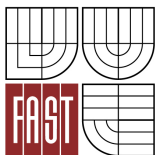




VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ  
ÚSTAV BETONOVÝCH A ZDĚNÝCH KONSTRUKCÍ

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING  
INSTITUTE OF CONCRETE AND MASONRY STRUCTURES

## **NELINEÁRNÍ ANALÝZA SPŘAŽENÉHO PRŮŘEZU S VLVIVEM SMRŠŤOVÁNÍ, DOTVAROVÁNÍ, STÁRNUTÍ A TEPLoty**

NONLINEAR ANALYSIS OF COMPOSITE CROSS-SECTION WITH  
RESPECT TO EFFECTS OF SHRINKAGE, CREEP, AGEING AND  
TEMPERATURE

TEZE DOKTORSKÉ DISERTAČNÍ PRÁCE  
ANOTATION OF Ph.D. THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

ING. LUKÁŠ HRON

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

DOC. ING. JAROSLAV NAVRÁTIL, CSc.

BRNO 2013

**Klíčová slova**

Časově závislá analýza, spřažený průřez, reologické účinky, smršťování, dotvarování, teplota, předpětí

**Keywords**

Time dependent analysis, composite cross-section, rheological effects, shrinkage, creep, temperature, prestress

**Místo uložení práce**

Ústav betonových a zděných konstrukcí a Knihovnické a informační centrum FAST VUT v Brně.

# Obsah

1 Úvod.....	4
2 Cíle disertační práce.....	5
3 Výpočtový model.....	6
3.1 Analýza betonového průřezu.....	6
3.1.1 Nalezení odezvy průřezu.....	6
3.1.2 Přetvoření průřezu.....	7
3.1.3 Účinný průřez.....	7
3.2 Výpočtové pracovní diagramy.....	8
3.3 Účinky předpětí.....	9
3.4 Statická analýza konstrukce.....	10
4 Analýza betonových konstrukcí v průběhu životnosti.....	10
4.1 Teplota.....	11
4.1.1 Vedení tepla.....	11
4.2 Reologické modely betonu.....	12
4.2.1 Smršťování.....	13
4.2.2 Dotvarování.....	15
4.3 Dlouhodobé ztráty v předpínací výztuži.....	16
4.4 Fáze výstavby.....	16
4.5 Časová analýza.....	18
5 Závěr.....	22
Bibliografické citace.....	24
6 Curriculum vitae.....	25
7 Abstrakt.....	26

# 1 Úvod

Stále rostoucí životní úroveň obyvatelstva nejenom u nás, ale na celém světě s sebou přináší potřebu dokonalejší dopravní infrastruktury, náročnějších průmyslových a administrativních staveb. Z toho vyplývá fakt, že musí být přemostovány větší úseky, stavěny rozlehlější budovy s velkým volným prostorem, vyšší budovy ať už z nedostatku stavebního prostoru nebo s ohledem na prestiž. Všechny tyto konstrukce se vyznačují použitím nosných prvků s velkou štíhlostí, kombinací různých stavebních materiálů (sprážené konstrukce), komplikovaným způsobem výstavby, kdy mění konstrukce svůj statický systém a náročným konstrukčním řešením velkých masivních základových konstrukcí. Mnohdy bývají masivní i prvky nosné konstrukce. Výjimkou nejsou železobetonové či předpjaté betonové desky tloušťky dva a více metrů. V takovémto objemu vzniká při procesu hydratace nezanedbatelné množství tepla a s tím související nadměrný úbytek vody (resp. vlhkosti) a vznik tahových napětí na povrchu v důsledku smršťování betonu.

V případě štíhlých nosných prvků horní stavby, viz např. [1], sice nedochází k vývinu tak velkého množství tepla, ale v důsledku vysychání se projevuje smršťování a dotvarování betonu a dochází k redistribuci napětí a k růstu deformací.

Znalost napjatosti a přetvoření konstrukce po dobu její životnosti pomáhá zabezpečit její bezproblémovou funkčnost. Že se tento stav mění od okamžiku vzniku jednotlivých částí konstrukce (betonází do forem či bednění) až do stádia její demolice, je zřejmé.

Příčinou změny stavu napětí a deformace konstrukce jsou zejména mechanická zatížení, která se mění v čase a mění napjatost tělesa, ale neméně významnou roli hrají rovněž nemechanická zatížení. Mezi ty řadíme především změnu teploty a u materiálů podléhajících reologickým vlivům ještě dotvarování a smršťování, které závisí na teplotě a vlhkosti. Při úplném zanedbání vlivu smršťování a dotvarování betonu či při jejich aplikaci na konstrukci nevhodným reologickým modelem může dojít k nadměrnému nárůstu dlouhodobých deformací konstrukce.

Mezi přední práce zabývající se reologií betonu se řadí například práce Z. P. Bažanta z Northwestern University ([2]), Z. Šmerdy a V. Křístka ([3]) a J. L. Vítka ([4]) z ČVUT a J. Navrátila z VUT v Brně ([5]).

## 2 Cíle disertační práce

Cílem práce je odvodit a algoritmizovat metody pro nelineární analýzu obecného betonového průřezu. Předpokládá se spřažený železobetonový průřez s možností aplikace předem a/nebo dodatečného předpětí. Jednotlivé fáze spřaženého průřezu jsou obecného tvaru.

Metody mají tvořit ucelený výpočetní systém, kterým by bylo možné:

- Nalézt rovinu přetvoření jako odezvu zatížení způsobených vnějšími silami a/nebo účinky smršťování a dotvarování betonu.
- Určit zatížení ekvivalentní účinkům smršťování a dotvarování betonu a relaxace předpínací výztuže na úrovni průřezu při respektování vlivu historie zatížení na dotvarování betonu.
- Určit tuhosti betonového průřezu v závislosti na stavu napětí s možným vlivem trhlin.
- Najít teplotní pole na průřezu pro jeho další analýzu.
- Určit ekvivalentní silové účinky předpínacích kabelů na konstrukci.
- Algoritmizovat výpočet časově závislé analýzy betonových konstrukcí.
- Analyzovat prostorovou rámovou konstrukci v jednotlivých fázích výstavby.
- Sledovat redistribuci vnitřních sil v průřezu.
- Připravit vstupní hodnoty pro detailní posouzení mezních stavů konstrukce.

Ke splnění vytčených cílů budou použity numerické metody, pro základní verifikaci potom analytické vztahy. Výpočetní systém bude vytvořen za použití matematického modelu konečných prvků a dalších numerických metod k řešení dílčích úloh.

Součástí práce bude ověření výsledků vypočtených pomocí vypracovaných algoritmů ručním výpočtem, případně pomocí programového systému pro časovou analýzu rovinných rámových konstrukcí [6].

Dalším cílem je umožnit připojení tohoto systému k libovolnému řešiči konečných prutových prvků v prostoru bez nutnosti úpravy použitých konečných prvků.

### **3 Výpočtový model**

Výpočtový model konstrukce se skládá z prutových prvků v prostoru (s rámovým nebo kloubovým spojením) a okrajových podmínek v uzlech. Každý prvek má přiřazený průřez, resp. průřezové tuhosti. Jedná se o tuhosti průřezu se zahrnutím vlivu trhlin. To znamená, že průřez s libovolným počtem postupně budovaných částí (fází) je vždy tvořen jednou geometrií prutu a nemusí být modelovány jednotlivé pruty v těžišti každé dílčí fáze průřezu.

Výhodou tohoto přístupu je jednodušší výpočtový model a s ním související rychlejší výpočet, konzistentní výsledky statické analýzy (pro každou fázi průřezu stejný počet prutů, stejné řezy) a hlavně možnost libovolného řešení napjatosti průřezu s uvážením nelineárního chování betonu (pracovní diagram, vliv trhlin).

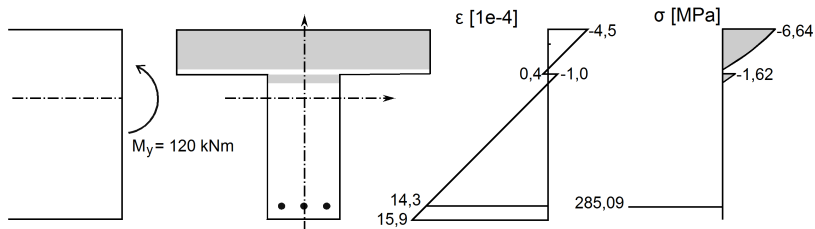
Ve výpočtovém modelu průřezu je rovněž možnost zohlednit předpínací kabely, a to jak předem předpjaté, tak dodatečně předpjaté. Na úrovni modelu celé konstrukce lze předpětí zohlednit pomocí ekvivalentního zatížení, jak je uvedeno v [7].

#### **3.1 Analýza betonového průřezu**

##### **3.1.1 Nalezení odezvy průřezu**

Při výpočtu odezvy betonového průřezu na vnitřní síly způsobené

vnějším zatížením je zapotřebí integrovat napětí v závislosti na poměrném přetvoření. Předpokládáme, že přetvoření je rovinné (splňuje tedy Bernoulli-Navierovu hypotézu). K řešení tohoto problému bylo využito Greenovy věty.



Obrázek 3.1 – Odezva průřezu

K samotnému nalezení rovnováhy vyztuženého průřezu je použita Newtonova iterační metoda.

### 3.1.2 Přetvoření průřezu

V důsledku různého stárí a složení betonu dostaneme na každé části průřezu jinou hodnotu poměrného přetvoření (způsobenou smršťováním, dotvarováním a postupným vznikem částí průřezu). Kvůli tomu nastává mezi jednotlivými částmi průřezu nespojitost přetvoření a průřez zůstává rovinným pouze na úrovni jeho jednotlivých částí. Tento fakt ovšem brání původnímu předpokladu, že pro statickou analýzu konstrukce bude dostačující pouze jeden prutový prvek pro celý průřez, jak bylo uvedeno v úvodu kapitoly 3. Řešení lze nalézt buď pomocí deformačního zatížení nebo pomocí silového zatížení (relaxační metoda), jak je uvedeno v [7].

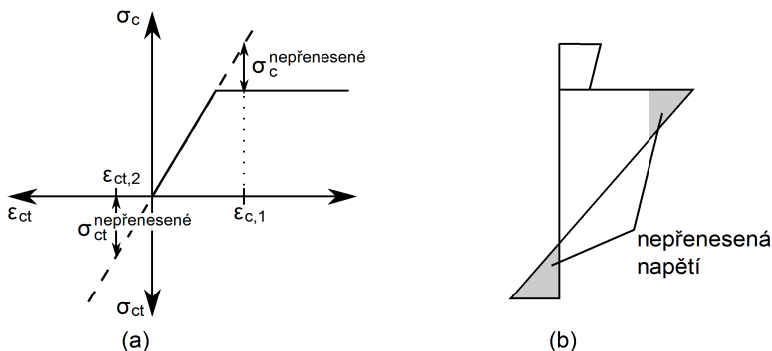
### 3.1.3 Účinný průřez

Pokud je překročena pevnost betonu v tahu, dojde ke vzniku a následnému rozvoji trhlin v tažené části průřezu. Od tohoto okamžiku jsou tahové síly přenášeny výztuží. V závislosti na velikosti trhliny dochází ke zmenšení ohybové tuhosti, čímž se zvyšuje průhyb konstrukce.

Zahrneme-li účinné průřezové charakteristiky do statické analýzy konstrukce, získáme přesnější informace o deformaci konstrukce a redistribuci vnitřních sil způsobené trhlinami například nad podporou spojitého nosníku.

### 3.2 Výpočtové pracovní diagramy

Při statické analýze vstupují do řešiče konečných prvků materiálové vlastnosti průřezu, zejména modul pružnosti. Při lineární statické analýze betonových konstrukcí se počítá se sečnovým modulem pružnosti  $E_{cm}$ , uvažovaným ve 28 dnech stáří betonu. Při výpočtu účinků dotvarování se vychází z tečnového modulu pružnosti  $E_c$ , jak uvádí norma EN 1992-1-1 [8]. Vnitřní síly tedy vychází z tečnového modulu pružnosti, ale při posouzení mezního stavu průřezu je uvažován modul sečnový. Zde narážíme na první problém. Další úskalí znamená pružno-plastický návrhový pracovní diagram, kdy vnitřní síly jsou spočteny Hookovou teorií a úroveň lineárního napětí může převyšovat pevnost materiálu, jak je schematicky naznačeno na obrázku 3.2 (a). Oba problémy lze řešit pomocí nepřenesených napětí [7], kdy se tato napětí uváží jako přidané zatížení při posouzení průřezu (obrázek 3.2 (b)).



Obrázek 3.2 – Nepřenesená napětí, převzato z [7]

V případě nelineárního pracovního diagramu lze postupovat podle metody uvedené v [9], kdy je statická analýza provedena s průměrnými hodnotami materiálových vlastností, přičemž je



potřeba je upravit (snížit) ekvivalentním součinitelem spolehlivosti  $\gamma_o = 1,27$ .

Pak musí být splněna podmínka spolehlivosti:

$$E(\gamma_G G; \gamma_P P; \gamma_Q \psi Q) \leq \frac{1}{\gamma_o} R \left\{ 1,1 \frac{\gamma_s}{\gamma_c} f_{ck}; 1,1 f_{yk}; 1,1 f_{pk} \right\}, \quad (3.1)$$

kde

$\gamma_c$  a  $\gamma_s$  jsou dílčí součinitele bezpečnosti materiálu.

### 3.3 Účinky předpětí

Účinky předpětí jsou do výpočtového modelu zavedeny pomocí ekvivalentního silového zatížení. To je sestaveno ze známé geometrie kabelu a jeho napětí při zakotvení (tj. po krátkodobých ztrátách).

Pro předem předpjaté kabely by měly být k určení napětí při zakotvení uvažovány tyto ztráty:

- Ztráta pružným přetvořením a změnou teploty napínacího zařízení.
- Ztráta relaxací předpínacích lan do okamžiku jejich uvolnění a zakotvení.

U dodatečně předpjatých kabelů to jsou potom ztráty:

- Třením (úhlová změna geometrie kabelu a nezamýšlená změna geometrie kabelu v přímém úseku).
- Ztráta relaxací do okamžiku zakotvení.
- Pokles napětí vlivem pokluzu kotevního kuželu.
- Případně, je-li modelováno více kabelů v jednom zatěžovacím stavu, ztráta postupným napínáním.

Ztráta pružným přetvořením předem předpjatého dílce je zohledněna přímo v řešené metodě, protože jednotlivá lana jsou již v okamžiku vnesení napětí do konstrukce její součástí (tj. jsou v matici tuhosti) a podílí se na deformaci způsobené předpětím. U dodatečného předpínání jsou kabely „instalovány“ do modelu až těsně za

okamžikem vnesení předpětí, jak je uvedeno v [7]. Kabel se tak nepodílí na přenesení předpínací síly (v našem případě způsobené ekvivalentním zatížením) v okamžiku předpínání a není tedy v matici tuhosti průřezu.

### **Ekvivalentní zatížení**

Ekvivalentní zatížení je rovnovážná soustava sil popisujících účinek předpínacího kabelu na tu část konstrukce, se kterou spolupůsobí. Toto zatížení je definováno silami místě kotev, silami způsobenými úbytkem předpětí po délce kabelu a radiálními silami v místech změny geometrie kabelu.

## **3.4 Statická analýza konstrukce**

Pro statickou analýzu lze s výhodou použít lineární analýzu v každém časovém okamžiku změny konstrukce (fáze výstavby), která bude později doplněna o časovou závislost.

Výpočtový model pro statickou analýzu konstrukce je sestaven z prutových prvků v prostoru.

V rámci práce byl použit řešič konečných prvků K2 solver<sup>1</sup>. V řešiči jsou využívány jednoduché prutové prvky se dvěma uzly a šesti stupni volnosti. Každý prvek má po délce konstantní tuhosti.

Zatížení smršťováním a dotvarováním betonu mají povahu deformačního zatížení. Je tedy nutné mít možnost zatížit konečný prvek poměrným přetvořením (osovým zkrácením/prodloužením a natočením), které má po délce prvku alespoň lineární průběh.

## **4 Analýza betonových konstrukcí v průběhu životnosti**

Každá konstrukce prochází během své životnosti několika fázemi. Výrobou, montáží, provozem a likvidací konstrukce. Nás zajímají především první tři fáze životnosti konstrukce, kdy nesmí dojít k její havárii, a je proto nutné postihnout jednotlivé mezní stavy v jednotlivých fázích. V případě betonových konstrukcí nelze

---

<sup>1</sup> Kolektiv autorů pod vedením Ing. Jaromíra Kabeláče

jednotlivé fáze od sebe oddělit z důvodu reologických účinků, a je proto nutné provést spojitou analýzu konstrukce v závislosti na čase.

Výrobní fázi je u monolitických částí konstrukce myšlena jejich betonáž a případně jejich převednutí. U prefabrikovaných dílců se jedná o jejich výrobu mimo staveniště (včetně jejich případného převednutí).

V montážní fázi jsou prefabrikované části transportovány z výroby, osazeny do konstrukce a zmonolitněny. Dochází ke změně uložení dílců.

V provozní části se změna statického systému konstrukce většinou nepředpokládá, nicméně v průběhu životnosti může dojít k rekonstrukci konstrukce, kdy jsou instalovány dočasné podpory, může být odstraněna část konstrukce a nahrazena novou.

## **4.1 Teplota**

Vliv teploty konstrukce nelze při její analýze zanedbat, protože v ní vyvolává velká napětí. Teplota se mění již od samého vzniku betonové směsi, kdy vzniká teplo chemickým procesem hydratace cementu. Dále je pak konstrukce zahřívána slunečním zářením nebo naopak ochlazována pod bod mrazu v zimních měsících.

V neposlední řadě může být pro konstrukci mezní stav při vzniku požáru, kdy je docíleno extrémních teplot, při kterých nejenže beton ztrácí svoji únosnost, ale dochází k velkým objemovým změnám s následným odprýskáním povrchové vrstvy betonu a z toho vyplývající změnou průřezu.

Běžné teplotní rozdíly povrchů konstrukce lze řešit na úrovni teplotního zatížení konstrukce jako celku při statické analýze. Hydratační teplo a teplo způsobené požárem je vhodné řešit detailněji jako nestacionární úlohu teplotního pole po průřezu.

### **4.1.1 Vedení tepla**

Průběh teploty, ať již od vlivu okolní teploty nebo tepla vznikajícího uvnitř objemu, je nelineární, zvláště u masivních celků.

Přenos tepla (teploty) v konstrukci lze vyjádřit pomocí diferenciální

rovnice energie pro nestacionární vedení tepla

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q_{zdroj} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (4.1)$$

kde

$T$  je teplota,  $T = T(x, y, z)$  [K],

$\lambda$  je měrná tepelná vodivost [ $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ],

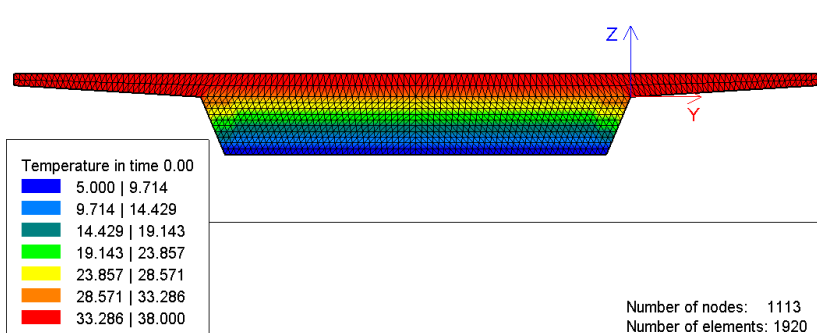
$Q_{zdroj}$  je tepelný tok generovaný v elementu [ $\text{W m}^{-3}$ ],

$\rho$  je objemová hmotnost elementu [ $\text{kg m}^{-3}$ ] a

$c$  je měrná tepelná kapacita [ $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ].

## Vlastní řešení vedení tepla

V rámci této disertační práce byl odvozen dle výše uvedených postupů konečný prvek a zpracován algoritmus přenosu tepla vedením, viz obrázek 4.1. K řešení problému vedení tepla byla použita metoda konečných prvků. Úloha byla řešena jako rovinná v kartézském souřadném systému.



Obrázek 4.1 – Příklad stacionárního teplotního pole – verifikace vlastních výsledků

## 4.2 Reologické modely betonu

Reologie popisuje časově závislý vztah napětí a deformace materiálu. Tento děj nastává jak v kapalných, tak v pevných látkách.

V této práci bude upřena pozornost na reologii betonu a předpínací

oceli. U betonu se jedná o smršťování a dotvarování a u předpínací oceli o dotvarování, resp. relaxaci.

## 4.2.1 Smršťování

Smršťování, které nastává v důsledku vysychání, je reologický proces, při kterém dochází k úbytku vody obsažené v betonové směsi, a to vypařováním do okolí nebo chemickým vázáním s cementem (hydratací). Jeho velikost v daném místě tedy ovlivňuje teplota, vlhkost a složení betonové směsi. Tento jev nastává pouze u porézních materiálů.

Při smršťování tedy dochází k objemovým změnám a změnám napjatosti tělesa [7].

Z toho plyne, že znalost teplotního a vlhkostního pole na vyšetřované oblasti umožní spočítat velikost smrštění podle některého známého vztahu, např. model B3 [10], CEB-FIP [11], atd.

Pro výpočet velikosti smrštění může být použito přírůstkové nebo rychlostní formulace. Přírůstkovou metodu využívá např. [12], [10] a bude dále využita v této práci. Princip spočívá ve znalosti změny vlhkosti a aplikaci této hodnoty ve vztahu pro výpočet smrštění.

Autoři [12] vyvinuli a odzkoušeli měřením empirickou materiálovou vlastnost, kterou nazvali součinitel vlhkostní kontrakce (coefficient of moisture contraction)  $\alpha_{hygro}$ .

Použitím vztahu

$$\varepsilon_c^{sh} = \alpha_{hygro} \Delta M, \quad (4.2)$$

kde  $\Delta M$  je procentuální úbytek vlhkosti, lze spočítat přetvoření od smrštění  $\varepsilon_c^{sh}$ .

Tento koeficient je ale možné bez újmy nahradit vztahem deklarovaným prof. Bažantem.

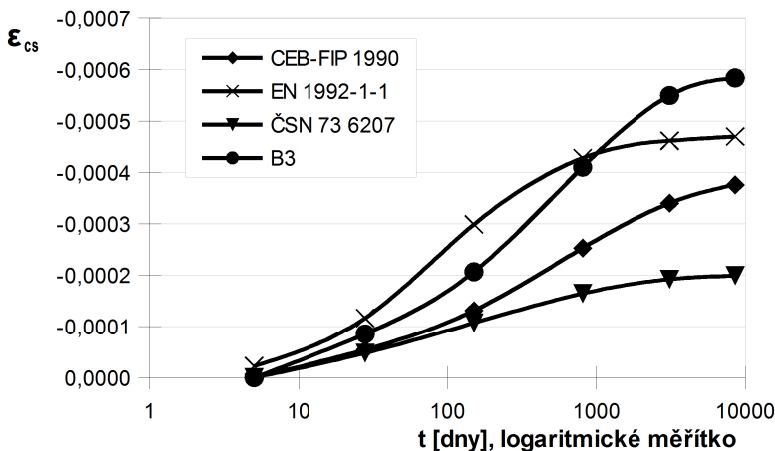
### Standardizované předpisy

Jak je uvedeno výše, smršťování se dělí na autogenní a smršťování

od vysýchání. Výpočet se obvykle provádí podle standardizovaných předpisů (CEB-FIP, model B3 atd.), které jsou potom převzaty a upraveny do jednotlivých normových předpisů. Tyto modely uvažují průměrné vlastnosti příčného řezu a lze jimi nahradit výše popsané metody. Budou proto použity pro další analýzu účinků smršťování.

Na obrázku 4.2 je porovnání přetvoření smršťováním předpisů CEB-FIP Model Code 1990 [11], model B3 [10], EN 1992-1-1 [8] a ČSN 73 6207 [13]. Je porovnán účinek smrštění betonu s charakteristickou pevností  $f_{ck} = 35$  MPa, rychle tuhnoucím cementem a při relativní vlhkosti 70% a dobou ošetřování 5 dní. Pro model B3 je potřeba znát ještě složení betonové směsi (hmotnost cementu, vody a kameniva – 500 kg, 200 kg, 1760 kg).

Z grafu je zřejmé, že největší hodnota smršťování na konci životnosti je dle modelu B3, ale je nutné poznamenat, že tento model je citlivý na složení betonové směsi, které v ostatních modelech nehraje žádnou roli. V počátečním stádiu tuhnutí a tvrdnutí betonové směsi vykazuje největší nárůst přetvoření smršťováním model podle Eurokódu. Příčinou je vliv autogenního smršťování, kdy již v okamžiku ukončení ošetřování betonu má nenulovou hodnotu.



Obrázek 4.2 – Porovnání modelů smršťování

## 4.2.2 Dotvarování

Beton je viskoplastický materiál, u kterého dochází k dotvarování. Celkové přetvoření od dotvarování v čase je sumace funkce dotvarování přes čas. Počítá se pomocí součinitele dotvarování  $\varphi(t)$ , který se limitně blíží ke konečné hodnotě v čase nekonečno a udává míru přetvoření při napětí. Ve výpočtu se také zohledňuje stárnutí betonu, kdy roste jeho modul pružnosti v čase. Základní rovnici poměrného přetvoření dotvarováním  $\varepsilon_c^{cr}$  lze napsat:

$$\varepsilon_c^{cr} = \int_{t_0}^t \frac{\sigma_c(t)}{E_c(t)} \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} dt \quad (4.3)$$

kde

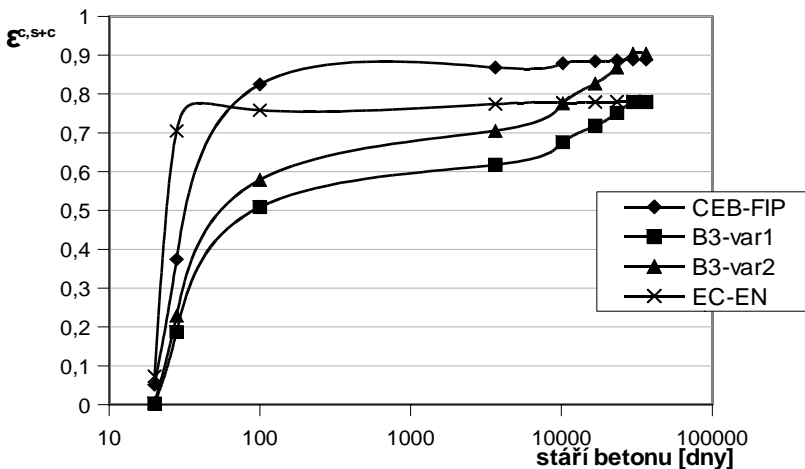
$\sigma_c(t)$  je napětí od mechanických účinků,

$E(t)$  je modul pružnosti ve vyšetřovaném čase a

$t_0$  je čas počátku zatížení.

### Porovnání modelů pro dotvarování betonu

Byly porovnávány různé reologické modely pro smršťování a dotvarování betonu včetně stárnutí materiálu, viz obrázek 4.3. Porovnány jsou modely podle normy ČSN EN 1992-1-1 [8] a podle B3 [10]. U modelu B3 byl také porovnáván vliv vodního součinitele na přetvoření od smršťování a dotvarování. Bylo uvažováno s vodním součinitelem 0,436 v první variantě a ve druhé variantě je uvažováno s vodním součinitelem 0,64, kde je zahrnut možný vliv plastifikátorů, které ovlivňují konzistenci betonové směsi a také rychlost tvrdnutí.



Obrázek 4.3 – Porovnání reologických modelů

## 4.3 Dlouhodobé ztráty v předpínací výztuži

V průběhu užívání konstrukce dochází v předpínací výztuži k poklesu napětí při konstantním přetvoření vlivem relaxace. Velikost relaxace je závislá na typu materiálu pro předpínací výztuž a na právě působícím napětí.

V rámci práce byl zvolen zjednodušený přístup k výpočtu dlouhodobé ztráty relaxací tak, že se odhadnou dlouhodobé ztráty pro  $t = 500000$  hodin, jak doporučuje norma, odečte se již proběhlá relaxace do okamžiku zakotvení a tento zbytek je logaritmicky rozprostřen do všech následujících časových intervalů.

## 4.4 Fáze výstavby

Pokud se při výstavbě mění konstrukční systém nebo zatížení, je důležité zohlednit tyto změny při statické analýze. Při tom se nemusí jednat pouze o výstavbu, ale lze modelovat předpínání prefabrikovaných dílců, jejich uložení na skládce a transport na stavbu, kdy projektant musí vhodně navrhnout umístění podpor. Při výstavbě můžeme modelovat konstrukci již od okamžiku betonáže do bednění, jeho následné odstranění a tedy, pro konstrukci, vznik finálních podpor, dodatečně předpjaté kabely a další.

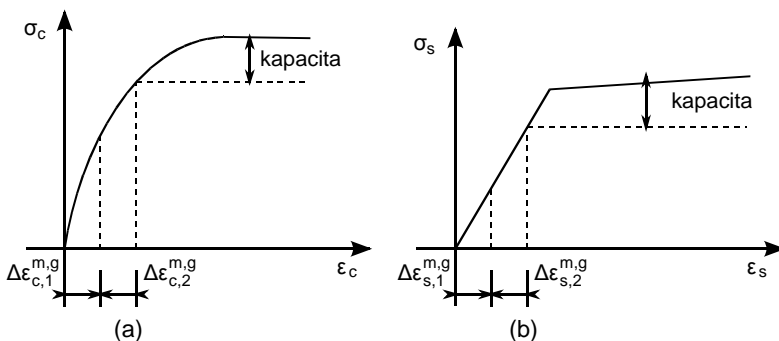


Při některých změnách výpočetního modelu konstrukce je potřeba na tyto změny reagovat. Jedná se zejména o odebrání podpor a prutů a vznik vnitřních kloubů, což je, v případě betonových konstrukcí, spíše jen teoretická vlastnost modelu.

Další změna v konstrukci, která často nastává, je změna průřezu. Jedná se o sprážené průřezy (beton – beton, ocel – beton, dřevo – beton), kdy jsou jednotlivé fáze průřezu postupně budované. Dále budou uváděny postupy výpočtu pro sprážení beton – beton.

V důsledku postupného vzniku jednotlivých fází průřezu dochází k nespojitosti přetvoření na styku dvou fází (pracovní spára). Při předpokladu lineárních pracovních diagramů všech materiálů stačí uvažovat v jednotlivých fázích výpočtu pouze přírůstek zatížení pro stanovení odezvy průřezu, tj. k nalezení roviny přetvoření. Toto přetvoření není závislé na již realizovaném přetvoření – napjatosti.

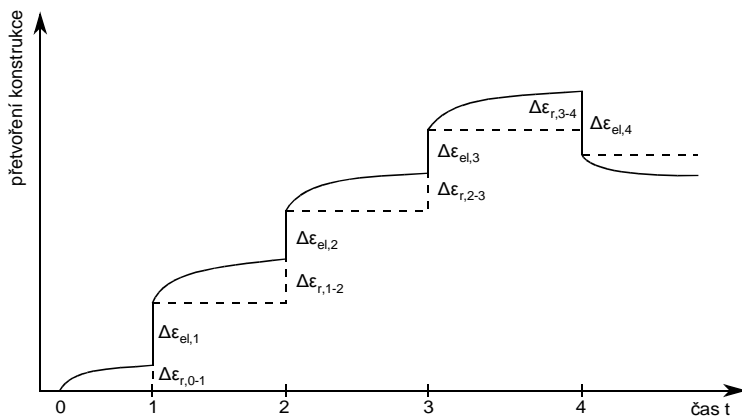
V případě nelineárního pracovního diagramu nelze uplatnit princip superpozice a je nezbytné si pamatovat historii všech zatížení. Při výpočtu každé další fáze jsou předchozí přírůstky stálých přetvoření aplikovány na průřez jako jeho počáteční přetvoření [7]. Na obrázku 4.4 je na pracovním diagramu znázorněna dostupná kapacita materiálu pro další přetížení s ohledem na již realizovanou historii zatížení.



Obrázek 4.4 – Kapacita materiálu

## 4.5 Časová analýza

Řešení konstrukce v závislosti na čase přináší do výpočetního modelu další rozměr. Definujeme časové okamžiky, kdy dochází náhle změně zatížení konstrukce nebo dochází ke změně jejího statického působení. Ostatní časově závislé jevy jsou v čase spojité.



Obrázek 4.5 – Přetvoření konstrukce v čase

Na obrázku 4.5 je zobrazena odezva konstrukce na reologické účinky a zatížení v závislosti na čase. Po betonáži, kdy je konstrukce nezatížena, se projeví pouze účinek smršťování, v grafu značeno jako  $\Delta\varepsilon_{r,0-1}$ , tedy přírůstek přetvoření od reologických účinků v časovém intervalu 0 – 1. V dalším časovém uzlu č. 1 dojde k přitížení konstrukce vnějším zatížením a to se projeví odezvou konstrukce, která je značena jako  $\Delta\varepsilon_{el,1}$ . Pro lepší znázornění je uvažováno pouze pružné chování materiálu. Vnější zatížení uvažujeme zatížení teplotní změnou, předepnutí konstrukce, odstranění bednění, apod. Následuje reologický účinek, kde je zahrnuto smršťování a dotvarování betonu a také relaxace předpínací výztuže. Další vývoj odezvy konstrukce je zřejmý z grafu, za zmínku stojí pouze odlehčení konstrukce, jak je vidět v grafu v časovém uzlu č. 4. Po úbytku přetvoření od vnějšího zatížení, dochází i k návratu přetvoření od dotvarování. Toto přetvoření ovšem nevymizí úplně, z důvodu stárnutí betonu a nelineárního dotvarování betonu.

V časově závislém výpočtu je zohledněn vliv stárnutí materiálu – nárůst pevnosti a modulu pružnosti betonu, který je popsán exponenciální křivkou

$$f_{cm}(t) = \exp \left\{ s \left[ 1 - \left( \frac{28}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} f_{cm}, \quad (4.4)$$

kde

$s$  je součinitel závislý na typu cementu a  
 $f_{cm}$  je průměrná pevnost betonu v tlaku ve 28 dnech.

Vztah pro určení celkového mechanického přetvoření  $\varepsilon_c^m$  je uveden v [7].

$$\varepsilon_c^m(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] + \int_{t_0}^t \frac{d\sigma_c(\tau)}{d\tau} \left( \frac{1}{E_c(\tau)} + \frac{\varphi(t, \tau)}{E_c(\tau)} \right) d\tau, \quad (4.5)$$

kde

$\sigma_c$  je napětí v betonu,  
 $E_c$  je tečnový modul pružnosti,  
 $\varphi(t, t_0)$  je součinitel dotvarování betonu,  
 $t_0$  je okamžik počátku působení zatížení a  
 $\tau$  je diferenciál nezávislé proměnné času.

Vyjádření v jednom konkrétním časovém uzlu  $t_n$  vypadá

$$\Delta \varepsilon_c^m(t_n) = \frac{\Delta \sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} (1 + \varphi(t_n, t_0)), \quad (4.6)$$

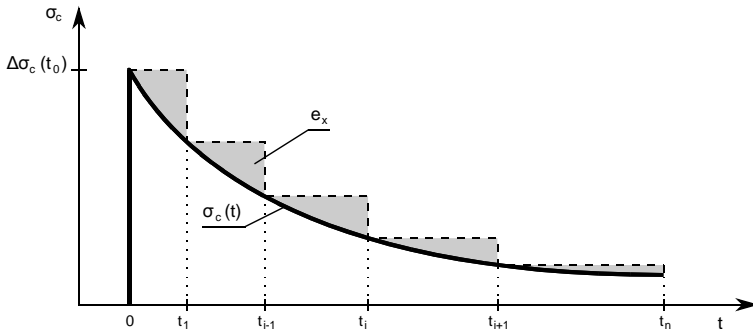
kde

$t_n$  je časový okamžik, ve kterém je spočteno přetvoření,  
 $t_0$  je okamžik vnesení zatížení  $\Delta \sigma_c$ ,  
 $\Delta \sigma_c$  je přírůstek mechanického zatížení a  
 $\varphi(t_n, t_0)$  je součinitel dotvarování.

V případě staticky neurčité konstrukce, nebo v případě spráženého průřezu je výraz (4.6) nedostačující z hlediska přesnosti řešení.

Přesnost lze zvýšit zvolením vhodné metody, například metody časové diskretizace (TDA) [7]. Tato metoda je vhodná k numerickému zpracování tohoto problému.

Požadovaný časový interval  $\langle t_0, t \rangle$  je rozdělen do podintervalů. K získání potřebné přesnosti je vhodné použít logaritmické dělení, jak je zřejmé z obrázku 4.6. Vybarvená oblast označená  $e_x$  je chyba aproximace přesného řešení  $\sigma_c(t)$  zvolené numerické metody.



Obrázek 4.6 – Chyba metody časové diskretizace, převzato z [7]

Integrální formulaci rovnice lze převést na sumační vzorec. Nejprve je uveden vzorec na výpočet přetvoření od jednoho přírůstku zatížení

$$\Delta \varepsilon_c^m(t_n) = \frac{\Delta \sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta \sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \varphi(t_j, t_{j-1}, t_0), \quad (4.7)$$

kde

$n$  je počet časových uzlů,

$\varphi(t_j, t_{j-1}, t_0)$  je součinitel dotvarování v časovém

intervalu  $\langle t_j, t_{j-1} \rangle$ ,  $\varphi(t_j, t_{j-1}, t_0) = \varphi(t_j, t_0) - \varphi(t_{j-1}, t_0)$ .

Rozšíření výše uvedeného vzorce na všechna působící zatížení je popsáno rovnicí:

$$\varepsilon_c^m(t_n) = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\Delta \sigma_c^i(t_0)}{E_c(t_0)} + \sum_{j=1}^n \frac{\Delta \sigma_c^i(t_0)}{E_c(t_0)} \varphi(t_j, t_{j-1}, t_0) \right], \quad (4.8)$$

kde

$m$  je počet všech mechanických zatížení.

## **Popis metody výpočtu**

Do výpočtu vstupuje prostorový model rámové konstrukce a jsou definovány významné časové uzly, ve kterých projektant potřebuje znát odezvu konstrukce.

Výpočet probíhá v hlavním cyklu přes jednotlivé časové uzly, kdy výpočet v každém z nich lze popsat v následujících bodech:

1. Výpočet aktuálního pracovního diagramu betonových částí průřezu – vliv stárnutí betonu ( $E_c(t)$ ,  $f_{cm}(t)$ ).
2. Výpočet přírůstku přetvoření smršťování v časovém intervalu  $\langle t_i, t_{i-1} \rangle$  na všech betonových částech průřezu.
3. Výpočet účinků dotvarování od přírůstku mechanického přetvoření v časovém intervalu  $\langle t_i, t_{i-1} \rangle$  na všech betonových částech průřezu.
4. Nalezení odezvy průřezu, tj. celkové roviny přetvoření průřezu  $\Delta \varepsilon_c^{tot}$  způsobené nemechanickými přetvořeními.
5. Výpočet mechanického přetvoření  $\Delta \varepsilon_c^m = \Delta \varepsilon_c^{tot} - \Delta \varepsilon_c^{nm}$  na všech betonových částech průřezu.
6. Výpočet aktuální tuhosti průřezu.  $EA$ ,  $EI_y$ ,  $EI_z$ .
7. Statická analýza konstrukce zatížené reologickými účinky.  
 $Ku = \Delta \varepsilon_c^{tot}$ .
8. Přepočet aktuální tuhosti průřezu.  $EA$ ,  $EI_y$ ,  $EI_z$ .
9. Změna výpočtového modelu konstrukce (vznik nebo zánik podpor a průtů nebo vznik nové části průřezu).
10. Statická analýza konstrukce zatížené vnějším zatížením.  
 $Ku = f$ .

## 11. Nalezení odezvy průřezu od vnějších zatížení.

Ve výpočtu musí být postížena historie zatížení a v každém časovém uzlu zpětně vyhodnotit účinky dotvarování od mechanického zatížení. Výpočet se proto může stát při velkém počtu konečných prvků a časových uzlů časově náročným.

### **Posouzení mezního stavu**

Jednou z výstupních hodnot časové analýzy konstrukce jsou mechanická přetvoření ve všech počítaných časových uzlech pro všechny fáze průřezu, případně další části průřezu, jako jsou předpínací kabely. Jedná se o přetvoření způsobená účinky stálých zatížení včetně předpětí a účinky smršťování a dotvarování betonu, případně relaxací předpínací výztuže. Při posouzení mezních stavů průřezu jsou tato přetvoření uvažována jako jeho počáteční stav a průřez je přitěžován pouze účinky proměnných zatížení, případně nepřenesenými vnitřními silami (viz odstavec 3.2). Výsledná odezva průřezu je stanovena metodou mezních přetvoření a průřez lze posoudit v souladu s normativním předpisem.

## **5 Závěr**

Pokročilé výpočetní metody betonových konstrukcí se v projekční praxi používají stále častěji. Využívá se jich pro statickou analýzu, výpočet průhybů, posouzení a optimalizaci jak prefabrikovaných dílců, tak i monolitických konstrukcí.

Byla proto navržena metoda, která slouží k nelineární časově-závislé analýze prostorové rámové betonové konstrukce budované postupně ve fázích výstavby. Algoritmus dovoluje analyzovat fázovaný sprážený železobetonový průřez s obecnou geometrií. Konstrukci lze navrhnout i s předem a/nebo dodatečně předpjatými kabely.

V práci je popsána metodika k určení deformací a napjatosti konstrukce během její životnosti. Práce řeší několik dílčích problémů, které dohromady tvoří ucelený výpočetní systém. Tento systém umožňuje určit odezvu konstrukce na změnu zatížení včetně vlivů smršťování a dotvarování betonu a vlivu relaxace předpínací výztuže. Je možné vyhodnotit přerozdělení vnitřních sil v konstrukci

v závislosti na změně zatížení a/nebo vlivem reologických účinků a pomoci tak projektantovi k efektivnějšímu návrhu. Výsledky časové analýzy lze přímo použít jako vstupní hodnoty pro posouzení mezního stavu únosnosti a použitelnosti konstrukce po celou dobu její životnosti. Výpočet nestacionárního vedení tepla po průřezu lze použít pro určení teplotních křivek při posouzení požární odolnosti konstrukce. Zároveň jej lze využít pro výpočet vysychání dvojrozměrné oblasti (např. průřezu) a její následné smršťování a dotvarování. Systém umí počítat účinek předpětí na konstrukci tak, že je určeno ekvivalentní silové zatížení kabelem s uvážením krátkodobých a dlouhodobých ztrát předpětí.

Součástí práce byla také studie normativních reologických modelů betonu, jejich porovnání a zhodnocení. Rovněž bylo provedeno srovnání s komplexním reologickým modelem B3 [10]. Použití modelu B3 není ovšem z praktického hlediska příliš možné, vzhledem jeho citlivosti na vstupní data (zejména počáteční vlhkost betonu, která se mnohdy mění podle potřeby stavby). Nicméně velký přínos tohoto modelu je například při upřesňování výpočtů během výstavby, nebo pro expertní posudky již hotové stavby (kdy je k dispozici její kompletní dokumentace).

V práci jsou uvedeny kontrolní výpočty jednoduchých konstrukcí pro ověření správnosti výsledků navržených metod a postupů.

Možné směry dalšího vývoje:

- Dále rozvinout fyzikální a geometrickou nelinearitu.
- Rozšířit metodu výpočtu smršťování a dotvarování v závislosti na nerovnoměrném vysychání průřezu (metodika použitá pro analýzu průřezu to umožňuje).
- Provést detailní analýzu vyztuženého průřezu vystaveného vysokým teplotám.
- Rozšiřovat výpočetní model o plošné či prostorové prvky.

## Bibliografické citace

- [1] Stráský, J., Navrátil, J., Concrete Hybrid Bridges. In: *FIP Symposium '97 Proceedings*. Johannesburg:1997, pp. 321-328.
- [2] Bažant, Z.P., Editor (1986). *Creep and Shrinkage of Concrete: Mathematical Modeling*. Preprints of Fourth RILEM International Symposium, Northwestern University.
- [3] Šmerda, Z., Křístek, V. *Creep and Shrinkage of Concrete Elements and Structures*. 1'st ed. Praha: SNTL, 1988. ISBN 978-0444989376.
- [4] Vítek, J. L. *Dotvarování a smršťování betonu v analýze stavebních konstrukcí*. Praha: ČVUT, 1985. Kandidátská disertační práce. ČVUT, Fakulta stavební, Katedra betonových a zděných konstrukcí.
- [5] Navrátil, J. *Výpočtové modely moderních mostních konstrukcí respektující vliv času*. Brno: VUT v Brně, 1991. Kandidátská disertační práce. VUT v Brně, Fakulta stavební, Ústav betonových a zděných konstrukcí.
- [6] Navrátil, J. Časově závislá analýza rámových konstrukcí. In: *Stavebnický časopis*. 1992, Ročník 40, č. 7. ISSN: 0039-078X
- [7] Navrátil, J. *Předpjaté betonové konstrukce*. Druhé vydání. Brno: AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM®, s.r.o., 2008. ISBN 978-80-7204-561-7.
- [8] ČSN EN 1991-1-1 *Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí - Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*. Druhé vydání. Praha: ÚNMZ, červenec 2011.
- [9] Navrátil, J. 5.2 Statická analýza předpjatých betonových konstrukcí. In: Procházka, J. a kol. *NAVRHOVÁNÍ BETONOVÝCH KONSTRUKCÍ PODLE NOREM ČSN EN 1992 (EUROKÓDU 2), ČÁST 2 - PŘEDPJATÝ BETON*. Praha: ČBS Servis, s.r.o., 2010. s. 179. ISBN 978-80-87158-21-0.
- [10] Bažant, Z.P., Baweja, S. Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures— model B3, Rilem Recommendation. In: *Materials and Structures*. 1995, Volume 28, Issue 6. ISSN: 1359-5997
- [11] CEB-FIP Model Code 1990 *Design Code*. 1'st ed. Lausanne, Switzerland: Comite Euro-International Du Beton, Thomas Telford Services Ltd, 1993.
- [12] Baluch, M.H., Rahman, M.K., Mahmoud, I.A. Calculating drying-shrinkage stresses. In: *ACI Concrete international*. 2008, Vol. 30, Numb. 7. ISSN: 0162-4075
- [13] ČSN 73 6207 *Navrhování mostních konstrukcí z předpjatého betonu*. 1. vydání. Praha: Český normalizační institut, Říjen 1993.



## 6 Curriculum vitae

### Osobní údaje

**Ing. Lukáš Hron**

Brožkova 8, 638 00 Brno – Lesná

608 255 128

hronl@seznam.cz

### Praxe

2010 – dosud	IDEA RS s.r.o. Vývojář
2010 – dosud	VUT v Brně, Fakulta stavební Asistent na Ústavu kovových a dřevěných konstrukcí
2007 – 2010	SCIA CZ, s.r.o. Software Engineer
2006 – 2007	SCIA CZ, s.r.o. Product Development Engineer (brigádně)
2004– 2005	GOLDBECK Prefabeton s.r.o. Technik (brigádně)

### Vzdělání

2000 – 2005	VUT v Brně, Fakulta stavební Magisterské studium Konstrukce a dopravní stavby
1995 – 2000	Střední průmyslová škola stavební Podnikání ve stavebnictví

## 7 Abstrakt

Pokročilé výpočetní metody pro řešení stavebních konstrukcí se v projekční praxi používají stále častěji. Jejich použití je vynuceno nejen nároky na estetiku, funkčnost a vysokou hospodárnost výstavby, ale často přímo normovými předpoklady a požadavky. Je proto nezbytné poskytnout projektantovi robustní, ale transparentní nástroj, pomocí kterého provede efektivní návrh konstrukce a její posouzení v průběhu celé životnosti.

Práce se zabývá vytvořením výpočetního systému pro časovou analýzu betonových a spřažených rámových konstrukcí v prostoru. Předpokládá se jednoduchý nebo spřažený betonový průřez s možnou aplikací předem a/nebo dodatečně předpjatých kabelů. Jednotlivé fáze postupně budovaného spřaženého průřezu mají obecnou geometrii. Použité algoritmy dávají možnost detailní analýzy konstrukce v jednotlivých fázích výstavby, poskytují projektantovi náhled na chování konstrukce v čase s vlivem stárnutí, smršťování a dotvarování betonu, relaxace předpínací výztuže a poskytují přehled o redistribuci vnitřních sil v konstrukci a v jednotlivých částech průřezu. Takto vypočtená napjatost konstrukce se dále uplatňuje v posouzení mezních stavů únosnosti a použitelnosti.

Výsledky časové analýzy jsou verifikovány ručními výpočty a srovnáním s výsledky dosaženými zjednodušenými metodami.

## Abstract

Advanced computational methods for the analysis of building structures are used more often in engineering practice. Their use is enforced not only by the demands for aesthetics, functionality and high economy of the construction, but often directly by code provisions and requirements. Therefore, it is necessary to provide for an engineer the robust, but transparent tool, which can be used for an efficient design of structure all over its design working life.

This work deals with the creation of a computational system for time

dependent analysis of concrete and composite structures. It is assumed a solid or composite concrete section with possible application of pre-tensioned and/or post-tensioned tendons. Each phase of step-by-step build composite cross-section has a general geometry. The used algorithms give us the possibility of a detailed analysis of the structure in individual construction stages, provide the designer better view on the behavior of structures with respect to concrete aging, shrinkage and creep, relaxation of prestressed tendons and provide an information on the redistribution of internal forces in the structure and in different phases of the cross-section. Stress state of the structure calculated in this way come in useful further in the design and checking of ultimate and serviceability limit states.

Results of time dependent analysis are verified by manual calculations and by comparing with the results obtained by simplified methods.