho otec Dominique Fermat byl poměrně zámožný obchodník s kůžemi, takže se Pierrovi dostalo neobvykle dobrého vzdělání ve františkánském klášteře v Grandselve, po kterém následoval krátký pobyt na univerzitě v Toulouse. Žádné zprávy o tom, že byl mladý Fermat nějak zvlášť vynikal v matematice, se nedochovaly.

Rodina tlačila Fermata ke kariéře ve státních službách, a tak se roku 1631 stal toulouským parlamentním radou. Pokud chtěl někdo z města či jeho okolí poslat petici králi, musel nejprve přesvědčit Fermata nebo některého z jeho úředníků o důležitosti své žádosti. Fermatův úřad byl zodpovědný za spojení regionu s Paříží. Kromě této činnosti měl Fermat rovněž na starosti dohlížet na to, aby se královská nařízení dostala zpátky do oblasti. Fermat byl schopným úředníkem, který podle všech dochovaných zpráv zastával svůj úřad pečlivě a s citem.

K Fermatovým povinnostem patřila i služba u soudu, kde měl vzhledem ke svým zkušenostem co do činění i s těmi nejtěžšími případy. Zprávu o těchto aktivitách máme od anglického matematika sira Kenelma Digbyho. Digby toužil po setkání s Fermatem. V dopise jejich společnému kolegovi Johnu Wallisovi však čteme, že Fermat byl příliš zaneprázdněn svými povinnostmi u soudu, takže k setkání nedošlo.

„Je pravda, že jsem si vybral přesně dobu, kdy došlo k přestěhování soudců z Castres do Toulouse, kde je (Fermat) vrchním soudcem. Od té chvíle byl

zaměstnán velice důležitými případy, z nichž poslední vyvrcholil rozsudkem, který způsobil pozdvižení: šlo o potrestání kněze, který zneužíval svého úřadu a byl odsouzen k upálení na hranici. Tento případ se právě uzavíral a chystala se poprava.“

Fermat si s Digbym a Wallisem pravidelně dopisoval, ale tyto dopisy měly často daleko k přátelskému tónu, přesto poskytují důležité svědectví o Fermatově každodenním životě, včetně jeho vědecké práce.

Fermatova úřednická kariéra se slibně vyvíjela a brzy se stal příslušníkem honorace s právem psát si „de“ před své jméno. Jeho vzestup nebyl tak důsledkem ctižádosti jako spíše zdravého kořínku. V Evropě zabíjel mor a ti, kdo přežili, nahrazovali ve funkcích zemřelé. Fermat rovněž prodělal v roce 1652 záchvat moru a byl tak nemocen, že jeho přítel Bernard Medon oznámil několika kolegům, že Fermat je po smrti.

„Před časem jsem Vás informoval o Fermatově smrti. On však je stále živ, a už se o jeho zdraví nebojíme, i když jsme jej v jednu chvili počítali mezi mrtvé. Mor už teď mezi námi neřádí.“

Nehledě na zdravotní rizika, nesl s sebou život ve Francii 17. století i jistá politická nebezpečí, kterým bylo potřeba čelit. Fermat se stal členem regionálního parlamentu v Toulouse pouhé tři roky poté, co byl kardinál Richelieu jmenován francouzkým premiérem. Richelieuova éra byla dobou spiknutí a intrik, a každý, kdo byl nějak zainteresován ve státních službách, byť by to bylo pouze na úrovni lokální správy, si musel dávat pozor, aby nebyl vtažen do některého z kardinálových piklů. Fermatovou taktikou bylo pečlivě vykonávat všechny povinnosti a zároveň na sebe moc neupozorňovat. Jeho politické ambice nebyly příliš veliké, a tak se všemožně snažil vyhnout se co možná nejvíce hrubostem a zmatku parlamentního života.

Místo toho věnoval veškerý volný čas matematice, pokud tedy zrovna neposílal na hranici neposlušné kněze. Fermat byl v matematice ryzím amatérem, přesto jeho talent byl obrovský. Tím, že žil daleko od Paříže, byl izolován od tehdy existující, byť malé matematické komunity, která zahrnovala takové

osobnosti, jako byli Pascal, Gassendi, Roberval, Descartes, Beaugrand… Nejpozoruhodnějším z tohoto spolku byl ovšem Otec Marin Mersenne.

1.1 Otec Marin Mersenne a kosisté

Výsledky Otce Mersenna v teorii čísel nepatřily k nejdůležitějším, přesto on sám sehrál v matematice 17. století podle našeho názoru důležitější roli než kterýkoliv z jeho slavnějších kolegů. Poté, co se v roce 1611 stal členem řádu minoritů, zabýval se studiem matematiky, kterou učil mnichy a jeptišky kláštera řádu v Nevers. O osm let později přesídlil do Paříže do konventu minoritů blízko Place Royale, což bylo místo, kde se potkávali intelektuálové. Mersenne byl však zklamán, slavní mužové nebyli ochotni se s ním, ba dokonce ani sami mezi sebou, o matematice bavit.

Tento individualistický a nekomunikativní charakter pařížské matematiky je tradicí, která se vyvinula v 16. století u takzvaných *„kosistů“*. Kosisté byli experti na výpočty všeho druhu, najímaní obchodníky a podnikateli. Název tohoto řemesla pochází z italského *cosa*, tedy věc. Kosisté používali tohoto slova k označení neznámé veličiny, podobně jako dnes matematikové používají symbolu x. Všichni tehdejší profesionální kosisté si jakožto řešitelé všemožných úloh vyvinuli vlastní výpočetní postupy a byli by udělali cokoliv, aby je utajili před ostatními konkurenty a udrželi si tak pověst jediné osoby schopné daný problém vyřešit. Tento tajnůstkářský charakter matematiky se udržel

až do konce 19. století. A jak uvidíme později, i ve 20. století nalezneme příklady geniů pracujících v tajnosti.

Otec Mersenne se rozhodl bojovat proti tomuto individualistickému stylu a snažil se přesvědčit matematiky, aby spolupracovali a své myšlenky a nápady si vzájemně sdělovali. Organizoval pravidelná setkání a členové takto vzniklé skupiny se později stali základem francouzské akademie. Mersenne procestoval celou Francii i přilehlé oblasti a všude šířil informace o nových objevech. Na svých cestách se setkal i s Pierrem de Fermat a jehož prostřednictví Fermat udržoval spojení s ostatními matematiky. Přes Mersennovo naléhání Fermat nikdy nezpřístupnil světu své důkazy. Po Mersennově smrti byly v jeho pokoji nalezeny stohy dopisů od sedmdesáti osmi různých korespondentů.

1.2 Diofantova „Aritmetika“ a zrození problému

Fermatovi zabíraly jeho soudní povinnosti hodně času. Tu trochu, která mu zbývala, však věnoval matematice. Zčásti tomu tak bylo i proto, že od soudců se v 17. století vyžadovalo, aby omezili své společenské kontakty. Jejich přátelé a známí by totiž jednoho dne mohli být povoláni k soudu a přátelství by mohlo zavádět k protekci. Takto izolován od toulouské společnosti se mohl Fermat soustředit na svůj koníček.

Do dnešních dnů se nedochovala žádná zmínka o tom, že by Fermat měl kdy nějakého učitele. Jeho jediným učitelem byla Diofantova „Aritmetika“. Tato kniha se teorií čísel zabývala způsobem, který byl vlastní Diofantově době: seznamovala svým prostřednictvím řady problémů a jejich řešení. Diofantos tím zároveň Fermatovi předváděl matematické znalosti nashromážděné za celé tisíciletí. V jedné knize mohl Fermat nalézt všechno, co o číslech věděli Pythagoras, Euklides a další starověcí matematici. Vývoj teorie čísel, jedné z nejzákladnějších matematických disciplín, byl zničením Alexandrie pozastaven, teď však mohl Fermat pokračovat v jejím studiu.

V Aritmetice najdeme přes stovku problémů s detailně vypracovanými řešeními, jejichž autorem byl samotný Diofantos. Taková svědomitost byla Fermatovi cizí. Nikdy mu nešlo o to sepsat učebnici, která by sloužila budoucím generacím. Šlo mu pouze o jeho vnitřní uspokojení z vyřešení problému. Fermat si dělal pouze velmi málo poznámek, a to jen proto, aby se přesvědčil, že je mu problém jasný. Sepsáním podrobného důkazu se nikdy nezatěžoval. Často se také stávalo, že své poznámky o problému rovnou zahazoval a pokračoval studiem problému dalšího. Naštěstí pro nás byla každá stránka Aritmetiky obdařena velmi širokými okraji, které Fermat často používal pro své chvatně psané komentáře. Tyto poznámky na okrajích se tak staly nedocenitelným, byť poněkud stručným svědectvím o jeho myšlenkách a výpočtech.

Při studiu narazil Fermat na celou řadu pozorování a množství problémů souvisejících s Pythagorovou větou a pythagorejskými trojicemi, včetně řešení těchto problémů. Diofanta například zajímala existence jistých speciálních trojic, které vytvářely takzvané „kulhavé“ trojúhelníky, tedy pravoúhlé trojúhelníky, jejichž dvě kratší strany x, y (odvěsny) se liší pouze o jedničku (jde např. o čísla x=20, y=21, z=29, pro která platí $20^2+21^2=29^2$).

Fermat byl překvapen množstvím a rozmanitostí pythagorejských trojic. Znal několik století starý Euklidův důkaz, který ukazuje, že pythagorejských trojic existuje nekonečně mnoho. Fermat při studiu Diofantova podrobného výkladu jistě přemýšlel, co by se k věci dalo ještě dodat. Jak se tak díval na onu

kritickou stránku, začal si hrát s Pythagorovou rovnicí a snažil se přijít na něco, co uniklo řeckým matematikům. Až najednou, v okamžiku, který jej učinil nesmrtelným, napsal rovnici, která přes svoji podobnost s rovnicí Pythagorovou neměla, jak se později ukázalo, žádné celočíselné řešení.
Místo toho, aby uvažoval rovnici:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$$

zaměřil se Fermat na její obdobu:

$$\mathbf{x^3 + y^3 = z^3.}$$

Fermat pouze nahradil druhou mocninu mocninou třetí. Najednou se však zdálo, že tato nová rovnice nemá žádné celočíselné řešení. Pokusným dosazováním se můžeme snadno přesvědčit, jak obtížné je nalézt dvě celé čísla, která umocněná na třetí a sečtena dají jinou třetí mocninu celého čísla. Je opravdu možné, že takováto malá změna udělá z Pythagorovy rovnice, mající nekonečně mnoho řešení, rovnici, která nemá řešení žádné?

Fermat se pokusil měnit rovnici dál a nahrazoval druhou mocninu čísly většími než 3, a shledal, že nalézt řešení každé takové rovnice je neméně těžké. Podle něj neexistovala žádná tři celá kladná čísla x, y, z, která by vyhovovala rovnici

$x^n + y^n = z^n$, kde n představuje čísla 3, 4, 5, …

Na okraj svého exempláře Aritmetiky učinil poznámku o tomto svém pozorování:

„ Cubem autem in duos cubos, aut quadratoquadrarum in duos quadratoquadratos, et genetaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere “

„ Je nemožné napsat třetí mocninu jako součet dvou třetích mocnin, nebo čtvrtou mocninu jako součet dvou čtvrtých mocnin, či, obecně, žádné číslo, které samo je mocninou větší než druhou, nelze napsat jako součet dvou stejných mocnin. “

Zdá se, že není důvod, proč by nemělo alespoň jedno řešení existovat. Přesto Fermat tvrdil, že nikde v nekonečném oceánu celých kladných čísel neplave žádná „fermatovská trojice“. Bylo to neobyčejné tvrzení, Fermat však věřil, že je schopen je dokázat. Kromě své první poznámky na okraji, ve které zformuloval tvrzení, učinil tento svérázný génius ještě následující škodolibou poznámku, která se stala noční můrou celých generací matematiků:

„ Cuius rei demonstrationem mirablem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet “
„ Mám skutečně nádherný důkaz tohoto tvrzení, avšak tento okraj je příliš úzký na to, abych jej zde uvedl. “

To byl typický Fermat. Na jedné straně naznačil, že je obzvláště potěšen svým „skutečně nádherným“ důkazem, na straně druhé se však nemínil zatěžovat tím, že by jej nějak přiblížil. Nikdy neměl v úmyslu jej publikovat a nikdy také o důkazu svého tvrzení nikdy nikomu nic neřekl. A přesto, nehledě na tuto zvláštní kombinaci pohodlnosti a skromnosti, se pro příští staletí stala Velká Fermatova věta, jak se začala později nazývat, slavnou po celém světě.

Fermat učinil svůj objev na počátku své matematické kariéry, někdy kolem roku 1637. O necelých třicet let později, při výkonu svých soudcovských povinností v městě Castres, vážně onemocněl. Dne 9. ledna 1665 sepsal svoji poslední vůli a o tři dny později zemřel.

Kvůli tomu, že žil v izolaci, a také proto, že jeho korespondenti na něj nevzpomínali právě v dobrém, mohlo se stát, že jeho objevy budou zapomenuty. Naštěstí se Fermatův nejstarší syn Clément Samuel postaral o to,

aby otcovy objevy světu neunikly. V roce 1670 vydal v Toulouse knihu s názvem „Diofantova Aritmetika doplněná o pozorování Pierra de Fermat“, toto vydání obsahovalo 48 tvrzení, jejichž autorem byl Fermat.

2. Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler se narodil v Basileji v roce 1707 jako syn kalvinistického faráře Paula Eulera. Přestože už v mládí projevoval pozoruhodný talent pro matematiku, jeho otec rozhodl, že je předurčen pro církevní kariéru. Leonhard vyhověl přání svého otce a začal na basilejské univerzitě studovat teologii a hebrejštinu.

Naštěstí pro Eulera byla Basilej domovem i pozoruhodné rodiny Bernoulliů. Bernoulliové mohli po právu tvrdit, že jsou nejmatematičtější rodinou v dějinách, neboť osm Bernoulliů tří různých generací patřilo ke špičkovým evropským matematikům. Daniel a Nikolaj Bernoulliové byli blízkými přáteli Leonharda Eulera, a tak jim neušlo, že se jeden z nejlepších tehdejších matematiků před jejich očima mění v průměrného teologa. Obrátili se proto na jeho otce s prosbou, jestli by přece jenom nepřehodnotil své rozhodnutí. Naštěstí pro Leonharda byl kdysi Jakob Bernoulli, tedy Bernoulli senior, učitelem matematiky Eulera seniora a stále ještě se v rodině Eulerů těšil velkému respektu. Paul proto, i když po jistém váhání, připustil, že by jeho syn mohl být zrozen pro matematiku, a ne pro kazatelnu.

Leonhard Euler postupně působil na carském dvoře v Petrohradě, poté v královské akademii v Berlíně a podzim svého života opět prožil v Petrohradě. Byl nejvýznamnějším matematikem 18. století a oblast jeho zájmu procházela od matematiky přes fyziku až do astronomie.

Když se Euler poprvé setkal s Velkou Fermatovou větou, věřil, že se mu ji povede dokázat pomocí zákona o rovinných grafech, který jako první zformuloval.

V libovolném rovinném grafu sečteme počet vrcholů a stěn a odečteme od toho počet hran grafu, vyjde vždycky 1.

Velká Fermatova věta a vzorec pro rovinné grafy jsou tvrzení pocházející z velmi odlišných odvětví matematiky, jednu věc však mají společnou: jsou to tvrzení vztahující se na nekonečné množství objektů. Eulera zajímalo, zda by byl schopen dokázat tvrzení pro jednu z fermatových rovnic a poté použít podobnou strategii i pro zbývající rovnice, podobně jako dokázal vzorec pro rovinné grafy postupným zobecňováním nejjednoduššího případu.

Zlom v jeho snažení nastal ve chvíli, kdy se mu podařilo rozluštit nápovědu skrytou v jedné z Fermatových poznámek. I když Fermat nikdy nesepsal důkaz své Velké věty, zapsal v jakési zakódované formě náznak takového důkazu pro speciální případ n = 4, a ve svém výtisku Aritmetiky jej včlenil do poznámek týkajících se naprosto odlišného problému. I když jde svým způsobem o nejucelenější výpočet, jaký kdy Fermat svěřil papíru, je postup důkazu stále pouze naznačený a neúplný, zakončený slovy, že nedostatek času a místa brání tomu, aby bylo podáno úplné vysvětlení. Bez ohledu na chybějící podrobnosti tato Fermatova poznámka jasně ukazuje na jistou formu důkazu sporem známou jako…

2.1 metoda nekonečného sestupu

Aby dokázal, že neexistuje žádné řešení rovnice $x^4 + y^4 = z^4$, předpokládal Fermat, že takové hypotetické řešení existuje:

$$x = X_1 , y = Y_1 , z = Z_1 .$$

Na základě podrobnějšího studia vlastní trojice čísel (X_1, Y_1, Z_1) dále ukázal, že pokud tato hypotetická trojice skutečně existuje, musí existovat i trojice menších čísel (X_2, Y_2, Z_2), která rovněž řeší rovnici. Zkoumáním vlastností tohoto nového řešení pak ukázal, že musí existovat ještě menší řešení (X_3, Y_3, Z_3) a tak dále.

Fermat tak z řešení rovnice $x^4 + y^4 = z^4$ sestavil klesající schodiště, které by teoreticky sestupovalo do nekonečna a obsahovalo stále menší a menší kladná čísla. Protože však x, y a z musí být celá kladná, není nikdy nekončící posloupnost stále menších řešení možná. Mezi kladnými celými čísly totiž musí existovat nejmenší řešení. Tento spor dokazuje, že byl počáteční předpoklad o existenci řešení (X_1, Y_1, Z_1) nesprávný. Metodou nekonečného sestupu tak Fermat dokázal, že rovnice nemůže mít pro n = 4 žádné celočíselné řešení, neboť jinak bychom došli k absurdním důsledkům.

Euler se snažil vyjít z této metody a zkonstruovat její pomocí obecný důkaz platný pro všechny ostatní Fermatovy rovnice. Vedle postupného zvyšování hodnoty n až do nekonečna zajímala Eulera rovněž hodnota n o jedničku nižší, n = 3, a právě pro tuto hodnotu se pokusil rovnici dokázat nejdříve. Dne 4. srpna 1753 oznámil v dopise pruském matematikovi Christianu Goldbachovi, že se mu podařilo přizpůsobit Fermatou metodu nekonečného sestupu a úspěšně vyřešil problém pro případ n = 3. Bylo to poprvé po stu letech, co někdo dosáhl nějakého úspěchu v dokazování Fermatovy věty.

I když matematici při tomto dokazování postupovali velmi pomalu, přece jen nebyla situace tak špatná, jak by se mohlo na první pohled zdát. Jakmile je totiž dokázán případ n = 4, jsou dokázány i případy n = 8, 12, 16, 20, … Důvodem je skutečnost, že každé číslo, které je možné napsat jako osmou mocninu, lze také napsat jako mocninu čtvrtou. Na základě téže úvahy můžeme tvrdit, že Eulerův důkaz pro případ n = 3 automaticky dokazuje také případy n = 6, 9, 12, 15, … Zvláště důkaz pro n = 3 je velmi důležitý, neboť číslo tři je prvočíslem.

Číselní teoretici přisuzují prvočíslům mimořádnou důležitost, protože jsou atomy matematiky. Prvočísla jsou stavební kameny všech ostatních čísel. Abychom dokázali Velkou Fermatou větu pro všechny hodnoty n, stačí ji dokázat pouze pro ta n, která jsou prvočísla. Všechny ostatní případy budou tak nepřímo dokázány, protože se týkají exponentů, které jsou násobky prvočísel.

Bohužel prvočísel je nekonečně mnoho a jak jednou řekl německý matematik David Hilbert:

„Problém nekonečna! Žádný jiný problém v historii nepohnul tak důkladně myslí člověka jako tento; žádná jiná idea tolik nestimulovala lidský intelekt; a přitom žádný jiný pojem nepotřebuje tak vyjasnit jako právě pojem nekonečna“.

3. Sophie Germaniová (1776-1831) vs pan Le Blanc

Počátkem 19. století si Velká Fermatova věta získala pověst nejznámějšího číselně teoretického problému. Od Eulerova objevu však nedošlo k žádnému pokroku. Až teprve dramatické prohlášení jedné mladé Francouzky znovu probudilo snahy objevit Fermatův ztracený důkaz. Onou

mladou Francouzkou byla Sophie Germaniová, jejíž smůlou bylo, že žila v éře plné předsudků. Aby mohla provádět svůj výzkum, byla nucena studovat za nelidských podmínek, pracovat v intelektuální izolaci a dokonce vystupovat pod falešnou identitou.

Narodila se 1. dubna 1776 jako dcera obchodníka Ambrosie-Francoise Germania. Kromě vědecké práce byl její život orámován vřavou Francouzské revoluce v roce 1789, kdy si uvědomila svou lásku k číslům, padla Bastila, a její studium diferenciálního počtu se krylo s obdobím hrůzovlády.

V roce 1794 zahájila v Paříži činnost Ecole Polytechnique s ambicemi stát se nejlepší vysokou školou zaměřenou na výchovu matematiků a přírodovědců Francie. Pro Sophii by to bylo ideální řešení, nebýt skutečnosti, že škola byla určena pouze pro muže. Místo toho se uchýlila k tajnému studiu na Ecole, předstírajíc, že je jejím někdejším studentem jménem Antoine-August Le Blanc. Vedení školy netušilo, že skutečný pan Le Blanc už dávno opustil Paříž, a nadále pro něj tisklo studijní texty a úlohy k řešení. Sophii se podařilo zařídit, že dostávala materiály určené panu Le Blanc, a týden co týden odesílala zpět řešení pod jeho jménem. Všechno probíhalo podle plánu po několik měsíců až do chvíle, kdy si vedoucí učitel ročníku Joseph-Louis Lagrange všiml, že odpovědi jakéhosi pana Le Blanc jsou neobvykle brilantní. Jejich výjimečnost navíc svědčila o pozoruhodné proměně studenta, který byl dříve nechvalně známý svými příšernými výpočty. Lagrange, jeden z nejlepších matematiků 19. století, trval na tom, že se s tímto studentem musí setkat, a tak byla Sophie Germaniová nucena prozradit svoji pravou identitu.

Později se začala zajímat o teorii čísel a díky tomu dospěla k Velké Fermatově větě. Pracovala na problému po mnoho let, až v jisté chvíli dospěla k názoru, že učinila důležitý objev. Nutně potřebovala diskutovat o svých výsledcích s někým, kdo teorii čísel rozuměl, a rozhodla se, že se obrátí rovnou na největšího světového číselného teoretika, kterým byl Karl Friedrich Gauss.

Uplynulo už 75 let od chvíle, kdy Euler publikoval svůj důkaz pro n = 3 a matematici se stále ještě marně snažili dokázat Fermatou větu pro jiné kon-

krétní hodnoty n. Sophie Germaniová se rozhodla pro jinou strategii a objasnila Gaussovi svůj obecný přístup k problematice. Jejím bezprostředním cílem nebylo dokázat větu pro jednu konkrétní hodnotu n, ale říci něco o mnoha případech současně. Ve svých dopisech Gaussovi psala výpočty, ve kterých se zaměřila na speciální případy prvočísel p takových, že 2p + 1 je rovněž prvočíslo. Prvočíslo 5 patří do Sophiiny skupiny, protože 5 = 2 x 2 + 1, nebo 11 = 2 x 5 + 1 je také prvočíslo; naproti tomu 13 tam nepatří, protože 27 = 2 x 13 + 1 prvočíslem není.

Pro hodnoty n ze zmíněné skupiny prvočísel použila Sophie elegantní úvahu, ze které vyplývalo, že existence kladných celočíselných řešení rovnice $x^n + y^n = z^n$ je málo pravděpodobná. Přesněji řečeno, Germaniová tvrdila, že je nepravděpodobné, aby řešení existovalo, protože kdyby tomu tak bylo, muselo by jedno z čísel x, y, z být násobkem čísla n, což je velmi silné omezení na možná řešení. Kolegové Sophie Germaniové tak mohli prozkoumat prvočísla z jejího seznamu jedno po druhém a snažit se dokázat, že x, y ani z nemohou být násobkem n, čímž by ukázali, že pro onu konkrétní hodnotu n nemůže řešení Fermatovy rovnice existovat.

V roce 1825 slavila tato metoda první velký úspěch díky Gustavu Lejeunu Dirichletovi a Adrienu-Marie Legendreovi, dvěma matematikům, které dělila celá jedna generace. Oba nezávisle na sobě dokázali, že případ n = 5 nemá řešení. Své důkazy však založili na metodě Sophie Germaniové a vděčí jí tak za svůj úspěch.

O čtrnáct let později dosáhli francouzští matematikové dalšího pokroku. Gabriel Lamé vylepšil Sophiinu metodu a dokázal Fermatou větu pro prvočíslo n = 7.

4. Evariste Galois (1811-1832)

Evariste Galois se narodil 25. října 1811 v Bourg-le-Reine, v malé vesnici na jihu u Paříže, právě dvacet let po Francouzské revoluci. Napoleon Bonaparte byl na vrcholu své moci, příští rok však podnikl katastrofální ruské tažení a v roce 1814 byl poslán do vyhnanství a vystřídán králem Ludvíkem XVIII. V roce 1815 Napoleon uprchl z Elby, vtáhl do Paříže a znovu se chopil moci, ale dříve, než uplynulo sto dnů, byl poražen u Waterloo a znovu donucen k abdikaci.

Galois, stejně jako Sophie Germaniová, vyrůstal v období velkých politických zvratů. Avšak zatímco se Germaniová politiky stranila a soustředila se na matematiku, Galois se stále ocital v centru politických střetů, což jej nejen odvádělo od akademické kariéry, ale vedlo to i k jeho předčasné smrti.

V devatenáctém století matematici znali návody, jak nalézt řešení rovnic třetího a čtvrtého stupně, nebyla však známa metoda, jak řešit rovnice pátého stupně: $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$. Galois byl posedlý hledáním návodu na řešení rovnic pátého stupně, jednou z velkých úloh té doby. Ve svých sedmnácti letech již dosáhl takových úspěchů, že mohl Akademii věd předložit dva vědecké články. Recenzentem určeným k posouzení článků byl Augustin Louis Cauchy, na kterého práce mladého muže silně zapůsobila a usoudil, že je dost dobrá na uděleni Velké ceny Akademie v matematice. Bohužel se Galoisova práce při udělování cen záhadně ztratila a mladému učenci se nedostalo uznání. Galois se domníval, že politicky předpojatá Akademie jeho pojednání schválně ztratila. Rozhodl se, že matematického výzkumu zanechá a

bude se věnovat boji za republiku. To ho nakonec přivedlo až do vězení a chudoby.

Jeho tragický konec do značné míry souvisí s románkem s tajemnou ženou jménem Stéphanie-Félicie Poterine du Motel. Stéphanie již byla zasnoubena s Pescheux d´Herbinville, který její nevěru objevil. Rozzuřil se, a protože byl jedním z nejlepších střelců ve Francii, neváhal a okamžitě vyzval Galoise na souboj za svítání. Ten byl přesvědčen, že zemře, a tak večer před soubojem zapisoval věty, které podle něj řešily otázku rovnic pátého stupně.

„Můj drahý příteli,

Učinil jsem jisté nové objevy v analýze. První se týká teorie rovnic pátého stupně, další pak mnohočlenů. V teorii rovnic jsem zkoumal podmínky řešitelnosti rovnic pomocí odmocnin; to mi umožnilo prohloubit tuto teorii a popsat všechny možné transformace i takových rovnic, které nejsou řešitelné pomocí odmocnin. To vše lze nalézt zde v těchto třech pojednáních…

Veřejně požádejte Jacobiho nebo Gausse, aby posoudili ne snad pravdivost těchto vět, ale jejich význam. Věřím, že se pak najdou lidé, kteří uznají za užitečné ten zmatek uspořádat.“

Příštího rána, 30.května 1832, stanuli proti sobě na odlehlém poli ve vzdálenosti dvacetipěti kroků Galois a d´Herbinville, ozbrojeni pistolemi. Oba zvedli pistole a vystřelili. D´Herbinville zůstal stát, Galois byl zasažen do žaludku a bezmocně se skácel k zemi.

4.1 teorie grup

Jádrem Galoisových výpočtů byl pojem známý jako *teorie grup*. Galois jej rozvinul v silný nástroj umožňující rozlousknout do té doby neřešitelné úlohy. Matematická grupa je množina prvků, které lze zkombinovat užitím nějaké operace, jako je sčítání či násobení, a které splňují určité podmínky.

Důležitou určující vlastností grupy je to, že kdykoliv dva její prvky kombinujeme pomocí operace, výsledkem je jiný prvek grupy. Říkáme, že grupa je uzavřená vůči této operaci.

Například celá čísla tvoří grupu vzhledem k operaci *sčítání*. Zkombinováním jednoho celého čísla s jiným pomocí operace sčítání vede ke třetímu celému číslu: 5 + 24 = 29. Všechny možné výsledky sčítání celých čísel jsou opět celá čísla, takže říkáme, že *celá čísla tvoří grupu vzhledem ke sčítání*. Naproti tomu celá čísla *netvoří* grupu vzhledem k operaci *dělení*, protože dělení jednoho celého čísla jiným nevede nutně k celému číslu: 8 : 24 = 1/3.

Galois se ovšem držel pořekadla „méně znamená více“ a ukázal, že malé, pečlivě sestrojené grupy mohou mít svou zvláštní bohatost. Nevšímal si nekonečných grup, ale vyšel od konkrétní rovnice a sestrojil k ní grupu z jejích několika řešení. A právě grupy vytvořené z řešení rovnic pátého stupně mu umožnily odvodit výsledek o řešitelnosti těchto rovnic. O jeden a půl století později Galoisovu práci použil Wiles a vytvořil z ní základ svého důkazu Tanijamovy-Šimurovy domněnky.

5. Gabriel Lamé vs Augustin Louis Cauchy

Gabriel Lamé (1795-1870)

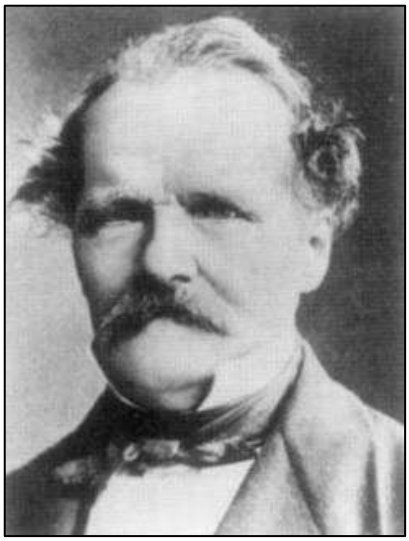
Augustin Louis Cauchy(1789-1857)

Po objevu Sophie Germainové vypsala francouzská Akademie věd řadu cen, mezi jinými i cenu nabízející zlatou medaili a 3000 franků pro matematika, který by byl schopen Fermatův problém konečně vyřešit. Konečně pak 1. března 1847 došlo k nejdramatičtějšímu zasedání francouzské Akademie v dějinách.

V zápise z tohoto zasedání čteme, jak se Gabriel Lamé, který o několik let dříve dokázal Velkou Fermatou větu pro n = 7, postavil před nejvýznačnější matematiky své doby a prohlásil, že je blízko důkazu Velké Fermatovy věty. Připustil, že důkaz je stále ještě neúplný, nicméně nastínil svoji metodu a s neskrývanou radostí prohlásil, že v příštích týdnech bude schopen předložit úplný důkaz k publikování v časopise Akademie. Jakmile Lamé opustil stupínek, požádal o dovolení promluvit jiný význačný pařížský matematik, Augustin Louis Cauchy. Před členy Akademie prohlásil, že přistupoval k problému podobným způsobem jako Lamé a že i on se chystá úplný důkaz brzy publikovat.

Jak Cauchy, tak Lamé pochopili, že jde o čas. Ten, kdo první předloží úplný důkaz Velké Fermatovy věty, obdrží nejprestižnější cenu v matematice. I když ani jeden ze soupeřů zatím neměl důkaz pohromadě, byli oba připraveni obhájit svůj nárok na cenu, a tak pouhé tři týdny poté, co pronesli svá oznámení, doručili oba soupeři Akademii zapečetěné obálky. Napětí rostlo v průběhu dubna, když Cauchy i Lamé publikovali v časopise Akademie nadějná, i když neúplná torza svých důkazů. Celá matematická komunita se už nemohla dočkat důkazu. 24. května došlo k události, která všechny spekulace ukončila. Matematik Joseph Liouville přečetl členům Akademie dopis, který mu zaslal německý kolega Ernst Kummer, a všechny tím šokoval.

5.1 Ernst Kummer (1810-1893)



Kummer byl špičkový číselný teoretik, kterému však silný patriotismus, zažehnutý v něm kdysi nenávistí vůči Napoleonovi, zabránil věnovat se plně čisté vědě. Jakmile opustil univerzitu, dal se do služeb aplikované matematiky a věnoval se výpočtům trajektorií dělových koulí. Nakonec učil zákony balistiky na berlínské vojenské univerzitě.

O dění na francouzské univerzitě věděl, protože studoval články, které vyšly v časopise Akademie a analyzoval těch několik detailů, které se Lamé a Cauchy odvážili prozradit. Brzy mu bylo zřejmé, že oba matematici směřují do téže logické pasti, což objasnil v dopise, který poslal Liouvilleovi.

Podle Kummera byl základní problém v tom, že jak Cauchyho, tak Lamého důkaz byl založen na jisté vlastnosti čísel, známé pod pojmem jednoznačný rozklad. Princip jednoznačného rozkladu říká, že existuje jediná kombinace prvočísel, které vzájemně vynásobeny dají předem zadané kladné celé číslo. Například jednoznačně určená kombinace vytvářející číslo 18 je

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

nebo

$$35 = 5 \times 7$$

$$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5.$$

Na první pohled se zdá, že není žádný důvod, proč by se Cauchy nebo Lamé neměli spolehnout na větu o jednoznačném rozkladu, jako to učinily už stovky matematiků před nimi. Důkazy obou pánů však bohužel počítaly s komplex-

ními čísly. I když pro reálná čísla jednoznačný rozklad platí, Kummer právě postřehl, že tomu tak nemusí být, pokud do hry zapojíme i čísla imaginární. Podle Kummera toto byla zásadní chyba obou důkazů.

Omezíme-li se pouze na kladná celá čísla, pak číslo 65 lze jednoznačně rozložit na 5 x 13. Když však připustíme čísla imaginární, můžeme číslo 65 rozložit i tímto způsobem: 65 = (8 + i) x (8 - i). Číslo 8 + i je komplexní číslo jakožto součet čísla reálného a imaginárního. Nehledě na to, že násobení komplexních čísel je komplikovanější než násobení reálných, existence těchto čísel vskutku vede k nejednoznačnému rozkladu čísla 65. Existuje totiž i jiná možnost, jak toto číslo rozložit, například (7 + 4i) x (7 – 4i). Nejednoznačnost rozkladu tak zničila Cauchyho i Lamého důkazy.

6. Paul Friedrich Wolfskehl (1856-1906)

Na více jak padesát let se zájem o Velkou Fermatou větu přesunul k jakémusi pošetilému romantickému snu z dávných dob. Ale v roce 1908 vdechl problému nový život německý průmyslník z Darmstadtu Paul Wolfskehl. Jeho rodina byla proslulá svým bohatstvím, podporováním umění, vědy a Paul nebyl žádnou výjimkou. Studoval matematiku na univerzitě, a přestože většinu života zasvětil budování rodinné obchodní říše, udržoval i nadále kontakty s profesionálními matematiky a fušoval do teorie čísel. Wolfskehl v žádném případě nebyl nadaným matematikem a nebylo mu souzeno, aby nějakým zásadním způsobem přispěl k nalezení důkazu Fermatovy věty. Nic-méně se díky zvláštní shodě náhod navždy zapsal do historie problému a ke zvednutí rukavice vyzval tisíce dalších matematiků.

Příběh začíná v okamžiku, kdy Wolfskehla posedla milostná vášeň k jisté krásné ženě, jejíž identita nebyla nikdy objasněna. Naneštěstí pro Wolfskehla jej záhadná dáma odmítla, čímž jej uvrhla do takového zoufalství, že se rozhodl spáchat sebevraždu. Byl mužem vášnivým, avšak nikoliv zbrklým, takže si svou smrt naplánoval s úzkostlivou pečlivostí a do nejmenších detailů. Stanovil si datum sebevraždy a úderem půlnoci toho dne si hodlal prostřelit hlavu. Během zbývajících dní dal do pořádku všechny obchodní záležitosti a ve stanovený den napsal závěť a dopisy všem blízkým přátelům a rodině.

Wolfskehlovi šlo vše tak pěkně od ruky, že byl hotov krátce před půlnoční lhůtou. Aby zbývající čas nějak zabil, odebral se do knihovny a začal listovat matematickými publikacemi. Za chvíli už seděl pohroužen do Kummerova klasického článku, v němž je popsána Cauchyova a Lamého chyba. Byl to jeden z nejskvělejších výpočtů své doby, vskutku vhodná četba pro poslední chvíle matematika sebevraha. Wolfskehl prošel výpočet řádek po řádku. Po chvilce se v úžasu zarazil nad jedním detailem, který se mu jevil jako logická chyba. Kummer zde cosi předpokládal a jistý krok opomněl dostatečně zdůvodnit. Wolfskehl zaváhal, zda odhalili skutečně závažnou chybu či zda byl Kummerův postup v pořádku. V prvním případě by zde byla naděje, že by přeci jen nemusel být důkaz Fermatovy věty tak nedostupný, jak všichni věřili.

Sedl si a počal kritické místo zkoumat. Zcela se pohroužil do tvorby jakéhosi minidůkazu, který měl buď Kummerův postup potvrdit, nebo naopak prokázat jeho neoprávněnost. Za svítání byl hotov. Pro matematiku měl špatnou zprávu: Kummerův důkaz se mu podařilo opravit, takže Fermatova věta i nadále setrvala v hájenství nevyřešených problémů. Na druhé straně však okamžik sebevraždy uplynul. Wolfskehl byl tak pyšný na to, že objevil a opravil chybu v práci velkého Ernesta Kummera, že z něj jeho zoufalství a lítost zcela vyprchaly. Matematika mu vrátila chuť do života. Wolfskehl roztrhal dopisy na rozloučenou a přepsal svou závěť ve světle událostí uplynulé noci. Po jeho smrti v roce 1948 čekal rodinu při otevření závěti šok. Paul určil

velkou část svého jmění na cenu, která bude udělena tomu, kdo jednou dokáže Fermatou větu. Prémií 100 000 marek (podle dnešních měřítek asi 60 miliónů korun) měl být splacen dluh hádance, která mu zachránila život. Peníze byly svěřeny do péče Královské společnosti věd v Göttigenu, která ještě týž rok soutěž o cenu Paula Wolfskehla oficiálně vyhlásila.

6.1 Wolfskehlova komise

„Z moci nám svěřené doktorem Paulem Wolfskehlem zesnulým v Darmstadtu vyhlašujeme soutěž o cenu jednoho sta tisíc německých marek, jenž bude vyplacena tomu, kdo jako první dokáže Velkou větu Fermatou.

1) *Královská společnost věd v Göttigenu si ponechá absolutní svobodu rozhodovat o tom, komu bude cena udělena. Odmítne každý rukopis, jehož jediným cílem by byla účast v soutěži a zisk prémie. Vezme v úvahu pouze takové matematické dílo, které se již objevilo ve formě pojednání v časopise nebo je volně k dostání v knihkupectví. Společnost žádá autory takových prací, aby zaslali alespoň pět kopií.*
2) *Práce napsané jazykem nesrozumitelným učeným specialistům zvoleným do poroty budou ze soutěže vyřazeny. Autorům takových prací budiž dovoleno, aby dodali ověřené překlady svých děl.*
3) *Společnost nenese odpovědnost za posuzování prací, které jí nebyly předloženy, jakož ani za omyly vzniklé tím, že by některý autor práce nebo její části nebyl Společnosti znám.*
4) *Společnost si ponechává právo rozhodnout v případě, kdy důkaz předloží několik různých osob, a také v případě, kdy řešení bude výsledkem spojeného úsilí několika učenců, a to zejména pokud jde o rozdělení ceny.*

5) *Cena bude udělena nejdříve dva roky po publikování oceněného díla. Tato lhůta má umožnit německým a zahraničním matematikům, aby vyjádřili svá stanoviska a hodnocení publikovaného řešení.*
6) *Rozhodnutí o udělení ceny oznámí laureátovi jménem Společnosti její tajemník. Výsledek bude zveřejněn všude, kde byla vypsána cena předcházejícího roku oznámena. Poté již nebude udělení ceny předmětem žádných dalších diskusí.*
7) *Prémie bude vítězi vyplacena královským pokladníkem univerzity, a to do tří měsíců od udělení ceny buď v Göttigen, nebo na jiném místě, které laureát určí na své vlastní riziko.*
8) *Obnos bude vyplacen proti stvrzence na základě rozhodnutí Společnosti buď v hotovosti nebo ve formě finančních listin. Po převodu finančních listin bude cena považována za vyplacenou, i kdyby jejich výše k danému datu nedosahovala 100.000 marek.*
9) *Jestliže nedojde k vyplacení prémie do 13.září 2007, nebudou se po tomto datu již žádné další přihlášky do soutěže přijímat.*

Soutěž o Wolfskehlovu cenu se otevírá k dnešnímu dni za shora uvedených podmínek

Göttigen, 27. června 1908
Královská společnost věd“

Několik týdnů po vyhlášení Wolfskehlovy ceny byla univerzita v Göttigen zavalena lavinou rukopisů. Nijak nás nepřekvapí, že ani jeden ze zaslaných důkazů nebyl v pořádku.Přestože byl každý z autorů přesvědčen, že letitý problém vyřešil, všichni se dopouštěli drobných (a někdy ne tak drobných) chyb v úvaze.

Bez ohledu na autora bylo nezbytné každou práci pečlivě zkontrolovat pro případ, že by neznámý amatér přece jen zakopl o klíč k nejhledanějšímu matematickému důkazu. Vedoucím katedry matematiky v Göttigen byl profesor Edmund Landau a odpovědnost za pečlivou kontrolu prací zaslaných do

soutěže přešla tedy v té době na něj. Landauova vlastní práce byla neustále přerušována čtením tuctů zmatených důkazů, které se na jeho stůl snášely každý měsíc. Aby takovou situaci zvládl, vymyslel překrásnou metodu, jak se s tou zátěží vypořádat. Natiskl si dopředu stovky kartiček, na kterých stálo:

Vážený pane …,

Děkuji vám za Váš rukopis s důkazem Velké Fermatovy věty. První chyby jste se dopustil na stránce…,řádku …. Důkaz tudíž není korektní.

Profesor E.M.Landau

Landau pak předal každou práci i s přiloženou kartičkou některému ze svých studentů a požádal jej, aby údaje do jednotlivých položek doplnil. Jeden ze studentů s oblibou odepisoval poznámkou, že se necítí být kompetentní k posouzení důkazu. Místo toho odkázal pisatele na experta, který by mohl pomoci, a uvedl autora předcházejícího rukopisu.

7. Jutaka Tanijama a Goro Šimura

Jutaka Tanijama (1927-1958)

Goro Šimura(*1930)

V lednu roku 1954 jistý talentovaný mladý matematik na univerzitě v Tokiu zašel jako obvykle do knihovny. Goro Šimura hledal výtisk časopisu pojednávající o algebraické teorii komplexního násobení. K jeho zklamání časopis v knihovně nenašel. Měl jej vypůjčený Jutaka Tanijama. Šimura Tanijamovi napsal, že časopis naléhavě potřebuje, aby mohl dokončit nepříjemný výpočet, a zdvořile jej požádal, aby ho vrátil do knihovny. Pár dnů na to se na Šimurově psacím stole objevila kartička se vzkazem. Tanijama psal, že zrovna pracuje na stejném výpočtu a zarazil se na témže místě jako Šimura. Navrhl, aby se spolu sešli, sdělili si navzájem své nápady a pokusili se na problému pracovat společně.

Tanijama se narodil 12. listopadu 1927 v malém městečku u Tokia. Jeho vzdělání bylo v dětství často přerušováno díky nemocem, které prodělal. Počátek války způsobil v jeho školní docházce další přestávku.

Goro Šimura byl o tři roky mladší. Jeho vzdělání se během války zastavilo úplně. Jeho školu zavřeli a místo studia musel přispět k válečnému úsilí v továrně na letadla.

Během války se skutečný výzkum zcela zastavil a profesoři matematiky se z toho nedokázali zotavit ani v padesátých letech. Naproti tomu pováleční studenti byli plni energie a chtiví studia a velice brzy poznali, že jediná možnost, jak postoupit kupředu, je začít se učit sami. Organizovali pravidelné semináře, na kterých se vzájemně informovali o nejnovějších metodách a objevech. V důsledku izolace Japonska se na seminářích často probírala témata, kterými se v Evropě ani v Americe již delší dobu nikdo nezabýval. Jeden obzvláště nemoderní okruh matematiky, který fascinoval jak Tanijamu, tak Šimuru, byly tak zvané…

7.1 modulární formy

Představují jeden z nejpodivnějších matematických objektů. Patří k nejméně srozumitelným matematickým pojmům, a přesto je odborník na teorii čísel 20. stol. Martin Eichler zařadil mezi pět základních operací spolu se sčítáním, odečítáním, násobením a dělením. Většina matematiků mistrovsky ovládá první čtyři operace, ale s pátou má potíže.

Hlavním rysem modulárním forem je obrovská míra jejich symetrie. Většina lidí chápe symetrii v běžném smyslu každodenního života, ale v matematice je pojem symetrie velmi precizně specifikován: *nějaký objekt je symetrický, jestliže po určité transformaci vypadá stejně.* Abychom správně docenili míru symetrie modulárních forem, povšimněme si nejprve, jakými druhy symetrie disponuje tak důvěrně známý objekt, jakým je například čtverec.

Jednou z forem symetrie čtverce je symetrie rotační. Jestliže si představíme střed otáčení v průsečíku os, pak můžeme čtvercem pootočit o jednu čtvrtinu, polovinu a tři čtvrtinu kruhu a čtverec bude vypadat úplně stejně jako na začátku.

Kromě rotační symetriemi čtverec dále symetrii zrcadlovou. Představíme-li si zrcadlo položené podél osy x, pak se horní polovina čtverce zrcadlením zobrazí na dolní polovinu a naopak, ale výsledný čtverec bude zase k nerozeznání od čtverce výchozího.

Čtverec je poměrně hodně symetrický objekt, neboť disponuje jak rotační, tak zrcadlovou symetrií. Nemá však žádnou symetrii translační. To znamená, že jakmile čtverec posuneme v libovolném směru, pozorovatel ihned zjistí změnu, protože čtverec změní polohu vůči osám.

Bohužel, nakreslit nebo alespoň představit si modulární formu je zcela nemožné. Modulární forma je dána dvěma osami, ale obě tyto osy jsou komplexní, to znamená, že mají reálnou a imaginární část, a tudíž je každá z nich

vlastně dvojrozměrná. Přesněji řečeno, modulární formy se vyskytují v horní polovině tohoto komplexního prostoru, důležité ovšem je, že jde o čtyřrozměrný prostor (x_r, x_i,y_r, y_i). Takový čtyřrozměrný prostor se nazývá *hyperbolický prostor*. Hyperbolický svět je pro lidské bytosti svázané životem v konvenčním trojrozměrném prostoru náročný na představu. Z hlediska matematiky je však čtyřrozměrný prostor běžným objektem, a je to právě onen čtvrtý rozměr, který dopřává modulárním formám jejich ohromnou míru symetrie.

Modulární formy v hyperbolickém prostoru mají různé tvary a velikost, ale všechny jsou vystavěny ze stejných prvků. Liší se od sebe různým obsahem jednotlivých složek. Složky každé modulární formy jsou označeny od jedné do nekonečna (M_1, M_2, M_3, M_4, …), takže daná modulární forma může například obsahovat jeden díl složky 1 ($M_1 = 1$), tři díly složky 2 ($M_2 = 3$), dva díly složky 3 ($M_3 = 2$) a tak dále. Tyto informace, které popisují, jak je modulární forma vybudována, lze shrnout do takzvané modulární řady (nebo M-řady). Je to jakýsi seznam, který popisuje, kolik dílů každé složky modulární forma obsahuje. Můžeme říci že M-řada je jakousi DNA modulárních forem. Množství jednotlivých složek zastoupená v M-řadě jsou nesmírně důležitá. Změníte-li například počet dílů první složky, můžete dostat úplně jinou, avšak stejně symetrickou modulární formu, nebo také můžete celou symetrii zničit a získat tak objekt, který již vůbec nebude modulární formou.

7.2 Tanijamova-Šimurova domněnka

Tanijama se podíval na prvních několik členů M-řady jisté modulární formy. Objevil určitou zákonitost a uvědomil si, že členy řady souvisí s E-řadou známé eliptické rovnice. Vypočítal několik dalších členů obou řad a všechny se stále dokonale shodovaly. Byl to úžasný objev, neboť bez jediného

viditelného důvodu mohla být tato eliptická rovnice svázána s modulární formou skrze odpovídající E-řadu a M-řadu. Kdyby matematikové znali M-řadu modulární formy, nemuseli by již počítat E-řadu příslušné eliptické rovnice.

V září 1955 se v Tokiu konalo matematické sympózium. Organizátoři nechali kolovat sbírku šesti otevřených matematických problémů, na které při své práci narazili. Čtyři z nich, pocházely od Tanijamy, poukazovaly na existenci vztahu mezi modulárními formami a eliptickými rovnicemi. Bohužel kdo si Tanijamovy otázky přečetl, považoval je pouze za jakési kuriózní pozorování. Jediným Tanijamovým spojencem zůstal Šimura, který hledal další důkazy o vztahu mezi eliptickými rovnicemi a modulárními formami. Spolupráce byla na čas zastavena v roce 1957, kdy Šimura odcestoval na pozvání do ameriky, kde přednášel na Institute for Advanced Study v Princetonu. Po dvouletém působení se chtěl ke spolupráci s Tanijamou vrátit. K tomu však už nikdy nedošlo. 17. listopadu 1958 spáchal Jutaka Tanijama sebevraždu.

„Až do včerejška jsem neměl žádný úmysl se zabít. Dost lidí si však nepochybně poslední dobou povšimlo, jak jsem fyzicky i duševně unaven. Své sebevraždě nerozumím úplně ani já sám, jejím důvodem však není nějaká konkrétní událost či určitá věc. Mohu pouze říci, že jsem se dostal do stavu, kdy jsem pozbyl důvěry ve svou vlastní budoucnost. Možná, že někomu má sebevražda způsobí trápení nebo jej do určité míry zraní. Upřímně věřím, že nezastíní budoucí život oné osoby. V každém případě musím přiznat, že jde z mé strany tak trochu o zradu, prosím však, aby mi byla odpuštěna. Bude to poslední čin, který provedu po svém, tak jak jsem to dělal po celý svůj život.“

Několik týdnů po sebevraždě se stala další tragédie. Tanijamova snoubenka Misako Suzuki si rovněž vzala život. Nechala údajně dopis tohoto znění: *„Slíbili jsme jeden druhému, že nás žádná událost nerozdělí. Nyní, když odešel, musím jít za ním.“*

Postupem času shromáždil Šimura tolik materiálu ve prospěch domněnky, že o jeho teorii začal svět vážně uvažovat. Stále nebyl schopen svou teorii dokázat, ale otcem myšlenky už alespoň nebylo pouhé přání. Indicií bylo tolik, že si domněnka vysloužila vlastní název. Začalo se jí říkat *Tanijamova-Šimurova domněnka* na počest autora nápadu a jeho kolegy, který v jejím vývoji pokračoval.

8. sympózium v Oberwolfachu

Během podzimu 1984 se sešla vybraná skupina číselných teoretiků na sympóziu v Oberwolfachu, malém městečku v srdci německého pohoří Černý les. Cílem setkání byla diskuse o nových poznatcích ve studiu eliptických rovnic. Jeden z řečníků, Bernard Frey, přišel s pozoruhodným tvrzením, že pokud někdo prokáže Tanijamovu-Šimurovu domněnku, dokáže tím zároveň i Velkou Fermatou větu.

Když Frey přistoupil k tabuli, aby zahájil svůj referát, napsal nejprve Fermatovu rovnici:

$x^n + y^n = z^n$, kde n je větší než 2.

Fermatova věta tvrdí, že neexistuje žádná kladná celočíselná řešení této rovnice, Frey však začal zkoumat, co by se stalo, kdyby byla Fermatova věta nepravdivá, totiž kdyby přece jen alespoň jedno takové kladné celočíselné řešení existovalo. Frey neměl ani ponětí, jak by takové hypotetické řešení mohlo vypadat, a tak prostě neznámá čísla označil jako A, B a C:

$A^N + B^N = C^N$.

Potom začal rovnici upravovat. Frey prohnal rovnici a její domnělé řešení řetězcem úprav a dostal

$$y^2 = x^3 + (A^N - B^N)x^2 - A^N B^N.$$

Přestože tato forma rovnice je zdánlivě velmi odlišná od původní, je to jen přímý důsledek existence domnělého řešení. To znamená, že jestliže existuje řešení Fermatovy rovnice, a tedy Velká Fermatova věta neplatí, pak tato upravená rovnice musí existovat. Frey svými úpravami rovnice na posluchače zpočátku žádný velký dojem neudělal. Pak je však upozornil na to, že tato rovnice je ve skutečnosti rovnicí eliptickou, i když trochu přestrojenou a exotickou. Eliptické rovnice mají tvar:

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Když položíme

$$a = A^N - B^N \text{ , } b = 0, \; c = -A^N B^N$$

pak eliptickou povahu rovnice snadno uvidíme.

Tím, že převedl Fermatovu rovnici na rovnici eliptickou, propojil Frey Fermatovu větu s Tanijamovou-Šimurovou domněnkou. Frey tvrdil, že jeho rovnice je tak podivná, že důsledky její existence by měly ničivý účinek na Tanijamovu-Šimurovu domněnku. Připomeňme, že Freyova eliptická rovnice je jenom fantómem. Její existence je podmíněna neplatností Fermatovy věty. Jestliže však Freyova rovnice existuje, pak je tak podivná, že se pro ni zdá být nemožné, aby byla v jakémkoli vztahu k modulárnímu světu. Jenže Tanijamova-Šimurova domněnka říká, že každá eliptická rovnice má svou odpovídající modulární formu. Existence Freyovy eliptické rovnice by tedy vyvrátila Tanijamovu-Šimurovu domněnku.

Frey argumentoval takto:

1) Jestliže se prokáže, že Tanijamova-Šimurova domněnka platí, pak je každá eliptická rovnice modulární.
2) Jestliže je každá eliptická rovnice modulární, pak Freyova rovnice nemá nárok na existenci.
3) Jestliže Freyova rovnice neexistuje, pak Fermatova rovnice nemá řešení
4) Velká Fermatova věta tedy platí!!!

Závěr tedy je, že kdo dokáže Tanijamovu-Šimurovu domněnku, dokáže tím zároveň i Velkou Fermatovu větu.

9. Andrew Wiles (*1953)

Narodil se 11. března 1953 v Cambridgi. Už od dětství ho fascinovala matematika a jeho snem bylo dokázat platnost Velké Fermatovy věty. V roce 1975 zahájil Andrew Wiles svou kariéru jako postgraduální student univerzity v Cambridgi. Během následujících tří let měl splnit svou povinnost novice a sepsat doktorandskou práci. Každý student měl školitele a tím wilesovým byl Australan John Coates, profesor na Emmanuel College. Úkolem Johna Coatese bylo najít pro Andrewa nové zajímavé téma, něco, čím by se ve svém výzkumu mohl zabývat alespoň tři roky. Coates se nakonec rozhodl, že by Wiles měl studovat eliptické křivky. Toto rozhodnutí se stalo osudovým milníkem Wilesovy kariéry, protože jej přivedlo k metodám, které později uplatnil v novém přístupu k Fermatově větě.

9.1 eliptické křivky

Název „eliptické křivky“ je trochu zavádějící, protože to nejsou elipsy, a dokonce to ani nejsou v pravém slova smyslu křivky. Spíše to jsou všechny rovnice tvaru:

$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou libovolná celá čísla.

Své jméno dostaly v minulosti, kdy byly používány k výpočtům obvodů elips a délek oběžných drah planet. Zde je budeme pro jednoduchost nazývat eliptickými rovnicemi.

Podobně jako u Fermatova problému je i u eliptických rovnic úkolem určit, zda mají nějaká celočíselná řešení, a pokud ano, tak kolik. Například eliptická rovnice:

$y^2 = x^3 - 2$, kde a = 0, b = 0, c = -2,

má jen jediné celočíselné řešení, a to

$5^2 = 3^3 - 2$, tj. 25 = 27 – 2.

Dokázat toto tvrzení je nesmírně obtížná úloha – důkaz našel právě Pierre de Fermat.

Na eliptických rovnicích je obzvlášť fascinující to, že leží kdesi mezi jedním typem rovnic, které jsou téměř triviální, a jiným typem složitějších rovnic, které jsou téměř neřešitelné. Eliptické rovnice studovali již matematikové ve starověkém Řecku včetně Diofanta, který jim věnoval velkou část své knihy Aritmetika. Studoval je rovněž Fermat, nejspíše inspirovaný Diofantem,

a i Wiles se do nich pustil, hlavně proto, že se jimi předtím zabýval jeho hrdina.

U rovnic, kterými se Wiles během postgraduálního studia zabýval, bylo velice těžké určit počet jejich řešení. Aby bylo možno dosáhnout vůbec nějakého pokroku, bylo nejprve nutné problém nějak zjednodušit. Kupříkladu následující rovnici je téměř nemožné řešit přímo:

$$x^3 - x^2 = y^2 + y.$$

Úkolem je určit, kolik celočíselných řešení tato rovnice má. Jedno zcela triviální je $x = 0$, $y = 0$, nebo $x = 1$, $y = 0$. Možná existují i další řešení, ale najít jejich úplný výčet je při nekonečném množství celých čísel, která by bylo třeba vyšetřit, nemožné. Jednodušším úkolem je hledat řešení v konečném prostoru čísel, v takzvané hodinové aritmetice. V hodinové aritmetice získáme konečný číselný prostor tak, že v některém bodě odřízneme zbytek přímky a ze vzniklé úsečky vytvoříme kružnici. Místo číselné osy tak vznikne číselný kruh.

Protože v hodinové aritmetice pracujeme pouze s konečným číselným prostorem, je relativně jednoduché nalézt všechna řešení eliptické rovnice v dané hodinové aritmetice. Například v pětihodinové aritmetice je možné najít všechna řešení eliptické rovnice:

$$x^3 - x^2 = y^2 + y.$$

Řešení jsou:

$x = 0, \ y = 0,$
$x = 0, \ y = 4,$
$x = 1, \ y = 0,$
$x = 1, \ y = 4.$

Ačkoliv by některá z nich v obyčejné aritmetice rovnici neřešila, v pěti-hodinové aritmetice jsou to řešení. Například čtvrté řešení (x = 1, y = 4) funguje takto:

$$x^3 - x^2 = y^2 + y$$
$$1^3 - 1^2 = 4^2 + 4$$
$$1 - 1 = 16 + 4$$
$$0 = 20.$$

Nezapomeňme ovšem, že v pětihodinové aritmetice je 20 totéž co nula, neboť 5 dělí 20 bezezbytku.

Když nemohli matematikové jako Wiles najít všechna řešení eliptické rovnice z nekonečné množiny čísel, omezili se na hledání řešení v různých hodinových aritmetikách. Uvedená rovnice má v pětihodinové Aritmetice čtyři řešení. Matematik to zapíše takto: $E_5 = 4$. Počet řešení rovnice v jiné hodinové aritmetice se dá rovněž určit. Kupříkladu v sedmihodinové to je devět řešení, a tedy $E_7 = 9$. Matematik pak shrne své výsledky do seznamu, do kterého zapíše počet řešení rovnice v každé hodinové aritmetice a tento seznam nazve E-řadou rovnice.

Protože matematikové nejsou schopni určit, kolik má rovnice celkem řešení v normálním číselném prostoru, je E-řada tou nejlepší informací, kterou lze o rovnici získat. E-řada v sobě ukrývá značné množství poznatků o rovnici, kterou popisuje. Stejným způsobem, jako nese biologická DNA veškeré informace potřebné ke konstrukci organismu, je E-řada podstatou eliptické rovnice.

Po boku Johna Coatese si Wiles rychle získal pověst skvělého odborníka v teorii čísel a předního znalce eliptických rovnic a jejich E-řad. Když dosáhl nového výsledku nebo publikoval další ze svých článků, nenapadlo ho, že tím vlastně sbírá zkušenosti, které jej o mnoho let později zavedly až k řešení Fermatovy věty.

Ve stejné době, aniž to kdo tušil, spustili matematikové Jutaka Tanijama a Goro Šimura v poválečném Japonsku řetěz událostí, které časem neodlučitelně propojily eliptické rovnice a modulární formy s Fermatovou větou.

9.2 Joiči Mijaoka

8. března 1988 byl Wiles šokován palcovými titulky na prvních stránkách novin, které hlásaly, že Velká Fermatova věta byla dokázána. Úžasným objevitelem měl být Joiči Mijaoka z Metropolitní univerzity v Tokiu. Mijaoka v této fázi ještě svůj důkaz nepublikoval, ale popsal jeho hlavní kroky na semináři v Matematickém ústavu Maxe Plancka v Bonnu.

Mijaoka k problému přistoupil z úplně nového směru, užitím diferenciální geometrie. Když mu bylo jen něco přes dvacet let, zformuloval domněnku týkající se takzvané Mijaokovi nerovnosti, tento důkaz by zaručil, že počet řešení Fermatovy věty je nejen konečný, nýbrž dokonce nulový. Mijaokův přístup se podobal Wilesovu v tom, že se oba pokoušeli dokázat Fermatovu větu tak, že ji spojili se základní hypotézou z jiného oboru matematiky. V Mijaokově případě to byla diferenciální geometrie; u Wilese šlo o důkaz přes eliptické rovnice a modulární formy. Pro Wilese bylo nepříjemné, že zatímco se on stále ještě potýkal s důkazem Tanijamovy-Šimurovy domněnky, Mijaoka již ohlásil úplný důkaz své hypotézy, a tudíž i důkaz Velké Fermatovy věty.

Dva týdny po svém vystoupení v Bonnu zveřejnil Mijaoka pět stránek algebraických výpočtů, které popisovaly jednotlivé detaily jeho důkazu, a začalo jejich prověřování. Odborníci na teorii čísel a diferenciální geometrii po celém světě kontrolovali důkaz řádek po řádku a pátrali po sebemenší skulině v úvahách nebo po pouhém náznaku špatného předpokladu. Po několika dnech

upozornili někteří matematici na něco, co vypadalo jako znepokojující spor v důkazu. Část Mijaokovy práce vedla k určitému závěru v teorii čísel, který se po zpětném převedení do diferenciální geometrie dostal do sporu s výsledkem dokázaným o několik let dříve. I když to nutně nevyvracelo celý Mijaokův důkaz, bylo to v rozporu s filosofií paralelismu mezi teorií čísel a diferenciální geometrií.

Japonský matematik byl především geometr a nebyl absolutně přesný při překládání svých myšlenek do teorie čísel, kterou ovládal méně. Specialisté v teorii čísel se pokoušeli pomoci Mijaokovi chybu v důkazu opravit, ale jejich snaha nebyla úspěšná. Dva měsíce po ohlášení výsledku se všichni shodovali v názoru, že původní důkaz nepůjde spravit a tím tři sta let starý problém zůstává nevyřešen.

9.3 Kolyvaginova-Flachova metoda

Kolyvaginova -Flachova metoda převádí skupiny eliptických rovnic s určitými vlastnostmi na skupiny modulárních forem se stejnými vlastnostmi. Wiles se o ní dozvěděl na konferenci o eliptických rovnicích v Bostonu. Tam se také setkal se svým bývalým učitelem Johnem Coatesem.

„Coates se zmínil o tom, že jeho student Matheus Flach píše krásný článek, v kterém analyzuje eliptické rovnice. Vycházel z nejnovější metody, kterou vyvinul Kolyvagin, a vypadalo to, že ta metoda je šitá na míru mému problému. Zdálo se mi, že je to přesně to, co potřebuji, i když jsem věděl, že budu muset tu takzvanou Kolyvaginovu-Flachovu metodu ještě rozvinout. Zcela jsem opustil postup, který jsem dosud zkoušel, a začal jsem dnem i nocí rozšiřovat přístup Kolyvaginův a Flachův. “

Wiles se vrátil do Princetonu, několik měsíců se seznamoval s nově objevenou technikou a pak se pustil do úkolu přizpůsobit ji a zapojit do důkazu. Naneštěstí však Kolyvaginova-Flachova metoda fungující pro jednu eliptickou rovnici nefungovala nezbytně pro jinou eliptickou rovnici. Nakonec zjistil, že všechny eliptické rovnice lze roztřídit do různých skupin a poté upravit Kolyvaginovu-Flachovu metodu tak, aby fungovala. I když některé skupiny se daly zvládnout obtížněji než jiné, Wiles byl přesvědčen, že je tímto způsobem zvládne jednu po druhé. Po šesti letech intenzivního úsilí uvěřil, že konec je na dohled.

9.4 Přednáška století

Koncem června roku 1993 se konala matematická konference v Ústavu Isaaca Newtona v Cambridgi. Andrew Wiles zde, během tří přednášek, provedl důkaz, na nějž matematický svět čekal více jak 350 let, důkaz Velké Fermatovy věty. Wilesova série přednášek se nazývala „Modulární formy, eliptické křivky a Galoisovy reprezentace“. Wiles se v první přednášce zjevně držel při zemi a stavěl základy pro svůj útok na Tanijamovu-Šimurovu domněnku ve druhé a třetí přednášce. Profesor Karl Rubin, bývalý Wilesův student, oznamoval svým americkým kolegům:

„Datum: 21.června 1993 13:33
Předmět: Wiles
Nazdar. Andrew měl dnes svou první přednášku. Neoznámil důkaz Tanijamy-Šimury, ale postupuje tím směrem a bude mít ještě dvě přednášky. Pořád dělá velké tajnosti s konečným výsledkem. Odhaduji, že chce dokázat, že když E je eliptická křivka nad Q a jestliže Galoisova reprezentace na bodech řádu 3

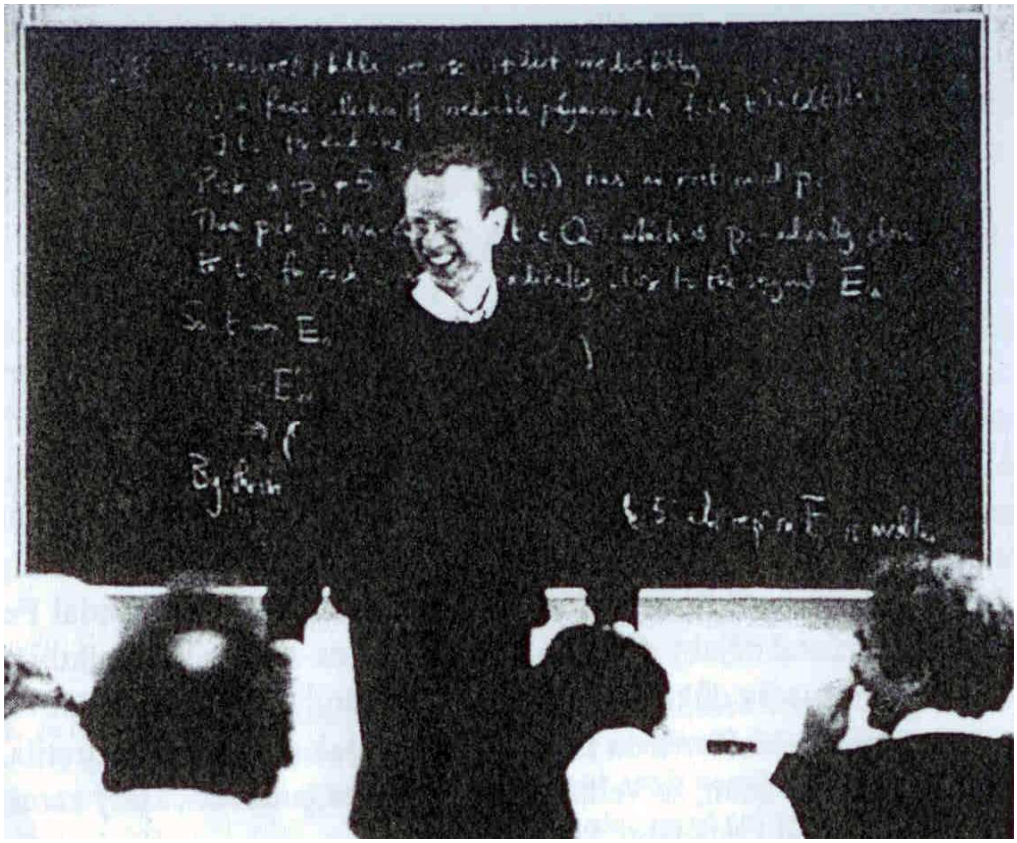
na E splňuje jisté předpoklady, pak E je modulární. Z toho, co řekl, se zdá, že nedokáže celou domněnku. Zatím nevím, zda to půjde použít na Freyovu křivku a zda to tudíž něco řekne o Fermatově větě. Budu vás průběžně informovat. Karl Rubin, Státní univerzita v Ohiu“

Příštího dne byl okruh posluchačů mnohem větší. Wiles je mořil pomocnými výpočty, které zjevně ukazovaly, že chce zaútočit na Tanijamovu-Šimurovu domněnku, ale ještě je ponechal v napětí, jestli toho udělal dost, aby ji dokázal a v důsledku toho i Velkou Fermatou větu. Nová sprška e-mailů následovala:

„Datum: 22. června 1993 13:10
Předmět: Wiles
Po dnešní přednášce nic nového. Andrew zformuloval obecnou větu o liftingu Galoisových reprezentací v rysech, které jsem naznačil včera. Nezdá se, že by to pracovalo na všech eliptických křivkách, ale rozuzlení přijde zítra. Opravdu nevím, proč to dělá takto. Je jasné, že ví, o čem chce mluvit zítra. Je to opravdu obrovský kus práce, kterou za ty roky udělal. Zdá se, že si dost věří. Dám vědět, co se stane zítra. Karl Rubin, Státní univerzita v Ohiu“

23. června zahájil Andrew Wiles svou třetí, závěrečnou přednášku. V této fázi se již zvěsti tak rozšířily, že každý z matematické obce v Cambridgi na závěrečnou přednášku přišel. Po sedmi letech intenzivního úsilí se Wiles chystal oznámit světu svůj důkaz. Kupodivu si příliš nevzpomíná na závěrečné momenty své přednášky, ale pamatuje si atmosféru:
„Novináři se naštěstí nedostavili, přestože dostali o přednášce echo. Mezi posluchači však byla spousta lidí, kteří ke konci přednášky fotografovali, a ředitel ústavu byl prozíravě vybaven lahví šampaňského. Když jsem dokončoval

důkaz, rozhostilo se ticho. Nakonec jsem napsal tvrzení Velké Fermatovy věty. ‚Myslím, že v této chvíli bych přednášku ukončil,' řekl jsem, a pak vypukl neutuchající potlesk."



9.5 drobná potíž

Ihned po skončení přednášek v Cambridgi dostala Wolfskehlova komise zprávu o Wilesově důkazu. Cenu nemohli udělit okamžitě, protože pravidla soutěže jasně požadovala, aby důkaz by oficiálně publikován a ověřen ostatními matematiky. Wiles svůj důkaz zaslal do časopisu *Inventiones Mathematicae*, jehož redaktor Barry Mazur ihned začal vybírat recenzenty. Wilesův článek zahrnoval tolik rozmanitých matematických postupů, jak starých, tak i moderních, že se Mazur rozhodl požádat ne jen dva nebo tři recenzenty, jak je zvykem, nýbrž šest. Aby se postup zjednodušil, byl

dvousetstránkový důkaz rozdělen do šesti částí a každý z posuzovatelů zodpovídal za jednu z nich.

Po několika týdnech pečlivého zkoumání narazil recenzent Nick Katz na drobnou potíž. Problém spočíval v tom, že Kolyvaginova-Flachova metoda nemusela fungovat tak, jak Wiles zamýšlel. Předpokládal, že rozšíří důkaz z prvního členu všech eliptických rovnic a modulárních forem a pokryje všechny členy pomocí mechanismu porážení jednoho kamene domina druhým. Chyba nemusela nutně znamenat, že nebude možné Wilesovu práci zachránit, znamenala však, že bude muset svůj důkaz posílit. Matematický absolutismus vyžadoval, aby Wiles mimo jakoukoli pochybnost dokázal, že jeho metoda pracuje pro každý člen každé E-řady a M-řady.

Konečně po dlouhých čtrnácti měsících vyčerpávají práce Andrew Wiles vyřešil poslední drobnou potíž:

„Seděl jsem v pondělí ráno, bylo 19. září, za svým stolem a zkoumal jsem Kolyvaginovu-Flachovu metodu. Nebylo to proto, že bych věřil, že mohu zajistit, aby fungovala, ale myslel jsem si, že bych mohl alespoň přijít na to, proč nefunguje. Byl jsem přesvědčen, že mlátím prázdnou slámu, chtěl jsem se však ujistit. Náhle, zcela nečekaně, jsem učinil neuvěřitelný objev. Zjistil jsem, že ačkoli Kolyvaginova-Flachova metoda nefunguje beze zbytku, stačí k tomu, abych mohl zajistit, že má původní Ivasavova metoda bude fungovat. Uvědomil jsem si, že z Kolyvaginovy-Flachovy metody získám dost pro to, aby fungoval můj původní tři roky starý přístup k problému. A tak se najednou zdálo, že z popela Kolyvaginovy-Flachovy metody povstává správné řešení.“

Tentokrát o důkazu nikdo nepochyboval. Dva články čítající dohromady 130 stran se staly nejdůkladněji zkontrolovanými rukopisy v historii a nakonec byly otištěny v časopise *Annals of Mathematics* v květnu 1995. Tím byla zakončena více jak 350 let trvající bitva s důkazem pravdivosti věty:

$x^n + y^n \neq z^n$, kde $n > 2$.

10. závěr

Lidstvo je odnepaměti hnáno touhou po hledání pravdy a vědění. V matematice a obzvláště v teorii čísel je absolutně nutné tuto pravdu znát, aby jsme mohli jednotlivé důkazy skládat jako stavební kameny, o které je možno se opřít, a tak vystavět mohutnou budovu lidského poznání.

Velká Fermatova věta odolávala tomuto poznání 358 let, aby se nakonec včlenila do základů dnešní matematiky. Přesto při rozšiřování našeho poznaní nacházíme další a další kameny, které na své poznání ještě čekají.

11. prameny

1) Singh, Simon: Velká Fermatova věta
   Academia Praha 2002, ISBN 80-200-0394-0

2) Šolcová, Alena a Křížek, Michal: Matematik Pierre de Fermat
   Cefres Praha 2002, ISBN 80-86311-12-0

3) Internetový server: www.wikipedia.cz

4) Internetový server: www.answers.com

5) Internetový server:

12. přílohy

N (Přirozené), **A**, **B**, **C** (Celé): $\mathbf{A^N + B^N = C^N}$

N (Přirozené) =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ... číslo definované kvality

U (Liché) = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, … . číslo definované kvality

E (Sudé) = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... číslo definované kvality

$U^N = U$ $E^N = E$

U, E – číslo definované kvantity i kvality

KVALITA A, B, C

A + B = C

Ad 1.) $U + U \neq U$

Ad 2.) $U + E \neq E$

Ad 3.) $E + E \neq U$

Ad 4.) $E + E = E$

Ad 5.) $U + U = E$

Ad 6.) $U + E = U$

Ad 1.), Ad 2.),Ad 3.)– NE! TOTO JE ŠPATNĚ Z LOGIKY SOUČTŮ ČÍSEL!

Ad 4.): $E + E = E$ / Dělme čísly

: 2, 4, 6, 8, … ,

a dostaneme Ad 5.) nebo Ad 6.)

2 + 6 = 8	/ : 2	1 + 3 = 4	
6 + 4 = 10	/ : 2	3 + 2 = 5	
20 + 12 = 32	/ : 4	5 + 3 = 8	

$28 + 16 = 44 \quad / : 4$ $\qquad\qquad$ $7 + 4 = 11$

Ad 5.)

N = 1: $A = U \quad B = U$ $\qquad$ $A + B = C$ $\qquad$ $U + U = 2U = E = C$

N = 2: $\qquad$ $A^2 + B^2 = C^2$

$U^2 + U^2 = (2U)^2$

$2\,U^2 = 4\,U^2$

$2\,U = 4\,U$

$1U \neq 2\,U = E$

N = 3: $\qquad$ $A^3 + B^3 = C^3$

$U^3 + U^3 = (2U)^3$

$2\,U^3 = 8\,U^3$

$2\,U = 8\,U$

$1U \neq 4U = E$

Ad 5.) - NE!TOTO JE ŠPATNĚ! ŽÁDNÁ TAKOVÁ TROJICE NEEXISTUJE!

Ad 6.)

N = 1: $A = U \quad B = E$ $\qquad$ $A + B = C$ $\qquad$ $U + E = U = C$

N = 2: $\qquad$ $A^2 + B^2 = C^2$

$U^2 + E^2 = (U + E)^2$

$U^2 + E^2 = U^2 + 2UE + E^2$

$U + E = U + E + E$

$U + E = U + 2\,E$

$$1U = 1U$$

N = 3: $$A^3 + B^3 = C^3$$

$$U^3 + E^3 = (U + E)^3$$

$$U^3 + E^3 = U^3 + 3U^2E + 3UE^2 + E^3$$

$$U + E = U + E + E + E$$

$$U + E = U + 3E$$

$$1U = 1U$$

Ad 6.) – ANO ! TOTO JE DOBŘE! NENÍZDE LOGICKÉHO SPORU.

KVANTITA A, B, C

R (Racionální číslo)

$$A^N + B^N = C^N$$

$$(R \cdot U_A)^N + (R \cdot E_B)^N = (R \cdot U_C)^N$$

$$R^N \cdot U_A^N + R^N \cdot E_B^N = R^N \cdot U_C^N \quad \text{dělme } : R^N$$

$$U_A^N + E_B^N = U_C^N$$

$$U_A + E_B = U_C$$

JESTLIŽE: $U_C > U_A$

Nechť existuje takové U, že pro něj platí: $U_C > U > U_A$

A pak: $U_C - U_A = E$ minimum ≥ 4

KVALITA a KVANTITA A, B, C

$A = U_A = U - 2K$ $C = U_C = U + 2J$

$B = E_B = H\ (2J + 2K)$

J, K – Přirozená , H – Racionální

$A^N + B^N = C^N$

$$(U - 2K)^N + (H\,(2J + 2K))^N = (U + 2J)^N$$

$$(H\,(2J + 2K))^N = (U + 2J)^N - (U - 2K)^N$$

(1) $$2^N H^N\,(J + K)^N = (U + 2J)^N - (U - 2K)^N$$

BINOMICKÁ VĚTA PRO (1)

$(U + 2J)^N=(0)U^N(2J)^0+(1)U^{N-1}(2J)^1+(2)U^{N-2}(2J)^2+\ldots+(N-1)U^1(2J)^{N-1}+(N)U^0(2J)^N$

MÍNUS

$(U - 2K)^N=(0)U^N(2K)^0-(1)U^{N-1}(2K)^1+(2)U^{N-2}(2K)^2-\ldots-(N-1)U^1(2K)^{N-1}+(N)U^0(2K)^N$

SE ROVNÁ:

$2^N H^N(J + K)^N = U^N-U^N+(1)U^{N-1}2^1(J+K) + (2)U^{N-2}2^2(J^2-K^2) + (3)\,U^{N-3}2^3(J^3+ K^3) + \ldots$

A PO ÚPRAVĚ:

$2^N H^N(J + K)^N=2N(J+K)^1U^{N-1}+2(N^2-N)(J^2-K^2)\,U^{N-2}+4(N^3-3N^2+2N)(J^3+ K^3)\,U^{N-3} + \ldots$

ANALÝZA DVOJČLENŮ

$J^2 - K^2 = (J + K)\,(J - K) = (J + K)\,.\,Z_2$

$J^3 + K^3 = (J + K)\,(J^2 - JK + K^2) = (J + K)\,.\,Z_3$

$J^4 - K^4 = (J + K)\,(J - K)\,(J^2 + K^2) = (J + K)\,.\,Z_4$

$J^5 + K^5 = (J + K)\,(J^4 - J^3K + J^2K^2 - J\,K^3 + K^4) = (J + K)\,.\,Z_5$

$J^6 - K^6 = (J + K)\,(J - K)\,(J^2 - JK + K^2)^2 = (J + K)\,.\,Z_6$

$J^7 + K^7 = (J + K)\,(J^6 - J^5K + J^4K^2 - J^3K^3 + J^2K^4 - JK^5 + K^6) = (J + K)\,.\,Z_7$

$J^8 - K^8 = (J + K)\,(J - K)\,(J^2 + K^2)\,(J^4 + K^4) = (J + K)\,.\,Z_8$

.....

$J^N \pm K^N = (J + K) . Z_N$

(J+K) = M (Přirozené) $\neq$ 0

(2) $2^N H^N M^N = 2NMU^{N-1} + 2(N^2 - N)\ M . Z_2U^{N-2} + 2^2(N^3 - 3N^2 + 2N)\ M . Z_3U^{N-3} + ...$ (: 2M)

(3) $2^{N-1} H^N M^{N-1} = NU^{N-1} + (N^2 - N)\ Z_2U^{N-2} + 2(N^3 - 3N^2 + 2N)\ Z_3U^{N-3} + \ldots$

PRO :

N = 2: $2\ H^2M = 2U + 2\ Z_2$

N = 3: $2^2H^3M^2 = 3U^2 + 6Z_2U + 4Z_3$

N = 4: $2^3H^4M^3 = 4U^3 + 12Z_2U^2 + 16Z_3U + 8Z_4$

N = 5: $2^4H^5M^4 = 5U^4 + 20Z_2U^3 + 40Z_3U^2 + 40Z_4U + 16Z_5$

N = 6: $2^5H^6M^5 = 6U^5 + 30Z_2U^4 + 80Z_3U^3 + 120Z_4U^2 + 96Z_5U + 32Z_6$

N = 7: $2^6H^7M^6 = 7U^6 + 42Z_2U^5 + 140Z_3U^4 + 280Z_4U^3 + 336Z_5U^2 + 224Z_6U + 64Z_7$

N = 8: $2^7H^8M^7 = 8U^7 + 56Z_2U^6 + 224Z_3U^5 + 560Z_4U^4 + 896Z_5U^3 + 896Z_6U^2 + 512Z_7U + 128Z_8$

JESTLIŽE: J = *U* a K = *U* nebo J = *E* a K = *E* nebo J = K

PAK KVALITOU VÝSLEDKU: $J^N \pm K^N = (J \pm K)^N$ = *E* nebo NULA

JESTLIŽE: J = *U* a K = *E* nebo J = *E* a K = *U*

PAK KVALITOU VÝSLEDKU: $J^N \pm K^N = (J \pm K)^N$ = *U*

<u>KANONICKÝ ROZKLAD (CF) ČÍSLA (No)</u>

No: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, … přirozené číslo

CF: 2^0, 2^1, 3.2^0, 2^2, 5.2^0, 3.2^1, 7.2^0, 2^3, $3^2.2^0$, 5.2^1, 11.2^0, 3.2^2, 13.2^0, …
kanonický rozklad přirozeného čísla

$2^n(n)$ 0 1 0 2 0 1 0 3 0 1 0 2 0, ... exponenty činitele 2

P_i (Prvočísla mimo čísla 2) , i = 1,2,3, …

$U = 2^0 . \pi (P_i)$, $E = 2^n . \pi (P_i)$

KVALITA F, D, M,

F , D = Přirozené = 1, 2, 3, 4 ...

a, m, n, q = 0, 1, 2, 3, …

H = F / D

1) Jestliže: F = *U*, pak: $H = 2^0 . \pi / D$

2) Jestliže: F = *E*, pak: $H = 2^m . \pi / D$

3) Jestliže: D = *U*, pak: $H = F / 2^0 . \pi$

4) Jestliže: D = *E*, pak: $H = F / 2^a . \pi$

Redukce exponentů : n = a – m a > m

F – má smysl, je-li liché – *U*

D – má smysl, je-li sudé – *E*

$H = 2^0 . \pi / 2^n . \pi = 2^0 / 2^n = 1 / 2^n$

NEBOŤ PRO: N = *U* a M = *U*

(3) $2^{N-1} U^N U^{N-1} / E^N = 2^0$

$2^{N-1} 2^0 2^0 / 2^0 . 2^{n . N} = 2^0$ A pro: lg_2

N – 1 + 0 + 0 – 0 – n . N = 0

N – 1 ≠ n . N

M – má smysl tehdy, je-li sudé (*E*) , například:

M = J + K = 1 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 = 1 + 5 = 3 + 3 = 1 + 7 = 3 + 5 = 4 + 4=M_E

Jestliže: J = K pak: M = 2J = 2K a dále platí:

$U_C = U + M$, $U_A = U – M$ $U = (U_C + U_A) / 2$

$U_C - U_A = 2M = 4J = 4K$ a $Z_E = 0$

PRO: Dělme mocninou dvojky

N = 2: $2^1M^12^{-2n} = 2U$ $: 2^1$

N = 3: $2^2M^22^{-3n} = 3U^2 + 4Z_3$

N = 4: $2^3M^32^{-4n} = 4U^3 + 16Z_3U$ $:2^2$

N = 5: $2^4M^42^{-5n} = 5U^4 + 40Z_3U^2 + 16Z_5$

N = 6: $2^5M^52^{-6n} = 6U^5 + 80Z_3U^3 + 96Z_5U$ $:2^1$

N = 7: $2^6M^62^{-7n} = 7U^6 + 140Z_3U^4 + 336Z_5U^2 + 64Z_7$

N = 8: $2^7M^72^{-8n} = 8U^7 + 224Z_3U^5 + 896Z_5U^3 + 512Z_7U$ $:2^3$

PO VYDĚLENÍ DOSTÁVÁME:

N = 2: $2^0M^12^{-2n} = U$

N = 3: $2^2M^22^{-3n} = 3U^2 + 4Z_3$

N = 4: $2^1M^32^{-4n} = U^3 + 4Z_3U$

N = 5: $2^4M^42^{-5n} = 5U^4 + 40Z_3U^2 + 16Z_5$

N = 6: $2^4M^52^{-6n} = 3U^5 + 40Z_3U^3 + 48Z_5U$

N = 7: $2^6M^62^{-7n} = 7U^6 + 140Z_3U^4 + 336Z_5U^2 + 64Z_7$

N = 8: $2^4M^72^{-8n} = U^7 + 28Z_3U^5 + 112Z_5U^3 + 64Z_7U$

PRO:

N = 2: $2^0M^12^{-2n} = U \approx$ KVALITĚ $M = U_M{}^{2n} \cdot 2^{2n} = 2^0 \cdot 2^{2n}$

N = 3: $2^2M^22^{-3n} = U + E$

N = 4: $2^1M^32^{-4n} = U + E$

N = 5: $2^4M^42^{-5n} = U + E + E$

N = 6: $2^4M^52^{-6n} = U + E + E$

N = 7: $2^6M^62^{-7n} = U + E + E + E$

N = 8: $2^4M^72^{-8n} = U + E + E + E$

JESTLIŽE: F = U, D = E, M = E, PAK:

N = 2: $2^02^{2n}\ 2^{-2n} = 2^0 \quad \lg_2 \quad 0 + 2n - 2n = 0$

N = 3: $2^22^{4n}\ 2^{-3n} = 2^0 \quad \lg_2 \quad 2 + 4n - 3n = 0$

N = 4: $2^12^{6n}\ 2^{-4n} = 2^0 \quad \lg_2 \quad 1 + 6n - 4n = 0$

N = 5: $2^42^{8n}\ 2^{-5n} = 2^0 \quad \lg_2 \quad 4 + 8n - 5n = 0$

N = 6: $2^42^{10n}\ 2^{-6n} = 2^0 \quad \lg_2 \quad 4 + 10n - 6n = 0$

N = 7: $2^62^{12n}\ 2^{-7n} = 2^0 \quad \lg_2 \quad 6 + 12n - 7n = 0$

N = 8: $2^42^{14n}\ 2^{-8n} = 2^0 \quad \lg_2 \quad 4 + 14n - 8n = 0$

VÝSLEDEK :

N = 2 $0 = 0$

N = 3 $n + 2 \neq 0$

N = 4 $2n + 1 \neq 0$

N = 5 $3n + 4 \neq 0$

N = 6 $4n + 4 \neq 0$

N = 7 $5n + 6 \neq 0$

N = 8 $6n + 4 \neq 0$

ZÁVĚR: Pro N > 2 neexistuje řešení v oboru celých (Integer) čísel . Q.E.D.