Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky

Bakalářská práce

# Aplikační úlohy z matematiky s fyzikální tematikou

Vypracoval: Anna Klozarová

Vedoucí práce: Hašek Roman, Mgr. Ph.D.

České Budějovice 2022

## Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Aplikační úlohy z matematiky s fyzikální tematikou jsem vypracoval(a) samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 8. 7. 2022 ...............................

# Anotace

Matematika spolu s fyzikou prolínají četné aspekty našeho života. Jedná se o úzce propojené předměty, které společně formují naše porozumění světu, vesmíru, živé i neživé přírodě, společnosti a technice. Je naprosto přirozené, aby se tyto předměty náležitě prolínaly ve školní výuce. I když se nejedná o nijak nový poznatek a úlohy propojující matematiku s fyzikou jsou k dispozici v řadě zdrojů, stále stojí za úsilí se jejich shromažďování a prezentaci věnovat. Třeba i proto, že současné možnosti digitálních technologií a dostupného software nám dovolují přistoupit k zadání těchto úloh originálním inovativním způsobem. Úkolem bakalářské práce je shromáždit úlohy z matematiky s fyzikální tematikou na úrovni základní i střední školy, případně vysokoškolské přípravy budoucích učitelů matematiky, tyto úlohy vzorové vyřešit a jejich zadání i řešení prezentovat vhodnou formou, která dovolí uplatnění současných možností digitálních technologií ve výuce.

# Annotation

Mathematics and physics intertwine many aspects of our daily lives. Both of these subjects are very closely connected with each other and they help us with understanding of our world, space, animate and inanimate nature, society and technology. It is absolutely natural that both of these subjects are also included in our education.Even though it is nothing new and the tasks that intertwine math with physics are available in most of sources, it is still worth to collect and present the data. Perhaps also because current possibilities of digital technologies and available software allow us to approach the assignment of these tasks in an original and innovative way. The task of the bachelor's thesis is to collect problems from mathematics with a physics theme at the level of primary and secondary school or university training of future teachers of mathematics to solve these problems in a sample way and to present their assignments and solutions in a suitable form that allows the application of the current possibilities of digital technologies in teaching.

## Poděkování

Ráda bych touto cestou poděkovala Mgr. Romanovi Haškovi, Ph.D. za odborné vedení, podnětné rady a trpělivost. Mé díky patří i všem ostatním vyučujícím, kteří mi předali své znalosti. Také bych touto cestou ráda poděkovala všem, kteří mě podporují nejen v dobách studia.

# Obsah

# 1. Úvod

Matematika, královna všech věd, jejíž počátky sahají již do starověku. Počátky matematiky se příliš nelišily od učiva a osnov dětí v mateřských školách či v první třídě základních škol. Lidé se museli naučit počítat a také vymyslet, jak převést počty do psané podoby. Například chovatelé směňovali zvířata, tak potřebovali určit hodnotu, či počet. Tím vznikly číslice, čísla, číselné soustavy, početní operace. Ač nám se může zdát, že v dnešním světě jsou tyto poznatky naprosto jasné a primitivní, tehdy to byl obrovský krok kupředu.

Postupem času začali matematici objevovat další zákonitosti. Matematika se začala dělit na různá odvětví; geometrie, algebra, logika atd. Matematika popisuje změnu, umístění v prostoru, udává pravděpodobnost.

Své objevení zažívala nejen matematika, ale i fyzika. Fyzika popisuje a vysvětluje přírodní jevy.

Matematika je „jazykem" fyziky. Bez matematiky, tj. rovnic, popisu závislostí, grafů, číselného vyjádření, znalosti geometrie atd., by byla fyzika jen dlouhým slohovým cvičením. Matematika dodává fyzice řád, umožňuje nám počítat a popisovat změny. Díky matematice dokážeme chápat fyzikální zákonitosti, dokonale popsat závislosti a přírodní zákony.

Stále se setkáváme s názorem, že matematika s fyzikou jsou předměty zbytečné sloužící pouze k trápení žáků a studentů. Zamysleme se ovšem, co by se stalo, pokud bychom neznali fyzikální a matematické zákony…

Bez fyziky, a tudíž i bez matematiky, by nemohly technologie vůbec fungovat. Neměli bychom GPS navigace, počítače, elektřinu, leteckou dopravu a mnoho dalšího…

Chtěla bych ukázat, že fyzika s matematikou se v praxi prolínají a setkáváme se s nimi na každém kroku. Chtěla bych ukázat, že matematika není jen opisování písmen a čísel z tabule, ale že každému z nás může v životě pomoci. Chtěla bych ukázat, že fyzika není jen memorování nic neříkajících definic, ale ukázat, že opravdu popisuje vše, co se děje kolem nás.

Sbírka obsahuje 16 příkladů z matematiky s fyzikální tematikou. U každého příkladu jsou před samotným zadáním vypsány kapitoly matematiky, které při výpočtu uplatňujeme. Dále je kurzívou přiložen komentářem s vysvětlením postupu, případně fyzikálního jevu, kterým se v úloze zabýváme.

Příklady jsem vybrala právě takové proto, že by mohly být pro děti snáze představitelné. Příklady jsou určeny pro žáky základních škol a studenty středních škol. 2 příklady ze sbírky jsou převzaté, zbytek jsem sepsala sama. Inspiraci k příkladům jsem hledala především kolem sebe a v hodinách fyziky na základní škole.

## 2. Oběžné doby planet

Kapitoly matematiky: dělitelnost přirozených čísel, elipsa, aritmetický průměr, rozklad na prvočísla, nejmenší společný násobek

Oběžná doba planety Země je 365 dní. Oběžná doba planety Venuše je 225 dní. Za jakou nejkratší dobu se obě planety objeví opět současně ve svém periheliu?

Řešení:

*Jedná se o příklad na téma nejmenšího společného násobku. Pro periody oběhu proto provedeme prvočíselný rozklad. Ta čísla, která se opakují v obou rozkladech, použijeme ve výsledném součinu pouze jednou.*

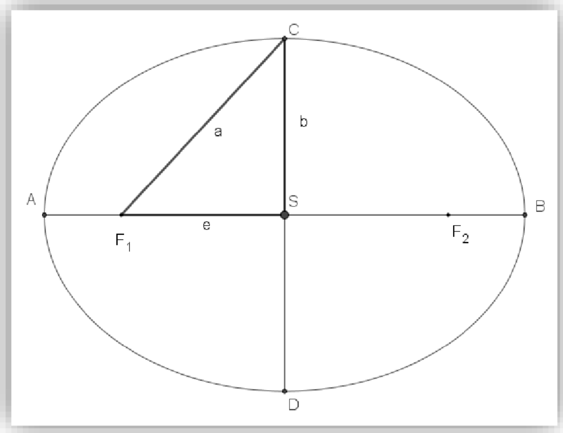
$$365 = \mathbf{5} \cdot 73$$

$$225 = 5 \cdot 45 = 5 \cdot 5 \cdot 9 = \mathbf{5} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3$$

$$n\,(365;\ 225) = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 73$$

$$\underline{\underline{n = 16\,425}}$$

Obě planety se v perihéliu objeví znovu za 16425 dní neboli 45 let.




**Obr. 1 Elipsa** *(zdroj: vlastní)*

*Výše uvedený výpočet je jednou z možností ke zjištění nejmenšího společného násobku. Rozepsat číslo na prvočinitele, označit prvočísla, která se vyskytují v obou rozkladech a ta pak použít v konečném výpočtu pouze jedenkrát. Ostatní prvočísla opíšeme a vše vynásobíme.*

*Další možnost je rozepsání součinu pomocí mocnin. Do výpočtu použijeme od každého základu nejvyšší mocninu, jež se v rozkladech vyskytuje. Tato metoda je použita v příkladu 16.3.*

*Další metodou je výpočet pomocí největšího společného dělitele.*

$$n(a;\ b) = \frac{a \cdot b}{D(a;\ b)}$$

*Planety Sluneční soustavy obíhají kolem Slunce po eliptických (Obr. 1) drahách málo odlišných od kružnic, přičemž v jednom ohnisku se nachází Slunce (1. Keplerův zákon)*[1].

*Bod, kdy je Země Slunci nejblíže se nazývá perihelium (= přísluní). V opačném případě se bavíme o aféliu (= odsluní).*

*Elipsa je charakterizována délkami poloos; hlavní (značíme a) a vedlejší (značíme b) (viz obr. 1). Z těchto dvou hodnot dokážeme dle Pythagorovy věty dopočítat excentricitu e neboli výstřednost elipsy.* $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

*Čím více se tato hodnota blíží nule, tím více se elipsa podobá kružnici (excentricita u kružnice je rovna 0). Tyto hodnoty lze dopočítat pomocí údajů, jež nám popisují vzdálenost planety od Slunce v periheliu a aféliu. Perihélium a afélium jsou z hlediska geometrie hlavní vrcholy elipsy. V naší elipse se za Slunce považuje ohnisko* $F_1$.

*U planety Země je vzdálenost od Slunce v perihéliu 147 097 000 km a v aféliu 152 099 000 km. Součet těchto dvou vzdáleností nám dohromady dá z geometrického hlediska dvojnásobek délky hlavní poloosy.*

$$2a = |AB| = 147\,097\,000 + 152\,099\,000 = 299\,196\,000\ km$$

$$a = |AS| = |BS| = \frac{299\,196\,000}{2} = 149\,598\,000\ km$$

$$e = a - |AF_1| = 149\,598\,000 - 147\,097\,000 = 2\,501\,000\ km$$

*Perihéliem prochází Země v současné době 4. ledna, aféliem 4. července.*

*Oběžné dráha každé z planet je popsána několika elementy, tzv. elementy dráhy*[2]. *Jedním z nich je sklon vůči rovině oběžné dráhy Země neboli ekliptice (značíme i), který u Venuše činí 3° 24'.*[3] *Největší sklon dráhy k ekliptice má Merkur, kde i=7°. Dalším z elementů dráhy je excentricita dráhy definovaná vztahem* $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ *(pozor*

---

[1] Encyklopedie fyziky. *1. Keplerův zákon* [online]. c2006-2022 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/74-prvni-kepleruv-zakon
[2] Kalendar.beda.cz. *Elementy dráhy* [online]. [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: https://kalendar.beda.cz/elementy-drahy
[3] Wikipedie Otevřená encyklopedie. *Venuše (planeta)* [online]. 2022 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Venu%C5%A1e_(planeta)

*na záměnu s excentricitou elipsy). Excentricitu dráhy u planety Země vypočítáme jednoduše, jako poměr excentricity elipsy a délky hlavní poloosy.*

$$e = \frac{2\,501\,000}{149\,598\,000} \doteq 0{,}018$$

## 3. 3. Keplerův zákon

Kapitoly matematiky: druhá mocnina, třetí mocnina, odmocnina

Využij data z předchozího příkladu a zjisti délku hlavní poloosy Venuše.

Řešení:

*Střední vzdálenost od Slunce je z geometrického hlediska délka hlavní poloosy a. Lze ji spočítat jako aritmetický průměr vzdálenosti planety od Slunce v periheliu a v aféliu (viz předchozí příklad).*

*K výpočtu využijeme 3. Keplerův zákon, který říká, že poměry druhých mocnin oběžných dob planet a poměr třetích mocnin jejich hlavních poloos jsou si rovny*[4]*. (Není nutné dosazovat v základních jednotkách)*

$$a_2 = 149\,598\,000\ km$$

$$T_1 = 225\ dnů$$

$$\underline{T_2 = 365\ dnů}$$

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

$$a_1^3 = \frac{T_1^2}{T_2^2} \cdot a_2^3$$

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{T_1^2}{T_2^2} \cdot a_2^3}$$

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{225^2}{365^2} \cdot 149\,598\,000^3}$$

$$\underline{\underline{a_1 = 108\,355\,815\ km}}$$

Hlavní poloosa Venuše má délku 108 355 815 km.

[4] Encyklopedie fyziky. *Třetí Keplerův zákon* [online]. c2006-2022 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/77-treti-kepleruv-zakon

*Délka hlavní poloosy je udávána 108 208 926 km*[5]*. Chyba našeho výsledku je způsobena zaokrouhlením délky hlavní poloosy Země.*

[5] Web snadno. *Sluneční soustava Venuše* [online]. 2011 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: https://planety00.webnode.cz/venuse/

## 4. Skládání sil

Kapitoly matematiky: Pythagorova věta, rovnoběžník, goniometrické funkce, vektor

Chlapci se při splouvání řeky zasekli v mělké vodě. Na přední špičce lodi jsou navázána 2 lana. Nemohli se však dohodnout, jakým směrem loď vyprostí. Jeden z nich chce loď vytáhnout ve směru toku řeky. Druhý směrem na břeh, což je kolmo ke směru toku řeky. První z chlapců tahá silou 400 N, druhý silou 300 N.

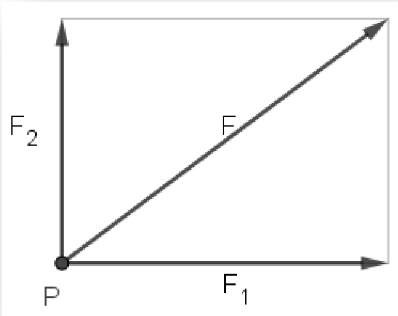
4.1 Jaká výsledná síla působí na loďku? Uvažujme pouze první moment, než se loď začne pohybovat.

4.2 Jaká je odchylka výsledné síly a síly o velikosti 300 N? Předpokládejme, že hladina vody je klidná a nefouká žádný vítr.

Řešení:

4.1

*Síla je vektorová veličina. Grafické řešení (viz obr. 2) obnáší utvoření rovnoběžníku sil, kde úhlopříčka onoho rovnoběžníku je výslednou silou. Pokud máme síly, které působí v kolmém směru, rovnoběžníkem je obdélník a jeho úhlopříčku lze jednoduše vypočítat pomocí Pythagorovy věty. Pokud by úhel mezi silami nebyl pravý, počítali bychom pomocí kosinové věty, případně s pomocí vektorů.*




**Obr. 2 Rovnoběžník sil** *(zdroj: vlastní)*

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2$$

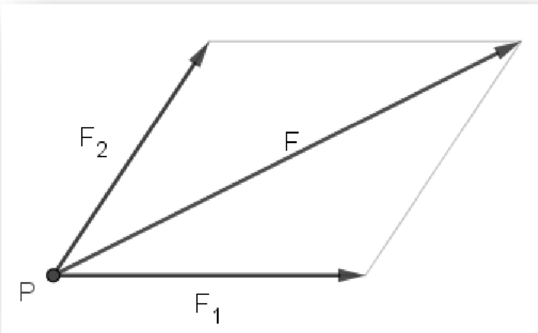
$$F^2 = 400^2 + 300^2$$

$$F^2 = 160\,000 + 90\,000$$

$$F^2 = 250\,000$$

$$F = \sqrt{250\,000}$$

$$\underline{\underline{F = 500\ N}}$$




***Obr 3. Rovnoběžník sil*** *(zdroj: vlastní)*

Výsledná síla působící na loďku je 500 N.

4.2

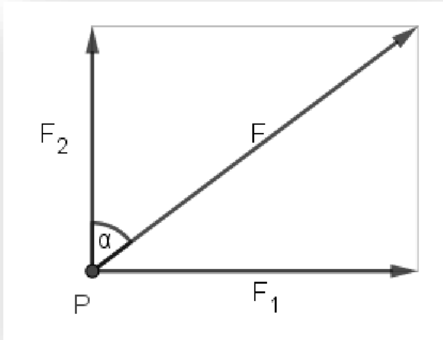
*K výpočtu odchylky použijeme goniometrické funkce definované v pravoúhlém trojúhelníku. Konkrétně funkci tangens, jež je rovna poměru velikosti protilehlé odvěsny ku velikosti přilehlé odvěsny.*

$$tg\alpha = \frac{F_1}{F_2}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{400}{300}\right)$$

$$\underline{\underline{\alpha \doteq 53°8'}}$$




**Obr. 4 rovnoběžník sil** (zdroj: vlastní)

Výsledná síla se od síly o velikosti 300 N odchýlí o 53°8´.

## 5. Krabice vyplněna různými materiály

Kapitoly matematiky: objem, hustota, poměr, převody jednotek, prvočíselný rozklad, největší společný dělitel, suma, součet, vážený průměr

Krabice o rozměrech 60 cm, 3 dm, 5 cm má být vyskládaná až po okraj bez mezer krychličkami různých materiálů.

5.1 Jaký bude mít krychlička rozměr, pokud má být co největší? Kolik takových krychliček bude krabice obsahovat?

5.2 Krychličky jsou zhotoveny ze tří různých materiálů. Počty krychliček zhotovených z mědi, železa a hliníku jsou v poměru 4: 3: 2. Jaká bude hmotnost obsahu krabice? Hustota hliníku je 2700 kg/m$^3$, mědi 8960 kg/m$^3$, železa 7870 kg/m$^3$.[6]

5.3 Třetina krabice je vyplněná hliníkem, dvě třetiny neznámým materiálem. Hmotnost obsahu krabice je 50,9 kg. Urči hustotu neznámého materiálu.

Řešení:

5.1

*Abychom zjistili největší možný rozměr krychličky, je třeba zjistit největší společný dělitel rozměrů krabice. K tomu potřebujeme rozměry krabice ve stejných jednotkách a jejich prvočíselné rozklady.*

*Pro počet krychliček je nutné znát celkový objem krabice, který vydělíme objemem jedné krychličky.*

$$a = 60\ cm$$

$$b = 3\ dm = 30\ cm$$

$$c = 5\ cm$$

$$60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$30 = 2 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

[6] Converter. *Hustota pevných látek* [online]. 2002 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: http://www.converter.cz/tabulky/hustota-pevne.htm

$$5 = 5$$

$$D(60; 30; 5) = 5$$

Každá z krychliček bude mít rozměr 5 cm.

$$V_{krabice} = a \cdot b \cdot c = 60 \cdot 30 \cdot 5 = 9\,000\ cm^3$$

$$V_{krychlička} = a^3 = 5^3 = 125\ cm^3$$

$$\frac{9\,000}{125} = 72$$

Krabice obsahuje 72 krychliček.

5.2

*Počet krychliček budeme dělit v uvedeném poměru. Musíme proto sečíst členy poměru, abychom zjistili, kolik krychliček odpovídá 1 dílu. Pro celkovou hmotnost musíme znát hustoty materiálů a počet krychliček zhotovených z jednotlivých materiálů.*

$$4:3:2 \Rightarrow 4 + 3 + 2 = 9 \Rightarrow \frac{72}{9} = 8$$

$$1\ díl \rightarrow 8\ krychliček$$

$$měděné \rightarrow 4\ díly \rightarrow 4 \cdot 8 = 32\ krychliček$$

$$železné \rightarrow 3\ díly \rightarrow 3 \cdot 8 = 24\ krychliček$$

$$hliníkové \rightarrow 2\ díly \rightarrow 2 \cdot 8 = 16\ krychliček$$

Krabice obsahuje 32 měděných, 24 železných a 16 hliníkových krychliček.

$$\rho_{Cu} = 8\,960\ kg \cdot m^{-3}$$

$$\rho_{Al} = 2\,700\ kg \cdot m^{-3}$$

$$\rho_{Fe} = 7\,870\ kg \cdot m^{-3}$$

$$V_{krychlička} = 125\ cm^3 = 1{,}25 \cdot 10^{-4}\ m^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V$$

$$m = \sum_{i=1}^{n} \rho_i V_i$$

$$m = \rho_{Cu} \cdot V_{Cu} + \rho_{Fe} \cdot V_{Fe} + \rho_{Al} \cdot V_{Al}$$

$$m = 8\,960 \cdot 32 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-4} + 7\,870 \cdot 24 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-4} + 2\,700 \cdot 16 \cdot 1{,}25 \cdot 10^{-4}$$

$$\underline{\underline{m = 64{,}85\ kg}}$$

Hmotnost krabice bude 64,85 kg,

5.3

*Nejprve vypočítáme průměrnou hustotu obou materiálů pomocí definice hustoty. Protože nemáme stejný objem hliníku i neznámého materiálu, je třeba průměrnou hustotu brát jako vážený průměr.*

$$m = 50{,}9\ kg$$

$$V = 9 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

$$\rho_1 = 2\,700\ kg \cdot m^{-3}$$

$$\rho_2 = ?\ [kg/m^3]$$

$$\rho_{průměrná} = \frac{m}{V} = \frac{50{,}9}{9 \cdot 10^{-3}} = 5656$$

$$\rho_{průměrná} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \rho_1 + \frac{2}{3} \cdot \rho_2}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}$$

$$5\,656 = \frac{\frac{1}{3} \cdot 2\,700 + \frac{2}{3} \cdot \rho_2}{1}$$

$$5\,656 = 900 + \frac{2}{3}\rho_2$$

$$\underline{\underline{\rho_2 = 7\,134\ kg \cdot m^{-3}}}$$

*Pomocí tabulek dohledáme nejpravděpodobnější materiál, který by mohl v bedně být. Hustota zinku se uvádí 7,14 g/cm.[7] Při převedení našeho výsledku na stejné jednotky a zaokrouhlení řekneme, že neznámým materiálem je zinek.*

Neznámým materiálem v krabici je pravděpodobně zinek.

[7] Converter. *Hustota pevných látek* [online]. 2002 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: http://www.converter.cz/tabulky/hustota-pevne.htm

## 6. Stav najetých kilometrů v jedoucím autě

Kapitoly matematiky: funkce, výrazy, interval, lineární rovnice

Auto jede po silnici konstantní rychlostí 90 km/hod. V době, kdy hodiny ukazovaly čas 21:00, byl stav kilometrů na tachometru 116,0. O něco později byl stav kilometrů i čas na hodinách zapsán pomocí stejných číselných zápisů. V kolik hodin to mohlo být?[8]

Řešení:

*Nejprve je nutné vytvořit funkce, jak se bude měnit stav hodin a stav tachometru s přibývajícími minutami. Tyto funkce pak budeme porovnávat. U rychlosti je třeba převést rychlost na jednotku, která se vztahuje na minuty, nikoliv na hodiny. Dále potřebujeme celé číslo, takže budeme dráhu mít v desetinásobcích kilometru. Protože dopředu počítáme s tím, že rovnici budeme násobit deseti, na počátku budeme deseti dělit. U času musíme zohlednit to, že nepočítáme jen v desítkové soustavě. Počet minut od počátku měření označíme x. Pro přehlednost označíme funkci indexem, který nám říká, ve které hodině jev nastane.*

$$x \in \mathbb{N}$$

$$v = 90\ km \cdot hod^{-1} = 1{,}5\ km \cdot min^{-1}$$

$$\frac{s(x)}{10} = \frac{s_0 + vt}{10} = 116{,}0 + 1{,}5x$$

$$s(x) = s_0 + vt = 1\ 160 + 15x$$

$$t_1(x) = 2\ 100 + x, pro\ x \in \langle 0;\ 59 \rangle$$

$$t_2(x) = 2\ 200 + x - 60, pro\ x \in \langle 60;\ 119 \rangle$$

$$t_3(x) = 2\ 300 + x - 120, pro\ x \in \langle 120;\ 179 \rangle$$

atd.

[8] *Matematický klokan* [online]. 2005 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/phocadownload/sborniky/sbornik_klokan_2005.pdf

*Pokud bychom chtěli obecné vyjádření funkce pro zápis času, pracovali bychom dále s funkcemi dolní celá část* $\lfloor x \rfloor$ *a zlomková část* $\{x\}$ *(zlomkovou část lze nahradit její definicí* $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$*, kvůli případnému programování). Funkce by pak měla tento tvar:*

$$t(x) = 2\,100 + 100 \left\lfloor \frac{x}{60} \right\rfloor + \left\{ \frac{x}{60} \right\} \cdot 60$$

$$t(x) = 2\,100 + 100 \left\lfloor \frac{x}{60} \right\rfloor + \left( \frac{x}{60} - \left\lfloor \frac{x}{60} \right\rfloor \right) \cdot 60$$

$$t(x) = 2100 + 40 \left\lfloor \frac{x}{60} \right\rfloor + x$$

1. *Situace (požadovaný jev nastane v první hodině měření)*

$$2\,100 + x = 1160 + 15x$$

$$940 = 14x$$

$$x = \frac{940}{14} = \frac{470}{7} \doteq 67{,}14\,min$$

*Toto řešení není vyhovující hned ze dvou důvodů; výsledkem není celé číslo a nespadá do námi požadovaného intervalu.*

2. *Situace (požadovaný jev nastane ve druhé hodině měření)*

$$2200 + x - 60 = 1160 + 15x$$

$$980 = 14x$$

$$x = \frac{980}{14} = 70\,min$$

*Toto řešení je vyhovující; výsledek je celé číslo a zároveň spadá do požadovaného intervalu. Hodiny tedy budou ukazovat 22:10 a tachometr 221,0.*

## 7. Sjetí vzorku pneumatiky

Kapitoly matematiky: výrazy, obvod kruhu, funkce

Tachometr automobilu či kamionu funguje na principu počtu otáček hřídele za jednotku času. Tachometr je nastavený na průměr pneumatiky, který nepočítá s opotřebením; sjetím vzorku. Jak se změní zobrazovaná vzdálenost na tachometru při sjetí pneumatiky o 1 mm? Průměr pneumatiky počítejme 22,5“.

7.1 Jak se změní stav najetých kilometrů při sjetí pneumatik?

7.2 Dva nákladní automobily projeli stejnou trasu. Vůz s novými pneumatikami ukazoval najetou vzdálenost 1000 km. Vůz s ojetými pneumatikami vzdálenost o 20 km více. O kolik mm byl sjetý vzorek pneumatiky? Při výpočtu zanedbáváme sjetí pneumatiky během této jízdy.

7.3 Pokud by byl vzorek sjetý na maximální přípustnou hodnotu, jakou hodnotu by byla ukázána na počítadle kilometrů na 2000km trase? Maximální přípustná hodnota u zimní pneumatiky je 6 mm, nová pneumatika má 20 mm. Při výpočtu zanedbáváme sjetí pneumatiky během této jízdy.

Řešení:

*Nejprve si sestavíme v závislosti na x výraz pro průměr pneumatiky, z něhož vytvoříme výraz pro její obvod. Proměnná x je nutná vynásobit 2 a $10^{-3}$. Dvěma proto, že x je měřeno pouze na jedné straně a $10^{-3}$ kvůli převodu na základní jednotku; metr. Počet otáček hřídele je pouze poměr mezi ujetými kilometry a obvodem pneumatiky. Ujetá vzdálenost je pak součin počtu otáček a obvodu. V naší funkci násobíme reálný obvod počtem otáček z kalibrovaného obvodu, protože s těmito hodnotami pracuje počítač v autě. Proměnná y vyjadřuje ujetou vzdálenost měřenou v metrech.*

| | Realita | kalibrace |
|---|---|---|
| sjetí vzorku [mm] | x | 0 |
| průměr $d$ [m] | $0{,}572 - 2x \cdot 10^{-3}$ | $22{,}5'' = 0{,}572$ |
| obvod [m] $o = \pi d$ | $(0{,}572 - 2x \cdot 10^{-3})\pi$ | $0{,}572\pi$ |
| počet otáček hřídele při ujetí $y$ km | $\frac{y}{d} = \frac{y}{(0{,}572 - 2x \cdot 10^{-3})\pi}$ | $\frac{y}{d} = \frac{y}{0{,}572\pi}$ |

| | | |
|---|---|---|
| ujetá vzdálenost *s* [m] | $\frac{y}{0{,}572\cancel{\pi}} \cdot (0{,}572 - 2x \cdot 10^{-3})\cancel{\pi}$ $=$ $= \frac{y}{0{,}572} \cdot (0{,}572 - 2x \cdot 10^{-3})$ | $\frac{y}{\cancel{0{,}572\pi}} \cdot \cancel{0{,}572\pi} =$ $= y$ |

7.1

*Nechť y je zobrazovaná vzdálenost ujetá vozidlem v m a x sjetí vzorku v mm, pak funkce pro reálně ujetou vzdálenost je:*

$$s = f(x, y) = \frac{y}{0{,}572} \cdot (0{,}572 - 2x \cdot 10^{-3})$$

7.2

$$1\,000 \cdot 10^3 = \frac{1\,020 \cdot 10^3}{0{,}572} \cdot (0{,}572 - 2x \cdot 10^{-3})$$

$$10^6 \cdot 0{,}572 = 1\,020 \cdot 0{,}572 \cdot 10^3 - 1\,020 \cdot 2x$$

$$(10^6 - 1\,020 \cdot 10^3) \cdot 0{,}572 = -1\,020 \cdot 2x$$

$$x = \frac{(10^6 - 1\,020 \cdot 10^3) \cdot 0{,}572}{-2 \cdot 1\,020}$$

$$x = 5{,}61\ mm$$

Vzorek byl sjetý o 5,61 mm.

7.3

$$s = 2\,000\ km = 2 \cdot 10^6\ m$$

$$x = 20 - 6 = 14\ mm$$

$$s = \frac{y}{0{,}572} \cdot (0{,}572 - 2x \cdot 10^{-3})$$

$$2 \cdot 10^6 = \frac{y}{0{,}572} \cdot (0{,}572 - 2 \cdot 14 \cdot 10^{-3})$$

$$\frac{2 \cdot 10^6}{0{,}572 - 2 \cdot 14 \cdot 10^{-3}} = \frac{y}{0{,}572}$$

$$\frac{2 \cdot 10^6 \cdot 0,572}{0,572 - 2 \cdot 14 \cdot 10^{-3}} = y$$

$$y \doteq 2\ 102\ 941\ m \doteq 2\ 103\ km$$

$$2\ 103 - 2\ 000 = 103$$

Tachometr bude ukazovat 2 103 km, což je o 103 km více než skutečnost.

## 8. Houpačka

Kapitoly matematiky: vektor, vektorový součin, suma, lineární rovnice, vyjádření ze vzorce

Na dětské houpačce jsou na každé straně 2 sedačky (předpokládejme, že hmotnost je rozložená symetricky). První sedačka je vzdálená 2 m od středu otáčení, druhá 30 cm od konce ramena. Na levé straně sedí na první sedačce Patrik, který váží 19 kg, na druhé Lukáš vážící 23 kg. Na pravé straně sedí na první sedačce Lucie, která váží 20 kg (viz. obr. 4). Jakou hmotností je nutné zatížit poslední sedačku, aby byla houpačka v rovnováze?

Řešení:

*Houpačka je jedním z jednoduchých strojů; dvojzvratná páka. Veličina, jež popisuje otáčivé účinky síly, se nazývá moment síly. Moment síly je vektorová veličina, kterou vypočítáme pomocí součinu*

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$$

*kde* $\vec{F}$ *je vektor síly,* $\vec{r}$ *rameno síly. Tento vektor udává kolmou vzdálenost působiště síly od osy otáčení a odchylku. Rovnováha nastane, právě tehdy, když součet všech momentů bude roven nule:*

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \times \vec{r_i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M_i} = \vec{0}$$

*Lze počítat i bez použití vektorů. Odchylka síly od ramene se ve vztahu vyskytne jako argument funkce sinus.*

$$M = F \cdot r \cdot \sin \alpha$$

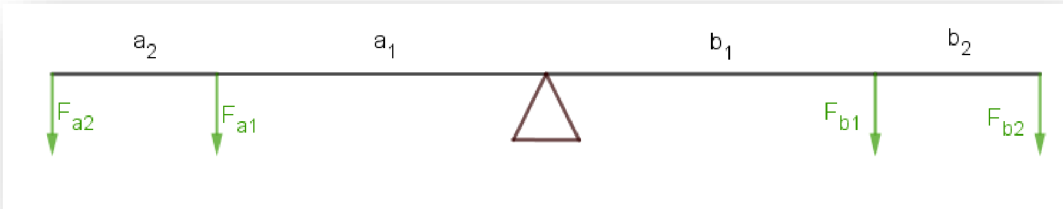
*Ze znalosti goniometrických funkcí vyvodíme skutečnost, že síla, jejíž vektor prochází středem otáčení, nemá na těleso otáčivý účinek* ($\sin 0° = 0$)*. Pokud je síla navíc kolmá k ramenu síly* ($\alpha = 90°$)*, lze vzorec zjednodušit na tvar*

$$M = F \cdot r$$

*protože* $\sin 90° = 1$*. V našem případě tedy*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot r_i$$

*Dále nezapomínejme na znaménkovou konvenci, kterou je nutno dodržet. Pokud síla tělesem otáčí ve směru hodinových ručiček, má moment síly záporné znaménko. Pokud proti směru, pak kladné.*




***Obr. 5 Schéma houpačky*** *(zdroj: vlastní)*

$$m_{a2} = 19\ kg$$

$$m_{a1} = 23\ kg$$

$$m_{b2} = 20\ kg$$

$$m_{b1} = ?\ [kg]$$

$$r_{a2} = r_{b2} = 2\ m$$

$$r_{a1} = r_{b1} = 2\ m - 30\ cm = 170\ cm = 1{,}7\ m$$

$$g = 9{,}81\ m \cdot s^{-1}$$

$$F_i = m_i \cdot g$$

$$M_i = F_i \cdot r_i$$

$$M_i = m_i \cdot g_i \cdot r_i$$

$$0 = m_{a2} \cdot g \cdot r_{a2} + m_{a1} \cdot g \cdot r_{a1} - m_{b1} \cdot g \cdot r_{b1} - m_{b2} \cdot g \cdot r_{b2}$$

$$-m_{a2} \cdot g \cdot r_{a2} - m_{a1} \cdot g \cdot r_{a1} + m_{b2} \cdot g \cdot r_{b2} = -m_{b1} \cdot g \cdot r_{b1}$$

$$m_{b1} = \frac{g \cdot (m_{a2} \cdot r_{a2} + m_{a1} \cdot r_{a1} - m_{b2} \cdot r_{b2})}{g \cdot r_{b1}}$$

$$m_{b1} = \frac{m_{a2} \cdot r_{a2} + m_{a1} \cdot r_{a1} - m_{b2} \cdot r_{b2}}{r_{b1}}$$

$$m_{b1} = \frac{19 \cdot 2 + 23 \cdot 1{,}7 - 20 \cdot 2}{1{,}7}$$

$$\underline{\underline{m_{b1} = 21{,}82\ kg}}$$

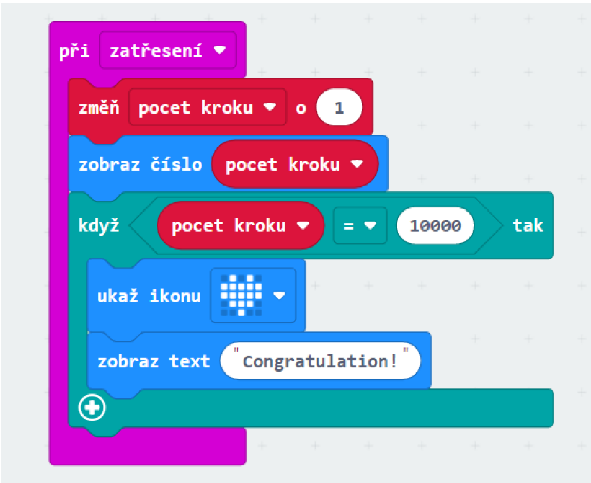
Aby byla houpačka rovnoměrně zatěžkána, je potřeba, aby si na poslední prázdnou sedačku sedlo dítě, které bude vážit 21,82 kg.

# 9. Krokoměr

Kapitoly matematiky: trojčlenka, poměr

Většina dnešních mobilních telefonů je vybavena počítadlem kroků. Kroky může počítat samotný telefon, fitness náramek či chytré hodinky. Máme díky tomu přehled, kolik kroků jsme nachodili. Princip fungování je takový, že přístroj zaznamenává a počítá své otřesy. Ty pak může násobit délkou kroku uživatele, z čehož dostaneme námi uraženou vzdálenost.

Do tabulky byly zaznamenávány kroky dvou chlapců (říkejme jim Milan a David) po dobu jednoho měsíce. Průměrná délka jejich kroku je 65,49 cm a 64,44 cm. Při výuce na základních školách si i žáci mohou jednoduchý krokoměr vytvořit s pomocí micro:bitu. Micro:bit je destička, pomocí níž si mohou žáci vyzkoušet základy programování. Program vytvoříme na internetové stránce https://makecode.microbit.org a pomocí USB kabelu propojíme. Destička reaguje na stisk dvou tlačítek, na zatřesení, na teplotu. Jednoduchý program by mohl vypadat nějak takto (viz. obr. 6).




***Obr. 6 Krokoměr*** *(zdroj: https://makecode.microbit.org/#editor, screenshot)*

Milan s Davidem šli na společný výlet. Milanův počet kroků byl 13 561. Davidovi se krokoměr cestou porouchal. Předpokládejme, že šli chlapci stejnou trasou a délka kroku každého z nich se shodovala s průměrnou hodnotou délky jejich kroku.

9.1 Jakou hodnotu by mělo ukazovat Davidovo zařízení?

9.2 Jakou rychlostí chlapci šli, pokud jim vycházka trvala 3 hodiny včetně půlhodinové přestávky? Předpokládejme, že po celou dobu chůze se jejich rychlost neměnila.

Řešení:

9.1

*Jelikož známe počet kroků a délku kroku, dopočítáme celkovou vzdálenost, kterou Milan ušel. A protože David ušel stejnou vzdálenost, dopočítáme počet Davidových kroků. Rychlost spočítáme ze známé dráhy a času.*

$$n = 13\,561\ kroků$$

$$d_{krokM} = 65{,}49\ cm = 0{,}654\,9\ m$$

$$s = ?\ [m]$$

$$s = n \cdot d$$

$$s = 13561 \cdot 0{,}6549$$

$$\underline{\underline{s = 8\,881\ m = 8{,}881\ km}}$$

$$s = 8{,}881\ km = 8\,881\ m$$

$$n = ?\ (kroky)$$

$$d_{krokD} = 64{,}44\ cm = 0{,}644\,4\ m$$

$$s = n \cdot d$$

$$n = \frac{s}{d}$$

$$n = \frac{8\,881}{0{,}644\,4}$$

$$\underline{\underline{n = 13\,782\ kroků}}$$

*Příklad lze vyřešit i pomocí trojčlenky, kde budeme porovnávat veličiny délka kroku a počet kroků. Výhodou je, že nemusíme převádět na základní jednotky.*

$$\begin{array}{lr} \downarrow \; 65{,}49\ cm \text{.........................................} 13\ 561\ kroků & \uparrow \\ \downarrow \; 64{,}44\ cm \text{.........................................} x\ kroků & \uparrow \end{array}$$

$$\frac{x}{13\ 561} = \frac{65{,}49}{64{,}44}$$

$$x = \frac{65{,}49}{64{,}44} \cdot 13\ 561$$

$$\underline{\underline{x = 13\ 782\ kroků}}$$

Davidovo zařízení bude ukazovat 13 782 kroků.

9.2

$$s = 8{,}881\ km$$

$$t_{celkový} = 3\ hod$$

$$t_{pauza} = 0{,}5\ hod$$

$$v = ?\ (km \cdot hod^{-1})$$

$$s = v \cdot t$$

$$v = \frac{s}{t_{celkový} - t_{pauza}}$$

$$v = \frac{8{,}881}{3 - 0{,}5}$$

$$\underline{\underline{v = 3{,}55\ km \cdot hod^{-1}}}$$

## 10.Sluneční světlo

Kapitoly matematiky: mocniny 10

Vzdálenost Země a Slunce v aféliu je 152 099 000 km, v perihéliu je 147 097 000 km.

10.1 Za jak dlouho dorazí světlo ze Slunce na povrch Země, pokud je v aféliu?

10.2 Za jak dlouho dorazí světlo ze Slunce na povrch Země, pokud je v periheliu?

Řešení:

10.1

$$v = c = 3.10^8\ m \cdot s^{-1}$$

$$s_a = 152\ 099\ 000\ km = 1{,}52\ 099 \cdot 10^8\ km = 1{,}52\ 099 \cdot 10^{11}\ m$$

$$t_a = ?\ [s]$$

$$t_a = \frac{s_a}{v}$$

$$t_a = \frac{1{,}52\ 099 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8}$$

$$\underline{\underline{t_a = 507\ s = 8{,}45\ \text{min}}}$$

Pokud je Země v aféliu, světlo ze Slunce dorazí za 8,45 minut.

10.2

$$v = c = 3.10^8\ m \cdot s^{-1}$$

$$s_p = 147\ 097\ 000\ km = 1{,}47\ 097 \cdot 10^8\ km = 1{,}47\ 097 \cdot 10^{11}\ m$$

$$t_p = ?\ [s]$$

$$t_p = \frac{s_p}{v}$$

$$t_p = \frac{1{,}47\ 097 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8}$$

$$\underline{\underline{t_p = 490\ s = 8{,}16\ \text{min}}}$$

Pokud je Země v periheliu, světlo ze Slunce dorazí za 8,16 minut.

## 11.Světelný rok

Kapitoly matematiky: převody jednotek

Jaké vzdálenosti odpovídá jednotka světelný rok?

Řešení:

*Světelný rok je jednotka délky, která odpovídá vzdálenosti, kterou urazí světlo ve vakuu za 1 rok. Známe tedy čas a rychlost. Tato jednotka se používá v astronomii pro obrovské vzdálenosti. Označení světelný rok nám dá alespoň trochu představy například o velikosti galaxií. V rámci naší sluneční soustavy se častěji využívá jednotka značená AU (= astronomic unit), která odpovídá střední vzdálenosti Země od Slunce)*

$$v = 3 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}$$

$$t = 1\,rok = 365\,dní = 365 \cdot 24\,hod = 365 \cdot 24 \cdot 3600\,s = 31\,536\,000\,s = 31{,}536 \cdot 10^6\,s$$

$$\underline{s = ?\ [m]}$$

$$s = v \cdot t$$

$$s = 3 \cdot 10^8 \cdot 31{,}536 \cdot 10^6$$

$$\underline{\underline{s = 9{,}460\,8\ \cdot 10^{15}\,m}}$$

## 12. Běžkyně

Kapitoly matematiky: geometrická posloupnost, exponenciální nerovnice

Běžkyně má k dispozici dráhu o délce 1000 m. Aby neběžela krátkou vzdálenost, vždy se v cíli otočí a běží pouze polovinu délky dráhy, kterou uběhla v předchozím kole. Poslední kolo nebude kratší než 10 m.

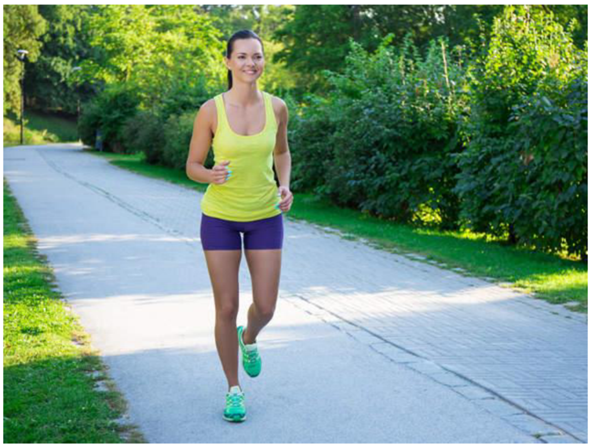
12.1 Kolik km uběhne celkem?

12.2 Jak dlouho jí trval trénink, jestliže běžela průměrnou rychlostí 11,5 km/h?

Řešení:

12.1

*Pro přehlednost si označíme jednotlivá kola písmenem a s indexem. Index bude značit kolo.*



Obr. 7 Běžkyně (zdroj: https://www.landigo.cz/anglicky-slovnik?q=b%C4%9B%C5%BEec)

$$a_1 = 1\,000$$

$$a_2 = 1\,000 \cdot \frac{1}{2} = 500$$

$$a_3 = 500 \cdot \frac{1}{2} = 250$$

*Už z prvních tří členů je vidět, že na délku kola přijdeme tak, že vynásobíme předchozí zlomkem $\frac{1}{2}$. Obecně zapíšeme jako*

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{1}{2}$$

*což je vyjádření geometrické posloupnosti s kvocientem $\frac{1}{2}$. Zjistíme tedy, kolikátý člen bude tím posledním*

$$a_n = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$10 \leq 1\,000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{10}{1\,000} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\ln \frac{1}{100} \leq (\mathrm{n}-1) \cdot \ln \frac{1}{2}$$

$$\frac{\ln \frac{1}{100}}{\ln \frac{1}{2}} \leq n-1$$

$$\frac{\ln \frac{1}{100}}{\ln \frac{1}{2}} + 1 \leq n$$

$$n \leq 7{,}64$$

*Protože potřebujeme, aby n bylo celé číslo, pomocí znaménka nerovnosti určíme, že n = 7. Pokud bychom zvolili n = 8, výsledek by byl menší než 10, což neodpovídá naší podmínce. Pro kontrolu*

$$a_7 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1}$$

$$a_7 = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6}$$

$$a_7 = 15{,}625\, m$$

*Abychom zjistili celkovou vzdálenost, kterou uběhla, sečteme jednotlivé délky pomocí vzorce pro součet geometrické posloupnosti.*

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_7 = 1\,000 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$s_7 = 1\,984{,}375\, m$$

*Nesmíme zapomenout, že běhala tam a zpět (kromě prvního kola), tudíž vynásobíme dvěma a odečteme 1000, protože první kolo běžela pouze jedenkrát.*

$$s = 2 \cdot s_7 - 1\,000$$

$$s = 2 \cdot 1\,984{,}375 - 1\,000$$

$$\underline{\underline{s = 2\,968{,}75\ m \doteq 2{,}97\ km}}$$

Běžkyně při tréninku naběhala 2,97 km.

12.2

$$s = 2{,}97\ km$$

$$v = 11{,}5\ km \cdot hod^{-1}$$

$$t = ?\ [hod]$$

$$s = v \cdot t$$

$$t = \frac{s}{v}$$

$$t = \frac{2{,}97}{11{,}5}$$

$$\underline{\underline{t = 0{,}258\,2\ hod = 0{,}258\,2 \cdot 60\ min = 15{,}49\ min}}$$

Trénink jí bude trvat 15,5 min.

## 13.Průměrná rychlost

Kapitoly matematiky: složený zlomek, aritmetický průměr, harmonický průměr

13.1

Cyklista jede na výlet. Polovinu času výletu jede rychlostí 8 km/hod, druhou polovinu času výletu rychlostí 30 km/hod. Jaká byla jeho průměrná rychlost po celou dobu výletu?

13.2

Cyklista jede na výlet na rozhlednu. Cestou do kopce jede rychlostí 8 km/hod. cestou zpět je jeho rychlost 30 km/hod. Jaká byla jeho průměrná rychlost po celou dobu výletu?

Řešení:

*Veličina průměrná rychlost je definovaná jako podíl celkové dráhy ku celkovému času.*

$$v_p = \frac{s}{t}$$

*Tato veličina nám říká, jakou konstantní rychlostí by se musel hmotný bod, v našem případě cyklista, pohybovat, aby ujel za stejný čas stejnou vzdálenost jako hmotný bod, se kterým srovnáváme.*

*Veličiny pro první část trasy označíme indexem č. 1, pro druhou část cesty indexem č. 2.*

13.1

$$t_1 = t_2 = t$$

$$v_1 = 8\ km \cdot hod^{-1}$$

$$v_2 = 30\ km \cdot hod^{-1}$$

$$s = v \cdot t$$

$$s_1 = v_1 \cdot t_1 = 8t$$

$$s_2 = v_2 \cdot t_2 = 32t$$

$$v_p = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$$

$$v_p = \frac{8t + 32t}{t + t} = \frac{t(8 + 32)}{2t} = \frac{8 + 32}{2} = \frac{40}{2} = 20\ km \cdot hod^{-1}$$

Průměrná rychlost cyklisty bude 20 km/hod.

*Po vytknutí a zkrácení dostáváme tvar*

$$v_p = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

*Výpočet je nejpoužívanější typ průměru; aritmetický. Jeho obecné vyjádření je*

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

**Obr. 8 Cyklista** (zdroj: https://mtbs.cz/clanek/alltraining-cycling-academy-rozvoj-sily-a-kondice#.YsRRURXP23B)

13.2

$$s_1 = s_2 = s$$

$$v_1 = 8\ km \cdot hod^{-1}$$

$$v_2 = 30\ km \cdot hod^{-1}$$

$$t = \frac{s}{v}$$

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{s}{8}$$

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{s}{30}$$

$$v_p = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$$

$$v_p = \frac{s + s}{\frac{s}{8} + \frac{s}{32}} = \frac{2s}{s\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{32}\right)} = \frac{2}{\frac{5}{32}} = \frac{64}{5} = 12{,}8\ km \cdot hod^{-1}$$

Průměrná rychlost cyklisty bude 12,8 km/hod.

*Po vytknutí a následném zkrácení dráhou s lze zjednodušit vzorec na tvar*

$$v_p = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

*Tento typ výpočtu je dalším z průměrů; harmonický. Jeho obecné vyjádření je:*

$$\bar{x} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

*V praxi hojně užívaným typem průměru je průměr vážený. Ten se využívá u hodnocení ve škole, kdy ze známek o různých vahách chceme vypočítat výslednou známku. (Za předpokladu, že všechny známky mají stejnou váhu, lze uvažovat pouze průměr aritmetický). Dalším využitím jsou slovní úlohy o směsích.*

*S váženým průměrem se setkáváme v příkladu 14.2 a 5.3.*

*Obecně vyjádření váženého průměru je*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

## 14.Chladnutí tekutiny

Kapitoly matematiky: vážený průměr, slovní úlohy o směsích, vyjádření ze vzorce, funkce, závislost

Před odchodem do práce si Kristýna dělala čaj. Jednoho dne nalila vodu do hrnečku a každou minutu po dobu jedné hodiny měřila teplotu vody a zapisovala do tabulky. Pomocí programu Microsoft Excel vykreslila graf, body proložila křivkou a zjistila její rovnici. Předpokládejme, že ochlazování bude probíhat podle funkce, jež je totožná s proloženou křivkou.

14.1 Za jak dlouho bude teplota čaje 25 °C?

14.2 Jednou za dlouhou dobu se stane, že Kristýna nevstane včas. Svého ranního čaje se ovšem nechce vzdát, tak vymyslela alternativu. Běžně pije čaj z hrníčku o objemu 300 ml a teplotě 25 °C. Udělá si silný koncentrát o objemu 100 ml, nechá ho chladit a dolije 200 ml vody o teplotě 10 °C. Jak dlouho musí nechat čajový koncentrát chladit, aby vypila čaj, jak je zvyklá?

*Obr. 9 Čaj* (zdroj: https://flashnews.com/us/post/05520bbf-zazrak-jmenem-rooibos-pomaha-pri-hubnuti-ovlivnuje-i-vyvoj-cukrovky)

| t [min] | t [°C] |
|---|---|
| 0 | 81,3 |
| 1 | 77,8 |
| 2 | 74,5 |
| 3 | 73,6 |
| 4 | 74,8 |
| 5 | 73,5 |
| 6 | 71,5 |
| 7 | 72,2 |
| 8 | 68,6 |
| 9 | 68,1 |

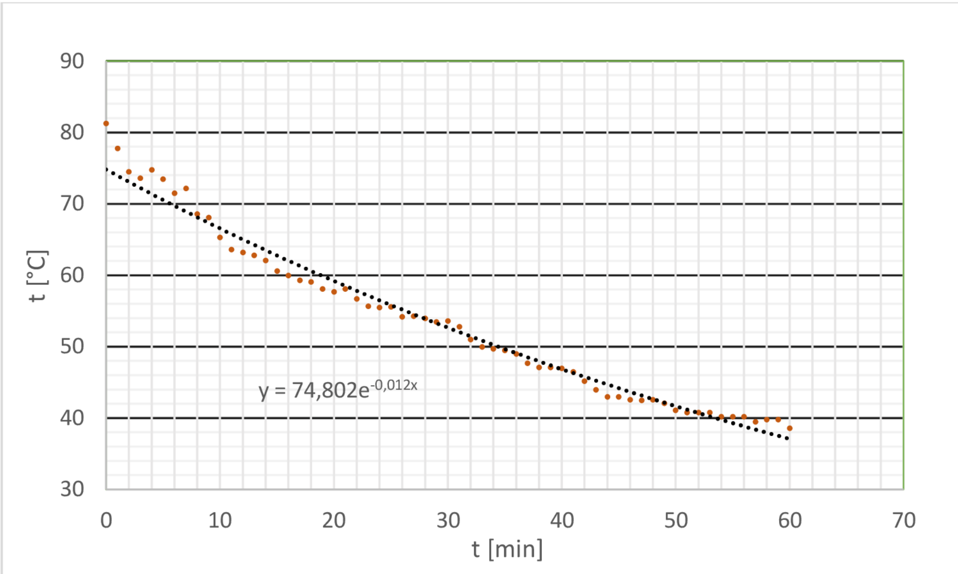
| | |
|---|---|
| 10 | 65,3 |
| 11 | 63,6 |
| 12 | 63,2 |
| 13 | 62,8 |
| 14 | 62,1 |
| 15 | 60,6 |
| 16 | 60 |
| 17 | 59,3 |
| 18 | 59,1 |
| 19 | 58,1 |
| 20 | 57,7 |

| | |
|---|---|
| 21 | 58,1 |
| 22 | 56,7 |
| 23 | 55,7 |
| 24 | 55,5 |
| 25 | 55,6 |
| 26 | 54,2 |
| 27 | 54,3 |
| 28 | 54 |
| 29 | 53,5 |
| 30 | 53,6 |
| 31 | 52,8 |

| | |
|---|---|
| 32 | 51 |
| 33 | 50 |
| 34 | 49,7 |
| 35 | 49,5 |
| 36 | 49 |
| 37 | 47,7 |
| 38 | 47,1 |
| 39 | 47,1 |
| 40 | 47 |
| 41 | 46,5 |

| | |
|---|---|
| 42 | 45,2 |
| 43 | 44 |
| 44 | 43 |
| 45 | 43 |
| 46 | 42,6 |
| 47 | 42,5 |
| 48 | 42,6 |
| 49 | 42,1 |
| 50 | 41,1 |
| 51 | 40,8 |

| | |
|---|---|
| | |
| 52 | 40,8 |
| 53 | 40,8 |
| 54 | 40,2 |
| 55 | 40,2 |
| 56 | 40,2 |
| 57 | 39,5 |
| 58 | 39,8 |
| 59 | 39,8 |
| 60 | 38,6 |




$$y = 74{,}802 \cdot e^{-0{,}012x}$$

Řešení:

*Veličina y je v našem případě teplota, veličina x čas. Fyzikální značka teploty i času je t, proto ponecháme x a y.*

14.1

$$y = 74{,}802 \cdot e^{-0{,}012x}$$

$$25 = 74{,}802 \cdot e^{-0{,}012x}$$

$$\frac{25}{74{,}802} = e^{-0{,}012x}$$

$$\ln\frac{25}{74{,}802} = -0{,}012x \cdot \ln e$$

$$\frac{\ln\frac{25}{74{,}802}}{-0{,}012} = x$$

$$\underline{x = 91{,}33\ min \doteq 1{,}5\ hod}$$

Při pokojové teplotě klesne teplota čaje na 25 °C za 1 hod 31 min.

14.2

*Pro mísení vody o různých teplotách o různých objemech nelze uvažovat pouze aritmetický průměr. Pro výpočet využijeme vážený průměr. Sestavíme rovnice.*

$$y_1 = 74{,}802 \cdot e^{-0{,}012x}\ °C$$

$$y_2 = 10\ °C$$

$$V_1 = 100\ ml$$

$$V_2 = 200\ ml$$

$$y = \frac{y_1 \cdot V_1 + y_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2}$$

$$y \cdot (V_1 + V_2) = y_1 \cdot V_1 + y_2 \cdot V_2$$

$$y \cdot (V_1 + V_2) - y_2 \cdot V_2 = y_1 \cdot V_1$$

$$\frac{y \cdot (V_1 + V_2) - y_2 \cdot V_2}{V_1} = y_1$$

$$\frac{25 \cdot (100 + 200) - 10 \cdot 200}{100} = 74{,}802 \cdot e^{-0{,}012x}$$

$$\frac{100 \cdot (25 \cdot 3 - 20)}{100} = 74{,}802 \cdot e^{-0{,}012x}$$

$$\frac{75 - 20}{74{,}802} = e^{-0{,}012x}$$

$$\ln \frac{55}{74{,}802} = -0{,}012x \cdot \ln e$$

$$\frac{\ln \frac{55}{74{,}802}}{-0{,}012} = x$$

$$\underline{\underline{x \doteq 25{,}6\ min}}$$

Aby měl čaj námi požadovanou teplotu, necháme koncentrát chladit 25,6 minuty.

## 15.Ohmův zákon

Kapitoly matematiky: funkce, lineárně lomená funkce, graf, závislost

Na reostatu působí stálé napětí 6 V. Jak se mění proud v reostatu při plynulé změně odporu od 1 Ω do 24 Ω. Sestrojte graf. Z grafu odečtěte hodnoty odporu pro hodnoty proudu 5 A, 3 A, 1,2 A.[9]

Řešení:

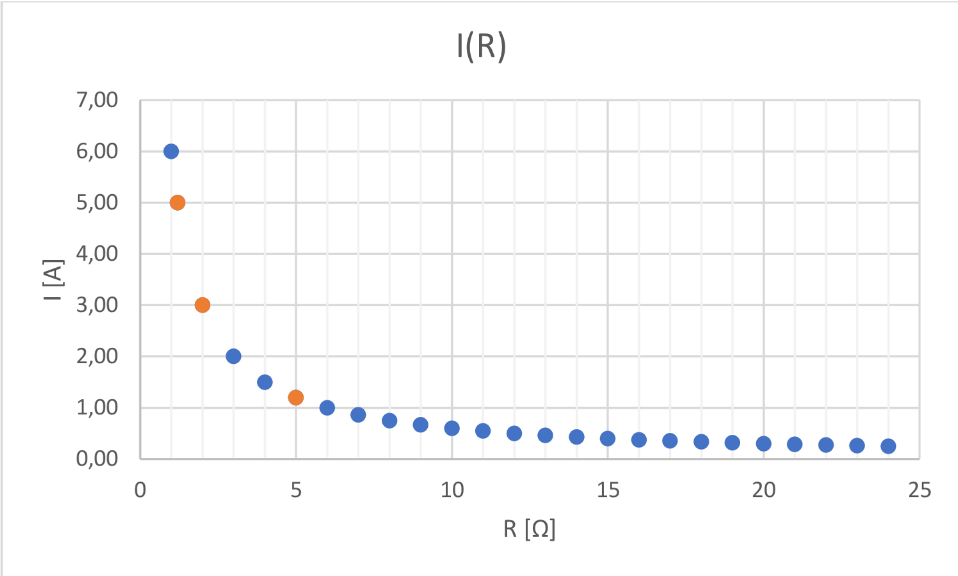
*Ohmův zákon vyjadřuje závislost elektrického proudu I, elektrického napětí U a elektrického odporu R;* $I = \frac{U}{R}$*. V našem případě je U konstantní, pomocí reostatu se mění odpor. Po dosazení do vzorce získáváme funkci pro proud I v závislosti na odporu R. Funkci bude představovat větev hyperboly v 1. kvadrantu kartézské soustavy souřadnic.*

$$U = 6\,V$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{6}{R}$$

| R | I |
|---|---|
| 1 | 6,00 |
| 1,2 | 5,00 |
| 2 | 3,00 |
| 3 | 2,00 |
| 4 | 1,50 |
| 5 | 1,20 |
| 6 | 1,00 |
| 7 | 0,86 |
| 8 | 0,75 |
| 9 | 0,67 |
| 10 | 0,60 |
| 11 | 0,55 |
| 12 | 0,50 |
| 13 | 0,46 |
| 14 | 0,43 |
| 15 | 0,40 |
| 16 | 0,38 |
| 17 | 0,35 |
| 18 | 0,33 |
| 19 | 0,32 |
| 20 | 0,30 |
| 21 | 0,29 |
| 22 | 0,27 |
| 23 | 0,26 |
| 24 | 0,25 |

[9] *SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY pro základní školu*. 8. upravené vydání. Havlíčkův Brod: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-104-8.




*Z grafu odečteme hodnoty odporu pro proud 5 A, 3 A a 1,2 A. Kontrolu provedeme výpočtem. Z předpisu funkce vyjádříme R.*

$$I = \frac{6}{R}$$

$$R = \frac{6}{I}$$

$$R_1 = \frac{6}{I_1} \qquad R_2 = \frac{6}{I_2} \qquad R_3 = \frac{6}{I_3}$$

$$R_1 = \frac{6}{5} = 1{,}2 \qquad R_1 = \frac{6}{3} = 2 \qquad R_3 = \frac{6}{1{,}2} = 5$$

Vyjádřením závislosti je rovnice $I(R) = \frac{6}{R}$. Pro proudy 5 A, 3 A a 1,2 A jsou odpory v uvedeném pořadí 1,2 Ω, 2 Ω a 5 Ω.

## 16.Ozubená kola

Kapitoly matematiky: poměr, trojčlenka, nejmenší společný násobek, prvočíselný rozklad

V přístroji je soustava tří ozubených kol s přímými zuby. Ozubená kola jsou řazena vedle sebe v pořadí první, druhé, třetí. První ozubené kolo má 32 zubů. Frekvence otáčení je 75 otáček za minutu.

16.1 Druhé kolo má 24 zubů. Jaká je frekvence otáčení druhého kola?

16.2 Třetí kolo se otáčí 120krát za minutu. Kolik zubů kolo má?

16.3 Za jakou nejkratší dobu se kolečka dostala do výchozí polohy?

Řešení:

*Kolikrát více zubů kolo má, tolikrát méně otáček udělá za minutu. Pracujeme se dvěma veličinami; počet zubů a frekvence. Mezi veličinami platí nepřímá úměra, nejrychlejší je výpočet přes trojčlenka.*

16.1

↓ *32 zubů.......................................75 otáček/min* ↑
*24 zubů.......................................x otáček/min*

$$\frac{32}{24} = \frac{x}{75}$$

$$x = \frac{32}{24} \cdot 75$$

$$\underline{\underline{x = 100}}$$

Druhé kolečko se otáčí 100krát za minutu.

***Obr. 10 Soukolí*** *(zdroj: https://interflon.com/cz/reference/ozuben%C3%A1-kola)*

16.2

↓ *75 otáček/min.......................................32 zubů* ↑
*120 otáček/min.......................................x zubů*

$$\frac{75}{120} = \frac{x}{32}$$

$$x = \frac{75}{120} \cdot 32$$

$$\underline{\underline{x = 20}}$$

Třetí kolečko má 20 zubů.

16.3

*Abychom zjistili, za jak dlouho se dostanou kolečka do výchozí polohy, musíme nejdříve zjistit nejmenší společný násobek počtu zubů. Zjistíme tím, o kolik „zubů" se musí každé kolečko otočit.*

*Do konečného výpočtu započítáme u každého čísla nejvyšší mocninu a vynásobíme.*

$$n(32, 24, 20)$$

$$32 = 2^5$$

$$24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

$$20 = 2 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$$

$$n(32, 24, 20) = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$$

*Každé kolečko se otočí o 480 zubů. Z jakéhokoliv kolečka dopočítáme počet otáček a následně zjistíme čas, jak dlouho se bude otáčet, ideální řešení přes trojčlenku. Kolikrát více otáček uděláme, tolikrát více času to bude trvat.*

$$\frac{480}{20} = 24$$

*120 otáček*..........................................*1 min=60 s*
*24 otáček*..........................................*x s*

$$\frac{24}{120} = \frac{x}{60}$$

$$x = \frac{24}{120} \cdot 60$$

$$\underline{\underline{x = 12\ s}}$$

*Do výchozí polohy se kolečka dostanou vždy po 12 s.*

# 17.Teplotní roztažnost

Kapitoly matematiky: lineární rovnice, přímá úměrnost

Kytarista naladil svou kytaru s nylonovými strunami dlouhými 90 cm při teplotě 15 °C. Poté si přesedl k ohni, kde teplota dosahovala 40 °C. Jak se změnila délka struny?

Řešení:

$$t_0 = 15\,°C$$

$$t_1 = 40\,°C$$

$$\alpha = 72 \cdot 10^{-6} K^{-1}$$

$$l_0 = 90\,cm = 0{,}9\,m$$

$$\underline{\Delta l = ?\,[cm]}$$

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t$$

*Obr. 11 Kytara* (zdroj: https://zitrajevcera.cz/zpivani-u-taboraku-se-prodrazi)

$$\Delta l = 0{,}9 \cdot 72 \cdot 10^{-3} \cdot (40 - 15)$$

$$\underline{\underline{\Delta l = 1{,}62 \cdot 10^{-3}\,m = 1{,}62\,mm}}$$

Struna se prodlouží o 1,62 mm.

*Změna teploty na každém materiálu má za příčinu změnu jeho rozměrů. Při rostoucí teplotě dochází k prodloužení, naopak při klesající teplotě dochází ke zkracování. Experimentálně lze zjistit, že změna teploty a poměrné prodloužení jsou přímo úměrné veličiny, pokud se pohybujeme v užším teplotním rozmezí. Poměrné prodloužení je bezrozměrná veličina, která udává poměr mezi absolutním prodloužením a počáteční délkou tělesa. Značí se řeckým písmenem α.*

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t$$

*Těleso mění nejen svou délku, ale mění svůj celý objem. U těles, u nichž je jejich šířka zanedbatelná oproti jejich délce, zanedbáváme změnu šířky a uvažujeme jen délkovou změnu. Konstantou úměrnosti je teplotní součinitel délkové roztažnosti. Jeho jednotkou je reciproký Kelvin $K^{-1}$. Přestože většinou měříme teplotu ve °C, součinitel lze dosazovat v $K^{-1}$.Pokud totiž převádíme °C na K, přičteme 273,15, tedy*

$$[K] = [°C] + 273{,}15$$

*a při rozdílu se hodnoty 273,15 odečtou.*

*Pokud těleso nemá zanedbatelnou šířku oproti délce, bavíme se o objemové teplotní roztažnosti. Výpočet je analogie s délkovou teplotní roztažností.*

$$\Delta V = V_0 \beta \Delta t$$

*Konstantou úměrnosti je součinitel teplotní objemové roztažnosti. Značí se* $\beta$ *a jednotkou je opět reciproký Kelvin* $K^{-1}$.

# 18. Závěr

Žáci a studenti, kteří pochopí matematiku a fyziku mohou být v budoucnosti inženýři z technických oborů, ekonomové či učitelé. Studenti technických oborů ubývají, což by mohl být do budoucna problém.[10] Přitom si vztah k těmto vědám pěstujeme už od základní školy.

Byla bych ráda, pokud by moje práce pomohla učitelům v jejich výuce a dětem k lepší názornosti a vztahu k přírodním vědám. Obrovská zodpovědnost padá na nás, učitele těchto předmětů, abychom dokázali děti zaujmout a nadchnout.

Ke studiu bych ráda doporučila stránky, Youtube kanály a knihu, o kterých si myslím, že jsou skvělým pomocníkem při studiu.

Isibalo - YouTube Prostřednictvím videí vysvětlení látky z oblasti nejen matematiky a fyziky, ale nově i chemie a biologie.

Marek Valášek - YouTube Středoškolský učitel, který vzorově vypracovává didaktické testy; přijímací zkoušky i maturitní testy. Zabývá se zajímavými matematickými hádankami a problémy, dává rady pro efektivnější a jednodušší řešení příkladů.

P² - YouTube V krátkých videích nás autor seznamuje s problémy a záhadami ze světa vědy.

Wikipedie, otevřená encyklopedie (wikipedia.org) Všeobecná internetová encyklopedie.

Fyzika :: MEF (jreichl.com) Internetová encyklopedie, která v přehledné formě seznamuje čtenáře s fyzikálními zákony.

Eduportál | Eduportál Techmania Vědecké centrum Techmania Science Center pro děti i dospělé zábavnou formou prezentuje zákonitosti přírody. Stránka vysvětluje fyzikální a matematické principy, popisuje životopisy vědců a matematiků.

*Příběh matematiky*. Omega, 2017. ISBN 978-80-7390-579-8 Jak napovídá heslo na obálce knihy „Od projektování pyramid po objevení nekonečna“. Naučná kniha, popisující vývoj matematiky, životy matematiků a mnoho dalšího.

[10] Hrot. *Hrot* [online]. 2022 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: https://www.tydenikhrot.cz/clanek/studentu-technickych-oboru-ubylo-pro-stat-tragedie

Wolfram|Alpha: Computational Intelligence (wolframalpha.com) Pomocník při výpočtech rovnic, limit, derivací, vykreslování grafů.

# 19.Seznam použité literatury


Encyklopedie fyziky. *1. Keplerův zákon* [online]. c2006-2022 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/74-prvni-kepleruv-zakon

Kalendar.beda.cz. *Elementy dráhy* [online]. [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: https://kalendar.beda.cz/elementy-drahy

Wikipedie Otevřená encyklopedie. *Venuše (planeta)* [online]. 2022 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: https://cs.wikipedia.org/wiki/Venu%C5%A1e_(planeta)

Encyklopedie fyziky. *Třetí Keplerův zákon* [online]. c2006-2022 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/77-treti-kepleruv-zakon

Web snadno. *Sluneční soustava Venuše* [online]. 2011 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: https://planety00.webnode.cz/venuse/

*Matematický klokan* [online]. 2005 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/phocadownload/sborniky/sbornik_klokan_2005.pdf

Hrot. *Hrot* [online]. 2022 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: https://www.tydenikhrot.cz/clanek/studentu-technickych-oboru-ubylo-pro-stat-tragedie

Converter. *Hustota pevných látek* [online]. 2002 [cit. 2022-07-01]. Dostupné z: http://www.converter.cz/tabulky/hustota-pevne.htm

*SBÍRKA ÚLOH Z MATEMATIKY pro základní školu*. 8. upravené vydání. Havlíčkův Brod: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-104-8

*Fyzika 1. 2. přepracované vydání. Brno: VUTIUM, 2019. ISBN 978-80-214-4123-1.*

## 20.Seznam obrázků