Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Ústav matematiky

Kruhová inverze a její aplikace v geometrii

Diplomová práce

Bc. Eva Lálová

Vedoucí práce: Mgr. Lenka Zalabová, Ph.D.

České Budějovice, 2019

Bibliografické údaje

Lálová E., 2019: Kruhová inverze a její aplikace v geometrii. [Circular inversion and its application in geometry. Mgr. Thesis, in Czech.] - p. 56, Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Anotace

This thesis deals with the study of the circular inversion. In the first chapter we introduce the circular inversion and examine it predominantly from the construction point of view. In the second and third chapters we discuss the circular inversion mainly from the point of view of the analytical description. In the fourth chapter we study the characteristics of the circular inversion and its relation to the delineations as portrayed in high schools. The fifth and the sixth chapters contain examples of the use of the circular inversion and other delineations in the plane. We solve some of the Apollonius' problems and problems in limited picture plane.

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury, uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne ....

Eva Lálová

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucí mé diplomové práce Mgr. Lence Zalabové Ph.D. za čas, ochotu a rady, které mi při psaní práce poskytla. Také bych chtěla poděkovat celé své rodině za obrovskou podporu po celou dobu mého studia.

Obsah

Úvod

Tato práce se zabývá kruhovou inverzí v rovině. Kruhová inverze je základní kruhové zobrazení, tj. zobrazuje přímky a kružnice na přímky a kružnice, ale ne nutně přímky na přímky a kružnice na kružnice. Přímky a kružnice se proto souhrnně nazývají kruhové křivky. Kruhová inverze společně s podobnostmi generuje vzhledem k operaci skládání zobrazení grupu všech kruhových zobrazení. Kruhové zobrazení zobrazuje přímky na kružnice a naopak, pokud je složením kruhových zobrazení a alespoň jedno z nich je kruhové inverze. Kruhová zobrazení hrají významnou roli ve středoškolské matematice, kde žáci zkoumají základní shodnosti a podobnosti, tato zobrazení skládají a někteří se dostanou až k nepovinné kruhové inverzi. Grupy geometrických zobrazení včetně grupy kruhových zobrazení se také používají v teorii geometrických algeber a mají aplikace například v robotice.

V této práci kombinujeme analytické a konstrukční metody ke studiu kruhové inverze a posléze používáme tyto metody k řešení geometrických úloh. V první kapitole definujeme kruhovou inverzi a zabýváme se jejím působením na přímkách a kružnicích. V druhé části odvozujeme její analytický popis v Euklidovské, Gaussově a Möbiově rovině. Ve třetí části se zabýváme odchylkami kruhových křivek. Ve čtvrté části se zabýváme grupami shodností, podobností a kruhových zobrazení. Zaměřujeme se hlavně na skládání jednotlivých základních zobrazení a komutativitu. V páté části potom aplikujeme získané poznatky na některé Apolloniovy úlohy, které bývají součástí výuky na středních školách. Zde ovšem diskutujeme různé výchozí polohy jednotlivých vstupních prvků. Poslední část je věnovaná úlohám v omezené nákresně, které se dají elegantně řešit právě pomocí kruhové inverze.

1 Zavedení kruhové inverze

Kruhová inverze je zobrazení v rovině [1]. Nestačí nám však obyčejná euklidovská rovina, která je dostačující např. pro osovou či středovou souměrnost. Euklidovská rovina je nedostačující proto, že potřebujeme bod v nekonečnu, se kterým lze pracovat stejně, jako s ostatními body.

Zobrazujeme-li bod v osové souměrnosti, vždy najdeme jeho obraz. Stejně tak tomu je u středové souměrnosti. Pro sestrojení přímky a jejího obrazu v osové či středové souměrnosti nám totiž postačí libovolné dva body přímky a jejich obrazy. U kruhové inverze však nelze v euklidovské rovině přesně popsat, kam se zobrazí střed kruhové inverze.

1.1 Definice kruhové inverze

Mějme $\mathbb{E}^2 \setminus \{S\}$ a v ní kružnici $\omega(S; r)$ se středem S, kde $r > 0$. Kruhová inverze se základní kružnicí ω je zobrazení, které každému bodu $X \in \mathbb{E}^2 \setminus \{S\}$ přiřadí bod $X' \in \mathbb{E}^2 \setminus \{S\}$ vztahem

$$|SX| \cdot |SX'| = r^2, \tag{1}$$

kde $|SX|$ udává velikost úsečky SX a X' leží na polopřímce SX. Takto je bod X' dán jednoznačně. Tímto vztahem však nelze nalézt obraz bodu S, jelikož $|SX'| = \dfrac{r^2}{|SX|}$ a pro $X = S$ je jmenovatel roven nule.

Rovinu $\mathbb{E}^2$ tedy doplníme o tzv. nevlastní bod. *Nevlastní bod* nebo také *Möbiův bod* je bod M_∞, který leží na každé přímce a vně každé kružnice v euklidovské rovině $\mathbb{E}^2$. *Möbiova rovina* je tedy rovina $\mathbb{E}^2 \cup \{M_\infty\}$ a značíme ji $\mathbb{M}^2$.

Mějme kružnici $\omega(S; r)$. Zobrazení $I : \mathbb{M}^2 \to \mathbb{M}^2$, $X \mapsto X'$ takové, že

- pro $X \neq S, X \neq M_\infty$ leží X' na polopřímce SX a platí $|SX| \cdot |SX'| = r^2$,
- $S \mapsto M_\infty$, (2)
- $M_\infty \mapsto S$,

nazýváme *kruhová inverze*.

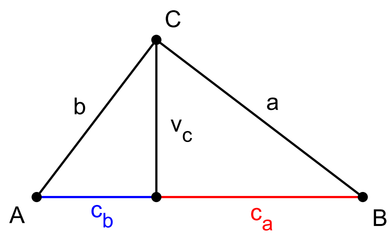
Kružnice ω se nazývá *základní kružnice*, *řídící kružnice* nebo také *určující kružnice* kruhové inverze, bod S je *střed kruhové inverze* a číslo r^2 se nazývá *koeficient kruhové inverze*. Podle vztahu (1) můžeme říci, že body zevnitř kružnice (kromě jejího středu) se zobrazí ven, body zvenku se zobrazí dovnitř a body na kružnici jsou samodružné.

Abychom mohli mluvit jednoduše o přímkách a kružnicích, zavedeme pojem kruhová křivka. *Kruhová křivka* je souhrnný název pro přímky a kružnice. Každá kruhová křivka se v kruhové inverzi zobrazí opět na kruhovou křivku. To ale neznamená, že kružnice se zobrazí na kružnici a přímka na přímku. Přímka se může zobrazit na kružnici a naopak. To proto, že na přímky lze nahlížet jako na kružnice procházející bodem M_∞.

1.2 Obraz bodu v kruhové inverzi

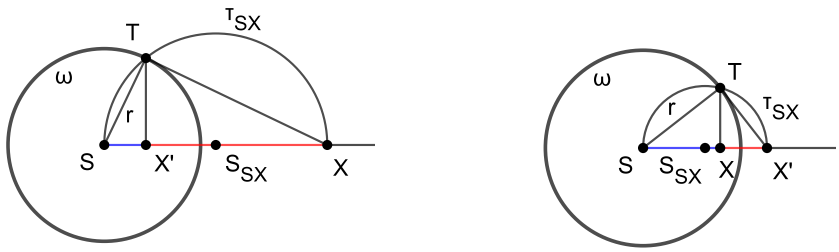
V závislosti na poloze bodu vůči základní kružnici ω nastávají případy, které jsou fakticky popsány vztahem (2). Jestliže bod X splývá s bodem S, zobrazí se na nevlastní bod M_∞ a naopak. Jestliže bod X leží kdekoliv uvnitř kružnice ω a $X \neq S$, zobrazí se vně kružnice a jestliže bod X leží kdekoliv vně kružnice ω a $X \neq M_\infty$, zobrazí se dovnitř kružnice. Bod X ležící na kružnici ω se zobrazí sám na sebe.

Konstrukce obrazu bodu X v kruhové inverzi plyne z Euklidovy věty o odvěsně [3]: Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a přilehlého úseku. Pro pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C tedy platí $b^2 = c \cdot c_b$, kde $c = c_a + c_b$ viz (Obr. 1).



Obr. 1: Euklidova věta o odvěsně

Potom pro trojúhelník SXT s přeponou SX a pro trojúhelník $SX'T$ s přeponou SX' platí $r^2 = |SX| \cdot |SX'|$, viz (Obr. 2).



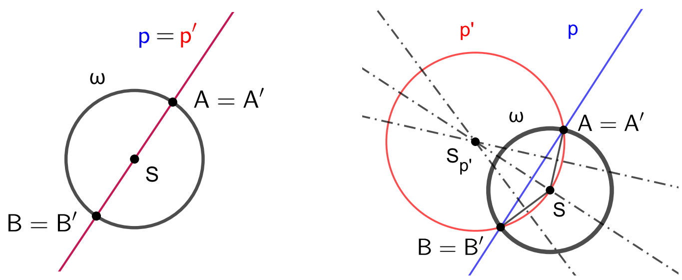
Obr. 2: Obraz bodu v kruhové inverzi

1.3 Obraz přímky v kruhové inverzi

Obrazem přímky je buď přímka nebo kružnice. Závisí to na poloze přímky vůči základní kružnici $\omega(S;r)$.

- Jestliže přímka p prochází bodem S, zobrazí se na přímku p', která je s přímkou p tzv. slabě samodružná, viz (Obr. 3) vlevo. Přímky p a p' splývají, ale samodružné jsou pouze body A a B.

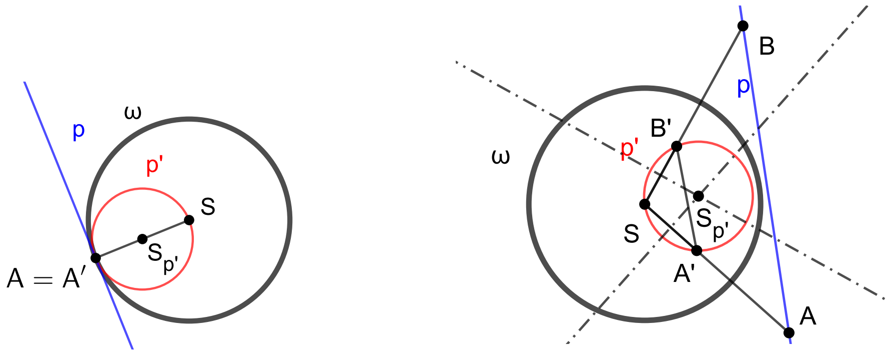
- Jestliže přímka p protíná kružnici ω ve dvou bodech A, B a $S \notin p$, zobrazí se na kružnici procházející třemi body A, B, S. Takovou kružnici sestrojíme pomocí množiny bodů dané vlastnosti jako kružnici opsanou trojúhelníku ABS, viz (Obr. 3) vpravo.



Obr. 3: Obraz sečny kružnice

- Jestliže přímka p je tečnou ke kružnici ω v bodě A, zobrazí se na kružnici, která je dána průměrem $|SA|$, viz (Obr. 4) vlevo.

- Jestliže je přímka p vnější přímkou kružnice ω, zobrazí se na kružnici ležící uvnitř kružnice ω a procházející bodem S. V takovém případě potřebujeme sestrojit obrazy dvou libovolných bodů A, B ležících na přímce p. Výslednou kružnici potom sestrojíme jako kružnici opsanou trojúhelníku $A'B'S$, viz (Obr. 4) vpravo.



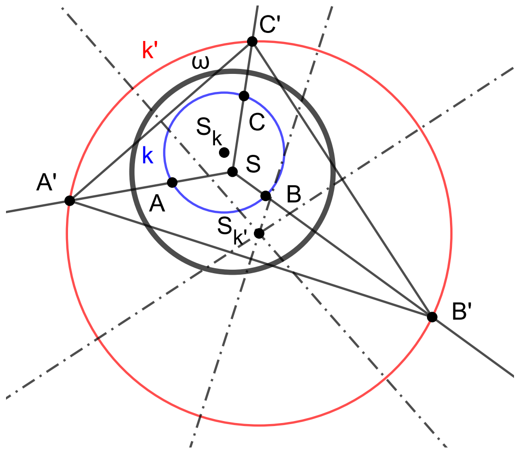
Obr. 4: Obraz tečny a vnější přímky kružnice

1.4 Obraz kružnice v kruhové inverzi

Obrazem kružnice je buď kružnice nebo přímka v závislosti na poloze kružnice vůči základní kružnici $\omega(S; r)$, přičemž základní kružnice ω je samodružná.

- Vnější kružnice k kružnice ω se zobrazí na vnitřní kružnici.
- Vnitřní kružnice k kružnice ω, kde $S \notin k$, se zobrazí na vnější kružnici, viz (Obr. 5).

Konstrukce obrazu vnější kružnice je opačná ke konstrukci obrazu vnitřní kružnice. V obou případech je nutné zvolit na kružnici k libovolné tři body A, B, C. Potom jejich obrazy určují obraz kružnice k.



Obr. 5: Obraz kružnice

- Vnitřní kružnice k kružnice ω, kde $S \in k$, se zobrazí na vnější přímku.
- Kružnice k ležící uvnitř kružnice ω, kde $A \in \omega$ a AS je průměrem kružnice k, se zobrazí na tečnu k ω jdoucí bodem A.
- Kružnice k, která protíná kružnici ω v bodech A, B, kde $S, A, B \in k$, se zobrazí na sečnu k ω jdoucí body A, B.

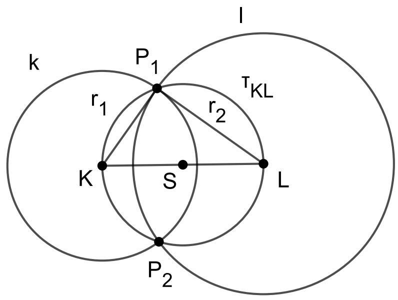
Poslední tři případy, kde obrazem kružnice k je přímka, se konstruují opačným postupem, než obraz přímky, viz kapitola (1.3).

1.5 Ortogonální kružnice

Mějme dvě kružnice, které se protínají právě ve dvou různých bodech. Tyto kružnice jsou ortogonální, jestliže v bodech průniku jsou jejich tečny ortogonální. Vzhledem k osové souměrnosti podle osy procházející středy kružnic je odchylka v obou bodech průniku stejná. V kruhové inverzi platí, že je-li kružnice k ortogonální k základní kružnicí ω, pak obraz k' splývá s kružnicí k. Avšak, ne každý bod se zobrazí sám na sebe, kružnice k je slabě samodružná.

V některých konstrukčních úlohách můžeme s výhodou volit základní kružnici ω tak, aby byla s kružnicí k ortogonální a tím zjednodušit další postup. Ke každé kružnici lze najít nekonečně mnoho ortogonálních kružnic s různými středy. Máme-li dánu kružnici $k(K; r_1)$ a střed L její ortogonální kružnice l, kde $|KL| > r_1$, tedy střed kružnice l leží vně kružnice k, pak kružnice l existuje právě jedna.

Mějme kružnici $k(K, r_1)$, k níž chceme zkonstruovat ortogonální kružnici l, a bod L, který má být středem kružnice $l(L; r_2)$. Sestrojíme úsečku KL a její střed S. Dále sestrojíme Thaletovu kružnici τ_{KL} nad průměrem KL a její průsečíky s kružnicí k označíme P_1, P_2. Kružnice l je potom dána středem v bodě L a poloměrem $r_2 = |LP_1| = |LP_2|$, viz (Obr. 6).



Obr. 6: Ortogonální kružnice

2 Předpis kruhové inverze

2.1 Předpis kruhové inverze

Mějme kartézskou soustavu souřadnic v $\mathbb{E}^2$ a v ní základní kružnici $\omega(S; r)$, kde $S = [x_S, y_S]$ a bod $X = [x, y] \neq [x_S, y_S]$. Podle vztahu (2) pro každý bod $X \neq S$ a jeho obraz platí

$$\begin{aligned} |SX| \cdot |SX'| &= r^2 \\ \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2} \cdot \sqrt{(x' - x_S)^2 + (y' - y_S)^2} &= r^2, \end{aligned} \tag{3}$$

přičemž body S, X a X' leží na jedné polopřímce s počátečním bodem S. Potom tedy body X a X' jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti S a nějakým koeficientem $k > 0$, který závisí na souřadnicích bodu X. Platí tedy také rovnost

$$\begin{aligned} |SX'| &= k \cdot |SX| \\ \sqrt{(x' - x_S)^2 + (y' - y_S)^2} &= k\sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Pro nalezení souřadnic bodu X' je potřeba vyjádřit koeficient k. Dosadíme-li rovnici (4) do rovnice (3) dostaneme pro koeficient k vztah

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-x_S)^2+(y-y_S)^2} \cdot k\sqrt{(x-x_S)^2+(y-y_S)^2} &= r^2 \\ k &= \frac{r^2}{(x-x_S)^2+(y-y_S)^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Jelikož X a X' jsou stejnolehlé podle bodu S, platí z principu stejnolehlosti

$$\begin{aligned} x'-x_S &= k(x-x_S), \\ y'-y_S &= k(y-y_S). \end{aligned}$$

Po dosazení za k ze vztahu (5) a úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} x' &= x_S + \frac{r^2}{(x-x_S)^2+(y-y_S)^2}(x-x_S), \\ y' &= y_S + \frac{r^2}{(x-x_S)^2+(y-y_S)^2}(y-y_S), \end{aligned}$$

tedy

$$X' = \left[x_S + \frac{r^2}{(x-x_S)^2+(y-y_S)^2}(x-x_S), y_S + \frac{r^2}{(x-x_S)^2+(y-y_S)^2}(y-y_S)\right]. \tag{6}$$

Tím máme dán předpis kruhové inverze pro všechny body X v rovině $\mathbb{E}^2$ kromě bodu S. Pro základní kružnici ω se středem v bodě $S = [0,0]$ a poloměrem r potom dostaneme

$$X' = \left[\frac{xr^2}{x^2+y^2}, \frac{yr^2}{x^2+y^2}\right]. \tag{7}$$

2.2 Analytické vyjádření přímky a kružnice

2.2.1 Přímka a kružnice v euklidovské rovině

Mějme euklidovskou rovinu $\mathbb{E}^2$ s kartézskou souřadnicovou soustavou. Připomeňme, že přímka p, procházející bodem $A = [x_A, y_A]$ se směrovým vektorem $\vec{u} = (u_1, u_2)$, je v rovině $\mathbb{E}^2$ daná parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= x_A + tu_1 \\ y &= y_A + tu_2, \end{aligned}$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr. Obecná rovnice přímky p má potom tvar

$$ax + by + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $\vec{n} = (a, b)$ je normálový vektor přímky p.

Kružnice $k(S; r)$ se středem $S = [x_S, y_S]$ a poloměrem $r > 0$ je množina bodů $[x, y] \in \mathbb{E}^2$, pro které platí

$$(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = r^2.$$

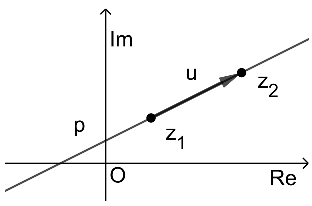
Parametrické vyjádření kružnice k je dáno předpisem

$$\begin{aligned} x &= x_S + r\cos\varphi, \\ y &= y_S + r\sin\varphi, \end{aligned}$$

kde $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$ je parametr.

2.2.2 Přímka a kružnice v Gaussově rovině

Gaussova rovina neboli rovina komplexních čísel je rovina, jejíž body považujeme za obrazy komplexních čísel [4]. Mějme Gaussovu rovinu a v ní přímku p. Nechť přímka p prochází obrazy komplexních čísel $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ a $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, viz (Obr. 7).



Obr. 7:

Směrový vektor $\vec{u}$ přímky p je dán vztahem $\vec{u} = z_2 - z_1$. Potom přímka p je množina obrazů komplexních čísel $z = x + \mathrm{i}y$, pro které platí

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1),$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr. Toto odpovídá parametrickému popisu přímky v rovině tvaru

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1),\ t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dále pro komplexní čísla platí vztahy

$$\begin{aligned} z &= x + y\mathrm{i}, \\ \overline{z} &= x - y\mathrm{i}, \end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned} x &= \frac{z+\overline{z}}{2}, \\ y &= \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}. \end{aligned}$$

Vezměme obecnou rovnici přímky v rovině

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Potom po dosazení x a y dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 \cdot \frac{z+\overline{z}}{2} + b_1 \cdot \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}} + c_1 &= 0 \\ a_1 \cdot \frac{z+\overline{z}}{2} - b_1\mathrm{i} \cdot \frac{z-\overline{z}}{2} + c_1 &= 0 \\ a_1 \cdot (z+\overline{z}) - b_1\mathrm{i} \cdot (z-\overline{z}) + 2c_1 &= 0 \\ a_1z + a_1\overline{z} - b_1\mathrm{i}z + b_1\mathrm{i}\overline{z} + 2c_1 &= 0 \\ z(a_1 - b_1\mathrm{i}) + \overline{z}(a_1 + b_1\mathrm{i}) + 2c_1 &= 0 \end{aligned}$$

Přeznačením $a = a_1 + b_1\mathrm{i}$ a $c = 2c_1$ dostaneme

$$\overline{a}z + a\overline{z} + c = 0, \tag{8}$$

kde $a \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}$. Dostali jsme obecnou rovnici přímky v Gaussově rovině.

Kružnice $k(z_0; r)$ se středem z_0 a poloměrem $r > 0$ je množina obrazů komplexních čísel $z = x + \mathrm{i}y$, pro které platí

$$|z - z_0| = r.$$

Protože pro komplexní čísla platí

$$\begin{aligned} |z|^2 &= z\overline{z}, \\ \overline{z_1 - z_2} &= \overline{z_1} - \overline{z_2}, \end{aligned}$$

můžeme psát

$$\begin{aligned}
|z - z_0|^2 &= r^2 \\
(z - z_0)\overline{(z - z_0)} &= r^2 \\
(z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) &= r^2 \\
z\overline{z} - z\overline{z_0} - z_0\overline{z} + z_0\overline{z_0} &= r^2 \\
z\overline{z} - z\overline{z_0} - z_0\overline{z} + |z_0| - r^2 &= 0 \\
z\overline{z} - z\overline{z_0} - z_0\overline{z} + c &= 0,
\end{aligned}$$

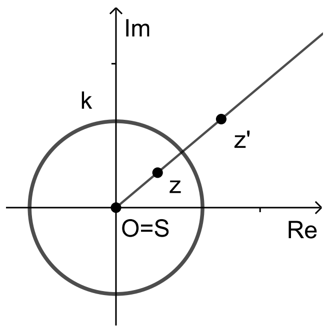
což je obecná rovnice kružnice v Gaussově rovině, kde $c = (|z_0| - r^2) \in \mathbb{R}$.

2.3 Kruhová inverze v Gaussově rovině

Mezi transformace v rovině, které se běžně učí na středních školách, patří posunutí, stejnolehlost a rotace, případně i spirální podobnost [4].

Posunutí lze v Gaussově rovině realizovat přičtením vybraného komplexního čísla k ostatním komplexním číslům. Stejnolehlost se středem v počátku Gaussovy roviny lze realizovat vynásobením komplexních čísel reálným číslem k (pro $k = -1$ se jedná o středovou souměrnost). Rotaci kolem počátku o úhel φ realizujeme vynásobením komplexních čísel komplexní jednotkou s nenulovým argumentem φ. Spirální podobnost se středem v počátku Gaussovy roviny realizujeme vynásobením komplexních čísel pevně zvoleným komplexním číslem. Stejnolehlost, rotaci i spirální podobnost s libovolným středem lze v Gaussově rovině realizovat složením daných zobrazení s vhodnými posunutími.

Nyní se zaměříme na kruhovou inverzi v Gaussově rovině. Mějme nejprve kružnici $\omega(S; r)$ se středem v počátku Gaussovy roviny $S = 0 + 0\mathrm{i}$. Pro kruhovou inverzi se základní kružnicí ω a každý bod $X \neq S$ platí $|SX| \cdot |SX'| = r^2$. V Gaussově rovině můžeme tuto rovnost napsat ve tvaru $|z| \cdot |z'| = r^2$, kde $|z|$ je vzdálenost obrazu komplexního čísla $z = x + \mathrm{i}y$, které odpovídá bodu $X = [x, y]$, od počátku S, viz (Obr. 8).



Obr. 8:

Podle rovnice (7) platí

$$X' = \left[\frac{xr^2}{x^2+y^2}, \frac{yr^2}{x^2+y^2}\right].$$

Nechť X' je obraz komplexního čísla $z' = x' + y'\mathrm{i}$, kde $z' \neq 0 + 0\mathrm{i}$. Potom platí

$$\begin{aligned} x' + y'\mathrm{i} &= \frac{xr^2}{x^2+y^2} + \frac{yr^2}{x^2+y^2}\mathrm{i} \\ x' + y'\mathrm{i} &= \frac{r^2}{x^2+y^2} \cdot (x + y\mathrm{i}) \\ z' &= \frac{r^2}{z\overline{z}} \cdot z \\ z' &= \frac{r^2}{\overline{z}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Dostali jsme vyjádření kruhové inverze v Gaussově rovině se středem v počátku Gaussovy roviny pro obraz libovolného komplexního čísla kromě středu kruhové inverze.

Kruhovou inverzi se středem základní kružnice různým od počátku lze realizovat posunutím středu základní kružnice do počátku a po provedení inverze posunutím zpět. Jestliže střed základní kružnice kruhové inverze je obraz komplexního čísla $S = x_S + y_S\mathrm{i}$, potom platí

$$z' = \frac{r^2}{\overline{z - S}} + S.$$

Nejprve tedy posuneme střed S do počátku Gaussovy roviny, poté realizujeme kruhovou inverzi dle předpisu (9) a nakonec rovinu posuneme zpět. Takto najdeme obraz libovolného komplexního čísla z kromě komplexního čísla S.

3 Odchylky kruhových křivek

Mějme dvě kruhové křivky, které se protínají v bodě P, případně ve dvou bodech P_1 a P_2. *Odchylka kruhových křivek* je rovna odchylce tečen ke křivkám v jejich průsečíku P. V případě dvou průsečíků je odchylka v obou dvou stejná kvůli osové souměrnosti. Nyní rozebereme zvlášť odchylky jednotlivých kruhových křivek.

3.1 Odchylka dvou přímek

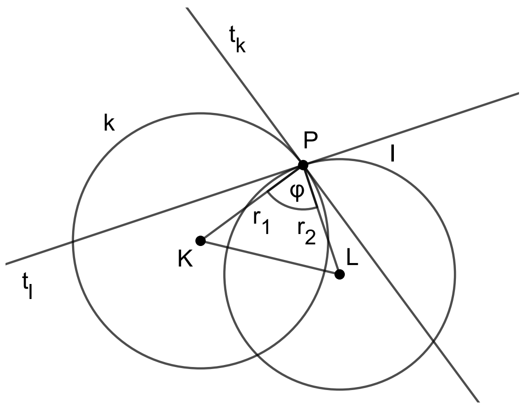
Mějme přímku p danou směrovým vektorem $\vec{u}$ a přímku q danou směrovým vektorem $\vec{v}$. Odchylka $\varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ přímek p, q v rovině $\mathbb{M}^2$ je dána vztahem

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}, \tag{10}$$

kde $|\vec{u} \cdot \vec{v}|$ značí absolutní hodnotu skalárního součinu vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $|\vec{u}|$ je velikost vektoru $\vec{u}$.

3.2 Odchylka dvou kružnic

Mějme kružnice $k(K; r_1)$ a $l(L; r_2)$, kde $k \cap l \neq \emptyset$. V jejich průsečíku P sestrojíme tečny k oběma kružnicím. Odchylka kružnic k, l je rovna odchylce daných tečen. To lze převést na odchylku normálových přímek daných tečen, jež jsou v trojúhelníku KLP reprezentovány poloměry r_1 a r_2, viz (Obr. 9).



Obr. 9: Odchylka kružnic

Podle kosinové věty v trojúhelníku KLP platí

$$|KL|^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi$$

a tedy

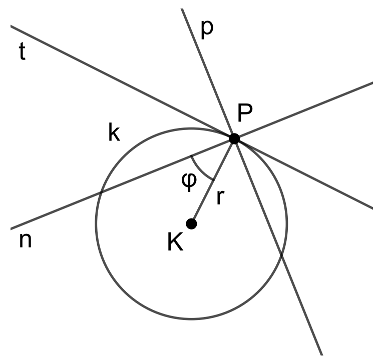
$$\cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - |KL|^2}{2r_1r_2}.$$

Odchylka $\varphi \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ kružnic k, l je potom dána vztahem

$$\cos\varphi = \frac{|r_1^2 + r_2^2 - |KL|^2|}{2r_1r_2}. \tag{11}$$

3.3 Odchylka přímky a kružnice

Mějme přímku p s obecnou rovnicí $ax+by+c = 0$ a kružnici $k(K; r)$ se středem $K = [x_k, y_k]$. Přímka p a kružnice k se protínají v bodě $P = [x_p, y_p]$. V bodě P sestrojíme tečnu t ke kružnici k. Odchylku přímek p a t lze převést na odchylku normálového vektoru $\vec{n} = (a, b)$ přímky p a normálového vektoru $\overrightarrow{PK} = (x_k - x_p, y_k - y_p)$ přímky t, viz (Obr. 10).



Obr. 10: Odchylka kružnice a přímky

Odchylka přímky p a kružnice k je potom dána vztahem

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PK}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{PK}|} = \frac{|a(x_k - x_p) + b(y_k - y_p)|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{(x_k - x_p)^2 + (y_k - y_p)^2}}. \tag{12}$$

4 Zobrazení v rovině a kruhová inverze

4.1 Vlastnosti kruhové inverze

Mějme množinu R. *Zobrazení* $f : R \to R$ je předpis, který každému bodu $X \in R$ přiřadí právě jeden bod $X' \in R$. Bod X se nazývá *vzor*, bod X' se nazývá *obraz*. Zobrazení f je *prosté zobrazení*, jestliže pro každé dva body $X, Y \in R$ platí $X \neq Y \Rightarrow X' \neq Y'$. Zobrazení f je *zobrazení na*, jestliže pro každé $X' \in R$ existuje $X \in R$ tak, že $X' = f(X)$. Zobrazení je *vzájemně jednoznačné*, jestliže je zároveň prosté i zobrazení na.

Zobrazení $f : R \to R$ se nazývá *identita*, jestliže pro každý bod $X \in R$ platí $f(X) = X$, tedy každý bod se zobrazí sám na sebe.

Nakonec mějme zobrazení $f : R \to R$, které je vzájemně jednoznačné. Pak existuje zobrazení $f^{-1} : R \to R$ tak, že $f^{-1}(f(X)) = f(f^{-1}(X)) = X$ pro každé $X \in R$, a nazývá se *inverzní zobrazení*.

V následujícím textu bude množinou R rovina $\mathbb{E}^2$ či rovina $\mathbb{M}^2$.

1. Kruhová inverze je *vzájemně jednoznačné zobrazení* $\mathbb{M}^2 \to \mathbb{M}^2$. Pro každé $X \in \mathbb{M}^2$ existuje právě jedno $X' \in \mathbb{M}^2$ tak, že pro $X \neq S$, $X \neq M_\infty$ platí $|SX| \cdot |SX'| = r^2$, kde X' leží na polopřímce SX, a dále platí $S' = M_\infty$ a $M'_\infty = S$.

   Ukažme, že kruhová inverze je prosté zobrazení. Mějme dva body $X, Y \in \mathbb{M}^2$, $X, Y \neq S$, $X, Y \neq M_\infty$ a jejich obrazy $X', Y' \in \mathbb{M}^2$ v kruhové inverzi I, pro které platí $|SX| \cdot |SX'| = r^2$, $|SY| \cdot |SY'| = r^2$ a X, Y leží na stejné polopřímce. Potom $X' = Y'$ a tedy $|SX'| = |SY'|$. Dále platí $|SX| \cdot |SX'| = |SY| \cdot |SY'|$, tedy $|SX| = |SX|$ a odtud $X = Y$.

   Nyní ukažme, že kruhová inverze je zobrazení na. Pro každé $X' \in \mathbb{M}^2$, $X' \neq S$, $X' \neq M_\infty$ existuje právě jedno $X \in \mathbb{M}^2$ takové, že $|SX| \cdot |SX'| = r^2$ a X, X' leží na jedné polopřímce. Dále platí $I(S) = M_\infty$ a $I(M_\infty) = S$.

2. Kruhová inverze je *involutorní zobrazení*, tedy pro všechna $X \in \mathbb{M}^2$ platí $I\left(I(X)\right) = X$. Pro každý bod $X = [x_1; x_2] \in \mathbb{M}^2$, kromě bodů $S = [s_1; s_2]$ a M_∞, platí $|SX| \cdot |SX'| = r^2$. Potom

$$|SX'| \;=\; \frac{r^2}{|SX|}.$$

V jednotlivých souřadnicích dostaneme

$$
\begin{aligned}
x_1' - s_1 &= \frac{r^2}{x_1 - s_1} \\
x_1' &= \frac{r^2}{x_1 - s_1} + s_1 \\
(x_1')' &= \frac{r^2}{x_1' - s_1} + s_1 \\
(x_1')' &= \frac{r^2}{\frac{r^2}{x_1 - s_1} + s_1 - s_1} + s_1 \\
(x_1')' &= x_1,
\end{aligned}
$$

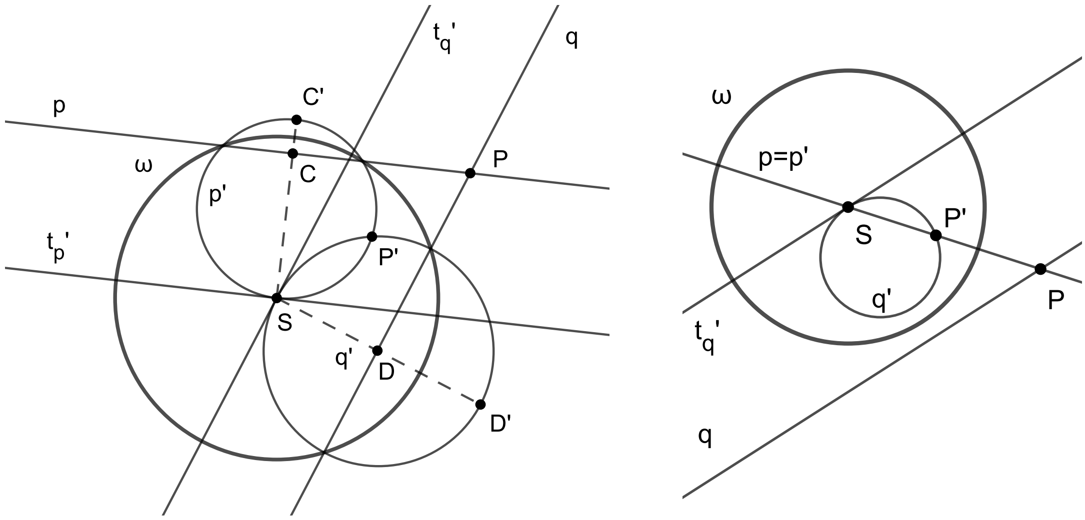
analogicky pro druhou souřadnici

$$
\begin{aligned}
x_2' - s_2 &= \frac{r^2}{x_2 - s_2} \\
x_2' &= \frac{r^2}{x_2 - s_2} + s_2 \\
(x_2')' &= \frac{r^2}{x_2' - s_2} + s_2 \\
(x_2')' &= \frac{r^2}{\frac{r^2}{x_2 - s_2} + s_2 - s_2} + s_2 \\
(x_2')' &= x_2,
\end{aligned}
$$

tedy $(X')' = X$. Pro body S a M_∞ platí

$$
\begin{aligned}
(S')' &= M_\infty' = S, \\
(M_\infty')' &= S' = M_\infty.
\end{aligned}
$$

3. Kruhová inverze je *konformní zobrazení*, tedy zobrazení, které zachovává úhly. Mějme přímku p se směrovým vektorem $\vec{u}$ a přímku q se směrovým vektorem $\vec{v}$. Nechť žádná z těchto přímek neprochází středem S kruhové inverze I a přímky se protínají v bodě $P \neq M_\infty$. Odchylka přímek p, q je dána vztahem (10). Zobrazíme-li přímky p, q v kruhové inverzi I, dostaneme kružnice, které se protínají v bodech S a P', viz kapitola (1.3). Tečny ke kružnicím p', q' v bodě P' mají stejnou odchylku jako v bodě S. Tečny jdoucí bodem S jsou však rovnoběžné s původními přímkami p, q a tudíž je i úhel jimi sevřený stejný jako úhel sevřený přímkami p, q [5], viz (Obr. 11) vlevo. Stejným způsobem dostaneme odchylku dvou kružnic, viz kapitola (3.2), a odchylku přímky a kružnice, viz kapitola (3.3).



Obr. 11: Konformní zobrazení

Mějme nyní dvě různé přímky p, q se směrovými vektory $\vec{u}, \vec{v}$, které se protínají v průsečíku P, a nechť přímka p prochází středem kruhové inverze S. Předchozí případ se pouze zjednoduší tím, že přímka p je samodružná, viz (Obr. 11) vpravo.

Prochází-li obě přímky p, q středem S, jsou obě samodružné a zachování jejich odchylky je zřejmé.

4.2 Transformace v rovině

Nyní ze zaměříme na transformace v rovině a roli kruhové inverze [3], [4], [5]. Připomeneme nejprve pojmy z oblasti obecné algebry, které budeme v další části používat.

Mějme neprázdnou množinu M a její kartézský součin $M \times M$. *Binární operaci* $*$ definujeme jako zobrazení $* : M \times M \to M$. Dvojice $(M, *)$ tvoří tzv. *grupoid.* Je-li operace $*$ *asociativní*, tedy pro každé $x, y, z \in M$ platí $(x * y) * z = x * (y * z)$, jedná se o *asociativní grupoid.*

Jestliže existuje prvek $e \in M$ takový, že pro libovolný prvek $x \in M$ platí $x*e = e*x = x$, nazýváme prvek e *jednotkový prvek.* Jestliže ke každému prvku $x \in M$ existuje prvek $y \in M$ takový, že $x * y = y * x = e$, nazýváme prvek y *inverzní prvek* k prvku x. Je-li grupoid $(M, *)$ asociativní, má jednotkový prvek a ke každému prvku existuje inverzní prvek, nazýváme tento grupoid *grupa.*

Je-li navíc binární operace $*$ *komutativní*, tedy pro každé $x, y \in M$ platí $x * y = y * x$, jedná se o *komutativní grupu*. Aby byla grupa komutativní, musí komutovat každé dva prvky množiny M. Pokud grupa není komutativní, obvykle nekomutuje většina prvků.

Mějme grupu M. Každá podmnožina N grupy M, která je sama o sobě grupou se stejnou operací, inverzními prvky a jednotkovým prvkem jako grupa M, je *podgrupou* grupy M.

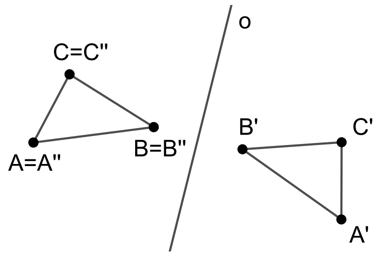
4.3 Shodnosti v rovině

Shodné zobrazení nebo také *izometrie* v rovině je vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, které zachovává vzdálenosti. Potom obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$ shodná s úsečkou AB. Základní shodnosti v rovině jsou identita, osová souměrnost, středová souměrnost, posunutí a otočení a každá shodnost je složením právě těchto základních shodností. Shodnost je buď přímá nebo nepřímá, kde nepřímá shodnost mění orientaci obrazu. Nepřímou shodností je osová souměrnost. Identita, posunutí, středová souměrnost a otočení jsou shodnosti přímé.

Mějme v rovině dvě shodná zobrazení Z_1, Z_2, kde pro každý bod $X \in \mathbb{E}^2$ platí $Z_1(X) = X'$, $Z_2(X') = X''$. Potom zobrazení $Z(X) = X''$ je složením zobrazení Z_1, Z_2 a píšeme $Z = Z_2 \circ Z_1$, přičemž zobrazení Z je opět shodné zobrazení.

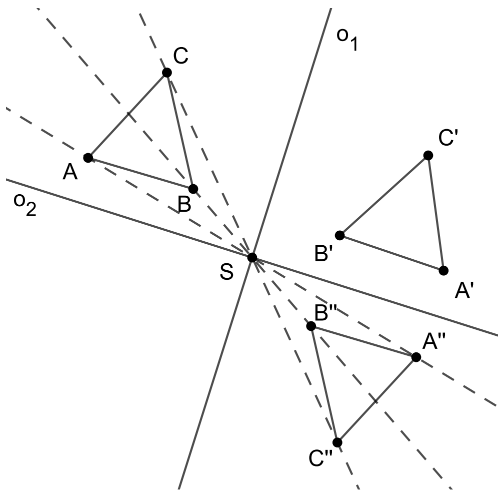
Shodná zobrazení při jejich obvyklém skládání tvoří tzv. *grupu shodností*, která není komutativní. Již jsme řekli, že složením dvou shodných zobrazení je shodné zobrazení. Jednotkovým prvkem grupy shodností je identita a pro každé shodné zobrazení existuje inverzní zobrazení, které je opět shodné. Inverzí k osové souměrnosti podle osy o je osová souměrnost podle osy o. Inverzí ke středové souměrnosti pode středu S je středová souměrnost podle středu S. Inverzí k posunutí o vektor $\vec{u}$ je posunutí o vektor $-\vec{u}$ a nakonec inverzí k otočení o úhel φ je otočení kolem stejného středu o úhel $-\varphi$. Inverzí ke shodnosti, která je složena ze základních shodností, je složení jejich inverzí v obraceném pořadí.

Každou výše zmíněnou shodnost lze rozložit na osové souměrnosti. Dále je každá shodnost dána obrazy vrcholů libovolného trojúhelníka a vrcholy trojúhelníka s ním shodného. Proto následující budeme demonstrovat na trojúhelnících. Osová souměrnost je sama o sobě dána jedinou osovou souměrností. Identita je složením dvou navzájem inverzních osových souměrností. Podle osy o sestrojíme obraz $A'B'C'$ trojúhelníku ABC a podle stejné osy sestrojíme obraz $A''B''C''$, viz (Obr. 12).



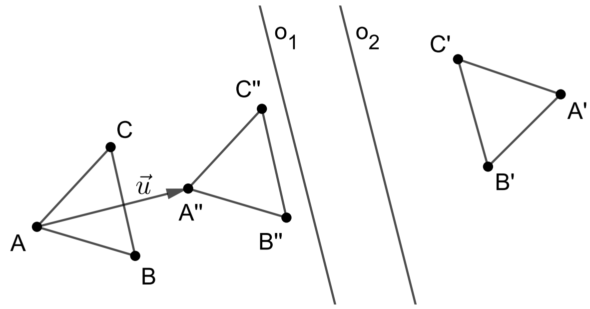
Obr. 12: Identita

Středová souměrnost je složením dvou osových souměrností s navzájem kolmými osami, kde průsečíkem os musí být právě střed souměrnosti S. Podle osy o_1 sestrojíme obraz $A'B'C'$ trojúhelníku ABC a podle osy o_2 sestrojíme obraz $A''B''C''$. Potom trojúhelník $A''B''C''$ je středově souměrný s trojúhelníkem ABC podle středu S, viz (Obr. 13).



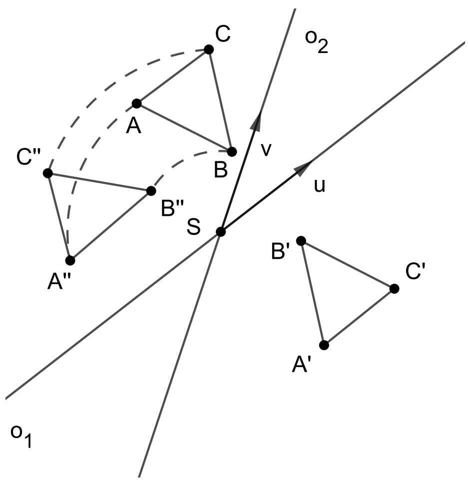
Obr. 13: Středová souměrnost

Posunutí je složení dvou osových souměrností s navzájem rovnoběžnými osami. Podle osy o_1 sestrojíme obraz $A'B'C'$ trojúhelníku ABC a podle osy o_2 sestrojíme obraz $A''B''C''$. Trojúhelníky ABC a $A''B''C''$ jsou navzájem posunuté o vektor $\vec{u}$, pro který platí $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''}$, viz (Obr. 14). Vektor $\vec{u}$ je kolmý na osy o_1, o_2 a jeho velikost je rovna dvojnásobku vzdálenosti os o_1 a o_2.



Obr. 14: Posunutí

Otočení kolem středu S je dáno dvěma osovými souměrnostmi, jejichž osy jsou různoběžné a protínají se ve středu otáčení S. Podle osy o_1 sestrojíme obraz $A'B'C'$ trojúhelníku ABC a podle osy o_2 sestrojíme obraz $A''B''C''$, viz (Obr. 15). Otočení je potom dáno bodem S a úhlem, který je dvakrát větší než úhel mezi směrovými vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ os o_1, o_2. Středová souměrnost je potom otočení o $180°$. Z toho důvodu jsou u středové souměrnosti osy kolmé.



Obr. 15: Otočení

4.4 Podobnosti v rovině

Definujeme nejprve tzv. dělící poměr bodů. Mějme kolineární body (ležící na jedné přímce) $A, B, C \in \mathbb{E}^2$. ***Dělící poměr*** bodů A, B, C je reálné číslo $d = (C; A, B)$ takové, že $\overrightarrow{AC} = d \cdot \overrightarrow{AB}$, kde $d \neq 0 \neq 1$.

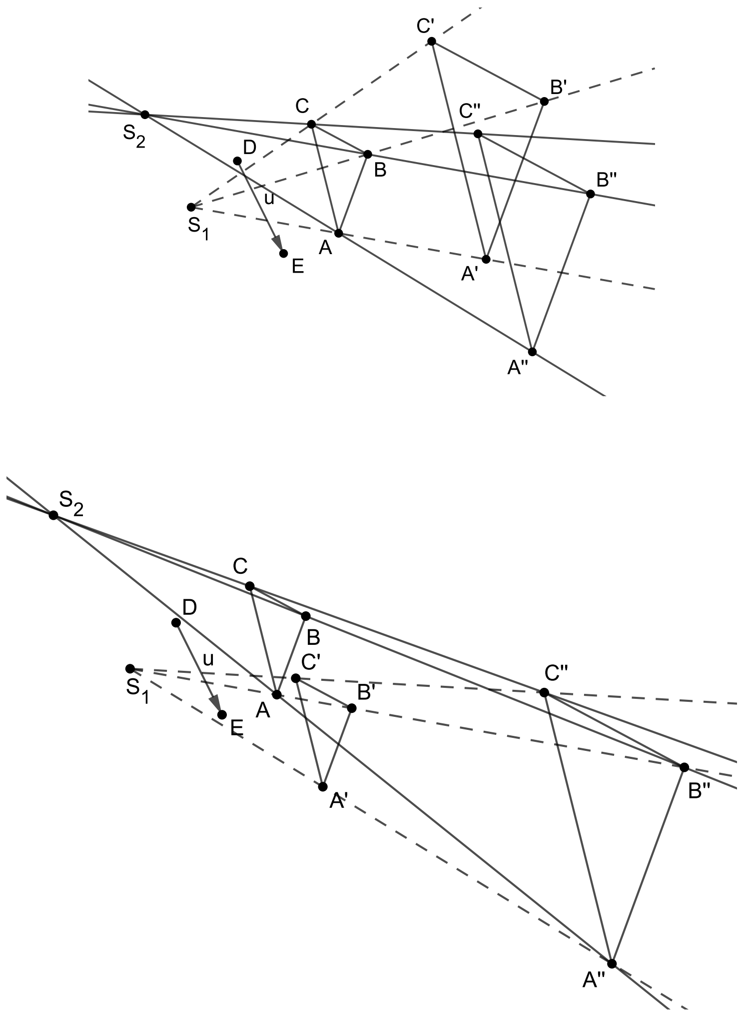
Afinita v rovině je takové vzájemně jednoznačné zobrazení $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, kde kolineární body A, B, C se zobrazí na body $f(A), f(B), f(C)$, pro které platí $(f(C); f(A), f(B)) = (C; A, B)$. Tedy poměr vzdáleností obrazů libovolných kolineárních bodů A', B', C' je roven poměru vzdáleností kolineárních bodů A, B, C. Afinity v rovině tedy zachovávají kolinearitu bodů a jejich dělící poměr. My se zaměříme na afinity, kterým říkáme *podobnosti*.

Podobné zobrazení nebo také *podobnost* v rovině je vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, pro které existuje kladné číslo k tak, že pro každé dvě dvojice bodů A, A' a B, B' vzoru a obrazu platí $|A'B'| = k \cdot |AB|$ [3]. Koeficient k se nazývá *koeficient podobnosti*. Podobnost je buď přímá nebo nepřímá, kde nepřímá podobnost mění orientaci obrazu. Podobnost je přímá, je-li složena ze stejnolehlosti a přímé shodnosti. Potom nepřímá podobnost je složení stejnolehlosti a osové souměrnosti.

Mezi podobnosti v rovině patří všechna shodná zobrazení (s koeficientem $k = 1$) a stejnolehlost. Mějme v rovině dvě stejnolehlosti $H_1(S_1, k_1)$, $H_2(S_2, k_2)$ a libovolný bod roviny X, kde $H_1(X) = X'$, $H_2(X') = X''$. Potom zobrazení $H(X) = X''$ je složení dvou stejnolehlostí H_1, H_2 a píšeme $H = H_2 \circ H_1$. Zobrazení H je identita pro $S_1 = S_2$ a $k_1k_2 = 1$, posunutí pro $S_1 \neq S_2$ a $k_1k_2 = 1$ nebo stejnolehlost se středem S a koeficientem k pro $k_1k_2 = k$, přičemž pro $S_1 = S_2$ platí $S = S_1 = S_2$ a pro $S_1 \neq S_2$ leží bod S na přímce S_1S_2.

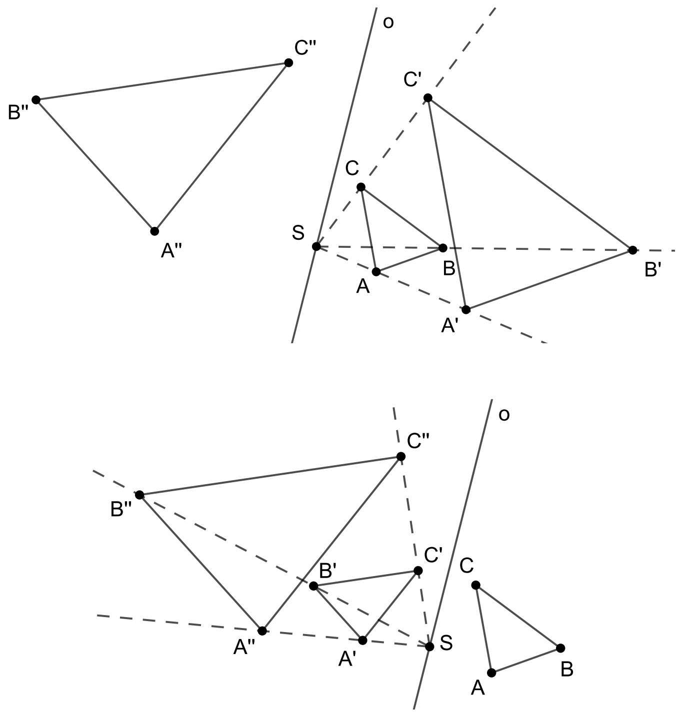
Každou podobnost lze rozložit na shodnost a stejnolehlost. Naopak složením libovolné shodnosti a stejnolehlosti vznikne podobnost (přičemž každou shodnost lze rozložit na osové souměrnosti, viz kapitola (4.3)). Podobně jako u shodností platí, že každá podobnost je dána obrazy vrcholů libovolného trojúhelníka a vrcholy trojúhelníka s ním podobného. Všechny podobnosti při jejich obvyklém skládání tvoří tzv. *grupu podobností*, která opět není komutativní, a grupa shodností je její podgrupou. Identita tvoří jednotkový prvek grupy podobností a ke každému podobnému zobrazení existuje inverzní zobrazení, které je opět podobné. Inverzní zobrazení ke stejnolehlosti $H_1(S, k)$ je stejnolehlost $H_2\left(S, \frac{1}{k}\right)$. Inverzí k podobnosti, která je sama složením podobností, je složení inverzí dílčích podobností v obráceném pořadí.

Zaměřme se nyní na skládání stejnolehlosti s jednotlivými shodnostmi a případnou komutativitu skládání zobrazení. Složením stejnolehlosti a identity vznikne tatáž stejnolehlost. Složením stejnolehlosti a posunutí vznikne stejnolehlost podle nového středu. Záleží však na pořadí skládání zobrazení, viz (Obr. 16). Na prvním obrázku je trojúhelník ABC zobrazen ve stejnolehlosti podle středu S_1 s koeficientem $k_1 > 1$ na trojúhelník $A'B'C'$. Ten je posunut o vektor $\vec{u}$ na trojúhelník $A''B''C''$. Následně lze najít nový střed stejnolehlosti S_2 a příslušný koeficient k_2. Na druhém obrázku je nejprve trojúhelník ABC posunut o vektor $\vec{u}$ a následně je provedena tatáž stejnolehlost podle středu S_1, jako v předchozím případě. Po nalezení nového středu stejnolehlosti S_2 je patrné, že se liší od předešlého případu. Vidíme tedy, že skládání posunutí a stejnolehlosti není obecně komutativní.



Obr. 16: Složení posunutí a stejnolehlosti

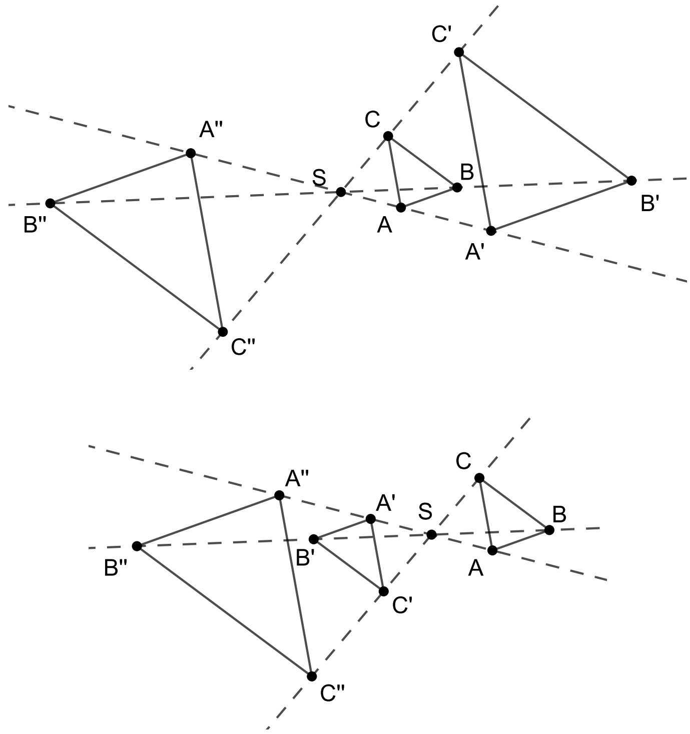
Složením osové souměrnosti podle osy o a stejnolehlosti se středem S, který leží na ose o, dostaneme nepřímou podobnost, viz (Obr. 17). Takové skládání osové souměrnosti a stejnolehlosti je komutativní. Na prvním obrázku je trojúhelník ABC zobrazen nejprve ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem $k > 1$ na trojúhelník $A'B'C'$. Ten je poté zobrazen v osové souměrnosti podle osy o na trojúhelník $A''B''C''$. Na druhém obrázku je nejprve trojúhelník ABC zobrazen v osové souměrnosti podle osy o a potom ve stejné stejnolehlosti se středem S jako v předchozím případě.



Obr. 17: Složení osové souměrnosti a stejnolehlosti

Komutativita však neplatí, leží-li střed stejnolehlosti S mimo osu o. Dostaneme totiž složení stejnolehlosti s posunutím, které není komutativní, viz (Obr. 16).

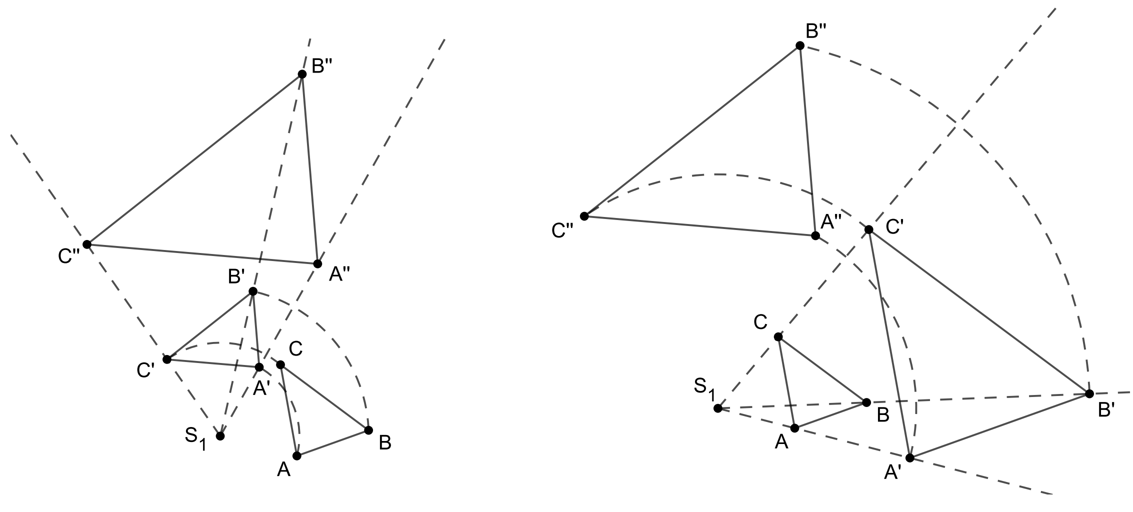
Složením středové souměrnosti se středem S a stejnolehlosti se stejným středem S a koeficientem stejnolehlosti k vznikne stejnolehlost se středem S a koeficientem $-k$, viz (Obr. 18). Na prvním obrázku je trojúhelník ABC zobrazen ve stejnolehlosti podle středu S s koeficientem $k > 1$ na trojúhelník $A'B'C'$. Ten je zobrazen ve středové souměrnosti podle středu S na trojúhelník $A''B''C''$. Na druhém obrázku je nejprve provedena středová souměrnost podle středu S a poté stejnolehlost podle středu S s koeficientem $k > 1$. Vidíme, že složení středové souměrnosti a stejnolehlosti, jejichž středy splývají, je komutativní.



Obr. 18: Složení středové souměrnosti a stejnolehlosti

Pokud ale středy daných zobrazení nesplývají, jejich skládání není komutativní a to opět kvůli posunutí.

Nakonec zbývá složení otočení a stejnolehlosti. Splývá-li střed stejnolehlosti se středem otočení, je složení těchto dvou zobrazení komutativní a jedná se o spirální podobnost, viz (Obr. 19). Na prvním obrázku je nejprve trojúhelník ABC otočen o úhel $\varphi > 0$ na trojúhelník $A'B'C'$. Ten je potom zobrazen ve stejnolehlosti podle středu S s koeficientem $k > 1$ na trojúhelník $A''B''C''$. Na druhém obrázku je trojúhelník ABC nejprve zobrazen v totožné stejnolehlosti jako v předchozím případě a teprve poté otočen o stejný úhel $\varphi > 0$. Pokud středy daných zobrazení nesplývají, jejich skládání není opět kvůli posunutí komutativní.



Obr. 19: Složení otočení a stejnolehlosti

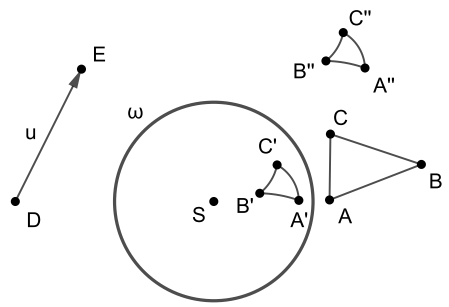
4.5 Kruhová zobrazení v rovině

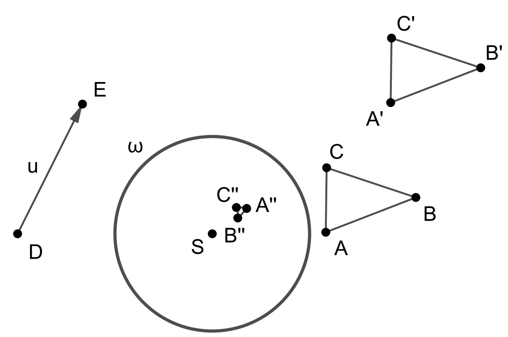
Doteď jsme se zabývali zobrazeními v rovině $\mathbb{E}^2$. Podobnosti a shodnosti rozšíříme z roviny $\mathbb{E}^2$ do roviny $\mathbb{M}^2$ tak, že bod M_∞ se zobrazí sám na sebe. Potom budou v rozšířené rovině veškeré dosud zmíněné vlastnosti shodností a podobností zachovány. Nyní se zaměříme na kruhovou inverzi.

Kruhová inverze není zobrazení v rovině $\mathbb{E}^2$, ale je vzájemně jednoznačné zobrazení v $\mathbb{E}^2 \setminus \{S\}$. V rovině $\mathbb{M}^2$ je kruhová inverze vzájemně jednoznačné zobrazení, viz kapitola (4.1).

Kruhová inverze není obecně podobné zobrazení, protože původně kolineární body (ležící na části přímky) se mohou zobrazit na nekolineární body (ležící na části kružnice). Avšak každou stejnolehlost lze rozložit na dvě kruhové inverze se středy splývající se středem stejnolehlosti [5]. *Osové inverze* v rovině $\mathbb{M}^2$ definujeme jako osové souměrnosti a kruhové inverze. *Kruhové zobrazení* definujeme jako zobrazení složené z konečného počtu osových inverzí. Potom každé kruhové zobrazení zobrazí kruhovou křivku opět na kruhovou křivku. V rovině $\mathbb{M}^2$ tvoří množina kruhových zobrazení (tedy všechny podobnosti, kruhové inverze a jejich složení) při jejich obvyklém skládání nekomutativní *grupu kruhových zobrazení*, jejíž podgrupou je grupa podobností [5].

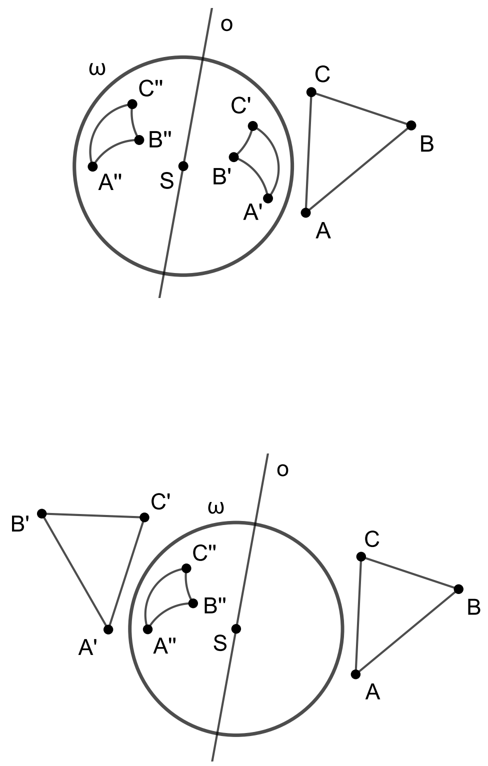
Podobnosti zachovávají typ kruhových křivek, tedy přímky se zobrazují na přímky a kružnice se zobrazují na kružnice. Kruhová inverze však obecně typ křivky nezachovává a potom se přímky mohou zobrazit na kružnice a naopak, viz kapitoly (1.3) a (1.4). Podívejme se tedy na skládání kruhové inverze s jednotlivými shodnostmi a následně se stejnolehlostí (protože potom složením stejnolehlosti a shodnosti dostaneme podobnost). Trojúhelník se v kruhové inverzi nezobrazí na trojúhelník, ale pouze na útvar, jehož strany jsou části kružnic nebo přímek. Pro demonstraci skládání zobrazení však budeme trojúhelník jakožto názorný příklad nadále používat. Složením kruhové inverze a identity je tatáž kruhová inverze. Složením kruhové inverze a posunutí dostaneme kruhové zobrazení, kde skládání daných zobrazení není komutativní, viz (Obr. 20). Na prvním obrázku je nejprve zobrazen trojúhelník ABC v kruhové inverzi se základní kružnicí ω na útvar $A'B'C'$, který je poté posunut o vektor $\vec{u}$ na útvar $A''B''C''$. Na druhém obrázku je nejprve trojúhelník ABC posunut o vektor $\vec{u}$ na trojúhelník $A'B'C'$, který je poté zobrazen ve stejné kruhové inverzi jako v předchozím případě na útvar $A''B''C''$.





Obr. 20: Složení posunutí a kruhové inverze

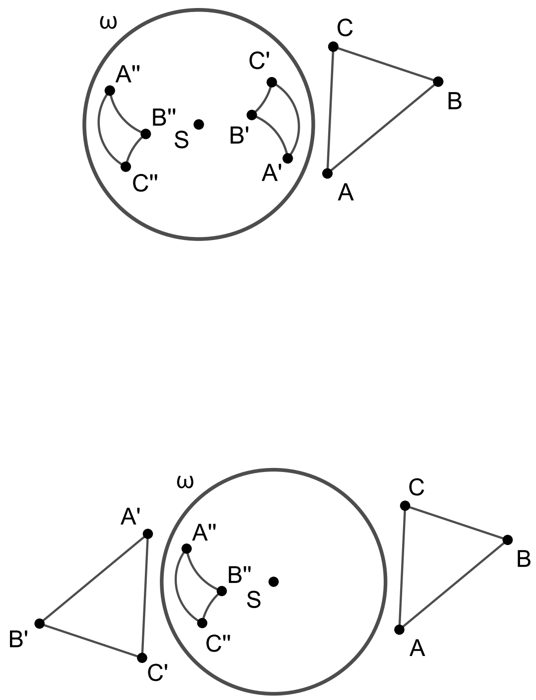
Složením kruhové inverze se základní kružnicí $\omega(S;r)$ a osové souměrnosti podle osy o, kde střed S leží na ose o, je kruhové zobrazení, kde skládání daných zobrazení je komutativní, viz (Obr. 21). Na prvním obrázku je nejprve trojúhelník ABC zobrazen v kruhové inverzi se základní kružnicí ω na útvar $A'B'C'$, který je poté zobrazen v osové souměrnosti podle osy o na útvar $A''B''C''$. Na druhém obrázku je trojúhelník ABC zobrazen nejprve v osové souměrnosti a poté v kruhové inverzi.



Obr. 21: Složení osové souměrnosti a kruhové inverze

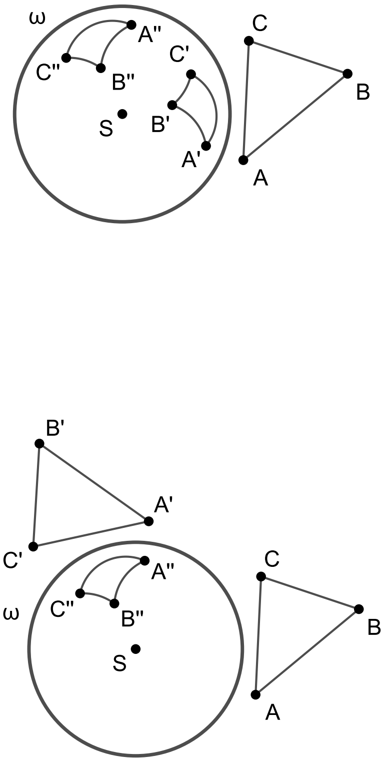
Pokud však střed S neleží na ose o, skládání není komutativní kvůli posunutí.

Složením kruhové inverze se základní kružnicí $\omega(S;r)$ a středové souměrnosti se středem S je kruhové zobrazení, kde skládání daných zobrazení je komutativní, viz (Obr. 22). Na prvním obrázku je nejprve trojúhelník ABC zobrazen v kruhové inverzi se základní kružnicí ω na útvar $A'B'C'$, který je poté zobrazen ve středové souměrnosti se středem S na útvar $A''B''C''$. Na druhém obrázku je trojúhelník ABC zobrazen nejprve ve středové souměrnosti a poté v kruhové inverzi.



Obr. 22: Složení středové souměrnosti a kruhové inverze

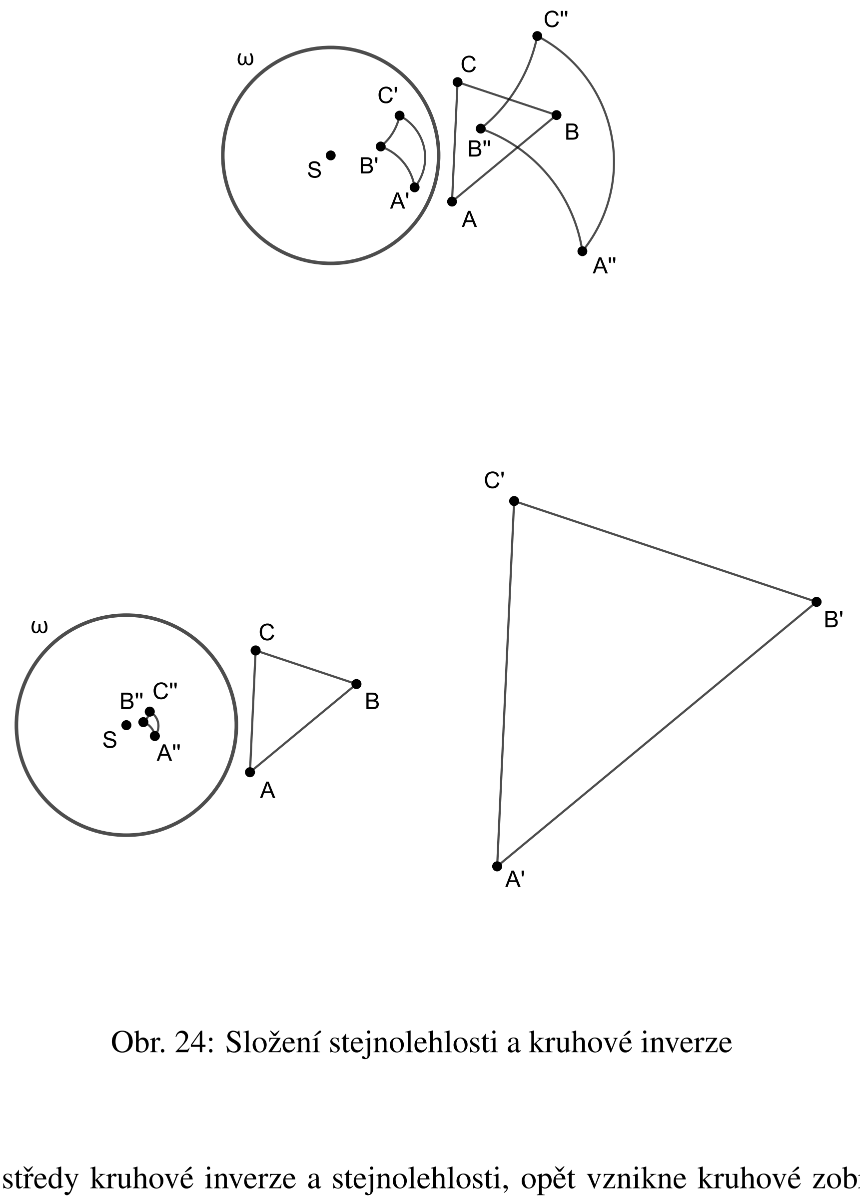
Složením otočení se středem v bodě S a kruhové inverze se základní kružnicí $\omega(S;r)$ je kruhové zobrazení, kde skládání daných zobrazení je komutativní, viz (Obr. 23). Na prvním obrázku je nejprve trojúhelník ABC zobrazen v kruhové inverzi se základní kružnicí ω na útvar $A'B'C'$, který je poté otočen podle středu S o úhel $\varphi > 0$ na útvar $A''B''C''$. Na druhém obrázku je trojúhelník ABC nejprve otočen podle středu S a poté zobrazen ve stejné kruhové inverzi jako v předchozím případě.



Obr. 23: Složení otočení a kruhové inverze

Jsou-li střed základní kružnice ω a střed otočení různé, není složení těchto zobrazení komutativní opět kvůli posunutí.

Nakonec složením stejnolehlosti se středem v bodě S a koeficientem $k > 1$ a kruhové inverze se základní kružnicí $\omega(S; r)$ je kruhové zobrazení, kde skládání daných zobrazení není komutativní, viz (Obr. 24). Na prvním obrázku je nejprve trojúhelník ABC zobrazen v kruhové inverzi se základní kružnicí ω na útvar $A'B'C'$, který je poté zobrazen ve stejnolehlosti se středem S na útvar $A''B''C''$. Na druhém obrázku je trojúhelník ABC nejprve zobrazen ve stejnolehlosti se středem S a poté je zobrazen v kruhové inverzi se základní kružnicí ω.



Obr. 24: Složení stejnolehlosti a kruhové inverze

Jsou-li různé středy kruhové inverze a stejnolehlosti, opět vznikne kruhové zobrazení, které není komutativní.

5 Apolloniovy úlohy

Apolloniova úloha má své jméno podle řeckého geometra Apollonia z Pergy (3. st. př.n.l.). Jedná se o úlohu, která se zabývá vzájemným vztahem tří prvků. Prvkem může být bod, přímka či kružnice. Úkolem je najít takovou kružnici, která se dotýká daných přímek a kružnic a prochází danými body.

Nejprve zjistíme počet takových úloh. Tvoříme trojice prvků, kterými může být kružnice, bod nebo přímka. Nezáleží na pořadí prvků a prvky se mohou opakovat, takže počet úloh určíme pomocí počtu kombinací třetí třídy ze tří prvků s opakováním

$$C'_3(3) = C_5(3) = \binom{5}{3} = 10.$$

Vypíšeme schematicky všechny případy. Pro značení B je bod, p je přímka a k je kružnice dostáváme úlohy $BBB, BBp, BBk, Bpp, Bpk, Bkk, ppp, ppk, pkk, kkk$.

Pappovy úlohy jsou speciálním případem Apolloniových úloh, kde ze tří prvků alespoň jeden je kruhová křivka a alespoň jeden je bod, přičemž tento bod leží na dané kruhové křivce. Analogicky k Apolloniovým úlohám můžeme vypsat všechny možnosti Bp_T, pp_T, kp_T, Bk_T, pk_T, kk_T. Značení dolního indexu T znamená, že na této křivce leží daný bod T.

Počet a způsob řešení následujících úloh bude záviset na vzájemné poloze výchozích objektů. Ne všechny případy je vhodné či možné řešit pomocí kruhové inverze[1]. Úlohy přesto rozebereme na všechny možné případy. Vždy uvedeme nejprve tabulku možných případů spolu s počtem řešení a poté jednotlivé případy znázorníme (pokud mají smysl). Dále pro snazší orientaci v nákresech značíme výchozí objekty modře a cílové objekty červeně.

Příklad 1. *V rovině jsou dány tři různé body A, B, C. Sestrojte kružnici l, která prochází danými body.*

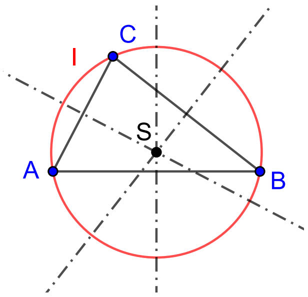
Výchozí rozložení	Počet řešení	Metoda řešení
1. A, B, C leží v jedné přímce	0	-
2. A, B, C neleží v jedné přímce	1	MBDV

Tab. 1: BBB

[1] Metoda množiny bodů dané vlastnosti, zkráceně MBDV.

1. Leží-li všechny tři body na jedné přímce, úloha nemá řešení, protože takovými body nemůže procházet žádná kružnice.

2. Pokud body A, B, C neleží na jedné přímce, úlohu vyřešíme pomocí množiny bodů dané vlastnosti. Každé tři body A, B, C, které neleží na jedné přímce, určují právě jednu kružnici a to kružnici opsanou trojúhelníku ABC. Úloha má právě jedno řešení, viz (Obr. 25).



Obr. 25: BBB

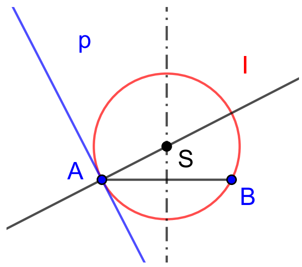
Příklad 2. *V rovině jsou dány dva různé body A, B a přímka p. Sestrojte kružnici l, která prochází body A, B a dotýká se přímky p.*

Výchozí rozložení			Počet řešení	Metoda řešení
1. $A, B \in p$			0	-
2. $(A \in p) \wedge (B \notin p)$			1	MBDV
3. $A, B \notin p$	a.	A, B leží v opačných polorovinách daných přímkou p	0	-
	b.	A, B leží ve stejné polorovině dané přímkou p	1 nebo 2	MBDV, mocnost bodu ke kružnici

Tab. 2: Bpk

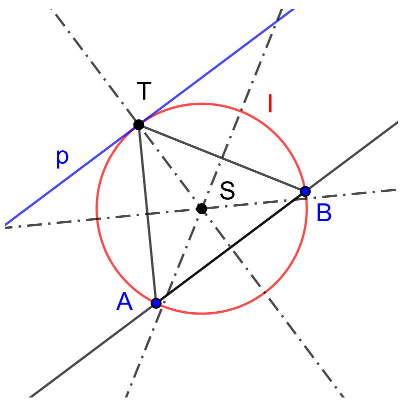
1. Úloha nemá řešení, protože každá kružnice, která prochází body A, B, protíná přímku p.

2. Pokud bod A leží na přímce p, je zároveň tečným bodem kružnice l a přímky p. Střed kružnice l tedy musí ležet na kolmici k přímce p procházející bodem A a na ose úsečky AB. Úloha má právě jedno řešení, viz (Obr. 26).



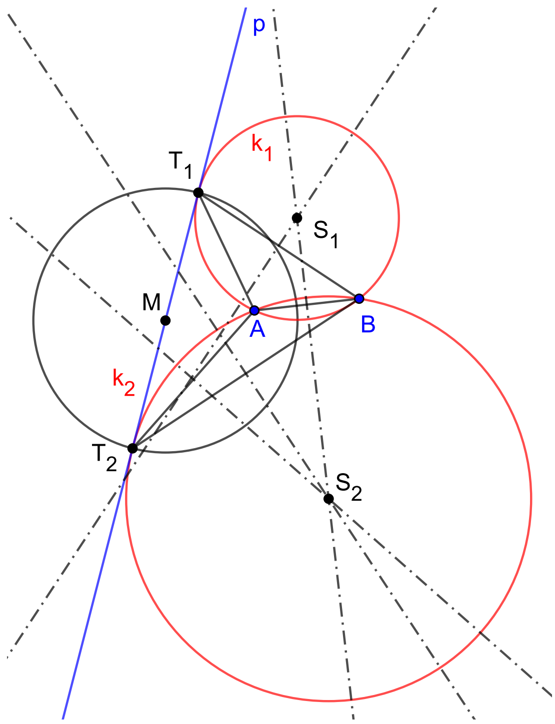
Obr. 26: BBp **2.**

3.a. Úlohu nelze vyřešit, protože každá kružnice, která prochází body A, B, protíná přímku p.
3.b. Leží-li body A, B ve stejné polorovině dané přímkou p, má úloha buď jedno nebo dvě řešení a to v závislosti na poloze přímky AB vůči přímce p. Je-li přímka AB rovnoběžná s přímkou p, úlohu řešíme metodou množiny bodů dané vlastnosti. Střed kružnice l musí ležet na ose úsečky AB, na které leží také tečný bod T. Úlohu potom převedeme na kružnici danou body A, B, T, tedy kružnici opsanou trojúhelníku ABT. Úloha má právě jedno řešení, viz (Obr. 27).



Obr. 27: BBp **3.** $AB \parallel p$

Je-li přímka AB různoběžná s přímkou p, úlohu vyřešíme pomocí mocnosti bodu ke kružnici [3]. Najdeme bod M jakožto průsečík přímek p a AB. Potom platí $|MT|^2 = |MA| \cdot |MB|$, kde T je tečný bod kružnice k na přímce p. Odtud zjistíme, jaký je poloměr $|MT|$ a najdeme bod T. Takové body najdeme dva, úloha má dvě řešení, viz (Obr. 28).



Obr. 28: BBp **3.** $AB \not\parallel p$

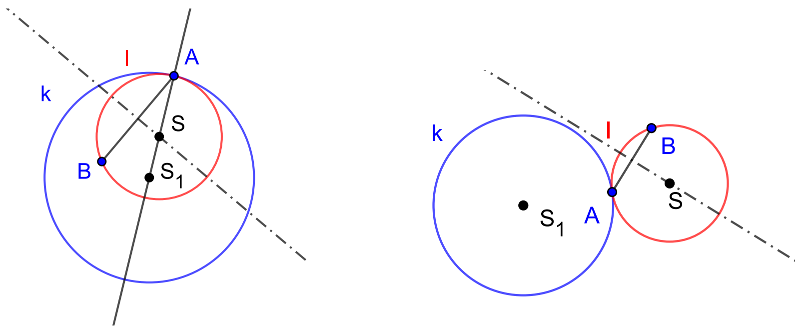
Příklad 3. *V rovině jsou dány dva různé body A, B a kružnice k. Sestrojte kružnici l, která prochází body A, B a dotýká se kružnice k.*

Výchozí rozložení			Počet řešení	Metoda řešení
1. $A, B \in k$			0	-
2. $(A \in k) \wedge (B \notin k)$			1	MBDV
3. $A, B \notin k$	a.	A leží uvnitř k, B leží vně k	0	-
	b.	A, B leží uvnitř nebo vně k	2	k. inverze

Tab. 3: BBk

1. Úloha nemá řešení, protože každá kružnice, která prochází body A, B, protíná kružnici k nebo s ní splývá.

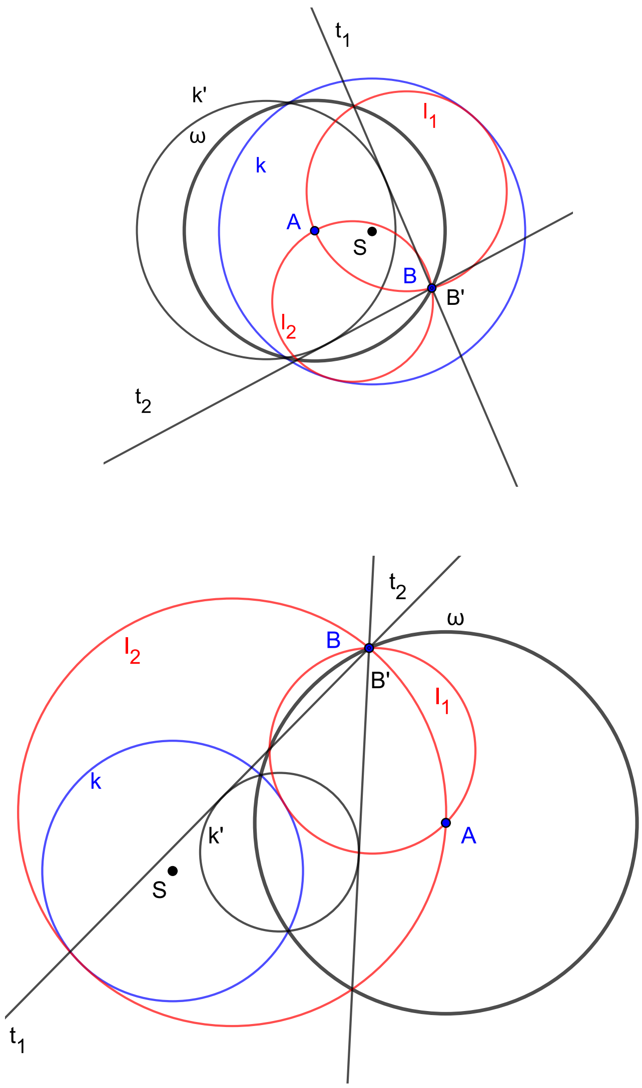
2. Pokud bod A leží na kružnici k, je zároveň tečným bodem kružnic k a l. Ať už bod B leží uvnitř nebo vně kružnice k, střed kružnice l musí ležet na spojnici AS_1 a na ose úsečky AB. Tato úloha má právě jedno řešení, viz (Obr. 29).



Obr. 29: BBk **2.**

3.a. Úloha nemá řešení, protože každá kružnice, která prochází body A, B protíná kružnici k.

3.b. Úlohu budeme řešit pomocí kruhové inverze. Základní kružnici ω zvolíme tak, že její střed leží v bodě A a poloměrem je velikost úsečky AB. Pomocí kruhové inverze zobrazíme bod A na nevlastní bod A', bod B je samodružný, tedy $B = B'$, a kružnice k se zobrazí na kružnici k'. Hledáme tečnou kružnici ke kružnici k, čili tečné přímky ke kružnici k'. Takové přímky najdeme dvě, t_1 a t_2. Tyto přímky zobrazíme zpět pomocí kruhové inverze na hledané kružnice l_1, l_2. Tato úloha má dvě řešení, viz (Obr. 30).



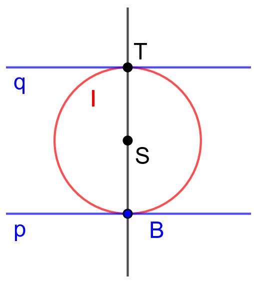
Obr. 30: BBk **3.b.**

Příklad 4. *V rovině je dán bod B a dvě různé přímky p, q. Sestrojte kružnici l, která prochází bodem B a dotýká se přímek p, q.*

Výchozí rozložení			Počet řešení	Metoda řešení
1. $p \parallel q$	a.	$B \in p$	1	MBDV
	b.	B leží uvnitř pásu přímek p, q	2	MBDV
	c.	B leží vně pásu přímek p, q	0	-
2. $p \nparallel q$	a.	$B \in p$	2	MBDV
	b.	B je průsečík přímek p, q	0	-
	c.	B neleží na žádné z přímek p, q	1 nebo 2	k. inverze

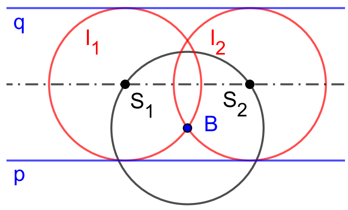
Tab. 4: Bpp

1.a. Pokud bod B leží na přímce p, je zároveň tečným bodem kružnice l. Tečný bod T na přímce q najdeme jako průsečík kolmice na přímku p procházející bodem B s přímkou q. Střed kružnice l je potom střed úsečky BT. Tato úloha má právě jedno řešení, viz (Obr. 31).



Obr. 31: Bpp **1.a.**

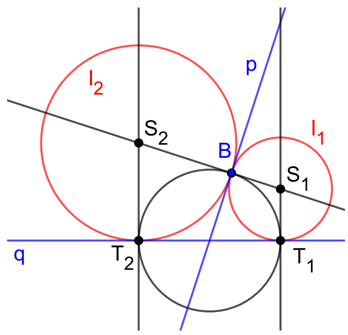
1.b. Úlohu řešíme metodou množiny bodů dané vlastnosti. Střed kružnice l musí ležet přesně mezi přímkami p, q a vzdálenost bodu S od přímek p, q musí být rovna vzdálenosti středu kružnice l od bodu B. Tato úloha má dvě řešení, viz (Obr. 32).



Obr. 32: Bpp **1.b.**

1.c. Úloha nemá řešení, protože každá kružnice, která prochází bodem B a dotýká se vzdálenější přímky, protíná bližší přímku.

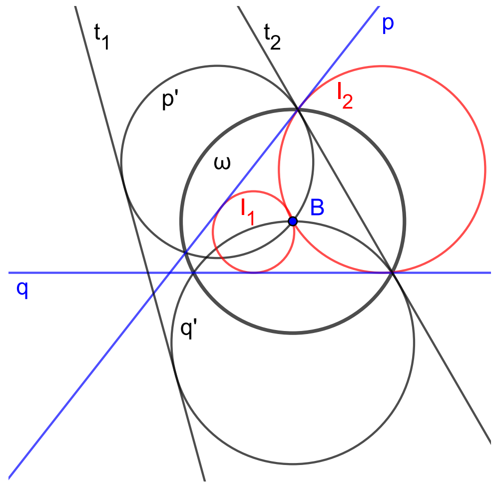
2.a. Úlohu řešíme metodou množiny bodů dané vlastnosti. Vzdálenost bodu B a tečného bodu T kružnice l od průsečíku přímek p, q musí být stejná, neboť se jedná o analogii kružnice vepsané trojúhelníku. Střed kružnice l potom leží na průsečíku kolmice na přímku q, procházející bodem T, a kolmice na přímku p, procházející bodem B. Tato úloha má dvě řešení, viz (Obr. 33).



Obr. 33: Bpp **2.a.**

2.b. Úloha nemá řešení, protože kružnice k by musela mít poloměr roven nule, aby neprotínala dané přímky p, q.

2.c. Úlohu budeme řešit pomocí kruhové inverze. Základní kružnici ω zvolíme tak, že její střed leží v bodě B s takovým poloměrem, aby protínala obě přímky p, q. Pomocí kruhové inverze zobrazíme bod B na nevlastní bod B' a přímky p, q se zobrazí na kružnice p', q'. Hledáme tečnou kružnici k přímkám p, q, čili tečné přímky společné pro obě kružnice p', q'. Takové přímky najdeme dvě. Tyto přímky zobrazíme zpět pomocí kruhové inverze na hledané kružnice l_1, l_2. Tato úloha má dvě řešení, viz (Obr. 34).



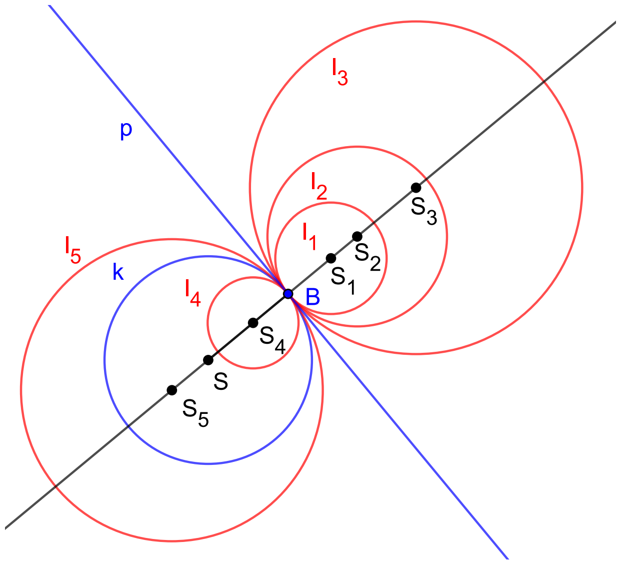
Obr. 34: Bpp **2.c.**

Příklad 5. *V rovině je dán bod B, přímka p a kružnice $k(S; r)$. Sestrojte kružnici l, která prochází bodem B a dotýká se přímky p a kružnice k.*

Výchozí rozložení			Počet řešení	Metoda řešení
1. $(B \in k) \wedge (B \in p)$	a.	p je tečna k	∞	MBDV
	b.	p je sečna k	0	-
2. $(B \in k) \wedge (B \notin p)$			2	MBDV
3. $(B \in p) \wedge (B \notin k)$			2	stejnolehlost
4. $(B \notin p) \wedge (B \notin k)$	a.	p je vnější přímka k	0 nebo 4	k. inverze
	b.	p je sečna k	2	k. inverze
	c.	p je tečna k	1 nebo 3	MBDV nebo k. inverze

Tab. 5: Bpk

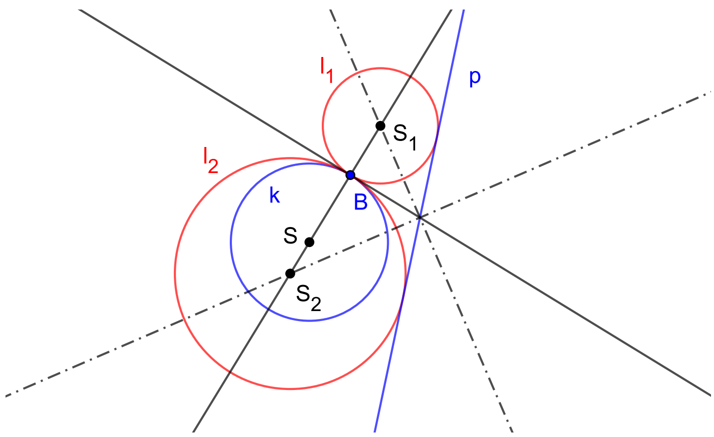
1.a. Leží-li bod B zároveň na kružnici k i na přímce p, kde p je tečnou kružnice k, dostáváme nekonečně mnoho tečných kružnic l s bodem dotyku B, kde množinou středů kružnic l je přímka BS, viz (Obr. 35).



Obr. 35: Bpk **1.a.**

1.b. V případě, že přímka p je sečnou kružnice k se společným bodem B, nemá úloha žádné řešení, protože taková kružnice by protínala alespoň jednu z křivek p, k.

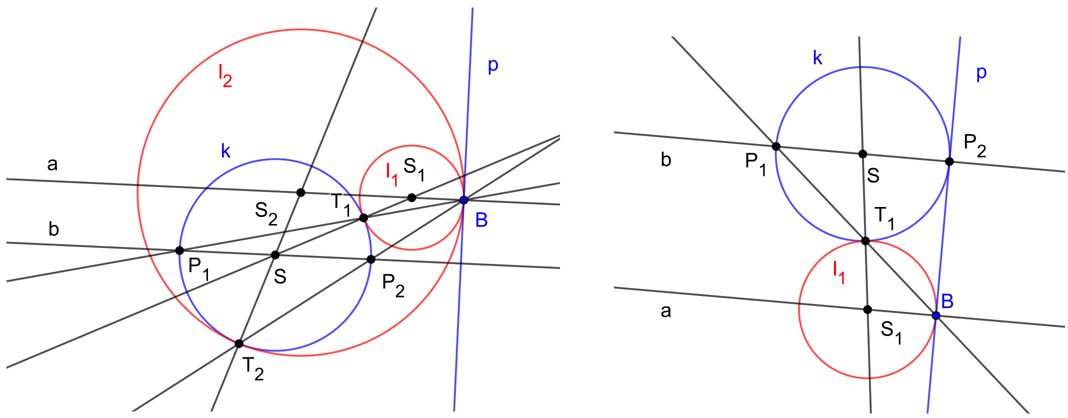
2. Leží-li bod B na kružnici k a zároveň neleží na přímce p dostáváme dvě řešení pomocí metody množiny bodů dané vlastnosti. Vzdálenost bodu B a přímky p od středu S kružnice l musí být stejná. Pro nalezení středu S kružnice l použijeme osu úhlu mezi přímkou p a kolmicí na přímku BS jdoucí bodem B. Takové kružnice najdeme dvě, viz (Obr. 36).



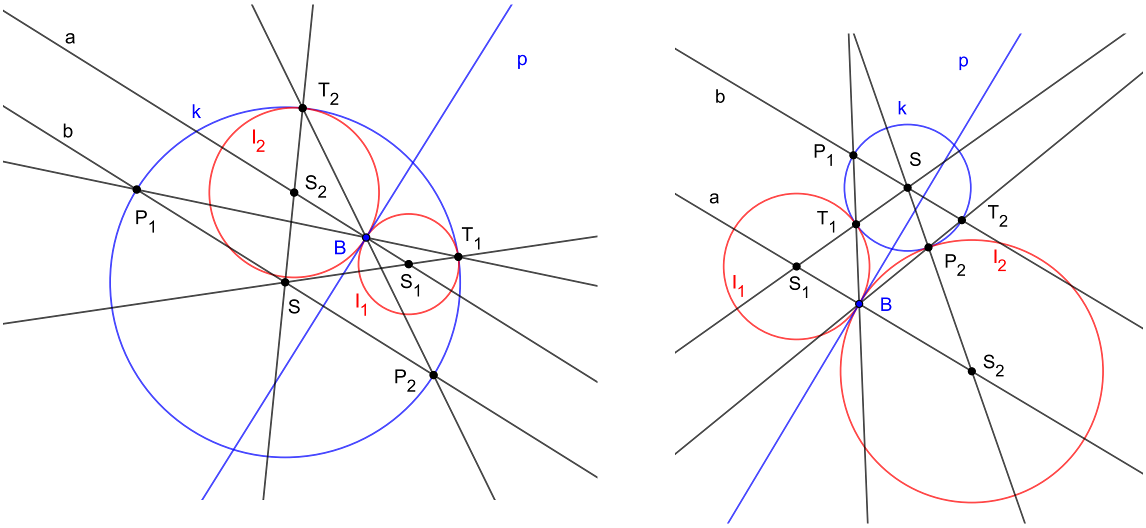
Obr. 36: Bpk **2**

V případě, že bod B leží přesně na odvrácené straně kružnice k od přímky p, přejde kružnice l_1 v kružnici s nekonečným poloměrem, tedy přímku. Je-li přímka p tečnou kružnice k, dostáváme opět dvě řešení, avšak kružnice l_2 splývá s kružnicí k.

3. Leží-li bod B na přímce p a zároveň neleží na kružnici k, máme 4 možnosti výchozí polohy prvků. Přímka p je buď vnější přímkou kružnice k, nebo je její tečnou, nebo je sečnou, přičemž bod B leží uvnitř kružnice k, nebo je sečnou a bod B leží vně kružnice k. Všechny možnosti lze vyřešit pomocí stejnolehlosti a dostaneme 2 řešení. K přímce p vedeme kolmici a bodem B a kolmici b bodem S. Průsečíky P_1, P_2 přímky b a kružnice k jsou stejnolehlé s tečnými body kružnic k, l_1 resp. k, l_2 T_1 resp. T_2 ve stejnolehlosti se středem v bodě B. Středy S_1, S_2 kružnic l_1, l_2 najdeme jako průsečík přímky a a přímek T_1S a T_2S. Pouze v případě tečny přejde jedna z kružnic l_1, l_2 v přímku splývající s přímkou p, viz (Obr. 37, 38).



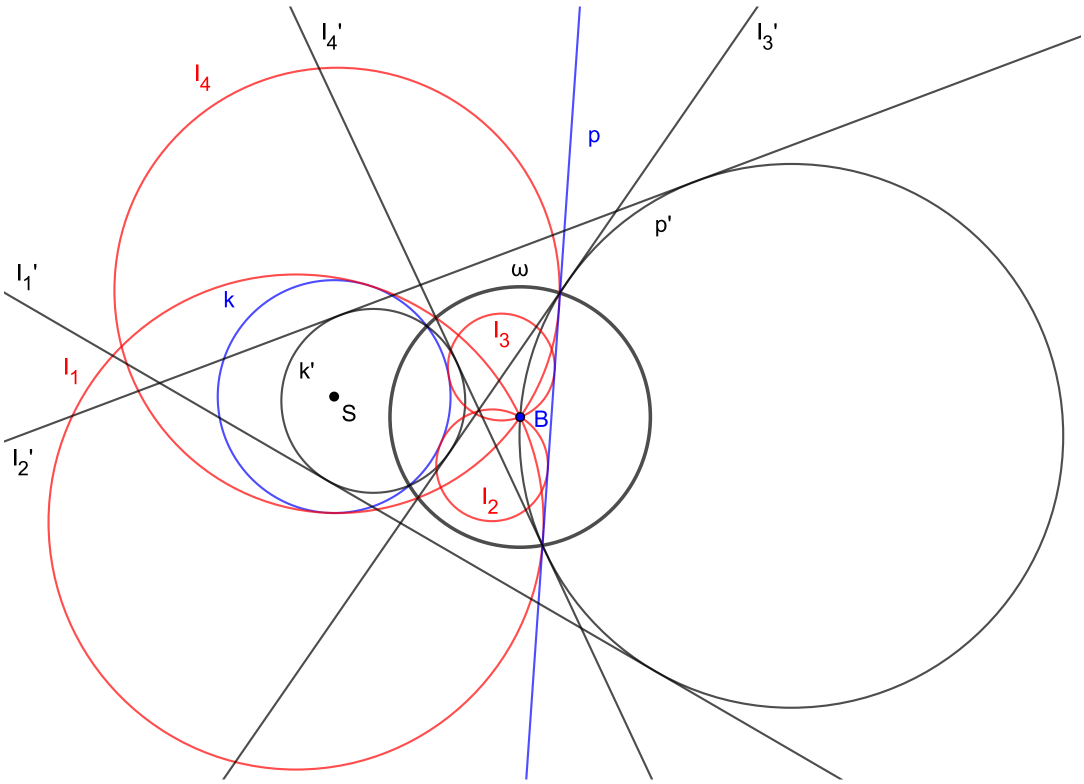
Obr. 37: Bpk **3**



Obr. 38: Bpk **3**

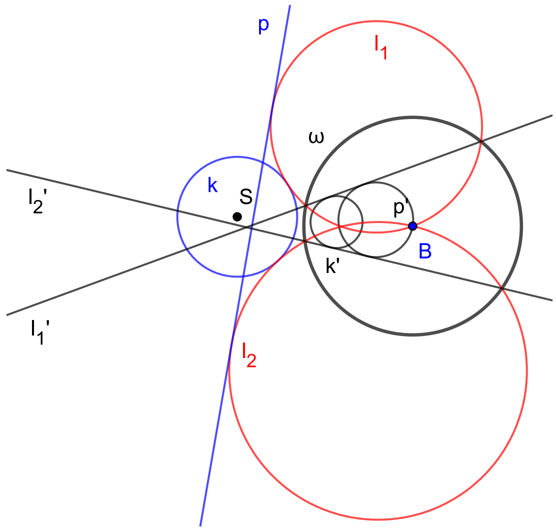
4.a. V případě, že přímka p je vnější přímkou kružnice k a bod B a kružnice k leží v opačných polorovinách daných přímkou p, nemá úloha žádné řešení. Stejně tak nemá řešení, leží-li bod B uvnitř kružnice k.

Pokud bod B leží vně kružnice k a zároveň leží ve shodné polorovině dané přímkou p, úlohu řešíme pomocí kruhové inverze, kde středem základní kružnice ω je bod B a její poloměr je libovolný. Přímka p se zobrazí na kružnici p' a kružnice k na kružnici k'. Hledáme tečnou kružnici k přímce p a kružnici k, čili tečné přímky společné pro obě kružnice p', k'. Takové přímky najdeme čtyři. Tyto přímky zobrazíme zpět pomocí kruhové inverze se základní kružnicí ω na hledané kružnice l_1, l_2, l_3, l_4. Tato úloha má 4 řešení, viz (Obr. 39).

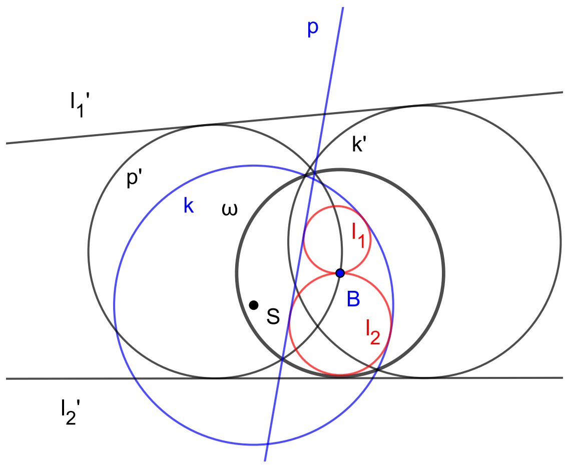


Obr. 39: Bpk **4.a**

4.b. Pokud přímka p je sečnou kružnice k, řešíme úlohu pomocí kruhové inverze analogicky k předchozímu případu. Úloha má dvě řešení, viz (Obr. 40, 41).



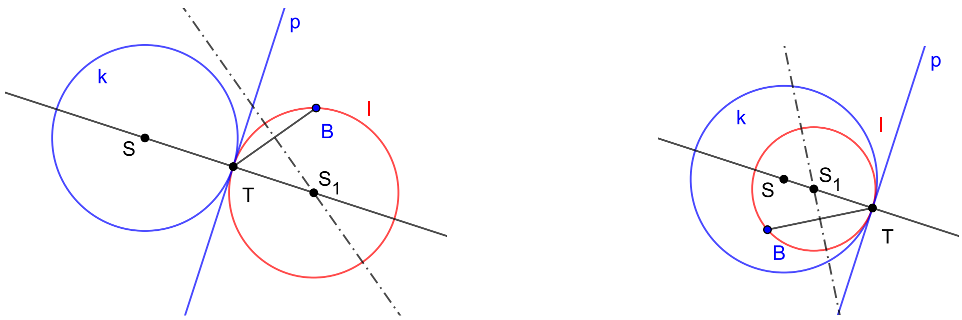
Obr. 40: Bpk **4.b**



Obr. 41: Bpk **4.b**

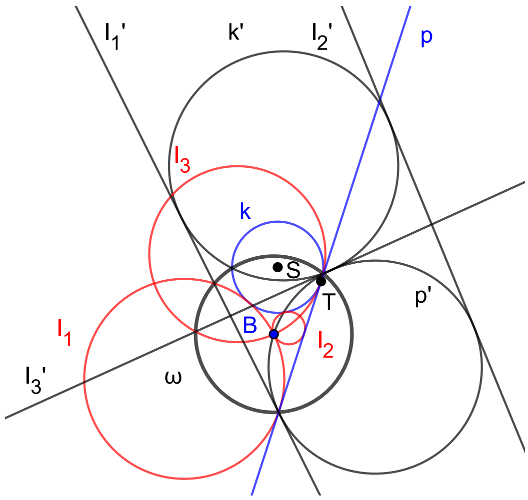
4.c. Pokud je přímka p tečnou kružnice k s tečným bodem T, mohou nastat tři možné výchozí polohy bodu B. Bod B může ležet v opačné polorovině dané přímkou p vzhledem ke kružnici k, nebo ve stejné polorovině jako kružnice k a to uvnitř nebo vně kružnice k.

Jestliže bod B leží v opačné polorovině vzhledem ke kružnici k nebo uvnitř kružnice k, řešíme úlohu pomocí osy úsečky TB a úloha má 1 řešení, viz (Obr. 42).



Obr. 42: Bpk **4.c**

Poslední možností je bod B ležící ve stejné polorovině jako kružnice k ale mimo ni. Tuto úlohu řešíme pomocí kruhové inverze, kde středem základní kružnice ω je bod B a její poloměr je libovolný. Potom se kružnice k zobrazí na kružnici k' a přímka p se zobrazí na kružnici p'. Poté nalezneme tečné přímky ke kružnicím k', p' a zobrazíme je v kruhové inverzi na kružnice l_1, l_2, l_3. Úloha má 3 řešení viz (Obr. 43).



Obr. 43: Bpk **4.c**

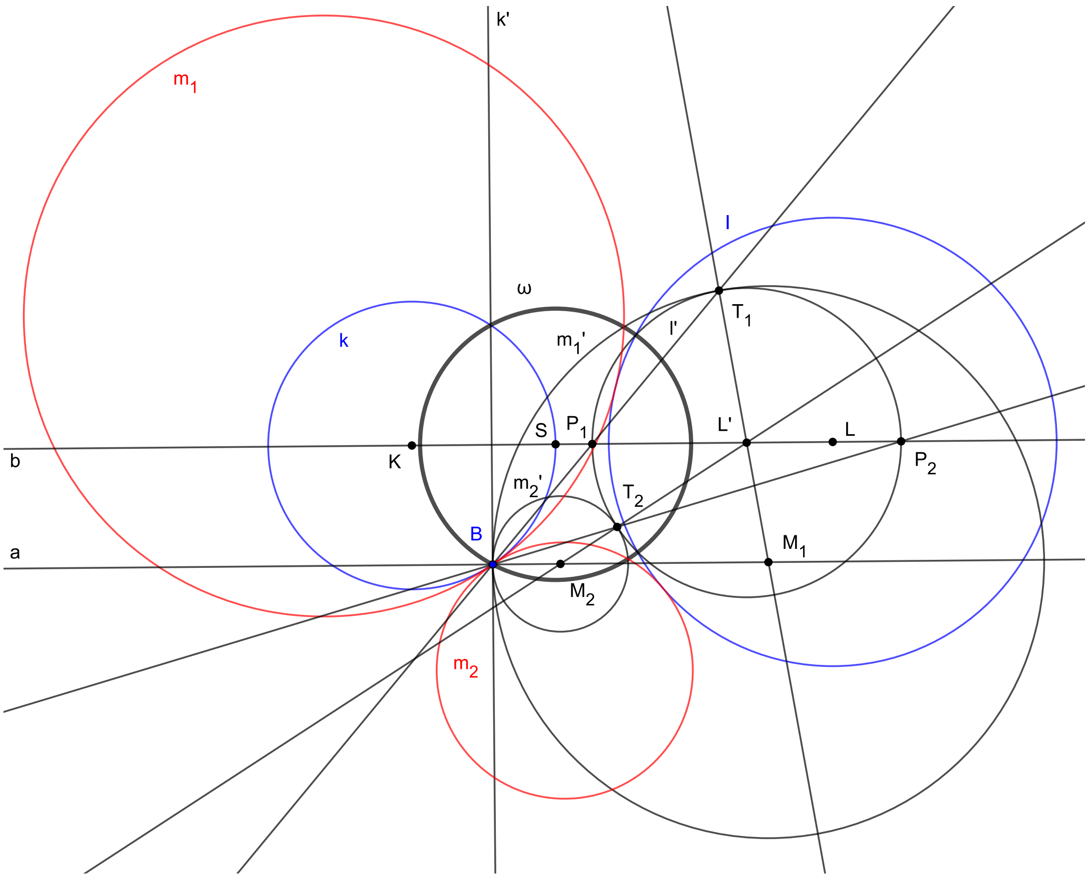
Příklad 6. *V rovině jsou dány kružnice $k(K; r_1)$, $l(L; r_2)$, $r_1 < r_2$ a bod B, který leží na kružnici k. Sestrojte kružnici m, která prochází bodem B a dotýká se kružnic k, l.*

Výchozí rozložení			Počet řešení	Metoda řešení
1. $k \cap l = \emptyset$	a.	k leží vně l	2	k. inverze a stejnolehlost
	b.	k leží uvnitř l	2	k. inverze a stejnolehlost
2. k, l mají 1 společný bod	a.	$k \cap l = B$	∞	MBDV
	b.	$k \cap l \neq B$	1	k. inverze a MBDV
3. k, l mají 2 společné body	a.	$k \cap l \neq B$	2	k. inverze a stejnolehlost
	b.	$k \cap l = B$	0	-

Tab. 6: kk_B

1.a. Kružnice k na níž leží bod B a kružnice l se neprotínají, ani neleží jedna uvnitř druhé. Úlohu řešíme pomocí kombinace kruhové inverze a stejnolehlosti. Nejprve sestrojíme přímku b jakožto spojnici středů K, L kružnic k, l. Průsečík S přímky b s kružnicí k zvolíme jako střed základní kružnice ω s poloměrem $|BS|$. Pomocí kruhové inverze se základní kružnicí ω

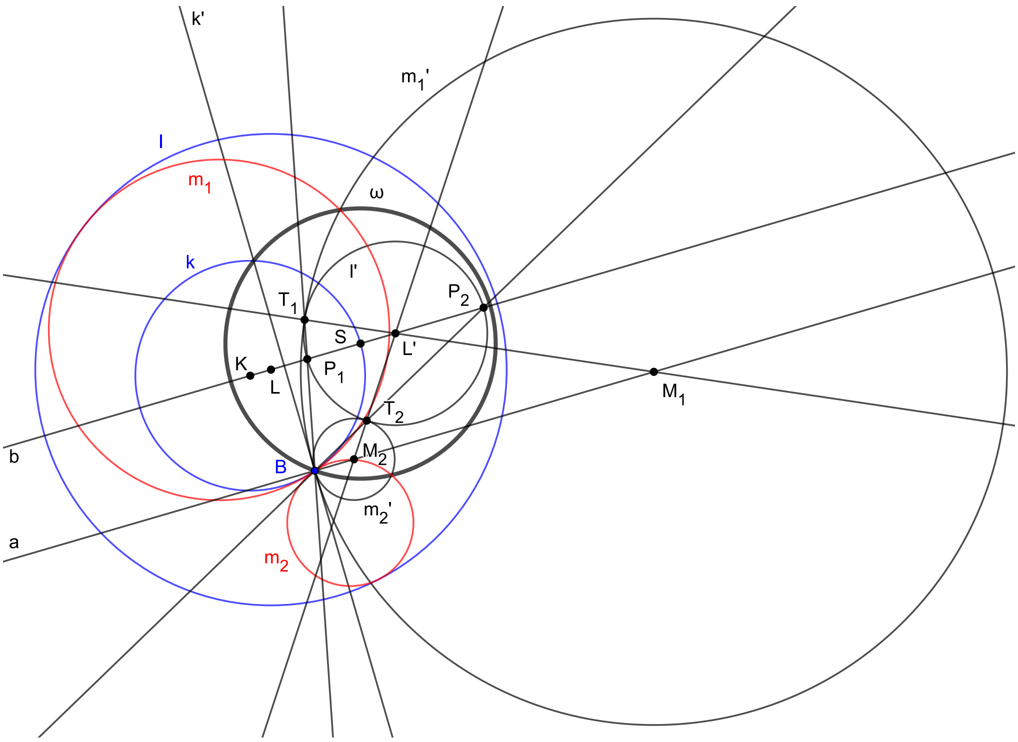
sestrojíme obrazy kružnic k, l. Kružnice k se zobrazí na přímku k' na níž leží bod B a kružnice l se zobrazí na kružnici l'. Nyní použijeme stejnolehlost. K přímce k' vedeme kolmici a bodem B. Průsečíky P_1, P_2 přímky b a kružnice l' jsou stejnolehlé s tečnými body kružnic l', m_1' resp. l', m_2' T_1 resp. T_2 ve stejnolehlosti se středem v bodě B. Středy M_1, M_2 kružnic m_1, m_2 najdeme jako průsečík přímky a a přímek T_1L' a T_2L' a sestrojíme kružnice m_1', m_2'. Ty pomocí stejné kruhové inverze zobrazíme na kružnice m_1, m_2 a dostáváme dvě řešení úlohy, viz (Obr. 44).



Obr. 44: kk_B **1.a**

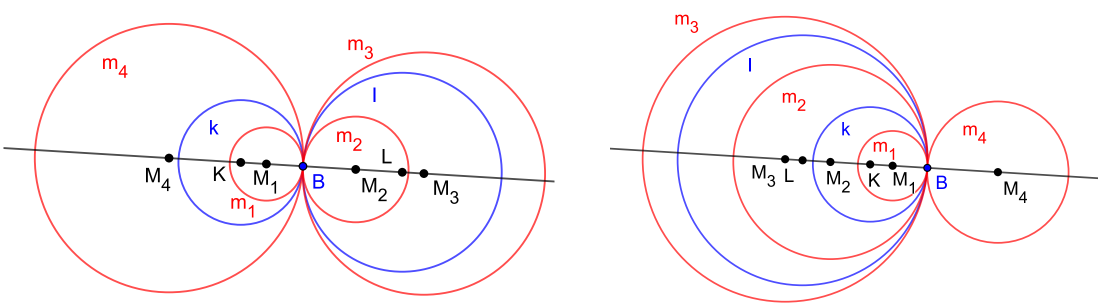
Je-li bod B na kružnici k umístěn tak, že jím prochází společná tečna kružnic k, l, stane se z jedné z kružnic m_1, m_2 přímka.

1.b. Leží-li kružnice k uvnitř kružnice l, řešíme úlohu stejným způsobem jako v předchozím případě. Nezáleží na tom, zda bod B leží na vnější či vnitřní kružnici, avšak abychom se drželi zadání, uvedeme případ, kde bod B leží na kružnici k, viz (Obr. 45).



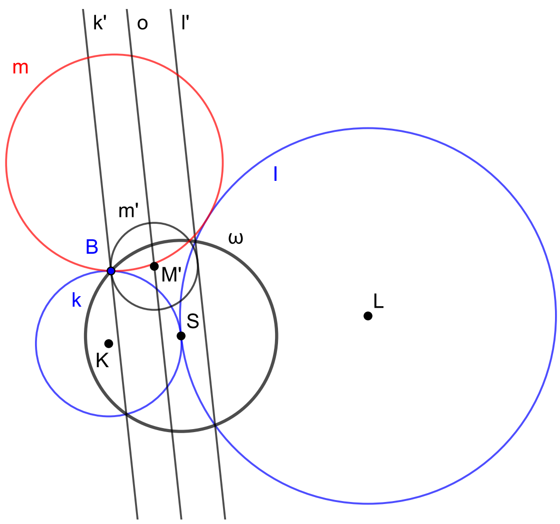
Obr. 45: kk_B **1.b**

2.a. Jestliže mají kružnice k, l jeden bod dotyku B, je řešení nekonečně mnoho, ať už mají kružnice vnější či vnitřní dotyk. Řešením jsou kružnice se středem na přímce KL procházející bodem B, viz (Obr. 46).



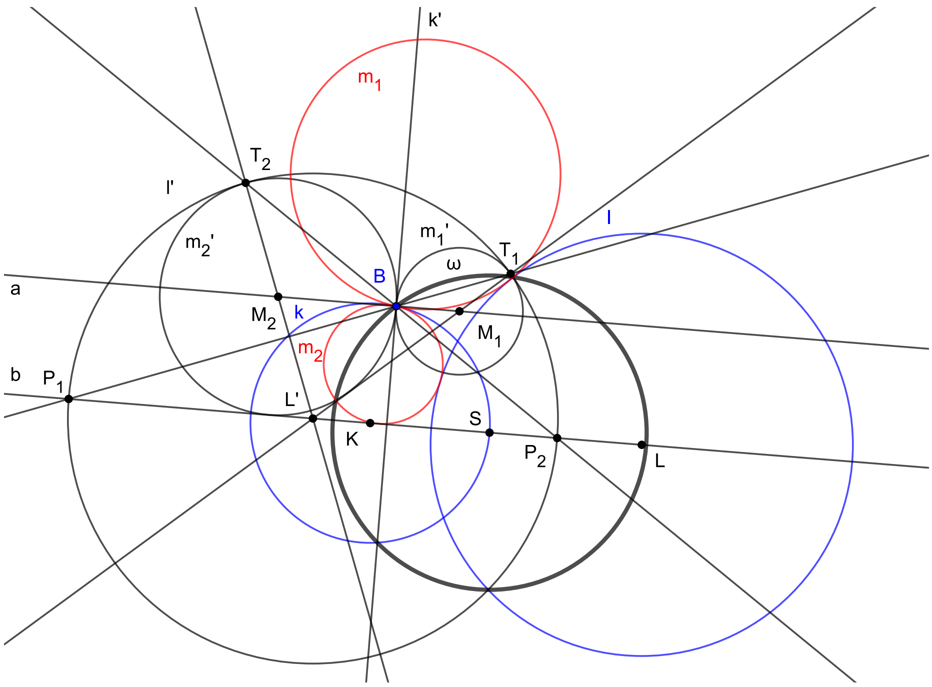
Obr. 46: kk_B **2.a.**

2.b. Jestliže mají kružnice k, l jeden bod dotyku S různý od bodu B, je řešení právě jedno, ať už mají kružnice vnější či vnitřní dotyk. Úlohu vyřešíme pomocí kombinace kruhové inverze a množiny bodů dané vlastnosti. Za střed základní kružnice ω zvolíme bod dotyku S kružnic k, l a poloměr základní kružnice je roven vzdálenosti $|SB|$. V kruhové inverzi se základní kružnicí ω zobrazíme kružnice k, l na dvě rovnoběžné přímky k', l'. Bod B, který leží na kružnici ω, je samodružný. Nyní sestrojíme kružnici m', jejíž střed M' leží na ose pásu přímek k', l' a prochází bodem B. Kružnici m' zobrazíme podle stejné kruhové inverze a dostaneme hledanou kružnici m, viz (Obr. 47).



Obr. 47: kk_B **2.b.**

3.a. Pokud mají kružnice dva průsečíky a ani jeden z nich není bod B, řešíme úlohu pomocí kruhové inverze a stejnolehlosti, viz (Obr. 48). Nezáleží přitom na poloze bodu B. Pouze, leží-li bod B na společné tečně kružnic k, l, přejde jedna z kružnic m_1 m_2 v přímku.



Obr. 48: kk_B **3.a**

3.b. Pokud mají kružnice dva průsečíky z nichž jedním je bod B, úloha nemá žádné řešení.

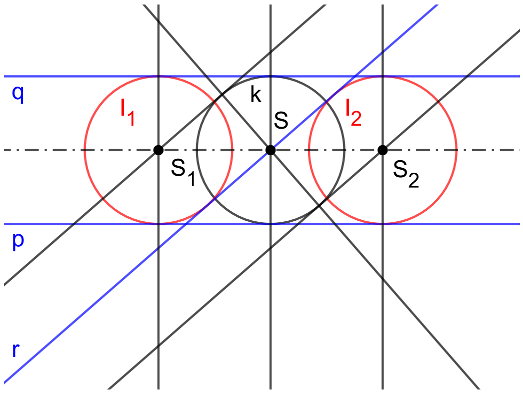
Příklad 7. *V rovině jsou dány tři různé přímky p, q, r. Sestrojte kružnici l, která se dotýká daných přímek.*

Výchozí rozložení			Počet řešení	Metoda řešení
1. $p \parallel q \parallel r$			0	-
2. $p \parallel q \nparallel r$			2	MBDV
3. $p \nparallel q \nparallel r$	a.	$A \in p \cap q \cap r$	0	-
	b.	$p \cap q \cap r \in \emptyset$	4	MBDV

Tab. 7: ppp

1. Úloha nemá řešení, protože tečná kružnice dvou krajních přímek vždy protíná prostřední přímku.

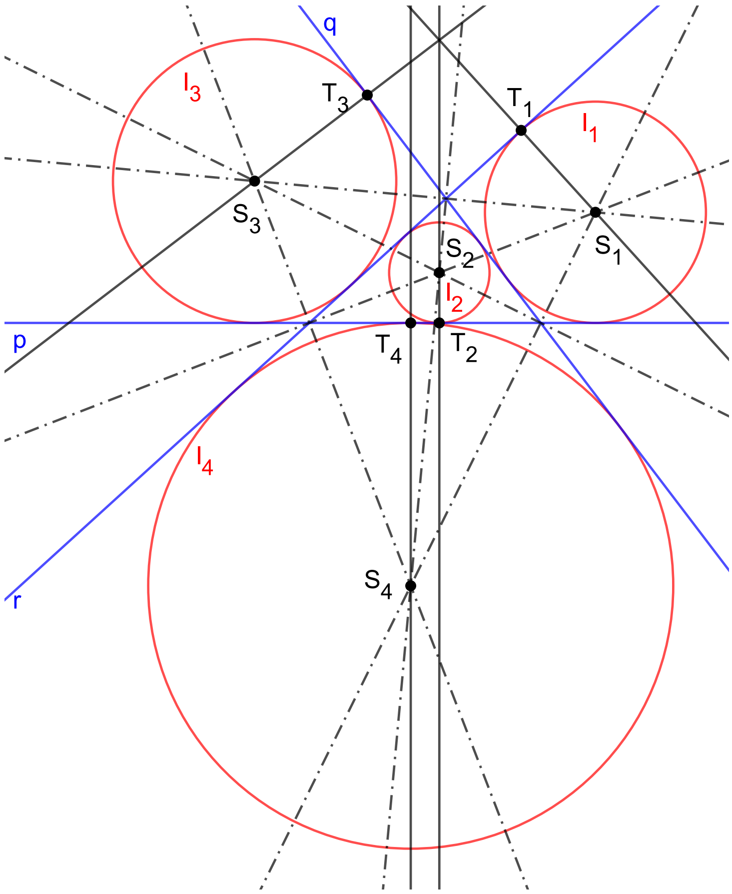
2. Úlohu řešíme metodou množiny bodů dané vlastnosti, kde vzdálenost středu kružnice l musí být stejná od všech třech přímek. Pomocí osy pásu určíme vzdálenost přímek p, q a poté sestrojíme rovnoběžky s přímkou r pomocí kružnice $k(S; |pq|/2)$. Střed hledané kružnice l je průsečíkem osy pásu přímek p, q a sestrojených rovnoběžek s přímkou r. Úloha má dvě řešení, viz (Obr. 49).



Obr. 49: ppp **2.**

3.a. Úloha nemá řešení, protože kružnice l by musela mít nulový poloměr, aby neprotínala žádnou z přímek p, q, r.

3.b. Úlohu řešíme metodou množiny bodů dané vlastnosti. Střed kružnic leží na osách úhlů mezi jednotlivými přímkami. Jedná se o analogii kružnice vepsané trojúhelníku, kde nám pro nalezení středu postačí osy dvou úhlů. Úloha má čtyři řešení, viz (Obr. 50).



Obr. 50: ppp **2.**

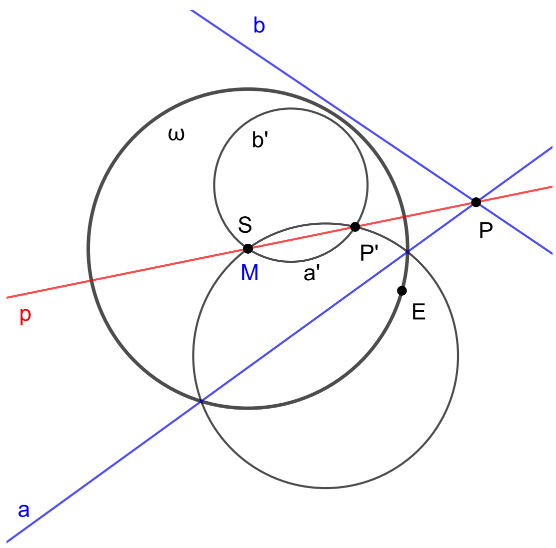
6 Úlohy v omezené nákresně

V této části práce vyřešíme několik úloh v tzv. *omezené nákresně*. Rýsovat v omezené nákresně znamená pracovat s body, které nemusí být fyzicky dosažitelné (jsou mimo papír). V našem případě *nepřístupné body* v nákresně uvidíme kvůli kontrole správnosti řešení, nemůžeme je však při konstrukci použít. Následující úlohy jsou v dané literatuře řešeny pomocí stejnolehlosti. My stejné úlohy vyřešíme pomocí kruhové inverze.

Příklad 8. *Jsou dány dvě přímky a, b, jejichž průsečík P leží mimo papír, na kterém rýsujeme. Dále je dán bod M, který neleží na přímkách a, b. Narýsujte přímku PM, tj. spojte bod M s nedostupným průsečíkem přímek a, b. [2]*

Narýsujeme přímky a, b a libovolný bod M. Pro užití kruhové inverze je nutné si uvědomit, že bod M bude ležet na přímce jdoucí bodem P. Proto jako střed základní kružnice ω zvolíme právě bod M, přičemž poloměr základní kružnice je libovolný.

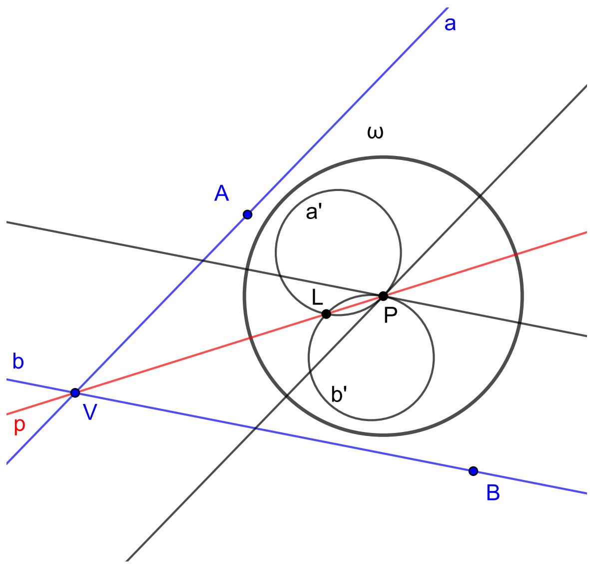
Pomocí kruhové inverze se základní kružnicí ω sestrojíme obrazy přímek a, b a jejich průsečík P'. Obraz S nevlastního bodu M_∞ splývá s bodem M. Nyní spojíme bod S s bodem P' přímkou p', kterou zobrazíme pomocí kruhové inverze na přímku p. Ta dle zadání prochází nepřístupným bodem P.



Obr. 51: Příklad 8

Příklad 9. *Je dán úhel AVB. Vrchol V leží mimo papír, na kterém rýsujeme. Narýsujte osu úhlu AVB. [2]*

Narýsujeme přímky a, b, v jejichž průsečíku leží nepřístupný vrchol V. K přímkám a, b sestrojíme rovnoběžky, jejichž vzdálenost od přímek a, b je stejná. Průsečík rovnoběžek označíme P. Bod P je střed základní kružnice ω s libovolným poloměrem. Podle základní kružnice ω sestrojíme v kruhové inverzi obrazy přímek a, b. Průsečíky kružnic a', b' jsou body L, P, jejichž spojnice tvoří osu úhlu AVB.

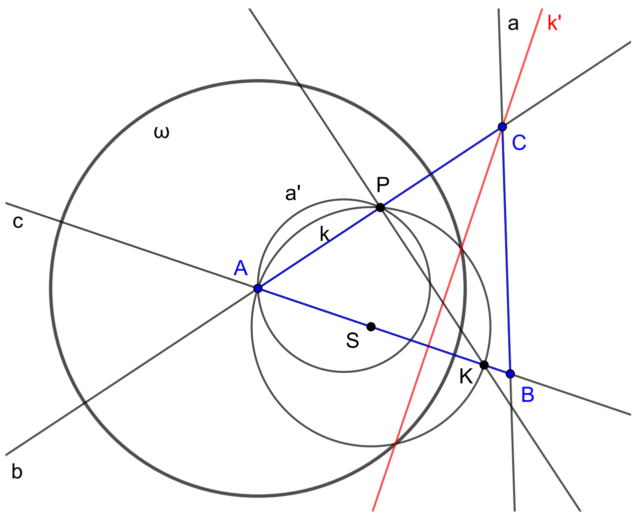


Obr. 52: Příklad 9

Příklad 10. *Je dán trojúhelník ABC. Vrchol C leží mimo papír, na kterém rýsujeme. Narýsujte kolmici bodem C na stranu AB. [2]*

Narýsujeme trojúhelník ABC a přímky a, b, c, které se kryjí s příslušnými stranami trojúhelníku. Základní kružnici ω volíme tak, že její střed leží v bodě A a poloměr je libovolný. Sestrojíme obrazy přímek a, b, c (b a c jsou samodružné). Protože bod C leží na průsečíku přímek a, b, najdeme průsečíky křivek a', b', kterými jsou body A a P.

Nyní hledáme kružnici, která prochází bodem P a je kolmá na přímku c'. Bodem P vedeme kolmici na přímku b' a její průsečík s přímkou c' označíme K. Kružnice k je potom Thaletova kružnice s průměrem AK. Dále zobrazíme kružnici k v kruhové inverzi se základní kružnicí ω na přímku k', což je hledaná kolmice jdoucí nepřístupným bodem C, viz (Obr. 53).



Obr. 53: Příklad 10

Literatura

[1] Kruhová zobrazení v rovině. [cit. 18.2.2018]
http://skola.brundik.net/szz-ma/materialy/dalsi/Geo-Inverze.pdf

[2] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha, Prometheus, spol. s.r.o., 1998. ISBN 978-80-7196-099-7

[3] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: Planimetrie*. Praha, Prometheus, spol. s.r.o., 1993. ISBN 80-7196-174-4

[4] LÁLOVÁ, Eva. *Geometrie komplexních čísel*. České Budějovice, 2016. bakalářská práce. JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH. Přírodovědecká fakulta

[5] JANYŠKA, Josef. *Geometrická zobrazení*. [cit. 20.2.2019]
https://www.math.muni.cz/ janyska/ZobrazeniWS.pdf

Obrázky jsou vytvořeny pomocí programu GeoGebra 5.0.