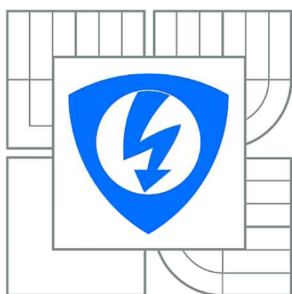


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ

ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

ČASOVÉ OKNO PRO FREKVENČNÍ ANALÝZU SIGNÁLŮ VYUŽÍVAJÍCÍ HLADKÝCH FUNKCÍ

TIME WINDOWS FOR FREQUENCY ANALYSIS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

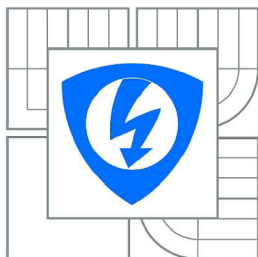
GABRIEL MATUS

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. PAVEL JURA, CSc.

BRNO 2012



VYSOKÉ UČENÍ
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

Ústav automatizace a měřicí techniky

Bakalářská práce

bakalářský studijní obor
Automatizační a měřicí technika

Student: Gabriel Matus
Ročník: 3

ID: 125539
Akademický rok: 2011/2012

NÁZEV TÉMATU:

Časové okno pro frekvenční analýzu signálů využívající hladkých funkcí

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Cílem práce je navrhnout časové okno s využitím hladké funkce $w(t)=\exp(-t^2/(1-t^2))$, dále parametrizovat tuto funkci a porovnat vlastnosti takto vytvořeného časového okna s vybranými známými okny.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

1. Časově frekvenční analýza signálů
http://www.rss.tul.cz/download/tdg/P6_cas_freq_analyza.pdf
2. Window function
http://en.wikipedia.org/wiki/Window_function
3. Time-frequency analysis
<http://fieldtrip.fcdonders.nl/tutorial/timefrequencyanalysis>
4. Oppenheim, Alan V.; Schafer, Ronald W.; Buck, John A. (1999). Discrete-time signal processing. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall,. ISBN 0-13-754920-2.,

Termín zadání: 6.2.2012

Termín odevzdání: 28.5.2012

Vedoucí práce: prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

doc. Ing. Václav Jirsík, CSc.

Předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

Abstrakt

Táto práca sa zaoberá vlastnosťami časových okien a ich použitím vo frekvenčnej analýze signálov. Pri tejto analýze je použitá diskrétna Fourierova transformácia (DFT). Účinky okien skúmame vo frekvenčnom spektre, ktorý je vytvorený pomocou tejto transformácie. Hlavným cieľom je, aby sme utlmili bočný lalok spektrálnej odozvy. Ich číselné hodnoty sú vypočítané pomocou programu MATLAB a porovnané so stanovenými hodnotami. Použitie okná využívajúce hladkých funkcií vo frekvenčnej analýze signálov.

Kľúčové slová

Časové okno, Fourierova transformácia, frekvenčná analýza, frekvenčné spektrum, hladká funkcia

Abstract

This thesis discusses the characteristics of time-windows and their application in frequency analysis signals. For this analysis is discrete Fourier transformation used. The effects of various windows are examined in the spectrum which was generated by using this transformation. The main objective is to dampen the highest side lobe of the spectral response. Their numerical values are calculated by using MATLAB software and compared with specified values. Using windows which using smooth functions in the frequency analysis of signals.

Keywords

Time window, Fourier transform, frequency analysis, frequency spectrum, smooth function

Bibliografická citace:

MATUS, G. *Časové okno pro frekvenční analýzu signálů využívající hladkých funkcí*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2012. 56 s. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma Časová okna pro frekvenční analýzu signálů využívající hladkých funkcí jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářského projektu a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

V Brně dne: 25. května 2012

.....

podpis autora

Poděkování

Děkuji vedoucímu bakalářské práce prof. Ing. Pavlu Jurovi, CSc. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé bakalářské práce.

V Brně dne: 25. května 2012

.....
podpis autora

Obsah

1	Úvod.....	11
2	Klasifikácia signálov a výpočet spekter	12
2.1	Spojité signály	12
2.1.1	Periodický spojité signály	13
2.1.2	Aperiodický (neperiodický) spojité signály	13
2.2	Diskrétny signály	14
2.3	Fourierova transformácia.....	15
2.4	Diskrétna Fourierova transformácia (DFT)	15
3	Obecne o časových oknách	17
3.1	Funkcie jednotlivých časových okien.....	19
3.1.1	Obdĺžnikové okno	19
3.1.2	Trojuholníkové okno	20
3.1.3	Cosinusové okno	20
3.1.4	Okno Hanning	21
3.1.5	Okno Hamming	22
3.1.6	Okno Blackman.....	23
3.1.7	Okno 4 členný Blackman-Harris.....	24
3.1.8	Okno Flat top.....	25
4	Číselné charakteristiky okien	27
4.1	Úroveň najvyššieho bočného laloka	27
4.2	Zoslabenie bočných lalokov	28
4.3	Ekvivalentná šumová šírka pásma.....	28
4.4	Koherentný zisk (Coherent Gain).....	30
4.5	Polbinový pokles odstup signálu od šumu.....	30
4.6	Maximálna strata odstup signálu od šumu.....	31
4.7	Korelácia prekrývania 50% a 75%	32
4.8	Porovnanie číselných charakteristík okien	34
5	Porovnávanie časových okien	35
6	časové okno Využívajúce hladkých funkcií.....	38
6.1	Hladká funkcia.....	38
6.1.1	Spojitosť	39
6.2	Parametrizácia funkcie.....	40

6.2.1	Parameter „x“	40
6.2.2	Parameter „a“	42
6.2.3	Parameter „n“	43
6.2.4	Parameter „b“	44
6.2.5	Súhrn parametrov „x, a, n, b“	46
6.2.6	Program – Exponential.m.....	46
6.2.7	Napodobňovanie okien.....	47
7	Záver.....	49
8	Použitá literatúra.....	50

Zoznam obrázkov

Obrázok 2.1: Spojitý signál.....	12
Obrázok 2.2: Diskrétny signál.....	14
Obrázok 3.1: Aplikovanie časového okna	17
Obrázok 3.2: Presakovanie spektra	18
Obrázok 3.3: Obdĺžnikové okno a jeho frekvenčná odozva	19
Obrázok 3.4: Triangular okno a jeho frekvenčná odozva	20
Obrázok 3.5: Cosine okno a jeho frekvenčná odozva.....	21
Obrázok 3.6: Hanning okno a jeho frekvenčná odozva	22
Obrázok 3.7: Hamming okno a jeho frekvenčná odozva	22
Obrázok 3.8: Blackman okno a jeho frekvenčná odozva.....	24
Obrázok 3.9: Blackman-Harris okno a jeho frekvenčná odozva	24
Obrázok 3.10: Flat top okno a jeho frekvenčná odozva.....	25
Obrázok 4.1: Úroveň najvyššieho bočného laloka.....	27
Obrázok 4.2: Zoslabenie bočných lalokov	28
Obrázok 4.3: Ekvivalentné šírkové pásmo šumu	30
Obrázok 4.4: Rozloženie postupnosti pre spracovanie bez prekrytia	33
Obrázok 4.5: Rozloženie postupnosti pre spracovanie s prekrytím	33
Obrázok 4.6: Relácia medzi koreláciou na prekrytom intervale	33
Obrázok 5.1: Príklad na chovanie sa frekvenčnej odozvy pri použití časových okien trojuholník, Hamming a Flat top.....	37
Obrázok 6.1: Funkcia exponenciálneho okna	38
Obrázok 6.2: Časové priebehy parametrizovaného okna s parametrom „x“	40
Obrázok 6.3: Frekvenčné odozvy parametrizovaného okna s parametrom „x“	41
Obrázok 6.4: Časové priebehy parametrizovaného okna s parametrom „a“	42
Obrázok 6.5: Frekvenčné odozvy parametrizovaného okna s parametrom „a“	42
Obrázok 6.6: Časové priebehy parametrizovaného okna s parametrom „n“	43
Obrázok 6.7: Frekvenčné odozvy parametrizovaného okna s parametrom „n“	44
Obrázok 6.8: Časové priebehy parametrizovaného okna s parametrom „b“	45
Obrázok 6.9: Frekvenčné odozvy parametrizovaného okna s parametrom „b“	45
Obrázok 6.11: Hľadanie podľa číselných charakteristík.....	47
Obrázok 6.12: Porovnanie časového priebehu a frekvenčnej odozvy okna Blackman(červená) a Exponential(modrá).....	48

Zoznam tabuliek

Tabuľka 4-1: Číselné charakteristiky okien	34
Tabuľka 5-1: Voľba časového okna.....	36
Tabuľka 6-1: Číselné charakteristiky parametrizovaného okna s parametrom „x“	41
Tabuľka 6-2: Číselné charakteristiky parametrizovaného okna s parametrom „a“.....	43
Tabuľka 6-3: Číselné charakteristiky parametrizovaného okna s parametrom „n“	44
Tabuľka 6-4: Číselné charakteristiky parametrizovaného okna s parametrom „b“	45

1 ÚVOD

Táto bakalárska práca sa zaoberá frekvenčnou analýzou signálov. Pomocou tejto analýzy sme schopný rozložiť pôvodný signál na jeho frekvenčné zložky. Jednotlivé časti signálu sú charakterizované vlastnosťami, aké sú amplitúda, frekvencia či fázový posun. V dnešnej komunikácii, pri meraniach sa stretávame s rôznymi signálmi, ktoré obsahujú okrem užitočných aj rušivé, nežiadajúce zložky, signály. V získanom spektre sa potom snažíme tieto zložky čo najviac utlmiť a užitočné zvýrazniť. Na to slúžia – časové okná. Existuje z nich celá rada, rozdiel medzi nimi je ich vplyv na pôvodný signál, sú charakterizované so svojimi číselnými charakteristikami.

Pre frekvenčnú analýzu sa používajú dva postupy: lineárny a nelineárny. V tejto práci budem používať lineárnu *Krátkodobú Fourierovu transformáciu* (Fast Fourier Transform – FFT) pomocou programu MATLAB. V práci sú spomenuté najpoužívanejšie časové okná, ich rozbor a porovnanie podľa číselných charakteristík. Druhá časť práce je venovaná na rozoberanie nového časového okna. K oknu patria štyri parametre, pomocou ktorých sme schopný formovať časový priebeh okna a hľadať čo najlepšie charakteristiky, výsledky. K práci patrí aj grafický program písaný v prostredí MATLAB GUI – parametrizace.m.

2 KLASIFIKÁCIA SIGNÁLOV A VÝPOČET SPEKTER

Pri spracovaní analógových a digitálnych signálov máme na výber dve základné metódy: Fourierova transformácia a konvolučné metódy. V tejto práci sa bude používať Fourierova transformácia.

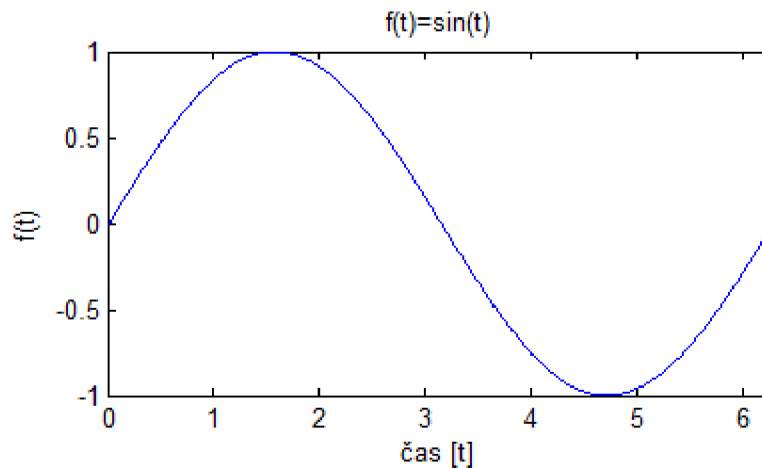
Názov dostala podľa francúzskeho matematika Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Ako prvý spoznal, že každú spojitú periodickú funkciu je možné vyjadriť ako superpozíciu sinusových funkcií.

S týmto postupom sa zaoberáme v kapitolách (2.3) a (2.4).

2.1 Spojitý signál

Pod pojmom *spojitý signál* si rozumieme taký signál, ktorý je definovaný pre všetky časové okamžiky, čiže v čase od $-\infty$ do $+\infty$. Na opis matematického modelu použijeme pojem funkcia, ktorá je definovaná na celej reálnej osi. Náš matematický model je potom nasledovný:

$$f(t), \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad (2.1)$$



Obrázok 2.1: Spojitý signál

Signály si môžeme rozdeliť aj podľa toho, či sú periodické alebo aperiodické.

2.1.1 Periodický spojitý signál

Je to taký signál, ktorý sa v čase opakuje v daných časových periódach. Spojitý periodický signál sa dá vyjadriť nasledujúcimi matematickými prostriedkami [2]:

$$f(t) = f(t + P) = f(t + 2P) = \dots = f(t + nP) \quad ; \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad (2.2)$$

P – základná perióda

n – poradové číslo $n \in (-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty)$

Zo známej periódy signálu môžeme vyvodiť jeho frekvenciu.

$$f = \frac{1}{P} \quad [\text{Hz}] \quad \text{alebo} \quad \omega = \frac{2\pi}{P} = 2\pi f \quad [\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}] \quad (2.3)(2.4)$$

f – frekvencia, ω – uhlová frekvencia

Existujú i také signály, ktoré majú hodnoty komplexné. Príkladom takého signálu je *komplexná exponenciálna funkcia*

$$f(t) = e^{j\omega t} \quad t \in (-\infty, +\infty) \quad (2.5)$$

Eulerov vzťah pre túto funkciu

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) \quad (2.6)$$

Z absolútnej hodnoty predchádzajúceho výrazu si môžeme predstaviť výraz

$$|e^{j\omega t}| = \sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = 1 \quad (2.7)$$

ako jednotkový rotujúci vektor v komplexnej rovine s uhlovou rýchlosťou ω .

2.1.2 Aperiodický (neperiodický) spojitý signál

Je taký signál, ktorý sa oproti periodickému signálu v čase neopakuje, čiže nemá periódu. V tých časových okamžikoch, v ktorých signál nevnímame, predstavujeme si, že má výchylku nulovú. V reálnom svete sú tieto signály oveľa častejšie.

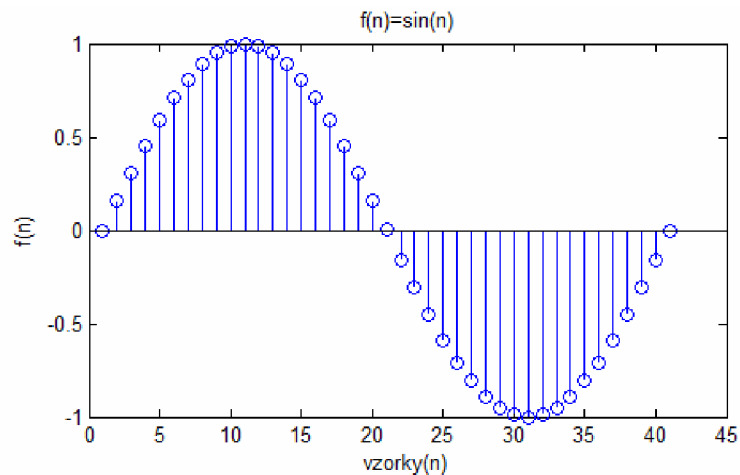
2.2 Diskrétny signál

Digitalizovanie spojitého signálu je dôležitým krokom prevedenia signálu na vhodný tvar pre číslicové zariadenia. Diskrétny signál sa dá vytvoriť zo spojitého signálu pomocou vzorkovania. Vzorkovaný signál $f(n)$ sa skladá z hodnôt amplitúd v daných bodoch pôvodného signálu – $n \in (-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty)$. Vzorkovanie sa deje v pravidelných časových intervaloch – T_n . Frekvencia vzorkovania pri vzorkovanej

perióde T_n sa rovná $f_n = \frac{1}{T_n}$. Pri voľbe frekvencii vzorkovania musíme dodržať Nyquist-Shannonovo *pravidlo vzorkovania*, podľa ktorého frekvencia vzorkovania musí byť najmenej 2x väčšia, než je najväčšia frekvenčná zložka signálu.

$$f_n \geq 2f_{\max} \quad (2.8)$$

V opačnom prípade nastane nežiadúci efekt tzv. antialiasing, ktorý znamená skreslenie frekvenčného spektra signálu. Strácame i informácie o signále a rekonštrukcia signálu sa stane nepresnou či nemožnou.



Obrázok 2.2: Diskrétny signál

2.3 Fourierova transformácia

Slúži k tomu, aby sme získali spektrum signálu $f(t)$ vo frekvenčnej oblasti $F(\omega)$. Túto transformáciu definujeme vzťahom

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.9)$$

Spätná transformácia má predpis:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.10)$$

Pôvodný signál $f(t)$ sa uplatňuje v časovom intervale $t \in (-\infty, \infty)$, čo nie je optimálnym pre analýzu signálov, lebo každý signál musí mať začiatok i koniec. Spektrum takýchto signálov nie je tak definovaný. Možným krokom je rozšíriť si signál s tým, že v ostatných časových okamžikoch, kde signál nie je definovaný, ho nahradiť samotnou nulou, alebo periodicky si rozšíriť. Všetky podobné manipulácie však ovplyvňujú spektrum pôvodného signálu. V praxi sa tak používa vzorkovanie signálu s konečným počtom vzoriek. Tento proces sa nazýva Diskrétna Fourierova transformácia (DFT).

2.4 Diskrétna Fourierova transformácia (DFT)

DFT je postup vzorkovania spojitého obrazu v kmitočtovej oblasti. Aby sme postúpili k definícii tejto transformácie, zavedieme ešte jeden pojem *Konečná Fourierova transformácia*, ktorá pracuje s konečným počtom vzoriek N .

$$F_{kon}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-j\omega n} \quad (2.11)$$

Tento obraz je naďalej spojité a periodický, ale nesie menej informácií oproti prípadu (2.9), čo znižuje aj detailnosť kmitočtovej osi.

Ako sme už hovorili vzorkovanie prebieha v kmitočtovej oblasti. Vzorkované body

značíme obecné ako

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.12)$$

Diskrétna Fourierova transformácia potom vyzerá nasledovne:

$$F_{kon}(\omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-j\omega_k n} \quad (2.13)$$

Takto získané spektrum je periodické s periódou $T = 2\pi$, ktorú sme rovnomerne rozložili na N počet vzoriek podľa vzťahu (2.12) na intervale $(0, 2\pi)$ alebo $(-\pi, \pi)$.

N - počet vzoriek

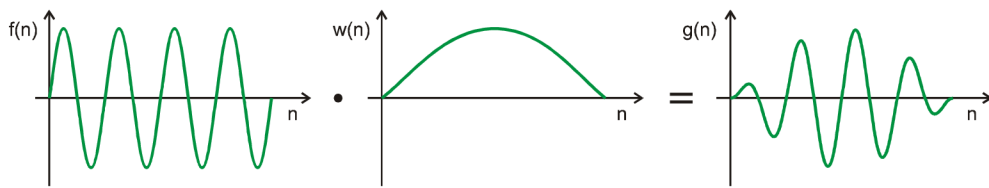
n - poradové číslo vzoriek

ω_k - jednotlivé body spektra

3 OBECNE O ČASOVÝCH OKNÁCH

Časové okná používame k vylepšeniu výsledkov DFT (FFT). Aplikovanie okna sa robí vynásobením pôvodného signálu s matematickým výrazom okna. Toto násobenie je možné aj v tvare spojitém, ale prakticky sa to nepoužíva. To znamená, že by sa dalo prehodiť poradie vzorkovania signálu a aplikácie okna.

$$g(n) = f(n)w(n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.1)$$



Obrázok 3.1: Aplikovanie časového okna

Najjednoduchším oknom je *Dirichletovo okno*, ktoré má tvar obdĺžnika. Toto okno si môžeme zobraziť nasledovným matematickým výrazom

$$w(n) = \begin{cases} 1, & \text{pre } n = 0, 1, \dots, N-1 \\ 0, & \text{pre } n < 0, n > N-1 \end{cases} \quad (3.2)$$

Aj pre zložitejšie okná platí:

1. mimo oblasti ich definície majú hodnotu 0
2. sú symetrické a na hranici symetrie (na strede) nadobúdajú hodnotu 1 (normalizovaná hodnota)
3. na oboch koncoch sú hodnoty blízke k 0

Nadalej bude používaný postup: vzorkovanie, aplikovanie okna a FFT. Takže budú použité *diskrétna okná*, ktoré sa skladajú z N vzoriek. V prípade, že vstupný signál existuje iba v krátkom časovom úseku, alebo sme schopný skúmať iba čiastočne, je potrebné ho periodicky rozšíriť. Otázkou je, že aký je ten úsek, s ktorým potom predĺžujeme signál.

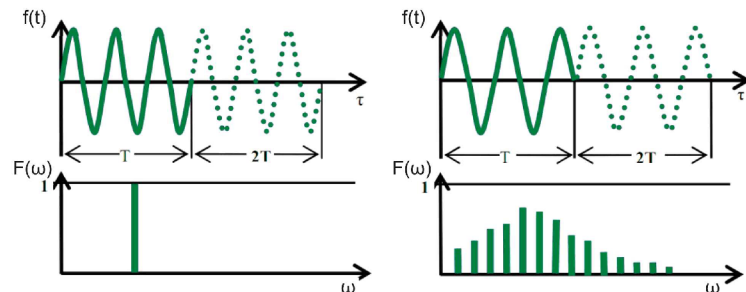
Najlepší prípad nastane vtedy, keď pri periodickom signále je vybraná celá perióda, alebo jeho celočíselné násobky. Tým horším je, keď vystrihnutý úsek nie je

celočíselným násobkom periódy signálu. Vtedy na hranici spojení týchto jednotlivých úsekov sa bude vykazovať *nespojitosť*. Tento jav nazývame *presakovaním spektra* (spectral leakage) a je dôsledkom skrátenia a následne predĺženia signálu. Preto je vhodnejšia taká funkcia okna, pri ktorej po vynásobení signálom na oboch koncoch nášho úseku dostaneme hodnotu blízku k nule.

Periodicky rozšírené spektrum signálu po vynásobení časovým oknom je

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n)f(n)e^{-j\omega n} \quad (3.3)$$

Úroveň vylepšenia DFT sa dá zvyšovať pomocou vhodných zmien funkcie okna a jeho optimalizáciou pre konkrétny účel. Keďže pracuje s konečným počtom vzoriek, je potrebné si vyrezat' časť pôvodného signálu, ktorú potom vzorkujeme podľa vhodných kritérií. Keď tento výrez neobsahuje celočíselný počet periód, tak dôjde k rozmazaniu hlavnej spektrálnej hodnoty a poklesu jej amplitúdy. Energia harmonického signálu potom vsiakne do postranných frekvenčných pásov. Najhorší prípad nastane vtedy, keď máme vyrezanú jeden a pol periódy. Vo väčšine prípadov nevieme dopredu, že aká je frekvencia skúmaného signálu. Zvolíme si najprv čo najvyššiu frekvenciu vzorkovania a potom doladíme. Nasledovný obrázok ilustruje jav presakovania spektra.



Obrázok 3.2: Presakovanie spektra

Najznámejšie a najpoužívanéjšie časové okná sú rozobrané v nasledujúcich podkapitolách. Okrem týchto okien ešte existuje skupina ďalších okien s odlišnými parametrami a charakteristikami.

3.1 Funkcie jednotlivých časových okien

Ako sme už poznamenali v úvode hlavnej kapitoly, každé okno si máme predstaviť ako jednu matematickú funkciu. Keďže ide o diskrétna okná, ich dĺžku charakterizujeme počtom vzoriek, z ktorých sa skladajú. Na vodorovnej osi x tak nájdeme namiesto času postupnosť vzoriek n , u ktorých sú dva spôsoby vyjadrenia. Ako prvá vzorka môže mať hodnotu 0 a posledný $N-1$, alebo $-\frac{N}{2}$ a $\frac{N}{2}-1$.

V nasledujúcich podkapitolách rozoberieme niekoľko z nich. Parameter N je zvolený $N=10000$ pre presnejšie výpočty jednotlivých charakteristík okien. Z dôvodu hustoty vzoriek potom vyzerá odozva okien na obrázkoch ako spojitá funkcia.

POZN. – v kap. 3 sú jednotlivé funkcie okien prevzaté z použitej literatúry [1].

3.1.1 Obdĺžnikové okno

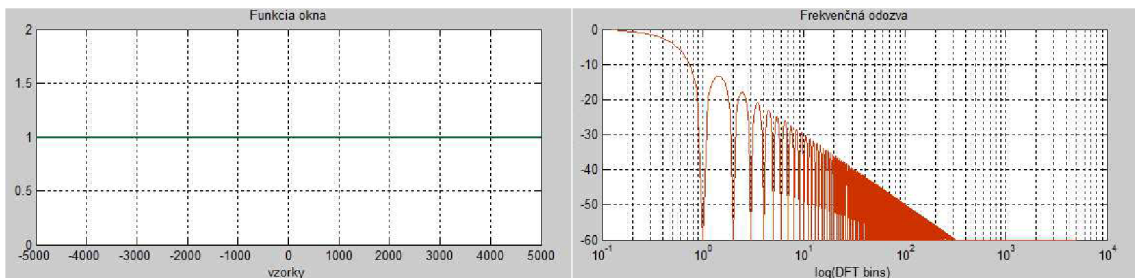
Je známe aj ako „Dirichletovo okno“, je to najjednoduchšie okno. Pri hranách nie sú žiadne modifikácie, čo spôsobí celkové prevzatie úseku signálu, čiže vynásobenie signálu s 1. Spektrum je značne rozťahnuté a amplitúda spektra pre hlavnú frekvenciu je veľmi skreslená.

Definícia:

$$w(n)=1 \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (3.4)$$

MATLAB:

```
N = 10000; % počet vzoriek
n = (-N/2):1:(N/2-1); % vektor diskrétného času
w = ones(1,N); % funkcia okna
plot(n,w) % vykreslenie okna
```



Obrázok 3.3: Obdĺžnikové okno a jeho frekvenčná odozva

3.1.2 Trojuhelníkové okno

Trojuhelníkové okno (známe aj ako Bartlett window) podľa jeho vlastností sa podobá najme na obdĺžnikové okno, iba jeho hlavný lalok je dvakrát širší (medzi prechodmi nulou) a utlmenie postranného laloku je takisto dvakrát väčšie (-26 dB).

Definícia:

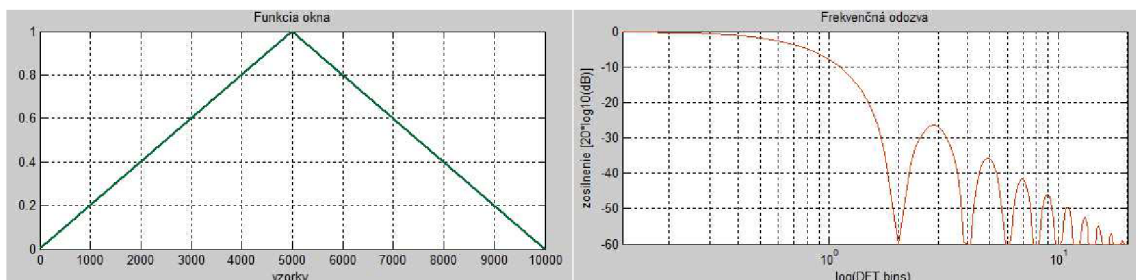
$$w(n) = 1 - \frac{|n|}{N/2} \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.5)$$

MATLAB:

```

N = 10000; % počet vzoriek
n = -(N/2):1:(N/2-1); % vektor diskrétného času
arg = n.*(2*pi/N); % výpočet argumentu funkcie
wcast = cos(arg); % súčasný predpis funkcie okna
w = 1 - (abs(n) / (N/2)); % funkcia okna
plot(n,w) % vykreslenie okna

```



Obrázok 3.4: Triangular okno a jeho frekvenčná odozva

3.1.3 Cosinusové okno

Toto okno tvorí skupinu niekoľkých okien, ktoré sú odlišné iba v parametre α . Tento parameter udáva mocninu cosinusovej funkcie. Hodnoty má celočíselné od 1 až do 4. Pri hodnote 2 ide vlastne o okno Hanning. V príklade nižšie $\alpha = 1$.

Definícia:

$$w(n) = \cos^\alpha \left(\frac{\pi n}{N-1} \right) \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.6)$$

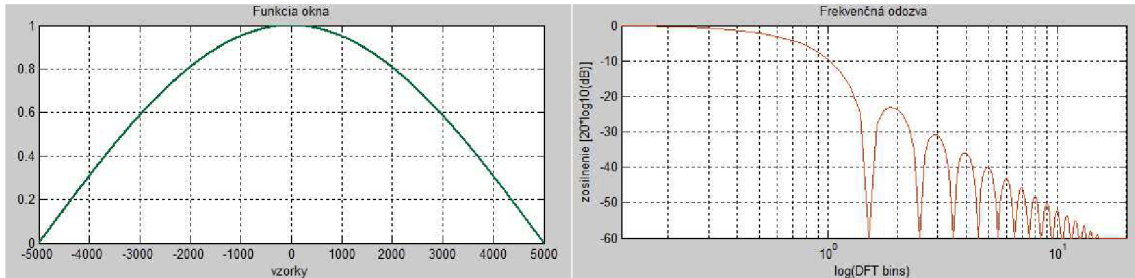
$$w(n) = \sin^\alpha \left(\frac{\pi n}{N-1} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.7)$$

MATLAB:

```

N = 10000; % počet vzoriek
a = 1; % stupeň mocniny cosinusového okna
n = (-N/2):1:(N/2-1); % vektor diskretného času
arg = n.*(pi/N); % výpočet argumentu funkcie
wcast = cos(arg); % súčasný predpis funkcie okna
w = (wcast).^a; % funkcia okna
plot(n,w) % vykreslenie okna

```



Obrázok 3.5: Cosine okno a jeho frekvenčná odozva

3.1.4 Okno Hanning

Toto okno využíva trigonometrickú funkciu cosinus, ktorá má na krajoch hodnotu blízku k 0. Je označené po matematikovi Juliusu von Hannovi ale je známe aj ako zvýšený cosinus (raised cosine) alebo generalized Hamming. Je jedno z najpoužívanejších časových okien.

Definícia:

$$w(n) = 0,5 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right) \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.8)$$

alebo

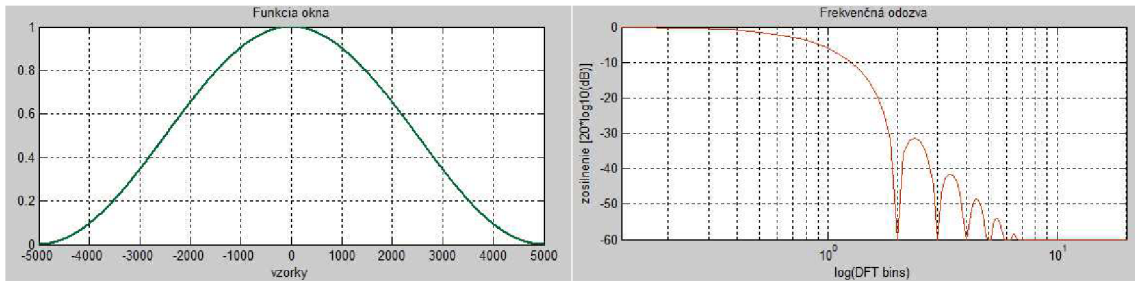
$$w(n) = 0,5 \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{N-1} \right) \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.9)$$

MATLAB:

```

N = 10000; % počet vzoriek
n = (-N/2):1:(N/2-1); % vektor diskretného času
arg = n.*(2*pi/N); % výpočet argumentu funkcie
wcast = cos(arg); % súčasný predpis funkcie okna
w = 0.5 + 0.5*(wcast); % funkcia okna
plot(n,w) % vykreslenie okna

```



Obrázok 3.6: Hanning okno a jeho frekvenčná odozva

3.1.5 Okno Hamming

Tento typ okna navrhol Richard W. Hamming. Je to modifikovanie okna Hanning. Má ešte väčší vplyv na utlmenie bočných lalokov. Je definované pomocou dvoch koeficientov – α a β . Najúčinnnejšie potlačuje prvý vedľajší lalok, keď má prvý koeficient $\alpha = \frac{25}{46} \approx 0,54$. Z tohto dostaneme, že druhý koeficient sa rovná $\beta = 1 - 0,54 \approx 0,46$.

Definícia:

$$w(n) = 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (3.10)$$

alebo

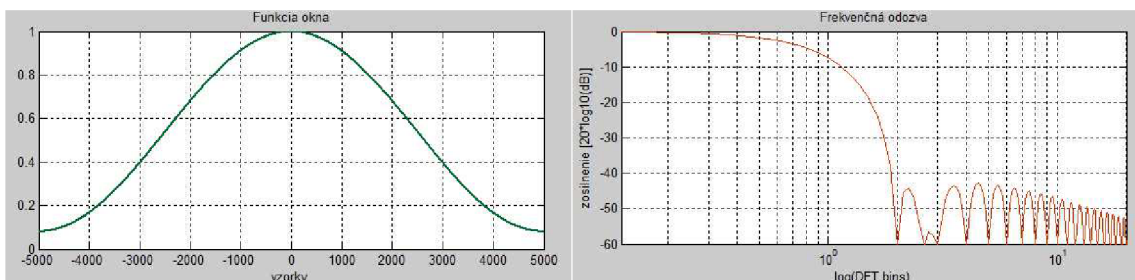
$$w(n) = 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.11)$$

MATLAB:

```

N = 10000;
n = (-N/2):1:(N/2-1);
arg = n.*(2*pi/N);
wcast = cos(arg);
w = 0.54 + 0.46*(wcast);
plot(n,w)
% počet vzoriek
% vektor diskretného času
% výpočet argumentu funkcie
% súčasný predpis funkcie okna
% funkcia okna
% vykreslenie okna

```



Obrázok 3.7: Hamming okno a jeho frekvenčná odozva

3.1.6 Okno Blackman

Oproti okien Hanning a Hamming, kde sú použité iba 2 koeficienty, toto okno pozostáva zo súčtu troch posunutých jadier a_1, a_2, a_3 . Žiadna z týchto koeficientov nemôže byť 0. Prvé dva koeficienty sú stanovené u hodnotách $\omega = 3,5\left(\frac{2\pi}{N}\right)$ a $\omega = 4,5\left(\frac{2\pi}{N}\right)$, čiže na pozíciách 3. a 4. vedľajšieho laloku, v strede Dirichletového jadra. Čím viac koeficientov použijeme, tým lepšie výsledky môžeme získať. Základným predpisom je

$$\sum_{m=0}^{N/2} a_m = 1.0 \quad (3.12)$$

$$a_0 = \frac{7938}{18608} \cong 0,42 \quad ; \quad a_1 = \frac{9240}{18608} \cong \frac{1}{2} \quad ; \quad a_2 = \frac{1430}{18608} \cong 0,08 \quad \Rightarrow$$

Musí platiť: $a_1 + a_2 + a_3 = 1$

Definícia:

$$w(n) = 0,42 + 0,50 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$$

$$n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.13)$$

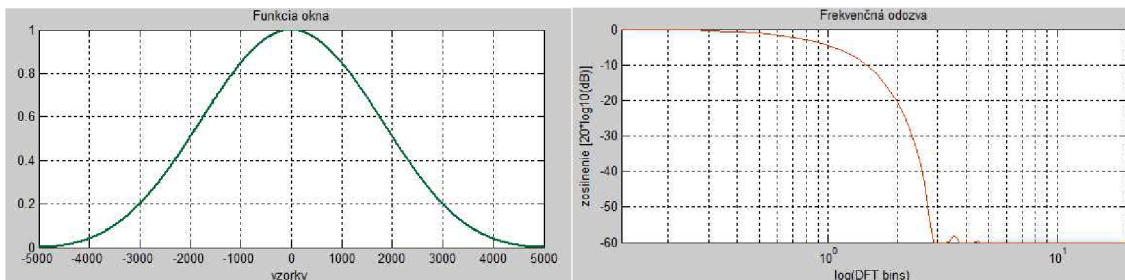
$$w(n) = 0,42 - 0,50 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.14)$$

MATLAB:

```
N = 10000; % počet vzoriek
n = (-N/2):1:(N/2-1); % vektor diskretného času
arg = n.*(2*pi/N); % výpočet argumentu funkcie
wcast = cos(arg); % súčasný predpis funkcie okna
% funkcia okna

w = 0.42 + 0.5*cos(arg) + 0.08*cos(arg.*2);
plot(n,w) % vykreslenie okna
```



Obrázok 3.8: Blackman okno a jeho frekvenčná odozva

3.1.7 Okno 4 členný Blackman-Harris

Toto okno tvorí ďalšiu skupinu okien nazvané ako *4 členné okná*, u ktorých ide o vymieňanie prednosti medzi šírkou hlavného laloku a úrovňou vedľajšieho laloku pomocou ich tvoriacich koeficientov $a_0 - a_3$. Kým u 3 členných oknách max. útlm postranného laloku môžeme dosiahnuť -67 dB, u 4 členných až -92 dB.

Definícia:

$$w(n) = 0,35875 - 0,48829 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0,14128 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) - 0,01168 \cos\left(\frac{8\pi n}{N}\right)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (3.15)$$

MATLAB:

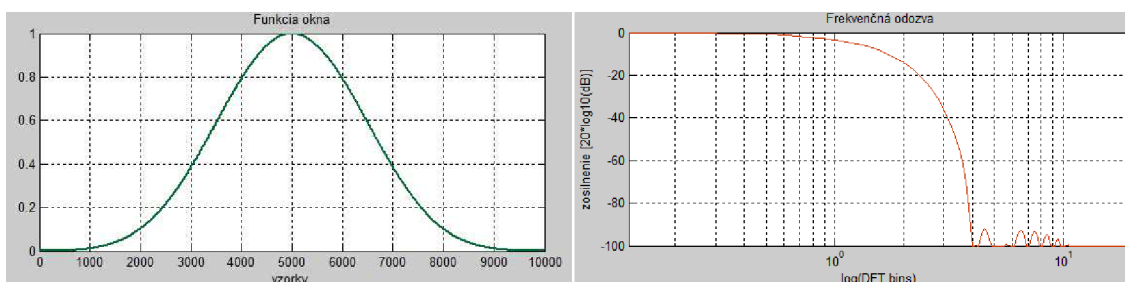
```

N = 10000;           % počet vzoriek
n = 0:1:N-1;       % vektor diskretného času
arg = n.*(2*pi/N); % výpočet argumentu funkcie
wcast = cos(arg);  % súčasný predpis funkcie okna
                    % funkcia okna

w = 0.35875 - 0.48829*cos(arg) + 0.14128*cos(arg.*2) -
    - 0.01168*cos(arg.*3);

plot(n,w)          % vykreslenie okna

```



Obrázok 3.9: Blackman-Harris okno a jeho frekvenčná odozva

3.1.8 Okno Flat top

Toto okno bolo navrhnuté pre maximalizovanie presnosti pri odpočítaní amplitúdy signálu za cenu veľkého rozmazania spektra. U vrcholu okna dáva až 4,64 krát väčšiu váhu signálu, pričom u oboch koncoch je váha dokonca záporná, až -0,33. V dnešnej dobe už vyvíjali novú procedúru na stanovenie jeho koeficientov, ktorá používa viac objektovú optimalizáciu a vhodné vyberanie limitov. Navyše s 5 členným Flat top funkciou dosiahli až -95,15 dB útlm postranného laloku.

POZN.: odozva na obrázku 3.11 je normalizovaná, hlavný lalok má hodnotu 1 namiesto 4,64.

Definícia:

$$w(n) = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right) - a_3 \cos\left(\frac{6\pi n}{N-1}\right) + a_4 \cos\left(\frac{8\pi n}{N-1}\right)$$

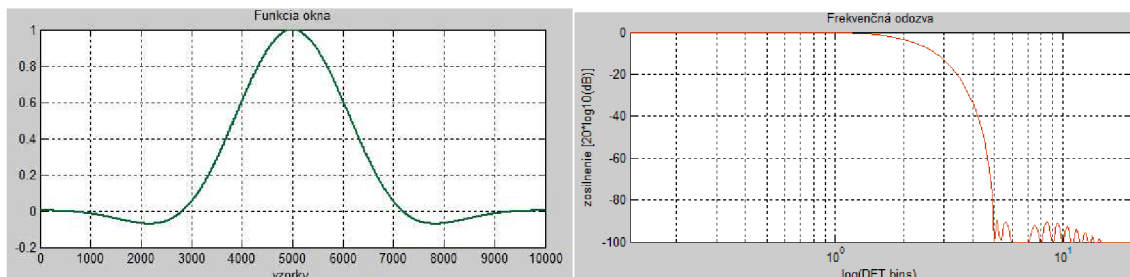
$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.16)$$

$$a_0 = 0,209671, \quad a_1 = 0,407331, \quad a_2 = 0,281225, \quad a_3 = 0,092669, \\ a_4 = 0,009104$$

MATLAB:

```
N = 10000; % počet vzoriek
n = 0:1:N-1; % vektor diskretného času
arg = n.*(2*pi/N); % výpočet argumentu funkcie
wcast = cos(arg); % súčasný predpis funkcie okna
% funkcia okna

w = 0.209671 - 0.407331*cos(2*pi*n/(N-1)) +
    0.281225*cos(4*pi*n/(N-1)) - 0.092669*cos(6*pi*n/(N-1)) +
    0.009104*cos(8*pi*n/(N-1));
plot(n,w) % vykreslenie okna
```



Obrázok 3.10: Flat top okno a jeho frekvenčná odozva

Okrem týchto existujú ešte rôzne typy časových váhových a konštruovaných okien, napr.: Gaussian, Bartlett – Hann, Kaiser, Nuttall, Blackman – Nuttall, Bessel, Hann – Poisson, Exponential or Poisson, atď.

V rôznej literatúre sa dá čítať o týchto oknách [1]. Pri definovaní presných hodnôt jedného okna môžu byť menšie rozdiely. Ich koeficienty boli stanovené tak, aby vyhovovali konkrétnemu cieľu. Niekedy je vhodnejšie používať čísla s menším počtom cifier, čo znamená menej práce pri výpočtoch.

4 ČÍSELNÉ CHARAKTERISTIKY OKIEN

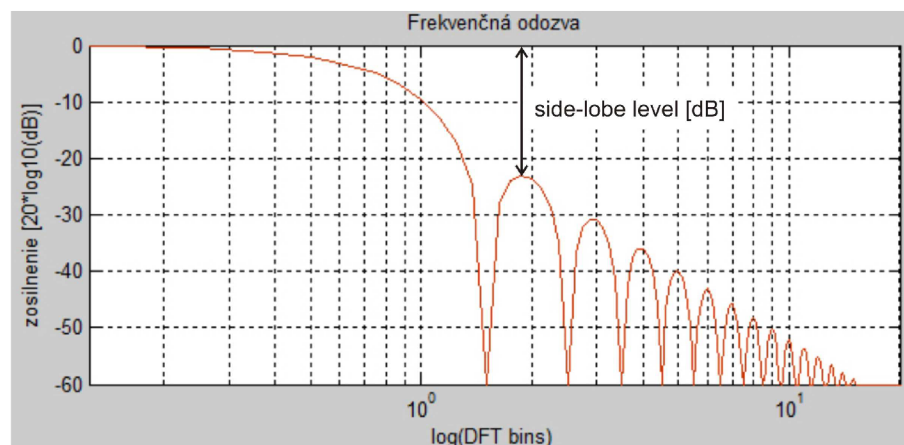
Pri voľbe optimálneho časového okna k nášmu periodickému či neperiodickému diskretnému signálu berieme do úvahy niekoľko hľadísk. Existujú také okná, ktoré sa používajú konkrétne pri harmonických signáloch, niektoré zase sú pri neperiodických impulzových (krátkodobých) signáloch výhodnejšie. V nasledujúcich podkapitolách sa zaoberáme jednotlivými číselnými charakteristikami okien.

POZN.: informácie uvedené v nasledujúcich podkapitolách boli čerpané z literatúry [1]

4.1 Úroveň najvyššieho bočného laloka

Vo frekvenčnej oblasti funkcia okna má zúbkovanú odozvu. Tieto zuby majú najvyššiu hodnotu v miestach jednotlivých bodov vzorkovania (DFT bins). Pri aplikácii okna je pre náš signál dôležité, aby bočné laloky boli čo najviac utlmené, v prvom rade ten prvý bočný.

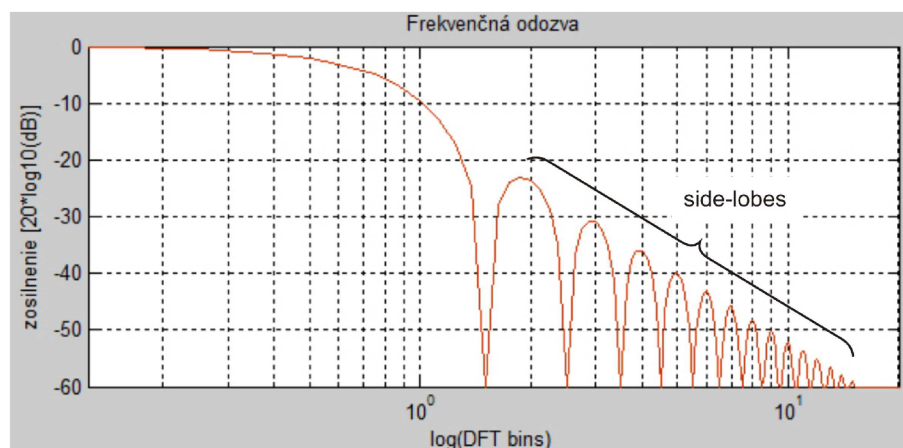
Táto charakteristika má za jednotku [dB] a ide o normalizovanú stupnicu. Tento pokles je prirovnávaný oproti hlavnému laloku. Hlavný lalok má hodnotu 1 (jednotkové zosilnenie okna), čo v decibeloch znamená $20 \cdot \log_{10}(1) = 0$ dB.



Obrázok 4.1: Úroveň najvyššieho bočného laloka

4.2 Zoslabenie bočných lalokov

Charakterizuje pokles bočných lalokov vo frekvenčnej analýze signálov. V prípade, keď si zvolíme logaritmickú stupnicu na frekvenčnej osi (vodorovná osa), môžeme si vyčítať strmosť pádu na oktávu alebo na dekádu. V tabuľke (4.1) sú zhrnuté hodnoty vyjadrené v [dB/oct].



Obrázok 4.2: Zoslabenie bočných lalokov

4.3 Ekvivalentná šumová šírka pásma

Každá vzorka výsledného spektra vo svojej hodnote obsahuje aj naakumulovaný širokopásmový šum obsadený v celej šírke pásma spektra okna $W(\omega)$. Zdroj akumulovaného šumu (AŠ) môžeme vyjadriť nasledovne:

$$A\check{S} = N_0 \int_{-\pi/T}^{+\pi/T} |w(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (4.1)$$

N_0 – je šírka šumu na jednotku

Šumy a iné rušivé signály ovplyvňujú dokonalú analýzu signálov. Pre najefektívnejšie detegovanie sa snažíme tento akumulovaný šum redukovať na čo najmenšiu mieru. Pre popis tejto šumovej šírky pásma slúži parameter *ENBW*.

Definícia:

„ENBW je definované šírkou pásma ideálneho pravouhlého filtra s rovnakou výškou

hlavného laloku modulovanej frekvenčnej charakteristiky, ktorý by naakumuloval rovnaký šumový výkon“ [3].

Výkon akumulovaného šumu P_N okna sa dá vyjadriť nasledovným vzťahom:

$$P_N = \frac{N_0}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{+\pi/T} |W(\omega)|^2 d\omega = \frac{N_0}{T} \sum_{n=0}^{N-1} w^2(n) \quad (4.2)$$

N_0 – je spektrálna výkonová hustota aditívneho bieleho šumu [W/Hz]

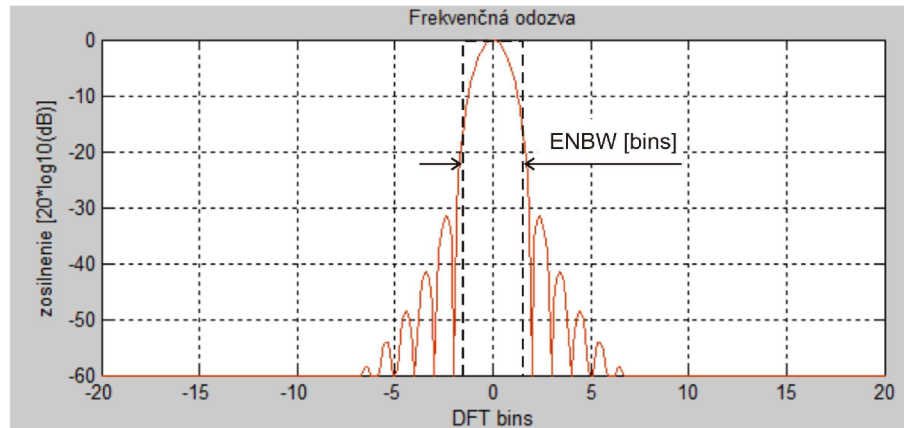
Šumový výkon na výstupe pravouhlého filtra je daný súčinom N_0 , $ENBW$ a jeho výkonového zisku, ktorý je rovnaký ako *maximálny výkonový zisk* okna $W^2(0)$, čo nie je iné, než kvadrát súčtu zosilnení jednotlivých jadier spektra.

$$W^2(0) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n) \right)^2 \quad (4.3)$$

Z toho dostaneme potom vzťah pre $ENBW$

$$ENBW = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)}{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n) \right)^2} \quad [Hz] \quad (4.4)$$

V tabuľke 4.1 (kap. 4.8) je táto charakteristika vyjadrená v binoch, čiže vydelená binovým rozstupom, číslom $\frac{1}{N}$.



Obrázok 4.3: Ekvivalentné šírkové pásmo šumu

4.4 Koherentný zisk (Coherent Gain)

Koherentný zisk (známe aj ako súčet postupných ziskov) blízko súvisí s pojmom ENBW (kap. 4.3). Je definovaný ako veľkosť hlavného laloku periodického spektra okna. Vypočítame ho podľa vzťahu

$$KZ = \sum_{n=1}^{N-1} w(n) = W(0) \quad (4.5)$$

V prípade, keď skúmame iba jednu periódu oknovej funkcie, vzorec sa mení na

$$KZ = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \quad (4.6)$$

4.5 Polbinový pokles odstupú signálu od šumu

Táto charakteristika opisuje straty, ktoré vznikajú medzi jednotlivými vzorkami DFT.

Pri použití FFT si najprv zvolíme rozlíšenie spektra $\Delta f_s = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT_s}$ (aký je frekvenčný

rozdiel medzi dvoma binami) kde f_s je frekvencia vzorkovania. Tieto jednotlivé frekvencie sú vzorkované body spektra a sú vlastne výstupné body DFT alebo nazvané ako DFT bins. Vybudenie oboch týchto binov bude rovnaké a menšie u koherentného signálu od šumu. Túto charakteristiku pozorujeme, medzi týmito binmi – čiže pri frekvenciách

$$\omega_{k+1/2} = \frac{1}{NT_s} (k + 1/2) = (k + 1/2) \frac{f_s}{N}.$$

Keď vo vzorci (2.13) si ω_k nahradíme frekvenciou $\omega_{k+1/2}$, tak sme schopný vypočítať koherentné zosilnenie pre tieto medzné frekvencie:

$$\begin{aligned} F(\omega_{1/2})|_{\text{signál}} &= \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \exp(-j\omega_{1/2}n) = \left| \omega_{1/2} = \frac{1}{2} \frac{\omega_s}{N} = \frac{\pi}{N} \right| = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \exp\left(-j \frac{\pi}{N} n\right) = \frac{\left| W\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_s}{N}\right) \right|}{W(0)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Polbinový odstup signálu od šumu sa dá vyjadriť ako pomer koherentného zisku, ktorý sa počíta v bodoch medzi jednotlivými vzorkami ($\omega_{k+1/2}$) s koherentným ziskom vo bodoch (ω_k):

$$SL = \frac{\left| \sum_{n=0}^{N-1} w(n) \exp\left(-j \frac{\pi}{N} n\right) \right|}{\sum_{n=0}^{N-1} w(n)} \quad (4.8)$$

Vypočítané hodnoty jednotlivých okien sú zhrnuté v Tabuľke (4.1).

4.6 Maximálna strata odstupu signálu od šumu

Táto strata je definovaná súčtom *polbinového poklesu odstupu signálu od šumu* (SL) okna a *ziskom spracovania* (Processing Gain – PG) – obidve v decibeloch.

„Zisk spracovania je pomer výstupného odstupu signálu od šumu k odstupu vstupnému

$$PG = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)}{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w(n) \right)^2} = \frac{1}{ENBW} \quad (4.9)$$

v prípade koherentného harmonického signálu a aditívneho bieleho šumu na vstup“ [3]. Je to prevrátená hodnota ekvivalentnej šumovej šírky pásma vyjadreného v binoch. Je to číslo menšie než 1.

Po znalosti týchto dvoch pojmov maximálnu stratu odstupú signálu od šumu vypočítame podľa vzťahu

$$WCPL = SL + PG \quad (4.10)$$

Hodnoty sa pohybujú medzi 3 a 4 dB.

4.7 Korelácia prekrývania 50% a 75%

Ako sme už pripomenuli, pri použití FFT si najprv zvolíme potrebný počet vzoriek N pre nastavenie rozlíšenia spektra analýzy. Značíme nasledovne

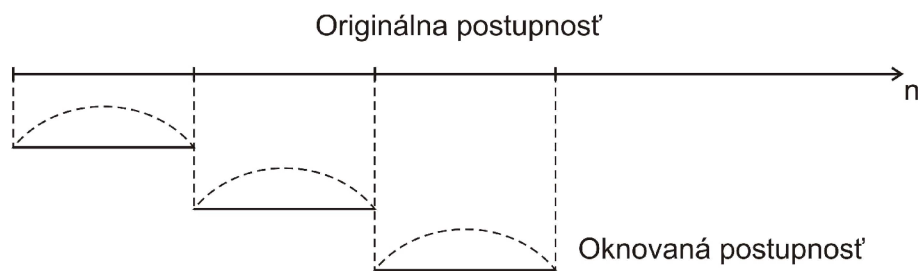
$$\Delta f = \frac{f_s}{N} \quad (4.11)$$

Δf – rozlíšenie

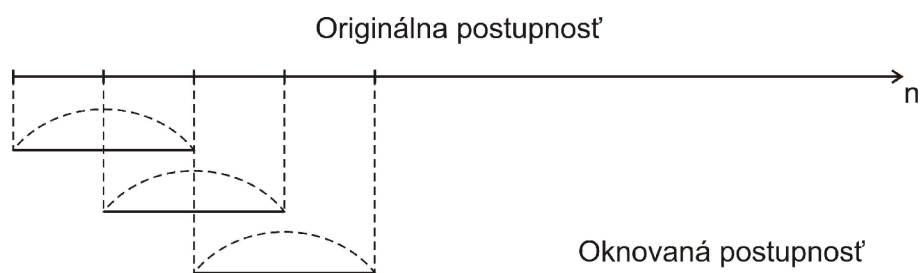
f_s – frekvencia vzorkovania podľa Niquistovo kritéria

Prekrytie je bežne 50% alebo 75%. Parameter „ r “ značí úroveň prekrytia jednotlivých binov DFT v percentách. Pre túto charakteristiku platí vzťah (obrázky prevzaté z [1]):

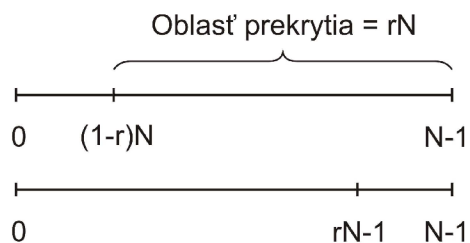
$$OC = \frac{\sum_{n=0}^{rN-1} (w(n) \cdot w(n + (1-r)N))}{\sum_{n=0}^{N-1} w^2(n)} \quad (4.12)$$



Obrázok 4.4: Rozloženie postupnosti pre spracovanie bez prekrytia



Obrázok 4.5: Rozloženie postupnosti pre spracovanie s prekrytím



Obrázok 4.6: Relácia medzi koreláciou na prekrytom intervale

4.8 Porovnanie číselných charakteristík okien

V predchádzajúcich kapitolách sme definovali jednotlivé číselné charakteristiky okien, ktoré nám pomôžu pri voľbe najúčinniejšieho z nich pri analýze nášho signálu. Nasledujúca tabuľka 4.1 obsahuje tieto charakteristiky, ktoré boli vypočítané pomocou programu MATLAB. Pre každé okno je vytvorený vlastný .m – súbor. Tieto súbory majú výstup podobný ako je príklad v kap. 4.8.

Okno	Highest Side-Lobe Level [dB]	Equivalent Noise BW [bins]	Coherent Gain	Scallop Loss [dB]	Worst Case Processing Loss [dB]	Overlap Correlation 50 %	Overlap Correlation 75 %
Obdĺžnikové	-13,39	1,00	1,00	3,92	3,92	50,0	75,0
Trojuholníkové	-26,53	1,33	0,49	1,82	3,07	25,0	71,9
Cosine (a = 1)	-23,00	1,23	0,64	2,10	3,01	31,8	75,5
Cosine (a = 2)	-31,48	1,50	0,50	1,42	3,18	16,7	65,9
Cosine (a = 3)	-39,35	1,73	0,42	1,07	3,47	8,5	56,7
Cosine (a = 4)	-46,86	1,94	0,38	0,86	3,75	4,3	48,6
Hanning	-31,48	1,50	0,50	1,42	3,18	16,7	65,9
Hamming	-44,19	1,36	0,54	1,75	3,10	23,4	70,7
Blackman	-58,24	1,73	0,42	1,10	3,47	9,0	56,7
Blackman-Harris	-92,03	2,00	0,36	0,83	3,85	3,8	46,0
Flat top	-89,84	3,88	0,21	0,00	5,89	-1,08	2,57

Tabuľka 4-1: Číselné charakteristiky okien

5 POROVNÁVANIE ČASOVÝCH OKIEN

V tejto kapitole sa snažíme porovnať časové okná podľa ich číselných charakteristík. V kap. 3 sú uvedené a navrhnuté niektoré z najpoužívanejších časových okien. Nasledovná kapitola (4) sa zaoberá vhodným opisom týchto charakteristík. *Tabuľka 4.1* zhrňuje všetky tieto znalosti.

Časové okná používame preto, aby sme vylepšili výsledky Fourierovej transformácie, ktorá nám umožňuje sledovať jednotlivé frekvenčné zložky pôvodného signálu vo frekvenčnej oblasti $F(\omega)$. Pri tejto transformácii ale strácame informácie o signále, detailnosť na frekvenčnej osi. To vyplýva z toho, že DFT pracuje s konečným počtom vzoriek, ktoré získame pomocou vzorkovania signálu.

Ešte predtým, že by sme začali porovnávať jednotlivé okná, v predstave si vytvoríme ideálne okno s najužitočnými vlastnosťami:

- prvý postranný lalok bol čo najviac utlmený (side lobe level) – Blackman – Harris (-92,03 dB)
- ekvivalentná šumová šírka pásma bola čo najužšia (ENBW) – obdĺžnikové okno (1,0 bins)
- koherentný zisk bol čo najmenší (coherent gain) – Flat top (0,21)
- polbinový pokles odstupe signálu od šumu by tiež mal byť čo najmenší (scalloping loss) – Flat top (0,0 dB)
- maximálna strata odstupe signálu od šumu takisto najmenšia (WCPL) – Cosine ($a = 1$) – (3,01 dB)
- koreláciu prekrytia zase najmenšia (overlap correlation) – Flat top (2,57 %)

Samozrejme okno so zvolenými vlastnosťami sa nedá predstaviť. Jednou možnou voľbou je zvoliť si to okno, ktoré splňuje najviac našich kritérií. Najznámejším a najviac vyvinutým oknom z tabuľky (4-1) je okno Flat top. Hľadanie jednotlivých koeficientov je zložitou úlohou. Používajú k tomu analytické výpočty, objektové optimalizácie pri vyberaní vhodných limitov. U okna Flat top navrhli viaceré verzie, ktoré sa líšia ako aj v počte členov matematického výrazu tak aj v jednotlivých koeficientoch [8]. V budúcnosti sa plánuje dosiahnutie až -248 dB poklesu bočného laloku.

Okná s WCPL = 3,8 majú príliš veľkú stratu energie a tak aj presnosti, a preto sa tak často nepoužívajú. Také je okno obdĺžnikové, Cosinové okno ($a = 4$), ale aj Blackman-Harris a Flat top. Lenže u oknách Blackman-Harris a Flat top sú zase iné charakteristiky oveľa lepšie, než u ostatných okien. Keď sa pozrieme na utlmenie bočných lalokov,

obidve majú úroveň okolo -90 dB a hodnota korelácie prekrývania je tiež pozoruhodná.

Každé okno má svoje výhody a nevýhody. Niektoré sú vhodnejšie pre harmonické signály, niektoré na krátkodobé, impulzové, a niektoré zase univerzálne. Ďalšie kritériá sú, aby vylepšili rozlíšenie frekvenčnej osi, čo vylepší aj detekciu vyvrcholenia frekvenčných špičiek.

Okno	Typ signálu	Frekvenčné rozlíšenie	Presakovanie spektra	Presnosť amplitúdy
Trojuholníkové	univerzálny	dobré	zlé	zlé
Hanning	univerzálny	dobré	dobré	zlé
Hamming	univerzálny	dobré	zlé	zlé
Blackman	univerzálny a miešaný	zlé	najlepšie	dobré
Flat top	sínusový	zlé	dobré	najlepšie

Tabuľka 5-1: Voľba časového okna

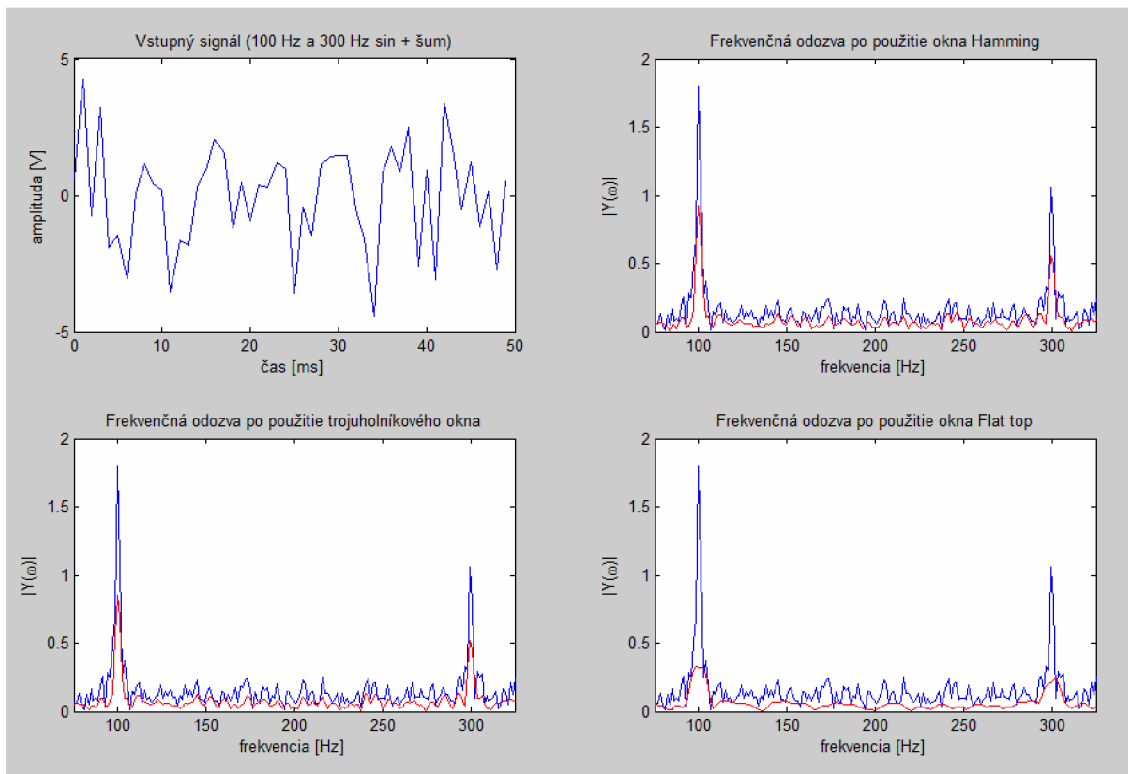
Príklad 1.: máme vstupný signál, v ktorom sú zlúčené 3 signály. Prvý je Gaussov šumový signál generovaný v MATLABe, druhý sínusový signál s amplitúdou 2 a frekvenciou 100 Hz, a tretí sínusový signál má amplitúdu 1 u frekvencii 300 Hz. Takýto signál sa dá vyjadriť v časovej oblasti nasledovne:

$$y(t) = noise + 5 \cdot \sin(200\pi t) + 3 \cdot \sin(600\pi t) \quad (5.1)$$

$N = 350$	počet vzoriek
$f_s \geq 2 \cdot f_{\max} = 700 \text{ Hz}$	frekvencia vzorkovania v [Hz]
$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{700}{350} = 2 \text{ Hz}$	frekvenčné rozlíšenie v [Hz]
$\omega_s = \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{100} = 0,031415 \text{ rad/s}$	frekvencia vzorkovania v [rad/s]

Výsledný signál bude takisto periodický, keď pomer $\frac{P_1}{P_2} =$ racionálne číslo.

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1/100}{1/300} = 3 \quad \text{je periodické s periódou } 100P_1 = 300P_2 = \underline{\underline{100 \text{ Hz}}}$$



Obrázok 5.1: Príklad na chovanie sa frekvenčnej odozvy pri použití časových okien trojuholník, Hamming a Flat top

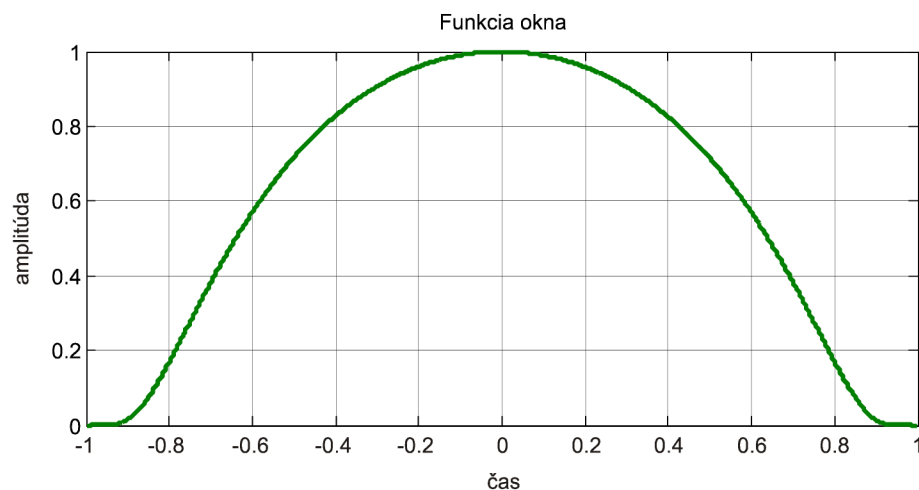
6 ČASOVÉ OKNO VYUŽÍVAJÚCE HLADKÝCH FUNKCIÍ

V predošlých kapitolách sme sa snažili poukázať na výhody používania časových okien, poukázať na rozdiely medzi nimi a vytvoriť základný prehľad o ich vlastnostiach, kedy a na aký typ signálu sú vhodné.

V tejto kapitole zavedieme funkciu časového okna, ktoré používa exponenciálnu funkciu.

$$w(t) = e^{\frac{t^2}{t^2-1}} \quad t \in (-1, +1) \quad (6.1)$$

Táto funkcia má deriváciu všetkých rádov, čiže je *nekonečne diferencovateľná*. V nasledujúcej kapitole sa oboznámime s výrazmi, ktoré sú potrebné na porozumenie tejto vlastnosti.



Obrázok 6.1: Funkcia exponenciálneho okna

6.1 Hladká funkcia

Funkcia $w(t)$ sa nazýva hladkou funkciou na otvorenej množine M v tom prípade, keď má všetky derivácie všetkých rádov. Značíme nasledovne [9]:

$$w(t) \in C^\infty(M) = \bigcap_k C^k(M) \quad t \in (-1, +1) \quad (6.2)$$

6.1.1 Spojitosť

Definícia 1: Hovoríme, že $f(x)$ je *spojitá v bode a* , pokiaľ k ľubovoľnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$, že pre všetky x z δ -okolía bodu a je [9]:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (6.3)$$

Veta 1. Keď sú $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bode a , tak potom sú spojité i funkcie $kf(x)$ (kde k je konštanta), $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$, a ak $g(a) \neq 0$, tak je spojitá aj funkcia $f(x)/g(x)$.

Podobná veta platí aj pre spojitosť sprava i zľava. (vid. [9] str. 356)

Ak budeme našu funkciu (6.2) modifikovať parametrami, bude pre nás dôležitá nasledujúca veta.

Veta 2. Funkcia zložená zo spojitých funkcií je spojitá. Podrobnejšie: keď je spojitá $f(x)$ v bode a , $g(z)$ spojitá v odpovedajúcom bode $z_0 = g(a)$, tak funkcia $y = g(f(x))$ je spojitá v bode a . [9].

Veta 3. Obraz derivácie: Keď je funkcia f taká, že derivácia f^{k-1} je absolútne spojitá v každom intervale a keďže $f, \dots, f^k \in L_1(-\infty, +\infty)$, potom pre obraz derivácie platí:

$$F\{f^k\} = (j\omega)^k F\{f\} \quad (6.4)$$

Súvislosť medzi stupňom hladkosti funkcie a rýchlosti konvergence jeho Fourierovho F obrazu k nule v bodoch $\omega \rightarrow \pm\infty$. Keď delíme rovnosť (6.4) výrazom $(j\omega)^k$ a pripomenieme si, že Fourierov obraz vždy konverguje k nule v bodoch $\omega \rightarrow \pm\infty$, dostaneme vetu

Veta 4. Keďže funkcia f^k je absolútne integrovateľná a splňuje podmienky pre FT, potom platí vzťah:

$$|F\{f\}| = \frac{|F\{f^k\}|}{|\omega|^k} \rightarrow 0 \quad (6.5)$$

Za tieto podmienky Fourierov obraz $F\{f\}$ teda konverguje k nule v bodoch $\omega \rightarrow \pm\infty$ rýchlejšie, než funkcia $1/|\omega|^k$. Preto čím viac derivácií funkcie f patrí do priestoru L_1 , tým rýchlejšie jeho F obraz konverguje k nule v bodoch $\omega \rightarrow \pm\infty$. [9].

6.2 Parametrizácia funkcie

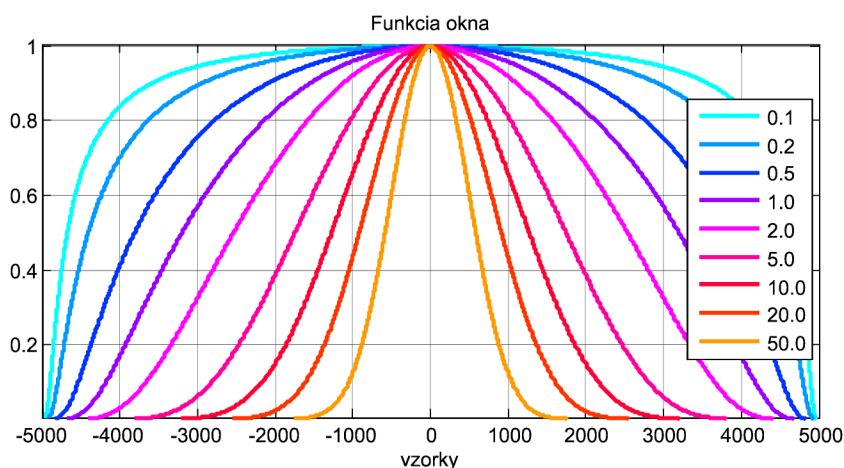
Pomocou zavedenia parametrov sme schopný formovať priebeh funkcie (6.1). Zavedeným parametrom sa snažíme získať čo najlepšie výsledky Fourierovej transformácie. V nasledujúcich podkapitolách použijeme niekoľko z nich, u ktorých stanovujeme definičný obor, z ktorého budeme vyberať niektoré užitočné hodnoty.

6.2.1 Parameter „x“

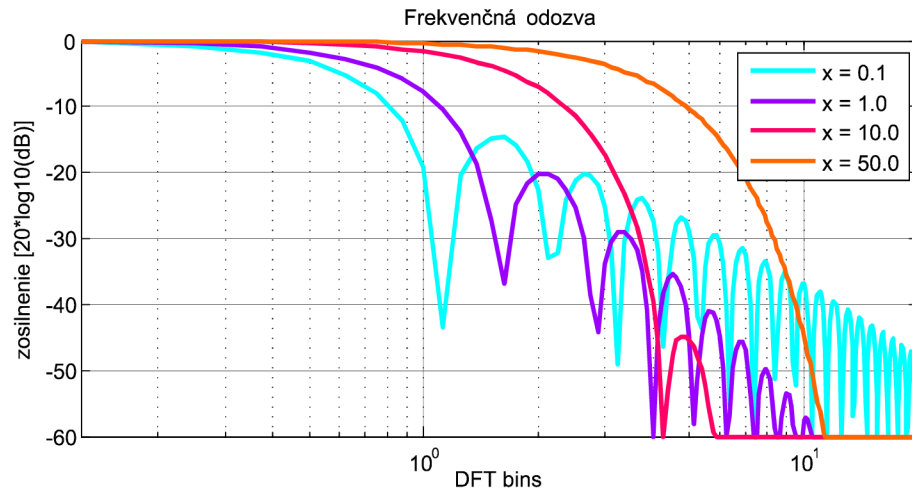
Zavedieme parameter $x \in (0, \infty)$ nasledovne:

$$w(t, x) = e^{\frac{x t^2}{t^2 - 1}} \quad t \in (-1, +1), \quad x \in (0, \infty) \quad (6.6)$$

Aby sme videli, v čom ovplyvňuje pôvodnú funkciu vyberieme si zopár hodnôt z jeho definičného oboru. ($x = 0.1, 0.2, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0, 20.0, 50.0$). Jednotlivé priebehy sú znázornené na nasledujúcom obrázku.



Obrázok 6.2: Časové priebehy parametrizovaného okna s parametrom „x“



Obrázok 6.3: Frekvenčné odozvy parametrizovaného okna s parametrom „x“

Po použití tohto parametra funkcia a frekvenčná odozva sa menia podľa obrázkov 6.3 a 6.4. Číselné charakteristiky vyzerajú nasledovne:

Parameter „x“	Highest Side-Lobe Level [dB]	Coherent Gain	Equivalent Noise BW [bins]	Scallop Loss [dB]	Worst Case Processing L. [dB]	Overlap Correlation 50 %	Overlap Correlation 75 %
x = 0.1	-14,7	0,88	1,05	3,18	3,40	46,68	76,77
x = 0.2	-15,5	0,82	1,09	2,83	3,23	43,61	76,77
x = 0.5	-17,6	0,71	1,20	2,25	3,05	35,61	75,15
x = 1.0	-20,2	0,60	1,35	1,75	3,05	25,45	71,19
x = 2.0	-24,3	0,49	1,59	1,25	3,26	13,03	62,90
x = 5.0	-33,3	0,35	2,12	0,71	3,98	1,76	42,49
x = 10.0	-44,8	0,26	2,78	0,42	4,86	0,06	21,88
x = 20.0	-63,6	0,19	3,76	0,23	5,98	0,00	5,78
x = 50.0	-109,9	0,12	5,77	0,10	7,71	0,00	0,11

Tabuľka 6-1: Číselné charakteristiky parametrizovaného okna s parametrom „x“

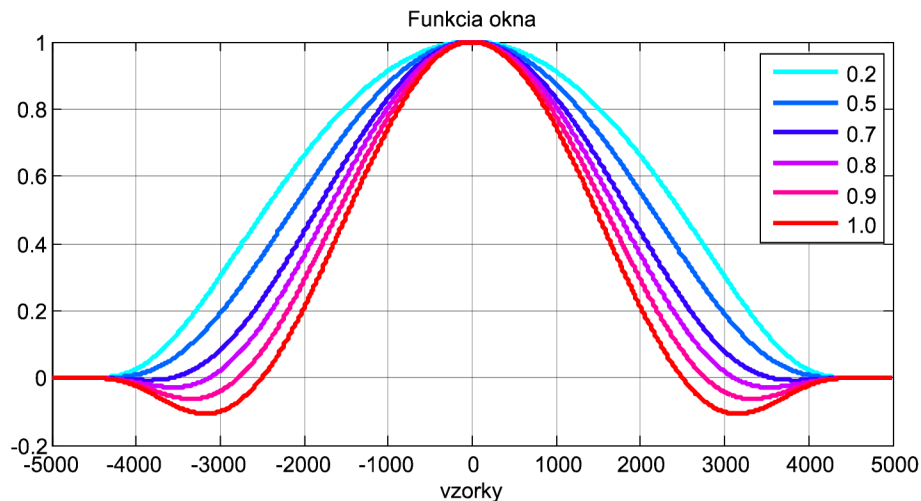
6.2.2 Parameter „a“

Parametrizujeme okno (6.1) takto:

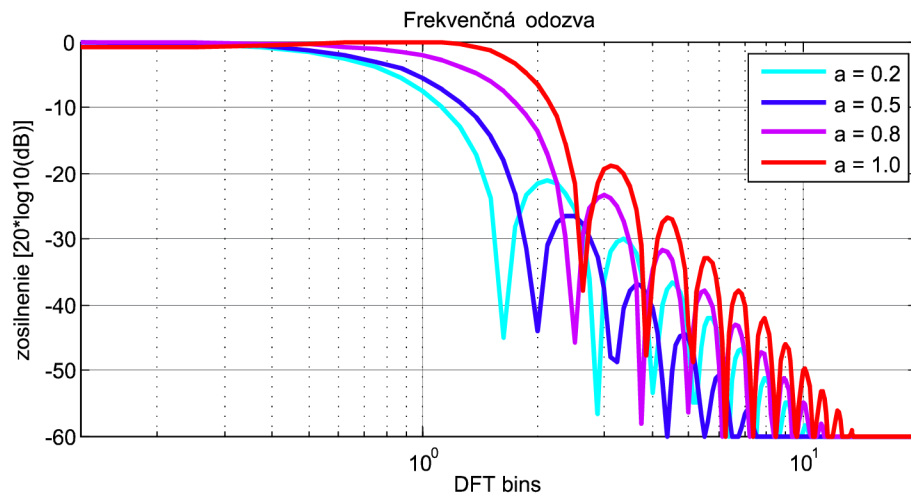
$$w(t, a) = e^{\frac{t^2}{t^2-1}} \cos(a\pi) \quad t \in (-1, +1), \quad a \in (0, +1) \quad (6.7)$$

Parameter „a“ nadobúda hodnoty z intervalu $a \in (0, +1)$ a výraz $\cos(a\pi) \in (-1, +1)$. Pomocou negatívnych hodnôt môžeme získať oveľa väčšie utlmenie bočných lalokov. Funkcia okna sa podobá na známy priebeh okna Flat top.

Na obrázku (6.5) a (6.6) je ilustrovaný vplyv parametra pri začiatkových hodnôt ostatných parametrov.



Obrázok 6.4: Časové priebehy parametrizovaného okna s parametrom „a“



Obrázok 6.5: Frekvenčné odozvy parametrizovaného okna s parametrom „a“

Parameter „a“	Highest Side-Lobe Level [dB]	Coherent Gain	Equivalent Noise BW [bins]	Scallop Loss [dB]	Worst Case Processing L. [dB]	Overlap Correlation 50 %	Overlap Correlation 75 %
a = 0.2	-21,1	0,58	1,37	1,68	3,06	23,78	70,49
a = 0.5	-26,5	0,49	1,56	1,31	3,23	14,32	64,04
a = 0.7	-26,0	0,40	1,92	0,83	3,67	3,31	50,81
a = 0.8	-23,4	0,35	2,29	0,49	4,09	-2,72	39,85
a = 0.9	-20,6	0,29	2,92	0,06	4,71	-8,06	25,89
a = 1.0	-18,8	0,25	4,05	0,50	6,58	-11,67	9,72

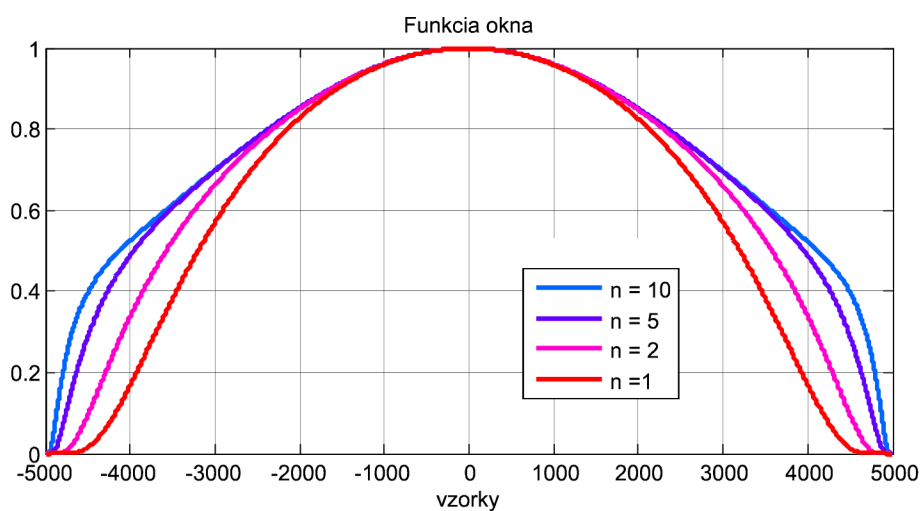
Tabuľka 6-2: Číselné charakteristiky parametrizovaného okna s parametrom „a“

6.2.3 Parameter „n“

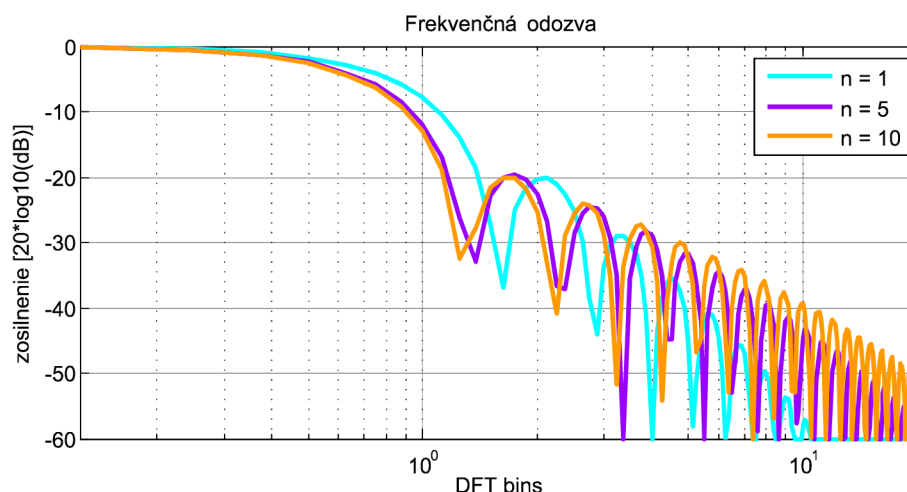
Zavedieme mocninu n nasledovne:

$$w(t, n) = e^{\frac{t^2}{t^{2n}-1}} \quad t \in (-1, +1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.8)$$

Jeho účinky na pôvodnú funkciu sú zobrazené na obrázkoch 6.9 a 6.10. V prípade, že vo vzorci nehrá žiadnu rolu, má hodnotu $n = 1$.



Obrázok 6.6: Časové priebehy parametrizovaného okna s parametrom „n“



Obrázok 6.7: Frekvenčné odozvy parametrizovaného okna s parametrom „n“

Parameter „n“	Highest Side-Lobe Level [dB]	Coherent Gain	Equivalent Noise BW [bins]	Scallop Loss [dB]	Worst Case Processing L. [dB]	Overlap Correlation 50 %	Overlap Correlation 75 %
n = 1	-20,2	0,60	1,35	1,75	3,05	25,45	71,19
n = 2	-19,6	0,66	1,24	2,09	3,02	32,49	74,87
n = 5	-19,6	0,71	1,15	2,46	3,06	38,32	77,69
n = 10	-20,0	0,25	1,11	2,64	3,10	40,71	78,83

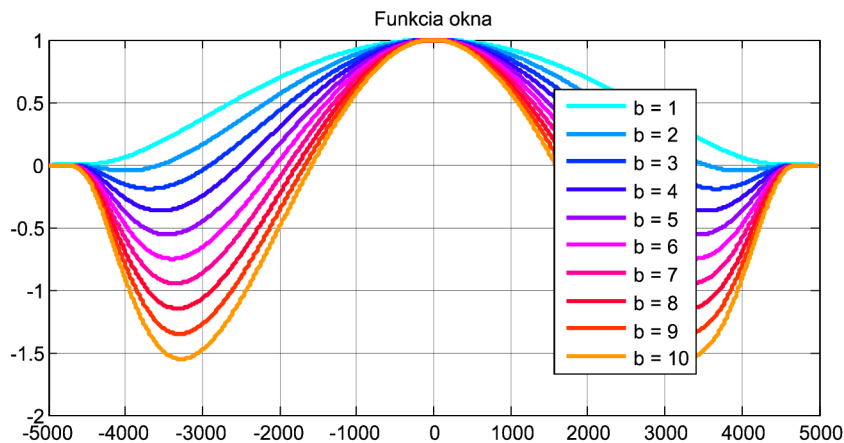
Tabuľka 6-3: Číselné charakteristiky parametrizovaného okna s parametrom „n“

6.2.4 Parameter „b“

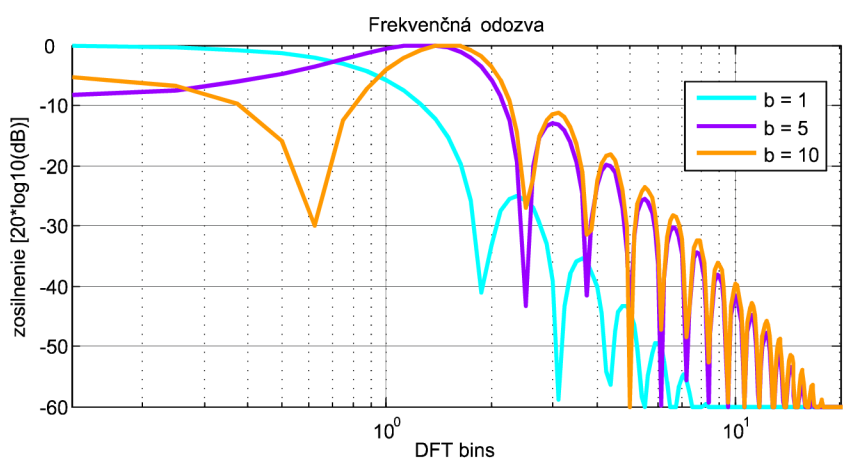
Štvrtým parametrom je výraz paraboly $1 - bt^2$.

$$w(t, b) = e^{\frac{t^2}{t^2-1}(1-bt^2)} \quad t \in (-1, +1), \quad b = (0, \infty) \quad (6.9)$$

Z výrazu (6.9) vidíme, že v prípade $b > 1$ na oboch koncoch okna sa objavia veľké negatívne hodnoty, ktoré sú dominantné vo frekvenčnej charakteristike. Spôsobujú malý pokles bočných lalokov a iba minimálne utlmenie najväčšieho bočného laloku. Pri použití aj ostatných parametrov dávajú oveľa lepší výsledok.



Obrázok 6.8: Časové priebehy parametrizovaného okna s parametrom „b“



Obrázok 6.9: Frekvenčné odozvy parametrizovaného okna s parametrom „b“

Parameter „n“	Highest Side-Lobe Level [dB]	Coherent Gain	Equivalent Noise BW [bins]	Scallop Loss [dB]	Worst Case Processing L. [dB]	Overlap Correlation 50 %	Overlap Correlation 75 %
b = 1	-25,2	0,51	1,52	1,36	3,19	15,69	65,24
b = 2	-23,6	0,41	1,91	0,83	3,63	3,35	51,80
b = 5	-	0,13	18,38	3,85	16,49	-22,63	-23,46
b = 10	-	-0,35	6,74	29,38	37,67	6,70	-44,28
b = 20	-0,5	-1,30	2,41	27,83	31,65	30,23	-14,69
b = 50	-3,5	-3,43	2,18	27,73	31,12	35,27	8,35

Tabuľka 6-4: Číselné charakteristiky parametrizovaného okna s parametrom „b“

6.2.5 Súhrn parametrov „x, a, n, b“

V predchádzajúcich kapitolách boli spomenuté štyri rôzne premenné slúžiace na parametrizáciu funkcií (6.1) s pohľadom na výsledné vlastnosti frekvenčnej odozvy. S variovaním sme schopný vygenerovať veľmi rozdielne charakteristiky i priebehy. Zatiaľ známe a používané časové okná majú niekedy celkom odlišný matematický popis. Od samých jednačiek cez cosinusové, sinusové až po kombinované, ktoré používajú komplexné argumenty, ktorých funkcia pozostáva z viacerých členov.

Exponenciálna funkcia (6.1) vďaka jej nekonečnej diferencovateľnosti nám ponúka hladký priebeh. Je kombinovaný, pozostáva z troch členov. Pomocou navrhnutých parametrov nám umožňuje napodobňovať aj známe časové okná. Výsledný matematický výraz pri použití všetkých parametrov je:

$$w(t) = e^{\frac{xt^2}{t^{2n}-1}} \cdot \cos(a\pi) \cdot (1 - bt^2) \quad (6.10)$$

$$t \in (-1, +1), \quad x \in (0, \infty), \quad a \in (0, +1), \quad n \in (1, 2, \dots), \quad b \in (0, \infty)$$

Pozn.: k práci patrí aj MATLAB-ovský program Exponent.m, ktorý je vyrobený v GUI. Podrobnejšie o ňom v kapitole 6.2.6 a v prílohe.

6.2.6 Program – Exponential.m

Exponential.m – je to grafický program vytvorený v prostredí MATLAB GUI. Je súčasťou práce. Slúži na ovládanie časového okna z kapitoly 6 (6.1). Umožní nastavovanie parametrov, a tým vykresľovanie časového priebehu a frekvenčnej odozvy v reálnom čase. Pre zvolené parametre si môžeme vypočítať aj číselné charakteristiky (kap. 4). Niekoľko z najznámejších časových okien je implementované do programu, ich voľbou sa vykresľujú ich odozvy aj charakteristiky. (okná spomenuté v kap. 3).

Obsahuje aj podprogramy slúžiace na hľadanie podľa vybraných hodnôt číselných charakteristík, popis jednotlivých elementov okna, podporuje aj otvorenie uložených okien, uloženie aktuálneho okna a tlačenie celého okna.

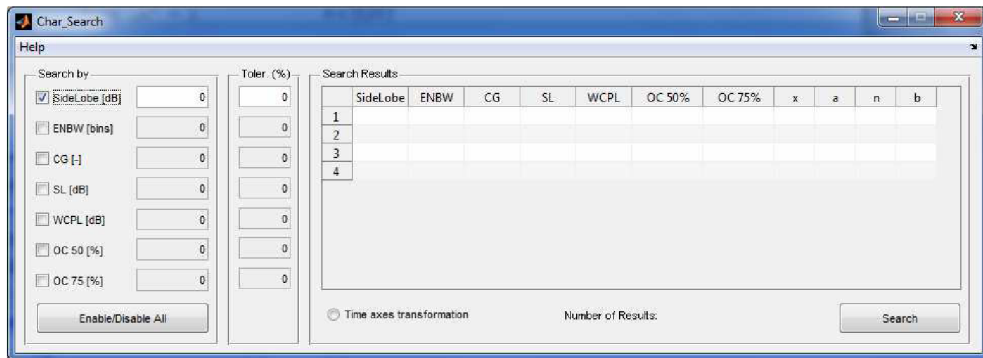
POZN.: viaceré informácie o spôsobe použitia programu a o jeho možnostiach, nastaveniach je písané v prílohe Exponential.m

6.2.7 Napodobňovanie okien

Napodobňovanie iných časových okien je jednou možnosťou využitia parametrov funkcie. K programu Exponent.m patrí aj podprogram Char_Search.m s databázou, ktorá obsahuje všetky možné kombinácie týchto štyroch parametrov vypočítané s istými krokmi. Následné porovnávanie okien sa vykonáva podľa číselných charakteristík.

krok „x” = 0.1	$x \in (0,50)$
krok „a” = 0.05	$a \in (0,1)$
krok „n” = 1	$n \in (1,10)$
krok „b” = 5	$b \in (0,50)$

Celkový počet možných kombinácií je potom 1157310. Doba hľadania trvá cca. jednu minútu, ale záleží aj na výkone počítača. Na hľadanie medzi týmito kombináciami slúži podprogram Char_Search.



Obrázok 6.10: Hľadanie podľa číselných charakteristík

Príklad 1.: Obdĺžnikové okno:

x = 0
a = 0
n = 0

char. známeho okna:

Číselné charakteristiky

Rectangular

SideLobe [dB] -13.3974

ENBW [bins] 1

CG [-] 1

SL [dB] 3.9224

WCPL [dB] 3.9224

OC_50 [%] 50

OC_75 [%] 75

char. okna exponential:

Číselné charakteristiky

Exponent

SideLobe [dB] -13.3974

ENBW [bins] 1.0001

CG [-] 0.9999

SL [dB] 3.92153

WCPL [dB] 3.92196

OC_50 [%] 49.995

OC_75 [%] 74.9975

Príklad 2.: Cosinusové okno:

$$x = 0$$

$$a = 0.5$$

$$n = 1$$

$$b = 0$$

char. známeho okna:

Číselné charakteristiky	
Cosine	
SideLobe [dB]	-22.9982
ENBW [bins]	1.2339
CG [-]	0.636567
SL [dB]	2.09749
WCPL [dB]	3.0103
OC_50 [%]	31.8205
OC_75 [%]	75.5335

char. okna exponential:

Číselné charakteristiky	
Exponent	
SideLobe [dB]	-22.9982
ENBW [bins]	1.2339
CG [-]	0.636567
SL [dB]	2.09749
WCPL [dB]	3.0103
OC_50 [%]	31.8205
OC_75 [%]	75.5335

Príklad 3.: Blackman okno:

$$x = 3.9$$

$$a = 0.2$$

$$n = 3$$

$$b = 0$$

char. známeho okna:

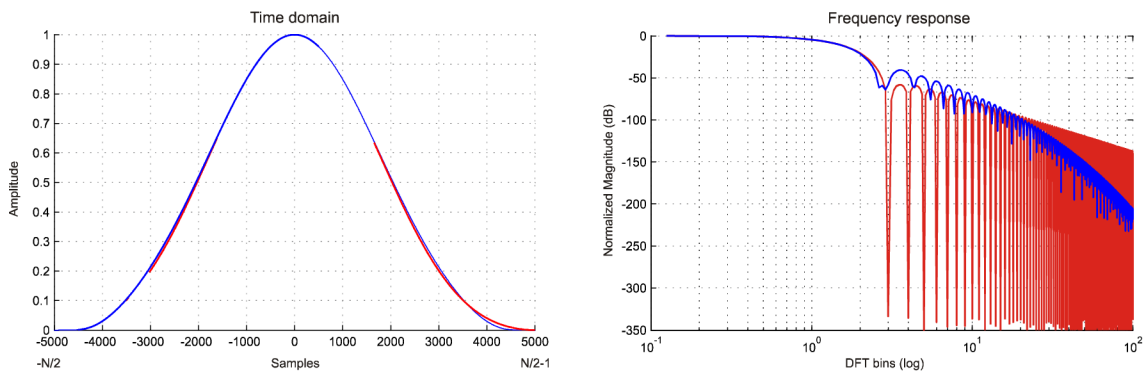
Číselné charakteristiky	
Blackman	
SideLobe [dB]	-58.2385
ENBW [bins]	1.72676
CG [-]	0.42
SL [dB]	1.09888
WCPL [dB]	3.47119
OC_50 [%]	8.96257
OC_75 [%]	56.6666

char. okna exponential:

Číselné charakteristiky	
Exponent	
SideLobe [dB]	-59.2367
ENBW [bins]	1.72479
CG [-]	0.421861
SL [dB]	1.08804
WCPL [dB]	3.45619
OC_50 [%]	8.82047
OC_75 [%]	57.0341

Ako v predošlých príkladoch vidíme, rozdiely sú zanedbateľné a dokonca v hlavnom programe si ich môžeme aj doladiť.

Na začiatku kapitoly 6. boli uvedené tie matematické pravidlá, ktoré značia, že funkcie nekonečne diferencovateľné sú hladšie a Fourierov obraz $F\{f\}$ teda konverguje k nule v bodoch $\omega \rightarrow \pm\infty$ rýchlejšie (Veta 4.). To vedie k tomu, že sme schopný získať väčšie zoslabenie bočných lalokov pri podobných číselných charakteristikách. Použijeme príklad 3. Na nasledujúcich obrázkoch sú porovnané okná Blackman a Exponential (3.9, 0.2, 3, 0) a ich frekvenčné odozvy



Obrázok 6.11: Porovnanie časového priebehu a frekvenčnej odozvy okna Blackman(červená) a Exponential(modrá)

7 ZÁVER

Cieľom práce bolo preveriť možnosť využitia hladkých funkcií s ich prípadnou parametrizáciou k vytvoreniu časových okien pre diskkrétne spracovávanie signálu. Za tým účelom bolo v práci uvedené niekoľko známych časových okien a uvedený základný matematický aparát týkajúci sa hladkých funkcií.

S pomocou exponenciálnej funkcie a jej parametrizáciou bolo vytvorené okno nazývané v práci exponenciálne okno (Exponential), ktoré je možné parametrizovať štyrmi parametrami.

Bol vytvorený program Exponential.m, pomocou ktorého boli vypočítané číselné charakteristiky známych okien a implementované aj okno Exponential. Voľbou parametrov je možné zmeniť číselné charakteristiky tohto okna.

Vyššie spomínaný program umožňuje nájsť hodnoty týchto 4 parametrov takých, že číselné charakteristiky sa blížia číselným charakteristikám známych okien a pomocou „doladenia“ parametrov sa dá aj niektorú z číselných charakteristík vylepšiť (avšak na úkor možného zhoršenia iných číselných charakteristík – vid'. príklad 1. v prílohe).

Vyššie spomínaný program umožňuje tiež užívateľovi zadať požadované číselné charakteristiky a metódou prehľadávania stavového priestoru štyroch parametrov nájsť ich také hodnoty, pre ktoré sú splnené požadované charakteristiky. Vzhľadom k tomu, že číselné charakteristiky sú vzájomne previazané medzi sebou, nemá táto úloha vždy riešenie.

V práci uvedené 4 možnosti parametrizácie zďaleka nevyčerpávajú všetky možné typy parametrizácie. Ďalšie spôsoby parametrizácie exponenciálneho okna by si zaslúžili hlbšie štúdium tejto problematiky.

8 POUŽITÁ LITERATÚRA

- [1] J. HARRIS, F.: *On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform* [online]. 01.1978, 33 s, 28.07.2005 [cit. 2012-01-15]. ISBN 0018-9219. Dostupné z: <<http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=1455106>>
- [2] JURA, P.: *Signály a systémy* [online]. Brno: Vysoké učení technické, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, druhé opravené vydání 08.2010, 78 s. [cit. 2012-01-15]. Skriptum VUT FEKT. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/www_base/priloha.php?dpid=33242>
- [3] *Vlastnosti oken pro spektrální analýzu pomocí DFT* [online], Praha: ČVÚT v Praze, Fakulta elektrotechnická. [cit. 2012-01-15]. Návod ke cvičením. Dostupné z: <<http://radio.feld.cvut.cz/personal/matejka/wiki/doku.php?id=root:cz:x37lbr:navody&s=lbr9>>
- [4] *Časově frekvenční analýza signálů* [online]. Liberec: Ústav řízení systémů a spolehlivosti, 26.10.2011, 27 s, [cit. 2012-01-15]. Školní práce. Dostupné z: <http://www.rss.tul.cz/ftppub/tdg/P6_cas_freq_analyza.pdf>
- [5] BORES, CH., BORES, S.: *Bores Signal Processing - Advanced DSP - FFT windows* [online]. Fordwater, Pond Road, Woking, Surrey, GU22 0JZ UK, 02.06.2009 [cit. 2012-01-15]. Dostupné z: <<http://www.bores.com/courses/advanced/windows/index.htm>>
- [6] Window function. *Window function - Wikipedia, the free encyclopedia* [online]. 23.12.2011, poslední verze 11.06.2003, [cit. 2012-01-15]. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/wiki/Window_function>
- [7] TRÁGE, D.: *Časově-frekvenční analýza* [online], Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2009. 31 s. [cit. 2012-01-15]. Dostupné z: <http://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=15486>
- [8] HEINZEL, G., RÜDIGER, A., SCHILLING, R.: *Spectrum and spectral density estimation by the Discrete Fourier transform (DFT), including a comprehensive list of window functions and some new flat-top windows* [online]. Teilinstitut Hannover, Max-

Planck-Institut für Gravitationsphysik, 15.2002, [cit. 2012-01-15]. Dostupné z:
< <http://pubman.mpdl.mpg.de/pubman/item/escidoc:152164:1>>

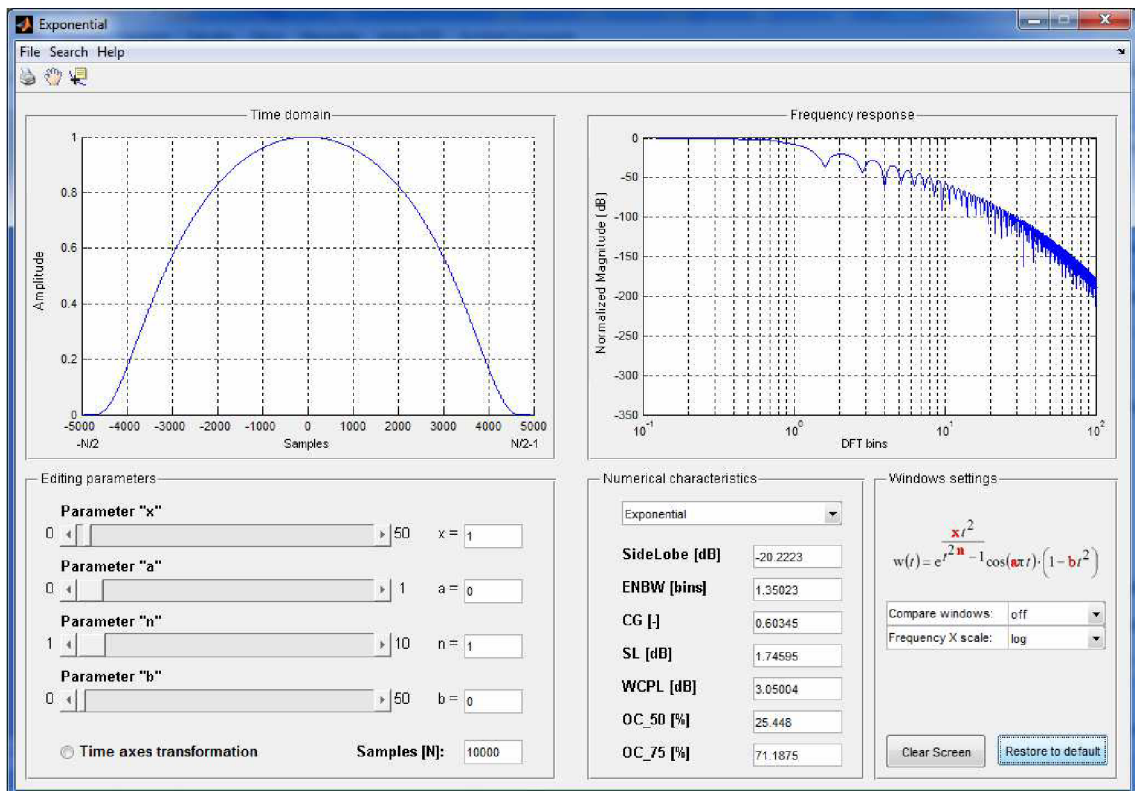
- [9] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky*. 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 720 s. ISBN 978-80-7196-180-21. [cit. 2012-02-20].
- [10] KOLMOGOROV, A. *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*. vyd. 1. Praha: SNTL, 1975, 581 s. [cit. 2012-02-20].

PRÍLOHY

Príloha 1. – popis programu Exponential.m

Program Exponential.m písaný v Matlab GUI je súčasťou práce. Služi na nastavovanie štyroch parametrov exponenciálneho okna (vzorec 6.1) a na pozorovanie premien časového priebehu a frekvenčnej odozvy v reálnom čase. Zobrazuje aj hodnoty vypočítaných číselných charakteristík. Pomocou jeho sme schopný

- nájsť také hodnoty parametrov x, a, n, b , ktoré tvoria časové okno podobnými alebo aj vylepšenými charakteristikami, než majú známe okná.
- pomocou menu *Search/By characteristics* hľadať podľa číselných charakteristík zadaných užívateľom a výsledky v hlavnom okne doladovať.
- uložiť/otvoriť okná vyrobené pomocou tohto programu
- vytlačiť aktuálny vzhľad programu

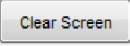
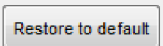


Obrázok 1: Vzhľad programu Exponential.m

Panel *Editing parameters*:

1. pomocou štyroch posuvníkov si meníme hodnoty parametrov. Kliknutím do prázdnej časti posuvníka sa krok zvýši 10x.
2. pri každom kliknutí hociktorým parametrom sa aktualizujú obidve okná a vypočítavajú sa aj číselné charakteristiky.
3. *Samples [N]* udáva počet vzoriek časového priebehu.
4. Time axes transformation – táto opcia nie je rozoberaná v práci. Je nedefinovaná transformácia časovej osi $t = \sin(\tau\pi/2)$, $\tau \in (-1, +1)$

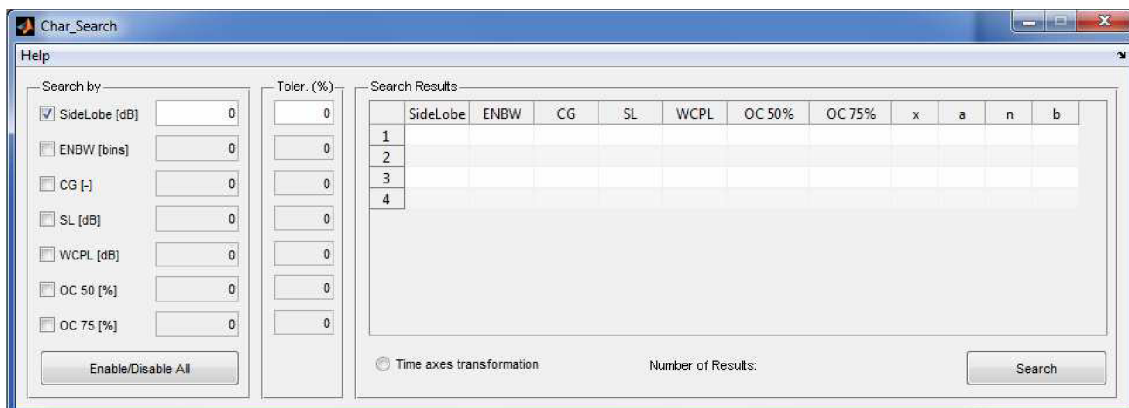
Panel *Windows settings*:

5. v prípade, že si chceme **porovnávať** naše okno s nejakým známym oknom, zvolíme si *Compare window* – *off* na *on*, potom si zvolíme jedno okno v rozbaľovacej ponuke, ktoré sa vykresľuje červenou farbou. Po variovaní pomocou posuvníkov sa exponenciálne okno prikresľuje k známym.
6. frekvenčnú odozvu môžeme pozorovať aj v logaritmickej aj v lineárnom rozdelení x-ovej osi. (*Frequency X scale – log/linear*)
7. s tlačidlom  si môžeme vyčistiť obidve okná.
8.  nastaví program do začiatočného stavu.

Menu

9. *File/Open* – možnosť otvorenia uloženého súboru *_exponential.m. Po otvorení sa nastavujú parametre a vykresľuje sa časová a frekvenčná odozva.
10. *Save As* – možnosť uloženia aktuálneho okna. Pri uložení je potrebné si doplniť hodnoty parametrov a zvoliť si „**Uložiť ako**“ pre uloženie *_exponential.m.
11. *Print* – možnosť vytlačenia aktuálneho vzhľadu hlavného okna.
12. *Search/By characteristics* – pri zvolení tejto funkcie sa otvorí podprogram **Char_Search**, ktorý slúži na hľadanie podľa užívateľom zadaných číselných charakteristík (viac nižšie).
13. *Help/Description of the elements* – zvolením sa otvorí dokument **Popis.doc**, v ktorom sú rozpísané jednotlivé číselné charakteristiky.

Char_Search – okno pre hľadanie podľa číselných charakteristík



Obrázok 2: Vzhľad programu Char_Search.m

Panel Search by

1. *Help/How to search* – opis postupu hľadania.
2. pred hľadaním si treba fajkou naznačiť, podľa ktorého parametra chceme hľadať (minimálne jeden).
3. *Enable/Disable All* – tlačidlom si môžeme naraz zvoliť všetky parametre.
4. hľadanie sa robí v stavovom priestore štyroch parametrov, u ktorých sú preddefinované hodnoty krokov.

$$\begin{array}{llll} \text{krok „x”} = 0.1 & x \in (0,50) & \text{krok „n”} = 1 & n \in (1,10) \\ \text{krok „a”} = 0.05 & a \in (0,1) & \text{krok „b”} = 5 & b \in (0,50) \end{array}$$

Panel Tolerance

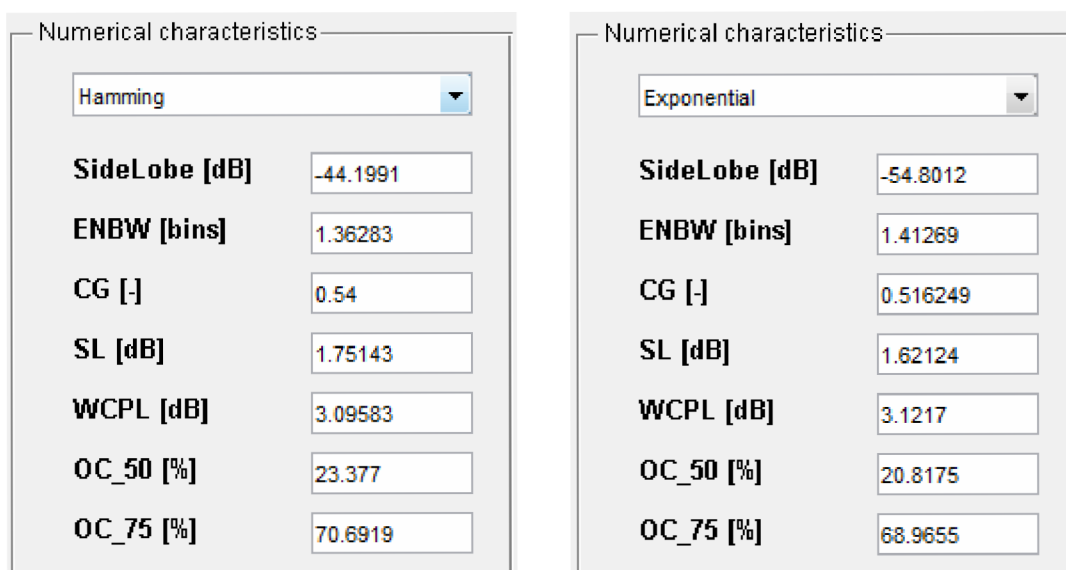
5. u jednotlivých parametroch si musíme zvoliť reálnu toleranciu hľadania.
6. tolerancie treba udávať v percentách (%).
7. tolerancie sú interpretované ako + aj –.
8. *Help/Range of values* – obsahuje krajné hodnoty jednotlivých parametrov.

Panel Search Results

9. v prípade, že podľa zvolených hodnôt boli nájdené výsledky, zobrazujú sa v okne *Search Results*.
10. políčko *Number of results* značí počet výsledkov.

Príklad 1. vylepšenie číselných charakteristík:

U okna Hamming sa pokúšame vylepšiť hodnotu SideLobe. Pri variácii $x = 2.32$, $a = 0.29$, $n = 9$, $b = 0$ sme získali najväčší pokles bočného laloka. Výsledné číselné charakteristiky sú na pravom obrázku.



Porovnanie:

Vylepšené char.

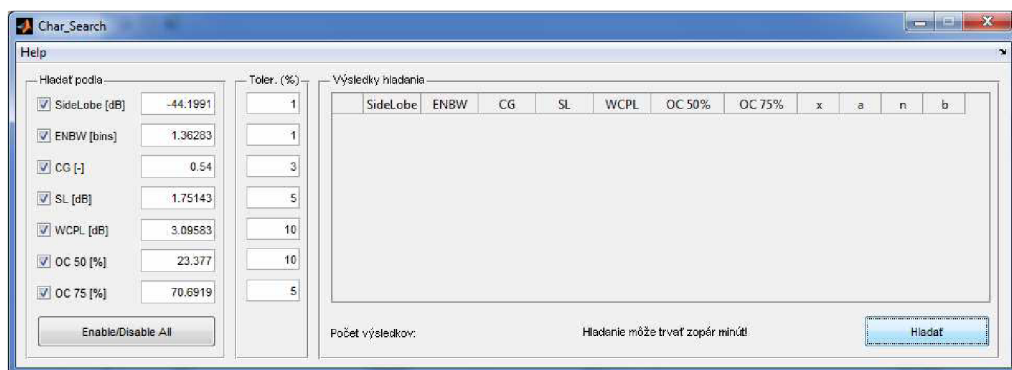
SideLobe: -54.8 (-44.2) dB
CG: 0.52 (0.54)
SL: 1.62 (1.75) dB
OC_50: 20.82 (23.38) %
OC_75: 68.97 (70.69) %

Zhoršené char.

ENBW: 1.41 (1.36) bins
WCPL: 3.12 (3.09) dB

Príklad 2. Napodobňovanie známeho okna:

Pomocou programu Char_Search si vyhľadáme podobné okno Blackmanovo. V prvom kroku otvoríme Char_Search.m súbor, v hlavnom okne si zvolíme okno Blackman, takto získame jej číselné charakteristiky. Tieto hodnoty skopírujeme a vložíme do príslušných políčok (pozor na poradie!). Najprv si zvolíme väčšie tolerancie, tak dostaneme viac výsledkov. Potom si znížime tolerancie, pokiaľ nám neostane menší počet výsledkov. Z týchto vyberieme jedno riešenie a hodnoty parametrov skopírujeme naspäť do hlavného okna, kde sa môžeme zahrať s doladením. Výsledok potom môžeme uložiť do *_exponential.m.



Obrázok 3: Napodobňovanie okna Hamming