

# **ŠKODA AUTO VYSOKÁ ŠKOLA o.p.s.**

Studijní program: B6208 Ekonomika a management

Studijní obor/specializace: 6208R186 Podniková ekonomika a řízení provozu,  
logistiky a kvality

## **Optimalizace údržby pozemních komunikací**

### **Bakalářská práce**

**Mikhail KALIAGANOV**

Vedoucí práce: doc. Ing. Jan Fábry, Ph.D.



ŠKODA AUTO Vysoká škola

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Zpracovatel: **Mikhail Kaliaganov**  
Studijní program: Ekonomika a management  
Obor: Podniková ekonomika a řízení provozu, logistiky a kvality

Název tématu: **Optimalizace údržby pozemních komunikací**

Cíl: Cílem práce je popsat a analyzovat proces zimní údržby pozemních komunikací ve městě Jindřichův Hradec. V rámci práce bude proveden rozbor poskytnutých dat a navrženo řešení, které povede k minimalizaci nákladů zimní údržby. Teoretickým základem bude matematický model úlohy čínského listonoše, modifikovaný pro konkrétní problém údržby pozemních komunikací. V případě vyšší výpočetní náročnosti problému bude navržena jednoduchá heuristika. V případě, že firma poskytne údaje o realizovaných trasách, bude s nimi návrh porovnán.

Rámcový obsah:

1. Popis a vysvětlení základních pojmů týkajících se údržby pozemních komunikací.
2. Úloha čínského listonoše, modifikace matematického modelu pro problém údržby pozemních komunikací. Heuristické postupy.
3. Analýza stavu údržby komunikací ve městě Jindřichův Hradec na základě poskytnutých dat.
4. Návrhy řešení pro efektivní zimní údržbu.

Rozsah práce: 25 – 30 stran

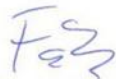
Seznam odborné literatury:

1. MACUROVÁ, P. – TVRDOŇ, L. – KLABUSAYOVÁ, N. *Logistika*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2014. ISBN 978-80-248-3791-8.
2. LINDA, B. – VOLEK, J. *Teorie grafů v dopravě a veřejné zprávě*. Pardubice: Univerzita Pardubice, 2012. 192 s. ISBN 978-80-7395-225-9.
3. EISELT, H. – SANDBLOM, C. *Operations Research.: A Model – Based Approach*. 1. vyd. Heidelberg: Springer, 2010. ISBN 978-3-642-10325-4.
4. EISELT, H A. – SANDBLOM, C L. *Integer Programming and Network Models*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag , 2000. 504 s. ISBN 978-3-540-67191-6.

Datum zadání bakalářské práce: prosinec 2019

Termín odevzdání bakalářské práce: prosinec 2020

L. S.



**doc. Ing. Jan Fábry, Ph.D.**  
Vedoucí práce



**Mgr. Petr Šulc**  
Prorektor ŠAVŠ



**doc. Ing. Jan Fábry, Ph.D.**  
Garant studijního oboru



**Mikhail Kaliaganov**  
Autor práce

Prohlašuji, že jsem závěrečnou práci vypracoval(a) samostatně a použité zdroje uvádím v seznamu literatury. Prohlašuji, že jsem se při vypracování řídil(a) vnitřním předpisem ŠKODA AUTO VYSOKÉ ŠKOLY o.p.s. (dále jen ŠAVŠ) směrnicí OS.17.10 Vypracování závěrečné práce.

Jsem si vědom(a), že se na tuto závěrečnou práci vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, že se jedná ve smyslu § 60 o školní dílo a že podle § 35 odst. 3 je ŠAVŠ oprávněna mou práci využít k výuce nebo k vlastní vnitřní potřebě. Souhlasím, aby moje práce byla zveřejněna podle § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách.

Beru na vědomí, že ŠAVŠ má právo na uzavření licenční smlouvy k této práci za obvyklých podmínek. Užiji-li tuto práci, nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, mám povinnost o této skutečnosti informovat ŠAVŠ. V takovém případě má ŠAVŠ právo ode mne požadovat příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to až do jejich skutečné výše.

V Mladé Boleslavi dne .....

Děkuji doc. Ing. Janu Fábrymu, Ph.D. za odborné vedení závěrečné práce, poskytování rad, informačních podkladů a za čas, který mi věnoval. Také bych chtěl poděkovat své geniální mamince a přítelkyni za neocenitelnou podporu. Miluji Vás!

## Obsah

|  |    |
|--|----|
| Úvod.....  | 7  |
| 1 Úvod do teorie grafů .....                                     | 8  |
| 1.1 Historie teorie grafů .....                                  | 8  |
| 1.2 Základní pojmy týkající se teorie grafů .....                | 9  |
| 2 Úloha čínského listonoše .....                                 | 13 |
| 2.1 Neorientovaná úloha čínského listonoše .....                 | 14 |
| 2.1.1 Fleuryho algoritmus pro neorientovaný graf.....            | 15 |
| 2.1.2 Aplikace neorientované úlohy čínského listonoše.....       | 16 |
| 2.2 Orientovaná úloha čínského listonoše.....                    | 17 |
| 2.2.1 Hierholzerův algoritmus .....                              | 18 |
| 2.2.2 Aplikace orientované úlohy čínského listonoše.....         | 19 |
| 3 Technické služby města Jindřichův Hradec .....                 | 21 |
| 3.1 O společnosti.....   | 21 |
| 3.2 Informace týkající se zimní údržby pozemních komunikací..... | 21 |
| 4 Optimalizace zimní údržby pozemních komunikací .....           | 25 |
| 4.1 Definice problému .....                                      | 25 |
| 4.2 Řešení úlohy pomocí DCPP .....                               | 26 |
| Závěr .....  | 32 |
| Seznam literatury .....  | 33 |
| Seznam obrázků a tabulek.....                                    | 34 |
| Seznam příloh .....  | 35 |

## **Seznam použitých zkratek a symbolů**

CPP Chinese Postman Problem

UCPP Undirected Chinese Postman Problem

DCPP Directed Chinese Postman Problem

ZÚ Zimní údržba

MK Místní komunikace

## Úvod

V dnešní době je zimní údržba pozemních komunikací obrovskou položkou ve státním rozpočtu. Je důležité držet rozpočet v bilanci z hlediska financí i ze strany bezpečností lidí. Každé město se snaží udržet rozpočet vyrovnaný. Pokud existuje optimalizační model, jak minimalizovat náklady na zimní údržbu pozemních komunikací, proč tento model nevyužít v praxi?

Hlavním úkolem této práce je najít a pokusit se aplikovat matematický model čínského listonoše pro optimalizaci zimní údržby pozemních komunikací ve městě Jindřichův Hradec.

V teoretické části jsou popsány základní pojmy, jež se týkají teorie grafů, dále bude uvedena stručná historie z teorie grafů, konkrétně její počátky. Dále jsou vysvětleny různé verze úlohy čínského listonoše a modely pro řešení těchto úloh. Také budou uvedeny aplikace úloh čínského listonoše v různých odvětvích, kde by tato teorie dále mohla nalézt své uplatnění.

V praktické části bude analyzován chod a technologie zimní údržby ve městě Jindřichův Hradec. A také bude řešena úloha čínského listonoše pro vybranou oblast města pomocí matematického modelu. Původním záměrem práce bylo porovnat vlastní výsledky s reálnou praxí, ale v průběhu zpracování se ukázalo, že matematický model pro hierarchii je příliš složitý. Z tohoto důvodu porovnání výsledků chybí.



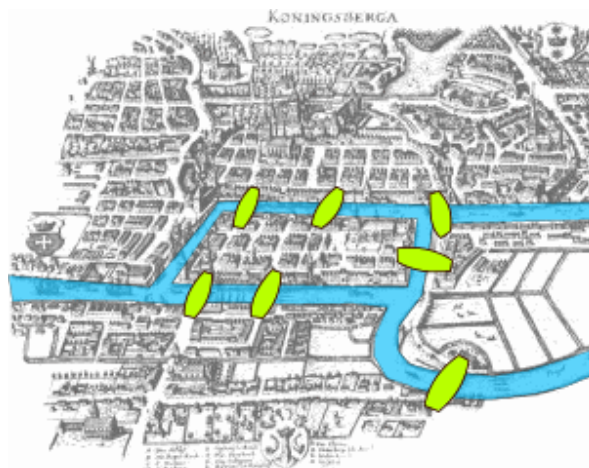
# 1 Úvod do teorie grafů

Grafy jsou nástrojem pro modelování větších a složitějších úkolů. Pomocí grafů můžeme například sestavit větší dopravní síť, vytvořit optimální cestu pro svoz odpadů nebo pro údržbu pozemních komunikací. V následující podkapitole bude stručně rozebrána historie vzniku teorie grafů.

## 1.1 Historie teorie grafů

Teorie grafů je poměrně mladá matematická disciplína. Ve většině případů se uvádí, že datem vzniku této disciplíny je rok 1936, kdy maďarský matematik Dénes Kőnig vydal první učebnici z teorie grafů. Tato učebnice měla původní název "*Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*". Tím byl označen začátek teorie grafů jako samostatné disciplíny.

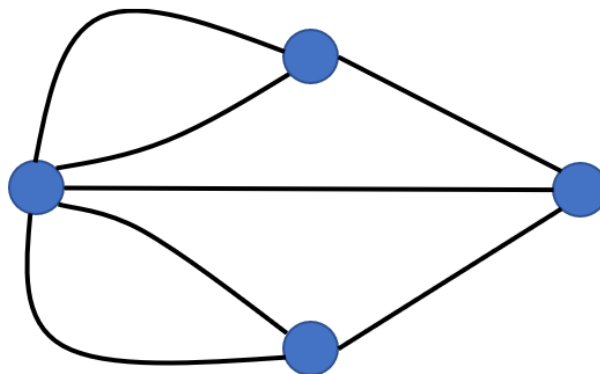
Avšak první pokusy řešit problémy pomocí teorie grafů se vztahují k 17. století, kdy se švýcarský matematik Leonhard Euler (1707-1783) pokusil vyřešit problém sedmi mostů ve městě Königsberg (nyní Ruský Kaliningrad). Po dlouhou dobu mezi obyvateli Königsbergu existovala taková hádanka: jak projít přes všechny městské mosty (přes řeku Pregola) pouze jednou? Nikdo z obyvatelů nemohl dokázat nebo vyvrátit možnost existence této cesty. V roce 1736 problém sedmi mostů zaujal významného matematika L. Eulera, který začal hledat řešení. Níže na obrázku 1 je zobrazeno město Königsberg, modrou barvou je označena řeka Pregola a zelenou barvou jsou označeny mosty (Gross a Yellen, 2004).



Zdroj: (Wikimedia Commons, 2020)

**Obr. 1 Město Königsberg**

Euler vytvořil zjednodušené schéma, kde mosty města odpovídají úsečkám (hranám) a části města odpovídají bodům spojení čar (uzlům), jak je zobrazeno na obrázku 2.



Zdroj: Upraveno dle Wikimedia Commons (2020)

**Obr. 2 Schéma města Königsberg**

V průběhu řešení tohoto problému matematik dospěl k několika závěrům:

- Počet lichých uzlů (uzlů, ke kterým vede lichý počet hran – viz dále tzv. stupeň uzlu) grafu musí být sudý.
- Pokud jsou přesně dva uzly grafu liché, dá se graf nakreslit jedním tahem, avšak je potřeba začít od jednoho z lichých uzlů a dokončit tah u druhého lichého vrcholu.
- Graf s více než dvěma lichými uzly nelze nakreslit jedním tahem.

Graf königsbergských mostů měl čtyři liché uzly (to znamená všechny), proto není možné projít všechny mosty pouze jednou.

S těmito závěry jsou spojeny některé pojmy z teorie grafů, které využíváme i v dnešní době, například: **eulerovský graf**, **Eulerův tah** a **Eulerův cyklus**. Všechny základní pojmy, které se týkají teorie grafů, jsou popsány v následující kapitole.

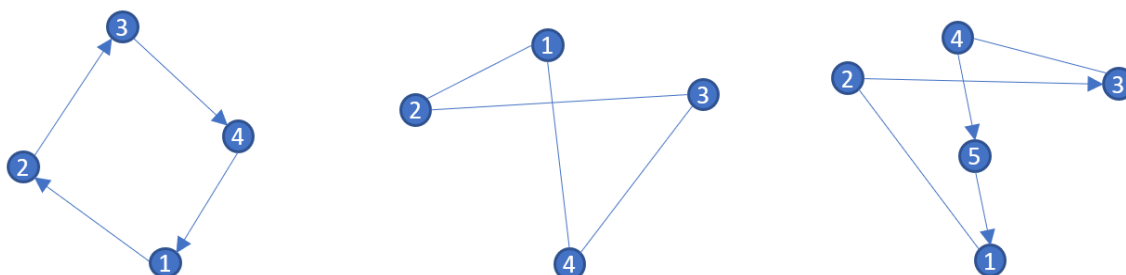
## 1.2 Základní pojmy týkající se teorie grafů

Co si představíme pod slovem graf? Graf má několik významů jak v matematice, tak i v každodenním životě. Například během středoškolského studia uvádíme, že graf funkce  $y = x^2$  je parabola, jindy graf ukazuje tržby společnosti v určitých

měsících roku atd. V této práci však bude mít slovo graf zcela jiný význam. Budeme používat grafy jako nástroj, pomocí kterého můžeme určité jevy zobrazit v rovině nebo v prostoru (Sedláček, 1977). Grafy se velmi často vyskytují v různých matematických úlohách, dávají nám možnost přehledně znázorňovat většinu vztahů, které se na začátku zdají složité. Grafy jsou užitečné v mnoha matematických aplikacích.

**Grafy** se dělí na orientované a neorientované, a jsou definovány stejným způsobem jako dvojice množin:  $G = (U, H)$ , kde množina prvků  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}$  představuje uzly (vrcholy) (Fiala, 2008). Pokud je množina  $U$  konečná, graf se nazývá **konečný**. Počet prvků množiny uzlů  $U$  se označují písmenem  $n$  ( $|U| = n$ ). Jednotlivé uzly pak budeme označovat většinou  $u_i$  nebo jednoduše pomocí čísel, tj.  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\} = \{1, 2, \dots, n\}$ . Množina  $H = \{h_{ij}\}$  pro  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , představuje hrany grafu. Počet hran budeme označovat písmenem  $m$  ( $|H| = m$ ).

Hrany v grafech mohou být orientované i neorientované. U orientovaných hran rozlišujeme počáteční uzel  $u_i$  a koncový uzel  $u_j$ . Graf, který má pouze orientované hrany, se nazývá **orientovaný**. Graf tvořený jen neorientovanými hranami je **neorientovaný** a graf, který má obě z těchto hran, se nazývá **smíšený**. Všechny druhy grafů jsou znázorněny na obrázku 3.



**Obr. 3 Orientovaný graf (vlevo), neorientovaný graf (uprostřed), smíšený graf (vpravo)**

**Multigrafem** se nazývá graf, který má více paralelních hran mezi stejnými uzly. Pod pojmem **smyčka** rozumíme hranu, jež má začátek a konec v jednom uzlu. Graf, který nemá ani paralelní hrany, ani smyčky, se nazývá **prostý**. **Sousední** uzly jsou dva uzly  $u_i$  a  $u_j$ , mezi kterými existuje hrana, která tyto uzly spojuje  $h_{ij} = (u_i, u_j)$ .

V takovém případě uvádíme, že uzly  $u_i$  a  $u_j$  jsou **incidentní** s hranou  $h_{ij} = (u_i, u_j)$ .

Počtem hran, které jsou incidentní s uzlem  $u$ , označujeme **stupeň uzlu**  $u$  a značíme  $deg(u)$ . Jinými slovy – stupeň uzlu  $u$  je počet hran vstupujících do uzlu nebo vystupujících.

Pro neorientované grafy platí tvrzení:

$$\sum_{u \in U} deg(u) = 2m.$$

Tvrzení znamená, že součet stupňů všech uzlů v grafu je vždycky roven dvojnásobku počtu jeho hran. To je logické, neboť každá neorientovaná hrana je incidentní se dvěma uzly.

V případě orientovaného grafu rozlišujeme **vnitřní polostupeň**  $deg^+(u)$ , který představuje počet hran vstupujících do uzlu  $u$  a **vnější polostupeň**  $deg^-(u)$ , který představuje počet hran vystupujících z uzlu  $u$ .

Pro orientované grafy platí:  $deg(u) = deg^+(u) + deg^-(u)$  a spolu s tím navíc platí jedno tvrzení:

$$\sum_{u \in U} deg^+(u) = \sum_{u \in U} deg^-(u) = m.$$

Pokud pro graf  $G' = (U', H')$  platí  $U' \subset U, H' \subset H$ , znamená, že graf  $G'$  je **podgrafem** grafu  $G$ . Pod pojmem **sled** rozumíme takovou konečnou posloupnost hran  $(u_1, u_2), (u_2, u_3), \dots, (u_{k-1}, u_k)$ , ve které dvě po sobě jdoucích hrany mají společný uzel. Sled je **uzavřený**, pokud platí pravidlo:  $u_1 = u_k$ . V případě, že sled bude procházet přes různé uzly, nazývá se **cesta**. **Cyklem** je uzavřena cesta. Graf, který nemá cyklus, je **acyklický**. Cyklus, jež prochází každým uzlem pouze jednou, je **Hamiltonův**.

Graf lze nazvat **souvislým**, jestliže mezi každou dvojicí uzlů existuje cesta. U orientovaného grafu pak rozlišujeme **silnou souvislost**, to znamená, když mezi každou dvojicí uzlů v grafu existuje orientovaná cesta. **Mostem** se nazývá hrana, jejíž odstranění vede k rozdělení grafu na dva nesouvislé podgrafy, které jsou samy

o sobě souvislé. Nesouvislé podgrafy, na které se rozdělí graf vyškrtnutím mostu, se nazývají **komponenty**.

**Tah** je taková posloupnost hran, ve které se nemohou opakovat hrany (uzly se opakovat mohou). **Eulerův tah** je tah, který obsahuje všechny hrany grafu. **Eulerovským grafem** bude graf, u kterého všechny uzly mají sudý stupeň. Pokud graf má maximálně dva uzly lichého stupně, graf bude mít neuzavřený sled obsahující všechny hrany v  $G$  a bude se nazývat **semieulerovský**.

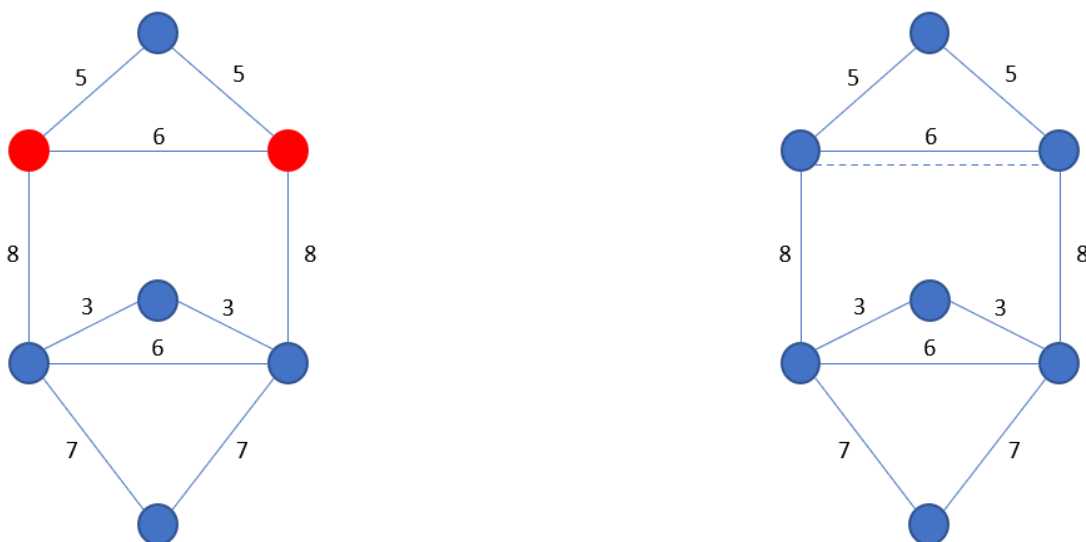
Orientovaný graf se bude nazývat **eulerovským**, pokud v něm existuje **Eulerův cyklus**, což je uzavřený sled, který obsahuje všechny hrany grafu  $G$ . Eulerovským grafem bude souvislý orientovaný graf, v němž pro každý jeho uzel  $u$  platí:  $deg^+(u) = deg^-(u)$ .

Další důležitý pojem použitý v této práci je **hranově ohodnocený** graf. To je graf, ve kterém je každé hraně přiřazeno reálné číslo.

## 2 Úloha čínského listonoše

Představme si svědomitého listonoše, který potřebuje projít všechny ulice, kde bydlí příjemci dopisů. Optimální trasa pro něj bude taková cesta, kde listonoš bude muset projít každou ulicí pouze jednou.

Nakreslíme město nebo menší úsek na grafu, tedy hrany budou odpovídat ulicím a uzly budou odpovídat křižovatkám nebo otočkám. Tento úkol se bude rovnat nalezení Eulerova cyklu v tomto grafu. V případě, že tento graf neobsahuje Eulerův cyklus, bude listonoš muset některými ulicemi projít vícekrát, ale tak, aby součet ohodnocení zdvojených hran byl minimální. Tímto problémem se zabýval čínský matematik M. K. Kwan v roce 1962, a proto se tento problém nyní nazývá problémem čínského listonoše.



Zdroj: Upraveno dle Škola Pifagora (2016)

**Obr. 4 Příklad hledání Eulerova cyklu**

Na obrázku 4 vlevo je znázorněn graf, jenž má dva uzly se stupněm 3 (jsou označeny červenou barvou) a ohodnocení hran představuje jejich délku. Proto tento graf neobsahuje Eulerův cyklus. Na stejném obrázku vpravo je vidět, že pokud přidáme pouze jednu hranu (je označena přerušovanou čarou), bude graf obsahovat Eulerův cyklus. V takovém případě listonoš bude muset projít dvakrát pouze jednou ulicí (jeho trasa se prodlouží o hodnotu 6). Dá se vyjít z jakéhokoliv uzlů z grafu a vrátit se do něj. To bude optimální řešení. Na závěr je nutno spočítat celkovou vzdálenost cesty. V daném případě je to 64.

Úloha čínského listonoše (angl. Chinese Postman Problem, dále jen **CPP**) je široce používána při různých dodávkách zboží. Hledání optimálních tras ve velkých městech má obrovský potenciál, protože umožňuje snížit finanční a mzdové náklady při čištění ulic, doručování zboží atd. (Škola Pifagora, 2016).

## 2.1 Neorientovaná úloha čínského listonoše

V této podkapitole bude podrobně rozebrána úloha čínského listonoše pro neorientované grafy (angl. Undirected Chinese Postman Problem, dále jen **UCPP**).

V úloze UCPP je hlavním předpokladem neorientovaný hranově ohodnocený graf  $G = (U, H)$ , kde  $U$  představuje množinu uzlů a  $H$  představuje množinu neorientovaných hran. V tomto grafu je potřeba najít cyklus, který bude obsahovat všechny hrany aspoň jednou a součet ohodnocení těchto hran bude minimální (Fábry, 2014). Necht'  $H = \{1, 2, \dots, n\}$ . Jelikož se jedná o neorientovaný graf, je potřeba definovat pro každou dvojici uzlů  $i$  a  $j$  hodnotu  $c_{ij} = c_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). Pro hrany  $(i, j) \in H$  se jedná o jejich délku, ale pokud  $(i, j) \notin H$ , je dosazena za tyto hodnoty velká konstanta  $M$ . Z důvodu, že se jedná o symetrickou matici, budou uvazovány jenom hodnoty  $c_{ij}$  pro  $i < j$  (není potřeba řešit hodnoty  $c_{ii}$ ). Podobným způsobem lze definovat binární proměnné  $x_{ij}$  jen pro  $i < j$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1, j = i+1, i+2, \dots, n$ . V případě, že je hrana  $(i, j) \in H$  zařazena do grafu ještě jednou (to znamená zdvojená) s cílem získání eulerovského grafu, pak  $x_{ij} = 1$ , jinak  $x_{ij} = 0$ .

Pak je matematický model zapsán v následujícím tvaru (Pelikán, 2001):

Minimalizovat

$$z = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (1)$$

za podmínek

$$\sum_{j=1}^{i-1} x_{ji} + \sum_{j=i+1}^n x_{ij} = 2y_i, \quad i \in U_0, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} x_{ji} + \sum_{j=i+1}^n x_{ij} = 2y_i + 1, \quad i \in U_1, \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = 1,2, \dots, n-1, \quad j = i+1, i+2, \dots, n, \quad (4)$$

$$y_i \in Z_0^+, \quad i = 1,2, \dots, n. \quad (5)$$

Účelová funkce (1) představuje součet ohodnocení hran, které byly přidány. Jinými slovy představuje celkovou vzdálenost, kterou vozidlo ujede navíc oproti původní délce, aby obsloužilo všechny hrany v grafu. Množina uzlů  $U$  je rozdělena na dvě disjunktivní podmnožiny  $U_0$  a  $U_1$ , kde  $U_0$  představuje množinu uzlů sudého stupně a  $U_1$  množinu uzlů lichého stupně. Pro existenci Eulerova cyklu je potřeba, aby všechny uzly měly sudý stupeň. Pokud jsou v povodním grafu některé hrany zdvojené, je nutno k uzlu s lichým stupněm přidat lichý počet hran, k uzlu se sudým stupněm sudý počet hran, eventuálně nejsou k němu žádné hrany přidány (Fábry, 2014).

Na závěr je potřeba najít Eulerův cyklus, to se dá udělat například pomocí Fleuryho algoritmu (viz podkapitola 2.1.1).

### 2.1.1 Fleuryho algoritmus pro neorientovaný graf

Tento algoritmus byl navržen ředitelem školy Fleury ve městě Marseille (Fiala, 2008):

KROK 1: Vyjdeme z jakéhokoliv uzlu v grafu.

KROK 2: Postupně procházíme hrany v grafu a odstraňujeme hrany, po kterých jsme už prošli, a spolu s tím vzniklé izolované uzly. Musíme se řídit pravidlem, že pokud máme jinou možnost, neprocházíme po hranách (tzv. mostech), jejichž odstranění by mohlo vést k rozdělení grafu na dvě komponenty souvislosti (viz podkapitola 1.2).

Samozřejmě se tento algoritmus dá použít pouze v případě, kdy je graf eulerovský. Jinak je potřeba z původního grafu vytvořit graf eulerovský zdvojením některých hran (viz podkapitola 2.1).

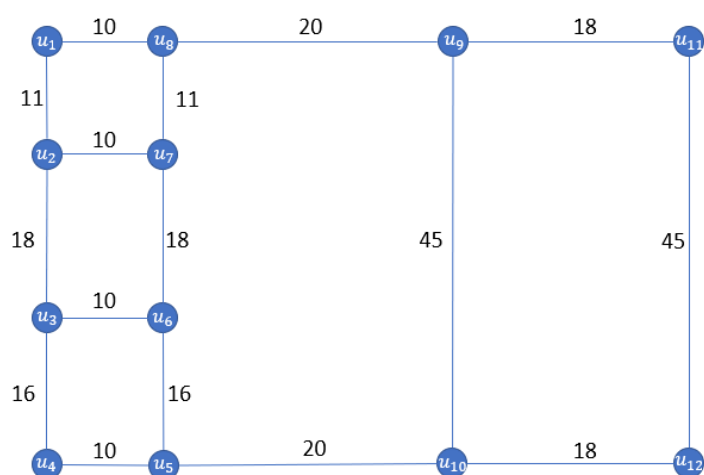


## 2.1.2 Aplikace neorientované úlohy čínského listonoše

Následující úloha byla inspirována příkladem z bakalářské práce (Ondráková, 2020).

V obchodě s potravinami se po každé pracovní směně provádí kontrola, jestli je potřeba doplnit nějaké zboží. Kontrolu provádí zaměstnanec, který vychází ze zázemí, prochází celým obchodem a vrací se zpátky do zázemí. Jakým způsobem musí zaměstnanec obejít obchod, aby celková vzdálenost byla minimální?

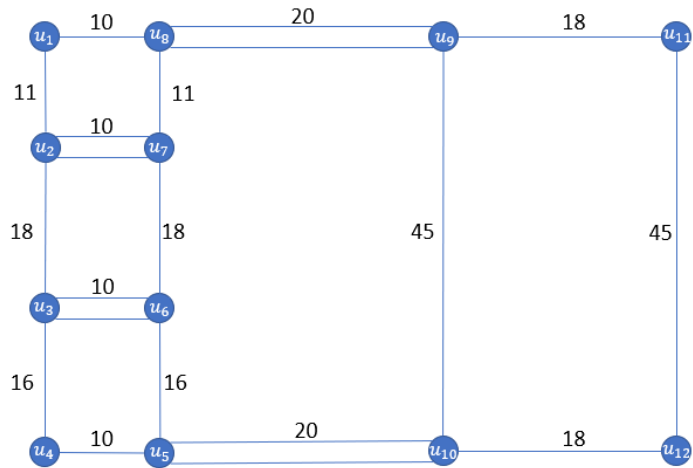
Schéma obchodu je znázorněno pomocí grafu (viz Obr. 5), kde hrany představují uličky mezi regály s potravinami, uzly představují otočky mezi uličkami (ohodnocení hran představují jejich délku v metrech).



Zdroj: Upraveno dle Ondráková (2020)

**Obr. 5 Schéma obchodu**

Dále je potřeba zjistit, zda je daný graf eulerovský, to znamená, že všechny jeho uzly mají sudý stupeň (viz podkapitola 1.2). Z grafu je vidět, že 8 uzlů v grafu má lichý stupeň. Jedná se o uzly  $u_2, u_3, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}$ . Poté je nutné některé hrany zdvojit, přičemž součet ohodnocení zdvojených hran musí být minimální. Proto graf byl upraven, jak je patrné z obrázku 6 (vzdálenost se zvětší o 60 metrů). Vytvořený graf je eulerovský a je možné v něm najít Eulerův cyklus s minimální délkou (zázemí je v uzlu  $u_1$ ) například pomocí Fleuryho algoritmu (viz podkapitola 2.1.1).



Zdroj: Upraveno dle Ondráková (2020)

**Obr. 6 Graf obsahující Eulerův cyklus**

Eulerův cyklus může vypadat takto:

$(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_4, u_5), (u_5, u_6), (u_6, u_3), (u_3, u_6),$   
 $(u_6, u_7), (u_7, u_2), (u_2, u_7), (u_7, u_8), (u_8, u_9), (u_9, u_{10}), (u_{10}, u_5),$   
 $(u_5, u_{10}), (u_{10}, u_{12}), (u_{12}, u_{11}), (u_{11}, u_9), (u_9, u_8), (u_8, u_1).$

Posledním krokem bude spočítání celkové minimální vzdálenosti, kterou projde zaměstnanec, aby zkontroloval celý obchod a vrátil se do zázemí. V daném příkladě je to 356 metrů.

## 2.2 Orientovaná úloha čínského listonoše

Silný souvislý orientovaný graf bude eulerovským pouze v případě, kdy se počet vstupujících hran do jakéhokoliv uzlu bude rovnat počtu vystupujících hran z něj. Jinými slovy musí platit tvrzení:  $deg^+(u) = deg^-(u)$  (viz podkapitola 1.2). Jak zmiňuje Dror (2000), tato podmínka byla oficiálně formulována Fordem a Fulkersonem (1962), ale byla známá dlouho předtím.

V roce 1973 byl navrhnout postup řešení orientované úlohy čínského listonoše (angl. Directed Chinese Postman Problem, dále jen **DCPP**) (Edmonds a Johnson, 1973, cit. dle Drora, 2000). Místo toho, aby se duplikovaly hrany mezi každou dvojicí uzlů lichého stupně, jako se provádí v případě neorientovaného grafu, bude tento úkol řešen pomocí dopravního problému. To znamená, že se vyrovnají počty vystupujících hran a vstupujících hran do každého uzlu z grafu. Definujeme  $I$  jako

množinu, kde je počet vstupujících hran větší než počet vystupujících hran, rozdíl je označen hodnotou  $s_i$ .  $J$  je množina, kde je počet vystupujících hran větší než počet vstupujících hran, rozdílem je hodnota  $d_j$ . Hodnota  $c_{ij}$  je zde délka nejkratší cesta mezi uzly  $u_i$  a  $u_j$ . Tehdy je formulace následující (Edmonds a Johnson, 1973, cit. dle Drora, 2000):

Minimalizovat

$$\sum_{u_i \in I} \sum_{u_j \in J} c_{ij} x_{ij} \quad (6)$$

za podmínek

$$\sum_{u_j \in J} x_{ij} = s_i, \quad (u_i \in I) \quad (7)$$

$$\sum_{u_i \in I} x_{ij} = d_j, \quad (u_j \in J) \quad (8)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (u_i \in I, u_j \in J). \quad (9)$$

Zde jsou důležitá omezení (7) a (8), která zaručují, že počet vystupujících a vstupujících hran do každého uzlu v grafu bude vyrovnán (bude přidán správný počet hran pro vyrovnání).

### 2.2.1 Hierholzerův algoritmus

V roce 1873 německý matematik Carl Hierholzer navrhl algoritmus pro nalezení Eulerova cyklu na eulerovském orientovaném grafu. Tento algoritmus má tři kroky (Závada, 2017):

**KROK 1:** Vyjdeme z libovolného uzlu  $u_i$  a pokračujeme až do návratu zpět do uzlu  $u_i$ . Tímto je vytvořen jeden uzavřený sled. Pokud jsou obsazeny všechny hrany z grafu, algoritmus končí. Jinak pokračujeme krokem 2.

**KROK 2:** Pokud zůstaly nezpracované hrany v grafu, je potřeba v nalezeném sledu najít uzel  $x$ , který je incidentní s nenulovým počtem hran, jež nejsou součástí předchozího sledu. Vyjdeme z uzlu  $x$  a najdeme další uzavřený sled. Opakujeme

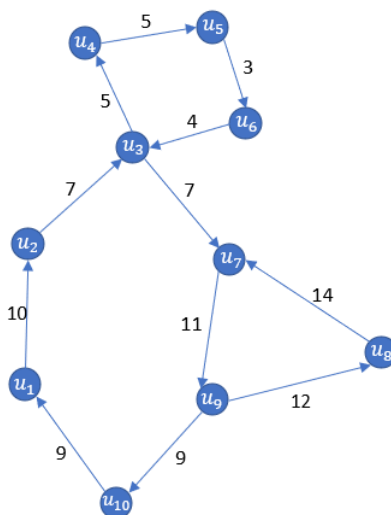
krok 2 tak dlouho, dokud nebudou zpracovány všechny hrany v grafu. Pak pokračujeme krokem 3.

KROK 3: Spojíme všechny uzavřené sledy dohromady. Tímto získáme Eulerův cyklus pro orientovaný graf.

### 2.2.2 Aplikace orientované úlohy čínského listonoše

V této části práce bude uveden jednoduchý příklad DCPD pro pochopení. Dále v praktické části bude řešena rozsáhlejší úloha.

Jako počáteční data použijeme graf na obrázku 7 (ohodnocení hran představuje jejich délku). Je nutno najít Eulerův cyklus (začátek je v uzlu  $u_1$ ) na tomto grafu pomocí DCPD. Na začátku je potřeba zjistit, jestli je graf eulerovský. To se dá zjistit pomocí kontroly stupňů všech uzlů z grafu. Pokud pro každý uzel  $u$  platí  $deg^+(u) = deg^-(u)$ , tj. počet vstupujících hran je roven počtu hran vystupujících, pak je graf eulerovský. Z daného obrázku je vidět, že dva uzly z grafu toto pravidlo porušují. Jedná se o uzly  $u_7$  a  $u_9$ . V takovém případě je nezbytné dodat správný počet existujících hran tak, aby výsledný graf byl eulerovským. V tomto jednoduchém příkladu není nutné využít řešení dopravního problému pro nalezení nejkratších cest (viz podkapitola 2.2), které jsou potřeba k vyrovnání stupňů uzlů, protože z grafu lze lehce pochopit, kam je nutno přidat hrany.



Obr. 7 Graf neobsahující Eulerův cyklus

Přidáním jedné hrany bude graf vyrovnán a bude mít Eulerův cyklus (viz Obr. 8). Nyní je potřeba najít tento cyklus a spočítat náklady. Toto bude provedeno pomocí

Hierholzerého algoritmu (viz podkapitola 2.2.1). Začátek je v uzlu  $u_1$ . První uzavřený sled bude vypadat takto:

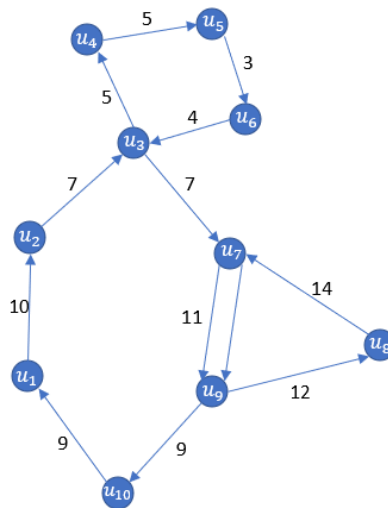
$(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_7), (u_7, u_9), (u_9, u_{10}), (u_{10}, u_1)$ . Nyní je zapotřebí zkontrolovat, jestli v grafu existují uzly, které jsou incidentní s nezpracovanými hranami. To jsou uzly  $u_3, u_7$  a  $u_9$ . Dále budou nalezeny ostatní uzavřené sledy:

- Sled 2:  $(u_3, u_4), (u_4, u_5), (u_5, u_6), (u_6, u_3)$
- Sled 3:  $(u_7, u_9), (u_9, u_8), (u_8, u_7)$

Poté je potřeba spojit všechny nalezené sledy do jednoho cyklu:

$(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_4), (u_4, u_5), (u_5, u_6), (u_6, u_3), (u_3, u_7), (u_7, u_9),$   
 $(u_9, u_8), (u_8, u_7), (u_7, u_9), (u_9, u_{10}), (u_{10}, u_1)$ .

Na závěr je nutno spočítat celkovou délku trasy. V našem případě je to 107.



**Obr. 8 Eulerovský graf**

### **3 Technické služby města Jindřichův Hradec**

V této kapitole budou stručně popsány informace týkající se společnosti Služby města Jindřichův Hradec s.r.o. (dále také „SMJH“). Bude pojednáno o hlavních činnostech, které firma SMJH ve městě Jindřichův Hradec zajišťuje a provádí. V závěrečné části bude provedena analýza současného stavu a technologií zimní údržby pozemních komunikací.

#### **3.1 O společnosti**

Firma Služby města Jindřichův Hradec s.r.o. vznikla jako dceřiná firma společnosti Města Jindřichův Hradec ke dni 28. 11. 2001 na základě rozhodnutí Zastupitelstva města.

Dle informací uvedených na internetových stránkách SMJH jsou hlavními činnostmi firmy především služby pro veřejný sektor. Toto se netýká pouze zabezpečení zimní údržby, svozu odpadů, čištění komunikací a chodníků ve městě. Jedná se například o údržbu zeleně, kam řadíme hrabání listí a trávy, výsadbu stromů, keřů a květin. Firma SMJH také zajišťuje instalaci, provoz a údržbu veřejného osvětlení v celém městě. Spolu s tím provádí údržbu dětských hřišť a instalaci nových. Dále je firma SMJH nájemcem městských lesů (cca 40 ha), kde hospodaří. Společnost je provozovatelem bazénu, aquaparku, sportovišť a farmářských trhů v Jindřichově Hradci. Bylo by obtížné uvést veškeré služby, které SMJH zajišťuje pro město, přesto se dá říci, že je jich poměrně mnoho. Zajímavé bude prozkoumat chod a technologie zimní údržby pozemních komunikací ve městě Jindřichův Hradec, což je předmětem následující podkapitoly.

#### **3.2 Informace týkající se zimní údržby pozemních komunikací**

Zimní údržba (dále také ZÚ) pozemních komunikací se provádí od 1. listopadu do 31. března, termín může být prodloužen v případě klimatických důvodů. „Hlavním cílem je zmírňovat závady ve sjízdnosti místních komunikací vzniklé povětrnostními podmínkami a jejich důsledky“ (Operační plán, 2019-2020). Pod pojmem místní komunikace rozumíme pozemní komunikace, které jsou veřejně dostupné a slouží místní dopravě na území města nebo obce.

Místní komunikace se dělí na čtyři skupiny podle pořadí důležitosti. V tabulce 1 lze nalézt informace týkající se tohoto pořadí.

**Tab. 1 Pořadí důležitosti**

|                           |  |
|---------------------------|--|
| 1. pořadí důležitosti     | rychlostní a sběrné místní komunikace s hromadnou veřejnou dopravou a s linkovou osobní dopravou, komunikace, které vedou ke zdravotnickým zařízením, sběrné a frekventované komunikace pro pěší |
| 2. pořadí důležitosti     | sběrné místní komunikace nezařazené do 1. pořadí (vč. komunikací pro pěší) a důležité obslužné místní komunikace   |
| 3. pořadí důležitosti     | ostatní obslužné místní komunikace a méně frekventované komunikace pro pěší  |
| ostatní místní komunikace | místní komunikace, pro které není stanoven časový limit pro zajištění jejich sjízdnosti a schůdnosti   |

Zdroj: Upraveno dle Operační plán ZÚ (2019-2020)

Důležité je to, že pro každé z těchto pořadí jsou stanoveny jednotlivé časové limity, tyto limity jsou uvedeny v tabulce 2.

**Tab. 2 Časové limity pro ZÚ**

| Pořadí důležitosti | Časový limit pro zajištění údržby                                   | Délka místních komunikací |
|--------------------|---|---------------------------|
| 1. pořadí          | do 4 hodin  | 54, 285 km                |
| 2. pořadí          | do 12 hodin   | 75,745 km                 |
| 3. pořadí          | Pouze po ošetření komunikací 1. a 2. pořadí, nejpozději do 48 hodin | 58,914 km                 |
| Ostatní            | Bez časového limitu   | (dle aktuálního zadání)   |
| <b>CELKEM</b>      |   | <b>188,944 km</b>         |

Zdroj: Upraveno dle Operační plán ZÚ (2019-2020)

Pro zajištění údržby délky komunikací 188,944 km má město k dispozici dvě skupiny vozidel, jedná se o sypače s pluhem a záložní vozidla. Bližší informace jsou uvedeny v tabulkách 3 a 4.

**Tab. 3 Sypače s pluhy**

| Typ vozidla     | Typ nástavby | Sypač kontrolující posyp: |
|-----------------|--------------|---------------------------|
| MB UNIMOG U300  | EPOKE        | ANO                       |
| MAN TGM         | EPOKE        | ANO                       |
| BOKIMOBIL 1152B | AB BOHEMIA   | ANO                       |
| LADOG G129      | KOBIT        | ANO                       |
| TREMO           | KOBIT        | ANO                       |
| JUNGOJET        | SIMED        | ANO                       |
| HAKO            | ABM TECHNOL. | ANO                       |
| STIGA BELOS     | STIGA        | ANO                       |
| STIGA BELOS     | STIGA        | ANO                       |
| Traktor SAME    | SIMED        | ANO                       |

(Upraveno dle Operační plán ZÚ, 2019-2020)

**Tab. 4 Záložní vozidla**

| Typ vozidla | Typ nástavby | Výbava         |
|-------------|--------------|----------------|
| SAME 14S    | AB Bohemia   | Čelní nakladač |
| ETESIE      | ETESIE       | Čelní pluh     |
| ETESIE      | ETESIE       | Čelní pluh     |
| ZETOR 7211  | Slatiňany    | Závěsný pluh   |
| BobCat      |              | Čelní nakladač |

(Upraveno dle Operační plán ZÚ, 2019-2020)

Záložní vozidla slouží k údržbě parkovišť a místních komunikací 2. a 3. pořadí nebo se využívají jako výpomoc pro údržbu komunikací 1. pořadí.

Všechny vozovky 1. pořadí jsou udržovány plužením i posypem chemických prostředků (zároveň) v celé délce pomocí mechanismů, jež dovolují rovnoměrné dávkování. Chemické látky se dělí na skupiny podle rozmrazovací účinnosti. Chlorid sodný (NaCl) se používá při teplotě nejvýše do -7 °C a chlorid vápenatý (CaCl<sub>2</sub>) při teplotě od -12 °C do -18 °C.



Vozovky 2. a 3. pořadí jsou zpravidla ošetřovány pouze plužením, ale v případě kalamitního stavu se údržba provádí pomocí posypového inertního materiálu, především na nebezpečných místech (křižovatky, zastávky MHD atd.). Metody údržby řeší dispečer ZÚ. Ostatní místní komunikace se trvale neudržují, pouze v odůvodněných případech (po provedení údržby vozovek 1., 2. a 3. pořadí), o tomto také rozhoduje dispečer ZÚ.

Rychlost vozidel při pluhování se pohybuje od 10 do 15 km/h. Bez pluhování je rychlost od 20 do 25 km/h.

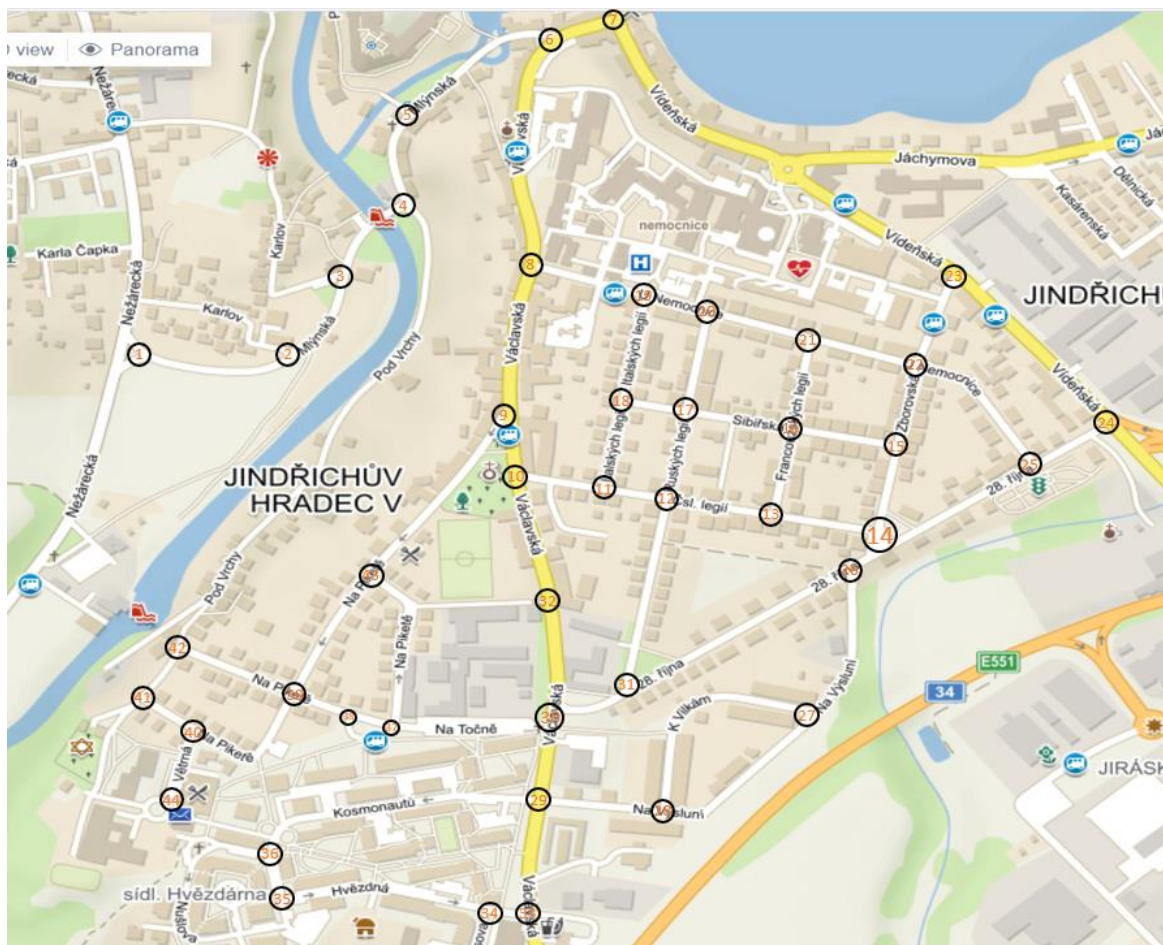
## **4 Optimalizace zimní údržby pozemních komunikací**

Tato kapitola bude věnována praktickému řešení DCPP pomocí algoritmu pro optimalizaci zimní údržby pozemních komunikací na vybraném menším úseku ve městě Jindřichův Hradec. Na začátku budou představeny data, jež byly poskytnuty společností SMJH, dále bude popsán celý průběh řešení této úlohy.

### **4.1 Definice problému**

Jak bylo uvedeno v kapitole 4, firma SMJH má ošetřovat úsek délkou 188,944 km pomocí 15 vozidel. Optimalizovat zimní údržbu pro takto velkou část města kvůli celkové náročnosti úlohy zde není možné. Proto byl vybrán ve městě jeden menší úsek, který je udržován jedním vozidlem. Rychlost vozidla bude počítána jako průměrná, při pluhování 13 km/h, bez pluhování 23 km/h. Nebudou také brány v úvahu priority vozovek, jelikož toto je nad rámec náročnosti pro vypracování této práce.

Na základě poskytnutých dat byl vybrán úsek o délce 8,557 km a je udržován pomocí vozidla MB UNIMOG U300. Toto vozidlo lze vidět v příloze 1. Pro názornější grafické znázornění byla zvolená oblast upravena tak, jak je možno pozorovat na obrázku 9 (uzly označují křižovatky nebo případné otočky).



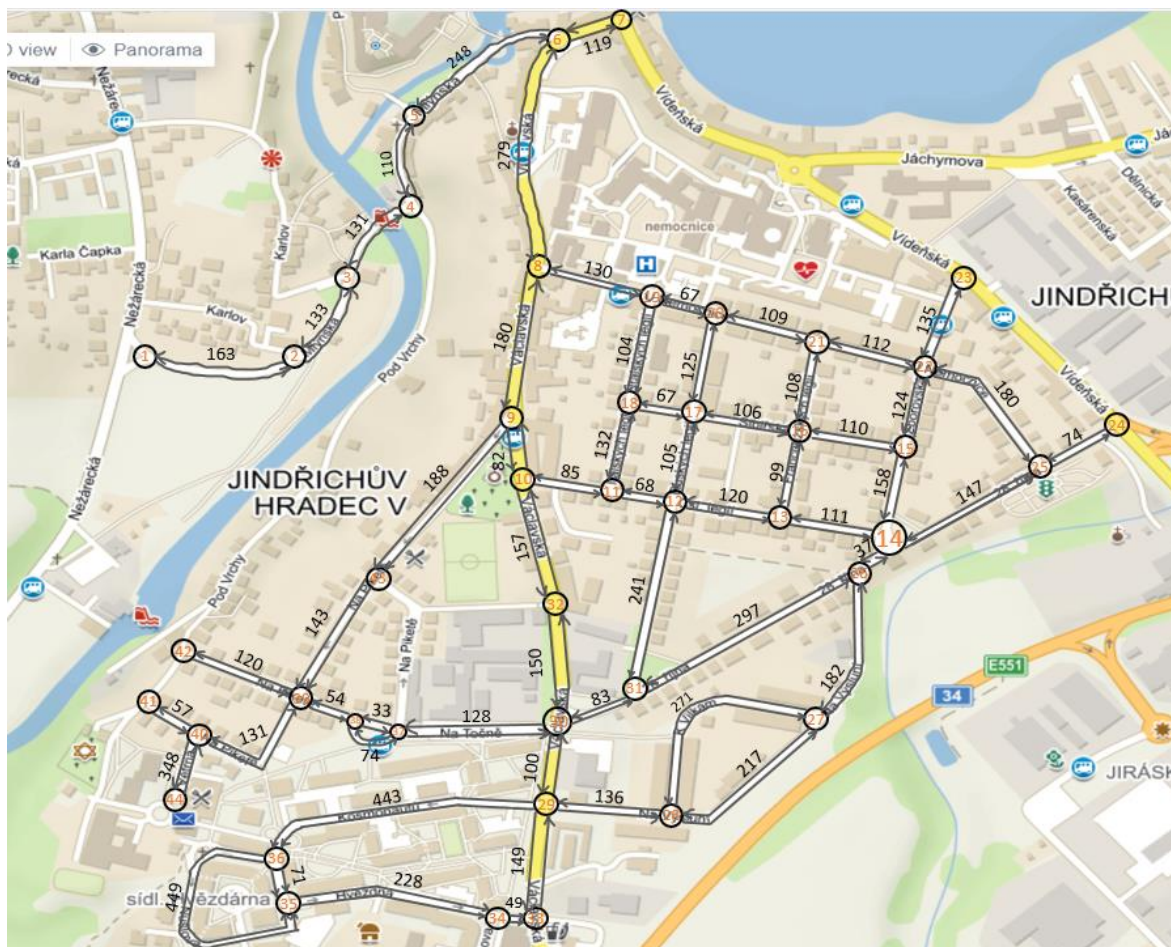
Zdroj: Upraveno dle mapy.cz (2020)

**Obr. 9 Vybraný úsek s uzly**

Důležitým bodem je, jak se obsluhují jednotlivé vozovky. Pro řešení této úlohy bude bráno v úvahu to, že dvousměrné ulice se obsluhují dvakrát v obou směrech, jednosměrné vozovky budou ošetřovány pouze v jednom směru, avšak dvakrát.

## 4.2 Řešení úlohy pomocí DCP

Na základě informací uvedených v podkapitole 4.1 je nutno nakreslit hrany mezi jednotlivými uzly a spolu s tím ještě ohodnotit každou z těchto hran (v metrech). Pro zjednodušení jsou hrany označeny  $(i, j)$  namísto  $(u_i, u_j)$ . Ohodnocení hran bylo provedeno pomocí dat dodaných od firmy SMJH. Jednotlivé úseky mohou být odlišné z důvodu zobrazení hran přes mapy na webu (viz Obr. 10).



Zdroj: Upraveno dle mapy.cz (2020)

**Obr. 10 Úsek s přidánými hranami**

Dále je zapotřebí zjistit, zda je daný graf eulerovský. V kapitole 1.2 bylo řečeno, že graf bude eulerovský právě tehdy, jestliže platí tvrzení pro každý uzel v grafu:  $deg^+(u) = deg^-(u)$ . Je potřeba najít takové uzly v grafu, pro které toto tvrzení neplatí. Počet hran jdoucích do uzlů je označen hodnotou  $deg^+(u)$  a počet hran vycházejících z uzlů je označen hodnotou  $deg^-(u)$ .

Byly spočítány všechny vnitřní a vnější polostupně pro každý uzel v daném grafu. Pro následující uzly platí  $deg^+(u) > deg^-(u)$ , přičemž čísla v závorkách označují rozdíl obou hodnot: 18 (2), 33 (2), 35 (2), 39 (2). Tyto uzly zařadíme do množiny  $I$ . Pro následující uzly platí  $deg^+(u) < deg^-(u)$ : 9 (2), 19 (2), 29 (2), 36 (2). Tyto uzly zařadíme do množiny  $J$ .

Na základě uzlů zařazených do množin je nutné vytvořit matici vzdálenosti (pro uzly, které nemají vyrovnaný počet vstupujících hran do uzlů a vystupujících hran z uzlů). Bližší informace jsou uvedeny v tabulce 4.

**Tab. 4 Matice vzdálenosti**

| <i>I</i> \ <i>J</i> | 9   | 19   | 29  | 36   |
|---------------------|-----|------|-----|------|
| 18                  | 299 | 259  | 596 | 1039 |
| 33                  | 638 | 870  | 149 | 592  |
| 35                  | 915 | 1147 | 426 | 869  |
| 39                  | 604 | 836  | 315 | 758  |

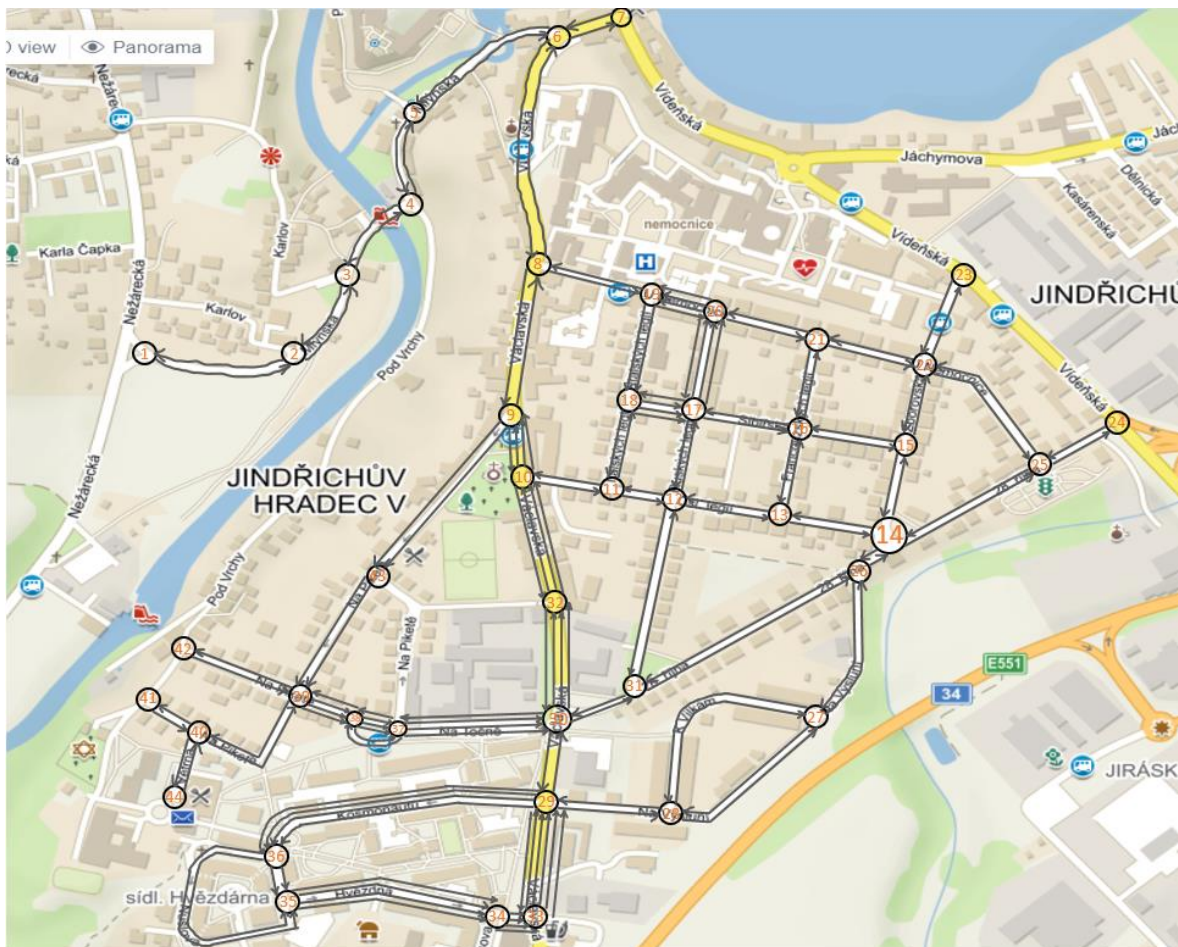
Nyní je potřeba najít nejkratší cesty mezi nevyrovnanými uzly, což provedeme pomocí dopravního problému v MS Excel. Z důvodu, že všechny nalezené uzly mají rozdíl v polostupních o hodnotu 2, hrany mezi těmito uzly budou přidány do grafu jako zdvojené.

Jak vypadá výsledek řešení dopravního problému je zobrazeno v tabulce 5.

**Tab. 5 Nejkratší cesty**

|    | 9 | 19 | 29 | 36 |
|----|---|----|----|----|
| 18 | 0 | 2  | 0  | 0  |
| 33 | 0 | 0  | 2  | 0  |
| 35 | 0 | 0  | 0  | 2  |
| 39 | 2 | 0  | 0  | 0  |

Tímto byly nalezeny nejkratší cesty mezi nevyrovnanými uzly v grafu. V tomto případě se celková vzdálenost zvýší o 3 762 m na rozdíl od původní vzdálenosti. Dále je nutné přidat zdvojené hrany do původního grafu, jak lze vidět na obrázku 11. Po vyrovnání vnitřních a vnějších polostupňů u všech uzlů můžeme tvrdit, že tento graf obsahuje Eulerův cyklus.



Zdroj: Upraveno dle mapy.cz (2020)

**Obr. 11 Eulerovský graf**

Nyní je možné získat Eulerův cyklus pomocí Hierholzerova algoritmu (viz podkapitola 2.2.1). Poté je možné spočítat délku trasy na dané oblasti a odhadnout čas potřebný pro údržbu daného úseku.

Začátkem tohoto grafu bude uzel 33, protože ten uzel je nejbližší k místu, odkud vyjíždí vozidlo (vzdálenost je 2,6 km). Dále je zapotřebí najít první uzavřený sled v grafu:

(33, 29), (29, 30), (30, 32), (32, 10), (10, 9), (9, 8), (8, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 6), (6, 8), (8, 9), (9, 10), (10, 32), (32, 30), (30, 29), (29, 33).

Následujícím krokem je kontrola, zda v grafu existují uzly, jež jsou incidentní s dalšími nezpracovanými hranami. Na základě těchto uzlů jsou vytvořeny další uzavřené sledy.

Sled 2:

(29, 36), (36, 35), (35, 34), (34, 33), (33, 29), (29, 36), (36, 35), (35, 34), (34, 33),  
(33, 29), (29, 36), (36, 35), (35, 34), (34, 33), (33, 29), (29, 36), (36, 35), (35, 34),  
(34, 33), (33, 29).

Sled 3:

(29, 28), (28, 27), (27, 28), (28, 29).

Sled 4:

(30, 37), (37, 38), (38, 37), (37, 38), (38, 39), (39, 38), (38, 37), (37, 30), (30, 32),  
(32, 10), (10, 9), (9, 43), (43, 39), (39, 42), (42, 39), (39, 38), (38, 37), (37, 30),  
(30, 32), (32, 10), (10, 9), (9, 43), (43, 39), (39, 40), (40, 41), (41, 40), (40, 44),  
(44, 40), (40, 39), (39, 38), (38, 37), (37, 30).

Sled 5:

(8, 19), (19, 20), (20, 21), (21, 22), (22, 23), (23, 22), (22, 15), (15, 14), (14, 26),  
(26, 31), (31, 30), (30, 31), (31, 26), (26, 27), (27, 28), (28, 27), (27, 26), (26, 14),  
(14, 15), (15, 22), (22, 21), (21, 20), (20, 19), (19, 8).

Sled 6:

(10, 11), (11, 18), (18, 17), (17, 20), (20, 19), (19, 18), (18, 17), (17, 20), (20, 19),  
(19, 18), (18, 17), (17, 20), (20, 17), (17, 18), (18, 11), (11, 12), (12, 31), (31, 12),  
(12, 13), (13, 14), (14, 25), (25, 22), (22, 25), (25, 24), (24, 25), (25, 14), (14, 13),  
(13, 16), (16, 15), (15, 16), (16, 21), (21, 16), (16, 17), (17, 12), (12, 17), (17, 16),  
(16, 13), (13, 12), (12, 11), (11, 10).

Nyní je podle algoritmu nutné spojit dohromady všechny sledy. Tímto je vytvořen Eulerův cyklus na daném grafu. Eulerův cyklus bude vypadat takto:

(33, 29), (29, 36), (36, 35), (35, 34), (34, 33), (33, 29), (29, 36), (36, 35), (35, 34),  
(34, 33), (33, 29), (29, 36), (36, 35), (35, 34), (34, 33), (33, 29), (29, 36), (36, 35),  
(35, 34), (34, 33), (33, 29), (29, 30), (30, 37), (37, 38), (38, 37), (37, 38), (38, 39),  
(39, 38), (38, 37), (37, 30), (30, 32), (32, 10), (10, 9), (9, 43), (43, 39), (39, 42),  
(42, 39), (39, 38), (38, 37), (37, 30), (30, 32), (32, 10), (10, 9), (9, 43), (43, 39),  
(39, 40), (40, 41), (41, 40), (40, 44), (44, 40), (40, 39), (39, 38), (38, 37), (37, 30),  
(30, 32), (32, 10), (10, 9), (9, 8), (8, 6), (6, 5), (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1), (1, 2), (2, 3),

(3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 6), (6, 8), (8, 19), (19, 20), (20, 21), (21, 22), (22, 23), (23, 22), (22, 15), (15, 14), (14, 26), (26, 31), (31, 30), (30, 31), (31, 26), (26, 27), (27, 28), (28, 27), (27, 26), (26, 14), (14, 15), (15, 22), (22, 21), (21, 20), (20, 19), (19, 8), (8, 9), (9, 10), (10, 11), (11, 18), (18, 17), (17, 20), (20, 19), (19, 18), (18, 17), (17, 20), (20, 19), (19, 18), (18, 17), (17, 20), (20, 17), (17, 18), (18, 11), (11, 12), (12, 31), (31, 12), (12, 13), (13, 14), (14, 25), (25, 22), (22, 25), (25, 24), (24, 25), (25, 14), (14, 13), (13, 16), (16, 15), (15, 16), (16, 21), (21, 16), (16, 17), (17, 12), (12, 17), (17, 16), (16, 13), (13, 12), (12, 11), (11, 10), (10, 32), (32, 30), (30, 29), (29, 28), (28, 27), (27, 28), (28, 29), (29, 33).

Dále bude vypočtena celková délka trasy pro jedno vozidlo na zvoleném úseku, která činí při pluhování 16,533 km a bez pluhování 4,211 km. Celkem tedy vzdálenost 20,744 km. Nyní je možné vypočítat přibližný čas pro údržbu zvolené oblasti, což je dle výše uvedeného postupu přibližně 88 minut.



## **Závěr**

V této práci byly analyzovány různé verze úlohy čínského listonoše a byly uvedeny příklady aplikace těchto úloh. Dále byla stručně popsána historie teorie grafů a spolu s tím i základní pojmy týkající se této teorie.

V praktické části byly popsány chod a technologie zimní údržby ve městě Jindřichův Hradec. V další části práce byla řešena úloha čínského listonoše pro orientovaný graf na vybrané oblasti ve městě, k čemuž byl použit matematický model pro řešení dané úlohy.

V praxi jsou navíc další podmínky, například hierarchická struktura, jež určují, které vozovky mají prioritu pro zajištění údržby. Bohužel matematický model pro hierarchickou úlohu je na tolik složitý, že není možné takovou úlohu řešit v rámci rozsahu práce. Z tohoto důvodu nebylo možné provést porovnání vlastních výsledků s provozními postupy firmy, která zimní údržbu provádí.

## Seznam literatury

DROR, M. *ARC ROUTING Theory, Solutions and Applications*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2000. ISBN 978-1-4613-7026-0.

FÁBRY, J. *Okružní a rozvozní úlohy*. Praha, 2014. Habilitační práce. Vysoká škola ekoomická v Praze.

FIALA, P. *Řízení projektů*. Praha: Oeconomica, 2008. ISBN 978-80-245-1413-0.

GROSS, J. L. a J. YELLEN. *Handbook of graph theory*. Boca Raton: CRC Press, c2004. ISBN 1-58488-090-2.

Mapy.cz [online]. Praha: Seznam.cz a. s., 2020 [cit. 2020-12-03]. Dostupné z: <https://en.mapy.cz/>

ONDRÁKOVÁ, L. *Některé úlohy z teorie grafů*. Brno, 2020. Bakalářská práce. Masarykova Univerzita.

*Operační plán 2019-2020*. Jindřichův Hradec: Služby města Jindřichův Hradec s.r.o., 2019 [cit. 2020-11-20].

PELIKÁN, J. *Diskrétní modely v operačním výzkumu*. Praha: Professional Publishing, 2001. ISBN 8086419177.

SEDLÁČEK, J. *Úvod do teorie grafů*. 2. vyd. Praha: Academia, 1977.

*Služby města Jindřichův Hradec* [online]. Jindřichův Hradec: Služby města Jindřichův Hradec s.r.o., 2020 [cit. 2020-11-20]. Dostupné z: <https://www.smjh.cz/>

*Škola Pifagora* [online]. Rusko: Irina Golub, 2016 [cit. 2020-11-08]. Dostupné z: [http://xn----7sbbao2ali0aghq2c8b.xn--p1ai/load/mir\\_matematiki/teorija\\_grafov/zadacha\\_kitajskogo\\_pochtalona/119-1-0-2600](http://xn----7sbbao2ali0aghq2c8b.xn--p1ai/load/mir_matematiki/teorija_grafov/zadacha_kitajskogo_pochtalona/119-1-0-2600)

TRADUS [online]. The Netherlands: OLX Group, 2017 [cit. 2020-11-28]. Dostupné z: <https://www.tradus.com/en/>

Wikimedia Commons [online]. United States: Wikimedia, 2020 [cit. 2020-11-2]. Dostupné z: [https://commons.wikimedia.org/wiki/Main\\_Page](https://commons.wikimedia.org/wiki/Main_Page)

ZÁVADA, J. *Minimalizace odchozího stupně vrcholu v téměř pravidelném grafu*. Ostrava, 2017. Diplomová práce. Technická univerzita Ostrava.

## Seznam obrázků a tabulek

### Seznam obrázků

|  |    |
|--|----|
| Obr. 1 Město Königsberg.....                                   | 8  |
| Obr. 2 Schéma města Königsberg .....                           | 9  |
| Obr. 3 Orientovaný graf, neorientovaný graf, smíšený graf..... | 10 |
| Obr. 4 Příklad hledání Eulerova cyklu .....                    | 13 |
| Obr. 5 Schéma obchodu.....                                     | 16 |
| Obr. 6 Graf obsahující Eulerův cyklus .....                    | 17 |
| Obr. 7 Graf neobsahující Eulerův cyklus .....                  | 19 |
| Obr. 8 Eulerovský graf.....                                    | 20 |
| Obr. 9 Vybraný úsek s uzly.....                                | 26 |
| Obr. 10 Úsek s přidanými hranami .....                         | 27 |
| Obr. 11 Eulerovský graf.....                                   | 29 |

### Seznam tabulek

|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| Tab. 1 Pořadí důležitosti.....    | 22 |
| Tab. 2 Časové limity pro ZÚ ..... | 22 |
| Tab. 3 Sypače s pluhy .....       | 23 |
| Tab. 4 Záložní vozidla .....      | 23 |
| Tab. 4 Matice vzdálenosti.....    | 28 |
| Tab. 5 Nejkratší cesty .....      | 28 |

## Seznam příloh

|                                |    |
|--------------------------------|----|
| Příloha 1 MB UNIMOG U300 ..... | 36 |
|--------------------------------|----|

## Příloha 1 MB UNIMOG U300



Zdroj: (Tradus, 2020)

## ANOTAČNÍ ZÁZNAM

|   |   |                      |      |
|---|---|----------------------|------|
| <b>AUTOR</b>                              | Mikhail Kaliaganov  |                      |      |
| <b>STUDIJNÍ PROGRAM/OBOR/SPECIALIZACE</b> | 6208R186 Podniková ekonomika a řízení provozu, logistiky a kvality  |                      |      |
| <b>NÁZEV PRÁCE</b>                        | Optimalizace údržby pozemních komunikací  |                      |      |
| <b>VEDOUCÍ PRÁCE</b>                      | doc. Ing. Jan Fábry, Ph.D   |                      |      |
| <b>KATEDRA</b>                            | KRVLK - Katedra řízení výroby, logistiky a kvality  | <b>ROK ODEVZDÁNÍ</b> | 2020 |
| <b>POČET STRAN</b>                        | 36  |                      |      |
| <b>POČET OBRÁZKŮ</b>                      | 11  |                      |      |
| <b>POČET TABULEK</b>                      | 5   |                      |      |
| <b>POČET PŘÍLOH</b>                       | 1   |                      |      |
| <b>STRUČNÝ POPIS</b>                      | <p>Cílem práce byl popis a analýza procesu zimní údržby pozemních komunikací ve městě Jindřichův Hradec. V rámci práce byl proveden rozbor poskytnutých dat. V teoretické části byly vysvětleny základní pojmy z teorie grafů a představeny různé verze úlohy čínského listonoše.</p> <p>V praktické části byla řešena úloha čínského listonoše pro vybranou oblast města pomocí matematického modelu. Bohužel kvůli složitosti modelu pro hierarchii, což je jednou z důležitých podmínek pro zimní údržbu, vlastní výsledky na závěru nebyly porovnány s reálnou praxí.</p> |                      |      |
| <b>KLÍČOVÁ SLOVA</b>                      | Teorie grafů, úloha čínského listonoše, zimní údržba pozemních komunikací   |                      |      |

## ANNOTATION

|                             |   |             |      |
|-----------------------------|---|-------------|------|
| <b>AUTHOR</b>               | Mikhail Kaliaganov  |             |      |
| <b>FIELD</b>                | 6208R186 Business Administration and Operations,<br>Logistics and Quality Management  |             |      |
| <b>THESIS TITLE</b>         | Optimization of road maintenance  |             |      |
| <b>SUPERVISOR</b>           | doc. Ing. Jan Fábry, Ph.D   |             |      |
| <b>DEPARTMENT</b>           | KRVLK -<br>Department of<br>Production,<br>Logistics and<br>Quality<br>Management   | <b>YEAR</b> | 2020 |
| <b>NUMBER OF PAGES</b>      |   |             |      |
|                             | 36  |             |      |
| <b>NUMBER OF PICTURES</b>   |   |             |      |
|                             | 11  |             |      |
| <b>NUMBER OF TABLES</b>     |   |             |      |
|                             | 5   |             |      |
| <b>NUMBER OF APPENDICES</b> |   |             |      |
|                             | 1   |             |      |
| <b>SUMMARY</b>              | <p>The aim of the work was to describe and analyze the process of winter maintenance of roads in the town of Jindřichův Hradec. An analysis of the provided data was performed within the work. The theoretical part explains the basic concepts of graph theory and introduce various versions of the Chinese Postman Problem.</p> <p>In the practical part, the role of the Chinese Postman Problem for a selected area of the city was solved using a mathematical model. Unfortunately, due to the complexity of the model for the hierarchy, which is one of the important conditions for winter maintenance, the actual results were not compared with real practice.</p> |             |      |
| <b>KEY WORDS</b>            | Graph theory, Chinese Postman Problem, winter maintenance of roads  |             |      |