

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Přírodovědecká fakulta

**Newtonova okrajová úloha pro systém
reakce-difúze typu aktivátor-inhibitor
s parametrem**

Bakalářská práce

Monika Pšenická

Školitel: Mgr. Jan Eisner, Dr.

České Budějovice 2017

Bibliografické údaje

Pšenicová, M., 2017: Newtonova okrajová úloha pro systém reakce-difúze typu aktivátor-inhibitor s parametrem.[Newton boundary value problem for reaction-diffusion system of the activator-inhibitor type with a parameter. Bc. Thesis, in Czech.] – p. 26, Faculty of Science, University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Anotace

This bachelor's thesis focuses on a reaction-diffusion system of the activator-inhibitor type. The subject is the mixed Neumann-Newton boundary value problem with a parameter. We describe how the set of so-called critical points changes with respect to that parameter.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracoval samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích, dne 18. dubna 2017

.....

Monika Pšenicová

Poděkování

Děkuji svému školiteli Mgr. Janu Eisnerovi, Dr. za odborné vedení práce, cenné rady a čas věnovaný konzultacím.

Obsah

1	Úvod	1
2	Základní pojmy	3
2.1	Prostory funkcí	3
2.2	Systém reakce-difúze	3
2.2.1	Aktivátor-inhibitor	3
2.3	Typy okrajových podmínek	4
2.3.1	Neumannovy okrajové podmínky	4
2.3.2	Neumannovy a Dirichletova okrajová podmínka	4
2.4	Netriviální řešení systému	5
2.5	Kritické body	5
2.6	Použité substituce a značení	5
3	Známé výsledky	6
3.1	Parametr $a = 0$ — Neumannovy okrajové podmínky	6
3.1.1	Kritické body pro Neumannovy podmínky	6
3.1.2	Řešení systému	10
3.2	Parametr $a = 1$ — Dirichletova okrajová podmínka	11
3.2.1	Kritické body pro Dirichletovu podmínku	11
3.2.2	Řešení systému	12
4	Systém reakce-difúze s Newtonovou okrajovou podmínkou	13
4.1	Zadání úlohy	13
4.2	Požadavky na systém	14
4.3	Řešení převedením systému na jednu rovnici 4.řádu	14
4.3.1	Transformace okrajových podmínek	14
4.4	Charakteristická rovnice a její řešení	15

4.4.1	Nulový diskriminat	16
4.4.2	Nenulový diskriminat	16
4.5	Obecné řešení rovnice	16
4.5.1	Dosazení do okrajových podmínek	17
4.5.2	Soustava a její řešení	18
4.5.3	Kritické body	20
5	Příklad	21
5.1	Konkrétní soustava a okrajové podmínky	21
6	Závěr	24

Kapitola 1

Úvod

Bakalářská práce navazuje na již známé výsledky problematiky týkající se systému reakce-difúze typu aktivátor-inhibitor [2, 4, 6, 7, 10, 11, 12].

Systém je řešen na obecném intervalu $(0, \ell)$ a skládá se ze dvou homogenních lineárních rovnic druhého řádu. Okrajové podmínky jsou také homogenní, proto systém má vždy triviální řešení $(u, v) = (0, 0)$. Hledáme tzv. kritické body, tj. takové parametry difúze d_1, d_2 , pro které existuje netriviální řešení, tzn. $(u, v) \neq (0, 0)$.

Jedním z prvních vyřešených problémů je systém se čtyřmi Neumannovými okrajovými podmínkami. Množinu kritických bodů tvoří hyperboly v rovině parametrů difúze. Je možné ji spočítat analyticky a explicitně vyjádřit. Podrobnosti viz [4, 10, 11].

Druhý řešený problém spočívá ve změně jedné z okrajových podmínek předchozího případu, kdy místo Neumannovy okrajové podmínky pro inhibitor na pravém konci intervalu zadáme podmínku Dirichletovu. V tomto případě již není možné dopočítat se analyticky k explicitnímu vyjádření množiny kritických bodů, lze získat pouze implicitní [2, 4, 7].

Bakalářská práce zkoumá přechodový typ výše popsaných problémů. Opět máme zadánu úlohu se třemi Neumannovými okrajovými podmínkami a poslední Newtonova obsahuje parametr $a \in [0, 1]$, přičemž její zadání nám dovoluje dostat se k oběma výše popsaným situacím a to pro $a = 0$, resp. $a = 1$. Cílem práce je pokusit se zodpovědět otázku, jakým způsobem dochází ke kvalitativní změně množiny kritických bodů při změně Neumannovy podmínky za Dirichletovu. V pracech [2] (pro oblast v jedné dimenzi) a [7] (v obecné dimenzi) byla pro úlohu s Dirichletovou podmínkou dokázána existence jedné z větví kritických bodů ubíhající v parametru d_1 do nekonečna, která je zároveň omezená v parametru d_2 . Takováto větev nemůže existovat pro úlohu s čistě Neumannovými podmínkami, kde jsou všechny větve

kritických bodů hyperboly omezené v proměnné d_1 a ubíhající do nekonečna v d_2 . Abychom zjistili, co se s touto větví stane, byla zvolena úloha s Newtonovou podmínkou a s parametrem, umožňující spojitý přechod mezi oběma krajními situacemi.

Text je členěn do několika kapitol. V Kapitole 2 nalezneme základní pojmy a seznam značení, které se objevuje v průběhu celé práce. Kapitola 3 rozebírá známé výsledky pro systém reakce-difúze jednak s čistě Neumannovými a dále se třemi Neumannovými a jednou Dirichletovou okrajovou podmínkou. Systém s Newtonovou podmínkou a závislost na parametru a jsou studovány v Kapitole 4. Výsledky práce jsou demonstrovány na konkrétním příkladě v Kapitole 5, kde je ukázáno, jak se mění množina kritických bodů při změně parametru a .

Práce je sepsána systémem \LaTeX , obrázky byly numericky vypočteny v programu AUTO a následně vykresleny v programu Gnuplot.

Kapitola 2

Základní pojmy

2.1 Prostory funkcí

Zkoumaný systém zahrnuje funkce, které spadají do množiny spojitých a spojitě diferencovatelných funkcí. Označením

$$C^k[a, b]$$

rozumíme množinu všech funkcí na uzavřeném intervalu $[a, b]$, které na něm jsou spojitě a také mají spojitou derivaci až do k -tého řádu včetně, kde k je celé nezáporné číslo. Na krajích intervalu uvažujeme jednostranné derivace, respektive derivaci zleva a zprava.

2.2 Systém reakce-difúze

Uvažujme systém o dvou rovnicích pro funkce $u, v \in C^2[0, \ell]$ tvaru

$$\left. \begin{aligned} d_1 u'' + b_{11} u + b_{12} v &= 0 \\ d_2 v'' + b_{21} u + b_{22} v &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ na } (0, \ell),$$

kde členy $b_{11}u, b_{12}v, b_{21}u, b_{22}v$ představují reakci a členy u'', v'' difúzi, která je závislá a zároveň ovlivňována parametry $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+$.

2.2.1 Aktivátor-inhibitor

Matice z jednotlivých členů představujících reakci v systému uvedeném výše

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

může představovat speciální typ reakce-difúze. Při dodržení znamének u jednotlivých členů, symbolicky zapsané v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix},$$

mluvíme o typu zvaném aktivátor-inhibitor, kde složka u představuje aktivátor a v inhibitor.

2.3 Typy okrajových podmínek

Opět uvažujeme stejný systém pro funkce u, v

$$\left. \begin{aligned} d_1 u'' + b_{11}u + b_{12}v &= 0 \\ d_2 v'' + b_{21}u + b_{22}v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{na } (0, \ell), \quad (2.1)$$

u kterého máme zadané příslušné okrajové podmínky. Tři z nich jsou Neumannovy a jedna Newtonova

$$u'(0) = 0, \quad u'(\ell) = 0, \quad (2.2)$$

$$v'(0) = 0, \quad av(\ell) + (1 - a)v'(\ell) = 0, \quad (2.3)$$

kde a je parametr a $a \in [0, 1]$.

2.3.1 Neumannovy okrajové podmínky

V případě že hodnota parametru $a = 0$, dostáváme systém, u kterého máme pouze Neumannovy okrajové podmínky

$$u'(0) = 0, \quad u'(\ell) = 0, \quad (2.4)$$

$$v'(0) = 0, \quad v'(\ell) = 0. \quad (2.5)$$

Tato situace již byla v několika předchozích studiích zkoumána a množinu hledaných kritických bodů v rovině parametrů difúze d_1, d_2 tvoří části hyperbol.

2.3.2 Neumannovy a Dirichletova okrajová podmínka

V případě že hodnota parametru $a = 1$, dostáváme systém, u kterého máme tři Neumannovy okrajové podmínky a poslední je Dirichletova

$$u'(0) = 0, \quad u'(\ell) = 0, \quad (2.6)$$

$$v'(0) = 0, \quad v(\ell) = 0. \quad (2.7)$$

I tato situace již byla zkoumána a na rozdíl od předchozího případu se nedá množina kritických bodů zapsat v explicitním tvaru.

2.4 Netriviální řešení systému

Systém (2.1) společně s okrajovými podmínkami (2.2), (2.3), které jsou homogenní, určitě má triviální řešení $(u, v) = (0, 0)$, které pro nás ovšem není zajímavé. Cílem této práce bude pro dané $a \in [0, 1]$ nalézt netriviální řešení systému v závislosti na parametrech d_1, d_2 .

Za řešení budeme považovat takové funkce u, v , které budou splňovat systém (2.1) a současně s tím i okrajové podmínky (2.2), (2.3) a dále musí platit regularita

$$u, v \in C^2[0, \ell].$$

2.5 Kritické body

Pod pojmem kritické body rozumíme ty hodnoty parametrů d_1, d_2 , pro které existuje i netriviální řešení okrajové úlohy.

2.6 Použité substituce a značení

Během celé práce se při některých výpočtech objeví složité a dlouhé vzorce, u kterých bude pohodlnější zavést si substituce, které nalezneme právě v této sekci.

$$\begin{aligned} S_1(x) &= e^{r_1 x} - e^{-r_1 x}, & S_2(x) &= e^{r_2 x} - e^{-r_2 x}, \\ C_1(x) &= e^{r_1 x} + e^{-r_1 x}, & C_2(x) &= e^{r_2 x} + e^{-r_2 x} \end{aligned}$$

pro $r_i \in \mathbb{C}$ a $x \in [0, \ell]$.

Při práci se systémem (2.1) budeme předpokládat několik věcí. V matici

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

výrazem

$$\det B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$$

rozumíme determinant matice B , u kterého v celé práci předpokládáme, že platí

$$\det B > 0.$$

Výrazem

$$\operatorname{tr} B = b_{11} + b_{22}$$

označíme stopu matice B , pro kterou opět v celé práci platí

$$\operatorname{tr} B < 0.$$

Kapitola 3

Známé výsledky

V následující kapitole si ve stručnosti shrneme známé výsledky pro dvě extrémní hodnoty parametru $a = 0$, $a = 1$. Jednotlivé postupy nebudou rozebírány úplně detailně. Podrobnosti nalezneme až v Kapitole 4, ve které se zabýváme spojitým přechodem parametru a , což je cílem této bakalářské práce. Jednotlivé kroky při hledání kritických bodů jsou ovšem totožné.

3.1 Parametr $a = 0$ — Neumannovy okrajové podmínky

Uvažujme systém pro funkce $u, v \in C^2[0, \ell]$

$$\left. \begin{aligned} d_1 u'' + b_{11}u + b_{12}v &= 0 \\ d_2 v'' + b_{21}u + b_{22}v &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ na } (0, \ell). \quad (3.1)$$

Pro studovanou hodnotu parametru $a = 0$ dostáváme okrajové podmínky (2.4), (2.5) tvaru

$$u'(0) = 0, \quad u'(\ell) = 0, \quad (3.2)$$

$$v'(0) = 0, \quad v'(\ell) = 0. \quad (3.3)$$

3.1.1 Kritické body pro Neumannovy podmínky

V rovině parametrů d_1, d_2 kritické body tvoří hyperboly H_n (viz [4, 10]). Ty je možné zapsat jako množinu bodů, kdy jeden parametr vyjádříme pomocí druhého

$$H_n = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2 : d_2 = \frac{\det B - \kappa_n d_1 b_{22}}{b_{11} \kappa_n - d_1 \kappa_n^2}\}. \quad (3.4)$$

Zde κ_n je vlastní číslo úlohy

$$u'' + \kappa u = 0 \quad \text{na } (0, \ell) \quad (3.5)$$

s okrajovými podmínkami

$$u'(0) = 0, \quad u'(\ell) = 0. \quad (3.6)$$

Nyní si vyřešíme tuto okrajovou úlohu a ukážeme si, jak vypadají vlastní čísla κ_n . Spočítáme ji pomocí charakteristické rovnice, jelikož předpokládáme řešení tvaru

$$u(x) = e^{rx}.$$

Dosazením do (3.5) dostáváme

$$r^2 e^{rx} + e^{rx} \kappa = 0 \quad (3.7)$$

a vykrácením nenulového členu e^{rx} získáme

$$r^2 + \kappa = 0. \quad (3.8)$$

To už je obyčejná kvadratická rovnice, která má řešení

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{-\kappa}. \quad (3.9)$$

Nyní je potřeba uvažovat $\kappa > 0$. V opačném případě získáme pouze triviální řešení okrajové úlohy (3.5). Pro $\kappa > 0$ získáme komplexní kořeny r_1, r_2 . Obecné řešení rovnice (3.5) pro ně je tvaru

$$u(x) = c_1 \cos \sqrt{\kappa}x + c_2 \sin \sqrt{\kappa}x. \quad (3.10)$$

Máme předepsány Neumannovy okrajové podmínky, připravme si proto derivaci řešení

$$u'(x) = -\sqrt{\kappa}c_1 \sin \sqrt{\kappa}x + \sqrt{\kappa}c_2 \cos \sqrt{\kappa}x. \quad (3.11)$$

Dosadíme do okrajových podmínek (3.6)

$$0 = -\sqrt{\kappa}c_1 \sin 0 + \sqrt{\kappa}c_2 \cos 0, \quad (3.12)$$

$$0 = -\sqrt{\kappa}c_1 \sin \sqrt{\kappa}\ell + \sqrt{\kappa}c_2 \cos \sqrt{\kappa}\ell. \quad (3.13)$$

Protože víme, že $\sin(0) = 0$, dosazením do první rovnice nám vyjde

$$0 = \sqrt{\kappa}c_2 \cos 0.$$

Dále použijeme, že opět známe hodnotu $\cos(0) = 1$, tím získáme

$$0 = \sqrt{\kappa}c_2.$$

Vzhledem k pozitivě κ nyní jasně vyplývá, že pro splnění rovnice musí koeficient $c_2 = 0$. Tím pádem již ale koeficient c_1 nulový být nesmí, protože bychom se opět dostali ke triviálnímu

řešení. To potom využijeme ve druhé podmínce pro $x = \ell$ a rovnice (3.13) přejde na jednodušší tvar

$$0 = \sqrt{\kappa}c_1 \sin \sqrt{\kappa}\ell.$$

Jak již bylo zmíněno, κ ani koeficient c_1 nulové být nesmějí. Zbývá tedy možnost, že

$$\sin \sqrt{\kappa}\ell = 0.$$

Aby se nám funkce $\sin \sqrt{\kappa}\ell$ vynulovala, musí pro její argument platit

$$\sqrt{\kappa}\ell = n\pi$$

pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Vyjádříme si κ

$$\kappa = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2.$$

Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ jsme dostali vlastní čísla

$$\kappa = \kappa_n := \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2. \quad (3.14)$$

Řešení okrajové úlohy (3.5), (3.6) je tedy pak tvaru

$$u(x) = u_n(x) := c_1 \cos \sqrt{\kappa}x = c_1 \cos \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (3.15)$$

kde $c_1 \neq 0$ libovolné.

A tím tedy příslušné vlastní funkce jsou

$$u_n(x) = \cos \sqrt{\kappa_n}x. \quad (3.16)$$

Nyní se vraťme ke kritickým bodům (3.4):

$$H_n = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2 : d_2 = \frac{\det B - \kappa_n d_1 b_{22}}{b_{11} \kappa_n - d_1 \kappa_n^2}\}$$

a vysvětleme si, jak k výše uvedenému tvaru dojdeme. Při samotném řešení soustavy (3.1) přejdeme k jedné rovnici 4. řádu, jejíž charakteristická rovnice se ukáže bikvadratickou a tím pádem se po substituci $\omega = r^2$ stane obyčejnou kvadratickou rovnicí, což je podrobně popsané v Kapitole 4. Kořeny budou tvaru

$$\omega_{1,2} = \frac{-(d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) \pm \sqrt{D_\omega}}{2d_1 d_2} \quad (3.17)$$

s příslušným diskriminantem

$$D_\omega = (d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2\det B.$$

Podle vztahu (3.9) víme, že platí

$$\kappa = \kappa_n = -r^2$$

kde κ je tvaru (3.14) a podle zavedené substituce $\omega = r^2$ platí

$$\omega = -\kappa_n,$$

pro $\kappa_n > 0$. Za ω dosadíme výraz (3.17)

$$\kappa_n = -\frac{-(d_2b_{11} + d_1b_{22}) + \sqrt{(d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2\det B}}{2d_1d_2}$$

a postupnými úpravami se snažíme vyjádřit d_2

$$\begin{aligned} -2d_1d_2\kappa_n &= -(d_2b_{11} + d_1b_{22}) + \sqrt{(d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2\det B} \\ (d_2b_{11} + d_1b_{22}) - 2d_1d_2\kappa_n &= \sqrt{(d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2\det B}. \end{aligned}$$

Dalším krokem bude umocnění rovnice na druhou a následné úpravy

$$\begin{aligned} ((d_2b_{11} + d_1b_{22}) - 2d_1d_2\kappa_n)^2 &= (d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2\det B \\ (d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2\kappa_n(d_2b_{11} + d_1b_{22}) + 4d_1^2d_2^2\kappa_n^2 &= (d_2b_{11} + d_1b_{22})^2 - 4d_1d_2\det B \\ -4d_1d_2\kappa_n(d_2b_{11} + d_1b_{22}) + 4d_1^2d_2^2\kappa_n^2 &= -4d_1d_2\det B \end{aligned}$$

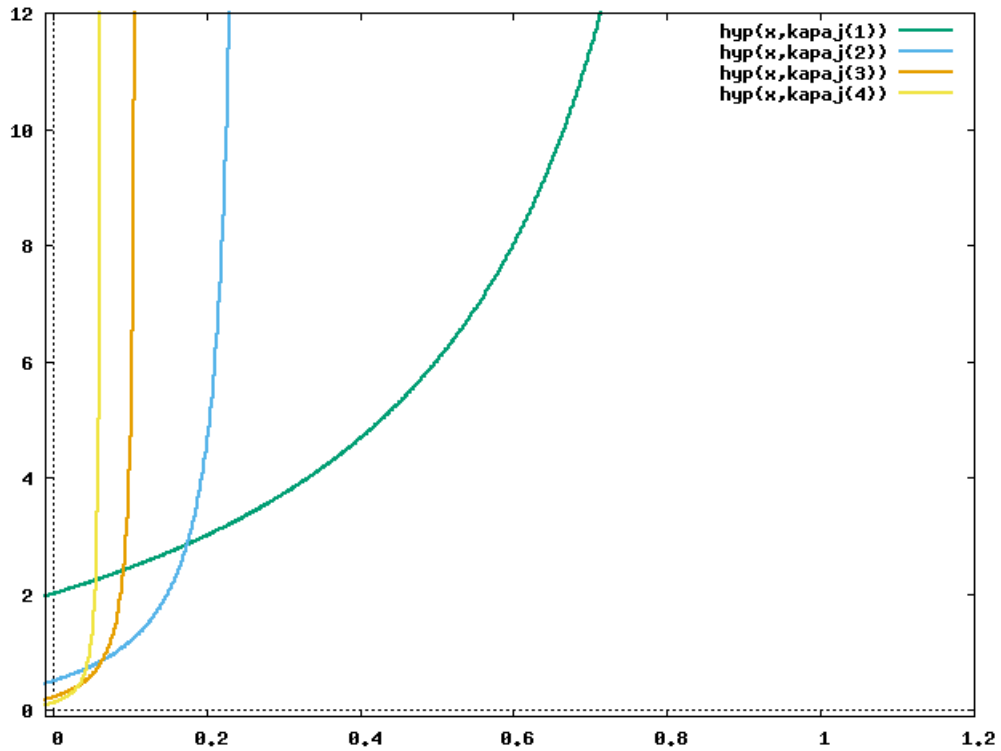
Převédeme vše na levou stranu a vytkneme, co je možné

$$-4d_1d_2(\kappa_n(d_2b_{11} + d_1b_{22}) - d_1d_2\kappa_n^2 - \det B) = 0.$$

vydělíme to určitě nenulovým výrazem $-4d_1d_2$

$$\begin{aligned} \kappa_n(d_2b_{11} + d_1b_{22}) - d_1d_2\kappa_n^2 - \det B &= 0, \\ \kappa_nd_2b_{11} + \kappa_nd_1b_{22} - d_1d_2\kappa_n^2 &= \det B, \\ d_2(\kappa_nb_{11} - d_1\kappa_n^2) &= \det B - \kappa_nd_1b_{22} \\ d_2 &= \frac{\det B - \kappa_nd_1b_{22}}{b_{11}\kappa_n - d_1\kappa_n^2}. \end{aligned}$$

Tímto jsme získali explicitně vyjádřené d_2 pomocí d_1 . Grafem množin kritických bodů pro každé $n \in \mathbb{N}$ jsou hyperboly H_n , které jsou znázorněny na Obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Kritické body pro Neumannovy podmínky — hyperboly H_n .

3.1.2 Řešení systému

Úloha (3.1) s příslušnými okrajovými Neumannovými podmínkami (3.2), (3.3) má řešení tvaru

$$u(x) = AC_1(x) = A \cos \sqrt{\kappa_n}x = A \cos \frac{n\pi x}{\ell},$$

$$v(x) = \alpha_n(d_1, d_2)AC_1(x) = A\alpha_n(d_1, d_2) \cos \sqrt{\kappa_n}x = A\alpha_n(d_1, d_2) \cos \frac{n\pi x}{\ell},$$

kde

$$\alpha_n(d_1, d_2) = \frac{b_{11} - d_1\kappa_n}{b_{12}} > 0,$$

$$\kappa_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2,$$

$$A \in \mathbb{R} \quad (A \neq 0) \quad \text{libovolné,}$$

$$C_1(x) = e^{r_1x} + e^{-r_1x} = e^{\sqrt{-\kappa_n}x} + e^{-\sqrt{-\kappa_n}x}.$$

Podrobnosti lze nalézt v [4].

3.2 Parametr $a = 1$ — Dirichletova okrajová podmínka

Opět uvažujme systém pro funkce $u, v \in C^2[0, \ell]$

$$\left. \begin{aligned} d_1 u'' + b_{11} u + b_{12} v &= 0 \\ d_2 v'' + b_{21} u + b_{22} v &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ na } (0, \ell). \quad (3.18)$$

Pro studovanou hodnotu parametru $a = 1$ dostáváme okrajové podmínky (2.6), (2.7) ve tvaru

$$u'(0) = 0, \quad u'(\ell) = 0, \quad (3.19)$$

$$v'(0) = 0, \quad v(\ell) = 0. \quad (3.20)$$

Rozdíl od předchozího případu je v poslední okrajové podmínce, která se místo Neumannovy stala Dirichletovou.

3.2.1 Kritické body pro Dirichletovu podmínku

Kritické body u této úlohy již nelze explicitně vyjádřit. Dojdeme pouze k implicitnímu vyjádření této množiny ve tvaru

$$K_D = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2 : f(d_1, d_2) = 0\}. \quad (3.21)$$

Funkce $f(d_1, d_2)$ má přitom tvar

$$f(d_1, d_2) = r_1 S_1(\ell) C_2(\ell) (d_1 r_2^2 + b_{11}) - r_2 S_2(\ell) C_1(\ell) (d_1 r_1^2 + b_{11}), \quad (3.22)$$

kde

$$S_1(x) = e^{r_1 x} - e^{-r_1 x},$$

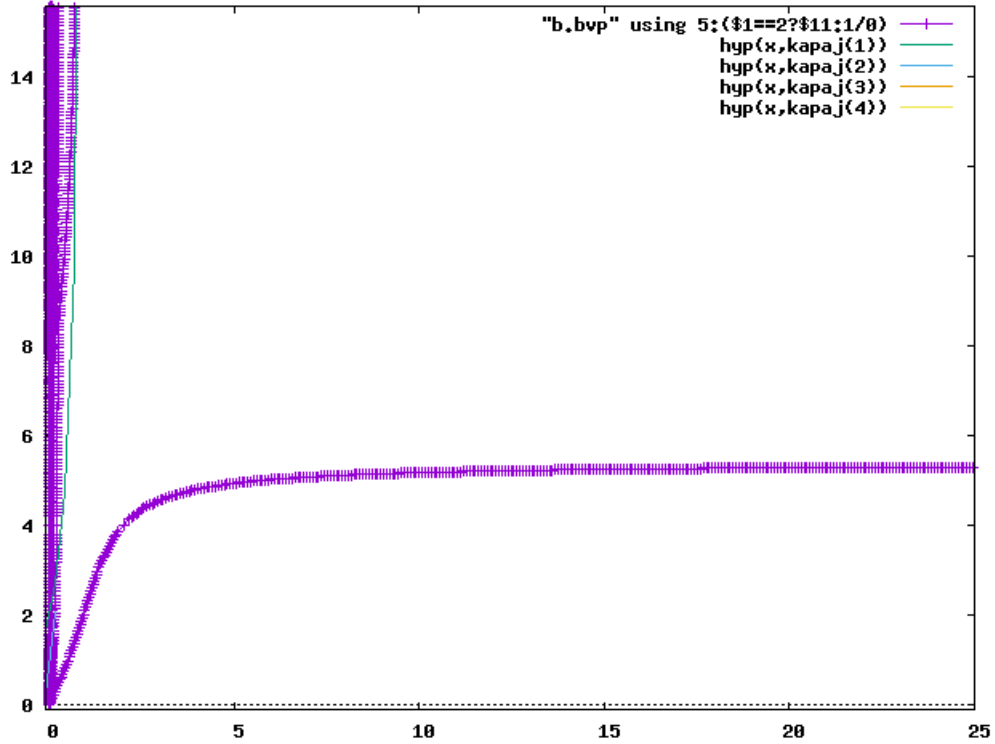
$$S_2(x) = e^{r_2 x} - e^{-r_2 x},$$

$$C_1(x) = e^{r_1 x} + e^{-r_1 x},$$

$$C_2(x) = e^{r_2 x} + e^{-r_2 x}.$$

Navíc, proměnné r_1, r_2 také závisí na parametrech d_1, d_2 .

Výsledek byl převzat z literatury [4], Kapitola 4, kde nalezneme podrobný postup. Na Obrázku 3.2 je vykreslena množina kritických bodů K_D . Je patrné, že v rovině parametrů difúze d_1, d_2 kritické body tvoří kromě “hyperbol” ještě jednu křivku, která je omezená v d_2 a jde s d_1 až do nekonečna. Ta u čistě Neumannových podmínek v předchozím případě zcela chybí.



Obrázek 3.2: Kritické body pro Neumannovy a Dirichletovu podmínku.

3.2.2 Řešení systému

Úloha (3.18) s příslušnými okrajovými Neumannovými a Dirichletovou podmínkou (3.19), (3.20) má pro všechna $(d_1, d_2) \in K_D$ řešení tvaru

$$u(x) = A(C_1(x) - C_2(x)\alpha(d_1, d_2)) \quad x \in (0, \ell),$$

$$v(x) = -A \frac{d_1(r_1^2 C_1(x) - r_2^2 C_2(x)\alpha(d_1, d_2)) + b_{11}(C_1(x) - C_2(x)\alpha(d_1, d_2))}{b_{12}} \quad x \in (0, \ell),$$

$A \in \mathbb{R}$ libovolné ($A \neq 0$) a $\alpha(d_1, d_2) = \frac{r_1 S_1(\ell)}{r_2 S_2(\ell)}$.

Na jednotlivé kroky výpočtu se lze podívat opět do literatury [4], Kapitola 4, odkud byly výsledky převzaty.

Kapitola 4

System reakce-difúze s Newtonovou okrajovou podmínkou

V této kapitole již budeme řešit systém reakce-difúze se zadanými smíšenými okrajovými podmínkami s parametrem. Zaměříme se na speciální typ aktivátor-inhibitor, kdy bude potřeba předpokládat určité požadavky.

4.1 Zadání úlohy

Zabýváme se soustavou dvou diferenciálních rovnic druhého řádu pro u, v zadanou následujícím způsobem

$$\left. \begin{aligned} d_1 u'' + b_{11} u + b_{12} v &= 0, \\ d_2 v'' + b_{21} u + b_{22} v &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ na } (0, \ell), \quad (4.1)$$

kde $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+$ a $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in \mathbb{R}$. K danému systému náleží zadané okrajové podmínky, z nichž tři jsou Neumannovy a jedna Newtonova

$$u'(0) = 0, \quad u'(\ell) = 0, \quad (4.2)$$

$$v'(0) = 0, \quad av(\ell) + (1 - a)v'(\ell) = 0, \quad (4.3)$$

u poslední podmínky vidíme parametr $a \in [0, 1]$. V případě $a = 0$ úloha přejde na systém se čtyřmi Neumannovými podmínkami. Pokud $a = 1$ poslední Newtonova podmínka se stane Dirichletovou.

4.2 Požadavky na systém

Abychom mohli mluvit o systému typu aktivátor-inhibitor potřebujeme mít zajištěné požadavky na koeficienty b_{ij} . Sestavíme-li z nich matici

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

požadujeme, aby znaménkově splňovala jednu z následujících možností

$$\begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} + & + \\ - & - \end{pmatrix}.$$

Navíc při zavedeném označení pro determinant matice B

$$\det B = (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})$$

vyžadujeme, aby platily podmínky

$$\det B > 0, \quad \text{tr} B < 0,$$

kde $\text{tr} B$ je stopa matice B .

4.3 Řešení převedením systému na jednu rovnici 4.řádu

Po zmínění všeho důležitého dalším krokem bude převedení systému na jednu rovnici čtvrtého řádu a následná transformace okrajových podmínek. Z první rovnice (4.1) si vyjádříme proměnnou

$$v = -\frac{d_1 u'' + b_{11} u}{b_{12}} \quad \text{na } (0, \ell), \quad (4.4)$$

keré potom dosadíme do druhé rovnice (4.1) a po jednoduchých úpravách se dostaneme ke tvaru

$$d_1 d_2 u'''' + (d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) u'' + (b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}) u = 0 \quad \text{na } (0, \ell), \quad (4.5)$$

což je požadovaná rovnice 4. řádu.

4.3.1 Transformace okrajových podmínek

Nyní se zaměříme na okrajové podmínky (4.3), které je nutno transformovat, zatímco (4.2) se zachovávají. Připravíme si derivaci (4.4), která bude tvaru

$$v'(x) = -\frac{d_1 u'''(x) + b_{11} u'(x)}{b_{12}}. \quad (4.6)$$

Použijeme okrajové podmínky (4.2) pro přepočítání (4.3) s využitím (4.6)

$$v'(0) = -\frac{1}{b_{12}}(d_1 u'''(0) + b_{11} u'(0)) = -\frac{d_1}{b_{12}} u'''(0) = 0.$$

Z předpokladu $b_{12} \neq 0$ a $d_1 > 0$ plyne

$$u'''(0) = 0. \quad (4.7)$$

Zbývá ztransformovat poslední Newtonovu podmínku:

$$\begin{aligned} av(\ell) + (1-a)v'(\ell) &= -\frac{a}{b_{12}}(d_1 u''(\ell) + b_{11} u(\ell)) - \frac{(1-a)}{b_{12}}(d_1 u'''(\ell) + b_{11} u'(\ell)) \\ &= -\frac{1}{b_{12}} d_1 [(au''(\ell) + (1-a)u'''(\ell)) + b_{11}(au(\ell) + (1-a)u'(\ell))]. \end{aligned}$$

Pro finální formu čtvrté okrajové podmínky využijeme druhou podmínku (4.2)

$$d_1(au''(\ell) + (1-a)u'''(\ell)) + b_{11}au(\ell) = 0. \quad (4.8)$$

4.4 Charakteristická rovnice a její řešení

Výše získaná rovnice (4.5) je lineární homogenní obyčejná diferenciální rovnice 4. řádu s konstantními koeficienty a čtyřmi homogenními okrajovými podmínkami – původní (4.2) a nově získané (4.7), (4.8).

V případě takovéto homogenní diferenciální rovnice hledáme řešení ve tvaru

$$u(x) = e^{rx} \quad (4.9)$$

s nějakým $r \in \mathbb{C}$. Dosazením (4.9) do rovnice (4.5) získáme

$$d_1 d_2 r^4 e^{rx} + (d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) r^2 e^{rx} + \det B e^{rx} = 0,$$

kde následným vykrácením nenulového členu e^{rx} dospějeme k charakteristické rovnici

$$d_1 d_2 r^4 + (d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) r^2 + \det B = 0 \quad (4.10)$$

pro neznámý parametr $r \in \mathbb{C}$. Vidíme, že získaná rovnice je bikvadratická. Jednoduchou substitucí

$$\omega = r^2 \quad (4.11)$$

převědeme (4.10) na obyčejnou kvadratickou rovnici

$$d_1 d_2 \omega^2 + (d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) \omega + \det B = 0,$$

kteřou dále budeme řešit známým vzorečkem pro výpočet diskriminantu

$$D_\omega = (d_2 b_{11} + d_1 b_{22})^2 - 4d_1 d_2 \det B$$

a též známe vyjádření kořenů dané kvadratické rovnice

$$\omega_{1,2} = \frac{-(d_2 b_{11} + d_1 b_{22}) \pm \sqrt{D_\omega}}{2d_1 d_2}.$$

4.4.1 Nulový diskriminat

Nyní bude záležet na hodnotě diskriminantu. Vyjde-li $D_\omega = 0$, získáme dvojnásobný kořen a ani v naší původní bikvadratické rovnici (4.10) pro neznámou r nebudeme mít čtyři různé kořeny. Což by znamenalo fundamentální systém řešení, který v případě vícenásobného kořene je tvaru

$$FS = \{e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, e^{-r_1 x}, x e^{-r_1 x}\}.$$

Případ $D_\omega = 0$ není generický a nastává pouze na množině míry nula v rovině parametrů (d_1, d_2) , proto nebudeme tento případ uvažovat.

4.4.2 Nenulový diskriminat

Zatímco vyjde-li nám $D_\omega \neq 0$, získáme tím dva různé kořeny ω_1, ω_2 a opět zpětným dosazením do (4.10) pro získání původního řešení dostáváme čtyři kořeny, kdy dané dva se vždy liší pouze znaménkově díky zavedené substituci $\omega = r^2$, a proto je možné považovat za řešení charakteristické rovnice kořeny

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{\omega_1}, \\ -r_1 &= -\sqrt{\omega_1}, \\ r_2 &= \sqrt{\omega_2}, \\ -r_2 &= -\sqrt{\omega_2}. \end{aligned}$$

Příslušný fundamentální systém je

$$FS = \{e^{r_1 x}, e^{-r_1 x}, e^{r_2 x}, e^{-r_2 x}\}.$$

4.5 Obecné řešení rovnice

Obecné řešení pro známý FS vytvoříme jako lineární kombinaci

$$u(x) = A e^{r_1 x} + B e^{-r_1 x} + C e^{r_2 x} + D e^{-r_2 x} \quad x \in (0, \ell), \quad (4.12)$$

pro libovolné $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

4.5.1 Dosazení do okrajových podmínek

Připravíme si jednotlivé derivace obecného řešení (4.12), které postupně využijeme při dalším výpočtu

$$u'(x) = r_1 e^{r_1 x} A - r_1 e^{-r_1 x} B + r_2 e^{r_2 x} C - r_2 e^{-r_2 x} D,$$

$$u''(x) = r_1^2 e^{r_1 x} A + r_1^2 e^{-r_1 x} B + r_2^2 e^{r_2 x} C + r_2^2 e^{-r_2 x} D,$$

$$u'''(x) = r_1^3 e^{r_1 x} A - r_1^3 e^{-r_1 x} B + r_2^3 e^{r_2 x} C - r_2^3 e^{-r_2 x} D.$$

Tyto derivace dosazujeme nejprve do dvou okrajových podmínek definovaných pro $x = 0$ v první části (4.2) a (4.7), u kterých nejdříve provedeme jednoduché pozorování a až následně využijeme zbývající okrajové podmínky

$$u'(0) = r_1 A - r_1 B + r_2 C - r_2 D = 0,$$

$$u'''(0) = r_1^3 A - r_1^3 B + r_2^3 C - r_2^3 D = 0.$$

Provedeme vytknutí členů r_1, r_2

$$r_1(A - B) + r_2(C - D) = 0,$$

$$r_1^3(A - B) + r_2^3(C - D) = 0.$$

A zapíšeme v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^3 & r_2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - B \\ C - D \end{pmatrix} = 0. \quad (4.13)$$

Z předešlé matice (4.13) si uděláme determinant a následně vytkneme, co půjde

$$\begin{vmatrix} r_1 & r_2 \\ r_1^3 & r_2^3 \end{vmatrix} = r_1 r_2^3 - r_1^3 r_2 = r_1 r_2 (r_2^2 - r_1^2). \quad (4.14)$$

Podle již dříve zkoumaných vlastností kořenů r_1, r_2 charakteristické rovnice (4.10) víme, že platí $r_1 r_2 \neq 0$ (viz [4], Kapitola 2). Při použití (4.11) a z požadavku $D_\omega \neq 0$ bude platit $\omega_1 \neq \omega_2$. Dáme-li vše dohromady, určitě bude platit

$$r_1 r_2 (\omega_2 - \omega_1) \neq 0.$$

Výše definovaný výraz je determinant matice soustavy (4.13) a je tedy patrné, že nikdy nebude nulový. Proto je jasné, že pro splnění celého (4.13) musí být splněno

$$\begin{pmatrix} A - B \\ C - D \end{pmatrix} = 0, \quad (4.15)$$

odkud dostáváme

$$A = B,$$

$$C = D.$$

Nyní již stačí uvažovat pouze koeficienty A, C . Doposud jsme využili pouze dvě okrajové podmínky pro $x = 0$ a nyní je čas použít zbývající dvě pro $x = \ell$. Opět do připravené derivace dosazujeme podmínky (4.2), tentokrát však druhou část

$$u'(\ell) = r_1 e^{r_1 \ell} A - r_1 e^{-r_1 \ell} A + r_2 e^{r_2 \ell} C - r_2 e^{-r_2 \ell} C = 0.$$

Z prvních dvou členů vytkneme společné a to samé uděláme i pro poslední dva členy

$$u'(\ell) = Ar_1(e^{r_1 \ell} - e^{-r_1 \ell}) + Cr_2(e^{r_2 \ell} - e^{-r_2 \ell}) = 0.$$

V kapitole 2 sekci 2.6 jsme si zavedli substituce, které nyní můžeme použít pro zjednodušení výrazu

$$u'(\ell) = Ar_1 S_1(\ell) + Cr_2 S_2(\ell) = 0.$$

Poslední nevyužitou podmínkou zůstává Neumannova v transformované formě (4.8)

$$d_1[au''(\ell) + (1-a)u'''(\ell)] + b_{11}au(\ell) = d_1[a(r_1^2 A(e^{r_1 \ell} + e^{-r_1 \ell}) + r_2^2 C(e^{r_2 \ell} + e^{-r_2 \ell})) + (1-a)(r_1^3 A(e^{r_1 \ell} - e^{-r_1 \ell}) + r_2^3 C(e^{r_2 \ell} - e^{-r_2 \ell}))] + b_{11}a(A(e^{r_1 \ell} + e^{-r_1 \ell}) + C(e^{r_2 \ell} + e^{-r_2 \ell})) = 0.$$

Nejprve ze sekce 2.6 využijeme zavedené substituce

$$d_1[a(r_1^2 AC_1(\ell) + r_2^2 CC_2(\ell)) + (1-a)(r_1^3 AS_1(\ell) + r_2^3 CS_2(\ell))] + b_{11}a(AC_1(\ell) + CC_2(\ell)) = 0.$$

Nyní vytkneme koeficienty A, C

$$A[d_1(ar_1^2 C_1(\ell) + (1-a)r_1^3 S_1(\ell)) + b_{11}aC_1(\ell)] - C[d_1(ar_2^2 C_2(\ell) + (1-a)r_2^3 S_2(\ell)) + b_{11}aC_2(\ell)] = 0.$$

4.5.2 Soustava a její řešení

V předchozí sekci 4.5.1 jsme pomocí prvních dvou okrajových podmínek pro $x = 0$ zjistili, že nadále nám stačí pracovat pouze se dvěma z koeficientů. Zbývající dvě podmínky nám vytvoří homogenní soustavu lineárních rovnic, u které nás bude zajímat řešení pro koeficienty A, C . Matice této soustavy je tvaru

$$\begin{pmatrix} d_1(ar_1^2 C_1(\ell) + (1-a)r_1^3 S_1(\ell)) + b_{11}aC_1(\ell) & -d_1(ar_2^2 C_2(\ell) + (1-a)r_2^3 S_2(\ell)) + b_{11}aC_2(\ell) \\ r_1 S_1(\ell) & r_2 S_2(\ell) \end{pmatrix}.$$

Koeficienty A, C nulové nechceme, protože bychom v obecném řešení dostali všechny koeficienty nulové, což by pro řešení soustavy znamenalo pouze triviální řešení, o kterém již od začátku víme. Nás ovšem zajímá netriviální řešení, které získáme v případě, že determinant matice soustavy bude nulový. To nastane tehdy, když řádky matice budou lineárně závislé. Vybereme si jeden řádek matice, vynásobíme ho vektorem koeficientů $(A, C)^T$ a máme

$$Ar_1(S_1(\ell)) + Cr_2(S_2(\ell)) = 0.$$

Odtud si vyjádříme jeden zvolený koeficient pomocí druhého

$$A = -C \frac{r_2 S_2(\ell)}{r_1 S_1(\ell)}. \quad (4.16)$$

Nyní si uvědomíme a připomeneme, jak vypadá obecné řešení rovnice, které je uvedeno v (4.12) a je tvaru

$$u(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{-r_1 x} + Ce^{r_2 x} + De^{-r_2 x}.$$

U tohoto tvaru řešení také využijeme již známého faktu, že $B = A, D = C$ a tím dostaneme obecné řešení ve tvaru

$$u(x) = Ae^{r_1 x} + Ae^{-r_1 x} + Ce^{r_2 x} + Ce^{-r_2 x},$$

po vytknutí koeficientů

$$u(x) = A(e^{r_1 x} + e^{-r_1 x}) + C(e^{r_2 x} + e^{-r_2 x}).$$

Opět pro zjednodušení můžeme výraz přepsat pomocí substituce ze sekce 2.6

$$u(x) = AC_1(x) + CC_2(x).$$

Dosadíme (4.16) do výrazu výše

$$u(x) = -C \frac{r_2 S_2(\ell)}{r_1 S_1(\ell)} C_1(x) + CC_2(x).$$

Finální výraz pro řešení ještě upravíme vytknutím koeficientu C

$$u(x) = C \left(-\frac{r_2 S_2(\ell)}{r_1 S_1(\ell)} C_1(x) + C_2(x) \right). \quad (4.17)$$

Pro získání druhé složky řešení $v(x)$ systému (4.1) dosadíme do výrazu (4.4) a získáme

$$v(x) = -C \left(\frac{d_1(r_2^2 C_2(x) - r_1^2 C_1(x) \frac{r_2 S_2(\ell)}{r_1 S_1(\ell)}) + b_{11}(C_2(x) - C_1(x) \frac{r_2 S_2(\ell)}{r_1 S_1(\ell)})}{b_{11}} \right). \quad (4.18)$$

Tím jsme získali hledané řešení úlohy (4.1) s okrajovými podmínkami (4.2), (4.3).

4.5.3 Kritické body

Jak je patrné z předchozího postupu, množinu kritických bodů dostaneme jako množinu nulových bodů determinantu výše uvedené matice

$$\begin{pmatrix} d_1(ar_1^2C_1(\ell) + (1-a)r_1^3S_1(\ell)) + b_{11}aC_1(\ell) & -d_1(ar_2^2C_2(\ell) + (1-a)r_2^3S_2(\ell)) + b_{11}aC_2(\ell) \\ r_1S_1(\ell) & r_2S_2(\ell) \end{pmatrix}.$$

Pokud si definujeme funkci $f(a, d_1, d_2)$ jako determinant této matice, tedy

$$f(a, d_1, d_2) = [d_1(ar_1^2C_1(\ell) + (1-a)r_1^3S_1(\ell)) + b_{11}aC_1(\ell)]r_2S_2(\ell) - r_1S_1(\ell)[-d_1(ar_2^2C_2(\ell) + (1-a)r_2^3S_2(\ell)) + b_{11}aC_2(\ell)],$$

množina kritických bodů je pak

$$K_a = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2 : f(a, d_1, d_2) = 0\}. \quad (4.19)$$

Zdůrazněme, že všechny funkce $S_1(\ell)$, $S_2(\ell)$, $C_1(\ell)$, $C_2(\ell)$ jsou funkcemi kořenů charakteristické rovnice r_1, r_2 , které jsou sami zase funkcemi parametrů d_1, d_2 . Není proto myslitelné jeden parametr difúze pomocí druhého analyticky vyjádřit a získat tím explicitně množinu kritických bodů.

Kapitola 5

Příklad

V této kapitole si na příkladu názorně ukážeme, jak vypadá množina kritických bodů. Zvolíme si velikost intervalu $\ell = \pi$ a konkrétní matici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ta splňuje požadavky na ní kladené, tzn. matice odpovídá znaménkovým předpokladům pro typ aktivátor-inhibitor a platí

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - (-4) = 2 > 0,$$

$$\operatorname{tr} B = 1 + (-2) = -1 < 0.$$

5.1 Konkrétní soustava a okrajové podmínky

Soustava odpovídající matici B má tvar

$$\begin{aligned} d_1 u'' + u - 2v &= 0, \\ d_2 v'' + 2u - 2v &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Rovnice uvažujeme na intervalu $(0, \pi)$. Okrajové podmínky jsou potom následující

$$u'(0) = 0, \quad u'(\pi) = 0, \tag{5.2}$$

$$v'(0) = 0, \quad av(\pi) + (1 - a)v'(\pi) = 0. \tag{5.3}$$

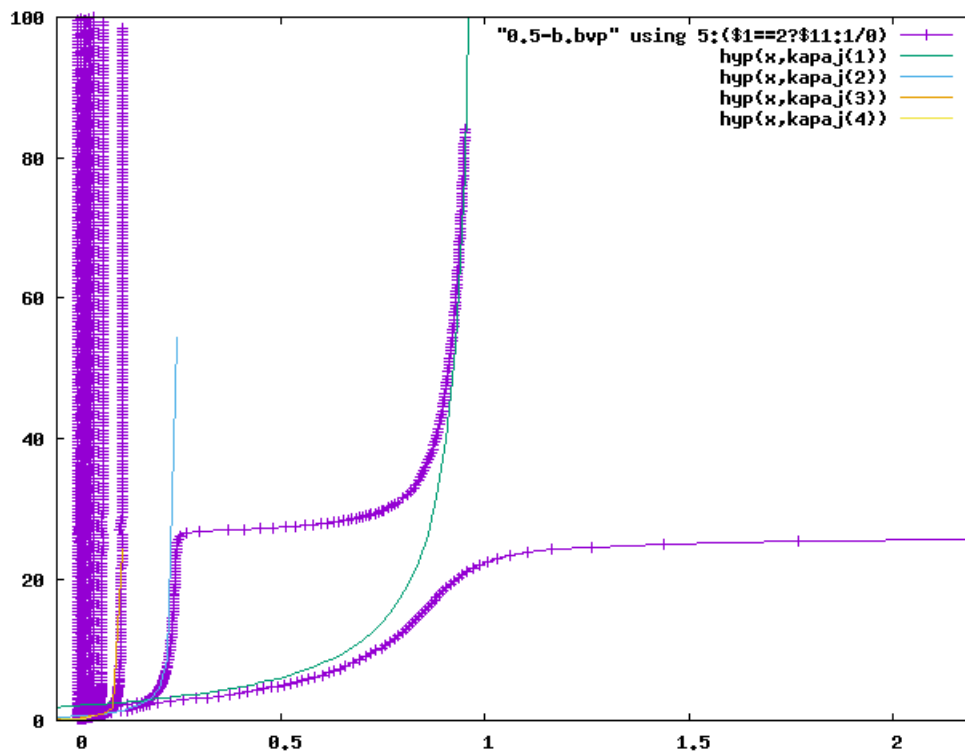
Na několika následujících obrázcích je vykreslena množina kritických bodů

$$K_a = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{R}_+^2 : f(a, d_1, d_2) = 0\},$$

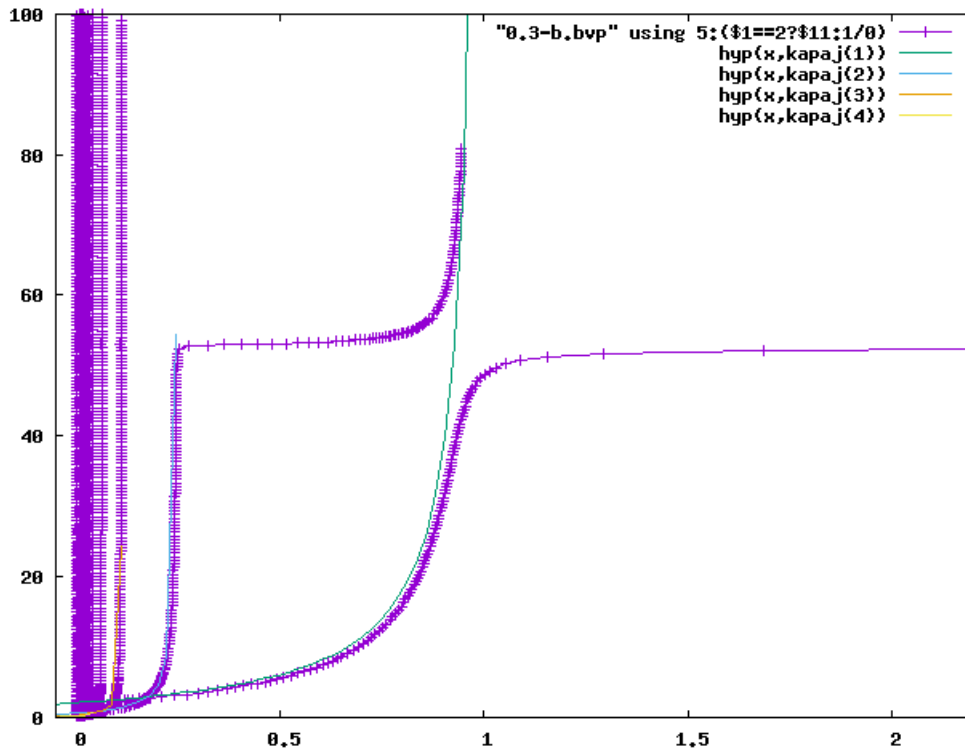
kde

$$f(a, d_1, d_2) = [d_1(ar_1^2C_1(\ell) + (1 - a)r_1^3S_1(\ell)) + b_{11}aC_1(\ell)]r_2(S_2(\ell)) - r_1(S_1(\ell))[-d_1(ar_2^2C_2(\ell) + (1 - a)r_2^3S_2(\ell)) + b_{11}aC_2(\ell)].$$

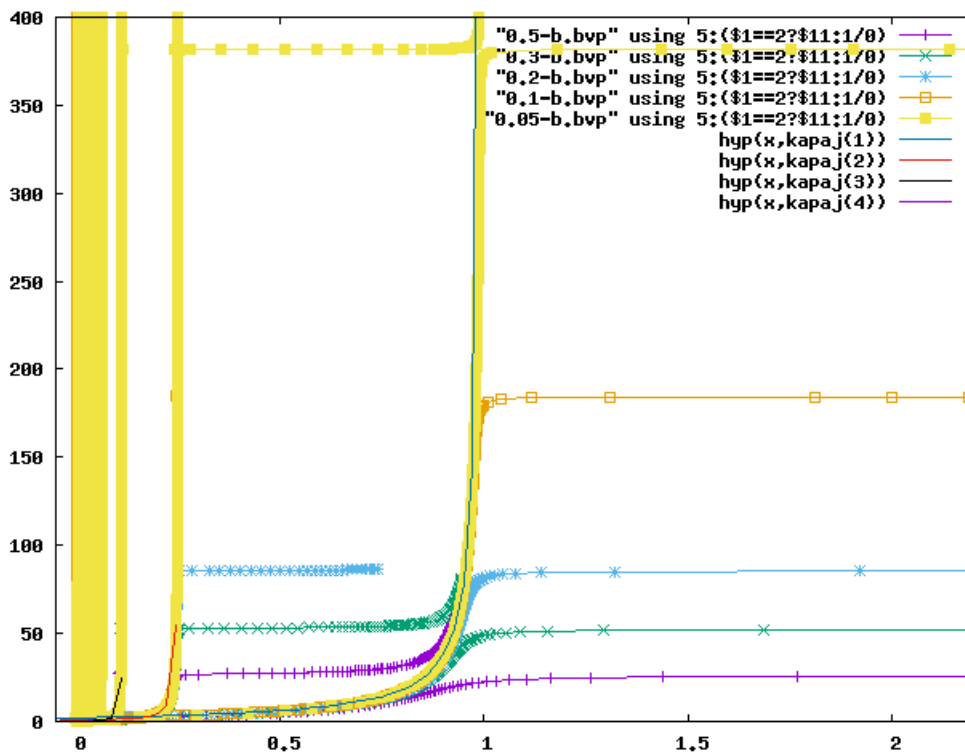
Na Obrázcích 5.1, 5.2 jsou zachyceny kritické body pro různé hodnoty parametru a . Na Obrázku 5.3 je současně vykresleno totéž pro několik hodnot parametru a , konkrétní hodnoty nalezneme u jednotlivých popisků.



Obrázek 5.1: Kritické body pro $a = 0.5$.



Obrázek 5.2: Kritické body pro $a = 0.3$.



Obrázek 5.3: Kritické body pro $a = 0.5, 0.3, 0.2, 0.1, 0.05$.

Kapitola 6

Závěr

V této bakalářské práci jsme studovali systém reakce-difúze typu aktivátor inhibitor se třemi Neumannovými a jednou Newtonovou okrajovou podmínkou závislou na parametru $a \in [0, 1]$. Zabývali jsme se existencí netriviálního řešení vzhledem k parametrům difúze. Podařilo se nám ukázat přechod mezi známými výsledky. Ukázali jsme, že dojde ke změně v rovině parametrů d_1, d_2 při přechodu od hyperbol pro čtyři Neumannovy okrajové podmínky po změnu v jedné z okrajových podmínek za Dirichletovu a tím získanou křivku s asymptotou v d_2 . Při spojitě změně od hodnoty parametru $a = 1$ (případ s Dirichletovou okrajovou podmínkou) tato křivka ustupuje nahoru a zřejmě do nekonečna v proměnné d_2 po hodnotu $a = 0$ (případ čistě Neumannových podmínek).

Literatura

- [1] E. J. DOEDEL, ALAN R. CHAMPNEYS, FABIO DERCOLE, ET AL., *AUTO-07P: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*, 2008. Dostupné z: <http://sourceforge.net/projects/auto-07p/>
- [2] J. EISNER, M. VÄTH, *Location of bifurcation points for a reaction-diffusion system with Neumann-Signorini conditions*, *Advanced Nonlinear Studies* **11** (2011), s. 809–836.
- [3] C. EDWARDS, DAVID E PENNEY, *Elementary differential equations*. 6th ed. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Prentice Hall, 2008. ISBN 01-323-9730-7.
- [4] P. KOUBA, *Existence netriviálního řešení pro systémy reakce-difúze typu aktivátor-inhibitor v závislosti na parametru*. Č. Budějovice, 2015. diplomová práce (Mgr.). Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Přírodovědecká fakulta.
- [5] KRAJC, BEREMLIJSKI, *Obyčejné diferenciální rovnice*. Ostrava, 2012. Dostupné z: <http://mi21.vsb.cz/modul/obycejne-diferencialni-rovnice>.
Řešení projektu u "Matematika pro inženýry 21. století – inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti". Vysoká škola báňská - Technická univerzita v Ostravě a Západočeská univerzita v Plzni.
- [6] M. KUČERA, *Diferenciální rovnice v Biologii II*, studijní text ZČU v Plzni, 44 s.
- [7] M. KUČERA, M. VÄTH, *Bifurcation for a reaction-diffusion system with unilateral and Neumann boundary conditions*, *J. Differential Equations* **252**, 2012, s. 2951–2982.
- [8] J. KURZWEIL, *Obyčejné diferenciální rovnice: Úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic v reálném oboru*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1978, 418 s.

- [9] S. MÍKA, A. KUFNER, *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*, 1. vyd. Praha: SNTL, 1981, 88 s.
- [10] M. MIMURA, Y. NISHIURA AND M. YAMAGUTI, *Some diffusive prey and predator systems and their bifurcation problems*, Ann. N.Y. Acad. Sci., 1979, s. 490–521.
- [11] Y. NISHIURA, *Global structure of bifurcating solutions of some reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Analysis, 1982, s. 555–593.
- [12] A. M. TURING, *The chemical basis of morphogenesis*, Phil. Trans. Roy. Soc. 1952, s. 37-72.