UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Nositel Nobelovy ceny za ekonomii
Gerard Debreu

Vedoucí bakalářské práce:
prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.
Rok odevzdání: 2011

Vypracoval:
Zuzana Křivánková
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana prof. RNDr. dr hab. Jana Andrese, DSc. a všechny použité zdroje jsem uvedla.

V Olomouci dne 21. dubna 2011

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat především svému vedoucímu bakalářské práce panu prof. RNDr. dr hab. Janu Andresovi, DSc., že mi pomohl zpracovat tuto práci. Dále chci poděkovat panu RNDr. Miloslavu Závodnému za pomoc při tvorbě obrázků a své rodině a přátelům za podporu během studia.

Obsah

Úvod

Cílem mojí bakalářské práce je seznámit se s významným světovým matematikem a ekonomem, nositelem Nobelovy ceny za ekonomii z roku 1983, Gerardem Debreuem.

Nejdříve nás bude zajímat jeho život, kdy kde pobýval, co dělal, s kým se setkal a jak ho to ovlivnilo. Seznámíme se s jeho prací a uvedeme vědecké publikace.

Následně se budeme zabývat jeho slavným dílem *Theory of Value*, kde Debreu analyzuje ekonomickou rovnováhu a podmínky její existence. Poskytneme nezbytný matematický základ, popíšeme jednotlivé složky ekonomické teorie a jejich chování a položíme si otázku, zda a za jakých podmínek existuje ekonomická rovnováha.

Na závěr si na tuto otázku odpovíme a vyřkneme zásadní tvrzení. Problém se pokusíme interpretovat na jednoduchém obrázku.

1 Gerard Debreu

1.1 Životopis

Americký matematik a ekonom francouzského původu Gerard Debreu se narodil v Calais 4. července 1921. Jeho otec Camille Debreu byl obchodním partnerem rodičů jeho matky Fernande, rozené Decharne, při výrobě krajek, která má v Calais tradici. Dědeček z otcovy strany řídil před odchodem do důchodu vlastní tiskařský závod v městečku Marquise, které leží mezi Calais a Boulogne.

Až do získání bakalářského titulu v roce 1939 studoval v Calais. V létě 1939 ve Francii začala druhá světová válka a Debreu místo přípravy na přijímací zkoušky na některou přírodovědnou vysokou školu v Paříži navštěvoval v akademickém roce 1939-40 improvizované studium Mathématiques Spéciales Préparatoires ve městě Ambert (Puy-de-Dôme). V létě 1940 byla Francie německými okupačními vojsky rozdělena do několika zón a Debreu se přestěhoval z Ambertu do Grenoblu, obě místa ležela v tzv. „svobodné zóně“. Akademický rok 1940-41 strávil na Grenoble Lycée studiem Mathématiques Spéciales.

V létě 1941 ho přijali na École Normale Supérieure, kde žil a studoval až do jara 1944. Tyto tři roky pro něj byly v mnoha směrech vynikající zkušeností. Jelikož se přijímal jen malý počet studentů (asi 20 na přírodní vědy a 30 na humanitní obory) a přijímací řízení bylo velice přísné, vytvořila se zde velmi intelektuální atmosféra. Také okolní svět Paříže potemnělé pod německou okupací se přičinil k tomu, že se do sebe mikrosvět na rue d'Ulm ještě více uzavřel. Během tohoto období na něj měl ze všech učitelů největší vliv Henri Cartan a nepřímo jeho matematický vkus utvářela také skupina matematiků působící pod pseudonymem N. Bourbaki.

Formální studium měl zakončit absolvováním Agrégation de Mathématiques, státní zkoušky z matematiky, na jaře 1944. Ale přišel „Den D“, Debreu vstoupil do francouzské armády a byl poslán do důstojnické školy do Cherchell v Alžírsku a následně sloužil ve francouzské okupační armádě v Německu až dokonce července 1945. Na přelomu let 1945 a 1946 konečně absolvoval Agrégation de Mathématiques.

Mezitím se ale začal zajímat o ekonomii. Celý svůj život jí zasvětil poté, co se setkal s matematickou teorií všeobecné ekonomické rovnováhy založenou Léonem Walrasem v letech 1874-77, ve formulaci Maurice Allaise v jeho knize A la Recherche d'une Discipline Économique z roku 1943. Následujících dva a půl roku po Agrégation věnoval přeměně z matematika na ekonoma. Pracoval jako výzkumný pracovník v Národním centru vědeckého výzkumu (Centre National de la Recherche Scientifique) v Paříži, kde mu, podle jeho slov, prokázali mimořádnou toleranci, vzhledem k absenci hmatatelných výsledků, spojených s jeho přechodem z jednoho oboru do druhého, vzdáleného.

V létě 1948 Debreu několik týdnů navštěvoval Salzburg Seminar in American Studies, kde přednášel i Wassily Leontief. Na konci téhož roku získal Rockefellerovo stipendium, které mu umožnilo v následujícím roce navštívit Harvard University, University of California v Berkeley, University of Chicago a Columbia University a během ledna až dubna 1950 univerzity v Uppsale a v Oslu. Díky tomu se dostal do styku s aktuálním rozvojem v ekonomické vědě, od kterého byla Francie odříznuta. Důležitější však bylo, že mu během jeho pobytu na Chicagské univerzitě na podzim roku 1949 nabídla Cowlesova komise pro výzkum v ekonomii pozici výzkumného pracovníka. Cowlesova komise byla optimálním prostředím pro ten typ výzkumu, který chtěl dělat, a tak nabídku přijal a 1. června 1950 tak započal jedenáctiletou spolupráci. Tou dobou už měl Gerard Debreu rodinu. V červnu 1945 se oženil s Francoise Bled a jejich dvě dcery, Chantal a Florence, se narodily v srpnu 1946 a v únoru 1950.

Na počátku padesátých let se ukázalo, že Cowlesova komise je víc, než v co Debreu doufal. Byla ohniskem matematické ekonomie, kde se diskutoval všechen současný vývoj. Skupinka vědců se střetávala každý týden na schůzích, co čtrnáct dní na seminářích a na nesčetných diskuzích. V tomto neobyčejně podpůrném prostředí trávil skoro všechen čas výzkumem a jeho práce na Paretově optimu, existenci všeobecné ekonomické rovnováhy a teorii užitku rychle postupovaly. Během posledních let chicagského období Cowlesovy komise si vzal na půl roku dovolenou a léto a podzim roku 1953 strávil prací pro Électricité de France v Paříži. Teoretický článek o podmíněných komoditách, který v tom roce publikoval Kenneth Arrow, a praktický problém s náhodným kolísáním množství vody v nádržích hydroelektráren společnosti Électricité de France ho vedly ke studiu ekonomické nejistoty, jehož výsledky posléze publikoval v poslední kapitole své monografie *Theory of Value* z roku 1959. Gerard Debreu a Kenneth Arrow se nezávisle na sobě zabývali podobným ekonomickým problémem, což vyústilo v publikaci jejich společného článku *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy* v roce 1954.

V létě 1955 se Cowlesova komise přesunula z Chicaga na Yale University, kde Debreu v novém prostředí dokončil článek o tržní rovnováze a svoji monografii, jejímž účelem byla axiomatická analýza všeobecné ekonomické rovnováhy. Také se zabýval teorií kardinálního užitku, především aditivní dekompozicí funkce užitku definované na kartézském součinu množin. V roce 1956 získal na Université de Paris titul doktora věd (D.Sc.).

Roky 1960-61 Debreu strávil ve Stanfordu v Center for Advanced Study in the Behavioral Sciences, kde se věnoval zejména komplexnímu důkazu obecného teorému existence ekonomické rovnováhy, který publikoval v roce 1962. Během této doby přijal od 1. ledna 1961 místo na University of California v Berkeley, nicméně na podzim 1961 byl opět v Yale u Cowlesovy komise, tentokrát však jako host. V tomto semestru navázal na studii Herberta Scarfa zabývající se jádrem ekonomiky a v roce 1963 na toto téma publikovali společný článek. V polovině 60. let se v Berkeley zabýval hlavně teorií měřitelných prostorů ekonomických subjektů, kterou v roce 1964 publikoval Robert J. Aumann, a příbuzným problémem topologizace množiny preferenčních relací.

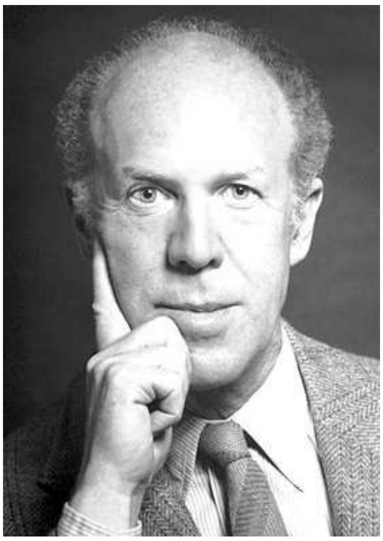
Na podzim roku 1967 započal Debreu sérii dlouhodobých pobytů, které ho zavedly do Center for Operations Research and Econometrics na univerzitě v Louvain v Belgii v letech 1968-69, na podzim 1971 a v zimě 1972, na Churchill College v Cambridgi na jaře 1971, ke Cowlesově komisi na Yale University na podzim 1976, na Bonnskou univerzitu v zimě a na jaře 1977 a do CEPREMAP v Paříži na podzim 1980. V létě 1968 ho začaly zajímat otázky regulárních ekonomik, které zůstaly nezodpovězeny až do doby, než navštívil University of Canterbury v Christchurch na Novém Zélandu v červnu a červenci 1969. Jeho další výzkumy v Berkeley v sedmdesátých a na počátku osmdesátých let se zaměřovaly zejména na studium diferencovatelných funkcí užitku, popis funkce převisu poptávky v ekonomice, rychlost konvergence jádra ekonomiky k množině jejích kompetitivních rovnováh, na problém nejméně konkávní funkce užitku a, ve spolupráci s Tjallingem C. Koopmansem, na otázky aditivně dekomponovatelných kvazikonvexních funkcí. V červenci 1975 získal občanství Spojených států amerických a v roce 1977 se stal členem National Academy of Sciences of USA. Je nositelem mnoha čestných doktorátů a vyznamenání.

V roce 1983 Debreu obdržel Nobelovu cenu za ekonomii za začlenění nových analytických metod do ekonomické teorie a za rigorózní formulaci teorie všeobecné ekonomické rovnováhy a podmínek, za kterých v abstraktní ekonomice všeobecná rovnováha vzniká.

Debreu zůstal aktivním výzkumníkem a učitelem i po odchodu do důchodu v roce 1991. Byl také ekonomickým poradcem několika vlád a jezdil po Evropě přednášet ekonomickou teorii.

Gerard Debreu zemřel 31. prosince 2004 v Paříži.

Zdroj: [4], [5], [7], [8], [9].



Obr. 1.1: Gerard Debreu

1.2 Seznam publikací

Zde uvádíme Debreuovy publikované práce. (Převzato z [10])

Knihy:

1. Theory of Value: An Axiomatic Treatment of Economic Equilibrium, Wiley, New York (1959). Reprinted by Yale University Press, New Haven (1971). French translation: Dunod, Paris (1966). Spanish translation: Bosch, Barcelona (1973). German translation: Springer-Verlag, Berlin (1976). Japanese translation: Toyo Keizai Shinpo-Sha, Tokyo (1977). Chapter 7 reprinted in Uncertainty in Economics, P. Diamond and M. Rothschild (eds.), Academic Press (1978), 163-173.

2. Mathematical Economics: Twenty Papers of Gerard Debreu, Cambridge University Press, Cambridge, England (1983).

Články:

1. The Coefficient of Resource Utilization, Econometrica, 19 (1951), 273-292.

2. Definite and Semi-Definite Quadratic Forms, Econometrica, 20 (1952), 295-300.

3. A Social Equilibrium Existence Theorem, Proceedings of the National Academy of Sciences, 38 (1953), 597-607.

4. Non-negative Square Matrices, with I.N. Herstein, Econometrica 21 (1953), 596-607. Reprinted in Readings in Mathematical Economics, 1, Value Theory, P. Newman (ed.), Johns Hopkins Press (1968) 57-67.

5. A Classical Tax-Subsidy Problem, Econometrica 22 (1954), 14-22.

6. Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, with K.J. Arrows, Econometrica, 22 (1954), 265-290.

7. Valuation Equilibrium and Pareto Optimum, Proceedings of the National Academy of Sciences, 40 (1954), 584-592. Reprinted in Readings in Welfare Economics, K. Arrow and T. Scitovsky (eds.), R.D. Irwin (1969), 39-45. German translation in Mathematische Wirtschaftstheorie, M. Beckman and R. Sato (eds.), Kiepenheuer and Witsch (1975), 203-209.

8. Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function, in Decision Processes, R.M. Thrall, C.H. Coombs, and R.L. Davis (eds.), Wiley, New York (1954), 159-165. Reprinted in Readings in Mathematical Economics, 1, Value Theory, P. Newman (ed.), Johns Hopkins Press (1968), 257-263. German translation in Mathematische Wirtschaftstheorie, M. Beckman and R. Sato (eds.), Kiepenheuer and Witsch (1975), 113-118.

9. Market Equilibrium, Proceedings of the National Academy of Sciences, 42 (1956), 876-878.

10. Stochastic Choice and Cardinal Utility, Econometrica, 26 (1958), 440-444.

11. Cardinal Utility for Even-Chance Mixtures of Pairs of Sure Prospects, Review of Economic Studies, 26 (1959), 174-177.

12. Une économique de l´incertain, Economic Appliquée, 13 (1960), 111-116.

13. On´ An Identity in Arithmetic, Proceedings of the American Mathematical Society, 11 (1960), 220-221.

14. Topological Methods in Cardinal Utility Theory, in Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959, K.J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes (eds.), Stanford University Press (1960), 16-26.

15. Review of ´Individual Choice Behavior: A Theoretical Analysis, by R. Duncan Luce, American Economic Review, 50 (1960), 186-188.

16. New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis, International Economic Review, 3 (1962), 257-273.

17. On a Theorem of Scart, Review of Economic Studies, 30 (1963), 177-180.

18. A Limit Theorem on the Core of an Economy, with H. Scarf, International Economic Review, 4 (1963), 235-246. German translation in Mathematische Wirtschaftstheorie, M. Beckman and R. Sato (eds.), Kiepenheuer and Witsch (1975), 210-221.

19. Non-negative Solutions of Linear Inequalities, International Economic Review, 5 (1964), 178-184.

20. Continuity Properties of Paretian Utility, International Economic Review, 5 xxxxxxx

21. Integration of Correspondences, Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. II, Part 1, L. LeCam and J. Neyman (eds.), University of California Press (1967), 351-372.

22. Preference Functions of Measure Spaces of Economic Agents, Econometrica, 35 (1967), 111-122.

23. Economic Equilibrium, in Mathematical Systems Theory and Economics, H.W. Kuhn and G.P. Szego (eds.), Springer-Verlag (1969), 11-12.

24. Neighboring Economic Agents, in La Décision, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique No. 171, Paris (1969), 85-90.

25. Economies with a Finite Set of Equilibria, Econometrica, 38 (1970), 387-392.

26. The Radon-Nikodym Derivative of a Correspondence, with D. Schmeidler, Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. II, L. LeCam, J. Neyman and E. Scott (eds.), University of California Press (1972), 41-56.

27. The Limit of the Core of an Economy, with H. Scarf, in Decision and Organization, C.B. McGuire and R. Radner (eds.), North-Holland Press (1972), 283-295.

28. Smooth Preferences, Econometrica, 40 (1972), 603-615.

29. Excess Demand Functions, Journal of Mathematical Economics, 1 (1974), 15-21.

30. The Rate of Convergence of the Core of an Economy, Journal of Mathematical Economics, 2 (1975), 1-7.

31. Four Aspects of the Mathematical Theory of Economic Equilibrium, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vancouver (1974), 65-77. Russian translation in Uspehi Mathematicheskikh Nauk, 32, No. 1 (1977), 131-144. German translation in G. Debreu, Werttheorie, Springer-Verlag (1976), 124-143. Japanese translation in G. Debreu, Kachi no Riron, Toyo Keizai, Shinpo-Sha (1977), 183-209.

32. Least Concave Utility Functions, Journal of Mathematical Economics, 3 (1976), 121-129.

33. Regular Differentiable Economies, American Economic Review, 56 (1976), 280-287.

34. Smooth Preferences: a Corrigendum, Econometrica, 44 (1976), 831-832.

35. Sur la Decomposition Additive des Fonctions Quasiconvexes, with T. Koopmans, Comptes Rendus des l´Academie des. Sciences, Paris, 239, No. 8, Serie I, Mathematique (1981), 389-392.

36. Existence of Competitive Equilibrium, in Handbook of Mathematical Economics, Vol. II, K. Arrow and M. Intriligator (eds.), North Holland Press (1982).

37. Additively Decomposed Quasiconvex Functions, with T. Koopmans, Mathematical Programming, 24 (1982), 1-38.

2 Matematický základ

V této kapitole si uvedeme potřebnou matematickou teorii.

Nechť X, Y značí dvojici metrických prostorů. Následující definice lze nalézt např. v [6].

Definice 1. Nechť B je množina prvků z X. Prvek $x \in X$ se nazývá *hromadný bod množiny* B, jestliže v libovolném δ-okolí prvku x leží nekonečně mnoho prvků množiny B. (Zřejmě hromadný bod množiny M nemusí patřit do M.)

Definice 2. Množina $\overline{B}$, která vznikne z B přidáním všech hromadných bodů množiny B, se nazývá *uzávěr* množiny B.

Definice 3. Množina B se nazývá *uzavřená*, platí-li $B = \overline{B}$. Nazývá se *otevřená*, jestliže její komplement $X - B$ je uzavřená množina.

Nechť nyní $X \in \mathbb{R}^m$ značí euklidovský prostor. Následující pojmy a tvrzení lze najít např. v [1].

Definice 4. Nechť x, y jsou dva body z $\mathbb{R}^m$.
Přímkou nazveme množinu $\{z \in \mathbb{R}^m \mid t \in \mathbb{R}, z = (1-t)x + ty\}$.
Uzavřená polopřímka x, y je množina $\{z \in \mathbb{R}^m \mid t \in \mathbb{R}, 0 \leq t, z = (1-t)x + ty\}$.
Uzavřená polopřímka x, y je množina $\{z \in \mathbb{R}^m \mid t \in \mathbb{R}, 0 < t, z = (1-t)x + ty\}$.

Definice 5. Nechť x, y jsou dva body z $\mathbb{R}^m$ (různé či nikoli). *Uzavřená úsečka* x, y, označená $[x, y]$, je $\{z \in \mathbb{R}^m \mid t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1, z = (1-t)x + ty\}$. Pro $x = y$ řekneme, že je uzavřená úsečka $[x, y]$ *degenerovaná*.

Definice 6. Nechť p je prvek z $\mathbb{R}^m$ různý od 0 a c reálné číslo. Množinu $H = \{z \in \mathbb{R}^m \mid p \cdot z = c\}$ nazveme *nadrovina* s *normálou* p. Jestliže z' je prvek z H, platí $p \cdot z' = c$ a výše zmíněný výraz můžeme přepsat jako

$H = \{z \in \mathbb{R}^m \mid p \cdot (z - z') = 0\}$. Tedy nadrovina je množina bodů z z $\mathbb{R}^m$ takových, že $(z - z')$ je ortogonální k p. Řekneme, že p a H jsou ortogonální. Vynásobíme-li p a c stejným reálným číslem různým od 0, nadrovina H se nezmění.

Následující definice lze nalézt např. v [6].

Definice 7. Otevřená množina $B \subset \mathbb{R}^m$ se nazývá *souvislá*, lze-li každé dva její body spojit lomenou čarou (tj. čarou složenou z konečného počtu úseček), která celá leží v B (tj. každý její bod patří do B). Otevřená souvislá množina se nazývá *oblast*.

Definice 8. Lze-li každé dva body dané množiny B spojit úsečkou ležící v B, nazýváme takovou množinu *konvexní*.

Definice 9. Množina B se nazývá *omezená* (*ohraničená*), lze-li najít takovou kouli K s konečným poloměrem, že obsahuje množinu B, tj. $B \subset K$.

Definice 10. Množina B v metrickém prostoru X se nazývá *kompaktní v prostoru* X, když každá posloupnost prvků z M obsahuje podposloupnost konvergentní v X.
Poznámka: Zejména metrický prostor X se nazývá *kompaktní*, jestliže každá posloupnost prvků z X obsahuje podposloupnost konvergující k některému prvku z X.

V $\mathbb{R}^m$ platí: Množina $B \subset \mathbb{R}^m$ je kompaktní právě tehdy, když je ohraničená a uzavřená.

Následující pojmy a tvrzení lze najít např. v [2].

Definice 11. *Mnohoznačnou funkcí* $\varphi : X \multimap Y$ rozumíme předpis, který každému $x \in X$ přiřadí neprázdnou množinu hodnot $\varphi(x) \subset Y \setminus \{\emptyset\}$, tj. $\varphi : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$.

Pro každou podmnožinu $B \subset Y$ můžeme definovat tzv. *malý vzor* $\varphi^{-1}(B) := \{x \in X | \varphi(x) \subset B\}$.

Definice 12. Řekneme, že funkce $\varphi : X \multimap Y$ je *polospojitá shora* (anglicky: *upper semicontinuous*), jestliže pro každou otevřenou podmnožinu $B \subset Y$ je její malý vzor $\varphi^{-1}(B) \subset X$ rovněž otevřená podmnožina v X.

Platí, že každá polospojitá funkce $\varphi : X \multimap Y$ má uzavřený graf Γ_φ na kartézském součinu $X \times Y$, kde $\Gamma_\varphi := \{(x, y) \in X \times Y | y \in \varphi(x)\}$.

Je-li Y kompaktní množina, pak platí následující věta:

Věta 1. *Nechť Y je kompaktní množina. Pak funkce $\varphi : X \multimap Y$ je polospojitá shora právě tehdy, když její graf Γ_φ je uzavřená množina na $X \times Y$.*

Definice 13. Řekneme, že funkce $\varphi : X \multimap Y$ je *polospojitá zdola* (anglicky: *lower semicontinuous*), jestliže pro každou uzavřenou podmnožinu $B \subset Y$ je její malý vzor $\varphi^{-1}(B) \subset X$ rovněž uzavřená podmnožina v X.

Definice 14. Řekneme, že funkce $\varphi : X \multimap Y$ je *spojitá* (anglicky: *continuous*), jestliže je současně polospojitá shora a polospojitá zdola.

Následující definice najdeme např v [6].

Definice 15. Binární relace $\mathcal{R}$ na množině B, která splňuje

(1) $x\mathcal{R}x$ pro všechna $x \in B$ (reflexivita)

(2) „$x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}z$“ implikuje „$x\mathcal{R}z$“ pro všechna $x \in B$ (tranzitivita)

se nazývá *částečné uspořádání.* Pokud navíc „$x\mathcal{R}y$ a $y\mathcal{R}x$“ implikuje „$x = y$“, nazveme relaci *uspořádání.* Pro označení částečného uspořádání se často používá symbol $\precsim$.

Definice 16. Nechť je dána podmnožina C z $\mathbb{R}^l$ a bod x z C. Řekneme, že C je *kužel s vrcholem* x, jestliže obsahuje uzavřenou polopřímku x, y a patří do ní bod y (různý od x).

V následujícím textu uvedeme důležité ekonomické pojmy potřebné pro pochopení všeobecné ekonomické rovnováhy, jak ji Debreu publikoval ve svém díle *Theory of Value* [1].

3 Komodity a ceny

Komodity v ekonomice jsou charakterizovány jejich fyzickými vlastnostmi, datem, kdy budou dostupné, a místem, ve kterém budou dostupné. *Cenou komodity* rozumíme částku, která musí být zaplacena teď, aby byla jednotka dané komodity v budoucnu dostupná. Každá komodita je tedy spojena s reálným číslem, její cenou.

3.1 Data a místa

Časový interval, během kterého probíhá ekonomická činnost, je rozdělen na konečný počet kompaktních elementárních intervalů stejné délky. Tyto intervaly jsou chronologicky očíslovány. Jejich běžná délka, které může být rok, týden, den, minuta, ... je zvolena dostatečně malá, aby všechny okamžiky elementárního intervalu byly z hlediska analýzy nerozeznatelné. Elementární interval budeme nazývat *datum* a výraz „v datum t“ bude ekvivalentní s „v nějaký okamžik t-tého elementárního intervalu.“

Podobně region, ve kterém se ekonomická činnost odehrává, je rozdělen do konečného počtu kompaktních elementárních regionů. Tyto elementární regiony mohou být libovolně očíslovány a jsou voleny dostatečně malé, aby byly všechny body v každém z nich z hlediska analýzy nerozeznatelné. Elementární region budeme nazývat *lokace* a výraz „v lokaci s“ bude ekvivalentní s „v nějakém bodě s-tého elementárního regionu.“

3.2 Statky

Nejjednodušším příkladem komodity jsou statky, jako např. pšenice. Existuje mnoho druhů pšenice a, abychom statek správně definovali, musíme přesně popsat pšenici, o které mluvíme, a především specifikovat její odrůdu, např. č. 2 červená zimní pšenice. Kromě toho, pšenice dostupná teď a pšenice dostupná za týden hraje pro mlýn zcela jinou ekonomickou roli. Statek v určité datum a stejný statek v pozdější datum jsou tedy různé ekonomické objekty a specifikace data, kdy bude dostupný je nezbytná. Podobně jsou různými ekonomickými objekty i statky na různých místech a je proto nezbytné specifikovat lokaci, ve které je statek dostupný.

Množství určitého druhu pšenice se vyjadřuje jako počet bušlů[1], což se předpokládá, že je nezáporné reálné číslo. To, co je pro ekonomického činitele k dispozici, je pro něj *vstup*, to, co činitel poskytuje je jeho *výstup*. Jelikož pro některé činitele jsou vstupy vyjádřeny nezápornými čísly a výstupy nekladnými a pro jiné naopak, může být množství pšenice libovolné reálné číslo. Statky stejného typu jsou např. voda, cement, železná ruda, surový kaučuk, celulóza, atd.

Prototypem druhé skupiny statků je nákladní automobil. Kompletní popis tohoto statku zahrnuje model, ujetou vzdálenost, atd. Abychom definovali příslušnou komoditu, musíme přidat ještě datum a jeho lokaci. Počet dobře definovaných nákladních automobilů je celé číslo, ale místo toho se předpokládá množství jako libovolné reálné číslo. Tento předpoklad perfektní dělitelnosti byl zaveden současným stavem rozvoje ekonomiky. Podobnými statky jsou např. obráběcí stroje, domy, stromy, ovce, boty, turbíny, atd.

Zvláštní zmínku vyžaduje půda. Její stav je popsán povahou zeminy a podloží (které je důležité pro konstrukční práce), stromy, plodinami, konstrukcemi, atd. Její množství se specifikovaným stavem, datem a lokací vyjadřuje reálné číslo akrů.

Ložiska nerostného bohatství, ropná pole, atd. jsou definována kompletním popisem jejich obsahu, polohy a datem dostupnosti. Jejich množství se vyjadřuje v tunách, barelech, ...

[1] Anglicky *bushel*; 1 bušl = 36,3 litrů

3.3 Služby

Prvním příkladem ekonomické služby je lidská práce. Popisuje se jako vykonávaný úkol, např. řidič nákladního automobilu, člen nějaké kategorie učitelů, konstruktérů, projektantů, atd., včetně bližší specifikace. Opět po přidání data a lokace dostaneme dobře definovanou komoditu. Množství definované práce se vyjadřuje reálným číslem odpracovaného času.

Komplexnějším typem služby je pronájem hotelového pokoje. Popis služby zahrnuje seznam všeho, co je nájemníkovi k dispozici a samozřejmě datum a lokaci. Její množství je celé číslo dní, ale opět budeme předpokládat, že to může být libovolné reálné číslo.

U některých služeb se množství nevyjadřuje časem. Např. u skladování, které je charakterizováno typem skladu, datem, od kdy do kdy je využíván, a lokací, se množství vyjadřuje např. reálným číslem metrů krychlových.

Přepravní služby jsou popisovány podmínkami, za kterých jsou provozovány (železnice, silnice, voda, potrubí, elektrická vedení, atd. a dalšími specifikacemi nutnými k jejich kompletnímu popisu), lokacemi a daty. Množství se vyjadřuje hmotností nebo objemem převezených statků nebo počtem převezených osob a dle předpokladu to opět mohou být reálná čísla.

3.4 Komodity

Komodita je tedy statek nebo služba kompletně popsaná fyzicky, časově a polohově. Předpokládá se, že v ekonomice je pouze konečný počet rozlišitelných komodit, kterým je přiřazen index h od 1 do l. Také se předpokládá, že množství každé komodity, může být reálné číslo. Prostor $\mathbb{R}^l$ se nazývá *komoditní prostor*. Pro libovolného ekonomického činitele je jeho plán činnosti, nebo krátce *činnost*, specifikace množství každé komodity, kterou poskytne, nebo která pro něj bude dostupná, tj. kompletní seznam množství jeho vstupů a výstupů. Tato činnost je reprezentována bodem a v $\mathbb{R}^l$.

3.5 Ceny

S každou komoditou je spojeno reálné číslo, jeho *cena*, p_h. Tato cena je interpretována jako částka, která musí bát zaplacena *teď* činitelem (resp. činiteli), za každou jednotku h-té komodity, která bude dostupná (resp. poskytnuta). Obecně pojem cena zahrnuje škálu pojmů: vlastní cenu, mzdu, rentu, jízdné, poplatek, honorář, ...

Představme si např. komoditu č. 2 červenou zimní pšenici dostupnou za rok v Chicagu. Její cenou je částka, kterou musí kupující zaplatit teď, aby obdržel jeden bušl této pšenice ve zmíněné datum a ve zmíněné lokaci. Tato cena však může být zaplacena až v místě a v den doručení.

Cena komodity p_h může být kladná (vzácné komodity), nulová (volné komodity), nebo záporná (škodlivé komodity). V posledním případě činitel, pro kterého je komodita výstup, tj. který se komodity zbavuje, zaplatí činiteli, pro kterého je komodita vstup. To, zda je cena komodity kladná, nulová, nebo záporná, nevyjadřuje její skutečnou hodnotu. Ta závisí na technologiích, zdrojích, . . . ekonomiky. Např. některý průmyslový odpad může být přítěží a zbavit se ho je nákladné, ale po vyvinutí nové technologie se pro něj může nalézt využití a stane se z něj vzácná komodita.

Systém cen je l-tice $p = (p_1, \ldots, p_h, \ldots, p_l)$ a je reprezentován bodem v $\mathbb{R}^l$. *Hodnota* činnosti a vzhledem k systému cen p je $\sum_{h=1}^{l} p_h a_h$, tj. skalární součin $p \cdot a$.

4 Producenti

První skupinu ekonomických činitelů tvoří producenti. Jejich cílem je za daných cen maximalizovat zisk, tedy rozdíl mezi sumou příjmů a sumou výdajů. Plán produkce každého producenta však patří do určité množiny, dané jeho technologickými znalostmi. V této kapitole vytvoříme co nejpřesnější koncept producenta, plánu produkce a množiny všech možných plánů produkce, vyšetříme vlastnosti těchto množin a představíme kritéria pro maximalizaci zisku.

4.1 Produkce a množiny produkcí

Předpokládá se, že v ekonomice je kladné celé číslo n producentů, každý označen indexem $j = 1, \ldots, n$. Pro j-tého producenta je plán produkce výčtem jeho vstupů a výstupů; výstupy jsou vyjádřeny kladnými čísly, vstupy zápornými. S touto úmluvou, plán produkce, nebo krátce *produkce*, je reprezentována bodem y_j v komoditním prostoru $\mathbb{R}^l$. Daná produkce y_i může být pro j-tého producenta technicky možná, nebo nemožná. Množina Y_j všech možných produkcí j-tého producenta se nazývá jeho *množina produkcí*. Bod y_j se také nazývá *nabídka* j-tého producenta.

Vstupy produkce mohou zahrnovat surové materiály, polotovary, půdu, práci pracovníků, vedoucích, atd. v různých časech a lokacích. Výstupy obecně zahrnují více než jednu komoditu, už jen proto, že výroba se skládá z několika dat. Obecně vstupy a výstupy dohromady obsahují relativně malý počet komodit, což znamená, že většina souřadnic y_j je nulových. To odpovídá faktu, že Y_j je obecně obsažena v podprostoru $\mathbb{R}^l$ s relativně malým počtem dimenzí.

Produkce y_j je označena jako možná nebo nemožná pro j-tého producenta podle jeho současných znalostí o jeho současných a budoucích technologiích. Producent tedy ví, jaké kombinace vstupů a výstupů budou v budoucnu možné, přestože nemusí znát detaily technického procesu, který je umožní.

Suma $y = \sum_{j=1}^{n} y_j$ se nazývá *celková produkce* nebo také *celková nabídka* a množina $Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ se nazývá množina celkové produkce.

4.2 Předpoklady o množinách produkcí

Zde si uvedeme předpoklady o množinách Y_j v pořadí s klesající věrohodností.

(a) Y_j *je uzavřená*,

tj. nechť (y_j^q) je posloupnost produkcí. Jestliže všechny y_j^q jsou možné pro j-tého producenta a $y_j^q \to y_j^0$, pak y_j^0 je možné pro j-tého producenta.

Podobný předpoklad platí pro množinu celkové produkce.

(a') Y je uzavřená.

(b) $0 \in Y_j$ (možnost nicnedělání),

tj. j-tý producent má možnost nicnedělání.

Podobný předpoklad pro množinu celkové produkce:

(b') $0 \in Y$.

Ekonomika, ve které neprobíhá žádná výrobní činnost je charakterizována jako $Y = \{0\}$, tj. množina celkové produkce obsahuje jediný bod 0.

(c) $Y \cap \Omega \subset \{0\}$ (nemožnost prázdné produkce),

tj. všechny výstupy možné celkové produkce, jejíž vstupy jsou nulové, jsou také nulové.

(d) $Y \cap -Y \subset \{0\}$ (nevratnost),

tj. pokud celková produkce y, jejíž vstupy a výstupy nejsou všechny nulové, je možná, pak celková produkce $-y$ není možná. Produktivní proces nemůže být obrácen, protože, zejména, produkce zabere čas a komodity jsou datovány.

(e) $(Y_j + Y_j) \subset Y_j$ (aditivita),

tj. jestliže y_j^1 a y_j^2 jsou produkce možné pro j-tého producenta, je možná také $y_j^1 + y_j^2$. Pokud Y_j reprezentuje technologické znalosti, je jasné, že dva plány produkce možné samostatně jsou možné i dohromady.

(f) Y_j *je konvexní* (konvexnost),
tj. jestliže y_j^1 a y_j^2 jsou produkce možné pro j-tého producenta, je možný i jejich vážený průměr $ty_j^1 + (1-t)y_j^2$ s libovolnými kladnými vahami, kde $t \in [0,1]$
Podobný předpoklad pro množinu celkové produkce:

(f') Y *je konvexní* (viz Definice 8.).
Tento předpoklad je slabší než „Y_j je konvexní."

(g) Y_j je kužel s vrcholem 0 (konstantní výnosy z rozsahu)[2],
tj. jestliže y_j je produkce možná pro j-tého producenta, pak je možná i ty_j, kde t je libovolné nezáporné číslo. Tento předpoklad odpovídá intuitivní představě o základním procesu produkce, pro který jsou vzájemné poměry všech vstupů a výstupů stálé, zatímco rozsah operací s může libovolně měnit.

Jestliže všechny Y_j jsou kužely s vrcholem 0, pak je i Y.

(h) $Y \supset (-\Omega)$ (v angličtině jako „free disposal"),
tj. je možné, že celková produkce má všechny výstupy nulové. Jinak řečeno, je možné, že si všichni producenti navzájem rozdělí všechny komodity.
Blízký je tento předpoklad:

(h') $Y \supset (Y - \Omega)$,
tj. pokud je celková produkce možná, je možná také produkce, kde žádný výstup není větší a žádný vstup menší (v absolutní hodnotě).

Platí následující implikace:
„konvexnost (f') pro Y, spojitost (a') pro Y a (h)" implikuje (h').
„free disposal (h) a nevratnost (d)" implikuje „nemožnost prázdné produkce (c)".

[2]V angličtině se tato vlastnost nazývá *constant returns to scale* a např. podle [3] vyjadřuje, že při změně všech vstupů produkce v určitém kladném poměru se ve stejném poměru změní i výstupy.

4.3 Maximalizace zisku

Pro daný systém cen p a produkci y_j je zisk j-tého producenta $p \cdot y_j$. Celkový zisk je $p \cdot y$.

Je zřejmé, že $p \cdot y_j$ je rozdíl sumy příjmů a sumy výdajů. Předpokládá se, že každý producent pokládá ceny za dané, protože, například, jeho vstup a výstup pro jakoukoliv komoditu je relativně malý a myslí si, že jeho činnost nemůže ceny ovlivnit.

Teorie říká:

Při daném systému cen p si j-tý producent vybere produkci z množiny produkcí Y_j tak, aby maximalizoval svůj zisk. Výsledná činnost se nazývá rovnovážná produkce j-tého producenta vzhledem k p.

Pro $p \neq 0$ dostaneme následující geometrickou situaci. Jestliže y_j je maximizer, množina Y_j je obsažena v uzavřeném poloprostoru pod nadrovinou H procházející y_j, s normálou p. Množina maximizerů je průnik Y_j a H.

Pro libovolné p nemusí maximální zisk existovat. Nechť tedy T'_j je množina p z $\mathbb{R}^l$, pro kterou množina maximizerů je neprázdná (T'_j je kužel s vrcholem 0). Tudíž ke každému systému cen p v T'_j je přiřazena neprázdná množina $\eta_j(p)$ možných produkcí maximalizujících zisk pro dané p. Mnohoznačná funkce η_j z T'_j do Y_j se nazývá *mnohoznačná funkce nabídky j-tého producenta.*

Nechť $\pi_j(p)$ je maximální zisk pro systém cen p z T'_j. Funkce z π_j do $\mathbb{R}$ se nazývá *zisková funkce j-tého producenta.*

Jestliže všechny ceny v p jsou vynásobeny stejným kladným číslem t, zřejmě $\eta_j(tp) = \eta_j(p)$, tj. množina maximizerů je stejná a $\pi_j(tp) = \pi_j(p)$, tj. maximum je vynásobeno t.

Pro daný systém cen p existuje maximální zisk pro všechna $j = 1, \ldots, n$ právě tehdy, když p náleží do $\bigcap_{j=1}^{n} T'_j$. V tom případě lze definovat neprázdnou množinu $\eta(p) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(p)$ možných celkových produkcí kompatibilních s maximalizací zisku pro dané p pro každého producenta. Mnohoznačná funkce η z $\bigcap_{j=1}^{n} T'_j$ do Y se nazývá *mnohoznačná funkce celkové poptávky*. Lze také definovat číslo $\pi(p) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j(p)$. Funkce π z $\bigcap_{j=1}^{n} T'_j$ do$\mathbb{R}$ se nazývá *funkce celkového zisku*. Jestliže t je kladné číslo, platí

$$\eta(tp) = \eta(p) \quad \text{a} \quad \pi(tp) = t\pi(p).$$

Z toho plyne následující důsledek:

(1) Nechť $y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_n$ jsou body v $Y_1, \ldots, Y_j, \ldots, Y_n$. Pro dané p, $p \cdot y = Max\ p \cdot Y$ právě tehdy, když $p \cdot y_j = Max\ p \cdot Y_j$ pro všechna j.

Jinými slovy y maximalizuje celkový zisk na Y, právě tehdy, když všechna y_j maximalizují zisk na Y_j.

(1') Pro dané p z $\bigcap_{j=1}^{n} T'_j$, $\eta(p) = \{y \in Y | p \cdot y = Max\ p \cdot Y\}$ a $\pi(p) = Max\ p \cdot Y$.

Jinými slovy $\eta(p)$ je množina maximizerů celkového zisku na Y; $\pi(p)$ je maximum celkového zisku na Y.

Pro $Y \supset (-\Omega)$ („free disposal“) platí:

Pro dané p existuje maximum $p \cdot y_j$ na Y_j pro všechna j právě tehdy, když existuje maximum $p \cdot y$ na Y, tedy když $p \geq 0$. Kdyby $p_h < 0$ bylo by možné libovolně zvětšovat $p \cdot y$ zvětšováním (v absolutní hodnotě) celkového vstupu h-té komodity.

5 Spotřebitelé

Druhou skupinou ekonomických činitelů jsou spotřebitelé. Jejich úkolem je vybrat si kompletní plán spotřeby. Spotřebitel je charakterizován omezením svého výběru a kritériem výběru. Jsou dva druhy omezení výběru: prvně, plán spotřeby musí splnit určitá daná omezení, a za druhé, hodnota plánu spotřeby nesmí při daných cenách a majetku spotřebitele překročit hodnotu majetku spotřebitele. V této kapitole vytvoříme z hlediska teorie a interpretace koncept spotřebitele, plánu spotřeby, množiny daných možných plánů spotřeby a vyšetříme vlastnosti těchto množin. Dále vytvoříme koncept preferencí mezi danými možnými plány spotřeby a vyšetříme vlastnosti preferencí. Představíme majetkové omezení a pak prostudujeme uspokojení preferencí při obou zmíněných omezeních.

5.1 Spotřeba a množiny spotřeb

Spotřebitel je typicky jednotlivec, domácnost, může jím být i větší skupina s obvyklým záměrem. Jeho úkolem je vybrat si a uskutečnit plán spotřeby pro celou budoucnost, tj. specifikaci velikostí všech jeho vstupů a výstupů. Předpokládá se, že v ekonomice se nachází dané kladné celé číslo m spotřebitelů, každému je přiřazen index $i = 1, \ldots, m$.

Vstupy i-tého spotřebitele jsou vyjádřeny kladnými čísly, výstupy zápornými. Dle této úmluvy je jeho plán spotřeby, nebo krátce *spotřeba*, reprezentována bodem x_i v komoditním prostoru $\mathbb{R}^l$. Daná spotřeba x_i může být pro i-tého spotřebitele možná, nebo nemožná. Například rozhodnutí jedince mít během příštího roku jako jediný vstup jeden kilogram rýže a jako vystup tisíc hodin stejné práce je neproveditelné. Množina X_i všech spotřeb možných pro i-tého spotřebitele se nazývá jeho *množina spotřeb*. Bod x_i se také nazývá *poptávka* i-tého spotřebitele.

Obecně nevstupuje do spotřeby mnoho komodit, což odpovídá tomu, že X_i je obecně obsažena v podprostoru $\mathbb{R}^l$ s relativně malým počtem dimenzí. Vstupy do spotřeby jsou typicky různé zboží a služby, výstupy se liší podle vykonávané práce. Obojí je vymezeno datem a místem.

Pro danou spotřebu x_i každého spotřebitele, suma $x = \sum_{i=1}^{m} x_i$ se nazývá *celková spotřeba* nebo také *celková poptávka*. Množinu $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$ nazveme *množina celkové spotřeby*.

5.2 Předpoklady o množinách spotřeb

Zde si uvedeme předpoklady o množinách X_i v pořadí s klesající věrohodností.

(a) *X_i je uzavřená*,

tj. nechť (x_i^q) je nekonečná posloupnost spotřeb. Jestliže všechny x_i^q jsou možné pro i-tého spotřebitele a $x_i^q \to x_i^0$, pak je pro něj možná x_i^0.

Podobný předpoklad platí pro množinu celkové spotřeby.

(a') *X je uzavřená.*

(b) *X_i má dolní mez* pro $\leq$ (omezenost zdola),

tj. existuje bod χ_i v $\mathbb{R}^l$ takový, že $\chi_i \leq x_i$ pro všechna x_i v X_i, nebo jinými slovy, že $X_i \subset \{\chi_i\} + \Omega$. Tento předpoklad má jednoduché ekonomické ospravedlnění. Jestliže h-tá komodita je vstup, x_{ih} má dolní mez rovnu nule. Jestliže h-tá komodita je výstup, tj. nějaký druh produkované práce, zřejmě existuje horní mez (v absolutní hodnotě) pro množství té práce, kterou může spotřebitel vyprodukovat během příslušného elementárního časového intervalu, bez ohledu na jeho ostatní vstupy a výstupy.

Podobný předpoklad platí pro množinu celkové spotřeby.

(b') *X má dolní mez* pro $\leq$. Pokud předchozí předpoklad platí pro všechna X_i, pak $\chi = \sum_{i=1}^{m} \chi_i$ je dolní mez X pro $\leq$.

Naopak, jestliže X má dolní mez pro $\leq$, pak všechny X_i mají dolní mez pro $\leq$.

Jestliže jsou všechny X_i uzavřená, nemusí být nutně uzavřená i X. Nicméně platí:

Jestliže všechny X_i jsou uzavřené a mají dolní mez pro $\leq$, pak je X uzavřená.

(c) X_i *je souvislá* (souvislost).

To znamená, v intuitivním a nepřesném jazyce, že je X_i tvořena jedním celkem.

(d) X_i je *konvexní* (konvexnost).

tj. jestliže x_i^1 a x_i^2 jsou spotřeby možné pro i-tého spotřebitele, je možný i jejich vážený průměr $tx_i^1 + (1-t)x_i^2$ s libovolnými kladnými vahami, kde $t \in [0, 1]$.

Stejně jako u množin produkcí, tento předpoklad konvexnosti hraje zásadní roli v důkazech několika fundamentálních ekonomických teorémů.

Jestliže všechny X_i jsou konvexní, pak je konvexní i X, poněvadž sjednocení konečně mnoha konvexních množin je opět konvexní.

5.3 Preference

Nechť jsou dány dvě spotřeby x_i^1, x_i^2 v X_i. Předpokládá se, že může nastat pouze jedna z následujících variant:
pro i-tého spotřebitele

- x_i^1 je preferována před x_i^2
- x_i^1 je indiferentní s x_i^2
- x_i^2 je preferována před x_1^2

Nejvhodnější je zaměřit se na binární relaci na X_i „není preferována před“, která může být též čtena jako „je nanejvýš tak žádaná jako.“ Zřejmě x_i je nanejvýš tak žádaná jako x_i pro libovolnou x_i z X_i. Navíc se předpokládá, že pro x_i^1, x_i^2, x_i^3 z X_i, „x_i^1 je nanejvýš tak žádaná jako x_i^2 a x_i^2 je nanejvýš tak žádaná jako x_i^3“ implikuje „x_i^1 je nanejvýš tak žádaná jako x_i^3.“ Binární relace je tedy

reflexivní a tranzitivní; je to *částečné uspořádání*, které označíme $\precsim_i$ a nazveme *částečné uspořádání preferencí* i-tého spotřebitele. Je to vlastně úplné částečné uspořádání.
„$x_i^1 \precsim_i x_i^2$ a $x_i^2 \precsim_i x_i^1$“ se označuje „$x_i^1 \sim_i x_i^2$“ a čte „x_i^1 je indiferentní s x_i^2.“
„$x_i^1 \succsim_i x_i^2$ a ne $x_i^2 \succsim_i x_i^1$“ se označuje „$x_i^1 \succ_i x_i^2$“ a čte „x_i^1 je preferována před x_i^2.“

Binární relace $\sim_i$ na X_i se nazývá *indiferentní relace* i-tého spotřebitele. Je zřejmě reflexivní a tranzitivní a je také symetrická, tj. „$x_i^1 \sim_i x_i^2$“ implikuje „$x_i^2 \sim_i x_i^1$.“ Pro danou spotřebu $x_i^{'}$ z X_i nazveme množinu $\{x_i \in X_i | x_i \sim_i x_i^{'}\}$, tj. množinu spotřeb z X_i, které jsou indiferentní s $x_i^{'}$, *indiferentní třídou* s $x_i^{'}$. Libovolná spotřeba z X_i patří pouze do jediné indiferentní třídy. Jinými slovy, množina indiferentních tříd tvoří rozklad X_i.

Částečné uspořádání preferencí i-tého spotřebitele vyjadřuje jeho vkus ohledně jídla, oblečení, bydlení, ... ,práce a také jeho spotřeby v určitý čas na určitém místě. Takto uvažované preference nepočítají s dalším prodejem komodit; i-tý spotřebitel o ně má zájem jen z důvodu jeho osobní potřeby.

5.4 Majetkové omezení

Pro daný systém cen p a spotřebu x_i jsou *výdaje* i-tého spotřebitele $p \cdot x_i$. Podle úmluv o znaménkách souřadnic x_i a p je skalární součin $p \cdot x_i$ suma všech výdajů minus suma všech příjmů. A jelikož komodity jsou datovány, odpovídá tento koncept obvyklé představě o sumě všech diskontovaných budoucích výdajů spotřeby minus suma všech diskontovaných budoucích příjmů za práci. Výdaj $p \cdot x_i$ musí zřejmě být nanejvýš roven majetku i-tého spotřebitele, reálnému číslu w_i. Majetek je chápán podle běžného názoru jako současná hodnota všeho, co i-tý spotřebitel vlastní, navýšená o dluhy vůči němu a snížená o jeho dluhy. M-tice (w_i), kterou nazýváme *rozdělení bohatství*, udává majetek všech spotřebitelů a je reprezentována bodem w v $\mathbb{R}^m$. Podle teorie:

Pro daný systém cen p a majetek w_i si i-tý spotřebitel vybírá spotřebu x_i ze své množiny spotřeb X_i tak, aby jeho výdaje $p \cdot x_i$ splňovaly podmínku $p \cdot x_i \leq w_i$.

Bod $w = (w_i)$ v $\mathbb{R}^m$ se nazývá *rozdělení bohatství*. Bod (p, w) v $\mathbb{R}^{l+m}$ se nazývá *dvojice cena-majetek*.

Pro $p \neq 0$ nastane tato geometrická situace. Nadrovinu $\{a \in \mathbb{R}^l \mid p \cdot a = w_i\}$ nazveme *nadrovinou majetku*. Omezení $p \cdot x_i \leq w_i$ říká, že x_i musí ležet v uzavřeném poloprostoru pod nadrovinou majetku.

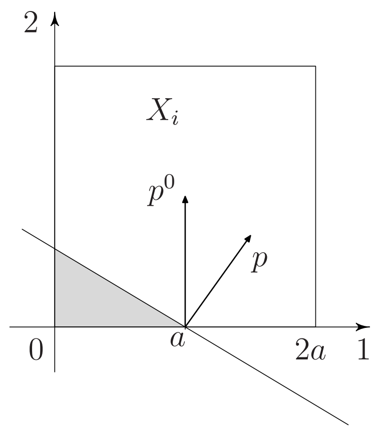
Pro libovolnou dvojici (p, w) může být množina $\{x_i \in \mathbf{X}_i \mid p \cdot x_i \leq w_i\}$, ze které i-tý spotřebitel vybírá, prázdná. Nechť tedy S_i je množina (p, w) v $\mathbb{R}^{l+m}$, pro kterou to tak není (S_i je zřejmě kužel s vrcholem 0). Pak každé dvojici cena-majetek (p, w) z S_i je přidružena množina $\gamma_i(p, w) = \{x_i \in \mathbf{X}_i \mid p \cdot x_i \leq w_i\}$ možných spotřeb splňujících majetkové omezení pro danou dvojici (p, w). Takto je definována mnohoznačná funkce γ_i z S_i do X_i. $\gamma_i(p, w)$ závisí jen na p a w. Je-li t kladné číslo, pak zřejmě $\gamma_i(tp, tw) = \gamma_i(p, w)$.

S_i je definována jako $S_i = \{(p, w) \in \mathbb{R}^{l+m} \mid \exists x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leq w_i\}$. Mnohoznačná funkce γ_i z S_i do X_i je definována jako $\gamma_i(p, w) = \{x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leq w_i\}$.

Prostudujme nyní spojitost γ_i.

Věta 2. *Je-li X_i kompaktní, konvexní a je-li (p^0, w^0) bod v S_i takový, že $w_i^0 \neq Min\ p^0 \cdot X_i$, pak γ_i je spojitá v (p^0, w^0).*

Jinými slovy, pro danou množinu spotřeb X_i a dvojici cena-majetek (p^0, w^0) z S_i je mnohoznačná funkce γ_i jistě spojitá v (p^0, w^0) s výjimkou případu, kdy $w_i^0 = Min\ p^0 \cdot X_i$, tj. když majetek w_i^0 je tak malý, že pro libovolný menší by neexistovala žádná možná spotřeba splňující majetková omezení.



Obr. 5.1: Spojitost γ_i (podle [1], str. 63)

Obrázek 5.1 ukazuje, jak γ_i nemusí být spojitá, jestliže $w_i^0 = Min\ p^0 \cdot X_i$. Množina X_i je uzavřený čtverec o hraně 2. Uvažujeme $p^0 = (0,1)$ a $w_i^0 = 0$; Odpovídající nadrovinou je přímka 0,1. Nastal výjimečný případ $w_i^0 = Min\, p^0 \cdot X_i$, tj. neexistuje bod z X_i ležící pod zmíněnou nadrovinou. Nechť nyní a je bod (1,0) a nechť p, w_i se blíží k p^0, w_i^0 tak, že odpovídající nadrovina rotuje kolem a, jak je znázorněno na obrázku. Dokud $p \neq p^0$, množina $\gamma_i(p, w)$ je vystínovaná oblast, jejíž limitou je uzavřená úsečka $[0, a]$. Avšak $\gamma_i(p^0, w^0)$ je uzavřená úsečka $[0, 2a]$.

Důkaz existence rovnováhy v ekonomice soukromých vlastnictví závisí na spojitosti γ_i.

5.5 Uspokojení preferencí

Pro danou dvojici cena-majetek (p, w) z S_i si i-tý spotřebitel z neprázdné množiny $\gamma_i(p, w)$ vybírá spotřebu x_i, která je pro něj optimální vzhledem k jeho preferencím, tj. největší prvek částečného uspořádání preferencí $\precsim_i$. Pokud existuje funkce utility u_i, dá se říct, že si vybírá maximizer pro u_i na $\gamma_i(p, w)$; v tomto případě je „uspokojení preferencí“ synonymem s „maximalizací utility“. To vede k určení množství všech statků a služeb, které spotřebuje, a všech typů práce, kterou vyprodukuje, což vytvoří plán možné spotřeby, optimální k jeho majetku. Podle teorie:

Pro danou dvojici cena-majetek (p, w) z S_i si i-tý spotřebitel z množiny $\gamma_i(p, w)$ vybere největší prvek jeho částečného uspořádání preferencí $\precsim_i$. Výsledná činnost se nazývá *rovnovážná spotřeba i-tého spotřebitele vzhledem k* (p, w).

Pro $p \neq 0$ nastane následující geometrická situace. Jestliže $x_i^{'}$ je největší prvek $\gamma_i(p, w)$, množina $\left\{x_i \in X_i \mid x_i \succ_i x_i^{'}\right\}$ nemá s uzavřeným podprostorem pod majetkovou nadrovinou H žádný společný bod.

Jestliže $x_i^{'}$ je rovnovážná spotřeba vzhledem k (p, w), pak je to zřejmě největší prvek $\precsim_i$ z $\left\{x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leq p \cdot x_i^{'}\right\}$. Formální definice zní:

Definice 17. Činnost $x_i^{'}$ se nazývá *rovnovážná spotřeba i-tého spotřebitele vzhledem k cenovému systému* p, pokud je to největší prvek z $\left\{x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leq p \cdot x_i^{'}\right\}$ pro $\precsim_i$.

Pro libovolnou dvojici cena-majetek (p, w) z S_i, $\gamma_i(p, w)$ nemusí mít největší prvek. Nechť tedy $S_i^{'}$ je množina (p, w) z S_i takových, pro které množina největších prvků $\gamma_i(p, w)$ je neprázdná ($S_i^{'}$ je zřejmě kužel s vrcholem 0; bod 0 je vyjmut pouze v případě, že je i-tý spotřebitel neuspokojitelný). Tedy každé dvojici (p, w) z $S_i^{'}$ je přiřazena neprázdná množina $\xi_i(p, w)$ možných spotřeb optimální vzhledem k majetkovému omezení definovanému (p, w). Všechny body $\xi_i(p, w)$ jsou zřejmě indiferentní. Mnohoznačná funkce ξ_i z $S_i^{'}$ do X_i se nazývá *mnohoznačná funkce poptávky i-tého spotřebitele*. Pro dané dvě dvojice cena-majetek (p^1, w^1) a (p^2, w^2) z $S_i^{'}$, řekneme, že (p^1, w^1) je pro i-tého spotřebitele preferováno před (resp. indiferentní s) (p^2, w^2), jestliže bod z $\xi_i(p^1, w^1)$ je preferován před (resp. indiferentní s) bodem z $\xi_i(p^2, w^2)$. Pokud na X_i existuje funkce utility u_i, maximální utilita, když dvojice cena-majetek je (p, w) z $S_i^{'}$, se označuje $\upsilon_i(p, w)$. Funkce υ_i z $S_i^{'}$ do $\mathbb{R}$ se nazývá *nepřímá funkce utility j-tého spotřebitele*. Pro kladné číslo t zřejmě platí

$$\xi_i(tp, tw) = \xi_i(p, w) \quad \text{a} \quad \upsilon_i(tp, tw) = \upsilon_i(p, w).$$

Pro dvojici cena-majetek (p, w) existuje největší prvek z $\gamma_i(p, w)$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$ právě tehdy, když (p, w) náleží do $\bigcap_{i=1}^{m} S_i^{'}$. V tom případě lze definovat neprázdnou množinu $\xi(p, w) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(p, w)$ možných celkových spotřeb kompatibilních s výběrem optimální spotřeby pro majetkové omezení všech spotřebitelů. Mnohoznačná funkce ξ z $\bigcap_{i=1}^{m} S_i^{'}$ do X se nazývá *mnohoznačná funkce celkové poptávky*. Pro kladné číslo t platí

$$\xi(tp, tw) = \xi(p, w).$$

6 Rovnováha

Abychom obdrželi ústřední koncept ekonomiky, zbývá už jen zavést celkové zdroje. Ekonomika je definována m spotřebiteli, charakterizovanými jejich množinami spotřeby a preferencemi, n producenty, charakterizovanými jejich množinami produkce a celkovými zdroji. Stav ekonomiky je výčet činností všech činitelů a je dosažitelný, pokud činnost každého činitele je pro něj možná a jestliže jejich $(m + n)$ činností je kompatibilních s celkovými zdroji. Množina dosažitelných stavů ekonomiky hraje zásadní roli.

6.1 Zdroje

Celkové zdroje ekonomiky jsou předem daná množství komodit, která jsou poskytnuta k dispozici činiteli resp. činitelům; jsou vyjádřena zápornými resp. kladnými čísly. Podle této úmluvy jsou celkové zdroje reprezentovány bodem ω v komoditním prostoru $\mathbb{R}^l$. Je v nich zahrnut veškerý kapitál ekonomiky v současný okamžik, tj. všechna půda, budovy, nerostná bohatství, zařízení, statky, atd. v současnosti existující a dostupné pro ekonomické činitele. Jsou však odkazem minulosti, jsou předem dané.

6.2 Ekonomiky

Kompletní popis ekonomiky E je nyní možný; skládá se z:

- pro každého spotřebitele, jeho množiny spotřeb X_i a jeho částečného uspořádání preferencí $\precsim_i$,
- pro každého producenta, jeho množiny produkcí Y_j,
- celkových zdrojů ω.

Stav ekonomiky E je výčet činností všech činitelů, tj. specifikací spotřeby x_i každého spotřebitele a specifikací produkce Y_j každého producenta v komoditním prostoru. Stav ekonomiky je tedy $(m + n)$-tice $((x_i), (y_j))$ bodů z $\mathbb{R}^l$. Může být reprezentován bodem z $\mathbb{R}^{l(m+n)}$. Formálně:

Definice 18. Ekonomika E je definována: pro všechna $i = 1, \dots, m$ neprázdnou množinou X_i z $\mathbb{R}^l$ částečně seřazenou podle $\precsim_i$; pro všechna $j = 1, \dots, n$ neprázdnou množinou Y_j z $\mathbb{R}^l$; bodem ω z $\mathbb{R}^l$. Stav E je $(m+n)$-tice bodů z $\mathbb{R}^l$.

Pro daný stav $((x_i),(y_j))$ z E nazveme bod $x - y$ *čistá poptávka*. Při tvorbě $x - y$ vykrátíme transfery komodit mezi ekonomickými činiteli, protože každý takový transfer se objeví jednou jako vstup s kladným znaménkem a jednou jako výstup se záporným. $x - y$ tedy popisuje čistý výsledek činností všech činitelů dohromady. Kladné souřadnice $x-y$ pak vyjadřují vstupy netransferované od ekonomických činitelů, záporné souřadnice vyjadřují výstupy netransferované ekonomickým činitelům. Jestliže $x_i \in X_i$ pro všechna i a $y_j \in Y_j$ pro všechna j, čistá poptávka $x - y$ náleží do množiny $X - Y$.

Pro daný stav $((x_i),(y_j))$ z E bod $x - y - \omega$ označíme z a nazveme *převis poptávky*. Popisuje nadbytek čisté poptávky všech činitelů nad celkovými zdroji. Jestliže $x_i \in X_i$ pro všechna i a $y_j \in Y_j$ pro všechna j, převis poptávky $x - y - \omega$ náleží do množiny $X - Y - \{\omega\}$, kterou označíme Z.

Stav $((x_i),(y_j))$ z E se nazývá *tržní rovnováha*, jestliže převis poptávky je 0. To můžeme také vyjádřit jako $x - y = \omega$, tj. čistá poptávka všech činitelů se rovná celkovým zdrojům. Množina tržních rovnováh z E je lineární podprostor v $\mathbb{R}^{l(m+n)}$ označený M.

Řekneme, že stav $((x_i),(y_j))$ z E je *dosažitelný*, pokud splňuje podmínky:

- $x_i \in X_i$ pro všechna i, $y_j \in Y_j$ pro všechna j, $x - y = \omega$.

  Tedy spotřeba každého spotřebitele pro něj musí být možná, produkce každého producenta pro něj musí být možná a stav musí být tržní rovnováhou. Množina všech dosažitelných stavů E je podmnožinou $\mathbb{R}^{l(m+n)}$ a označíme ji A. Dále

- A je průnik $\left(\prod_i X_i\right) \times \left(\prod_j Y_j\right)$ a M.

Pro danou ekonomiku E je spotřeba x_i pro i-tého spotřebitele *dosažitelná*, pokud existuje dosažitelný stav, jehož složka odpovídající tomuto spotřebiteli je x_i. Jeho *množinu dosažitelných spotřeb* označíme $\widehat{X}_i$. Podobně definujeme *dosažitelnou produkci* j-tého producenta a jeho *množinu dosažitelných produkcí* $\widehat{Y}_j$. Formálně:

Věta 3. *Pro danou ekonomiku E je spotřeba i-tého spotřebitele (resp. produkce j-tého producenta) dosažitelná, pokud je jemu odpovídající složkou nějakého dosažitelného stavu. Jeho množina dosažitelných spotřeb (resp. produkcí) se označuje $\widehat{X}_i$ (resp. $\widehat{Y}_j$).*

6.3 Dosažitelné stavy

Zde si zmíníme některé vlastnosti množiny A dosažitelných stavů ekonomiky E.

Je zřejmé, že množina A je neprázdná právě tehdy, když $\omega \in X - Y$, což můžeme psát jako $0 \in Z$.

Věta 4. *Pro danou ekonomiku E platí: Jsou-li všechny X_i a všechny Y_j uzavřené, pak je A uzavřená.*

Důkaz: viz [1], str 77.

Jsou-li všechny množiny X_i, Y_j ekonomiky E konvexní, je konvexní i A, jelikož je průnikem dvou konvexních množin. Za stejných předpokladů jsou konvexní i množiny $X - Y$ a Z, jakožto sumy konvexních množin.

Množiny X_i, Y_j ekonomiky E nemusí být ohraničené. Ale kvůli fixním zdrojům ω se předpokládá, že množina dosažitelných spotřeb každého spotřebitele a množina dosažitelných produkcí každého producenta je uzavřená, tj. A je uzavřená. Následující věta stanoví podmínky pro množiny X, Y, které zaručí, že A je ohraničená. Navíc obdržíme podmínky, za kterých je uzavřená množina $X - Y$.

Věta 5. *Nechť E je ekonomika, kde X má dolní mez pro $\leq$, Y je uzavřená, konvexní a $Y \cap \Omega = \{0\}$.*
Jestliže $n = 1$ a/nebo $Y \cap -Y \subset \{0\}$, pak A je ohraničená.
Jestliže X je uzavřená, pak $X - Y$ je uzavřená.

Důkaz: viz [1], str 77-78.

Jelikož i-tá množina dosažitelných spotřeb $\widehat{X}_i$ (resp. j-tá množina dosažitelných produkcí $\widehat{Y}_j$) ekonomiky E je zobrazením z A do množiny $\mathbb{R}^l$ obsahující X_i (resp. Y_j), její vlastnosti jsou ihned odvozeny z vlastností A. Např. je-li A ohraničená, kompaktní, nebo konvexní, pak jsou všechny $\widehat{X}_i$ a všechny $\widehat{Y}_j$ ohraničené, kompaktní, konvexní.

6.4 Ekonomiky soukromých vlastnictví

V těchto ekonomikách spotřebitelé vlastní zdroje a ovládají tak producenty. Proto i-tý spotřebitel obdrží hodnotu svých zdrojů ω_i (ω_i jsou body z $\mathbb{R}^l$, splňující $\sum_{i=1}^{m} = \omega$, celkovým zdrojům) a *podíly* $\theta_{i1}, \ldots, \theta_{ij}, \ldots, \theta_{in}$ ze zisku prvního, ...,j-tého, ...,n-tého producenta; θ_{ij} jsou reálná čísla splňující $\theta_{ij} \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} = 1$ pro všechna j. Bod ω_i specifikuje předem daná množství komodit, která jsou pro něj dostupná, nebo která poskytuje. Číslo θ_{ij} je interpretováno jako podíl akcií j-tého producenta, které vlastní.

Kompletní popis ekonomiky soukromých vlastnictví $\mathcal{E}$ se skládá z:

- pro každého spotřebitele, jeho množiny spotřeb X_i, jeho částečného uspořádání preferencí $\precsim_i$, jeho zdrojů ω_i (spňujících $\sum_{i=1}^{m} \omega_i = \omega$) a jeho podílů $\theta_{i1}, \ldots, \theta_{ij}, \ldots$ $\ldots, \theta_{in}$ (splňujících $\theta_{ij} \geq 0$ a $\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} = 1$ pro všechna j);
- pro každého producenta, z jeho množiny produkcí Y_j.

Uvažujme ekonomiku soukromých vlastnictví $\mathcal{E}$. Při systému cen p se j-tý producent snaží maximalizovat svůj zisk na Y_j. Předpokládejme, že to y_j splňuje;

zisk $\pi_j(p) = p \cdot y_j$ je rozdělen akcionářům. Pak majetek každého spotřebitele je

$$w_i = p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} \pi_j(p).$$

Tento spotřebitel se snaží uspokojit své preference na X_i vzhledem k majetkovým omezením. Předpokládejme, že to x_i splňuje. Jestliže činnosti x_i, y_j splňují rovnost $x - y = \omega$, pak je ekonomika v rovnováze, tj. žádný činitel nemá potřebu si za daného systému cen a činností ostatních činitelů vybrat jinou činnost. Formálně:

Definice 19. Ekonomika soukromých vlastnictví $\mathcal{E}$ je definována:
ekonomikou $((X_i, \precsim_i), (Y_j), \omega)$;

pro všechna i, bodem ω_i z $\mathbb{R}^l$ takovým, že $\sum_{i=1}^{m} \omega_i = \omega$;

pro každou dvojici (i, j), nezáporným reálným číslem θ_{ij} takovým, že $\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} = 1$ pro všechna j.

Rovnováha v ekonomice soukromých vlastnictví $\mathcal{E}$ je $(m+n-1)$-tice (x_i^*, y_j^*, p^*) bodů z $\mathbb{R}^l$ takových, že:

(α) x_i^* je největší prvek z $\left\{ x_i \in X_i \mid p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p^* \cdot y_j^* \right\}$,

(β) y_j^* maximalizuje zisk vzhledem k p^* na Y_j pro všechna j,

(γ) $x^* - y^* = \omega$.

Definice vyjadřuje, že x_i^* je rovnovážná spotřeba vzhledem k (p^*, w^*), kde $w_i^* = p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*$, pro j-tého producenta existuje rovnovážná produkce vzhledem k p^* a stav $((x_i^*), (y_j^*))$ je tržní rovnováha.

Nechť t je kladné reálné číslo. $((x_i^*), (y_j^*), tp^*)$ je rovnováha právě tehdy, když existuje jediná trojice $((x_i^*), (y_j^*), p^*)$; proto všechny systémy cen náležící otevřené polopřímce s počátkem 0 jsou z hlediska rovnováhy ekvivalentní.

Nabízí se zásadní otázka: existuje v dané ekonomice soukromých vlastnictví rovnováha? Odpověď na tuto otázku nám dá následující podkapitola.

6.5 Rovnováha v ekonomice soukromých vlastnictví

Uvažujme ekonomiku soukromých vlastnictví $\mathcal{E}$ a nechť C je množina všech p v $\mathbb{R}^l$ takových, pro které jsou definovány neprázdné množiny $\eta_j(p)$ $\xi_i'(p)$. Při systému cen p z C si j-tý producent vybírá y_j z množiny $\eta_j(p)$ jeho produkcí optimálních pro daný systém cen a jeho zisk je $\pi_j(p) = p \cdot y_j$. Rozdělení bohatství je pak m-tice $\left(p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} \pi_j(p)\right)$ a i-tý spotřebitel vybírá x_i z množiny

$$\xi_i\left(p, \left(p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} \pi_j(p)\right)\right)$$

jeho spotřeb optimálních pro daný systém cen a rozdělení bohatství. Tato množina závisí jen na p a budeme ji značit $\xi_i'(p)$; sumu $\sum_{i=1}^{m} \xi_i'(p)$ označíme $\xi'(p)$. Protože x_i je libovolný bod množiny $\xi_i'(p)$ pro všechna i a y_j je libovolný bod množiny $\eta_j(p)$ pro všechna j, převis poptávky $z = x - y - \omega$ je libovolný bod množiny

$$\zeta(p) = \xi'(p) - \eta(p) - \{\omega\},$$

podmnožiny $Z = X - Y - \{\omega\}$. Tedy každému systému cen p z C je přiřazena neprázdná množina $\zeta(p)$ převisů poptávky kompatibilní s výběrem optimální spotřeby každého spotřebitele vzhledem k majetkovým omezením a výběrem optimální produkce každého producenta vzhledem k systému cen p. Mnohoznačná funkce ζ z C do Z se nazývá *mnohoznačná funkce převisu poptávky.* Problém nalezení rovnováhy spočívá v nalezení p z C takového, pro které odpovídající převis poptávky je 0. Problém můžeme tedy formulovat: existuje p z C, pro které $0 \in \zeta(p)$?

Poznamenejme nejprve, že je-li p z C a t je kladné reálné číslo, pak je definována $\eta_j(tp)$, která je rovna $\eta_j(p)$ a $\xi_i'(tp)$, která je rovna $\xi_i'(p)$. Jinými slovy, jsou-li všechny ceny v systému cen p z C vynásobeny stejným kladným reálným číslem, množiny optimálních činností ekonomických činitelů se nezmění. Proto platí $tp \in C$ a $\zeta(tp) = \zeta(p)$. C je tedy kužel s vrcholem 0; bod 0 je vyjmut právě tehdy, když některá z množin $\eta_j(p)$, $\xi_i'(p)$ není definována v případě, že jsou všechny ceny nulové. Tato situace nastane právě tehdy, když je nějaký spotřebitel neuspokojitelný.

Také si všimněme, že činnosti x_i, y_j vybrané činiteli pro systém cen p z C splňují majetková omezení

$$p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p \cdot y_j \quad \text{pro všechna } i.$$

Po sečtení přes i dostaneme (připomeňme, že $\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} = 1$ pro všechna j):

$$p \cdot x \leq p \cdot \omega + p \cdot y, \quad \text{tj.} \quad p \cdot z \leq 0.$$

Tedy pro všechna p z C platí, že $p \cdot z \leq 0$ pro všechna z z $\zeta(p)$, což můžeme také napsat jako $p \cdot \zeta(p) \leq 0$. Když $p \neq \emptyset$, znamená to, že množina $\zeta(p)$ leží pod nadrovinou procházející bodem 0 a ortogonální k p.

Řešení problému rovnováhy poskytneme pro případ, kdy převládá „free disposal“ (viz. 4.2 (h)). Vztah pro tržní rovnováhu (γ) z Definice 19. můžeme intuitivně nahradit nerovností $x_i^* - y_j^* \leq \omega$. Tato nerovnost vyjadřuje, že pro každou komoditu je čistá poptávka nanejvýš rovna jejímu předem danému dostupnému množství. Totéž můžeme napsat jako $z^* \leq 0$. Při této slabší podmínce spočívá problém rovnováhy v nalezení p z C, pro které je příslušný převis poptávky ≤ 0, tj. náleží do $-\Omega$. Problém můžeme formulovat: existuje p z C takové, že průnik $\zeta(p) \cap (-\Omega)$ je neprázdný?

Navíc v případě „free disposal“ je množina $\eta_j(p)$ definovaná pro všechna j pouze v případě, že $p \geq 0$ (viz konec 4.3); proto C je obsažena v Ω. Navíc pokud bod 0 je z C vyjmut (tj. když je nějaký spotřebitel neuspokojitelný), pak pro všechna p z C dostaneme $\sum_{h=1}^{l} p_h > 0$, a odtud $\zeta\left(\frac{1}{\sum_{h=1}^{l} p_h} p\right) = \zeta(p)$. Proto při hledání rovnováhy může být každé p z C nahrazeno bodem, kde uzavřená polopřímka $0, p$ protíná množinu

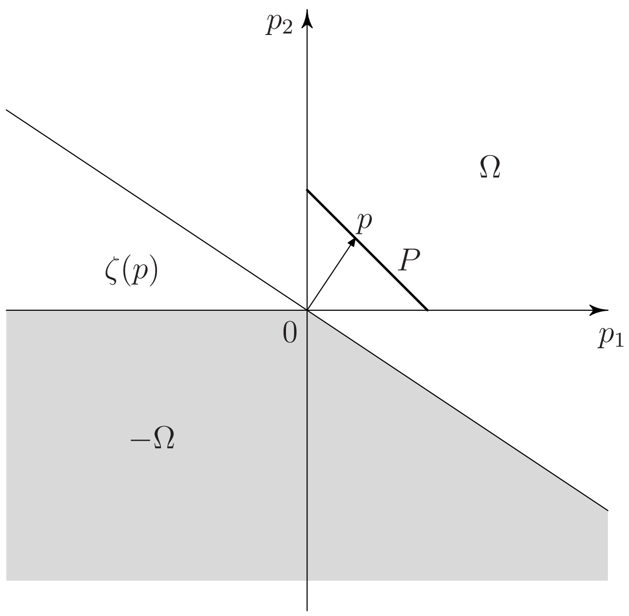
$$P = \left\{ p \in \Omega \mid \sum_{h=1}^{l} p_h = 1 \right\}.$$

Výše zmíněné vede ke studiu následujícího problému. Pro mnohoznačnou funkci ζ z P do Z platí, že $p \cdot \zeta(p) \leq 0$ pro všechna p z P. Jaké další podmínky pro ζ a Z zajistí, že existuje p z P, pro které $\zeta(p) \cap (-\Omega) \neq 0$? Odpověď nám dá následující věta.

Věta 6. *Nechť Z je kompaktní podmnožina $\mathbb{R}^l$. Jestliže ζ je shora spojitá mnohoznačná funkce z P do Z taková, že pro všechna p z P je množina $\zeta(p)$ (neprázdná) konvexní a splňuje $p \cdot \zeta(p) \leq 0$, pak existuje p z P takové, že $\zeta(p) \cap (-\Omega) \neq \emptyset$.*

Důkaz: viz [1], str. 82-83

Geometrický význam této věty lze interpretovat v $\mathbb{R}^2$ na následujícím obrázku:



Obr. 6.1: Rovnováha v $\mathbb{R}^2$ (podle [1], str. 82)

- $l = 2$ nám říká, že v ekonomice uvažujeme 2 komodity.
- Systém cen je $p = (p_1, p_2)$.
- Nechť $\mathbb{R}^2 = \Omega \cup (-\Omega)$, kde $\Omega := \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \in \mathbb{R}, p_2 \geq 0\}$ a $(-\Omega) := \{(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2 \mid p_1 \in \mathbb{R}, p_2 \leq 0\}$.
- Množina P je definována $P = \{p \in \Omega \mid p_1 + p_2 = 1\}$.
- Jelikož $p_1, p_2 \geq 0$, množina P je úsečka v I. kvadrantu. Na této úsečce hledáme bod p; p se může pohybovat od jednoho konce úsečky P ke druhému.
- Každému bodu p z P je přiřazena množina $\zeta(p)$, ležící pod přímkou procházející bodem 0 a kolmou k p.
- Jestliže množina $\zeta(p)$ splňuje podmínky Věty 6., pak existuje p z P takové, že $\zeta(p) \cap (-\Omega) \neq \emptyset$.

Nejdůležitější větou naší práce je následující tvrzení, které se však zásadním způsobem opírá o tvrzení věty 6.

Věta 7. *(viz [1] str. 83-84)*
Ekonomika soukromých vlastnictví $\mathcal{E} = ((X_i, \precsim_i), (Y_j), (\omega_i), (\theta_{ij}))$ *je v rovnováze, jestliže:*
pro všechna i

(a) X_i *je uzavřená, konvexní a má dolní mez pro* $\leq$,

(b.1) *neexistuje nasycení spotřeby v* X_i,

(b.2) *pro všechna* $x_i^{'}$ *z* X_i *jsou množiny* $\left\{x_i \in X_i | x_i \succsim_i x_i^{'}\right\}$ *a* $\left\{x_i \in X_i | x_i \precsim_i x_i^{'}\right\}$ *uzavřené v* X_i,

(b.3) *jestliže* x_i^1 *a* x_i^2 *jsou dva body z* X_i *a* t *je reálné číslo z* $]0, 1[$, *pak* $x_i^2 \succ_i x_i^1$ *implikuje* $tx_i^2 + (1-t)x_i^1 \succ_i x_i^1$,

(c) *existuje* x_i^0 *z* X_i *takové, že* $x_i^0 \ll \omega_i$;

pro všechna j

(d.1) $0 \in Y_j$,

(d.2) Y *je uzavřená a konvexní,*

(d.3) $Y \cap (-Y) \subset \{0\}$,

(d.4) $Y \supset (-\Omega)$.

7 Slovník použitých ekonomických pojmů

V této části vysvětlíme některé ekonomické pojmy, což poslouží především ekonomicky nevzdělaným čtenářům. Najdeme je např. v [3].

Bohatství - zde též jako *majetek*; čistá hodnota hmotných a finančních položek, které vlastní země nebo osoba.

Bušl - fyzická jednotka, 1 bušl = 36,3 litrů .

Celková produkce - celkové množství vyrobené komodity měřené ve fyzických jednotkách, jako jsou např. bušly pšenice.

Funkce utility - užitková funkce.

Nabídka - obecně je chápána jako množství zboží nabízeného na trhu při daných cenách.

Poptávka - množství zboží, které si kupující (spotřebitel) při daných cenách chce koupit.

Rovnováha - stav, ve kterém je ekonomická jednotka v klidu, nebo na ni působí síly, kt. jsou v rovnováze, takže neexistuje žádná tendence ke změně.

Rovnováha producenta - situace, kdy producent maximalizuje zisk.

Rovnováha spotřebitele - situace, kdy spotřebitel maximalizuje užitek.

Rovnováha všeobecná - rovnovážný stav ekonomiky jako celku; všechny dílčí trhy jsou současně v rovnováze.

Trh - uspořádání, při kterém na sebe vzájemně působí prodávající a kupující, což vede ke stanovení cen a množství komodity.

Tržní rovnováha - vyrovnání nabídky a poptávky v ekonomice nebo na trzích, kde je *dokonalá konkurence*, tj. prodávající a nakupující nemají schopnost ovlivnit trh.

Utility - užitek; celkové uspokojení odvozené ze spotřeby komodit.

Volné statky - takové komodity, kt. se vyskytují v tak velkém množství, že nemusí být přidělovány, jejich tržní cena je proto nulová. Např. vzduch.

Vzácné statky - takové komodity, kt. se vyskytují jen v omezeném množství, nemusí tedy být přidělovány prostřednictvím cen nebo jinými prostředky. Většina komodit.

Zisk - příjmy mínus výdaje.

Závěr

Gerard Debreu byl matematický ekonom a jeho publikace mají tedy matematicko-ekonomický charakter. Vzhledem k tomu, že jeho dílo je velmi rozsáhlé, omezili jsme se na jeho nejznámější část, a to knihu *Theory of Value*, ve které se Debreu zabývá všeobecnou ekonomickou rovnováhou a podmínkami její existence. S prací souvisí i celá řada dalších publikací, uvedli jsme jejich kompletní seznam.

Důkaz samotného hlavního tvrzení je poměrně náročný a vyžaduje matematickou erudici. Proto jsme se rozhodli zaměřit se jen na tvrzení, o které se důkaz hlavní věty opírá. Konkrétněji, snažili jsme se interpretovat geometrický význam zmíněného důkazního prostředku na obrázku z [1], str. 82. s námi rozvedeným komentářem.

Pro usnadnění práce čitateli nezběhlému v ekonomických termínech jsme rovněž uvedli seznam ekonomických pojmů, které se v práci používají.

Seznam obrázků

Literatura

[1] Debreu, G.: Theory of Value. An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium, Fourth Printing. Yale University Press, New Haven, 1971.

[2] Andres, J., Gorniewicz, L.: Topological Fixed Point Principles for Boundary Value Problems. Kluwer, Dordrecht, 2003.

[3] Samuelson, P. A., Nordhaus, W. D.: Ekonomie, druhé vydání. Nakladatelství svoboda, Praha, 1995.

[4] Jonáš, J. a kol.: Nobelova cena za ekonomii. Academia, Praha, 1993.

[5] Sojka, M.: Kdo byl kdo: Světoví a čeští ekonomové, 1. vydání. Nakladatelství Libri, Praha, 2002.

[6] Rektorys, K. a spolupracovníci: Přehled užité matematiky. Státní nakladatelství technické literatury, n. p., Praha, 1963.

[7] http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1983/debreu.html

[8] http://nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1983/debreu-cv.html

[9] http://www.berkeley.edu/news/media/releases/2005/01/05_debreu.shtml

[10] http://ciks.vse.cz/Edice/nobel/Debreu/debreu_bibl.aspx