Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Výuka mimořádně nadaných žáků v matematice

Vypracovala: Bc. Barbora Lojíková
Vedoucí práce: doc. RNDr. Helena Binterová, Ph.D.

České Budějovice 2016

Prohlašuji, že svou diplomovou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích

Datum: Podpis:

ANOTACE

Cílem diplomové práce je vypracovat soubor úloh, které budou mít vzrůstající obtížnost a budou vést žáky k dovednosti řešit úlohy určené pro nadané žáky. Bude proveden akční výzkum týkající se práce žáka s navrženými úlohami. V teoretické části diplomové práce bude pozornost věnována dostupné literatuře zabývající se výukou matematiky mimořádně nadaných žáků.

ANNOTATION

The aim of this thesis is to elaborate a set of tasks that will have increasing difficulty and will lead pupils to the skill of solving problems designed for gifted students. The action research will focus on the student's work with the proposed tasks. In the theoretical part, attention will be paid to the available literature on the teaching of mathematics to exceptionally gifted pupils.

Poděkování

Ráda bych poděkovala doc. RNDr. Heleně Binterové, Ph.D., za odborné vedení mé diplomové práce, její cenné rady a připomínky.

OBSAH

ÚVOD

V diplomové práci se budeme zabývat náročnějšími slovními úlohami, které je možné řešit pomocí rovnic. Pokusíme se prokázat, že i méně nadaní žáci mohou díky navrhovanému nestandardnímu přístupu k výuce dosáhnout výsledků vyšší úrovně. Touto obtížností příkladů se zabývá například soutěž Matematická olympiáda, ze které budeme v práci čerpat potřebný materiál. Účast v matematické olympiádě je příležitostí pro žáky, kteří se zajímají o matematiku a jsou obdařeni některým z druhů matematického nadání. Předpokládáme, že je možné, aby příklady této úrovně za uzpůsobených podmínek vyřešili i průměrní žáci základní školy.

V teoretické části budeme vycházet z publikací zabývajících se problematikou matematické gramotnosti, matematického nadání, výukou mimořádně nadaných žáků a jejich charakteristikami. Pozornost bude věnována také matematické olympiádě, především její organizaci a historii.

Do další části práce budou přiloženy pracovní listy spolu s metodickými poznámkami pro učitele, řešení všech příkladů a popis postupu k zacházení s touto výukovou pomůckou. Pracovní listy budou tvořeny sadou návodných úloh a příkladem úrovně matematické olympiády.

Na základě zmíněných pracovních listů bude zpracován akční výzkum s žáky základní školy, pro tyto účely jsme vybrali devátou třídu městské základní školy v Písku. Skupina se skládá z 24 žáků, z toho je 14 chlapců a 10 dívek.

Akční výzkum bude probíhat ve třech krocích. V první části bude žákům předložen jeden z příkladů matematické olympiády. V další vyučovací hodině budou řešit sadu návodných úloh ke třetímu kroku výzkumu, kde dostanou jinou úlohu úrovně matematické olympiády. Po každém z těchto kroků proběhne analýza výsledků. Pro tuto diplomovou práci budou stěžejní rozdíly výsledků mezi první a třetí částí. Výsledky výzkumu budou zpracovány na základě vyhodnocených pokroků.

1. Matematická gramotnost

Matematická gramotnost je všeobecně známý pojem, který je definován různými autory. Pro účely diplomové práce byla vybrána definice matematické gramotnosti podle výzkumu PISA a definice matematické gramotnosti podle publikace *Matematická gramotnost a vyučování v matematice*.

1.1. Matematická gramotnost podle PISA

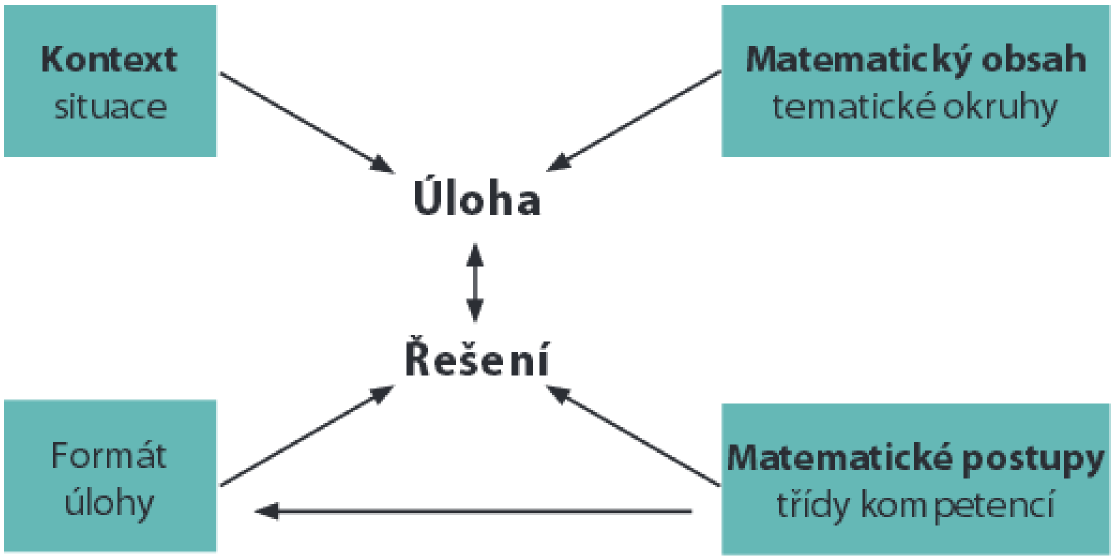
Tato kapitola je zpracována na základě publikace Výsledky výzkumu EOCD PISA 2003 z *Učení pro zítřek*.

Výzkum PISA je jeden z ceněných mezinárodních výzkumů, který se vedle čtenářské a přírodovědné gramotnosti zabývá i gramotností matematickou. Z tohoto důvodu byla jako první vybrána definice podle výzkumu PISA, definice nás seznamuje i s požadavky, kterých žák musí dosáhnout, aby byl ve výzkumu dobře hodnocen.

Matematická gramotnost je podle Palečkové a Tomáška (2003, s. 13) definovaná jako: „Schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého člověka."

V pojetí matematické gramotnosti podle Palečkové a Tomáška (2003) se rozlišují tři hlavní složky, které jsou označeny za základní pro zjišťování její úrovně. Jedná se podle nich o situace a kontexty (do nichž jsou zasazeny úlohy, které mají žáci řešit), matematický obsah (který je pro účely výzkumu uspořádán do čtyř tematických okruhů) a matematické postupy (které se uplatňují při řešení úloh).

Vzájemná propojenost těchto tří složek je znázorněna na obrázku 1.



Obr. 1 – Hlavní prvky koncepce matematické gramotnosti (převzato z Učení pro zítřek (2003), s. 13)

Kontext a situace

Během svého života používá žák matematické znalosti a dovednosti v běžných situacích. Kontext, kdy žák danou dovednost použije je rozmanitý. Z tohoto důvodu Palečková a Tomášek (2003) zvolili pro hodnocení matematické gramotnosti takové úlohy, které vycházejí z reálného světa, a jsou zasazeny do situací, se kterými se žák může setkat ve skutečném životě.

Situace výzkum posuzuje podle toho, jak jsou žákům blízké. Pro klasifikaci úloh zvolili Palečková a Tomášek (2003) čtyři typy situací. Jedná se o osobní (žákům jsou nejblíže), vzdělávací / pracovní, veřejné (patří sem i život v obci a společnosti) a vědecké (pro patnáctileté žáky jsou nejvzdálenější, do této kategorie se rovněž řadí otázky s matematickým kontextem a otázky vztahující se pouze k matematickým objektům).

Matematický obsah

Palečková a Tomášek (2003) se ve svém výzkumu nezabývají standardním učivem základní školy, ale rozdělují jej do čtyř tematických okruhů, které jsou určeny k tomu, aby pomohly žákům porozumět dané problematice, pracovat s matematickými pojmy a pochopit jejich význam ve skutečném světě. Tyto okruhy jsou podle autorů kvantita, prostor a tvar, změna a vztahy a neurčitost.

Matematické postupy (kompetence)

Za nejdůležitější složku matematické gramotnosti jsou považovány matematické kompetence. Palečková a Tomášek (2003, s. 14-15) uvádějí, že „Ve výzkumu PISA jsou hodnoceny všeobecné matematické dovednosti, které se uplatňují při řešení nejrůznějších úkolů. Jde o následující kompetence: matematické myšlení, matematická argumentace, matematická komunikace, modelování, vymezování problémů a jejich řešení, reprezentace, užívání symbolického, formálního a odborného jazyka a operací, užívání pomůcek a nástrojů."

Záměrem výzkumu není hodnotit každou kompetenci zvlášť, jelikož při řešení jak běžných situací tak matematických problému je obvykle potřeba použít několik kompetencí současně. (Palečková, Tomášek, 2003)

1.2. Jiné pojetí matematické gramotnosti

Tato kapitola je zpracována na základě publikace *Matematická gramotnost a vyučování v matematice.*

Matematika jako školní předmět je autory charakterizována pěti P, tedy pamatovat si, počítat, přemýšlet, porozumět a použít. (Hošpesová a kol., 2011)

Jakými vědomostmi má disponovat matematicky gramotný žák po ukončení základní školy?

Podle publikace *Matematická gramotnost a vyučování v matematice* se jedná o „zápisy a čtení čísel v desítkové soustavě; početní spoje sčítání a násobení čísel menších než 10; dále pak algoritmy písemného sčítání, odčítání, násobení a dělení racionálních čísel, přičemž u dělení postačí omezit se na nácvik dělení s dělitelem dvojciferným. Má znát základy aritmetické a geometrické terminologie v rozsahu přijatých standardů a příslušné aritmetické věty (např. výpočty typu $(a+b)c$, $(a+b)^2$), věty z geometrie (Pythagorova věta, věta o Thaletově kružnici) a několik konstrukcí. Ke složitějším výpočtům může žák používat kalkulačku nebo počítač." (Hošpesová a kol., 2011, s. 33)

K posledním třem „P“ (přemýšlet, porozumět, použít) se žák dostane při řešení slovních úloh. Do matematické gramotnosti autoři zahrnují příklady, u kterých se aritmetické řešení nabízí obvykle samo. Vedou však žáky i k algebraickému řešení úlohy, to matematizací slovní úlohy na tvar rovnice. U úloh geometrických je situace podobná, pro správný výsledek může žák použít přímou konstrukci nebo využít řešení výpočtem. (Hošpesová a kol., 2011)

2. Matematicky nadané dítě

Vymezit základní definici není v této oblasti vůbec jednoduché vzhledem k velkému množství různých definic, které se k tomuto tématu pojí. Pojmy spojené s tímto tématem jsou nadání, talent, vlohy, genialita a další. Zmíněné pojmy jsou stahovány ke schopnostem a označují jejich vysoký až nadprůměrný stupeň.

2.1. Nadané dítě podle Hříbkové

Tato kapitola je zpracována podle publikace *Nadání a nadání*.

Hříbková (2009) udává, že se v současné době setkáváme s různými klasifikacemi nadání. Jedná se podle ní o:

Horizontální klasifikace – v tomto případě nadání členíme podle druhů činnosti, ve které se nadání objevuje. Toto nadání může být hudební, výtvarné, jazykové, matematické nebo třeba sportovní. Každý z nich se může dále členit nebo naopak přiřazovat do různých skupin. Například matematické, jazykové, organizátorské a vědecké či technické nadání můžeme přiřadit do skupiny intelektového nadání, často chápaného jako nadání pro vědu. Hudební nadání lze také dále členit a to například na interpretační a skladatelské. (Hříbková, 2009)

Vertikální klasifikace – můžeme rozdělit na manifestové (aktuální) a latentní (potenciální), přičemž manifestové nadání je nadání, které probíhá právě teď za současných podmínek v současné době. Latentní nadání je stav, kterého lze dosáhnout při vhodných podmínkách v budoucnosti. (Hříbková, 2009)

Faktory pro přechod z potenciálního na aktuální nadání:

Působení sociálních podmínek – při rozmanitosti podmínek a poskytnutí dostatečného prostoru pro osobnostní činnost žáka dochází ke zlepšení žákova rozvoje.

Aktivita osobnosti – snaží-li se žák dosáhnout cíle, je nucen vstupovat do nových vztahů s novými formami činnosti. K rozvoji dalších zájmů a nadání pomáhá i aktivita, ke které dochází.

Učení – kromě tréninku je důležitý proces získávání nových znalostí a dovedností, při němž se daná činnost zdokonaluje. (Hříbková, 2009)

2.2. Nadání podle Sternberga

Tato kapitola je zpracována podle publikace *Úspěšná inteligence: jak rozvíjet praktickou a tvůrčí inteligenci*.

Sternberg (2001) se věnuje intelektovému nadání, které rozdělil na tři základní druhy: analytické, syntetické a praktické.

Analytické nadání – schopnost porozumět problému a jeho částem. Jedná se o žáky, kteří v běžných inteligenčních testech dosahují vysokého skóre. Tyto testy se především skládají z úloh na analytické a logické myšlení. Žáci mají například najít vztahy mezi prvky, pracovat s maticovými úkoly, kde správné řešení vyžaduje analýzu vztahů mezi prvky v řádcích nebo sloupcích dané matice. Nejlepším měřením analytického druhu intelektového myšlení je tudíž většina běžných testů inteligence (Sternberg, 2001).

Syntetické (tvořivé) nadání – žáci s vysoce rozvinutým syntetickým nadáním jsou schopni řešit nestandardní situace velmi kreativně a neobvykle. Tato jejich řešení jsou však správná a uplatnitelná ve skutečných situacích. Takto zaměření žáci nemusí mít výborné výsledky v klasických testech inteligence, protože tak nemůžou uplatnit svou nekonvenčnost a tvořivé schopnosti. Naopak dosahují vysokých výkonů u testů zaměřených přímo na tvořivost myšlení nebo těch testů inteligence, u kterých je součástí subtest, u nás je to například analytický test inteligence (A-I-T) R. Meiliho. Pravdou je, že tento druh nadání se měří daleko obtížněji než analytické nadání. Ukázalo se, že tento druh nadání není důležitý pouze pro vědecké účely, ale je významným faktorem i v běžném životě (Sternberg, 2001).

Praktické nadání – tento druh nadání dovoluje aplikovat analytické nebo syntetické schopnosti do každodenního života. Umožňuje žákovi efektivní a úspěšné fungování v sociálním prostředí. Velkou pravděpodobností u žáka, který má vysoké analytické nebo syntetické nadání, je, že nedokáže přenést své přednosti do problémů, se kterými se setkává v reálném životě (Sternberg, 2001).

Tyto druhy podle Sternberga (2001) jsou jen obecné kategorie. U žáků se podle něj pak nejčastěji setkáváme se sloučením více druhů nadání. Poměr druhů nadání se u žáků během života mění a jejich inteligence se vyvíjí. Vše je způsobené výchovou, kvalitou vzdělávání a podmínek prostředí.

Úspěšnou inteligenci Sternberg (2001) popisuje jako vyváženou kombinaci všech druhů nadání. Je podle něj podstatné, že nadaní lidé jsou si vědomi svých slabých a silných stránek, slabé stránky jsou díky tomu schopni kompenzovat těmi silnými. Autor dále uvádí, že úspěšnou inteligenci je třeba rozvíjet již od školních let, nejen při školním vyučování.

2.3. Charakteristika nadaných žáků podle Winebrennerové

Winebrennerová se ve své práci zabývá charakteristikami nadaných žáků, tyto charakteristiky dělí na pozitivní a negativní. Mezi pozitivní vlastnosti zařazuje vyspělost v oblastech učení a výkonu, kde žák může být extrémně napřed nebo výrazně pozadu, dále uvádí skvělou paměť a rozsáhlou slovní zásobu. Žáci vidí i jiným neznámé spojitosti, například vzorce a vztahy, a to díky lepší schopnosti abstrakce, dokážou také řešit složitější operace než jejich vrstevníci. Jsou zvídaví a rádi se děli o nabyté vědomosti, které jsou schopni využít v nových situacích. Často bývají plní energie, a proto mívají spoustu zájmů a koníčků, náročným úkolům dávají přednost před jednoduchými a jsou schopni jim věnovat veškerý svůj čas a pozornost. Po emotivní stránce jsou otevření a empatičtí, oplývají značně sofistikovaným smyslem pro humor. V pracovním kolektivu patří mezi vůdčí typy, jelikož jsou nositeli autority. (Winebrennerová, 2001)

Winebrennerová za negativní charakteristiky považuje to, že žáci chtějí přizpůsobovat třídní tempo svým vlastním potřebám, ohrazují se proti opakované činnosti, která nijak nerozvíjí jejich intelekt. Na příkazy reagují odmítavě, jsou netolerantní k nevědomosti své i ostatních, při slovních rozepřích bývají agresivní, nesnesou kritiku. (Winebrennerová, 2001)

Z uvedených charakteristik je zřejmé, že s nadanými žáky je obtížné pracovat především ve chvíli, kdy se necítí být spokojeni a hodina neprobíhá podle jejich potřeb, jsou neohleduplní k pomalejším žákům. Jejich zvídavost a intelektuální vyspělost však může být obohacující nejen pro jejich spolužáky, ale také pro vyučující. Jejich řešení jsou inovativní a neotřelá.

3. Vzdělávání mimořádně nadaných žáků podle RVP

Vzdělávání a výchova mimořádně nadaných žáků, jako součást základního vzdělávání je velmi významné, hlavně z toho důvodu, že tito žáci mají své specifické vzdělávací potřeby, každý jejich učitel musí na tyto potřeby reagovat a vytvářet vhodné podmínky pro jejich vzdělávání. (RVP, 2013)

Rámcově vzdělávací program pro základní vzdělávání nadání definoval jako: „Soubor schopností, které umožní jedinci dosahovat výkonů nad rámec běžného průměru populace. Množství žáků s mimořádným nadáním se odhaduje na 3 až 10 %. Mimořádně nadaný žák může disponovat jedním, ale i několika druhy nadání.“

(RVP, 2013, s. 130)

Přestože je problematice nadaných žáků podle RVP věnována pozornost již více než sto let, odborníci stále nestanovili jednotnou definici nadání nebo mimořádného nadání. Každý z autorů také uvádí jiné odhadované množství mimořádně nadaných žáků.

Základní vzdělávání má zásadní význam pro rozpoznávání a hlavně rozvíjení mimořádného nadání. Je to období vzdělávání, kterým si projde každý jedinec naší společnosti, zároveň je toto období dostatečně dlouhé na to, aby žáci byli systematicky sledováni a učitel nebo jiný odborník rozpoznal jejich druh nadání. Dále žák může projít vhodnou motivací a rozvojem nadání pro možnosti dalšího uplatnění v konkrétních činnostech. Pro vytvoření vhodných podmínek žáci potřebují specifickou pomoc ze strany rodiny i školy. (RVP, 2013)

3.1. Specifika mimořádně nadaných žáků

Specifika mimořádně nadaných žáků - doslovně převzaté z RVP (2013, s. 130):

- žák svými znalostmi přesahuje stanovené požadavky
- problematický přístup k pravidlům školní práce
- tendence k vytváření vlastních pravidel
- sklon k perfekcionismu a tím související způsob komunikace s učiteli, který může být i kontroverzní

- vlastní pracovní tempo
- vytváření vlastních postupů řešení úloh, které umožňují kreativitu
- malá ochota ke spolupráci v kolektivu
- rychlá orientace v učebních postupech
- záliba v řešení problémových úloh zvláště ve spojitosti s vysokými schopnostmi oboru, přeceňování svých schopností u žáka s pohybovým nadáním
- kvalitní koncentrace, dobrá paměť, hledání a nacházení kreativních postupů
- vhled do vlastního učení
- zvýšená motivace k rozlišování základního učiva do hloubky, především ve vyučovacích předmětech, které reprezentují nadané dítě
- potřeba projevení a uplatnění znalostí a dovedností ve školním prostředí.

3.2. Vytváření vztahové sítě u mimořádně nadaných dětí

Osobnostní struktura žáků ovlivňuje vytváření vztahových sítí. U mnoha žáků s nadáním převažuje silná tendence k introverzi. Často i některé osobnostní vlastnosti můžou zproblematizovat vytvoření nekonfliktního vztahu k vrstevníkům, učitelům a v některých případech i k sobě samým. Vytvoření pozitivního vztahu se svými spolužáky může také ovlivnit jejich perfekcionismus, zvýšená kritičnost jak k okolnímu světu, tak k sobě a závěrem jejich specifický styl humoru. Když se nesprávně pracuje se specifickými potřebami žáka, může být jeho nadání příčinou k popírání vlastních schopností. Vlivem nedostatečně vstřícného prostředí se také může stát, že se žák uzavře do vnitřního světa svých schopností, může to mít za následek omezenou komunikaci se svými vrstevníky. Mezi nadanými žáky je častý výskyt introvertů se špatnou sociální přizpůsobivostí, kteří neradi komunikují se svými spolužáky a více si rozumějí s osobami věkově staršími. (RVP, 2013)

V době, kdy žáci vstupují do školy, je velice důležité, aby se stali členy komunity ve své věkové kategorii, a to i přes to, že si více rozumějí s dospělými nebo staršími spolužáky. Nadaní žáci mají často strach, že se mezi své vrstevníky nezačlení. Z tohoto důvodu často popírají své schopnosti, mají za to, že se tak lépe začlení mezi své spolužáky. S přibývajícím věkem si začnou dobře uvědomovat své přednosti i nedostatky a jejich postavení ve skupině vrstevníků se může změnit. Dokonce se nadání může stát důvodem k obdivu od jejich spolužáků. (RVP, 2013)

3.3. Možné úpravy způsobu výuky mimořádně nadaných žáků

Možné úpravy způsobu výuky mimořádně nadaných žáků - doslovně převzatých z RVP (2013, s. 131):

- individuální vzdělávací plány
- doplnění, rozšíření a prohloubení vzdělávacího obsahu
- zadávání specifických úkolů
- zapojení do samostatných a rozsáhlejších prací a projektů
- vnitřní diferenciace žáků v některých předmětech
- občasné (dočasné) vytváření skupin pro vybrané předměty s otevřenou možností volby na straně žáka
- účast ve výuce některých předmětů se staršími žáky.

4. Matematická olympiáda

Matematická olympiáda vznikla v roce 1951 v Československu. Letošní ročník 2016 je tudíž šedesátý pátý a matematická olympiáda slaví krásné výročí.

4.1. Historie matematické olympiády

Tato kapitola je zpracována na základě publikace *Padesát let matematické olympiády 1951–2001*.

Padesátá léta byla pro tehdejší Československo velmi složitá, a to jak po hospodářské, tak i po politické stránce. O to je obdivuhodnější krok profesora Eduarda Čecha a jeho kolegů k založení této soutěže pro studenty středních škol. Později byla soutěž rozšířena i na školy základní. Profesor Eduard Čech byl matematik na světové úrovni. Ještě před 2. světovou válkou pracoval v Brně, kde se seznámil s Františkem Kahudou, který byl v té době náměstkem a o několik let později ministrem školství. František Kahuda také dlouhou dobu působil jako předseda Jednoty československých matematiků a fyziků. Nejspíše to byl jeden z důvodů, proč plně podpořil vznik a průběh prvních ročníků matematické olympiády (MO). Odborným garantem MO je právě již zmíněná Jednota českých matematiků a fyziků společně s Matematickým ústavem Akademie věd České republiky. (Boček, Horák, 2001)

Hlavním cílem MO bylo získat studenty středních škol pro studium technických oborů, aby se stali budoucností našeho, dříve hlavně těžkého, průmyslu. Na diplomu pro vítěze celostátního kola MO byl z toho důvodu vyobrazen mladý matematik věnující se výpočtům, který je obklopen kouřícími komíny továren. Dalším z cílů, který ocenili hlavně učitelé na školách, bylo zvýšit zájem o matematiku. (Boček, Horák, 2001)

Matematická olympiáda si při vzniku vzala inspiraci z téže soutěže v jiných zemích, například šlo o Polsko, Maďarsko nebo Sovětský svaz. Dále volně navazovala na soutěž v řešení matematických úloh, kterou vypisovala Jednota československých matematiků a fyziků. (Boček, Horák, 2001)

Prvním předsedou úředního výboru MO byl František Vyčichlo, profesor Českého vysokého učení technického. Tímto spojením se zdůraznila příprava studentů na vysoké školy technického zaměření. (Boček, Horák, 2001)

Kategorie A (pro studenty posledních dvou ročníků středních škol) spolu s kategorií P (programování od roku 1986) jsou každým rokem zakončeny celostátním kolem. Matematicko-fyzikální fakulta v Praze byla prvních deset ročníků pověřená organizací těchto celostátních kol. Od dalších ročníků se z pověření MŠMT v organizaci střídaly kraje. I tento postup se v posledních letech změnil, nyní celostátní kola organizuje dobrovolně vždy jedna střední škola, která je ochotná ujmout se takového úkolu. (Boček, Horák, 2001)

MO je spojena s řadou různých akcí, které postupně vznikají na podporu řešitelů. Některé akce přispívají k dalšímu vzdělávání studentů v matematice, a tím zvyšují matematické znalosti uchazečů. Jsou tu různé semináře celostátní i regionální, z nichž některé probíhají korespondenčně. Dále mají úspěšní řešitelé MO možnost vydat se na soustředění, které funguje rovnou jako příprava na další ročníky. Konají se i semináře nebo kurzy pro učitele matematiky, k dispozici dostanou i komentáře k úlohám. (Boček, Horák, 2001)

„Hlavní přínos matematické olympiády spočívá právě ve vyhledání a v další podpoře širokého spektra matematických talentů, a to i z těch tříd a škol, které nejsou zaměřeny na matematiku, z měst, která nemají možnost využít zázemí některé katedry matematiky vysoké školy. Takže MO určitě přispívá ke zvýšení matematické kultury žáků, a částečně snad i učitelů na všech školách, kde se matematické olympiádě daří.“

(Boček, Horák, 2001, s. 9)

4.2. Organizace matematické olympiády

Tato kapitola je zpracována na základě oficiálních stránek matematické olympiády. [1]

Povaha a cíl Matematické olympiády

Matematická olympiáda (MO) je předmětová soutěž pro žáky základních a středních škol. Cíl MO je vyhledávat a napomáhat talentovaným žákům, systematicky je podporovat a rozvíjet jejich odborný růst. MO nabízí žákům a studentům, kteří se zajímají o matematiku, několik činností. Žáci mají příležitost řešit náročné příklady a problémy. MO také vede žáky k popularizaci matematiky a informatiky a nabízí všestrannou péči o nadané žáky. (MO, 2016)

MO se opakuje každý rok a je jednotná na celém území České Republiky. MO má několik kategorií a soutěžních kol a splňuje pravidla Mezinárodní matematické olympiády (International Mathematical Olympiad), Mezinárodní olympiády v informatice (International Olympiad in Informatics), Středoevropské matematické olympiády (Middle European Mathematical Olympiad) a současně Středoevropské olympiády v informatice (Central European Olympiad in Informatics). (MO, 2016)

Vyhlašovatel

Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (ministerstvo) je vyhlašovatelem MO. Zodpovědným institutem pro organici celé soutěže jmenovalo ministerstvo Jednotu českých matematiků a fyziků. Matematický ústav Akademie věd ČR zajišťuje odbornost a informativnost celé soutěže. (MO, 2016)

Organizace a řízení soutěže

- Kategorie A
    - 3. a 4. ročník středních škol
    - 7. a 8. ročník osmiletých gymnázií
    - 5. a 6. ročník šestiletých gymnázií

[1] http://mo.webcentrum.muni.cz/

Kategorie A probíhá ve školním, krajském a ústředním soutěžním kole.

- Kategorie B
    - 2. ročník středních škol
    - 6. ročník osmiletých gymnázií
    - 4. ročník šestiletých gymnázií
- Kategorie C
    - 1. ročník středních škol
    - 5. ročník osmiletých gymnázií
    - 3. ročník šestiletých gymnázií

Kategorie B a C probíhá ve školním a krajském soutěžním kole.

- Kategorie Z9
    - 9. ročník základních škol
    - 4. ročník osmiletých gymnázií
    - 2. ročník šestiletých gymnázií

Kategorie Z9 probíhá ve školním, okresním a krajském soutěžním kole.

- Kategorie Z8
    - 8. ročník základních škol
    - 3. ročník osmiletých gymnázií
    - 1. ročník šestiletých gymnázií
- Kategorie Z7
    - 7. ročník základních škol
    - 2. ročník osmiletých gymnázií
- Kategorie Z6
    - 6. ročník základních škol
    - 1. ročník osmiletých gymnázií
- Kategorie Z5
    - 5. ročník základních škol

Kategorie Z8, Z7, Z6 a Z5 probíhají ve školním a okresním soutěžním kole.

- Kategorie P – zaměřená na informatiku
    - 1. až 4. ročník středních škol
    - 5. až 8. ročník osmiletých gymnázií
    - 3. až 6. ročník šestiletých gymnázií

Kategorie P probíhá ve školním, krajském a ústředním soutěžním kole.

Úkoly soutěžících

Žáci, kteří se do soutěže přihlásí, mají za úkol vyřešit úlohy daného soutěžního kola. Řešení, které se žák rozhodne odevzdat, musí být zapsáno tak, aby bylo možné sledovat jejich myšlenkový postup. Nezbytnou podmínkou pro regulérnost soutěže je utajení úloh, se zněním každé úlohy se soutěžící seznámí vždy až při zahájení soutěžního kola. Výjimka je u úloh domácí části školního kola. (MO, 2016)

Soustředění účastníků MO

Ústřední komise MO pořádá každý rok pro nejúspěšnější soutěžící z ústředního kola kategorie A výběrové soustředění. Také organizuje přípravné soustředění pro další ročník MO. Maximální počet účastníků na soustředění je dvanáct. Maximální počet účastníků na přípravném soustředění je třicet. (MO, 2016)

Okresní a krajská komise MO pro soutěžící ze školních, okresních a krajských kol pořádá odborné přednášky, semináře a soustředění MO. (MO, 2016)

Zvláštní ustanovení

Činnost žáků, která je vykonána na některých z kol soutěže, na soustředěních nebo v mezinárodních soutěžích se považuje za činnost přímo souvisejícím s vyučováním. Společně s jednotlivými úlohami a pokyny k jejich bodovému hodnocení jsou organizátorům posílány přesné pokyny pro určování jednoznačného pořadí soutěžících.

Žáci studující v zahraničí se státní příslušností České republiky se také mohou zúčastnit soutěže MO. Účastnit se můžou v místě, které je nejblíže místu jejich studia nebo bydliště žáka. (MO, 2016)

5. Průměrný žák a řešení příkladů úrovně matematické olympiády

V předchozích částech byly definovány pojmy, jako je matematická gramotnost nebo matematické nadání a byla popsána pravidla soutěže Matematická olympiáda. Nabízí se tedy otázka, zda může průměrný žák základní školy, který nemá předpoklady pro účast na matematické soutěži, zvládnout vypočítat příklady její úrovně.

Pro účely ověření hypotézy, v níž předpokládáme, že i průměrný žák může být schopen po předchozím nácviku zvládnout vypočítat příklady úrovně matematické olympiády, jsme vytvořili deset pracovních listů, do nichž jsme zařadili deset úloh úrovně matematické olympiády, ke kterým jsme sestavili návodné úlohy. Předpokládáme, že pomocí návodných úloh, které se vztahují k řešení vybraného příkladu, můžeme dovést žáky ke správnému řešení obtížného příkladu. Na závěr bude tento postup otestován výzkumem na žácích základní školy.

6. Použití pracovních listů

Pro potřeby diplomové práce všechny pracovní listy obsahují úlohy s tematickým zaměřením, slovní úlohy řešené rovnicemi.

Součástí práce je deset pracovních listů, nevyplněné pracovní listy se nacházejí v příloze diplomové práce, tyto listy obsahují celkem čtyřicet slovních úloh.

Učitel si vybere pracovní list, který chce s žáky řešit.

Každý pracovní list je koncipován jako soubor čtyř úloh, z nichž úlohy jedna až tři fungují jako návodné ke čtvrté úloze, která je vybraná z minulých ročníků matematické olympiády nebo skript *Metody řešení úloh*.

Úlohy jedna až tři mají vzrůstající obtížnost, nejnáročnější je tedy vždy konečná úloha číslo čtyři.

Doporučujeme postup, ve kterém učitel uloží žákům vyřešit úlohy jedna až tři. Vyučující pak konzultuje porozumění žáků daným úlohám a vysvětlí jim postup řešení. Ověří si, že každý žák rozumí zadání úlohy i jejímu řešení.

Po vyřešení návodných úloh získají žáci lepší predispozice pro vyřešení úlohy číslo čtyři. Abychom dosáhli zlepšení a žáci dostatečně porozuměli dané úloze, doporučujeme nepovolit jiných technologií než kalkulátoru. Na vypracování příkladu čtyři bude mít žák celou vyučovací hodinu, tedy 45 minut.

Výsledkem práce učitele s navrženými aktivitami bude zjištění úrovně žáků ve třídě, jejich diagnostika v souvislosti s obtížností úloh a s možností jejich motivace pro práci s úlohami matematické olympiády.

Tematický okruh v RVP: Číslo a proměnná, závislosti, vztahy a práce s daty.

Klíčové pojmy: Rovnice, soustavy rovnic, slovní úlohy.

Klíčové kompetence: Kompetence k učení, k řešení problémů.

6.1. PRACOVNÍ LIST 1

1) Auto jede rychlostí 60 km/h, kolik km ujede za půl hodiny?

Metodická poznámka: *V prvním příkladu si žák zopakuje základní úvahu v úlohách o pohybu. I když zná vzorec pro výpočet, zjistí, že jednoduché úlohy může řešit prostou úvahou.*

Řešení:

Úvaha: $\begin{array}{l} 60km = 1h \\ 0{,}5h = 30km \end{array}$

Za půl hodiny ujede auto 30 km.

2) Lidé na raftu plují rychlostí 8 km/h, rychlost vody je 3 km/h. Jakou rychlostí by jel raft, kdyby voda stála? Jak rychle by se pohybovali proti proudu?

Metodická poznámka: *Ve druhém příkladu očekáváme, že žák začne pracovat s myšlenkou, že rychlost vody je důležitá pro výpočet rychlosti raftu nebo jiného plavidla. Ačkoli to může působit nepravděpodobně, je tento postup nutný do výpočtu pro zjištění rychlosti plavidla.*

Řešení:

Kdyby voda stála, proud nebude popohánět raft o 3 km/h.

Jeli by rychlostí $8-3=5km/h$.

Pojedou-li proti proudu, bude je voda o 3 km/h brzdit.

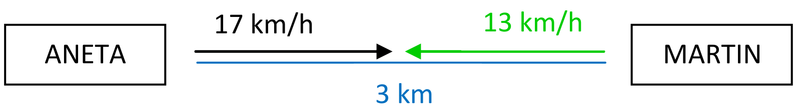
Jeli by tedy rychlostí $5-3=2km/h$.

Lidé na raftu poplují proti proudu rychlostí 2 km/h.

3) Aneta a Martin se chtějí setkat. Martinův byt je od Anetina domku 3 km. Oba současně vyrazí v 17:00, Aneta jede na kole rychlostí 17 km/h, Martin na skateboardu rychlostí 13 km/h. V kolik hodin se setkají?

Metodická poznámka: *Ve třetím návodném příkladu je žákům nastolena klasická situace, kde se objekty pohybují proti sobě. Žáci si na tomto příkladu zopakují aplikaci vzorečku pro danou situaci. Zopakují si převody jednotek mezi hodinou a minutami.*

Řešení:



$$\text{Aneta}\quad \begin{aligned} t_a &= t \\ s_a &= s \\ v_a &= 17 \end{aligned} \qquad\qquad \text{Martin}\quad \begin{aligned} t_m &= t \\ s_m &= 3 - s \\ v_m &= 13 \end{aligned}$$

$$t = t$$
$$\frac{s}{17} = \frac{3 - s}{13}$$
$$13s = 51 - 17s$$
$$s = 1{,}7$$
$$s_a = s$$
$$s_a = 1{,}7km$$

$$t_a = t = \frac{1{,}7}{17}$$
$$t = 0{,}1h = 6\min$$

Aneta se setká s Martinem v 17:06.

4) Vodáci plují se svou lodí po proudu řeky rychlostí 6km/h vzhledem ke břehu. Rychlost proudu je 2 km/h. V 10 hodin, zrovna když míjeli most, upadl jednomu z nich do vody klobouk. Ztrátu objevili až ve vzdálenosti 1,5 km od mostu. Otočili se a pádlovali se stejným úsilím zpět proti proudu.
Jak daleko byli od klobouku v okamžiku zjištění ztráty?
V kolik hodin dopluli ke klobouku? (Leischner, 2014)

Metodická poznámka: *Pro výpočet čtvrtého příkladu si žáci potřebují uvědomit, že rychlost vody je důležitá, ke zjištění rychlosti člunu. Pro další výpočet potřebují umět řešit situaci, kde se dva objekty pohybují proti sobě. Příklad je obtížnější, proto nezjistí výsledek během jednoho výpočtu. Budou muset využít převodu jednotek času.*

Řešení:

Po proudu plují rychlostí 6 km/h. V 10:00 ztratili klobouk – zjištění za 1,5 km.

$$s = 1{,}5km, \quad v = 6km/h, \quad t = \frac{s}{v}, \quad t = ?$$

$$t = \frac{1{,}5}{6}$$

$$t = 0{,}25h = 15\min$$

Než vodáci zjistili, že ztratili klobouk, uběhlo 0,25 h (15min).

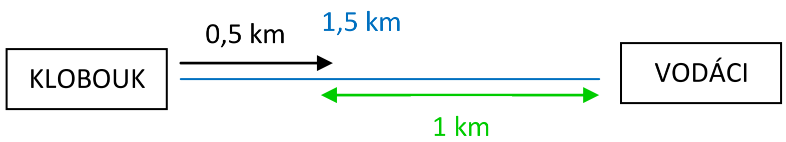
Rychlost proudu je 2 km/h.

$$v = 2km/h, \quad t = 0{,}25h, \quad s = v \cdot t \quad s = ?$$

$$s = 2 \cdot 0{,}25$$

$$s = 0{,}5km$$

Když vodáci zjistili, že ztratili klobouk, uplul 0,5 km.

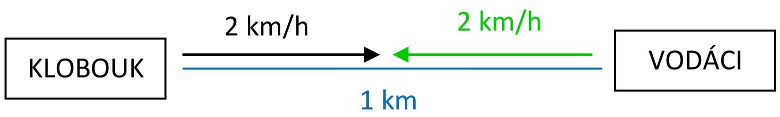


V okamžiku zjištění ztráty byli vodáci od klobouku 1 km.

Vodáci po proudu pluli 6 km/h, proud je silný 2 km/h.

Kdyby voda stála, loď by plula rychlostí 4 km/h (proud jí o 2 km/h popohání).

Když jede loď proti proudu, proud jí o 2 km/h brzdí. Loď pluje 2 km/h.



Plují stejnou rychlostí 2 km/h, tudíž stejnou dráhu 0,5 km.

$$t = \frac{0,5}{2}$$
$$t = 0,25h = 15\min$$

10:00 + 15 min (než zjistili ztrátu) + 15 min (než dopluli ke klobouku)

Vodáci dopluli ke klobouku v 10:30.

6.2. PRACOVNÍ LIST 2

1) Doplňte přirozená čísla do tabulky tak, aby součet čísel v každém řádku a každém sloupci byl 21.

2	10	
		6
	4	

Metodická poznámka: *V prvním příkladu si žáci zopakují základní práci s tabulkou, dále pak základní principy pro úpravu rovnic a soustavy rovnic.*

Řešení:

2	10	a
b	c	6
d	4	e

Postupné dopočítávání do označených políček.

2	10	a=9
b=8	c=7	6
d=11	4	e=6

$$2+10+a=21$$
$$a=9$$
$$a+6+e=21$$
$$9+6+e=21$$
$$e=6$$
$$d+4+e=21$$
$$d+4+6=21$$
$$d=11$$
$$2+b+d=21$$
$$2+b+11=21$$
$$b=8$$
$$b+c+6=21$$
$$8+6+c=21$$
$$c=7$$

Do políček patří čísla a = 9, b = 8, c = 7, d = 11, e = 6.

2) Doplňte přirozená čísla do tabulky tak, že součet v každém řádku a sloupci je stejný.

a=6	b	c
d	e	f
g	h	i

e je o 3 větší než *c*, *g* je o 3 větší než *e*,

a je polovina *c*, *d* je polovina *c*.

Metodická poznámka: *Ve druhém příkladu je již sestavení soustavy rovnic složitější, jelikož se v zadání vyskytuje více podmínek pro vytvoření soustavy.*

Řešení:

a=6	**b=12**	**c=12**
d=6	**e=15**	**f=9**
g=18	**h=3**	**i=9**

a je polovina c

$$2 \cdot a = c = 2 \cdot 6$$
$$c = 12$$

e je o 3 větší než c

$$e = 3 + c = 3 + 12$$
$$e = 15$$

g je o 3 větší než e

$$g = e + 3 = 15 + 3$$
$$g = 18$$

d je polovina c

$$d = \frac{c}{2} = \frac{12}{2}$$
$$d = 6$$

$$a + d + g = 6 + 6 + 18 = 30$$
$$d + e + f = 30 = 6 + 15 + f$$
$$f = 9$$
$$c + f + i = 30 = 12 + 9 + i$$
$$i = 9$$
$$a + b + c = 30 = 6 + b + 12$$
$$b = 12$$
$$b + e + h = 30 = 12 + 15 + h$$
$$h = 3$$

Do políček patří čísla a = 6, b = 12, c = 12, d = 6, e = 15, f = 9, g = 18, h = 3, i = 9.

3) Doplňte přirozená čísla do tabulky tak, že součet prvního řádku s prvními dvěma číslicemi druhého řádku (x, y) se rovná součtu třetího řádku s posledními dvěma číslicemi druhého řádku (y, z). Součet všech čísel v tabulce je 32. Číslo x je o 1 větší, než číslo y.

1	**2**	**6**
x	**y**	**z**
3	**1**	**6**

Metodická poznámka: *Ve třetím příkladu již žáci nepracují vždy s celou tabulkou. První rovnice jsou sestaveny pouze z určité části tabulky, sestavení rovnic předpokládá uvědomění si tabulky jako celku. Řešení úlohy vede k soustavě tří rovnic o třech neznámých.*

Řešení:

Z první podmínky:

$$1+2+6+x+y=3+1+6+y+z$$
$$9+x+y=10+y+z$$
$$9+x=10+z$$
$$x=z+1$$

Z druhé podmínky:

$$1+2+6+x+y+z+3+1+6=32$$
$$19+x+y+z=32$$
$$x+y+z=13$$

Ze třetí podmínky:

$$x=y+1$$

Po dosazení třetí podmínky do dvou předchozích rovnic:

$y+1=z+1 \quad \Rightarrow \quad y=z$

$y+1+y+z=13$

$z+1+z+z=13$

$3z=12$

$z=4$

$y=4$

$x=y+1 \quad \Rightarrow \quad 4+1$

$x=5$

V tabulce jsou čísla x = 5, y = 4, z = 4.

4) Doplňte do čtverce přirozená čísla tak, aby:
součet všech doplněných čísel byl 44,
součet čísel v každém čtverci o čtyřech čtverečkách byl stejný, nejmenší doplněné číslo bylo liché,
uprostřed čtverce bylo jednociferné číslo.

	7	
8		4
	2	

(MO, 2006)

Metodická poznámka: *Pro výpočet čtvrtého příkladu, předpokládáme, že žák bude umět pracovat s tabulkou a tyto znalosti využije k sestavení soustavy rovnic. Po sestavení rovnic by si měl žák uvědomit, že sice pracuje se čtyřmi rovnicemi a pět neznámými, ale ke každé rovnici je přičítáno x, tudíž ho můžeme od všech rovnic odečíst a zůstanou nám čtyři rovnice o čtyřech neznámých. Finální výsledek by pak žák měl vypočítat pomocí klasické tabulky.*

Řešení:

a	7	b
8	x	4
c	2	d

Postupné dopočítávání do označených políček.

Jsou čtyři čtverce o čtyřech čtvercích.

$a+7+8+x \;=\; 8+x+2+c \;=\; 7+b+x+4 \;=\; x+4+2+d$

V každé rovnici je x, vypustí se.

$$a+15 \quad = \quad c+10 \quad = \quad b+11 \quad = \quad d+6$$

Všechny rovnice jsou stejné.

$$a+15=c+10 \quad \Rightarrow \quad c=a+5$$
$$a+15=b+11 \quad \Rightarrow \quad b=a+4$$
$$a+15=d+6 \quad \Rightarrow \quad d=a+9$$

Součet všech doplněných čísel je 44.

$$a+a+5+a+4+a+9+x=44$$
$$4a+18+x=44$$
$$x=26-4a$$

a	~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~4~~	5	6	~~7~~
x	~~22~~	~~18~~	~~14~~	~~10~~	6	2	~~-2~~

x = -2 není přirozené, a = 7 vyškrtnuto.

x má být jednociferné číslo, a = 1, a = 2, a = 3, a = 4 vyškrtnuto.

Zbylo a = 5, x = 6; a = 6, x = 2.

Nejmenší číslo musí být liché. Nejmenší číslo je buď *x*, nebo *a*, protože ostatní čísla jsou *a* plus číslo.

Jediné liché číslo, které zbylo, je 5. Zároveň je toto číslo nejmenší.

$$a=5$$
$$x=6$$
$$b=a+4=9$$
$$c=a+5=10$$
$$d=a+9=14$$

a=5	**7**	**b=9**
8	**x=6**	**4**
c=10	**2**	**d=14**

V tabulce jsou čísla a = 5, b = 9, c = 10, d = 14, x = 6.

6.3. PRACOVNÍ LIST 3

1) Zahradník pěstuje růže, na každou sazenici potřebuje 3 kg zeminy a 0,5 kg hnojiva. Když květina vyroste, má 3, 4 nebo 5 růží. Majitel hotelu si objedná 5 květin, z toho 3 květiny po 4 růžích, 1 květinu po 3 růžích a 1 květinu po 5 růžích. Celkem si od zahradníka odveze 21.5 kg. Kolik g váží jedna růže?

Metodická poznámka: *V prvním návodném příkladu si žáci zopakují, jak se pracuje s hmotností, zopakují si převody jednotek a budou rozpočítávat* hmotnost podle *zadaných podmínek.*

Řešení:

1 květina ……. zemina + hnojivo $3kg + 0,5kg = 3,5kg$

5 květin ……. $5 \cdot 3,5kg = 17.5kg$

$3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 = 12 + 3 + 5 = 20$ růží

$21.5 - 17.5 = 4kg$

20 růží ……. 4kg

1 růže ……. $4/20 = 0,2kg = 200g$

Jedna růže váží 200 g.

2) Veronika a Marek si rozdělili čokoládu. Když Veronika dá Markovi 3 kostičky čokolády, budou mít stejně. Když Marek dá Veronice 2 kostičky čokolády, bude mít Veronika 3x více čokolády než Marek. Kolik kostiček má čokoláda?

Metodická poznámka: *Ve druhém příkladu si žák zopakuje tvoření rovnic podle zadaných podmínek a vytvoří zápis používaných veličin. Poté si žák vytvoří další rovnici, aby zjistil správný výsledek.*

Řešení:

Veronika ……. V

Marek ……. M

Celá čokoláda ……. C

$$V - 3 = M + 3 \quad \Rightarrow \quad V = M + 6$$
$$3 \cdot (M - 2) = V + 2$$

$$3M - 6 = M + 6 + 2$$
$$2M = 14$$
$$M = 7$$

$$V = 7 + 6$$
$$V = 13$$

$$C = M + V$$
$$C = 7 + 13$$
$$C = 20$$

Čokoláda má 20 kostiček.

3) Karolína šla nakupovat a koupila bedýnku broskví a balíček jahod. Paní prodavačka jí prozradila, že nákup váží stejně jako bedýnka meruněk +1 kg. Když šel nakupovat Pavel, koupil bedýnku broskví a bedýnku meruněk. Dozvěděl se, že nákup váží stejně jako balíček jahod +3 kg. Kolik kg váží bedýnka broskví?

Metodická poznámka: *Ve třetím příkladu žák bude sestavovat dvě rovnice o třech neznámých. Musí si uvědomit, že pro výsledek nepotřebuje zjistit všechny veličiny, ale bude mu stačit jediná hodnota. Důležité je, aby žák správně přečetl zadání a soustředil se pouze na fakta vztahující se k úloze.*

Řešení:

bedýnka broskví ……. B

balíček jahod ……. J

bedýnka meruněk ……. M

$$B + J = M + 1 \quad /- M$$
$$B + M = J + 3 \quad /- J$$

$$B + J - M = 1$$
$$B - J + M = 3$$

$$2B = 4$$
$$B = 2kg$$

Bedýnka broskví váží 2 kg.

4) Zákazník vyvážející odpad do sběrného dvora je povinen zastavit naloženým autem na váze a po vykládce odpadu znovu. Rozdíl naměřených hmotností tak odpovídá vyvezenému odpadu. Pat a Mat chybovali. Při vážení naloženého auta se na váhu připletl Pat a při vážení vyloženého auta se tam místo Pata nachomýtl Mat. Vedoucí dvora si tak zaznamenal rozdíl 332 kg. Poté se na prázdnou váhu postavili společně vedoucí a Pat, posléze samotný Mat a váha ukázala rozdíl 86 kg. Dále se spolu zvážili vedoucí a Mat, poté samotný Pat a váha ukázala rozdíl 64 kg.
   Kolik vážil vyvezený odpad ve skutečnosti? (Šimůnek; MO, 2014)

Metodická poznámka: *Pro výpočet třetího příkladu musí žák umět pracovat se soustavou rovnic, správně si rovnice sestavit a udělat zápis. Dále budou žáci sestavovat tři rovnice o čtyřech neznámých, proto si budou muset pořádně přečíst zadání a počítat pouze tu veličinu, na kterou jsou tázáni.*

Řešení:

naložené auto ……. odpad (O) + Pat (P)

vyložené auto ……. Mat (M) + rozdíl 332 kg

vedoucí (V) + Pat (P) ……. Mat (M) + rozdíl 86 kg

vedoucí (V) + Mat (M) ……. Pat (P) + rozdíl 64 kg

$$O + P = M + 332$$
$$V + P = M + 86 \quad /-M$$
$$V + M = P + 64 \quad /-P$$

$$V + P - M = 86$$
$$V - P + M = 64$$
$$2V = 150$$
$$V = 75kg$$

$$75 + P = M + 86$$
$$P - M = 11$$

$$O + P = M + 332$$
$$P - M = 332 - O$$

$$P - M = P - M$$
$$332 - O = 11$$
$$O = 321kg$$

Vyvezený odpad váží 321 kg.

6.4. PRACOVNÍ LIST 4

1) Janička slaví 11 let od svého narození. Když se narodila, tak mamince bylo 27 let. Před kolika lety byla maminka 10x starší než Janička?

Metodická poznámka: *První příklad je určen k zopakování sestavování rovnic, ty by pak měly být sestaveny podle zadaných podmínek.*

Řešení:

Janička ……. 11 let

maminka ……. J + 27

počet let ……. X

$$J + 27 = M$$
$$(J - X)\cdot 10 = M - X$$

$$M = 27 + 11 = 38$$
$$(11 - X)\cdot 10 = 38 - X$$
$$110 - 10X = 38 - X$$
$$9X = 72$$
$$X = 8$$

Maminka byla 10x starší před 8 lety.

2) Babička koupila 40 kg ovoce. Jahody po 30 Kč/kg. Jablíčka po 25 Kč/kg. Celkem platila 1060 Kč. Kolik kg jahod a kolik kg jablíček babička koupila?

Metodická poznámka: *Ve druhém příkladu si žák zopakuje soustavu rovnic. Procvičí si rovnice, ve kterých není pouze klasické sčítání a odčítání, ale měl by sestavit rovnici s násobením.*

Řešení:

jahody ……. x kg

jablka ……. y kg

$$x + y = 40 \quad \Rightarrow \quad x = 40 - y$$
$$30x + 25y = 1060$$

$$30 \cdot (40 - y) + 25y = 1060$$
$$1200 - 30y + 25y = 1060$$
$$5y = 140$$
$$y = 28kg$$

$$x = 40 - y$$
$$x = 40 - 28$$
$$x = 12kg$$

Babička koupila 12 kg jahod a 28 kg jablíček.

3) Paní učitelka měla 3720 Kč a tak objednala dětem penály. Pro chlapce se Spidermanem za 120 Kč. Pro dívky s vílou Zvonilkou za 150 Kč. Balíček, který přišel, ale stál 3840 Kč. Paní učitelka po rozbalení zjistila, že jí firma prohodila počty penálů. Kolik bylo ve třídě chlapců a kolik dívek?

Metodická poznámka: *Ve třetím příkladu je úkolem žáků sestavit soustavu rovnic s násobením prvků, je nutné, aby si ale uvědomil, že u nové ceny jsou neznámé prohozeny.*

Řešení:

se Spidermanem (chlapci) ……. x

s vílou Zvonilkou (dívky) ……. y

$$120x + 150y = 3720 \quad / \div 30$$
$$150x + 120y = 3840 \quad / \div 30$$

$$4x + 5y = 124 \quad / \cdot 5$$
$$5x + 4y = 128 \quad / \cdot (-4)$$

$$20x + 25y = 620$$
$$-20x - 16y = -512$$

$$9y = 108$$
$$y = 12$$

$$4x + 5 \cdot 12 = 124$$
$$4x + 60 = 124$$
$$4x = 64$$
$$x = 16$$

Ve třídě bylo 16 chlapců a 12 dívek.

4) V pohádkovém údolí žili trojhlaví a šestihlaví draci. Dohromady měli 117 hlav a 108 nohou. Každý drak má 4 nohy. Zjistěte, kolik tam žilo trojhlavých a kolik šestihlavých draků. (MO, 2007)

Metodická poznámka: *Čtvrtý příklad by měl žák spočítat pomocí soustavy dvou rovnic, ve které bude využívat násobení neznámých. Předpokladem pro správné vypočítání příkladů je určení počtu draků žijících v údolí.*

Řešení:

trojhlaví draci ……. x

šestihlaví draci ……. y

4 nohy ……. 1 drak

108 nohou ……. $108 \div 4 = 27$ draků

$x + y = 27 \quad \Rightarrow \quad x = 27 - y$

$3x + 6y = 117$

$3 \cdot (27 - y) + 6y = 117$

$81 - 3y + 6y = 117$

$3y = 36$

$y = 12$

$x = 27 - 12$

$x = 15$

V pohádkovém údolí žilo 15 trojhlavých a 12 šestihlavých draků.

6.5. PRACOVNÍ LIST 5

1) Ve školce je 28 dětí. Holčiček je o 8 více než chlapečků. Kolik je ve školce chlapečků a kolik holčiček?

Metodická poznámka: *První příklad je určen ke zopakování soustavy základních rovnic podle zadání.*

Řešení:

chlapečků ……. x

holčiček ……. x+8

$$x+(x+8)=28$$
$$2x=20 \qquad\qquad x+8=10+8=18$$
$$x=10$$

Ve školce je 10 chlapečků a 18 holčiček.

2) Ve škole je 123 osob, učitelé, učitelky a děti. Učitelek je o 10 více než učitelů. Dětí je o 17 méně, než je šestinásobek dospělých. Kolik je ve škole učitelů, učitelek a dětí?

Metodická poznámka: *Žáci si zopakují tvoření složitějších rovnic, kdy je jim zadáno více podmínek pro sestavení rovnice.*

Řešení:

učitelů ……. x

učitelek ……. x+10

dětí ……. $6\cdot(x+x+10)-17=6\cdot(2x+10)-17=12x+43$

$x+x+10+12x+43=123$
$14x=70$ $\qquad (x+10)=5+10=15 \qquad (12x+43)=60+43=103$
$x=5$

Ve škole je 5 učitelů, 15 učitelek a 103 dětí.

3) Dědeček má babičce u domečku připravit obdélníkový záhonek. Když na šířce záhonku přidá 4 m a na délce ubere 2 m, záhonek bude mít stejný obsah. Jestliže to dědeček ale poplete a na délce přidá 4 m a na šířce 2 m ubere, bude obsah záhonku o 6 m^2 větší. Jaké jsou rozměry původního záhonku?

Metodická poznámka: *Ve třetím příkladu by měl žák využít soustavu rovnic o dvou neznámých, k tomu je nutné, aby si správně označil obě neznámé, sestavil rovnice a především si uvědomil, jakou veličinu má za úkol vypočítat.*

Řešení:

šířka záhonku ……. x

délka záhonku ……. y

$x \cdot y = (x+4)\cdot(y-2)$
$(x \cdot y)+6 = (y+4)\cdot(x-2)$

$xy = xy - 2x + 4y - 8$
$xy + 6 = xy + 4x - 2y - 8$

$2x = 4y - 8 \quad \Rightarrow \quad x = 2y - 4$
$14 = 4x - 2y$

$x = 2y - 4$
$x = 2\cdot 5 - 4$
$x = 6$

$14 = 4\cdot(2y-4) - 2y$
$14 = 8y - 16 - 2y$
$6y = 30$
$y = 5$

Rozměry původního záhonku jsou: šířka 6 m a délka 5 m.

4) Adam s Evou hráli šachy. Adam vyhrál a utěšoval Evu: „To víš, já hraji šachy dlouho, dvakrát déle než ty!“

   Eva se zlobila: „Ale minule jsi říkal, že hraješ třikrát déle!“

   Adam se divil: „To že jsem říkal? A kdy to bylo?“

   „Předloni!“

   „No tak to ano, mluvil jsem pravdu – a dnes také.“

   Jak dlouho hraje Adam šachy? (Volfová; MO, 2009)

Metodická poznámka: *V posledním příkladu by měl žák využít nabyté vědomosti z předchozích třech příkladů, tedy sestavit dvě rovnice o dvou neznámých a především si uvědomit, na jakou veličinu je tázán.*

Řešení:

Adam ……. x

Eva ……. y

$$x = 2y$$
$$(x-2) = (y-2)\cdot 3$$

$$x - 2 = 3y - 6$$
$$2y - 2 = 3y - 6$$
$$y = 4$$

$$x = 2y$$
$$x = 2\cdot 4$$
$$x = 8$$

Adam hraje šachy 8 let.

6.6. PRACOVNÍ LIST 6

1) Kamilka měří 110 cm, což jsou přesně 2/3 výšky své maminky. Kolik měří maminka?

Metodická poznámka: *V prvním příkladu by měl žák sestavit základní rovnici podle předem určených podmínek.*

Řešení:

maminka ……. M

$$\frac{2}{3}M = 110$$
$$2M = 330$$
$$M = 165cm$$

Maminka měří 165 cm.

2) Honzík bude vyrábět vanilkovou, čokoládovou a jahodovou zmrzlinu. Vanilkové bude stejně jako jahodové a čokoládové dohromady. Čokoládové budou 2/3 jahodové. Celkem vyrobí 30 l zmrzliny. Kolik jahodové, čokoládové a vanilkové zmrzliny bude Honzík mít?

Metodická poznámka: *Ve druhém příkladu by měl žák sestavit soustavu třech rovnic o třech neznámých a zopakovat si tím jednoduché počítání se zlomky.*

Řešení:

vanilková zmrzlina ……. v

čokoládová zmrzlina ……. č

jahodová zmrzlina ……. j

$$v = j + č$$
$$\frac{2}{3}j = č$$
$$v + j + č = 30$$

$$\frac{2}{3}j = č$$
$$j + č + j + č = 30$$

$$j + \frac{2}{3}j + j + \frac{2}{3}j = 30$$

$$2j + \frac{4}{3}j = 30 \quad /\cdot 3$$

$$6j + 4j = 90$$

$$10j = 90$$

$$j = 9$$

$$\frac{2}{3}j = č$$

$$\frac{2}{3}\cdot 9 = č$$

$$č = 6$$

$$v = j + č$$

$$v = 9 + 6$$

$$v = 15$$

Honzík bude mít 15 l vanilkové, 9 l jahodové a 6 l čokoládové zmrzliny.

3) Děti přinesly na farmu jablka pro koně. První kůň dostal o 6 jablek více než druhý kůň. Druhý kůň dostal 1/3 celku. Třetí kůň dostal 3/4 jablek co druhý kůň. Na čtvrtého koně zbyla pouhá čtyři jablka. Kolik jablek děti přinesly? Kolik jablek dostal každý kůň?

Metodická poznámka: *Ve třetím příkladu se předpokládá, že žák sestaví rovnice převážně pomocí zlomků a bude rozdělovat jablíčka pro koně přesně podle zadání.*

Řešení:

jablek celkem ……. x

první kůň ……. $\frac{1}{3}x + 6$ $\qquad$ $\frac{1}{3}\cdot 120 + 6 = 46$

druhý kůň ……. $\frac{1}{3}x$ $\qquad$ $\frac{1}{3}\cdot 120 = 40$

třetí kůň ……. $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}x$ $\qquad$ $\frac{3}{12}\cdot 120 = 30$

čtvrtý kůň ……. 4 jablka

$$\frac{1}{3}x+6+\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}x+4=x \quad /\cdot 12$$
$$4x+72+4x+3x+48=12x$$
$$x=120$$

První kůň dostal 46 jablek, druhý kůň 40 jablek a třetí kůň 30 jablek. Celkem dostali 120 jablek.

4) Milena nasbírala do košíku poslední spadlé ořechy a zavolala na partu kluků, ať se o ně podělí. Dala si ale podmínku: první si vezme 1 ořech a desetinu zbytku, druhý si vezme 2 ořechy a desetinu nového zbytku, třetí si vezme 3 ořechy a desetinu dalšího zbytku a tak dále. Takto se podařilo rozebrat všechny ořechy a přitom každý dostal stejně.
Určete, kolik Milena nasbírala ořechů a kolik se o ně dělilo chlapců.
(Volfová; MO, 2015)

Metodická poznámka: *Ve čtvrtém příkladu žák by měl žák sestavit rovnice pomocí zlomků a přesně podle zadání rozdělit ořechy. Jelikož každý chlapec dostal stejně ořechů, žák by si měl uvědomit rovnost darovaného množství pro prvního a druhého chlapce. Rovnice ostatních chlapců žák nemusí vytvářet.*

Řešení:

celkem ořechů ……. x

1. chlapec ……. $1+(x-1)\cdot\frac{1}{10}$
2. chlapec ……. $2+\left[x-2-1-(x-1)\cdot\frac{1}{10}\right]\cdot\frac{1}{10}$

$$1+(x-1)\cdot\frac{1}{10}=2+\left[x-2-1-(x-1)\cdot\frac{1}{10}\right]\cdot\frac{1}{10}$$
$$1+\frac{x}{10}-\frac{1}{10}=2+\left(x-3-\frac{x}{10}+\frac{1}{10}\right)\cdot\frac{1}{10}$$
$$1+\frac{x}{10}-\frac{1}{10}=2+\frac{x}{10}-\frac{3}{10}-\frac{x}{100}+\frac{1}{100}\quad /\cdot 100$$
$$100+10x-10=200+10x-30-x+1$$
$$90+10x=171+9x$$
$$x=81$$

$1+(x-1)\cdot\frac{1}{10}=1+(81-1)\cdot\frac{1}{10}=1+8=9$ ořechů pro jednoho chlapce

$81\div 9=9$ chlapců

Milena nasbírala 81 ořechů. Dělilo se o ně 9 chlapců.

6.7. PRACOVNÍ LIST 7

1) Auto jede rychlostí 90 km/h. Za jak dlouho ujede vzdálenost 45 km?

Metodická poznámka: *V prvním příkladu si žák zopakuje základní úvahu v úlohách o pohybu. Ačkoli žák může znát vzoreček pro výpočet, měl by zjistit, že některé úlohy jdou řešit prostou úvahou.*

Řešení:

Úvaha:
$$\begin{aligned} 90km &= 1h \\ 45km &= 0{,}5h \end{aligned}$$

Auto ujede 45 km za 0,5 hodiny.

2) Modré auto jede z bodu A do bodu B rychlostí 80 km/h. Zelené auto jede z bodu B do bodu A rychlostí 90 km/h. Auta vyjela ve stejný čas. Vzdálenost mezi body A a B je 340 km. Za jak dlouho se potkají?

Metodická poznámka: *Ve druhém příkladu je již nutné, aby žák vzoreček využil. Jedná se o klasickou úlohu o pohybu, kde se pohybují dvě auta proti sobě a vyjela ve stejný čas. Veličina, kterou má žák vypočítat, je čas.*

Řešení:

modré auto
$$\begin{aligned} v_m &= 80 \\ t_m &= t \\ s_m &= s \end{aligned}$$

zelené auto
$$\begin{aligned} v_z &= 90 \\ t_z &= t \\ s_z &= 340 - s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= t \\ \frac{s}{80} &= \frac{340-s}{90} \\ 9s &= 2720 - 8s \\ 17s &= 2720 \\ s &= 160km \end{aligned}$$

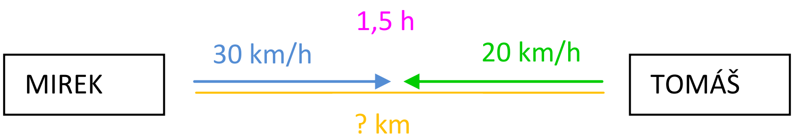
$$\begin{aligned} t_m &= t \\ t &= \frac{s}{v} \\ t &= \frac{160}{80} \\ t &= 2h \end{aligned}$$

Auta se potkají za 2 hodiny.

3) Mirek jede na SIMSONU z Radomyšle do Ledenic rychlostí 30 km/h. Tomáš jede z Ledenic do Radomyšle na BABETĚ rychlostí 20 km/h. Oba vyjeli v 7:00 ráno a potkali se v 8:30. Jak dlouhá je trasa mezi Radomyšlí a Ledenicemi? Jak dlouho od setkání pojede Mirek do Ledenic? Jak dlouho od setkání pojede Tomáš do Radomyšle?

Metodická poznámka: *Ve třetím příkladu se opět objevují dva proti sobě se pohybující objekty. Nyní však každý z objektů vyjel v jiný čas. Pro zjištění celkové délky trasy by měli žáci obě části sečíst. Pro výpočet doby, kterou chlapci ještě pojedou, by si měl žák uvědomit, že Mirek pojede původní trasu Tomáše a Tomáš Jirkovu. Žák by tedy měl ve druhém výpočtu trasy obou chlapců zaměnit.*

Řešení:



Do setkání Mirka a Tomáše:

Mirek $v_M = 30$, $t_M = 1{,}5$, $s_M = ?$ Tomáš $v_T = 20$, $t_T = 1{,}5$, $s_T = ?$

$$s_M = v_M \cdot t_M \qquad s_T = v_T \cdot t_T \qquad s = s_M + s_T$$
$$s_M = 30 \cdot 1{,}5 \qquad s_T = 20 \cdot 1{,}5 \qquad s = 45 + 30$$
$$s_M = 45km \qquad s_T = 30km \qquad s = 75km$$

Trasa mezi Radomyšlí a Ledenicemi je dlouhá 75 km.

Po setkání Mirka a Tomáše:

Mirek $v_M = 30$, $s_M = 30$, $t_M = ?$ Tomáš $v_T = 20$, $s_T = 45$, $t_T = ?$

$$t_M = \frac{s_M}{v_M} \qquad t_T = \frac{s_T}{v_T}$$

$$t_M = \frac{30}{30} \qquad t_T = \frac{45}{20}$$

$$t_M = 1h \qquad t_T = 2{,}25h = 2h \quad 15\,\text{min}$$

Mirek do Ledenic pojede ještě 1 hodinu.

Tomáš do Radomyšle pojede ještě 2 hodiny a 15 minut.

4) Pan Rychlý a pan Louda vyšli ve stejnou dobu na tutéž turistickou túru, jen pan Rychlý ji šel shora z horské chaty a pan Louda naopak od autobusu dole v městečku na chatu nahoru. V 10 hodin se na trase míjeli. Pan Rychlý spěchal a již ve 12 hodin byl v cíli. Naopak pan Louda postupoval pomalu, a tak dorazil k chatě až v 18 hodin. V kolik hodin pánové vyrazili na cestu, víme-li, že každý z nich šel celou dobu svou stálou rychlostí? (Volfová; MO, 2011)

Metodická poznámka: *Ve čtvrtém příkladu se předpokládá, že žák sestaví rovnice týkající se pohybu, aby zjistil čas, který pan Rychlý a pan Louda ještě půjdou, měl by si žák uvědomit, že původní trasa pana Loudy je druhou částí trasy pana Rychlého a naopak. Proto by měl žák ve výpočtu po 10:00 prohodit* s_1 *a* s_2.

Řešení:

		Rychlý	Louda
Do 10:00 hod.	v	v_1	v_2
	t	t	t
	s	$s_1 = v_1 \cdot t$	$s_2 = v_2 \cdot t$
Po 10:00 hod.	v	v_1	v_2
	t	2 h	8 h
	s	$s_2 = 2 \cdot v_1$	$s_1 = 8 \cdot v_2$

$s_1 = s_1$
$s_2 = s_2$

$v_1 \cdot t = 8 \cdot v_2 \quad / \div v_2, \quad \div t$
$v_2 \cdot t = 2 \cdot v_1 \quad / \div v_1, \quad \div t$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{8}{t}$$
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t}{2}$$

$$\frac{8}{t} = \frac{t}{2}$$
$t^2 = 16$
$t = 4h$

$10:00 - 4h = 6:00$

Na cestu vyrazili v 6:00.

6.8. PRACOVNÍ LIST 8

1) Eliška šla na výlet dlouhý 27 km. V pondělí ušla o 2 km více než v úterý. Ve středu ušla už jen polovinu úterní trasy. Kolik km ušla jednotlivé dny?

Metodická poznámka: *V prvním příkladu si žák měl zopakovat soustavu rovnic podle předem určených podmínek.*

Řešení:

pondělí ……. x+2

úterý ……. x

středa ……. $\frac{x}{2}$

$$x + 2 + x + \frac{x}{2} = 27$$
$$2x + 4 + 2x + x = 54$$
$$5x = 50$$
$$x = 10$$

$$(x + 2) = 10 + 2 = 12$$

$$\frac{x}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Eliška ušla v pondělí 12 km, v úterý 10 km a ve středu 5 km.

2) Maruška si koupila 7 kefírů a 4 jogurty. Za celý nákup platila 231 Kč. Zjistila, že krabička kefíru je o 11 Kč dražší než kelímek jogurtu. Kolik Kč stojí jogurt a kolik kefír?

Metodická poznámka: *Ve druhém příkladu je úkolem žáka vytvořit soustavu rovnic o dvou neznámých. Při vytváření rovnic by měl žák použít násobení.*

Řešení:

krabička kefíru ……. k

kelímek jogurtu ……. j

$$7k + 4j = 231$$
$$k = j + 11$$

$$7 \cdot (j + 11) + 4j = 231$$
$$7j + 77 + 4j = 231$$
$$11j = 154$$
$$j = 14$$

$$k = 14 + 11$$
$$k = 25$$

Krabička kefíru stojí 25 Kč, kelímek jogurtu 14 Kč.

3) Baruška s Markétkou si sbíraly do košíčků jablíčka. Když dá Baruška Markétce 2 jablíčka, budou mít stejně. Když Markétka dá Barušce 7 jablíček, bude mít Markétka 1/3 počtu jablíček co Baruška. Kolik jablíček mají dívky dohromady?

Metodická poznámka: *Ve třetím příkladu se předpokládá, že žák vytvoří soustavu rovnic, kde jsou v podmínkách pro vytváření důležité zlomky. Pro zjištění výsledku by měl žák využít dalšího doplňujícího výpočtu.*

Řešení:

Baruška ……. B

Markétka ……. M

$$B - 2 = M + 2 \quad \Rightarrow \quad B = M + 4$$
$$3 \cdot (M - 7) = B + 7$$

$$3M - 21 = M + 4 + 7$$
$$2M = 32$$
$$M = 16$$

$$B = M + 4$$
$$B = 16 + 4$$
$$B = 20$$

$$M + B = 16 + 20 = 36$$

Dívky mají dohromady 36 jablíček.

4) Vlčkovi lisovali jablečný mošt. Měli ho ve dvou stejně objemných soudcích, v obou téměř stejné množství. Kdyby z prvního přelili do druhého 1 litr, měli by v obou stejně, ale to by ani jeden soudek nebyl plný. Tak raději přelili 9 litrů z druhého do prvního. Pak byl první soudek úplně plný a mošt v druhém zaplňoval právě třetinu objemu. Kolik litrů moštu vylisovali, jaký byl objem soudků a kolik moštu v nich bylo původně? (Volfová; MO, 2011)

Metodická poznámka: *Ve čtvrtém příkladu by měl žák sestavit soustavu rovnic o dvou neznámých, je nutné, aby si uvědomil, že výsledek se nedozví z prvního výpočtu soustavy rovnic, ale je potřeba doplňujícího výpočtu pro zjištění veličiny, na kterou je tázán.*

Řešení:

první soudek ……. x

druhý soudek ……. y

$$x-1=y+1 \quad \Rightarrow \quad x=y+2$$
$$x+9=(y-9)\cdot 3$$

$$y+2+9=3y-27$$
$$2y=38$$
$$y=19l$$

$$x=y+2$$
$$x=19+2$$
$$x=21l$$

$$x+y=19+21=40l$$

$$x+9=21+9=30l$$

Vylisovali 40 l moštu. Objem sudů byl 30 l.

6.9. PRACOVNÍ LIST 9

1) Auto jede 1/2 hodiny a ujelo 30 km. Jakou rychlostí auto jede?

Metodická poznámka: *První příklad je určen k zopakování základních úvah v úlohách o pohybu. I když žák zná vzoreček pro výpočet, může zjistit, že některé úlohy jdou řešit prostou úvahou.*

Řešení:

$$\begin{array}{ll} & 0{,}5h = 30km \\ \text{Úvaha:} & 1h = 60km \\ & v = 60km/h \end{array}$$

Auto jede rychlostí 60 km/h.

2) Dana jde do obchodu rychlostí 5 km/h. Iveta vyšla ve stejnou dobu jako Dana, jde ale rychlostí 4 km/h. Cesta je dlouhá 500 m. O kolik minut bude Dana v obchodě dříve?

Metodická poznámka: *Ve druhém příkladu by měl žák vzoreček využít. Jde o klasický příklad, kde Dana i Iveta jdou po stejné cestě. Žák by si měl uvědomit, že vyšly ve stejný čas, ale každá jinou rychlostí.*

Řešení:

$$\begin{array}{ll} & v_D = 5km/h \\ \text{Dana} & s_D = 500m = 0{,}5km \\ & t_D = ? \end{array} \qquad \begin{array}{ll} & v_I = 4km/h \\ \text{Iveta} & s_I = 500m = 0{,}5km \\ & t_I = ? \end{array}$$

$$t_I = \frac{s_I}{v_I} \qquad t_D = \frac{s_D}{v_D}$$

$$t_I = \frac{0{,}5}{4} \qquad t_D = \frac{0{,}5}{5}$$

$$t_I = 0{,}125h = 7{,}5\min \qquad t_D = 0{,}1h = 6\min$$

$$7{,}5\min - 6\min = 1{,}5\min$$

Dana přijde do obchodu dříve o 1,5 min.

3) Jirka vyjede na kole v 7:00 rychlostí 15 km/h. Tonda vyjede ve 13:00 po stejné cestě na motorce rychlostí 60 km/h. V kolik hodin Tonda dojede Jirku? Kolik km ujeli?

Metodická poznámka: *Ve třetím příkladu by měl žák sestavit rovnice k příkladu, kde Tonda i Jirka jedou po stejné cestě, ale každý vyjel v jinou dobu. Úkolem žáka je pracovat s veličinou času a uvědomit, že dráhy, které Jirka i Tonda ujeli, jsou stejné.*

Řešení:

	$v_J = 15 km/h$		$v_T = 60 km/h$
Jirka	$s_J = s$	Tonda	$s_T = s$
	$t_J = t + 6$		$t_T = t$

$$s = s$$
$$v_J \cdot t_J = v_T \cdot t_T$$
$$15 \cdot (t+6) = 60 \cdot t$$
$$15t + 90 = 60t$$
$$45t = 90$$
$$t = 2$$

$$13:00 + 2h = 15:00$$

Tonda dojede Jirku v 15:00.

$$s = v_J \cdot t_J$$
$$s = 15 \cdot (2+6)$$
$$s = 120 km$$

Tonda s Jirkou ujeli 120 km.

4) U horské chaty nám trenér řekl: „Půjdeme-li dál tímto pohodlným tempem 4 km za hodinu, přijdeme na nádraží 45 minut po odjezdu našeho vlaku.“
   Pak ukázal na skupinu, která nás právě míjela: „Ti využívají holí, a tak dosahují průměrné rychlosti 6 km za hodinu. Na nádraží budou již půl hodiny před odjezdem našeho vlaku.“
   Jak daleko je nádraží od horské chaty? (Volfová; MO, 2013)

Metodická poznámka: *Ve čtvrtém příkladu by měl žák sestavit rovnici vhodnou pro situaci, kde dvě skupiny jdou za sebou po stejné cestě, každá jinou rychlostí. Žák by si měl uvědomit, že dráhy obou skupin jsou shodné a pracovat s jednotkou času.*

Řešení:

my $v_M = 4km/h$, $s_M = s$, $t_M = t + 45\min = t + 0{,}75$

druhá skupina $v_D = 6km/h$, $s_D = s$, $t_D = t - 0{,}5$

$$s = s$$
$$v_M \cdot t_M = v_D \cdot t_D$$
$$4 \cdot (t + 0{,}75) = 6 \cdot (t - 0{,}5)$$
$$4t + 3 = 6t - 3$$
$$2t = 6$$
$$t = 3$$

$$s = v_M \cdot t_M$$
$$s = 4 \cdot (3 + 0{,}75)$$
$$s = 15km$$

Nádraží je od horské chaty vzdálené 15 km.

6.10. PRACOVNÍ LIST 10

1) Maminka poslala Johanku pro nákup. Dala jí 50 Kč a řekla, že musí přinést 35 kousků pečiva. Když Johanka přišla do obchodu, tak zjistila, že rohlík stojí 1 Kč a houska 2 Kč. Kolik Johanka přinese domů rohlíků a kolik housek, aby utratila celou částku od maminky?

Metodická poznámka: *První příklad je určen k zopakování si sestavování soustavy jednoduchých rovnic podle zadaných podmínek.*

Řešení:

rohlík ……. r

houska ……. h

$$r + h = 35 \quad \Rightarrow \quad r = 35 - h$$
$$1 \cdot r + 2 \cdot h = 50$$

$$35 - h + 2h = 50$$
$$h = 15$$

$$r = 35 - h$$
$$r = 35 - 15$$
$$r = 20$$

Johanka koupila 20 rohlíků a 15 housek.

2) Paní učitelka zarezervovala v hotelu 9 pokojů pro 29 dětí. Některé pokoje jsou čtyřlůžkové, některé třílůžkové. Kolik kterých pokojů bylo, když nezbylo ani jedno lůžko?

Metodická poznámka: *Ve druhém příkladu je úkolem žáka sestavit soustavu rovnic, kde bude využívat násobení neznámých a je nutné, aby správně označil obě veličiny.*

Řešení:

třílůžkové pokoje ……. x

čtyřlůžkové pokoje ……. y

$x + y = 9 \quad \Rightarrow x = 9 - y$

$3x + 4y = 29$

$3 \cdot (9 - y) + 4y = 29$

$27 - 3y + 4y = 29$

$y = 2$

$x = 9 - y$

$x = 9 - 2$

$x = 7$

Paní učitelka zarezervovala 7 třílůžkových a 2 čtyřlůžkové pokoje.

3) Ondřej si šetří na novou hru na PS4. Do prasátka si dává vždy jen pětikoruny, desetikoruny a dvacetikoruny. Poté, co hra vyšla, tak vysypal prasátko a našel v něm 113 mincí v celkové hodnotě 1360 Kč. Když začal počítat, zjistil, že pětikorun je o 8 méně než dvacetikorun. Kolik měl Ondřej jednotlivých mincí?

Metodická poznámka: *Ve čtvrtém příkladu se předpokládá, že žák sestaví soustavu tří rovnic o třech neznámých, které jsou zaměřené na násobení, a správně určí počáteční veličiny pro výpočet. Žák by si měl uvědomit, že pro správnou odpověď jsou potřeba znát všechny hodnoty x, y, z.*

Řešení:

pětikoruny ……. x; desetikoruny ……. y; dvacetikoruny ……. z

$x + y + z = 113$

$5x + 10y + 20z = 1360$

$x + 8 = z$

$x + y + x + 8 = 113$

$5x + 10y + 20 \cdot (x + 8) = 1360$

$2x + y = 105 \quad \Rightarrow \quad y = 105 - 2x$

$5x + 10y + 20x + 160 = 1360$

$25x + 10 \cdot (105 - 2x) = 1200$

$25x + 1050 - 20x = 1200$

$5x = 150$

$x = 30$

$y = 105 - 2x$

$y = 105 - 2 \cdot 30$

$y = 105 - 60$

$y = 45$

$z = x + 8$

$z = 30 + 8$

$z = 38$

Ondřej si našetřil 30 pětikorun, 45 desetikorun a 38 dvacetikorun.

4) Jirka koupil dvě čokolády v obchodě naproti škole. Michal si koupil stejné dvě čokolády v obchodě za školou a Ivan si koupil jednu takovou čokoládu, ale ve školním bufetu. Cena zakoupených čokolád je o 6 Kč vyšší, než kdyby chlapci nakoupili všech 5 čokolád v obchodě naproti škole, a je o 6,50 Kč nižší, než kdyby chlapci nakupovali jen v obchodě za školou. Ve školním bufetu prodávají čokoládu za 19,50 Kč. Kolik zaplatili kluci za všech pět čokolád dohromady? Kolik stojí jedna čokoláda v obchodě za školou?

(MO, 2008)

Metodická poznámka: *Ve čtvrtém příkladu by měl žák vytvořit tři rovnice o třech neznámých, přičemž veličina „z" je nám známá od počátku. Je důležité, aby si byl žák vědom přesného znění otázky a sestavil správné rovnice pro řešení.*

Řešení:

naproti škole ……. x

za školou ……. y

ve školním bufetu ……. z

$$2x + 2y + z = 5x + 6$$
$$2x + 2y + z = 5y - 6{,}50$$
$$z = 19{,}50$$

$$3x - 2y = 13{,}50 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{13{,}50 + 2y}{3}$$
$$2x - 3y = -26$$

$$2 \cdot \frac{13{,}50 + 2y}{3} - 3y = -26 \quad / \cdot 3$$
$$27 + 4y - 9y = -78$$
$$5y = 105$$
$$y = 21 Kč$$

$$x = \frac{13{,}50 + 2y}{3}$$
$$x = \frac{13{,}50 + 2 \cdot 21}{3}$$
$$x = 18.50 Kč$$

$$2x + 2y + z =$$
$$2 \cdot 18{,}5 + 2 \cdot 21 + 19{,}5 =$$
$$37 + 42 + 19{,}5 = 98{,}50 Kč$$

Kluci dohromady zaplatili 98,50 Kč. Jedna čokoláda v obchodě za školou stojí 21 Kč.

7. Akční výzkum

Na žácích deváté třídy byl proveden akční výzkum, který se skládal ze tří částí. Jednalo se o ZŠ Husova, která se nachází v Jihočeském kraji ve městě Písek. Učitelkou matematiky je v této třídě Mgr. Hana Kovářová, která ji vede již čtvrtým rokem. Ve třídě se nachází 24 žáků, z toho je 14 chlapců a 10 dívek. Všichni žáci se zúčastnili všech částí výzkumu. Žáci předem věděli, že se jedná o výzkum pro účel diplomové práce. Kvůli zachování anonymity byla žákům přidělena čísla od 1 do 24.

V první části výzkumu žáci dostali jeden z příkladů úrovně matematické olympiády, který se nachází v předchozí části diplomové práce i v její příloze. Konkrétně se jednalo o čtvrtý příklad sedmého pracovního listu. Na vyřešení příkladu měli 45 minut a jedinou povolenou pomůckou byl kalkulátor.

Čtvrtý příklad sedmého pracovního listu:
Pan Rychlý a pan Louda ve stejnou dobu vyšli na tutéž turistickou túru, jen pan Rychlý ji šel shora z horské chaty a pan Louda naopak od autobusu dole v městečku a chatu nahoru. V 10 hodin se na trase míjeli. Pan Rychlý spěchal a již ve 12 hodin byl v cíli. Naopak pan Louda postupoval pomalu, a tak dorazil k chatě až v 18 hodin. V kolik hodin pánové vyrazili na cestu, víme-li, že každý z nich šel celou dobu svou stálou rychlostí? (Volfová; MO, 2011)

Během následující vyučovací hodiny žáci společně s paní učitelkou propočítali celý pracovní list sedm včetně návodných úloh. Každý mohl zjistit, kde dělal chyby a mohl si vyzkoušet, zda by pomocí návodných úloh čtvrtý příklad vypočítal.

Druhá část výzkumu byla věnována návodným úlohám nového příkladu. Jednalo se o pracovní list devět a příklady jedna až tři. Se všemi třemi příklady byli žáci seznámeni, sami je počítali a v závěru hodiny jim paní učitelka všechny tři návodné úlohy vysvětlila a zodpověděla dotazy žáků.

Ve třetí části výzkumu jsme zjišťovali, zda nastane u žáků nějaké zlepšení, v případě, že si žáci propočítají návodné příklady k úlohám úrovně matematické olympiády. Žáci tedy dostali čtvrtý příklad devátého pracovního listu. Na vyřešení příkladu měli 45 minut a jedinou povolenou pomůckou byl kalkulátor.

Čtvrtý příklad devátého pracovního listu:

U horské chaty nám trenér řekl: „Půjdeme-li dál tímto pohodlným tempem 4 km za hodinu, přijedeme na nádraží 45 minut po odjezdu našeho vlaku.“

Pak ukázal na skupinu, která nás právě míjela: „Ti využívají holí, a tak dosahují průměrné rychlosti 6 km za hodinu. Na nádraží budou již půl hodiny před odjezdem našeho vlaku.“

Jak daleko je nádraží od horské chaty? (Volfová; MO, 2013)

Přehled žáků a jejich úspěšnost je vyjádřená v tabulce 1.

ČÍSLO ŽÁKA	CHLAPEC / DÍVKA	ÚSPĚŠNOST V PRVNÍ ČÁSTI	ÚSPĚŠNOST V TŘETÍ ČÁSTI	ZNÁMKA Z MATEMATIKY
1	chlapec	NE	NE	3
2	chlapec	NE	ANO	4
3	chlapec	ANO	ANO	1
4	chlapec	NE	ANO	3
5	chlapec	ANO	ANO	1
6	dívka	NE	ANO	3
7	chlapec	NE	ANO	4
8	chlapec	ANO	ANO	1
9	dívka	NE	NE	3
10	dívka	NE	ANO	2
11	chlapec	NE	ANO	3
12	chlapec	NE	NE	3
13	dívka	NE	NE	4
14	dívka	NE	ANO	2
15	dívka	NE	ANO	2
16	chlapec	NE	NE	4
17	chlapec	ANO	NE	1
18	dívka	NE	NE	4
19	dívka	NE	NE	3
20	dívka	NE	NE	4
21	dívka	NE	ANO	4
22	chlapec	NE	ANO	2
23	chlapec	NE	NE	4
24	chlapec	NE	NE	3

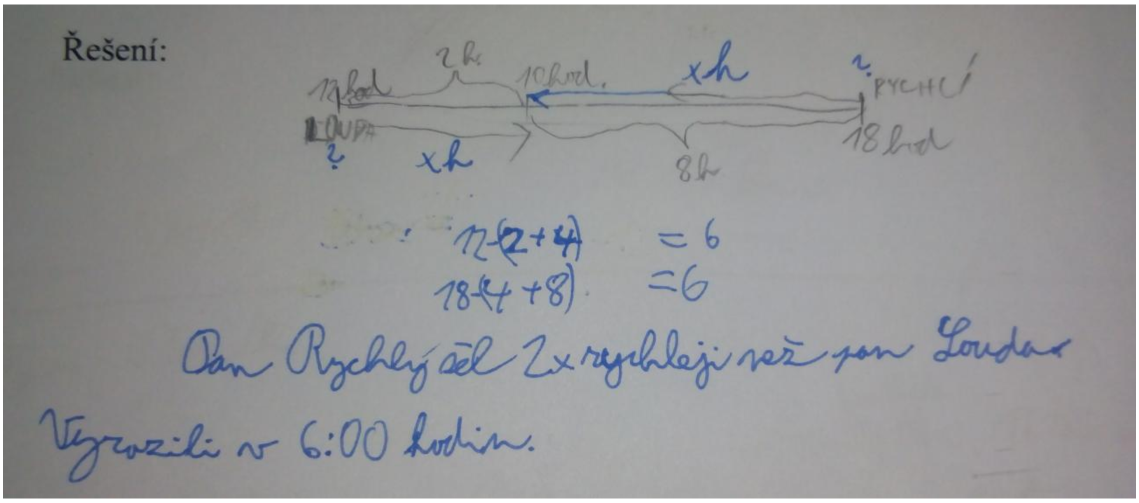
Tabulka 1.

Třída, ve které byl výzkum proveden, má známkový průměr z pololetí deváté třídy 2,8. Ve třídě se nachází čtyři žáci s hodnocením výborně, čtyři žáci chvalitebně, osm žáků dobře a osm žáků dostatečně.

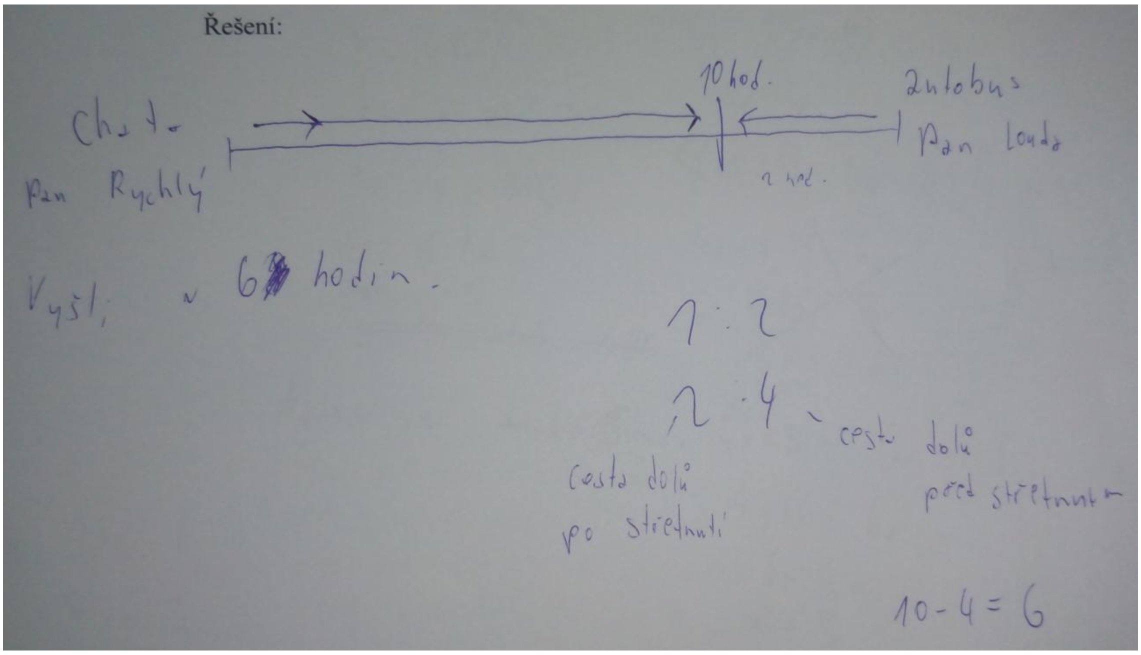
7.1. První část výzkumu

V první části výzkumu vypočítali příklad všichni žáci, kteří byli na vysvědčení hodnoceni známkou výborně. Jednalo se o čtyři chlapce.

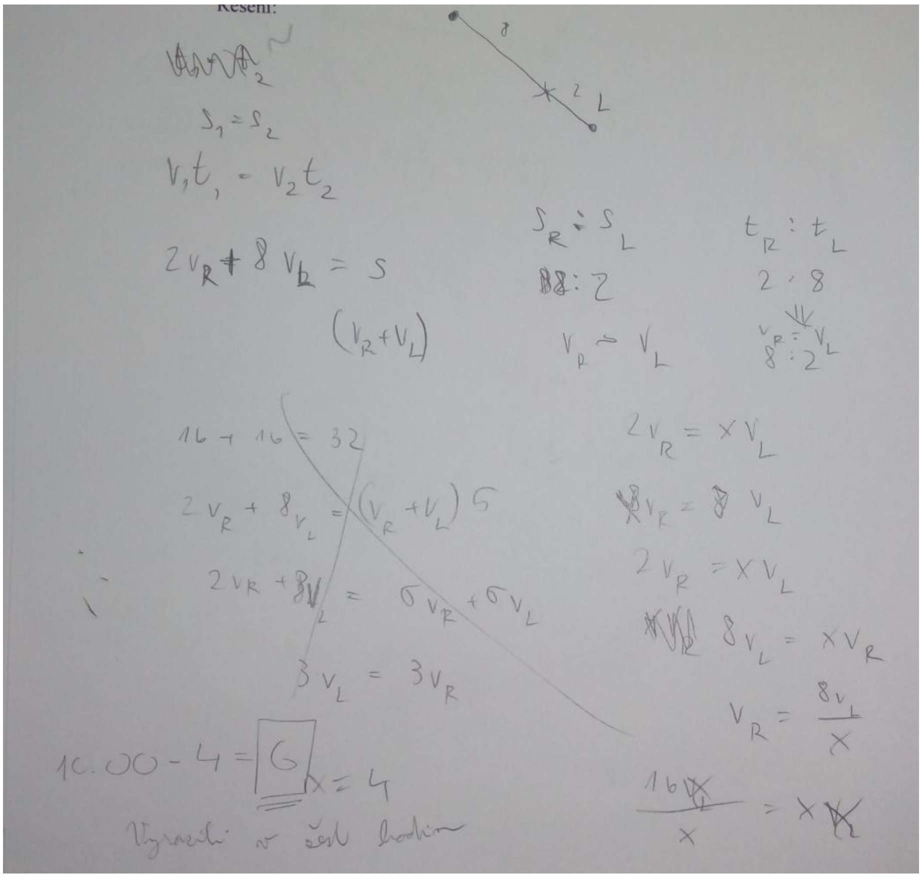
Řešení chlapce číslo 3.



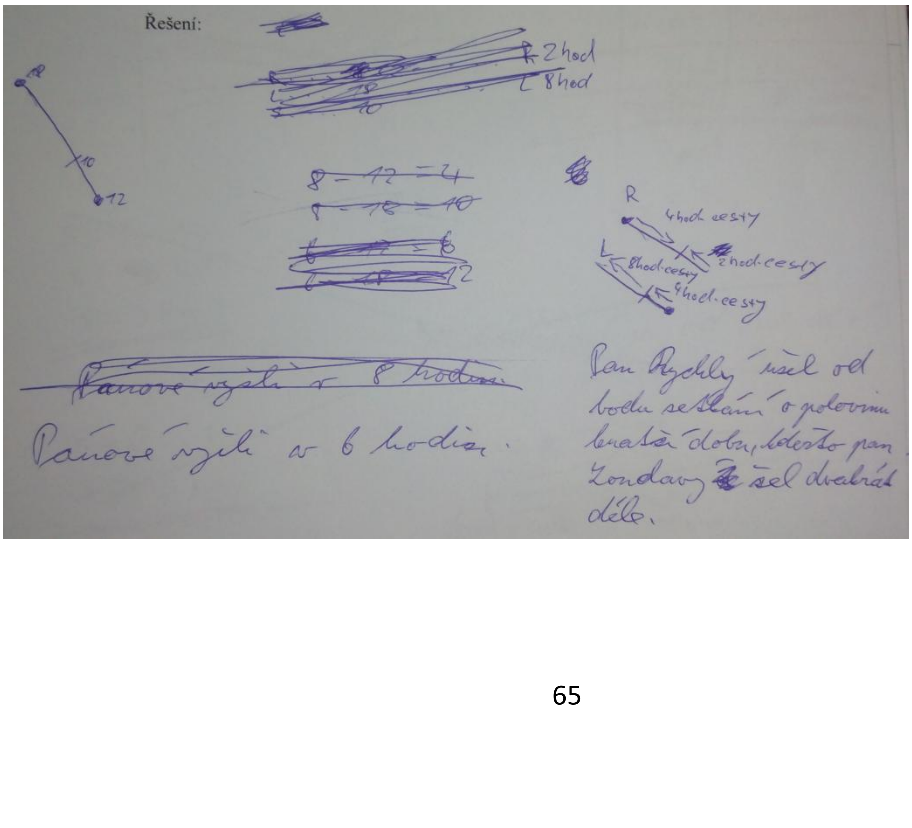
Řešení chlapce číslo 8.



Řešení chlapce číslo 5.



Řešení chlapce číslo 17.



Každý žák řešil příklad jiným způsobem. U výpočtů je vidět rozdílnost pohledu na zadání příkladu. Velmi nás zaujalo řešení pomocí poměru, které se u chlapců objevilo, a také řešení jednoduchou úvahou.

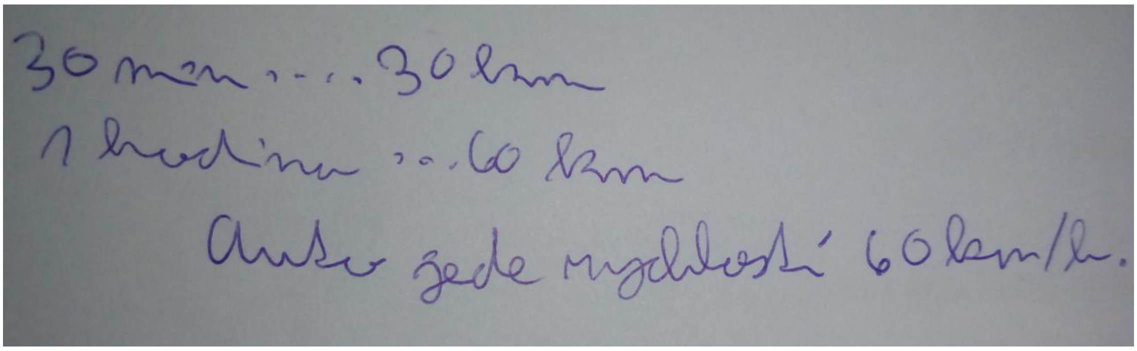
7.2. Návodné úlohy – druhá část výzkumu

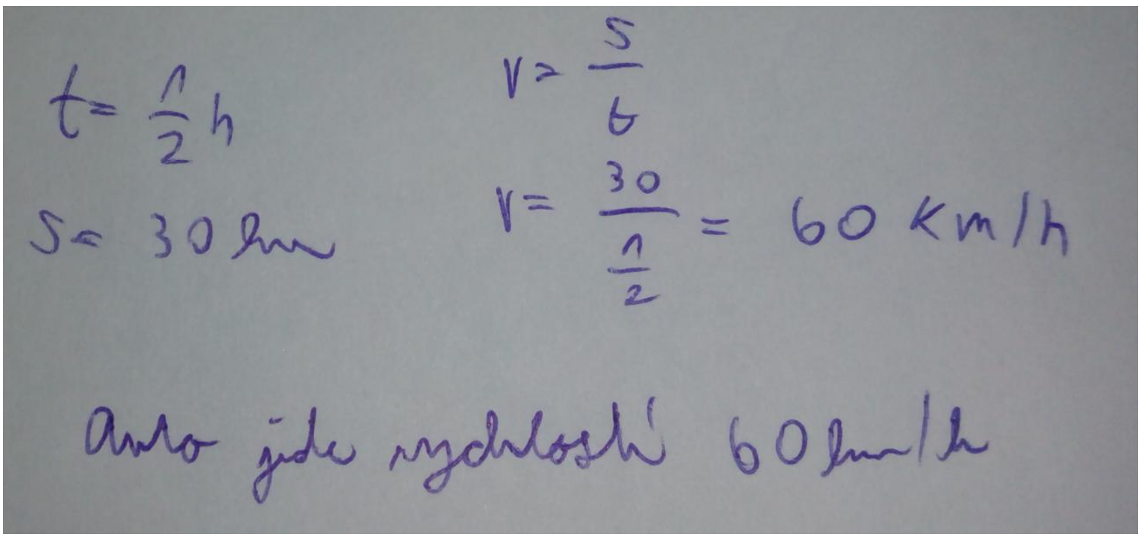
Ve druhé části výzkumu, což jsou návodné úlohy pro třetí část, se řešení žáků často opakovalo, což mohlo být způsobeno tím, že někteří žáci čekali na vysvětlení učitele nebo tím, že se jedná o klasické učebnicové příklady, u kterých mají žáci řešení nacvičené.

Jako ukázku jsem vybrala pro každý příklad dvě řešení, která žáci použili.

První příklad:

Auto jede 1/2 hodiny a ujelo 30 km. Jakou rychlostí auto jede?

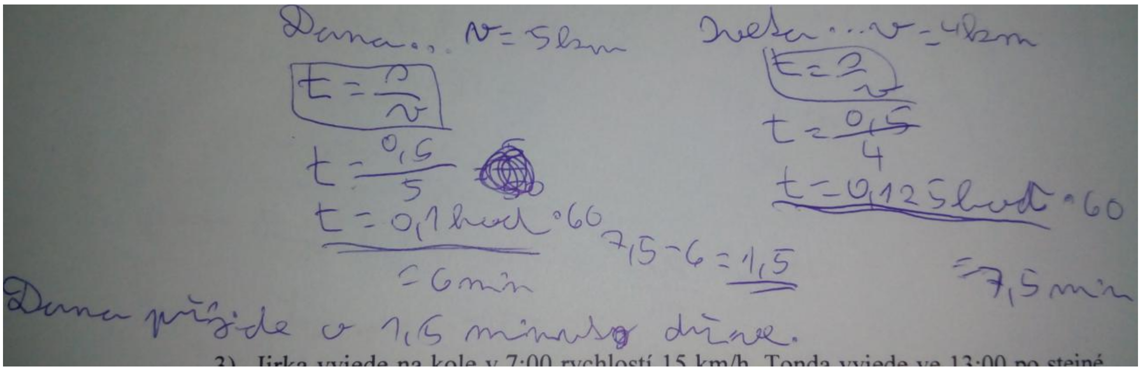


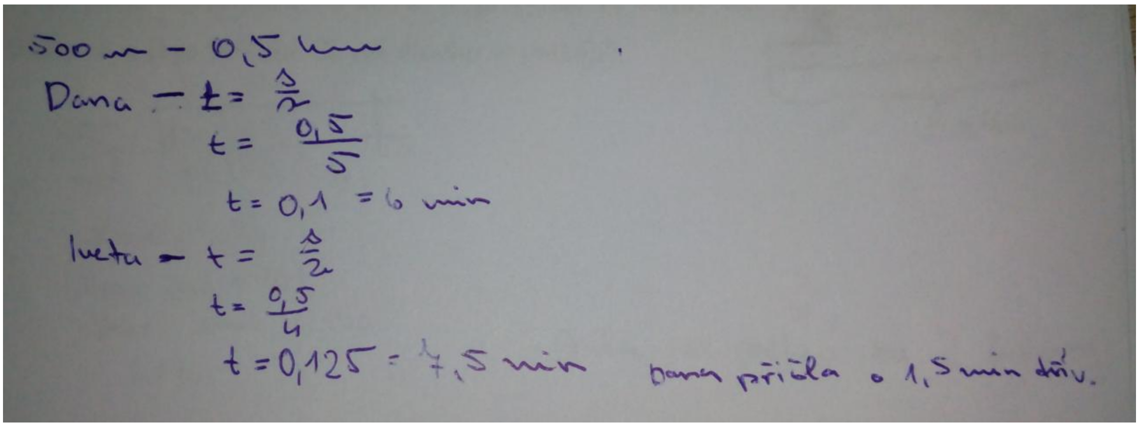


První žák použil úvahu pro výpočet příkladu, druhý si dosadil hodnoty do vzorečku pro výpočet úloh o pohybu. Obě řešení jsou správná.

Druhý příklad:

Dana jde do obchodu rychlostí 5 km/h. Iveta vyšla ve stejnou dobu jako Dana, jde ale rychlostí 4 km/h. Cesta je dlouhá 500 m. O kolik minut bude Dana v obchodě dříve?

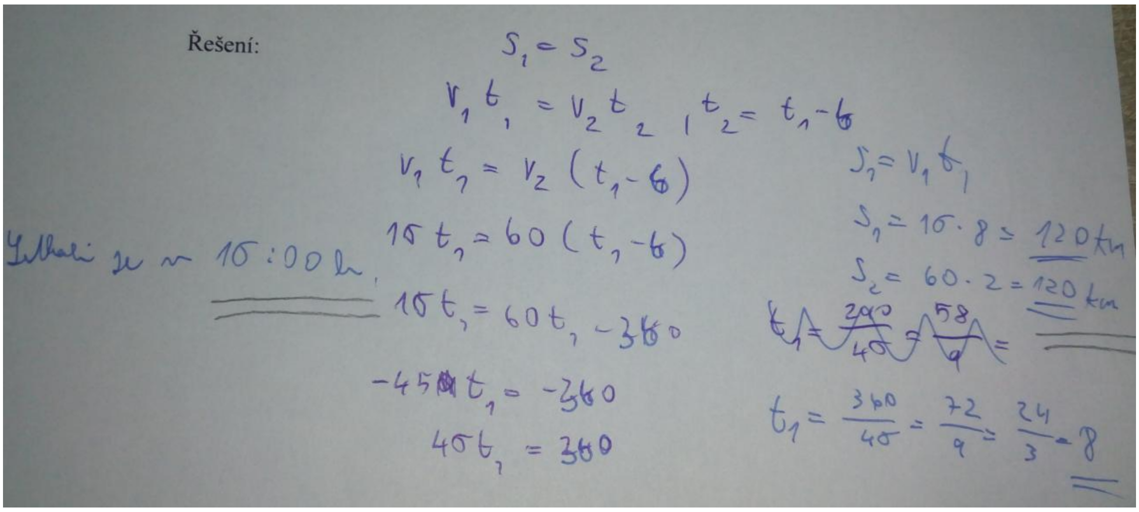


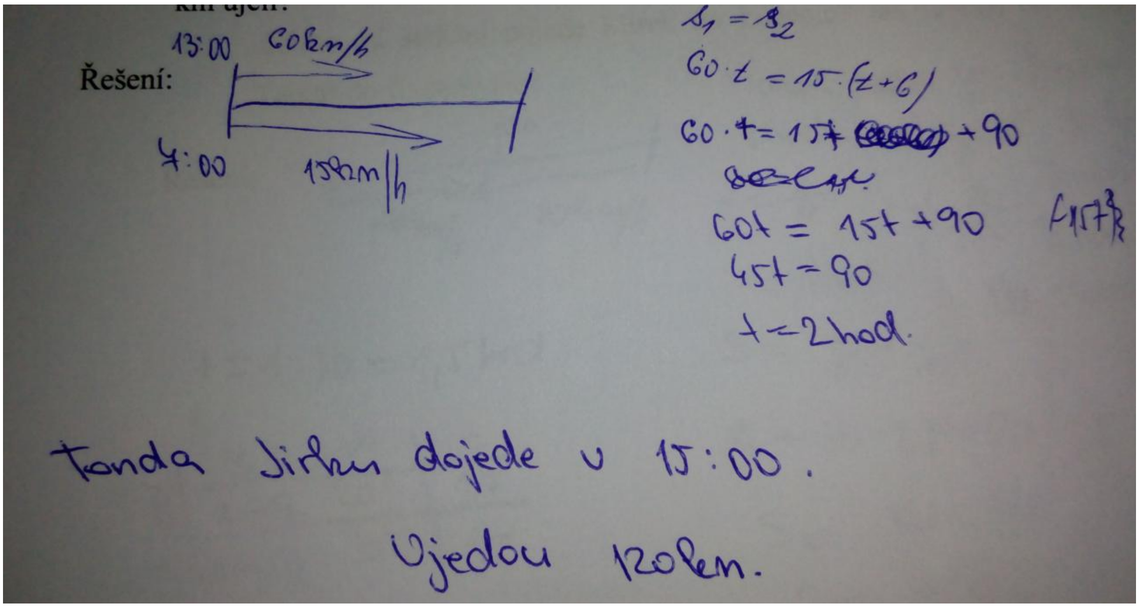


Druhý příklad řešili všichni žáci téměř stejně. Ti, kteří příklad vypočítali správně, nejprve zjistili, jak dlouho šla trasu Dana, poté, jak dlouho šla trasu Iveta, a na závěr od sebe dvě výsledné hodnoty odečetli.

Třetí příklad:

Jirka vyjede na kole v 7:00 rychlostí 15 km/h. Tonda vyjede ve 13:00 po stejné cestě na motorce rychlostí 60 km/h. V kolik hodin Tonda dojede Jirku? Kolik km ujeli?





Ve třetím příkladu se řešení žáků také opakovalo. Jedná se o klasický příklad, kdy můžeme předpokládat, že ho žáci budou řešit tímto způsobem. Každý žák počítal, v kolik Tonda dojede Jirku, ale zapomněli počítat, kolik kilometrů ujeli. Nepředpokládáme, že se žáci nedobrali správného výsledku z toho důvodu, že by nevěděli, jak tento příklad spočítat, jelikož postup je podobný – dosazení do stejného vzorečku. Spíše si myslíme, že žáci nevěnovali dostatečnou pozornost zadání. Počítali první problém, který je v zadání, a pak se už nepodívali dál. Domníváme se, že se jedná o nižší čtenářskou gramotnost u těchto žáků.

7.3. Třetí část výzkumu

Jak je vidět v tabulce 1., úspěšnost při řešení příkladu úrovně matematické olympiády se výrazně zlepšila. Čtvrtý příklad devátého pracovního listu správně vyřešilo 13 žáků, z toho 8 chlapců a 5 dívek. Úspěšné řešení měli žáci všech známkových kategorií. Čtvrtý příklad vyřešili bez chyby tři žáci s pololetním hodnocením výborně, čtyři žáci s hodnocením chvalitebně, tři žáci s hodnocením dobře a dokonce tři žáci s hodnocením dostatečně.

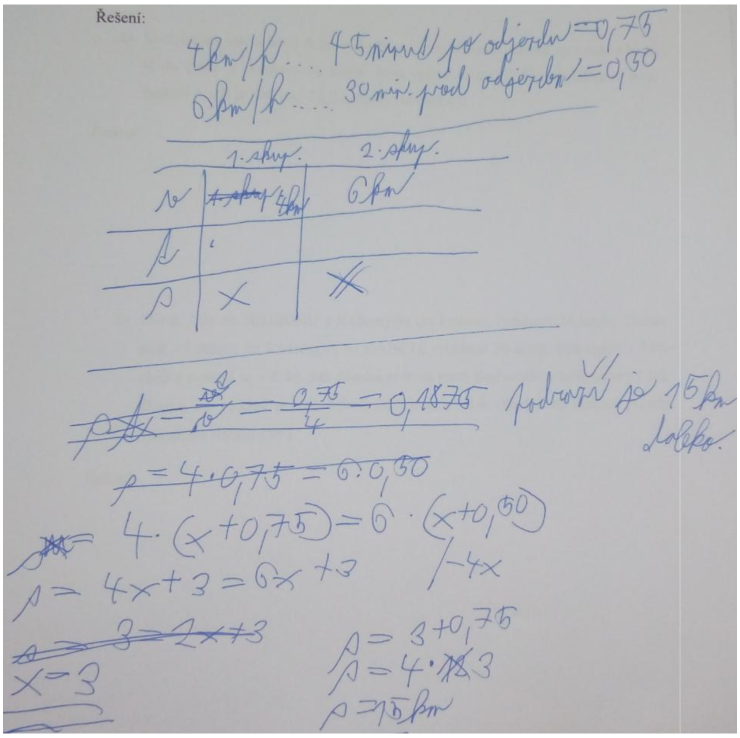
Čtvrtý příklad.

U horské chaty nám trenér řekl: „Půjdeme-li dál tímto pohodlným tempem 4 km za hodinu, přijdeme na nádraží 45 minut po odjezdu našeho vlaku.“

Pak ukázal na skupinu, která nás právě míjela: „Ti využívají holí, a tak dosahují průměrné rychlosti 6 km za hodinu. Na nádraží budou již půl hodiny před odjezdem našeho vlaku.“

Jak daleko je nádraží od horské chaty? (Volfová; MO, 2013)

Ukázky řešení čtvrtého příkladu:



Řešení:

1. skupina ... 4 km/h před
přijedou .... 45 min odjezdu
2. skupina ... 6 km/h
přijedou .... 30 min před odjezdu

$t = 1{:}45 = 1{,}75$
$t = 1{:}30 = 1{,}5$

	s	v	t
1. skupina	1,75·4	4	1,75
2. skupina	1,5·6	6	1,5

$t_1 = x + 0{,}75$

$t_2 = x - 0{,}5$

$s_1 = s_2$

$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$

$4 \cdot (x + 0{,}75) = 6 \cdot (x - 0{,}5)$

$4x + 3 = 6x - 3 \quad /+3$

$4x + 6 = 6x \quad /-4x$

$6 = 2x \quad /:2$

$x = 3$

$t_1 = 3 + 0{,}75$

$t_1 = 3{,}75$

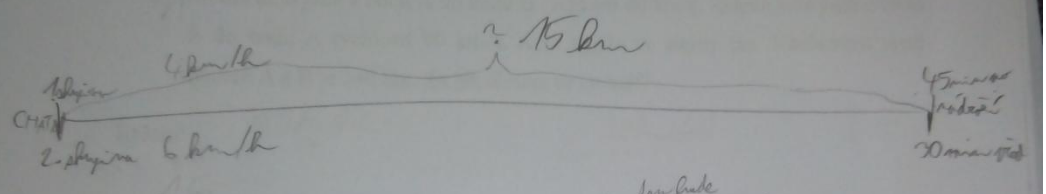
$s = v \cdot t$

$s = 4 \cdot 3{,}75$

$s = 15$ km

je daleko 15 km.

Řešení:

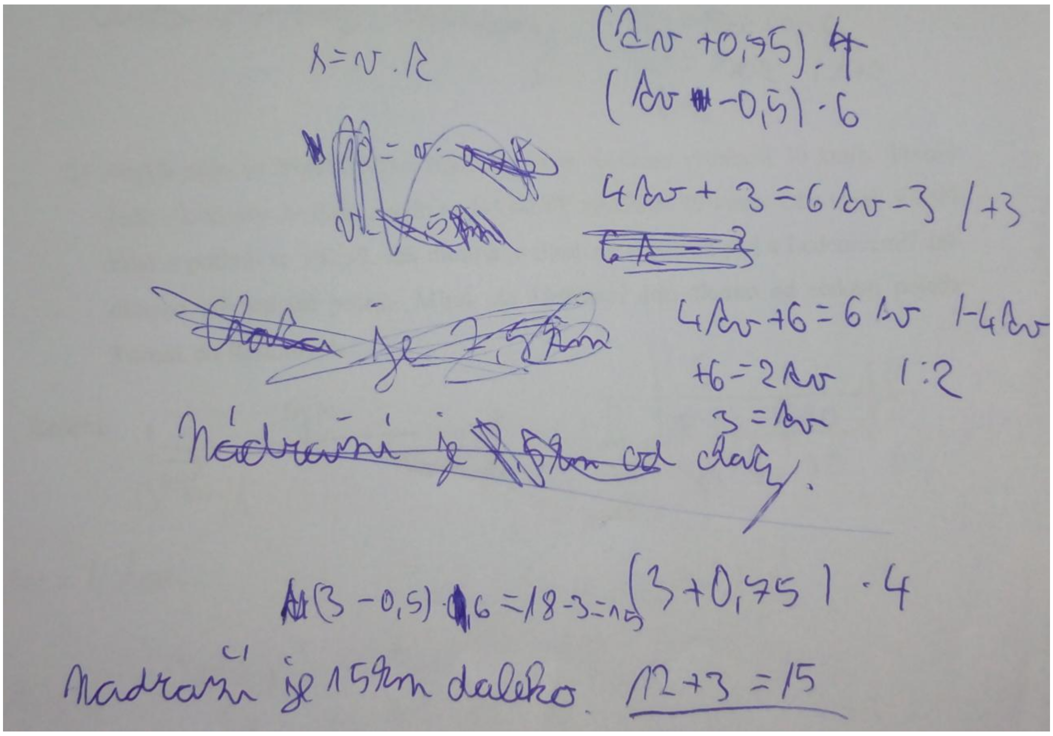


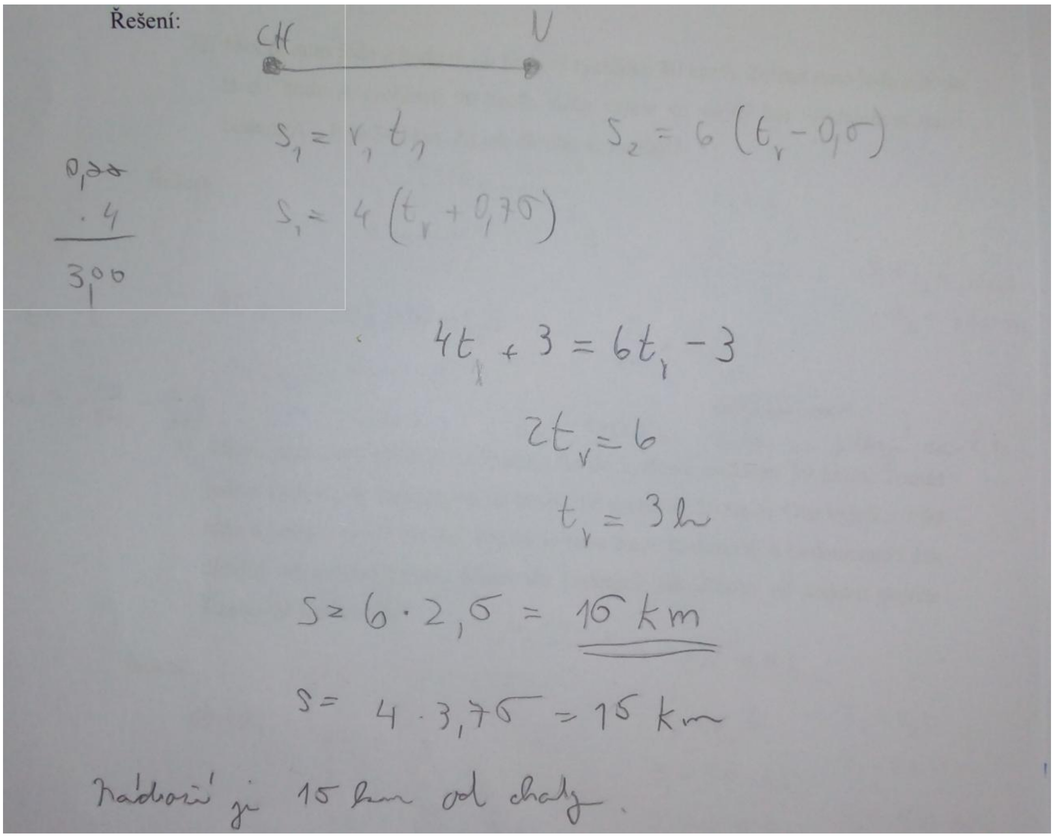
2. skupina tam bude rychleji o 1 h 15 min.

10 km 1. skupina 2 h 30 min — 15 km 1. skupina 3 h 45 min
10 km 2. skupina 1 h 40 min — 15 km 2. skupina 2 h 30 min

Nejprve jsem zkusil dosadit 10 km a vyšel mi rozdíl 50 min, ale já potřeboval ještě 25 min, což je polovina, a tak jsem přišel na 15 km.

nádraží je od chaty 15 km.





Způsoby řešení byly různé, někteří žáci si vytvořili tabulku, jiní sestavovali rovnice okamžitě. Našlo se i řešení jednoduchou úvahou.

7.4. Závěr výzkumu

Pro účely výzkumu jsme spolupracovali se 24 žáky. Mezi výsledky jednotlivých výzkumů, které jsme provedli, nastalo znatelné zlepšení. První úlohu vypočetli 4 žáci, druhou úlohu spočítalo již 13 žáků.

Toto zlepšení nás dovádí k závěru, že využijeme-li nestandardního přístupu výuky u průměrného žáka, který by se v normálním případě nezúčastnil matematické olympiády, může i u něj nastat pokrok a tento žák by mohl vyřešit matematickou úlohu úrovně matematické olympiády. Ve výzkumu jsme vyzkoušeli, že za nestandardní přístup může být považována například sada návodných úloh se vzrůstající obtížností. Nelze však tvrdit, že by to platilo u všech příkladů a všech žáků. Zjistili jsme, že někteří žáci nebyli úspěšní ani ve druhé úloze, z tohoto důvodu nemůžeme tento postup zobecnit pro všechny žáky. Počet úspěšných žáků se však zvýšil o devět, což nás dovedlo k závěru, že má smysl se žáky pracovat i pomocí nestandardních postupů a zlepšovat tím jejich matematické dovednosti různými způsoby.

ZÁVĚR

Diplomová práce se zabývala slovními úlohami, které se řeší rovnicemi, její součástí je i teoretické zpracování okruhů vztahujících se k této tématice. Konkrétně byly zpracovány kapitoly o matematické gramotnosti, matematicky nadaných dětech, vzdělávání mimořádně nadaných žáků podle RVP a matematické olympiádě.

Pro účely práce jsme vytvořili deset pracovních listů, které obsahují čtyři slovní úlohy. Poslední z úloh je vždy úrovně matematické olympiády a předchozí tři úlohy jsou k ní návodné. Slovní úlohy jedna až tři jsme vytvořili samostatně a čtvrtá úloha byla vždy převzata z oficiálních stránek matematické olympiády nebo učebních skript *Metody řešení úloh*.

Některé z vytvořených úloh jsme následně dali k řešení žákům na ZŠ Husova v Písku. V prvním kole výzkumu měli žáci za úkol vypočítat jeden z příkladů úrovně matematické olympiády, úspěšně tuto úlohu vyřešili čtyři žáci. Před řešením dalšího příkladu stejné úrovně dostali žáci k vypracování návodné úlohy, které s nimi následně vyučující prodiskutovala a ujistila se, zda bylo řešení žáků správné. Po tomto procesu jsme dali žákům vyřešit úlohu, k níž měli k dispozici tyto návodné listy, poté uspělo třináct žáků. Při řešení druhé úlohy úrovně matematické olympiády uspělo oproti první, kterou žáci řešili bez předchozího propočítání návodných příkladů, o devět žáků více, zlepšení je tedy naprosto zřejmé. Můžeme říci, že návodné úlohy můžou některým žákům pomoci k vyřešení obtížnějších příkladů.

Návodné úlohy, které jsme v práci použili jako učební materiál pro výuku, se ověřily. Nestandardní způsob výuky se v tomto případě osvědčil, můžeme tedy předpokládat, že i jiný učební materiál, který standardně nenajdeme v učebnicích pro základní vzdělávání, by žákům mohl pomoci při řešení úloh vyšší úrovně.

Vzhledem k tomu, že se do výzkumu zapojilo 24 žáků, nelze tedy vytvářet jednoznačné závěry. I na tomto malém vzorku žáků se nám podařilo ukázat, že po vyřešení návodných úloh jsou někteří žáci schopni dobrat se správných výsledků u čtvrté úlohy úrovně matematické olympiády. Projevil se tedy značný nárůst správných odpovědí po vyřešení návodných úloh.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

1. Boček, L., Horák K. (2001): *50 let matematické olympiády*, Praha: Matfyzpress.

2. Hošpesová, A. a kol. (2011): *Matematická gramotnost a vyučování matematice*, České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

3. Hříbková, L. (2009): *Nadání a nadaní: pedagogicko-psychologické přístupy, modely, výzkumy a jejich vztah ke školské praxi*, Praha: Grada.

4. Leischner, P. (2014): *Metody řešení úloh*, České Budějovice: Jihočeská Univerzita v Českých Budějovicích.

5. MO. *Matematická olympiáda*. [Online]. [Citace: 2016-03-02.] http://mo.webcentrum.muni.cz/

6. Palečková, J., Tomášek V. (2003): *Učení pro zítřek: výsledky výzkumu OECD PISA 2003*, Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání - Divize nakladatelství Tauris.

7. RVP. *Upravený RVPZV s barevně vyznačenými změnami*. www.msmt.cz. [Online]. [Citace: 2016-03-20.] http://www.msmt.cz/vzdelavani/zakladni-vzdelavani/upraveny-ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani.

8. Sternberg, R. J. (2001): *Úspěšná inteligence: jak rozvíjet praktickou a tvůrčí inteligenci*, Praha: Grada.

9. Winebrenner, S., Espeland P. (c2001): *Teaching gifted kids in the regular classroom: strategies and techniques every teacher can use to meet the academic needs of the gifted and talented*, Minneapolis: Free Spirit Pub.

SEZNAM PŘÍLOH

PRACOVNÍ LIST - 1

1) Auto jede rychlostí 60 km/h, kolik km ujede za půl hodiny?

Řešení:

2) Lidé na raftu plují rychlostí 8 km/h, rychlost vody je 3 km/h. Jakou rychlostí by jel raft, kdyby voda stála? Jak rychle by se pohybovali proti proudu?

Řešení:

3) Aneta a Martin se chtějí setkat. Martinův byt je od Anetina domku 3 km. Oba součastně vyrazí v 17:00, Aneta jede na kole rychlostí 17 km/h, Martin na skateboardu rychlostí 13 km/h. V kolik hodin se setkají?

Řešení:

4) Vodáci plují se svou lodí po proudu řeky rychlosti 6km/h vzhledem ke břehu. Rychlost proudu je 2 km/h. V 10 hodin, zrovna když míjeli most, upadl jednomu z nich do vody klobouk. Ztrátu objevili až ve vzdálenosti 1, 5 km od mostu. Otočili se a pádlovali se stejným úsilím zpět proti proudu.
   Jak daleko byli od klobouku v okamžiku zjištěni ztráty?
   V kolik hodin dopluli ke klobouku? (Leischner, 2014)

Řešení:

PRACOVNÍ LIST - 2

1) Doplňte přirozená čísla do tabulky tak, aby součet čísel v každém řádku a každém sloupci byl 21.

2	**10**	
		6
	4	

Řešení:

2) Doplňte přirozená čísla do tabulky tak, že součet v každém řádku a sloupci je stejný.

a=6	**b**	**c**
d	**e**	**f**
g	**h**	**i**

e je o 3 větší než *c*,

g je o 3 větší než *e*,

a je polovina *c*,

d je polovina *c*.

Řešení:

3) Doplňte přirozená čísla do tabulky tak, že součet prvního řádku s prvními dvěma číslicemi druhého řádku (x, y) se rovná součtu třetího řádku s posledními dvěma číslicemi druhého řádku (y, z). Součet všech čísel v tabulce je 32. Číslo x je o 1 větší, než číslo y.

1	**2**	**6**
x	**y**	**z**
3	**1**	**6**

Řešení:

4) Doplňte do čtverce přirozená čísla tak, aby:
součet všech doplněných čísel byl 44,
součet čísel v každém čtverci o čtyřech čtverečkách byl stejný, nejmenší doplněné číslo bylo liché,
uprostřed čtverce bylo jednociferné číslo.

	7	
8		**4**
	2	

(MO, 2006)

Řešení:

PRACOVNÍ LIST - 3

1) Zahradník pěstuje růže, na každou sazenici potřebuje 3 kg zeminy a 0,5 kg hnojiva. Když květina vyroste má 3, 4 nebo 5 růží. Majitel hotelu si objedná 5 květin, z toho 3 květiny po 4 růžích, 1 květinu po 3 růžích a 1 květinu po 5 růžích. Celkem si od zahradníka odveze 21.5 kg. Kolik g váží jedna růže?

Řešení:

2) Veronika a Marek si rozdělili čokoládu. Když Veronika dá Markovi 3 kostičky čokolády, budou mít stejně. Když Marek dá Veronice 2 kostičky čokolády, bude mít Veronika 3x více čokolády než Marek. Kolik kostiček má čokoláda?

Řešení:

3) Karolína šla nakupovat a koupila bedýnku broskví a balíček jahod. Paní prodavačka jí prozradila, že nákup váží stejně jako bedýnka meruněk +1 kg. Když šel nakupovat Pavel, koupil bedýnku broskví a bedýnku meruněk. Dozvěděl se, že nákup váží stejně jako balíček jahod +3 kg. Kolik kg váží bedýnka broskví?

Řešení:

4) Zákazník vyvážející odpad do sběrného dvora je povinen zastavit naloženým autem na váze a po vykládce odpadu znovu. Rozdíl naměřených hmotností tak odpovídá vyvezenému odpadu. Pat a Mat chybovali. Při vážení naloženého auta se na váhu připletl Pat a při vážení vyloženého auta se tam místo Pata nachomýtl Mat. Vedoucí dvora si tak zaznamenal rozdíl 332 kg. Poté se na prázdnou váhu postavili společně vedoucí a Pat, posléze samotný Mat a váha ukázala rozdíl 86 kg. Dále se spolu zvážili vedoucí a Mat, poté samotný Pat a váha ukázala rozdíl 64 kg.

   Kolik vážil vyvezený odpad ve skutečnosti? (Šimůnek; MO, 2014)

Řešení:

PRACOVNÍ LIST - 4

1) Janička slaví 11 let od svého narození. Když se narodila, tak mamince bylo 27 let. Před kolika lety byla maminka 10x starší než Janička?

Řešení:

2) Babička koupila 40 kg ovoce. Jahody po 30 Kč/kg. Jablíčka po 25 Kč/kg. Celkem platila 1060 Kč. Kolik kg jahod a kolik kg jablíček babička koupila?

Řešení:

3) Paní učitelka měla 3720 Kč a tak objednala dětem penály. Pro kluky se Spidermanem za 120 Kč. Pro holky s vílou Zvonilkou za 150 Kč. Balíček, který přišel, ale stál 3840 Kč. Paní učitelka po rozbalení zjistila, že jí firma prohodila počty penálů. Kolik bylo ve třídě chlapců a kolik dívek?

Řešení:

4) V pohádkovém údolí žili trojhlaví a šestihlaví draci. Dohromady měli 117 hlav a 108 nohou. Každý drak má 4 nohy. Zjistěte, kolik tam žilo trojhlavých a kolik šestihlavých draků. (MO, 2007)

Řešení:

PRACOVNÍ LIST - 5

1) Ve školce je 28 dětí. Holčiček je o 8 více než chlapečků. Kolik je ve školce chlapečků a kolik holčiček?

Řešení:

2) Ve škole je 123 osob, učitelé, učitelky a děti. Učitelek je o 10 více než učitelů. Dětí je o 17 méně než, šestinásobek dospělých. Kolik je ve škole učitelů, učitelek a dětí?

Řešení:

3) Dědeček má babičce u domečku připravit obdélníkový záhonek. Když na šířce záhonku přidá 4 m a na délce ubere 2 m, záhonek bude mít stejný obsah. Jestliže to dědeček ale poplete a na délce přidá 4 m a na šířce 2 m ubere, bude obsah záhonku o 6 m^2 větší. Jaké jsou rozměry původního záhonku?

Řešení:

4) Adam s Evou hráli šachy. Adam vyhrál a utěšoval Evu: „To víš, já hraji šachy dlouho, dvakrát déle než ty!“

   Eva se zlobila: „Ale minule jsi říkal, že hraješ třikrát déle!“

   Adam se divil: „To že jsem říkal? A kdy to bylo?“

   „Předloni!“

   „No tak to ano, mluvil jsem pravdu – a dnes také.“

   Jak dlouho hraje Adam šachy? (Volfová; MO, 2009)

Řešení:

PRACOVNÍ LIST - 6

1) Kamilka měří 110 cm. Je přesně ve 2/3 výšky své maminky. Kolik měří maminka?

Řešení:

2) Honzík bude vyrábět vanilkovou, čokoládovou a jahodovou zmrzlinu. Vanilkové bude stejně jako jahodové a čokoládové dohromady. Čokoládové bude 2/3 jahodové. Celkem vyrobí 30 l zmrzliny. Kolik jahodové, čokoládové a vanilkové zmrzliny bude Honzík mít?

Řešení:

3) Děti přinesly na farmu jablka pro koně. První kůň dostal o 6 jablek víc než druhý kůň. Druhý kůň dostal 1/3 celku. Třetí kůň dostal 3/4 jablek co druhý kůň. Na čtvrtého koně zbyla pouhá čtyři jablka. Kolik jablek děti přinesly? Kolik jablek dostal každý kůň?

Řešení:

4) Milena nasbírala do košíku poslední spadlé ořechy a zavolala na partu kluků, ať se o ně podělí. Dala si ale podmínku: první si vezme 1 ořech a desetinu zbytku, druhý si vezme 2 ořechy a desetinu nového zbytku, třetí si vezme 3 ořechy a desetinu dalšího zbytku a tak dále. Takto se podařilo rozebrat všechny ořechy a přitom každý dostal stejně.
   Určete, kolik Milena nasbírala ořechů a kolik se o ně dělilo chlapců.
   (Volfová; MO, 2015)

Řešení:

PRACOVNÍ LIST - 7

1) Auto jede rychlostí 90 km/h. Za jak dlouho ujede vzdálenost 45 km?

Řešení:

2) Modré auto jede z bodu A do bodu B rychlostí 80 km/h. Zelené auto jede z bodu B do bodu A rychlostí 90 km/h. Auta vyjela ve stejný čas. Vzdálenost mezi body A a B je 340 km. Za jak dlouho se potkají?

Řešení:

3) Mirek jede na SIMSONU z Radomyšle do Ledenic rychlostí 30 km/h. Tomáš jede z Ledenic do Radomyšle na BABETĚ rychlostí 20 km/h. Oba vyjeli v 7:00 ráno a potkali se v 8:30. Jak dlouhá je trasa mezi Radomyšlí a Ledenicemi? Jak dlouho od setkání pojede Mirek do Ledenic? Jak dlouho od setkání pojede Tomáš do Radomyšle?

Řešení:

4) Pan Rychlý a pan Louda ve stejnou dobu vyšli na tutéž turistickou túru, jen pan Rychlý ji šel shora z horské chaty a pan Louda naopak od autobusu dole v městečku na chatu nahoru. V 10 hodin se na trase míjeli. Pan Rychlý spěchal a již ve 12 hodin byl v cíli. Naopak pan Louda postupoval pomalu, a tak dorazil k chatě až v 18 hodin. V kolik hodin pánové vyrazili na cestu, víme-li, že každý z nich šel celou dobu svou stálou rychlostí? (Volfová; MO, 2011)

Řešení:

PRACOVNÍ LIST - 8

1) Eliška šla na výlet dlouhý 27 km. V pondělí ušla o 2 km více než v úterý. Ve středu ušla už jen polovinu co v úterý. Kolik km ušla jednotlivé dny?

Řešení:

2) Maruška si koupila 7 kefírů a 4 jogurty. Za celý nákup platila 231 Kč. Zjistila, že krabička kefíru je o 11 Kč dražší než kelímek jogurtu. Kolik Kč stojí jogurt a kolik kefír?

Řešení:

3) Baruška s Markétkou si sbíraly do košíčků jablíčka. Když dá Baruška Markétce 2 jablíčka, budou mít stejně. Když Markétka dá Barušce 7 jablíček, bude mít Markétka 1/3 počtu jablíček co Baruška. Kolik jablíček mají dívky dohromady?

Řešení:

4) Vlčkovi lisovali jablečný mošt. Měli ho ve dvou stejně objemných soudcích, v obou téměř stejné množství. Kdyby z prvního přelili do druhého 1 litr, měli by v obou stejně, ale to by ani jeden soudek nebyl plný. Tak raději přelili 9 litrů z druhého do prvního. Pak byl první soudek úplně plný a mošt v druhém zaplňoval právě třetinu objemu. Kolik litrů moštu vylisovali, jaký byl objem soudků a kolik moštu v nich bylo původně? (Volfová; MO, 2011)

Řešení:

PRACOVNÍ LIST - 9

1) Auto jede 1/2 hodiny a ujelo 30 km. Jakou rychlostí auto jede?

Řešení:

2) Dana jde do obchodu rychlostí 5 km/h. Iveta vyšla ve stejnou dobu jako Dana, jde ale rychlostí 4 km/h. Cesta je dlouhá 500 m. O kolik minut bude Dana v obchodě dříve?

Řešení:

3) Jirka vyjede na kole v 7:00 rychlostí 15 km/h. Tonda vyjede ve 13:00 po stejné cestě na motorce rychlostí 60 km/h. V kolik hodin Tonda dojede Jirku? Kolik km ujeli?

Řešení:

4) U horské chaty nám trenér řekl: „Půjdeme-li dál tímto pohodlným tempem 4 km za hodinu, přijedeme na nádraží 45 minut po odjezdu našeho vlaku.“
   Pak ukázal na skupinu, která nás právě míjela: „Ti využívají holí, a tak dosahují průměrné rychlosti 6 km za hodinu. Na nádraží budou již půl hodiny před odjezdem našeho vlaku.“
   Jak daleko je nádraží od horské chaty? (Volfová; MO, 2013)

Řešení:

PRACOVNÍ LIST - 10

1) Maminka poslala Johanku pro nákup. Dala jí 50 Kč a řekla, že musí přinést 35 kousků pečiva. Když Johanka přišla do obchodu, tak zjistila, že rohlík stojí 1 Kč a houska 2 Kč. Kolik Johanka přinese domů rohlíků a kolik housek, aby utratila celou částku od maminky?

Řešení:

2) Pani učitelka zarezervovala v hotelu 9 pokojů pro 29 dětí. Některé pokoje jsou čtyřlůžkové, některé třílůžkové. Kolik kterých pokojů bylo, když nezbylo ani jedno lůžko?

Řešení:

3) Ondřej si šetří na novou hru na PS4. Do prasátka si dává vždy jen pětikoruny, desetikoruny a dvacetikoruny. Poté co hra vyšla, tak vysypal prasátko a našel v něm 113 mincí v celkové hodnotě 1360 Kč. Když začal počítat, zjistil, že pětikorun je o 8 méně než dvacetikorun. Kolik měl Ondřej jednotlivých mincí?

Řešení:

4) Jirka koupil dvě čokolády v obchodě naproti škole. Michal si koupil stejné dvě čokolády v obchodě za školou a Ivan si koupil jednu takovou čokoládu, ale ve školním bufetu. Cena zakoupených čokolád je o 6 Kč vyšší, než kdyby chlapci nakoupili všech 5 čokolád v obchodě naproti škole, a je o 6,50 Kč nižší, než kdyby chlapci nakupovali jen v obchodě za školou. Ve školním bufetu prodávají čokoládu za 19,50 Kč. Kolik zaplatili kluci za všech pět čokolád dohromady? Kolik stojí jedna čokoláda v obchodě za školou?

(MO, 2008)

Řešení: