



Přírodovědecká
fakulta

Univerzita Palackého
v Olomouci

Některé vlastnosti agregačních funkcí na ohraničených svazech

DISERTAČNÍ PRÁCE

Autor: Mgr. Zbyněk KURAČ
Katedra Algebry a Geometrie

Školitel: Prof. Mgr. Radomír HALAŠ, Dr.

Konzultant: Mgr. Jozef Pócs, PhD.

Olomouc 2021

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor:	Mgr. Zbyněk Kurač
Název práce:	Některé vlastnosti agregačních funkcí na ohraničených svazech
Typ práce:	Disertační práce
Pracoviště:	Katedra algebry a geometrie
Vedoucí práce:	Prof. Mgr. Radomír Halaš, Dr.
Konzultant:	Mgr. Jozef Pócs, PhD.
Rok obhajoby:	2021

Abstrakt: Disertační práce je zaměřena na studium některých vlastností agregačních funkcí uvažovaných na konečných svazech. Zabývali jsme se zejména problémy týkajícími se propojení této teorie s teorií klonů, načež jsme využívali tzv. Baker-Pixleyho větu pro dokazování našich tvrzení, které se převážně zaměřili na generátory klonu idempotentních agregačních funkcí. Následně se bádání ohledně generátorů stočilo směrem k redukování počtu funkcí v této generující množině. Dalším uvažovaným problémem byla teorie transferově-stabilních funkcí, kterou jsme propojili s teorií agregačních funkcí na základě transformace aritmetického průměru do teorie svazů, přesněji do teorie konečných řetězců, čímž jsme obdrželi transferově-stabilní průměry. Zaměřili jsme se na strukturu všech takových funkcí, popřípadě její generátory. Odstraněním idempotence se rozšířil definiční obor, přičemž jsme zkoumali dvě třídy svazů, pro které lze tyto funkce nejlépe definovat. Hlavním výsledkem bylo charakterizování obou těchto tříd a posléze jsme zkoumali některé další vlastnosti, jež mají tyto funkce na zmíněných třídách.

Klíčová slova: agregační klon, idempotentní klon, minimální (χ, med) -generující množina, svaz, řetězec, agregační funkce, monotónní funkce, idempotentní funkce, symetrická funkce, medián, aritmetický průměr, transferový princip, transferová-stabilita, vzdálenost, cesta

Počet stran:	235
Počet příloh:	4
Jazyk:	Český

BIBLIOGRAPHIC IDENTIFICATION

Author:	Mgr. Zbyněk Kurač
Title of thesis:	On some properties of aggregation functions on bounded lattices
Type of thesis:	Ph.D. Thesis
Department:	Department of Algebra and Geometry
Supervisor:	Prof. Mgr. Radomír Halaš, Dr.
Consultant:	Mgr. Jozef Pócs, PhD.
The year of presentation:	2021

Abstract: The Ph.D. Thesis focuses on the study of some properties of aggregation functions considered on finite lattices. We dealt mainly with problems related to the connection of this theory with the theory of clones. Then we used the so-called Baker-Pixley theorem to prove our results, which are focused on generators of clone of idempotent aggregation functions. Subsequently, this research has turned to reduce the number of functions in this generating set. Another problem was dealt with the theory of transfer-stable functions, which we connected with the theory of aggregation functions based on the transformation of the arithmetic mean into the lattice theory, more precisely to the theory of finite chains, whereby we obtained transfer-stable means. We focused on the structure of all considered functions, or its generators. By removing idempotence, the domain of transfer-stable aggregation functions has expanded and we examined two classes of lattices for which these functions can be best defined. The main result was the characterization of both of these classes, and then we examined some other properties that these functions fulfill on the mentioned classes.

Keywords: aggregation clone, idempotent clone, minimal (χ, med) -generating set, lattice, chain, aggregation function, monotone function, arithmetic mean, symmetric function, idempotent function, median, transfer principle, transfer-stability, distance, path

Number of pages: 235

Number of appendices: 4

Language: Czech

Prohlášení:

Místopřísežně prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval zcela samostatně pod vedením mého školitele Prof. Mgr. Radomíra Halaše, Dr., a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu uvedenou v závěru práce.

V Olomouci: 20. dubna 2021

Podpis:

A handwritten signature in orange ink, appearing to read 'Miroslav Halaš', written in a cursive style.

Poděkování:

Na tomto místě bych velmi rád poděkoval svému školiteli Prof. Mgr. Radomíru Halašovi, Dr. za jeho rady a připomínky a hlavně za veškerou podporu, kterou mi věnoval během mého doktorského studia. Nejvíce oceňuji profesora milá slova na konferencích a letních školách, kdy mě chválil před našimi kolegy a byl na mě pyšný za mé studijní výkony. Spolu s ním také musím poděkovat Prof. RNDr. Radku Mesiarovi, DrSc., za hladký průběh mého erasmu na doktorském studiu a taktéž za cenné rady ke všem mým článkům. Dále bych zde věnoval své díky Prof. RNDr. Ivanu Chajdovi, DrSc., který mě provázel celé doktorské studium a všem nám doktorandům dával užitečné rady a postřehy do budoucna na základě jeho bohaté minulosti. Nesmím zapomenout ani na dalšího kolegu z naší katedry, Doc. RNDr. Jana Kühra, Ph. D., který mi dával cenné poznatky na seminářích, kde jsem přednášel své výsledky z článků. Hluboká podpora se mi také dostala od dalších mých kolegů z katedry, RNDr. Lenky Juklové, Ph. D. a RNDr. Patrika Pešky, Ph. D., se kterými jsem mohl konzultovat detaily práce, a kteří mi dodávali sílu a energii ke studiu. V neposlední řadě nesmím opomenout mé spoluautory, Mgr. Lenku Rýparovou Ph. D. a Mgr. Tomáše Riemela, jenž mi pomáhali s psaním článků během mého doktorského studia. Také bych zde rád poslal své díky svému dlouholetému nejlepšímu příteli, Mgr. Martinovi Pospíšilovi, jenž mi občas věnoval drahocenné hodiny ze svého velmi nabitého programu a se mnou prokonzultoval veškeré dění v mém životě, nejen školním, ale i osobním. Jako nejdůležitější podporu беру svou rodinu, mamku, mé bratry a sestry, bez kterých bych neměl život na doktorátu tak snadný, jelikož jejich podpora nebyla jenom morální, ale finanční. Do mé rodiny nyní neoddělitelně patří i moje přítelkyně, se kterou trávím veškerý svůj čas a dostávám od ní takovou podporu jako od nikoho jiného, zejména ve stresových situacích při psaní

této práce. Závěrem musím své velké díky poslat i vzhůru, Pánu Bohu, jelikož vím, že na mě nejen dohlíží, aby se mi dobře dařilo, ale také mi ukazuje tu správnou cestu budoucí.

Obsah

Anotace	11
Summary	13
ÚVOD	15
Cíle disertační práce	19
Výsledky	20
Autorovy publikace použité v disertační práci	22
I. BINÁRNÍ GENERUJÍCÍ MNOŽINA KLONU IDEMPOTENTNÍCH AGREGAČNÍCH FUNKCÍ NA OHRANIČENÝCH SVAZECH	23
1.1 Algebraický úvod	24
1.2 Idempotentní agregační klony na ohraničených svazech	28
1.3 Binární generátory idempotentního klonu a jejich vlastnosti	33
1.4 Generování idempotentního klonu	48
1.5 (χ, \mathbf{med}) -generující množina idempotentního klonu	53
1.6 Hledání (χ, \mathbf{med}) -generující množiny	59
II. TRANSFEROVĚ-STABILNÍ PRŮMĚRY NA KONEČNÝCH ŘETĚZCÍCH	72
2.1 Transferově-stabilní funkce na reálných číslech	73
2.2 Transferově-stabilní průměry	80
2.3 Binární transferově-stabilní průměry	84
2.4 Transferově-stabilní průměry vyšší arity	90
2.5 Generující množina transferově-stabilních průměrů	102

2.5.1	Prostřední transferově-stabilní průměr	102
2.5.2	Vnitřní generující transferově-stabilní průměry	103
2.5.3	Vnější generující transferově-stabilní průměry	105
2.5.4	Generující množina	110
2.6	Speciální generování	120
III. TRANSFEROVĚ-STABILNÍ AGREGAČNÍ FUNKCE NA		
KONEČNÝCH SVAZECH		131
3.1	Distančně-stabilní svazy	132
3.2	Binární transferově-stabilní agregační funkce	144
3.3	Uspořádání bloků a transferově-stabilní svazy	163
3.4	Konstrukce transferově-stabilního svazu	175
3.5	Charakterizace transferově-stabilních svazů	180
3.6	k -ární transferově-stabilní agregační funkce	187
3.7	Svaz transferově-stabilních agregačních funkcí	198
3.8	Aplikace transferově-stabilních agregačních funkcí	214
ZÁVĚR		228
Seznam obrázků		234
Seznam tabulek		235

Anotace

Disertační práce se věnuje zejména teorii agregačních funkcí na konečných svazech, na kterou se v jednotlivých kapitolách díváme z různých úhlů pohledu a propojujeme ji s několika dalšími teoriemi.

První kapitola se zabývá generující množinou agregačního klonu. Z předchozího článku pojednávajícího o klonu agregačních funkcí, byla představena generující množina klonu idempotentních agregačních funkcí na ohraničených svazech. Jako hlavní výsledek bylo ukázáno, že tento klon je generovaný určitými ternárními idempotentními funkcemi, ze kterých lze získat všechny idempotentní agregační funkce svazu pomocí klasického skládání funkcí. Cílem této kapitoly je ukázat zlepšení výše zmíněného výsledku pomocí nové generující množiny tohoto klonu. Umělé ternární funkce jsou zde nahrazeny binárními mediány a binárními charakteristickými funkcemi. V důsledku toho je klon generován jeho binární částí, čímž výsledek posiluje základní úlohu mediánů v idempotentních agregačních funkcích. Navíc ukážeme, že pro n -prvkový svaz je horní hranice binárních generátorů rovna $2n - 1$.

Druhá kapitola se zaměřuje na transformaci aritmetického průměru na konečné svazy. Podle encyklopedie agregačních funkcí Grabisch M. a spol. (2009) je aritmetický průměr charakterizován čtyřmi vlastnostmi: je neklesající, idempotentní, symetrická a aditivní. První tři mohou být přirozeně konvertovány do teorie svazů, ale poslední vlastnost (aditivitu) nelze obecně převést. Proto jsme ji nahradili jinou vhodnou vlastností nazvanou transferová stabilita. Avšak při konvertování do konečných svazů nedostaneme přesně aritmetický průměr, ale jeho vhodné aproximace. Tyto funkce se nazývají transferově-stabilní průměry. Prvním cílem této kapitoly je poukázat na fakt, že transferově-stabilní průměry na konečných řetězcích tvoří svaz izomorfní

s direktní mocninou konečných řetězců. Druhým cílem je vytvoření generující množiny všech transferově-stabilních průměrů, tj. uvažovat takové průměry, které mohou vygenerovat všechny transferově-stabilní průměry stejné arity pomocí klasického skládání funkcí. Třetí cíl je zodpovězení otázky, jak vygenerovat všechny transferově-stabilní průměry libovolné arity pomocí binárních transferově-stabilních průměrů. Pro tento problém bylo potřeba definovat speciální skládání transferově-stabilních průměrů.

Z předchozí kapitoly jsme získali novou vlastnost, tzv. transferovou-stabilitu, charakterizující aritmetický průměr. Umožnila nám definovat speciální tvary aritmetického průměru na konečných svazech, přičemž idempotence byla součástí této definice. V poslední kapitole tuto vlastnost zanedbáme a budeme se zabývat pouze transferově-stabilními agregačními funkcemi. Díky tomuto je možné definovat tyto agregační funkce na libovolném konečném svazu a nikoli pouze na konečných řetězcích. Nicméně, existuje podtřída konečných svazů, tzv. transferově-stabilní svazy, na kterých lze chování transferově-stabilních agregačních funkcí jednoduše popsat, protože transferově-stabilní třídy (bloky) jsou lineárně uspořádané. Hlavním cílem této kapitoly je charakterizace této podtřídy. Ve druhé části se zaměříme na vhodné vlastnosti spojené se svazem všech k -árních transferově-stabilních agregačních funkcí.

Summary

The Ph.D. thesis is devoted to study the theory of aggregation functions on finite lattices, which we look at from different angles in individual chapters and connect it with several other theories.

The first chapter deals with the generating set of aggregation clone. In one of the previous papers, a generating set of clone idempotent aggregation functions on bounded lattices was introduced. As a main result it was shown that this clone is generated by certain ternary idempotent functions from which all idempotent aggregation functions of the lattice can be obtained by usual term composition. The aim in this chapter is to present an essential improvement of the result above by presenting a new generating set of this clone. A bit artificial ternary functions are substituted here by natural (binary) lattice a -medians and certain binary characteristic functions. As a result, the clone is generated by its binary part and the result strengthens the essential role of medians within all idempotent aggregation functions. In addition, we will show that for an n -element lattice, the upper bound of binary generators is $2n - 1$.

The second chapter focuses on the transformation of the arithmetic mean into finite lattices. According to the encyclopedia of aggregation functions Grabisch M. et al. (2009), the arithmetic mean is a function characterized by four features: it is non-decreasing, idempotent, symmetric and additive. The first three of them can be naturally converted to the theory of posets but the last one generally can not. Due to this problem, we will replace it with another suitable property, which is called transfer-stability. However, we do not get the exact arithmetic mean but some approximation. These functions will be called transfer-stable means. The first aim of this chapter is to show

that transfer-stable means on a finite chain form a lattice which is isomorphic to the direct power of a finite chain. The second goal is to create a generating set of transfer-stable means, i.e., means that can generate all other transfer-stable means of the same arity by classical composition of functions. The last goal deals with question of how to generate all transfer-stable means of any arity by binary transfer-stable means only. For this problem we define special transfer-stable means composition.

From the previous chapter we obtained a new property, the so-called transfer-stability, characterizing the arithmetic mean. With this property, it is possible to define special forms of arithmetic mean on finite chains. The idempotence property was required for this definition. In the last chapter, we neglect this necessity and deal only with transfer-stable aggregation functions. Thanks to this fact, it is possible to define these aggregation functions on any finite lattice (hereinafter “lattice”) and not only on finite chains. Nevertheless, there is a subclass of finite lattices, the so-called transfer-stable lattices, where the behavior of the transfer-stable aggregation functions is simply described because the transfer-stability classes are linearly ordered. Therefore, the main goal of this chapter is characterization of these transfer-stable lattices. The second half of the chapter deals with some useful properties associated with the lattice of all k -ary transfer-stable aggregation functions.

ÚVOD

Teorie agregačních funkcí má hluboké kořeny sahající až k počátkům použití aritmetického průměru [2], či k prvnímu využití nasbíraných dat a informací, z nichž byl vyvozen nějaký závěr v podobě jediné výsledné hodnoty. Agregace je takový proces, kdy na základě nějakých dat (většinou numerických) je vyvozen výsledek v podobě jediného výstupu či jediné hodnoty. Matematická teorie zabývající se tímto procesem se nazývá teorie agregačních funkcí [4]. Agregací funkce pak matematicky realizují výsledek v podobě jediné hodnoty a splňují dvě přirozené podmínky. Nutno podotknout, že tyto podmínky nejsou zcela univerzální, neboť v celé historii studia procesů je možné narazit i na obecnější funkce, které jakýmsi způsobem taktéž vyvozují určitý typ jediného výsledku. Nicméně při zkoumání z obecného pohledu se ukázalo, že většina funkcí, používaných pro zpracování statistických dat, splňují ony dvě zmíněné podmínky.

Dlouhou dobu se agregační funkce používaly pouze na reálných číslech, respektive číselných množinách obecně, a to kvůli statistice jakožto numerické disciplíně. V nedávné době se ale stále dostávají více do popředí i jiné struktury, zejména nelineárně uspořádané, kde se teorie agregačních funkcí, v některých případech, projevuje odlišně [3, 9, 11]. Jednou z takových uspořádaných struktur jsou ohraničené svazy [5], o nichž pojednává i tato práce. Jedním z důvodů, proč se teorie uchýlila k této struktuře, je propojení agregační teorie s teorií klonů jakožto množinou všech agregačních funkcí, kde svazová problematika hraje významnou roli. Teorie má základy v logice, odkud přímo navazuje na diskrétní matematiku a informační vědy.

Uvážíme-li množinu všech agregačních funkcí, coby klon na ohraničeném svazu, ukazuje se, že existují i vhodné podmnožiny, které rovněž tvoří klon. Jedním takovým případem jsou idempotentní agregační funkce, přičemž idempotence je přirozenou vlastností některých známých agregačních funkcí. Podobně jako u klonu všech agregačních funkcí, kde byly hledány jeho vhodné generátory [8], tak i u jeho podklonu idempotentních agregačních funkcí se v práci zaměříme na generující funkce. O nich pojednává první kapitola této práce [6]. Nutno zmínit, že generující množina klonu všech agregačních funkcí nemůže obsahovat jenom unární funkce, neboť se ukazuje, že nevygenerují úplně vše. Proto se museli do generující množiny přidat další, alespoň binární, funkce. U podklonu všech idempotentních agregačních funkcí je situace odlišná, totiž unární idempotentní funkcí je pouze identita, čili triviální funkce. Tedy generující množina podklonu idempotentních agregačních funkcí musí obsahovat funkce arity alespoň druhé. V práci ukážeme, že lze vybrat všechny generátory jakožto binární funkce.

Po uvedení generující množiny onoho podklonu se dále zabýváme snížením mohutnosti množiny generátorů. Jinými slovy, ukážeme vztahy, jak mezi sebou vygenerovat funkce z generující množiny podklonu idempotentních agregačních funkcí. Hledáme tedy nejmenší generující množinu. Je to podobné jako u vektorových prostorů, kde je velký rozdíl mezi generující množinou a bází. V našem případě ukážeme nejmenší generující množinu pro konečné řetězce. Pro nejmenší generující množiny z obecného pohledu, tedy libovolného ohraničeného svazu, je situace velmi komplikovaná a dosud stále nevyřešená ani v případě klonu agregačních funkcí. Nicméně ukážeme různé cesty, jak onu nejmenší generující množinu nalézt. Z jedné strany hraje roli povaha samotného svazu a z druhé strany nastíníme algoritmus, který umožňuje nalezení nejmenší generující množiny podklonu idempotentních agregač-

ních funkcí libovolného ohraničeného svazu.

Ve druhé kapitole se budeme věnovat tzv. transferově-stabilním funkcím. Aritmetický průměr je asi nejznámější agregační funkcí vůbec a na reálných číslech je jeho podoba známá. Avšak naše zaměření na konečně ohraničené svazy vyvolává otázku, jak lze onen aritmetický průměr modelovat právě v těchto strukturách. Ukážeme, že aritmetický průměr nelze definovat na nelineárně uspořádaných strukturách, a ve druhé kapitole převedeme aritmetický průměr z nekonečných řetězců (reálná čísla) do konečných řetězců. Transformace je závislá na pojmu tzv. transferové-stability, přičemž budeme postupně zvyšovat jak počet prvků daného řetězce, tak i aritu oněch funkcí, nazývaných transferově-stabilní průměry [12]. Jedním z hlavních výsledků je popis struktury všech transferově-stabilních průměrů. Ve druhé části hledáme, podobně jako u klonů, generující množinu všech transferově-stabilních průměrů. Množina všech transferově-stabilních průměrů netvoří ovšem klon a nemůžeme tedy využívat stejných principů jako dříve. I přesto se můžeme zaměřit na generování, ale pouze z pohledu dané arity funkcí. Jinými slovy, při generování nemůžeme měnit aritu transferově-stabilních průměrů.

V poslední kapitole transferově-stabilní průměry oslabíme, čímž dostaneme transferově-stabilní agregační funkce, které lze sice definovat na libovolném konečném řetězci, ale ze samotné jejich podstaty se zaměříme pouze na dvě vhodné třídy svazů: distančně-stabilní a transferově-stabilní svazy, kdy první je podtřídou druhé. Postupně ukážeme rozdíly mezi jednotlivými třídami a dokážeme, jak daný svaz ovlivňuje chování transferově-stabilní agregační funkce. Hlavním výsledkem této kapitoly je charakterizace transferově-stabilních svazů podle jejich tvaru [13]. Významnou roli ohledně transferově-stabilních funkcí hraje také poslední podkapitola pojednávající o možné aplikaci transferově-stabilních agregačních funkcí. Ukážeme aplikaci

z pohledu obchodní strategie, kdy z pohledu koupě vícero produktů nám právě transferově-stabilní agregační funkce mohou pomoci ke vhodnému výběru kombinace produktů, abychom zachovali danou kvalitativní třídu, například poměr ceny k výkonu.

Cíle disertační práce

Studium této disertační práce je zaměřeno na několik vlastností agregačních funkcí na konečných svazech. Práce se z počátku věnuje propojení teorie klonů s teorií agregačních funkcí za podmínky idempotence. Dalším předmětem studia jsou transferově-stabilní agregační funkce a jejich kompletní popis, jak na konečných řetězcích se zahrnutou idempotencí nebo obecně na konečných svazech bez ní.

Hlavní cíle práce:

- I. Podrobný popis klonu idempotentních agregačních funkcí, zejména jeho generátorů.
- II. Transformace aritmetického průměru z reálných čísel na případ konečných svazů.
- III. Studium transferově-stabilních agregačních funkcí.

Výsledky

I. Idempotentní agregační klon [R1, R2]

- Binární funkce χ a med generující tento klon byly nalezeny.
- Na základě předchozího výsledku byla zkonstruována nejmenší (χ, med) -generující množina na konečných řetězcích.
- Následně byly zkoumány postupy, jak nalézt potenciálně nejmenší generující množinu na obecném konečném svazu, ať už na základě tvaru celého svazu nebo uspořádání prvků ve svazu.

II. Transformace aritmetického průměru; [R3]

- S využitím transferové-stability byly definovány transferově-stabilní průměry jakožto aritmetické průměry na konečných řetězcích.
- Struktura všech transferově-stabilních průměrů stejné arity byla popsána v jednom případě jako Booleovské svazy a v dalších jako direktní mocnina konečných řetězců.
- Ve zkoumané struktuře byly nalezeny generující funkce, pomocí nichž lze charakterizovat libovolný transferově-stabilní průměr.
- Závěrem bylo zkonstruováno speciální generování umožňující binární transferově-stabilní průměry využít k vytvoření celé struktury transferově-stabilních průměrů.

III. Transferově-stabilní agregační funkce [R4]

- Dokázali jsme, že aditivita a symetrie, jakožto vlastnosti aritmetického průměru, jsou plně pokryty transferovou-stabilitou.
- Definovali jsme distančně-stabilní svazy, načež byly zkoumány jejich charakteristiky a další vlastnosti spojené jak s teorií svazů, tak i teorií transferově-stabilních funkcí.
- Dále byla rozšířena třída distančně-stabilních svazů na třídu transferově-stabilních svazů, na kterých jsme zkoumali vlastnosti podobné výše uvedeným.
- V neposlední řadě charakterizujeme transferově-stabilní svazy pomocí největšího společného dělitele.
- Aplikace transferově-stabilních agregačních funkcí v obchodním sektoru pro koupi jednoho nebo vícero produktů.

Autorovy publikace použité v disertační práci

- [R1] Halaš R., Kurač Z., Pócs J. : *On the minimality of some generating sets of the aggregation clone on a finite chain*, Information Sciences 564 (2021) 193 – 201.
DOI 10.1016/j.ins.2021.02.070 (Scopus, WoS)
- [R2] Halaš R., Kurač Z., Mesiar R., Pócs J. : *Binary generating set of the clone of idempotent aggregation functions on bounded lattices*, Information Sciences 462 (2018) 367 – 373.
DOI 10.1016/j.ins.2018.06.038 (Scopus, WoS)
- [R3] Kurač Z.: *Transfer-stable means on finite chains*, Fuzzy Sets and Systems 372 (2019) 111 – 123.
DOI 10.1016/j.fss.2018.10.009 (Scopus, WoS)
- [R4] Kurač Z., Riemel T., Rýparová L.: *Transfer-stable aggregation functions on finite lattices*, Information Sciences 521 (2020) 88 – 106.
DOI 10.1016/j.ins.2020.02.043 (Scopus, WoS)

I.

K A P I T O L A

BINÁRNÍ GENERUJÍCÍ MNOŽINA KLONU
IDEMPOTENTNÍCH AGREGAČNÍCH
FUNKCÍ NA OHRANIČENÝCH SVAZECH

1.1 Algebraický úvod

Klíčovým tvrzením v tomto úvodu bude tzv. Baker-Pixleyho tvrzení popisující vztah mezi klony a algebry. Proto definujeme a připomeneme některé důležité pojmy zabývající se touto problematikou. Začneme s pojmem algebra, což je zobecnění pojmu svaz, o němž se budeme opírat v celém textu.

DEFINICE 1.1. Dvojice (A, F) se nazývá *algebra*, jestliže A je neprázdná množina (*nosič* algebry) a F je množina operací na A , tj. $f: A^k \rightarrow A$ pro $k \in \mathbb{N}_0$. Navíc pro libovolnou k -ární operaci $f \in F$ a libovolnou k -tici $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$ označíme $f(\mathbf{x})$ jakožto obraz (vyhodnocení) k -tice \mathbf{x} pomocí operace f .

DEFINICE 1.2. Neprázdnou podmnožinu $B \subseteq A$ nazveme *podalgebrou* algebry (A, F) , jestliže pro libovolnou k -ární operaci $f \in F$ a libovolné $\mathbf{x} \in B^k$ platí $f(\mathbf{x}) \in B$.

Evidentně, (B, F) je opět algebrou s podobnými operacemi jakožto algebra (A, F) , ale vztaženými vzhledem k množině B , tj. pro každou k -ární operaci $f \in F$, $f: A^k \rightarrow A$, je $f|_B: B^k \rightarrow B$ *restrikcí* operace f na množinu B .

Dalšími důležitými pojmy jsou direktní čtverec a obecně direktní mocnina, již budeme hojně využívat při práci s tzv. agregačními funkcemi v následující kapitole, ale i v dalších hlavních kapitolách pojednávajících o tzv. transferově-stabilních funkcích.

DEFINICE 1.3. Necht' (A, F) je algebra. Pak *direktním čtvercem* algebry (A, F) rozumíme algebru (A^2, F) s nosičem $A^2 = A \times A$ (kartézský čtverec množiny A), a s operacemi definovanými po složkách, tj. pro libovolnou k -ární operaci $f \in F$ a libovolnou k -tici $((x_{11}, x_{12}), \dots, (x_{k1}, x_{k2}))$ prvků z množiny A^2 platí

$$f((x_{11}, x_{12}), \dots, (x_{k1}, x_{k2})) = (f(x_{11}, \dots, x_{k1}), f(x_{12}, \dots, x_{k2})).$$

POZNÁMKA 1.4. Výše zmíněnou definici můžeme zobecnit na případ direktního součinu (mocniny) konečně mnoho algeber, tj. algebra (A^n, F) je n -tou *direktní mocninou* algebry (A, F) , kde $A^n = A \times \dots \times A$ a operace $f \in F$ jsou definované po složkách, tj.

$$f((x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, (x_{k1}, \dots, x_{kn})) = (f(x_{11}, \dots, x_{k1}), \dots, f(x_{1n}, \dots, x_{kn})).$$

Pro vztah mezi algebry a klony hraje důležitou roli zachování podalgeber některou z operací. Následně definujeme pojem již zmíněného klonu, jenž bude klíčovým pojmem v následující kapitole.

DEFINICE 1.5. Řekneme, že k -ární operace g na množině A *zachovává podalgebry* direktní mocniny (A^n, F) , jestliže pro libovolnou podalgebru B algebry (A^n, F) platí

$$\left(\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} \right) \in B \Rightarrow \begin{pmatrix} g(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}) \\ g(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2k}) \\ \vdots \\ g(b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nk}) \end{pmatrix} \in B.$$

Ze zmíněné definice je očividné, že pokud funkce g náleží množině F , pak se jedná o triviální případ, neboť každá operace z množiny F automaticky zachovává všechny podalgebry podle Definice 1.3 a Poznámky 1.4.

POZNÁMKA 1.6. Na výše uvedené definici se můžeme dívat i z pohledu relací na dané množině.

Nechť $\rho \subseteq A^n$ je n -ární relace na množině A a $f: A^k \rightarrow A$ je k -ární operace na množině A . Pak operace f zachovává relaci ρ (označujeme $f \triangleleft \rho$), jestliže pro libovolných k prvků z relace ρ platí

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \in \rho \Rightarrow \begin{pmatrix} f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k}) \\ f(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2k}) \\ \vdots \\ f(a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nk}) \end{pmatrix} \in \rho.$$

DEFINICE 1.7. Nechť A je množina, $k, n \in \mathbb{N}$, $f: A^k \rightarrow A$ je k -ární operace na A a $g_1, \dots, g_k: A^n \rightarrow A$ jsou n -ární operace na A . Pak pro libovolné $i \leq k$ definujeme i -tou k -ární projekci $p_i^k: A^k \rightarrow A$ předpisem

$$p_i^k(x_1, \dots, x_k) := x_i$$

pro každé $x_1, \dots, x_k \in A$. Složením operace f s operacemi g_1, \dots, g_k rozumíme n -ární operaci $f(g_1, \dots, g_k): A^n \rightarrow A$ zadanou vztahem

$$f(g_1, \dots, g_k)(\mathbf{x}) := f(g_1(\mathbf{x}), \dots, g_k(\mathbf{x}))$$

pro každé $\mathbf{x} \in A^n$.

DEFINICE 1.8. Množinu konečně-árních operací na množině A nazveme *klonem* na množině A , jestliže obsahuje všechny projekce na množině A a je uzavřená na skládání operací.

Množina všech klonů má vždy nejmenší prvek, tzv. *triviální klon* na A , obsahující pouze všechny projekce a největší prvek, tzv. *úplný klon* na A , obsahující všechny operace na množině A (označujeme \mathcal{O}_A). Navíc, vezmeme-li libovolnou množinu klonů, pak jejich průnikem dostaneme opět klon. Na základě tohoto faktu můžeme vyslovit následující definici.

DEFINICE 1.9. Pro libovolnou podmnožinu operací $F \subseteq \mathcal{O}_A$ můžeme vytvořit nejmenší klon $[F]$ obsahující množinu F jakožto průnik všech klonů obsahujících množinu F a nazýváme jej *klon generovaný množinou F* , tj.

$$[F] := \bigcap \{ \mathcal{C} \mid F \subseteq \mathcal{C}, \mathcal{C} \text{ je klon} \}.$$

Jestliže klon $\mathcal{C} = [F]$ je generovaný konečnou množinou F , pak řekneme, že klon \mathcal{C} je *konečně generovaný*.

Z hlediska generování, zejména konečného generování, hraje klíčovou roli následující operace.

DEFINICE 1.10. Pro $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$, k -ární operace na množině A se nazývá *nu-operace (near-unanimity)*, jestliže

$$f(y, x, \dots, x) = f(x, y, x, \dots, x) = \dots = f(x, \dots, x, y) = x,$$

pro každé $x, y \in A$, tzn. jestliže $n - 1$ vstupů z n se shoduje, pak výsledkem operace f je tatáž hodnota.

Speciálně, ternární nu-operace se nazývají *ternární majoritní operace* na množině A , tj.

$$f(x, x, y) = f(x, y, x) = f(y, x, x) = x$$

pro každé $x, y \in A$.

POZNÁMKA 1.11. Obecně, k -ární majoritní operace na množině A pro liché k je taková operace pro niž je většina vstupů stejná, pak výsledkem operace je tato vstupní hodnota. Příkladem reálné majoritní operace je tzv. řádově statistická funkce (viz Definice 2.27) pro liché k , která uspořádá vstupní hodnoty a nalezne prostřední hodnotu. Tuto funkci známe pod pojmem *medián*.

Závěrem algebraického úvodu zmíníme Baker-Pixleyho větu, která má klíčový význam při dokazování v dalších kapitolách.

TVRZENÍ 1.12. (Baker-Pixleyho) [1] *Nechť \mathcal{C} je klon na konečné množině A obsahující ternární majoritní operaci a f je libovolná operace na množině A . Pak $f \in \mathcal{C}$ právě tehdy, když f zachovává všechny podalgebry direktního čtverce algebry (A, \mathcal{C}) .*

DŮSLEDEK 1.13. [1] *Nechť \mathcal{C} je klonem na konečné množině A obsahující ternární majoritní operaci, pak je klon \mathcal{C} konečně generovaný.*

1.2 Idempotentní agregační klony na ohraničených svazech

Připomeňme, že uspořádaná množina (L, \leq) se nazývá *svazem*, jestliže pro každé dva prvky x, y z množiny L existuje supremum (nejmenší horní závora – spojení) a infimum (největší dolní závora – průsek). Operace po řadě označujeme symboly \vee a \wedge . Navíc, existuje-li nejmenší (resp. největší) prvek svazu L , označujeme jej $0_L = 0$ (resp. $1_L = 1$). Svaz L se nazývá *ohraničený*, má-li nejmenší a největší prvek. Jestliže v uspořádání \leq jsou každé dva prvky ze svazu L srovnatelné, tj. pro každé $x, y \in L$ platí

$$x \leq y \quad \text{nebo} \quad y \leq x,$$

pak se uspořádání \leq nazývá *lineární*. Lineárně uspořádaná množina (L, \leq) se nazývá *řetězec*. Více v knize [5].

DEFINICE 1.14. Pro libovolný svaz (L, \leq) a prvky $x, y \in L$ řekneme, že prvek y *pokrývá* prvek x (prvek x je *pokryt* prvkem y), označujeme $x \prec y$, jestliže $x \leq y$, $x \neq y$ a neexistuje prvek $z \in L$, $z \neq x$, $z \neq y$ takový, že $x \leq z \leq y$.

Jestliže L je svaz s nejmenším prvkem 0 , pak *atomem* rozumíme prvek pokrývající 0 , tj. $x \in L$ je atom, jestliže $0 \prec x$. Množinu všech atomů označíme $\text{At}(L)$. Duálně, jestliže L je svaz s největším prvkem 1 , pak *koatomem* rozumíme prvek pokrytý 1 , tj. $x \in L$ je koatom, jestliže $x \prec 1$. Množinu všech koatomů označíme $\text{CoAt}(L)$.

DEFINICE 1.15. Necht' (L, \leq) je ohraničený svaz. Zobrazení $A : L^k \rightarrow L$ se nazývá *k-ární agregační funkce na svazu L* , jestliže

i) je neklesající (v každé proměnné), tj. pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^n$ platí

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow A(\mathbf{x}) \leq A(\mathbf{y})$$

ii) splňuje okrajové podmínky, tj.

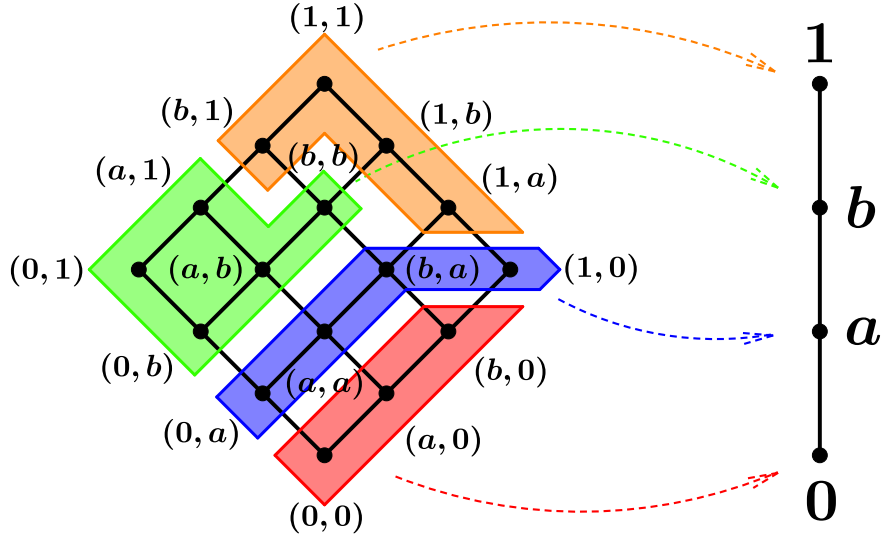
$$A(0, \dots, 0) = 0 \quad \text{a} \quad A(1, \dots, 1) = 1.$$

Navíc, pro přirozené číslo $k \geq 1$ označíme symbolem $\text{Agg}^k(L)$ množinu všech k -árních agregačních funkcí na svazu L a symbolem $\text{Agg}(L)$ množinu všech agregačních funkcí na svazu L .

Symbolem $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ pro $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ a $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)$ rozumíme $x_i \leq y_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$.

Aritu agregační funkce budeme značit symbolem k , a symbolem n budeme značit počet prvků daného svazu, zejména konečného n -prvkového řetězce C_n .

Na následujícím Obrázku 1 vidíme příklad binární agregační funkce na čtyřprvkovém řetězci.



Obrázek 1: Binární agregační funkce na čtyřprvkovém řetězci.

Lze snadno vidět, že každá projekce na svazu L je agregační funkcí a také složením agregačních funkcí na svazu L dle Definice 1.7 dostaneme opět agregační funkci. To znamená, že množina všech agregačních funkcí $\text{Agg}(L)$ na svazu L tvoří klon a nazýváme jej *agregační klon* na ohraničeném svazu L . Navíc svazové operace jsou též agregačními funkcemi, protože pro dvojice $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ platí

$$x_1 \wedge x_2 \leq y_1 \wedge y_2$$

$$x_1 \vee x_2 \leq y_1 \vee y_2$$

a

$$0 \wedge 0 = 0, \quad 1 \wedge 1 = 1$$

$$0 \vee 0 = 0, \quad 1 \vee 1 = 1,$$

což znamená, že svazové operace \wedge, \vee náleží do agregačního klonu $\text{Agg}(L)$.

Všechny agregační funkce a jejich generátory byly zkoumány v práci [8]. Nyní se zaměříme na tzv. idempotentní funkce pro něž podobně, jako pro všechny agregační funkce, nalezneme vhodné generátory.

DEFINICE 1.16. Agregační funkci $A : L^k \rightarrow L$ na ohraničeném svazu L nazveme *idempotentní*, platí-li $A(x, \dots, x) = x$ pro každé $x \in L$.

Pro přirozené číslo $k \geq 1$ označíme symbolem $\text{Id}^k(L)$ množinu všech k -árních idempotentních agregačních funkcí na svazu L a symbolem $\text{Id}(L)$ množinu všech idempotentních agregačních funkcí na svazu L .

Následující Lemma 1.17 popisuje vlastnost ekvivalentní idempotentnosti z pohledu agregačních funkcí, kterou budeme hojně využívat v důkazech, jakožto kritérium idempotentnosti.

LEMMA 1.17. [4] *Agregační funkce $A : L^k \rightarrow L$ na ohraničeném svazu L je idempotentní právě tehdy, když splňuje*

$$\bigwedge_{i=1}^k x_i \leq A(x_1, \dots, x_k) \leq \bigvee_{i=1}^k x_i \quad (1)$$

pro všechny k -tice $(x_1, \dots, x_k) \in L^k$.

Důkaz. Předpokládejme, že funkce A je idempotentní a uvažujme pevně zvolenou k -tici $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in L^k$. Pak existují $i, j \in \{1, \dots, k\}$ takové, že $\min(x_1, \dots, x_k) = x_i$ a $\max(x_1, \dots, x_k) = x_j$. S použitím idempotence funkce A dostaneme

$$\bigwedge_{l=1}^k x_l = x_i = A(x_i, \dots, x_i) \leq A(x_1, \dots, x_k) \leq A(x_j, \dots, x_j) = x_j = \bigvee_{l=1}^k x_l.$$

Naopak předpokládejme, že platí nerovnost (1). Pak

$$x = \bigwedge_{i=1}^k x \leq A(x, \dots, x) \leq \bigvee_{i=1}^k x = x$$

odkud dostaneme $A(x, \dots, x) = x$, a tedy funkce A je idempotentní. \square

Očividně $\text{ld}^k(L) \subset \text{Agg}^k(L)$ a tedy i $\text{ld}(L) \subset \text{Agg}(L)$. Vzniká proto přirozená otázka, zda i $\text{ld}(L)$ je klonem. Již víme, že projekce je agregační funkce a zbývá tedy dokázat, zda je i idempotentní. Podobně pro skládání agregačních funkcí, zda je zachována idempotence při skládání.

LEMMA 1.18. *Libovolná projekce je idempotentní a idempotentní agregační funkce tvoří třídu funkcí uzavřených na skládání. Tedy $\text{ld}(L)$ tvoří klon na svazu L .*

Důkaz. Necht' $p_i^k: L^k \rightarrow L$ je libovolná i -tá k -ární projekce, pro $k \in \mathbb{N}$ a $i \in \{1, \dots, k\}$. Pak pro každý prvek $x \in L$ platí $p_i^k(x, \dots, x) = x$.

Dále necht' $A: L^k \rightarrow L$ je k -ární idempotentní agregační funkce na svazu L a $B_1, \dots, B_k: L^n \rightarrow L$ jsou n -ární idempotentní agregační funkce na svazu L . Pak složená n -ární agregační funkce $A(B_1, \dots, B_k): L^n \rightarrow L$ je také idempotentní, neboť pro každý prvek $x \in L$ platí

$$\begin{aligned} A(B_1, \dots, B_k)(x, \dots, x) &= A(B_1(x, \dots, x), \dots, B_k(x, \dots, x)) \\ &= A(x, \dots, x) = x. \end{aligned}$$

Závěrem jsme dostali, že množina $\text{ld}(L)$ obsahuje všechny projekce a je uzavřená na skládání, což znamená, že se jedná o klon. \square

Klon $\text{ld}(L)$ z předchozího lemmatu se nazývá *idempotentní klon* (přesněji *idempotentní agregační klon*) na ohraničeném svazu L . Navíc tento klon obsahuje jak svazové operace \wedge, \vee , jelikož platí rovnosti $x \wedge x = x, x \vee x = x$, tak i svazové ternární majoritní funkce (ternární mediány) $\text{med}_\wedge: L^3 \rightarrow L$ a $\text{med}_\vee: L^3 \rightarrow L$, kde

$$\text{med}_\wedge(x, y, z) := (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \quad (2)$$

$$\text{med}_\vee(x, y, z) := (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z), \quad (3)$$

neboť se jedná o idempotentní agregační funkce, tj.

$$\begin{aligned}\text{med}_\wedge(x, x, x) &= (x \wedge x) \vee (x \wedge x) \vee (x \wedge x) = x \vee x \vee x = x \\ \text{med}_\vee(x, x, x) &= (x \vee x) \wedge (x \vee x) \wedge (x \vee x) = x \wedge x \wedge x = x.\end{aligned}$$

Odtud a z Důsledku 1.13 víme, že pro konečný svaz L je idempotentní klon $\text{Id}(L)$ konečně generovaný. Naším cílem bude nalézt generující množinu tohoto klonu pro případ konečných svazů. Ještě zmiňme, že důkaz Baker-Pixleyho tvrzení 1.12 ani důkaz jeho Důsledku 1.13 neposkytuje žádný návod, jak tuto generující množinu nalézt, ani žádnou informaci o funkcích a jejich aritách v libovolné generující množině.

1.3 Binární generátory idempotentního klonu a jejich vlastnosti

Ve článku [8] byly zkoumány unární funkce χ_a a binární funkce \oplus_a , přičemž funkce χ_a nabývala pouze hodnot 0 nebo 1 a funkce \oplus_a byla „skoro“ konstantní (viz rovnosti (4)).

$$\chi_a(x) := \begin{cases} 1 & ; x \geq a, x \neq 0 \\ 0 & ; \text{jinak,} \end{cases} \quad x \oplus_a y := \begin{cases} 1 & ; x = 1, y = 1 \\ 0 & ; x = 0, y = 0 \\ a & ; \text{jinak.} \end{cases} \quad (4)$$

Ukázalo se, že tyto dva typy funkcí, spolu se svazovými operacemi, generují agregační klon $\text{Agg}(L)$ ohraničeného svazu L . Nicméně ani funkce χ_a ani funkce \oplus_a nejsou idempotentní. Je tedy nutné oba typy funkcí vhodně „upravit“, aby se z nich staly idempotentní funkce, ale s cílem zachování generování idempotentního klonu $\text{Id}(L)$.

Unární funkci $\chi_a(x)$ ze vztahu (4) převedeme na binární tím způsobem, že místo hodnoty 1 bude nabývat spojení vstupních hodnot a místo hodnoty 0 bude nabývat průseku vstupních hodnot x a y . Na druhou stranu, binární funkci \oplus_a ze vztahu (4) nelze přirozeně zobecnit na idempotentní funkci, a proto je nutné využít ternární mediány ze vztahů (2) a (3), přičemž jejich propojení s funkcí \oplus_a je dáno následující rovností:

$$x \oplus_a y = \mathbf{med}_\wedge(\chi_0(x \vee y) \wedge \chi_1(x \wedge y), a, \chi_0(x \vee y) \vee \chi_1(x \wedge y)).$$

Výsledkem tohoto zkoumání jsou binární funkce χ_a a \mathbf{med}_a , které nyní podrobně popíšeme v následující definici.

DEFINICE 1.19. Na konečném (ohrazeném) svazu L definujeme pro každé $a \in L$ binární funkce $\mathbf{med}_a: L^2 \rightarrow L$ a $\chi_a: L^2 \rightarrow L$ následujícími předpisy

$$\mathbf{med}_a(x, y) := (x \wedge y) \vee (a \wedge (x \vee y)), \quad (5)$$

$$\chi_a(x, y) := \begin{cases} x \vee y & ; x \geq a \\ x \wedge y & ; \text{jinak.} \end{cases} \quad (6)$$

Poznamenejme, že funkce \mathbf{med}_a vznikla z průsekového ternárního mediánu, tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{med}_\wedge(x \wedge y, a, x \vee y) &= ((x \wedge y) \wedge a) \vee ((x \wedge y) \wedge (x \vee y)) \vee (a \wedge (x \vee y)) \\ &= ((x \wedge y) \wedge a) \vee (x \wedge y) \vee (a \wedge (x \vee y)) \\ &= (x \wedge y) \vee (a \wedge (x \vee y)) = \mathbf{med}_a(x, y). \end{aligned}$$

Ukážeme, že pro každé $a \in L$ funkce \mathbf{med}_a a χ_a reprezentují binární idempotentní agregační funkce na svazu L .

1) Předpokládejme, že $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$ a $a \in L$. Pak funkce med_a je neklesající, protože

$$\begin{aligned}\text{med}_a(x_1, x_2) &= (x_1 \wedge x_2) \vee (a \wedge (x_1 \vee x_2)) \\ &\leq (y_1 \wedge y_2) \vee (a \wedge (x_1 \vee x_2)) \\ &\leq (y_1 \wedge y_2) \vee (a \wedge (y_1 \vee y_2)) = \text{med}_a(y_1, y_2).\end{aligned}$$

Pro funkci χ_a mohou nastat 3 možnosti:

i) $a \leq x_1 \leq y_1$, pak

$$\chi_a(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 \leq y_1 \vee y_2 = \chi_a(y_1, y_2),$$

ii) $x_1 < a \leq y_1$, pak

$$\chi_a(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 \leq y_1 \vee y_2 = \chi_a(y_1, y_2),$$

iii) $x_1 \leq y_1 < a$, pak

$$\chi_a(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 \leq y_1 \wedge y_2 = \chi_a(y_1, y_2).$$

2) Pro každé $a \in L$ platí

$$\text{med}_a(0, 0) = (0 \wedge 0) \vee (a \wedge (0 \vee 0)) = 0 \vee (a \wedge 0) = 0$$

$$\text{med}_a(1, 1) = (1 \wedge 1) \vee (a \wedge (1 \vee 1)) = 1 \vee (a \wedge 1) = 1$$

$$\chi_a(0, 0) = \begin{cases} 0 \vee 0 & ; 0 \geq a \\ 0 \wedge 0 & ; \text{jinak} \end{cases} = 0$$

$$\chi_a(1, 1) = \begin{cases} 1 \vee 1 & ; 1 \geq a \\ & ; \text{jinak} \end{cases} = 1.$$

3) Pro každé $a \in L$ a libovolné $x \in L$ platí

$$\text{med}_a(x, x) = (x \wedge x) \vee (a \wedge (x \vee x)) = x \vee (a \wedge x) \stackrel{(\#)}{=} x$$

$$\chi_a(x, x) = \begin{cases} x \vee x & ; x \geq a \\ x \wedge x & ; \text{jinak} \end{cases} = x,$$

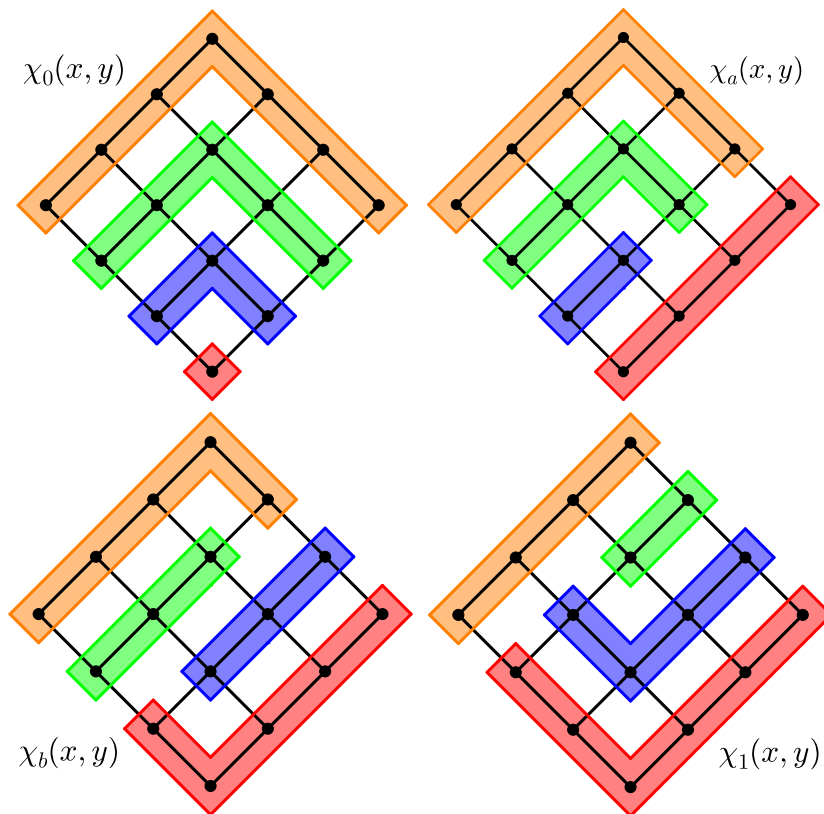
kde v rovnosti (#) byl použit zákon absorpce pro svazy.

4) Navíc pro každé $a \in L$ platí pro funkci med_a komutativita, tj.

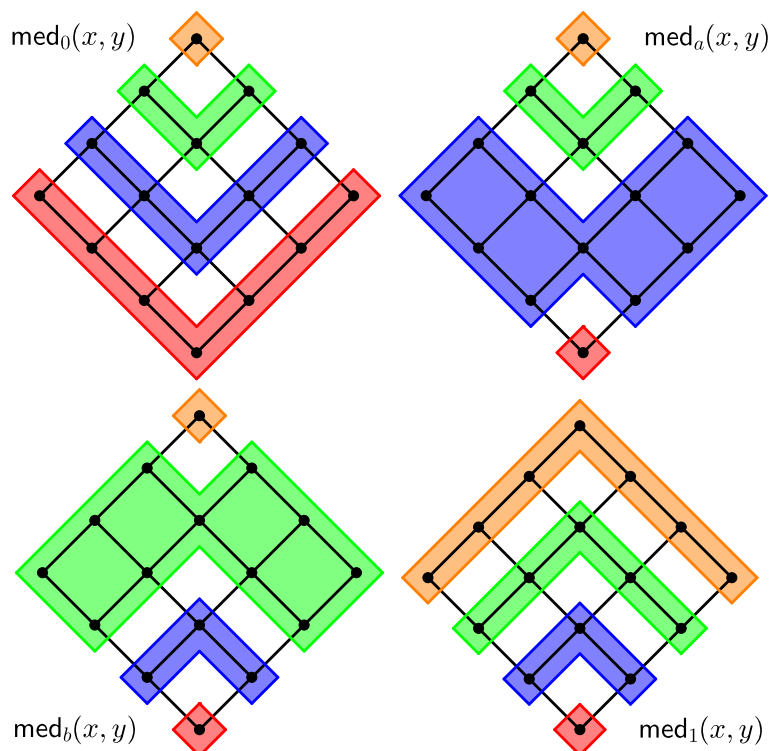
$$\text{med}_a(x, y) = (x \wedge y) \vee (a \wedge (x \vee y)) = (y \wedge x) \vee (a \wedge (y \vee x)) = \text{med}_a(y, x),$$

a neboť funkce med_\wedge je majoritní funkcí na L vyplývá pro funkci med_a rovnost $\text{med}_a(a, y) = a$.

Na následujících dvou obrázcích (Obrázek 2 a 3) jsou znázorněny všechny funkce χ_* a med_* na čtyřprvkovém řetězci $C_4 = \{0, a, b, 1\}$. Obrázky jsou vedeny v podobném duchu jako Obrázek 1, kde se červené dvojice zobrazily na hodnotu 0, modré dvojice na hodnotu a , funkční hodnota zelených dvojic je b a 1 je obrazem oranžových dvojic.



Obrázek 2: Všechny funkce χ_* na C_4 .



Obrázek 3: Všechny funkce med_* na C_4 .

Nyní poukážeme na některé další vlastnosti, jenž splňuje funkce med_a . Nejdříve se zaměříme na distributivní svazy. Připomeneme, že svaz L se nazývá *distributivní*, jestliže pro každé tři prvky $x, y, z \in L$ platí jedna z tzv. distributivních rovností: $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ nebo rovnost, kde spojení je distributivní vzhledem k průseku, tj. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. Navíc, pokud v ohraničeném distributivním svazu L pro každý prvek $x \in L$ existuje (právě jeden) komplement $x' \in L$, tj. $x \wedge x' = 0$ a $x \vee x' = 1$, pak se svaz nazývá *booleovský*.

VĚTA 1.20. *Nechť L je konečný distributivní svaz. Pak pro každé $a, b \in L$ platí*

$$i) \text{ med}_a(x, y) \vee \text{med}_b(x, y) = \text{med}_{a \vee b}(x, y),$$

$$ii) \text{ med}_a(x, y) \wedge \text{med}_b(x, y) = \text{med}_{a \wedge b}(x, y),$$

pro každé $x, y \in L$.

Důkaz. Za použití distributivních rovností ověříme obě podmínky.

i)

$$\begin{aligned} \text{med}_{a \vee b}(x, y) &= (x \wedge y) \vee ((a \vee b) \wedge (x \vee y)) \\ &= (x \wedge y) \vee (a \wedge (x \vee y)) \vee (b \wedge (x \vee y)) \\ &= (x \wedge y) \vee (a \wedge (x \vee y)) \vee (x \wedge y) \vee (b \wedge (x \vee y)) \\ &= \text{med}_a(x, y) \vee \text{med}_b(x, y), \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \text{med}_{a \wedge b}(x, y) &= (x \wedge y) \vee ((a \wedge b) \wedge (x \vee y)) \\ &= (x \wedge y) \vee ((a \wedge (x \vee y)) \wedge (b \wedge (x \vee y))) \\ &= ((x \wedge y) \vee (a \wedge (x \vee y))) \wedge ((x \wedge y) \vee (b \wedge (x \vee y))) \\ &= \text{med}_a(x, y) \wedge \text{med}_b(x, y). \end{aligned}$$

□

Věta 1.20 ukazuje, jak se chová průsek a spojení funkcí med_a pro distributivní svazy. Otázkou nyní je, zda lze nějaké podobné vlastnosti funkce med_a odvodit i na libovolném svazu. Větu 1.20 lze s mírnou úpravou zobecnit následujícím způsobem.

VĚTA 1.21. *Nechť L je konečný svaz a prvek $b \in L$. Označme množiny $A = \{a \in L \mid a \prec b\}$ a $C = \{c \in L \mid b \prec c\}$, přičemž $|A| \geq 2, |C| \geq 2$. Pak platí*

$$i) \bigvee_{a \in A} \text{med}_a(x, y) = \text{med}_b(x, y),$$

$$ii) \bigwedge_{c \in C} \text{med}_c(x, y) = \text{med}_b(x, y),$$

pro každé $x, y \in L$.

Důkaz. Z toho, že svaz L je konečný, plyne, že i množiny A a C jsou konečné, kde množina A obsahuje všechny prvky, jenž prvek b pokrývá, a množina C obsahuje všechny prvky, jenž pokrývají prvek b . Označme prvky množiny A jako a_1, \dots, a_n a prvky množiny C jako c_1, \dots, c_m , kde $n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq 2$.

Pak

$$\begin{aligned} \bigvee_{i=1}^n \text{med}_{a_i}(x, y) &= \text{med}_{a_1}(x, y) \vee \dots \vee \text{med}_{a_n}(x, y) \\ &= (x \wedge y) \vee (a_1 \wedge (x \vee y)) \vee \dots \vee (x \wedge y) \vee (a_n \wedge (x \vee y)) \\ &= (x \wedge y) \vee (a_1 \wedge (x \vee y)) \vee \dots \vee (a_n \wedge (x \vee y)). \end{aligned}$$

Zabývejme se nyní následujícími případy:

I. $x \vee y \geq b$. Pak

$$\begin{aligned} \bigvee_{i=1}^n \text{med}_{a_i}(x, y) &= (x \wedge y) \vee (a_1 \wedge (x \vee y)) \vee \dots \vee (a_n \wedge (x \vee y)) \\ &= (x \wedge y) \vee a_1 \vee \dots \vee a_n \\ &= (x \wedge y) \vee b \\ &= (x \wedge y) \vee (b \wedge (x \vee y)) \\ &= \text{med}_b(x, y). \end{aligned}$$

II. $x \vee y < b$. Pak existuje alespoň jedno $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x \vee y \leq a_i$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x \vee y \leq a_j$ pro $j \in \{1, \dots, i\}$. Pak

$$\begin{aligned}
\bigvee_{i=1}^n \text{med}_{a_i}(x, y) &= (x \wedge y) \vee (a_1 \wedge (x \vee y)) \vee \dots \vee (a_i \wedge (x \vee y)) \vee \\
&\quad \vee (a_{i+1} \wedge (x \vee y)) \vee \dots \vee (a_n \wedge (x \vee y)) \\
&= (x \wedge y) \vee (x \vee y) \vee \dots \vee (x \vee y) \vee z_{i+1} \vee \dots \vee z_n \\
&= (x \wedge y) \vee (x \vee y) \\
&= (x \wedge y) \vee (b \wedge (x \vee y)) \\
&= \text{med}_b(x, y),
\end{aligned}$$

kde prvky $z_{i+1}, \dots, z_n \leq x \vee y$.

III. $x \vee y \geq a_i$ pro některé $i \in \{1, \dots, n\}$. Pokud by platilo, že $x \vee y \geq a_j$ a $x \vee y \geq a_k$ pro $j, k \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq k$, pak se dostaneme na případ I., tedy existuje právě jedno $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x \vee y \geq a_i$.

$$\begin{aligned}
&\bigvee_{i=1}^n \text{med}_{a_i}(x, y) = \\
&= (x \wedge y) \vee (a_1 \wedge (x \vee y)) \vee \dots \vee (a_i \wedge (x \vee y)) \vee \dots \vee (a_n \wedge (x \vee y)) = \\
&= (x \wedge y) \vee z_1 \vee \dots \vee z_{i-1} \vee a_i \vee z_{i+1} \vee \dots \vee z_n = \\
&= (x \wedge y) \vee a_i = (x \wedge y) \vee (b \wedge (x \vee y)) = \\
&= \text{med}_b(x, y),
\end{aligned}$$

kde prvky $z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n \leq a_i$.

Zbývá nám dokázat, že pro každé $j \neq i$ platí $z_j < a_i$. Předpokládejme, že tomu tak není. Pak mohou nastat dvě množnosti:

- a) $z_j = (a_j \wedge (x \vee y)) \geq a_i$. Tedy $a_j \geq (a_j \wedge (x \vee y)) \geq a_i$ což je evidentně spor, protože prvky a_j a a_i pro $j \neq i$ jsou nesrovnatelné.

b) Prvky z_j a a_i jsou nesrovnatelné. Odtud plyne, že $z_j \vee a_i \geq b$. Jenomže

$$\begin{aligned} z_j &= (a_j \wedge (x \vee y)) \leq a_j \\ z_j \vee a_i &\leq a_j \vee a_i = b. \end{aligned}$$

Dostáváme tedy, že $z_j \vee a_i = b$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i$. Dále platí, že

$$\begin{aligned} z_j &= (a_j \wedge (x \vee y)) \leq x \vee y \\ b &= z_j \vee a_i \leq (x \vee y) \vee a_i = x \vee y. \end{aligned}$$

Dostali jsme, že $b \leq x \vee y$, což odpovídá případu I.

IV. Prvek $x \vee y$ je nesrovnatelný s prvky a_1, \dots, a_n, b . Pak $b \wedge (x \vee y) < a_i$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$. Odtud vyplývá, že

$$\begin{aligned} b \wedge (x \vee y) &\leq a_i \wedge (x \vee y) \leq \bigvee_{j=1}^n a_j \wedge (x \vee y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{med}_b(x, y) \leq \bigvee_{j=1}^n \text{med}_{a_j}(x, y) \end{aligned}$$

Obráceně, z předpokladu platí, že $a_j < b$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$. Pak

$$\begin{aligned} a_j \wedge (x \vee y) &\leq b \wedge (x \vee y) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigvee_{j=1}^n a_j \wedge (x \vee y) &\leq b \wedge (x \vee y) \Rightarrow \\ \Rightarrow \bigvee_{j=1}^n \text{med}_{a_j}(x, y) &\leq \text{med}_b(x, y). \end{aligned}$$

Dohromady dostáváme, že

$$\bigvee_{j=1}^n \text{med}_{a_j}(x, y) = \text{med}_b(x, y).$$

Analogicky by se dokázala podmínka *ii*) pro průseky. □

VĚTA 1.22. *Nechť L je konečný svaz. Pak pro každé dva nesrovnatelné prvky $a, b \in L$ a každé dva srovnatelné prvky $e, f \in L$, $e \leq f$, platí*

$$1. \chi_a(x, y) \wedge \chi_b(x, y) = \chi_{a \vee b}(x, y),$$

$$2. \chi_e(x, y) \vee \chi_f(x, y) = \chi_e(x, y),$$

pro každé $x, y \in L$.

Důkaz. Nejdříve dokážeme první rovnost. Předpokládejme, že $a \vee b = c$, tj. $a < c, b < c$. Důkaz rozdělíme na 4 části:

I. $x \geq a, x \geq b$

Pak $\chi_a(x, y) = x \vee y$ a $\chi_b(x, y) = x \vee y$ odkud je okamžitým důsledkem, že $\chi_a(x, y) \wedge \chi_b(x, y) = x \vee y$. Z předpokladu platí, že $x \geq a \vee b = c$, a tedy $\chi_c(x, y) = x \vee y$.

II. $x \not\geq a, x \not\geq b$

Pak $\chi_a(x, y) = x \wedge y$ a $\chi_b(x, y) = x \wedge y$ odkud je okamžitým důsledkem, že $\chi_a(x, y) \wedge \chi_b(x, y) = x \wedge y$. Dále z předpokladu mohou nastat dvě možnosti, buď $x < a$, nebo x a a jsou nesrovnatelné. Z první možnosti plyne nerovnost $x < a < c$ odkud $\chi_c(x, y) = x \wedge y$. Druhou možnost dokážeme sporem. Kdyby platilo $x \geq c$, znamenalo by to, že $x \geq c > a$, což je spor s tím, že x a a jsou nesrovnatelné. Odtud musí platit, že $\chi_c(x, y) = x \wedge y$.

III. $x \geq a, x \not\geq b$

Pak $\chi_a(x, y) = x \vee y$ a $\chi_b(x, y) = x \wedge y$ odkud je okamžitým důsledkem, že $\chi_a(x, y) \wedge \chi_b(x, y) = x \wedge y$. Dále kdyby platilo $x \geq c$, pak $x \geq c > b$, což je spor s tím, že podle předpokladu může nastat buď $x < b$, anebo x a b jsou nesrovnatelné, a tedy $\chi_c(x, y) = x \wedge y$.

IV. $x \not\geq a, x \geq b$

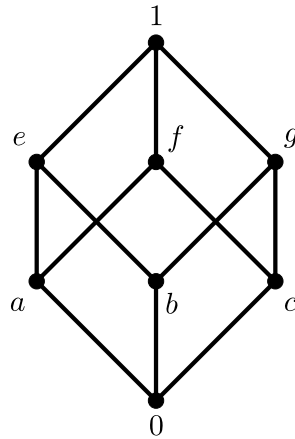
Analogicky jako část III. akorát pro prvek a .

Důkaz druhé rovnosti je o poznání jednodušší, neboť se můžeme zabývat pouze případem, kdy by rovnost nebyla splněna. Tato skutečnost nastane v případě, že funkce χ_e nabude infima a funkce χ_f suprema. To ale nastane právě tehdy, když $x \geq f$, ale $x \not\geq e$, což je evidentní spor s předpokladem, čili rovnost je splněna pro každé $x, y \in L$.

□

Ve Větě 1.22 můžeme vidět, že spojení funkcí χ_* je vázáno podmínkou srovnatelných prvků, a proto ona rovnost neplatí obecně, to znamená $\chi_a(x, y) \vee \chi_b(x, y) \neq \chi_{a \wedge b}(x, y)$ nastane pro nějaké prvky $x, y \in L$. Bohužel tomu nepomůže ani podmínka distributivity, neboť například pro booleovský svaz, zobrazený na Obrázku 4, dostaneme pro dvojici $(c, 0) \in L^2$:

$$\chi_a(c, 0) \vee \chi_b(c, 0) = 0 \vee 0 \neq c = \chi_0(c, 0) = \chi_{a \wedge b}(c, 0).$$



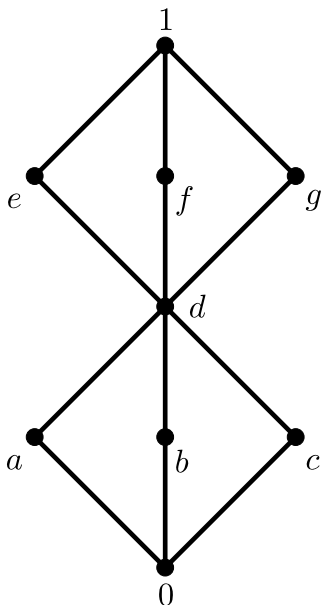
Obrázek 4: Booleovský Svaz.

Pokud bychom generování funkcí χ_a pro $a \in L$ ve Větě 1.22 chápali jakožto generování „směrem nahoru“, tak později na příkladu ukážeme, že generování „směrem dolů“ není obecně možné ani s pomocí funkcí med_a pro $a \in L$ a svazových operací.

PŘÍKLAD 1.23. Na příkladu svazu L_1 zobrazeného na Obrázku 5 ukážeme platnost právě zmíněných Vět 1.21, 1.22. Navíc se nejedná o distributivní svaz, protože

$$a \wedge (b \vee c) = a \wedge d = a \neq 0 = 0 \vee 0 = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Taktéž poukážeme na fakt, proč Věta 1.20 neplatí obecně.



Obrázek 5: Svaz L_1 .

Nejdříve se budeme zabývat Větou 1.20 a ukážeme, že

$$\text{med}_a \vee \text{med}_b \neq \text{med}_d \quad (\text{respektive } \text{med}_a \vee \text{med}_b \neq \text{med}_{a \vee b}),$$

a podobně i pro průsek

$$\text{med}_e \wedge \text{med}_f \neq \text{med}_d \quad (\text{respektive } \text{med}_e \wedge \text{med}_f \neq \text{med}_{e \wedge f}).$$

Pro jednoduchost a lepší znázornění, všechny námi používané funkce vypíšeme a vhodně označíme.

$$\begin{aligned} \text{med}_{\alpha\beta}(x, y) &= \text{med}_a(x, y) \vee \text{med}_b(x, y) \\ &= (x \wedge y) \vee (a \wedge (x \vee y)) \vee (b \wedge (x \vee y)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{med}_{\alpha\beta\gamma}(x, y) &= \text{med}_a(x, y) \vee \text{med}_b(x, y) \vee \text{med}_c(x, y) \\ &= (x \wedge y) \vee (a \wedge (x \vee y)) \vee (b \wedge (x \vee y)) \vee (c \wedge (x \vee y)), \end{aligned}$$

$$\text{med}_d(x, y) = (x \wedge y) \vee (d \wedge (x \vee y)),$$

$$\begin{aligned} \text{med}_{\zeta\eta}(x, y) &= \text{med}_e(x, y) \vee \text{med}_f(x, y) \\ &= [(x \wedge y) \vee (e \wedge (x \vee y))] \wedge [(x \wedge y) \vee (f \wedge (x \vee y))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{med}_{\zeta\eta\theta}(x, y) &= \text{med}_e(x, y) \vee \text{med}_f(x, y) \vee \text{med}_g(x, y) \\ &= [(x \wedge y) \vee (e \wedge (x \vee y))] \wedge [(x \wedge y) \vee (f \wedge (x \vee y))] \wedge \\ &\quad \wedge [(x \wedge y) \vee (g \wedge (x \vee y))]. \end{aligned}$$

Snadno se můžeme přesvědčit o neplatnosti Věty 1.20 pro nedistributivní svazy, protože

$$\begin{aligned} \text{med}_{\alpha\beta}(0, c) = 0 &\neq c = \text{med}_d(0, c) = \text{med}_{a \vee b}(0, c) \\ \text{med}_{\zeta\eta}(1, g) = 1 &\neq g = \text{med}_d(1, g) = \text{med}_{e \wedge f}(1, g). \end{aligned}$$

Nyní sestrojíme tabulku pro všechny důležité hodnoty z L_1^2 a srovnáme funkce $\text{med}_{\alpha\beta\gamma}$, med_d a $\text{med}_{\zeta\eta\theta}$, čímž ověříme platnost Věty 1.21. Připomeňme, že funkce med je komutativní i idempotentní, tím pádem nemusíme uvažovat všechny hodnoty z L_1^2 .

(x, y)	$\text{med}_{\alpha\beta\gamma}(x, y)$	$\text{med}_d(x, y)$	$\text{med}_{\zeta\eta\theta}(x, y)$
$(0, a)$	a	a	a
$(0, b)$	b	b	b
$(0, c)$	c	c	c
$(0, d)$	d	d	d
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$(0, 1)$	d	d	d
(a, b)	d	d	d
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$(a, 1)$	d	d	d
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
(b, c)	d	d	d
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$(b, 1)$	d	d	d
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
(e, f)	d	d	d
(e, g)	d	d	d
$(e, 1)$	e	e	e
(f, g)	d	d	d
$(f, 1)$	f	f	f
$(g, 1)$	g	g	g

Tabulka 1: Vyhodnocení některých dvojic ze svazu L_1^2 funkcemi $\text{med}_{\alpha\beta\gamma}$, med_d a $\text{med}_{\zeta\eta\theta}$.

Ve druhé části příkladu se zaměříme na Větu 1.22, ale nejdříve ukážeme, že duální Věta 1.22 neplatí, tzn. $\chi_e(x, y) \vee \chi_f(x, y) \neq \chi_d(x, y)$. Například pro dvojici $(g, 1) \in L_1^2$ máme

$$\chi_e(g, 1) \vee \chi_f(g, 1) = g \vee g = g \neq 1 = \chi_d(g, 1).$$

Podobně jako v předchozím sestrojíme tabulku a prokážeme tím platnost Věty 1.22. Tedy pro každé $y \in L$ platí

x	$\chi_a(x, y) \wedge \chi_b(x, y)$	$\chi_d(x, y)$
0	0	0
a	$a \wedge y$	$a \wedge y$
b	$b \wedge y$	$b \wedge y$
c	$c \wedge y$	$c \wedge y$
d	$d \vee y$	$d \vee y$
e	$e \vee y$	$e \vee y$
f	$f \vee y$	$f \vee y$
g	$g \vee y$	$g \vee y$
1	1	1

Tabulka 2: Vyhodnocení pro $x \in L_1$ funkcemi $\chi_a \wedge \chi_b$ a χ_d .

Jak ukazuje následující lemma, svazové operace lze odvodit z funkcí χ_a a med_a , a proto na ně není třeba nahlížet zvlášť jakožto na funkce, které je potřeba mít vždy v generující množině.

LEMMA 1.24. *Nechť L je konečný svaz, pak platí*

- i) $\text{med}_0(x, y) = x \wedge y$,*
- ii) $\text{med}_1(x, y) = x \vee y$,*
- iii) $\chi_0(x, y) = x \vee y$.*

Důkaz. Vhodným dosazením ihned obdržíme tvrzené rovnosti.

i)

$$\mathbf{med}_0(x, y) = (x \wedge y) \vee (0 \wedge (x \vee y)) = (x \wedge y) \vee 0 = x \wedge y,$$

ii)

$$\mathbf{med}_1(x, y) = (x \wedge y) \vee (1 \wedge (x \vee y)) = (x \wedge y) \vee (x \vee y) = x \vee y,$$

iii)

$$\chi_0(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} x \vee y \quad ; \quad x \geq 0 \\ x \wedge y \quad ; \quad \text{jinak} \end{array} \right\} = \left\{ x \vee y \quad ; \quad x \geq 0 \right\} = x \vee y.$$

□

1.4 Generování idempotentního klonu

V další kapitole ukážeme, že binární idempotentní agregační funkce \mathbf{med}_a a χ_a , spolu se svazovými operacemi \wedge a \vee , generují idempotentní klon $\mathbf{Id}(L)$.

Ke zjednodušení zápisu a výpočtů zobecníme funkce χ_a a \mathbf{med}_a následujícím způsobem: pro každé $a \in L$ a $k \geq 2$ definujeme k -ární funkci $\chi_a^k : L^k \rightarrow L$ a $\mathbf{med}_a^k : L^k \rightarrow L$ následovně

$$\chi_a^k(x_1, \dots, x_k) := \left\{ \begin{array}{l} \bigvee_{i=1}^k x_i \quad ; \quad x_1 \geq a \\ \bigwedge_{i=1}^k x_i \quad ; \quad \text{jinak,} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\mathbf{med}_a^k(x_1, \dots, x_k) := \bigwedge_{i=1}^k x_i \vee \left(a \wedge \left(\bigvee_{i=1}^k x_i \right) \right). \quad (8)$$

LEMMA 1.25. *Nechť $a \in L$. Pak pro každé $k \geq 2$ funkce χ_a^k vznikne složením binárních funkcí χ_a a k -ármích projekcí p_i^k pro $i \in \{1, \dots, k\}$, funkce med_a^k složením binárních funkcí med_a , svazových operací a k -ármích projekcí p_i^k pro $i \in \{1, \dots, k\}$.*

Důkaz. Důkaz prvního tvrzení provedeme indukcí přes aritu k . Pro $k = 2$ je důkaz triviální. Tedy předpokládejme, že $k \geq 3$. Dokážeme, že platí následující rovnost:

$$\chi_a^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) = \chi_a(\chi_a^k(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}).$$

Za první, jestliže $x_1 \geq a$. Pak

$$\chi_a^k(x_1, \dots, x_k) = \bigvee_{i=1}^k x_i \geq a,$$

a tedy

$$\chi_a(\chi_a^k(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}) = \bigvee_{i=1}^k x_i \vee x_{k+1} = \bigvee_{i=1}^{k+1} x_i = \chi_a^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}).$$

Za druhé, jestliže $x_1 \not\geq a$. Pak

$$\chi_a^k(x_1, \dots, x_k) = \bigwedge_{i=1}^k x_i \not\geq a,$$

a tudíž

$$\chi_a(\chi_a^k(x_1, \dots, x_k), x_{k+1}) = \bigwedge_{i=1}^k x_i \wedge x_{k+1} = \bigwedge_{i=1}^{k+1} x_i = \chi_a^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}).$$

Druhá část Lemmatu 1.25 se dokáže následovně:

$$\begin{aligned} \text{med}_a \left(\bigwedge_{i=1}^k x_i, \bigvee_{i=1}^k x_i \right) &= \left(\bigwedge_{i=1}^k x_i \wedge \bigvee_{i=1}^k x_i \right) \vee \left(a \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^k x_i \vee \bigvee_{i=1}^k x_i \right) \right) \\ &= \bigwedge_{i=1}^k x_i \vee \left(a \wedge \left(\bigvee_{i=1}^k x_i \right) \right) = \text{med}_a(x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

□

Je evidentní, že k -ární funkce χ_a^k a med_a^k jsou opět idempotentními agregačními funkcemi na svazu L , neboť jsou složeny z idempotentních funkcí, a tedy $\chi_a^k, \text{med}_a^k \in \text{Id}(L)$.

Dále, pro $k \geq 2$ a pevné $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in L^k$, definujeme k -ární funkci $\mu_{\mathbf{a}} : L^k \rightarrow L$ předpisem

$$\mu_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_k) := \bigwedge_{i=1}^k \chi_{a_i}^k(x_i, \dots, x_1, \dots, x_n),$$

jinými slovy funkce $\mu_{\mathbf{a}}$ vznikne průsekem funkcí $\chi_{a_i}^k$, přičemž se zamění vstupní hodnoty x_1 a x_i . Např. pro $k = 3$ obdržíme

$$\mu_{(a_1, a_2, a_3)}(x_1, x_2, x_3) = \chi_{a_1}^3(x_1, x_2, x_3) \wedge \chi_{a_2}^3(x_2, x_1, x_3) \wedge \chi_{a_3}^3(x_3, x_2, x_1).$$

Je zřejmé, že každá funkce $\mu_{\mathbf{a}}$ je taktéž idempotentní a vzhledem k předchozímu Lemmatu 1.25 může být složena pomocí projekcí a množinou binárních funkcí χ_a pro $a \in L$ definovaných vztahem (6).

LEMMA 1.26. *Nechť $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{a} \in L^k$. Pak pro funkci $\mu_{\mathbf{a}} : L^k \rightarrow L$ platí*

$$\mu_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} \bigvee_{i=1}^k x_i & ; \mathbf{x} \geq \mathbf{a} \\ \bigwedge_{i=1}^k x_i & ; \text{jinak} \end{cases} \quad (9)$$

pro každé $\mathbf{x} \in L^k$.

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathbf{x} \geq \mathbf{a}$, tj. $x_i \geq a_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$. Pak použitím vztahu (7) plyne

$$\chi_{a_i}^k(x_i, \dots, x_1, \dots, x_k) = \bigvee_{j=1}^k x_j.$$

Tedy

$$\mu_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_k) = \bigwedge_{i=1}^k \left(\bigvee_{j=1}^k x_j \right) = \bigvee_{j=1}^k x_j.$$

Jestliže $\mathbf{x} \not\geq \mathbf{a}$, tj. pro nějaké $j \in \{1, \dots, k\}$ platí $x_j \not\geq a_j$, pak ze vztahu (7) obdržíme

$$\chi_{a_j}^k(x_j, \dots, x_1, \dots, x_k) = \bigwedge_{l=1}^k x_l \leq \chi_{a_i}^k(x_i, \dots, x_1, \dots, x_k)$$

pro každé $i \in \{1, \dots, k\}$. Tedy

$$\mu_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_k) = \bigwedge_{i=1}^{j-1} \chi_{a_i}^k \wedge \bigwedge_{l=1}^k x_l \wedge \bigwedge_{i=j+1}^k \chi_{a_i}^k = \bigwedge_{l=1}^k x_l.$$

□

Z právě zmíněného Lemmatu 1.26 a Věty 1.22 plynou vlastnosti pro funkci $\mu_{\mathbf{a}}$.

DŮSLEDEK 1.27. *Nechť L je konečný svaz. Pak pro každé dva nesrovnatelné prvky $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in L^k$ a každé dva srovnatelné prvky $\mathbf{e}, \mathbf{f} \in L^k$, $\mathbf{e} \leq \mathbf{f}$ platí*

1. $\mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \wedge \mu_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \mu_{\mathbf{a} \vee \mathbf{b}}(\mathbf{x})$,

2. $\mu_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \vee \mu_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mu_{\mathbf{e}}(\mathbf{x})$,

pro každé $\mathbf{x} \in L^k$.

Jako poslední zavedeme k -ární (idempotentní) funkci $h_{\mathbf{a}}^A: L^k \rightarrow L$, jež je pro libovolnou k -ární idempotentní agregační funkci A na svazu L a $\mathbf{a} \in L^k$ dána následovně

$$h_{\mathbf{a}}^A(x_1, \dots, x_k) := \mu_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_k) \wedge \text{med}_{A(\mathbf{a})}^k(x_1, \dots, x_k). \quad (10)$$

LEMMA 1.28. *Nechť $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{a} \in L^k$. Pak pro funkci $h_{\mathbf{a}}: L^k \rightarrow L$ platí*

$$h_{\mathbf{a}}^A(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} \text{med}_{A(\mathbf{a})}^k(x_1, \dots, x_k); & \mathbf{x} \geq \mathbf{a} \\ \bigwedge_{i=1}^k x_i; & \text{jinak} \end{cases} \quad (11)$$

pro každé $\mathbf{x} \in L^k$.

Důkaz. Jelikož k -ární funkce med_a^k je idempotentní, pak podle Lemmatu 1.17 platí nerovnost

$$\bigwedge_{i=1}^k x_i \leq \text{med}_{A(\mathbf{a})}^k(x_1, \dots, x_k) \leq \bigvee_{i=1}^k x_i$$

pro všechny k -tice $(x_1, \dots, x_k) \in L^k$. Tedy pro $\mathbf{x} \geq \mathbf{a}$, vzhledem ke vztahu (9) z Lemmatu 1.26, obdržíme

$$h_{\mathbf{a}}^A(x_1, \dots, x_k) = \bigvee_{i=1}^k x_i \wedge \text{med}_{A(\mathbf{a})}^k(x_1, \dots, x_k) = \text{med}_{A(\mathbf{a})}^k(x_1, \dots, x_k),$$

zatímco pro $\mathbf{x} \not\geq \mathbf{a}$ máme

$$h_{\mathbf{a}}^A(x_1, \dots, x_k) = \bigwedge_{i=1}^k x_i \wedge \text{med}_{A(\mathbf{a})}^k(x_1, \dots, x_k) = \bigwedge_{i=1}^k x_i.$$

□

TVRZENÍ 1.29. *Nechť $A: L^k \rightarrow L$ je libovolná k -ární idempotentní agregační funkce na konečném svazu L . Pak*

$$A(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{a} \in L^k} h_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}).$$

Důkaz. Pro $\mathbf{x} \in L^k$ libovolné ale pevně zvolené, provedeme přímý výpočet následovně:

$$\begin{aligned} \bigvee_{\mathbf{a} \in L^k} h_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}) &= \bigvee_{\substack{\mathbf{a} \in L^k \\ \mathbf{a} \leq \mathbf{x}}} h_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}) \vee \bigvee_{\substack{\mathbf{a} \in L^k \\ \mathbf{a} \not\leq \mathbf{x}}} h_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}) \stackrel{(1)}{=} \\ &= \bigvee_{\substack{\mathbf{a} \in L^k \\ \mathbf{a} \leq \mathbf{x}}} \text{med}_{A(\mathbf{a})}^k(x_1, \dots, x_k) \vee \bigvee_{\substack{\mathbf{a} \in L^k \\ \mathbf{a} \not\leq \mathbf{x}}} \left(\bigwedge_{i=1}^k x_i \right) \stackrel{(2)}{=} \\ &= \bigvee_{\substack{\mathbf{a} \in L^k \\ \mathbf{a} \leq \mathbf{x}}} \text{med}_{A(\mathbf{a})}^k(x_1, \dots, x_k) \stackrel{(3)}{=} \text{med}_{A(\mathbf{x})}^k(x_1, \dots, x_k) \stackrel{(4)}{=} A(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

kde rovnost (1) plyne z Lemmatu 1.28, rovnost (2) a (4) z Lemmatu 1.17 a rovnost (3) ze skutečnosti, že podmínka $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$ implikuje

$$\text{med}_{A(\mathbf{a})}^k(x_1, \dots, x_k) \leq \text{med}_{A(\mathbf{x})}^k(x_1, \dots, x_k).$$

□

1.5 (χ, med) -generující množina idempotentního klonu

Z Lemmatu 1.24 víme, že funkce χ_0 , med_0 a med_1 reprezentují svazové operace a mohou být vynechány z generující množiny, odkud platí následující důsledek.

DŮSLEDEK 1.30. *Pro každý konečný n -prvkový svaz L množina binárních funkcí*

$$\{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_a \mid a \in L \setminus \{0\}\} \cup \{\text{med}_a \mid a \in L \setminus \{0, 1\}\}$$

generuje idempotentní klon $\text{Id}(L)$. Počet generátorů je shora ohraničen číslem $2n - 1$.

Množin generujících idempotentní klon je nekonečně mnoho a mohou obsahovat různé typy funkcí různých arit. Budeme se zabývat takovými generujícími množinami, jež obsahují svazové operace a funkce χ_a , med_a .

DEFINICE 1.31. *Nechť L je konečný svaz. Množinu S nazveme (χ, med) -generující množinou idempotentního klonu $\text{Id}(L)$, jestliže*

$$S \subseteq \{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_a, \text{med}_a \mid a \in L\}$$

a množina S generuje idempotentní klon $\text{Id}(L)$.

TVRZENÍ 1.32. *Nechť L je alespoň tříprvkový konečný řetězec s n prvky. Pak množina*

$$G = \{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_a \mid a \in L \setminus \{0\}\} \cup \{\text{med}_a \mid a \in L \setminus \{0, 1\}\}$$

je nejmenší (vzhledem k inkluzi) (χ, med) -generující množinou idempotentního klonu $\text{Id}(L)$.

Důkaz. Pro jednoduchost, konečný řetězec L označíme $L = \{1, \dots, n\}$ s klasickým uspořádáním $1 < \dots < n$. V tomto případě je nejmenší prvek $0 = 1$ a největší prvek $1 = n$. Podle Důsledku 1.30 množina G generuje idempotentní klon $\text{Id}(L)$. Dokážeme, že G je nejmenší možnou (χ, med) -generující množinou, tzn. neexistuje vlastní podmnožina množiny G , která by generovala idempotentní klon $\text{Id}(L)$.

Nejprve ukážeme, že pro libovolné $i \in \{1, \dots, n\}$ množina $G_i = G \setminus \{\chi_i\}$ negeneruje idempotentní klon $\text{Id}(L)$. Pro důkaz tohoto tvrzení nalezneme podmnožinu $B_i \subseteq L^2$ takovou, že B_i je zachována všemi funkcemi z množiny G_i , ale není zachována funkcí χ_i , čímž podle Baker-Pixleyho Tvrzení 1.12 zjistíme, že funkce χ_i nenáleží do klonu generovaného množinou G_i . Vzhledem k tomu, že $\chi_i \in \text{Id}(L)$, nutně musí platit, že klon generovaný množinou G_i je vlastní podmnožinou $\text{Id}(L)$, tj. $[G_i] \subset \text{Id}(L)$.

Pro $i \in \{2, \dots, n-1\}$ položíme $B_i = \{(i, i-1), (i, i), (i+1, i+1)\}$. Podmnožina $B_i \subseteq L^2$ tvoří řetězec v L^2 , který je evidentně podsvazem L^2 , a tedy B_i je zachován svazovými operacemi. Jestliže $j \leq i-1$, pak funkce χ_j koinciduje se svazovou operací spojení \vee aplikovanou po složkách na prvky z podsvazu B_i . Tedy podsvaz B_i je také zachován funkcí χ_j . Podobně pro $j \geq i+1$, funkce χ_j koinciduje se svazovou operací průsek \wedge aplikovanou po složkách na prvky z podsvazu B_i , kromě případu kdy $j = i+1$ a dvojice $(i+1, i+1)$ jakožto první argument. V tomto případě

$$\chi_{i+1}((i+1, i+1), (x, y)) = (i+1, i+1)$$

pro libovolnou dvojici $(x, y) \in B_i$, a tedy podsvaz B_i je zachován i každou funkcí χ_j pro $j \geq i+1$. Avšak funkce χ_i nezachovává podsvaz B_i , protože

$$\chi_i((i, i-1), (i+1, i+1)) = (\chi_i(i, i+1), \chi_i(i-1, i+1)) = (i+1, i-1) \notin B_i.$$

Dále ukážeme, že podsvaz B_i svazu L^2 je zachován všemi funkcemi med_j pro $j \in \{2, \dots, n-1\}$. Všimněme si, že funkce med_j jsou komutativní a pro $x \leq y$ máme

$$\text{med}_j(x, y) = \begin{cases} x & ; j \leq x \\ j & ; x < j < y \\ y & ; j \geq y. \end{cases} \quad (12)$$

Odtud plyne, že

$$\text{med}_j((i, i-1), (i, i)) = \begin{cases} (i, i-1) & ; j \leq i-1 \\ (i, i) & ; \text{jinak,} \end{cases} \quad (13)$$

a

$$\text{med}_j((i, i-1), (i+1, i+1)) = \begin{cases} (i, i-1) & ; j \leq i-1 \\ (i, i) & ; j = i \\ (i+1, i+1) & ; \text{jinak,} \end{cases} \quad (14)$$

tedy podsvaz B_i je zachován každou funkcí med_j , $j = 2, \dots, n-1$.

Pro $i = n$ položme $B_n = \{(n, n-1), (n-1, n-1), (n-2, n-2)\}$. Podobně jako v předchozím případě může být jednoduše ukázáno, že všechny funkce z $G_n = G \setminus \{\chi_n\}$ zachovávají podsvaz B_n . Na druhou stranu

$$\chi_n((n, n-1), (n-2, n-2)) = (\chi_n(n, n-2), \chi_n(n-1, n-2)) = (n, n-1) \notin B_n.$$

Tímto jsme ukázali, že žádná z funkcí χ_i pro $i \in \{2, \dots, n\}$ nemůže být vynechána z generující množiny G .

Ve druhé části důkazu ukážeme totéž pro funkce med_i , $i \in \{2, \dots, n-1\}$. Položme $H_i = G \setminus \{\text{med}_i\}$ a $C_i = (L \setminus \{i\})^2$. Zřejmě $C_i \subseteq L^2$, a tedy vzhledem k tomu, že $L \setminus \{i\}$ je podsvazem svazu L , je i podmnožina C_i podsvazem svazu L^2 . Dokážeme, že podsvaz C_i je zachován všemi funkcemi z množiny H_i . Každá binární funkce $f \in H_i$ je definována pomocí svazových operací a funkcí med_i včetně konstanty z podsvazu $L \setminus \{i\}$. Odtud plyne, že pro libovolné $x, y \in L \setminus \{i\}$ platí $f(x, y) \in L \setminus \{i\}$, což má za následek zachování podsvazu C_i všemi funkcemi z množiny H_i . Na druhou stranu pro funkci med_i obdržíme

$$\text{med}_i((1, n), (n, 1)) = (\text{med}_i(1, n), \text{med}_i(n, 1)) = (i, i) \notin C_i,$$

kde vidíme, že funkce med_i nenáleží do klonu generovaného množinou H_i , tj. $\text{med}_i \notin [H_i]$ a tedy $[H_i] \neq \text{Id}(L)$, čímž jsme dokázali, že $[G] = \text{Id}(L)$ a pro každou vlastní podmnožinu $K \subset G$ platí $[K] \subset \text{Id}(L)$. To znamená, že množina G je nejmenší (χ, med) -generující množinou idempotentního klonu $\text{Id}(L)$. \square

Podíváme-li se na Tvzení 1.32 více do hloubky, je zřejmé, že řetězce obsahují prvky, které mají právě jedno pokrytí a pokrývají jediný prvek. Jedná se o tzv. ireducibilní prvky. Takové prvky existují i v jiných svazech než jenom v řetězcích, z čehož bychom mohli vyvodit obsaženost funkcí χ_a a med_a v (χ, med) -generující množině.

DEFINICE 1.33. Prvek $b \in L$ nazveme *ireducibilní*, jestliže pro některé prvky $a_1, a_2, c_1, c_2 \in L$ z rovností

$$a_1 \vee a_2 = b = c_1 \wedge c_2$$

plyne, že $a_1 = b$ nebo $a_2 = b$, a taktéž $c_1 = b$ nebo $c_2 = b$. Jinými slovy, neexistují prvky různé od $b \in L$ takové, že jejich spojením či průsekem dostaneme prvek b .

Například ve svazu L_5 z Obrázku 8 jsou prvky $a, c, d, g, j, l, o, x \in L_5$ ireducibilní. Na druhou stranu, prvky $b, q \in L_5$ ireducibilní nejsou, protože $e \wedge g = b$, ale $e \neq b$ a $g \neq b$. Podobně, $f \vee h = q$, ale $f \neq q$ a $h \neq q$. V následující větě ukážeme, že ireducibilní prvky jsou velmi důležité pro (χ, med) -generující množinu, neboť jak ukážeme v Příkladu 1.39, funkce χ_* a med_* , pro výše zmíněné ireducibilní prvky, jsou chťe nechtě součástí každé (χ, med) -generující množiny.

VĚTA 1.34. *Nechť L je konečný svaz s ireducibilním prvkem $b \in L$ různým od 0 a 1. Pak funkce χ_b a med_b musejí být obsaženy v každé (χ, med) -generující množině idempotentního klonu $\text{Id}(L)$.*

Důkaz. Uvažujme podsvaz $A = \{(b, a), (c, c)\}$ svazu L . Vzhledem k podmínce $a \prec b \prec c$ se velmi snadno ukáže, že tato množina je zachována všemi funkcemi χ_p, med_p pro $p \in L \setminus \{b\}$, a svazovými operacemi. Platí

$$\chi_b((b, a), (c, c)) = (\chi_b(b, c), \chi_b(a, c)) = (c, a) \notin A \quad (15)$$

a zároveň

$$\text{med}_b((b, a), (c, c)) = (\text{med}_b(b, c), \text{med}_b(c, c)) = (b, b) \notin A. \quad (16)$$

Tedy množina A není zachována ani jednou z funkcí χ_b a med_b .

Přesnější důkaz je založen na množině $B = \{(b, a), (c, c), (b, b)\}$ pro funkci χ_b a na množině $C = \{(b, a), (c, c), (c, a)\}$ pro funkci med_b . Jinými slovy, množina B je zachována všemi funkcemi z (χ, med) -generující množiny kromě χ_b , přičemž pro χ_b platí rovnost (15), čili $(c, a) \notin B$.

Obdobně, množina C je zachována všemi funkcemi z (χ, med) -generující množiny kromě med_b , přičemž pro med_b platí rovnost (16), čili $(b, b) \notin C$. \square

Vraťme se k Tvzení 1.32 pojednávajícím o znalosti minimální (nejmenší) (χ, med) -generující množiny pro řetězce. Nicméně nalezení takovéto generující množiny pro obecný svaz je velmi obtížné, a navíc, minimální generující množina je v každém svazu odlišná. Díky Větám 1.21 a 1.22 však můžeme sestavit algoritmus, jak postupně redukovat funkce v (χ, med) -generující množině. Předtím, než k této konstrukci přistoupíme, vyslovíme důsledky, jenž z Vět 1.21 a 1.22 okamžitě plynou.

Připomeňme, že ohraničený svaz L se nazývá *atomární*, jestliže každý prvek různý od 0 je spojením konečného počtu atomů, tj.

$$\forall x \in L \exists a_1, \dots, a_n \in \text{At}(L) : x = a_1 \vee \dots \vee a_n.$$

Například každý konečný booleovský svaz je atomární.

DŮSLEDEK 1.35. *Nechť L je atomární svaz s n atomy $a_1, \dots, a_n \in L$. Pak množina*

$$G = \{\chi_{a_i}, \text{med}_{a_i} \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$$

je (χ, med) -generující množinou idempotentního klonu $\text{Id}(L)$.

DŮSLEDEK 1.36. *Nechť*

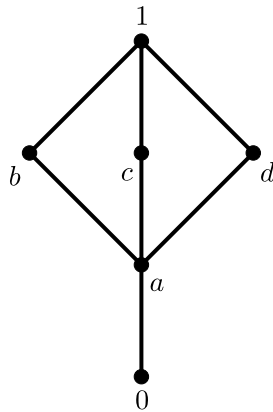
$$G = \{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_a \mid a \in L \setminus \{0\}\} \cup \{\text{med}_a \mid a \in L \setminus \{0, 1\}\}$$

je (χ, med) -generující množinou idempotentního klonu konečného svazu L a pro prvky $a, b \in L$ existují prvky $c_1, \dots, c_p \in L$ a $d_1, \dots, d_q \in L$, pro $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geq 2$ takové, že $c_1 \prec a, \dots, c_p \prec a$ a $b \prec d_1, \dots, b \prec d_q$. Pak množina $G^ = G \setminus \{\chi_a, \text{med}_a, \text{med}_b\}$ je opět generující (χ, med) -množinou idempotentního klonu $\text{Id}(L)$.*

1.6 Hledání (χ, med) -generující množiny

V této kapitole se budeme zabývat konstrukcí (χ, med) -generující množiny. Z Věty 1.22 víme, že funkce χ_a lze generovat pouze „směrem nahoru“, jinými slovy nás zajímá pouze spojení, protože z následujícího příkladu vyplyne, že funkce χ_a obecně nelze generovat „směrem dolů“.

PŘÍKLAD 1.37. Uvažujme svaz L_3 z Obrázku 6.



Obrázek 6: Svaz L_3 .

Podle Důsledku 1.30 víme, že množina

$$G = \{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_a, \chi_b, \chi_c, \chi_d, \chi_1\} \cup \{\text{med}_a, \text{med}_b, \text{med}_c, \text{med}_d\}$$

je (χ, med) -generující množinou idempotentního klonu $\text{Id}(L)$. Navíc z Vět 1.21 a 1.22 lze vygenerovat funkce $\{\text{med}_a, \chi_1\}$, tzn.

$$G^* = G \setminus \{\text{med}_a, \chi_1\}$$

je opět (χ, med) -generující množinou.

Dále zvolme množinu $B = \{(0, a), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (1, 1)\}$. Cílem je ukázat, že funkce χ_a je potřeba a nelze ji vygenerovat. Uvažujme tedy množinu funkcí $H = G^* \setminus \{\chi_a\}$. Všechny funkce z množiny H zachovávají množinu B , ale funkce χ_a nikoli, protože

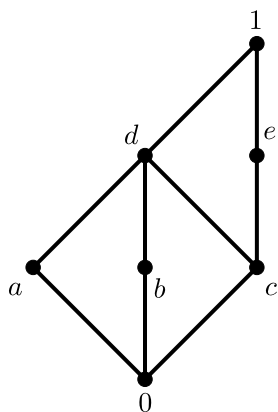
$$\chi_a((0, a), (1, 1)) = (\chi_a(0, 1), \chi_a(a, 1)) = (0, 1) \notin B.$$

To znamená, neexistuje obecný postup k vygenerování funkcí χ .

Nyní bude naším cílem sestrojít generující množinu svazu L , abychom věděli, jaké funkce χ_a a med_a jsou potřeba, a jaké jsou navíc.

Pro připomenutí, *generující množinou* svazu L nazveme takovou podmnožinu $H \subseteq L$, že uzavřením na svazové operace dostaneme celý svaz L , tzn. každý prvek $x \in L$ dostaneme vhodným spojením a průsekem prvků z generující množiny H svazu L .

Bohužel, podle Věty 1.22 nestačí vzít generující množinu svazu L pro funkce χ_a , protože například v Příkladu 1.37 generující množina svazu L_3 je $H = \{0, b, c, d\}$, ale již víme, že z funkcí $\{\chi_0, \chi_b, \chi_c, \chi_d\}$ nelze vygenerovat funkci χ_a .



Obrázek 7: Svaz L_4 .

Ani pro funkce med_* generující množina svazu L nestačí, protože ve Větě 1.21 bylo použito silnějšího předpokladu. Například generující množina svazu L_4 zobrazeného na Obrázku 7 je $\{a, b, e\}$, ale již víme, že pouze z $\{\text{med}_a, \text{med}_b\}$ nevygenerujeme med_d . Tedy musíme najít speciální generující množinu svazu L , která se těmito nedostatky vyhne. Její konstrukci nyní algoritmicky popíšeme.

Nechť L je ohraničený svaz. Označme H jako množinu generujících prvků, V jako množinu prvků, které lze vygenerovat, a H' a V' jako pomocné množiny. Navíc symbolem $x \rightsquigarrow B$ budeme značit přesun prvku x do množiny B .

I. Nejmenší prvek 0 přesuneme do množiny V a všechny atomy svazu L přesuneme do množiny H , tj. $a \rightsquigarrow H$ pro každé $a \in \text{At}(L)$.

II. Označme $A = \{x \in L \setminus \{H \cup V\} \mid h \prec x \text{ pro nějaké } h \in H\}$.

- Pokud pro $x \in A$ existuje právě jeden prvek l z L takový, že $l \prec x$ a zároveň $l \in H$, pak $x \rightsquigarrow H'$.
- Pokud pro $x \in A$ existuje více prvků l_1, \dots, l_p z L pro $p \in \mathbb{N}$ takové, že $l_1 \prec x, \dots, l_p \prec x$ a zároveň $l_1, \dots, l_p \in H$, pak $x \rightsquigarrow V'$.
- Pokud pro prvek $x \in A$ existují prvky l_1, l_2 ze svazu L takové, že $l_1 \prec x, l_2 \prec x$ a zároveň $l_1 \in H, l_2 \notin H$, pak x odebereme z množiny A .

Nyní množinu H obohatíme o prvky z množiny H' , tj. $H \cup H' \rightsquigarrow H$ a množinu V o prvky z množiny V' , tj. $V \cup V' \rightsquigarrow V$. Množiny H' a V' vyprázdníme. Tedy množina A je nyní prázdná, neboť každý prvek z ní jsme buď přesunuli do jedné ze dvou množin H, V , nebo jej odstranili k budoucímu použití.

III. Označme $A = \{x \in L \setminus \{H \cup V\} \mid h \prec x \text{ pro nějaké } h \in H \cup V\}$.

- Pokud $x \in A$ pokrývá právě jeden prvek ze svazu L a ten prvek padne do množiny H nebo V , pak $x \rightsquigarrow H'$.
- Pokud $x \in A$ pokrývá více prvků ze svazu L a všechny prvky padnou do množiny $H \cup V$, pak $x \rightsquigarrow V'$.
- Pokud $x \in A$ pokrývá více prvků ze svazu L a jeden z nich padne do množiny $H \cup V$ a druhý nikoli, pak x odebereme z množiny A .
- $H \cup H' \rightsquigarrow H$, $V \cup V' \rightsquigarrow V$ a $H', V' = \emptyset$.

IV. Opakujeme krok III.

Algoritmus končí, jakmile bude každý prvek ze svazu L buď v množině H , nebo V , přičemž množina H je hledaná generující množina ohraničeného svazu L .

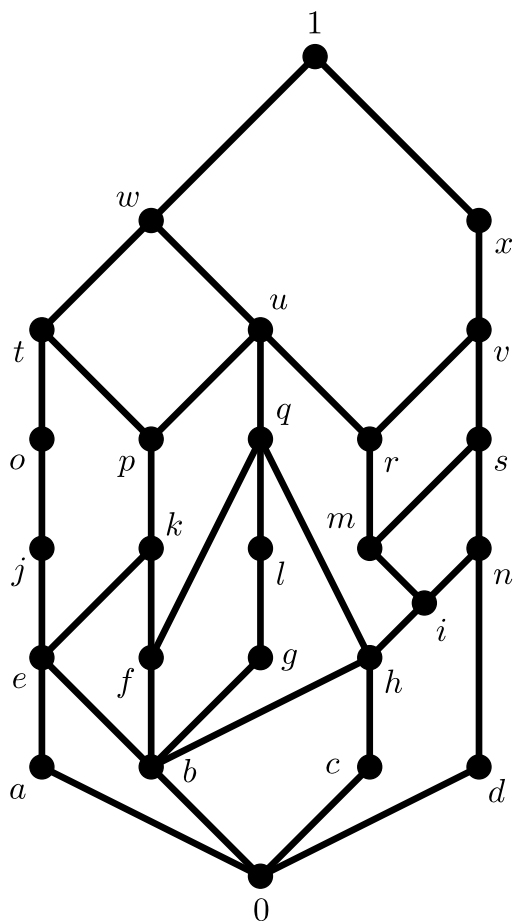
VĚTA 1.38. *Nechť L je ohraničený svaz a množina H je výsledná generující množina svazu L z výše popsaného algoritmu. Pak množina*

$$\{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_a \mid a \in H \setminus \{0\}\} \cup \{\text{med}_a \mid a \in H \setminus \{0, 1\}\}$$

je (χ, med) -generující množinou idempotentního klonu $\text{ld}(L)$.

V následujícím příkladu demonstrujeme algoritmus, právě popsany ve Větě 1.38.

PŘÍKLAD 1.39. Uvažujme svaz L_5 z Obrázku 8.



Obrázek 8: Svaz L_5 .

Nalezneme generující množinu H svazu L_5 použitím výše popsaného algoritmu.

- $H = \emptyset, V = \emptyset$

I. $V = \{0\}$ a $H = \{a, b, c, d\}$.

II. $A = \{e, f, gh, n\}$

- Pro prvek $e \in A$ existují dva prvky $a, b \in L$ takové, že $a \prec e$, $b \prec e$, $a, b \in H$. Tedy $e \rightsquigarrow V'$.
- Pro prvek $f \in A$ existuje právě jeden prvek $b \in L$ takový, že $b \prec f$ a $b \in H$. Tedy $f \rightsquigarrow H'$.
- Pro prvek $g \in A$ existuje právě jeden prvek $b \in L$ takový, že $b \prec g$ a $b \in H$. Tedy $g \rightsquigarrow H'$.
- Pro prvek $h \in A$ existují dva prvky $b, c \in L$ takové, že $b \prec h$, $c \prec h$ a $b, c \in H$. Tedy $h \rightsquigarrow V'$.
- Pro prvek $n \in A$ existují dva prvky $d, i \in L$ takové, že $d \prec n$, $i \prec n$ a $d \in H$, $i \notin H$. Tedy prvek n odstraníme z množiny A .

$$V = \{0, e, h\}, V' = \emptyset$$

$$H = \{a, b, c, d, f, g\}, H' = \emptyset, A = \emptyset$$

III. $A = \{j, k, l, i, n, q\}$

- Pro prvek $j \in A$ existuje právě jeden prvek $e \in L$ takový, že $e \prec j$ a $e \in H \cup V$. Tedy $j \rightsquigarrow H'$.
- Pro prvek $k \in A$ existují dva prvky $e, f \in L$ takové, že $e \prec k$, $f \prec k$ a $e, f \in H \cup V$. Tedy $k \rightsquigarrow V'$.
- Pro prvek $l \in A$ existuje právě jeden prvek $g \in L$ takový, že $g \prec l$ a $g \in H \cup V$. Tedy $l \rightsquigarrow H'$.
- Pro prvek $i \in A$ existuje právě jeden prvek $h \in L$ takový, že $h \prec i$ a $h \in H \cup V$. Tedy $i \rightsquigarrow H'$.
- Pro prvek $n \in A$ existují dva prvky $d, i \in L$ takové, že $d \prec n$, $i \prec n$ a $d \in H \cup V$, $i \notin H \cup V$. Tedy prvek n odstraníme z množiny A .

- Pro prvek $q \in A$ existují tři prvky $f, l, h \in L$ takové, že $f \prec q$, $l \prec q$, $h \prec q$ a $f, h \in H \cup V$, $l \notin H \cup V$. Tedy prvek q odstraníme z množiny A .

$$V = \{0, e, h, k\}, V' = \emptyset$$

$$H = \{a, b, c, d, f, g, j, l, i\}, H' = \emptyset, A = \emptyset$$

IV. $A = \{o, p, q, m, n\}$

- Pro prvek $o \in A$ existuje právě jeden prvek $j \in L$ takový, že $j \prec o$ a $j \in H \cup V$. Tedy $o \rightsquigarrow H'$.
- Pro prvek $p \in A$ existuje právě jeden prvek $k \in L$ takový, že $k \prec p$ a $k \in H \cup V$. Tedy $p \rightsquigarrow H'$.
- Pro prvek $q \in A$ existují tři prvky $f, l, h \in L$ takové, že $f \prec q$, $l \prec q$, $h \prec q$ a $f, l, h \in H \cup V$. Tedy $q \rightsquigarrow V'$.
- Pro prvek $m \in A$ existuje právě jeden prvek $i \in L$ takový, že $i \prec m$ a $i \in H \cup V$. Tedy $m \rightsquigarrow H'$.
- Pro prvek $n \in A$ existují dva prvky $d, i \in L$ takové, že $d \prec n$, $i \prec n$ a $d, i \in H \cup V$. Tedy $n \rightsquigarrow V'$.

$$V = \{0, e, h, k, q, n\}, V' = \emptyset$$

$$H = \{a, b, c, d, f, g, j, l, i, o, p, m\}, H' = \emptyset, A = \emptyset$$

V. $A = \{t, u, r, s\}$

- Pro prvek $t \in A$ existují dva prvky $o, p \in L$ takové, že $o \prec t, p \prec t$ a $o, p \in H \cup V$. Tedy $t \rightsquigarrow V'$.
- Pro prvek $u \in A$ existují tři prvky $p, q, r \in L$ takové, že $p \prec u, q \prec u, r \prec u$ a $p, q \in H \cup V, r \notin H \cup V$. Tedy prvek u odstraníme z množiny A .
- Pro prvek $r \in A$ existuje právě jeden prvek $m \in L$ takový, že $m \prec r$ a $m \in H \cup V$. Tedy $r \rightsquigarrow H'$.
- Pro prvek $s \in A$ existují dva prvky $m, n \in L$ takové, že $m \prec s, n \prec s$ a $m, n \in H \cup V$. Tedy $s \rightsquigarrow V'$.

$$V = \{0, e, h, k, q, n, t, s\}, V' = \emptyset$$

$$H = \{a, b, c, d, f, g, j, l, i, o, p, m, r\}, H' = \emptyset, A = \emptyset$$

VI. $A = \{w, u, v\}$

- Pro prvek $w \in A$ existují dva prvky $t, u \in L$ takové, že $t \prec w, u \prec w$ a $t \in H \cup V, u \notin H \cup V$. Tedy prvek w odstraníme z množiny A .
- Pro prvek $u \in A$ existují tři prvky $p, q, r \in L$ takové, že $p \prec u, q \prec u, r \prec u$ a $p, q, r \in H \cup V$. Tedy $u \rightsquigarrow V'$.
- Pro prvek $v \in A$ existují dva prvky $r, s \in L$ takové, že $r \prec v, s \prec v$ a $r, s \in H \cup V$. Tedy $v \rightsquigarrow V'$.

$$V = \{0, e, h, k, q, n, t, s, u, v\}, V' = \emptyset$$

$$H = \{a, b, c, d, f, g, j, l, i, o, p, m, r\}, H' = \emptyset, A = \emptyset$$

VII. $A = \{w, x\}$

- Pro prvek $w \in A$ existují dva prvky $t, u \in L$ takové, že $t \prec w$, $u \prec w$ a $t, u \in H \cup V$. Tedy $w \rightsquigarrow V'$.
- Pro prvek $x \in A$ existuje právě jeden prvek $v \in L$ takový, že $v \prec x$ a $v \in H \cup V$. Tedy $x \rightsquigarrow H'$.

$$V = \{0, e, h, k, q, n, t, s, u, v, w\}, V' = \emptyset$$
$$H = \{a, b, c, d, f, g, j, l, i, o, p, m, r, x\}, H' = \emptyset, A = \emptyset$$

VIII. $A = \{1\}$

- Pro prvek $w \in 1$ existují dva prvky $w, x \in L$ takové, že $w \prec 1$, $x \prec 1$ a $w, x \in H \cup V$. Tedy $1 \rightsquigarrow V'$.

$$V = \{0, e, h, k, q, n, t, s, u, v, w, 1\}, V' = \emptyset$$
$$H = \{a, b, c, d, f, g, j, l, i, o, p, m, r, x\}, H' = \emptyset, A = \emptyset$$

Závěrem, hledaná generující množina svazu L_5 podle algoritmu je

$$H = \{a, b, c, d, f, g, j, l, i, o, p, m, r, x\}.$$

Nicméně se evidentně nejedná o nejlepší možnou (vzhledem k mohutnosti) generující množinu, protože například množina

$$H^* = \{a, c, d, g, j, l, m, o, p, x\}$$

je taktéž generující množinou svazu L , protože pro ostatní prvky svazu L_5 platí

$$0 = a \wedge c$$

$$b = g \wedge j$$

$$e = o \wedge p$$

$$f = p \wedge q = p \wedge (g \vee c)$$

$$h = b \vee c = (g \wedge j) \vee c$$

$$i = m \wedge n = m \wedge (c \vee d)$$

$$k = e \vee f = (o \wedge p) \vee (p \wedge (g \vee c))$$

$$n = c \vee d$$

$$q = g \vee c$$

$$r = w \wedge x = (o \vee m) \wedge x$$

$$s = m \vee d$$

$$t = o \vee p$$

$$u = p \vee m$$

$$v = m \vee n = m \vee (c \vee d)$$

$$w = o \vee m$$

$$1 = o \vee x.$$

Avšak pro naše účely pro vygenerování všech funkcí χ_* a med_* je generující množina H^* nedostačující, neboť bychom mohli narazit na problém s vygenerováním některých funkcí χ_* , anebo med_* , jelikož by nemusely být splněny předpoklady Vět 1.21 a 1.22. Tím pádem budeme naši pozornost věnovat generující množině H svazu L_5 , odkud podle Věty 1.38 víme, že jsme schopni vygenerovat všechny ostatní funkce χ_* a med_* . Jinými slovy množina

$$G = \{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_\alpha, \text{med}_\beta \mid \alpha, \beta \in H\}$$

je (χ, med) -generující množinou idempotentního klonu svazu L_5 , protože pro ostatní funkce χ_* platí

$$\chi_0 = \vee$$

$$\chi_e = \chi_a \wedge \chi_b$$

$$\chi_h = \chi_b \wedge \chi_c$$

$$\chi_n = \chi_i \wedge \chi_d$$

$$\chi_k = \chi_e \wedge \chi_f = \chi_a \wedge \chi_b \wedge \chi_f$$

$$\chi_q = \chi_f \wedge \chi_g$$

$$\chi_s = \chi_m \wedge \chi_n = \chi_m \wedge \chi_i \wedge \chi_d$$

$$\chi_t = \chi_o \wedge \chi_p$$

$$\chi_u = \chi_p \wedge \chi_r$$

$$\chi_v = \chi_r \wedge \chi_s = \chi_r \wedge \chi_m \wedge \chi_i \wedge \chi_d$$

$$\chi_w = \chi_t \wedge \chi_u = \chi_o \wedge \chi_p \wedge \chi_r$$

$$\chi_1 = \chi_o \wedge \chi_x$$

a pro ostatní funkce med_* platí

$$\text{med}_0 = \wedge$$

$$\text{med}_e = \text{med}_a \vee \text{med}_b$$

$$\text{med}_h = \text{med}_b \vee \text{med}_c$$

$$\text{med}_n = \text{med}_i \vee \text{med}_d$$

$$\text{med}_k = \text{med}_e \vee \text{med}_f = \text{med}_a \vee \text{med}_b \vee \text{med}_f$$

$$\text{med}_q = \text{med}_f \vee \text{med}_l \vee \text{med}_h = \text{med}_f \vee \text{med}_l \vee \text{med}_b \vee \text{med}_c$$

$$\text{med}_s = \text{med}_m \vee \text{med}_n = \text{med}_m \vee \text{med}_i \vee \text{med}_d$$

$$\text{med}_t = \text{med}_o \vee \text{med}_p$$

$$\text{med}_u = \text{med}_p \vee \text{med}_q \vee \text{med}_r = \text{med}_p \vee \text{med}_f \vee \text{med}_l \vee \text{med}_b \vee \text{med}_c \vee \text{med}_r$$

$$\text{med}_v = \text{med}_r \vee \text{med}_s = \text{med}_r \vee \text{med}_m \vee \text{med}_i \vee \text{med}_d$$

$$\text{med}_w = \text{med}_t \vee \text{med}_u = \text{med}_o \vee \text{med}_p \vee \text{med}_f \vee \text{med}_l \vee \text{med}_b \vee \text{med}_c \vee \text{med}_r$$

$$\text{med}_1 = \vee.$$

Ani algoritmus ani Věta 1.38 nám nedávají žádnou informaci o minimalitě (vzhledem k inkluzi) (χ, med) -generující množiny, tzn. v množině G stále mohou existovat nadbytečné funkce, jenomže v tuto chvíli nevíme o existenci takových funkcí, a i kdyby ano, nevíme, jakým způsobem je vygenerovat pomocí ostatních funkcí z množiny G . Tím pádem algoritmus, Věta 1.38 i Příklad 1.39 neříkají nic o minimalitě (χ, med) -generující množiny, ale zabývají se pouze vhodným zredukováním (χ, med) -generující množiny z Důsledku 1.30.

V návaznosti na Příklad 1.39 bychom mohli položit otázku, jaký je vztah mezi nejmenší generující množinou svazu L a nejmenší (χ, med) -generující množinou idempotentního klonu $\text{Id}(L)$. Ukazuje se, že žádný, neboť z Příkladu 1.37, konkrétně ze svazu L_3 z Obrázku 6, vidíme, že nejmenší generující množina svazu L_3 je $\{0, b, c, d\}$, ale potenciálně nejmenší (χ, med) -generující množina idempotentního klonu $\text{Id}(L_3)$, je ve tvaru

$$\{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_a, \chi_b, \chi_c, \chi_d\} \cup \{\text{med}_b, \text{med}_c, \text{med}_d\}.$$

Pro funkce χ_* jsou totiž důležité prvky $\{a, b, c, d\}$ a pro funkce med_* jsou důležité prvky $\{b, c, d\}$, přičemž tyto dvě množiny se od generující množiny $\{0, b, c, d\}$ svazu L_3 liší jak volbou prvků, tak i jejich počtem.

II.

K A P I T O L A

TRANSFEROVĚ-STABILNÍ PRŮMĚRY NA
KONEČNÝCH ŘETĚZCÍCH

2.1 Transferově-stabilní funkce na reálných číslech

Cílem této části bude transformovat aritmetický průměr z reálných čísel na případ konečných svazů. Z knihy [4] víme, že aritmetický průměr na reálných číslech je charakterizován čtyřmi podmínkami – je neklesající (Definice 1.15), idempotentní (Definice 1.16), symetrický a aditivní (Definice 2.1).

DEFINICE 2.1. Nechť $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$. Pak funkce $F: \mathbb{I}^k \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá

1. *symetrická*, jestliže

$$F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k)$$

pro každé $i, j \in \{1, \dots, k\}$ a $x_i, x_j \in \mathbb{I}$.

2. *aditivní*, jestliže

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})$$

pro každé \mathbf{x}, \mathbf{y} z intervalu \mathbb{I}^k takové, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{I}^k$.

Plné znění charakteristiky pro aritmetický průměr je v následující větě.

VĚTA 2.2. [4] *Funkce $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající, idempotentní, symetrická a aditivní právě tehdy, když funkce F je aritmetickým průměrem, tj.*

$$F(x_1, \dots, x_k) = \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}.$$

Důkaz. Předpokládejme, že funkce F je neklesající, idempotentní, symetrická a aditivní. Pak podle Věty 2.116 z knihy [4] (str. 52) plyne, že pro k -ární aditivní funkci existuje k unárních funkcí f_i , $i \in \{1, \dots, k\}$ takových, že funkce F je ve tvaru

$$F(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k f_i(x_i).$$

Navíc, pokud je f neklesající, pak všechny unární funkce f_i jsou lineární bez absolutního členu, tj. $f_i = c_i x_i$, kde c_i , pro $i \in \{1, \dots, k\}$, jsou nezáporná reálná čísla. Tedy funkce F je ve tvaru

$$F(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k c_i x_i.$$

Ze symetrie funkce F vyplývá následující rovnost

$$F(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k c_i x_i = \sum_{i=k}^1 c_i x_i = F(x_k, \dots, x_1)$$

odkud nutně plyne, že $c_i = c_j$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, k\}$. To znamená, že

$$F(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k c x_i$$

pro každé $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$. Přidáme-li podmínku idempotence, tj.

$$F(x, \dots, x) = cx + \dots + cx = x$$

obdržíme, že $kc = 1$, odkud $c = \frac{1}{k}$. Odtud funkce F je tvaru

$$F(x_1, \dots, x_k) = \frac{x_1 + \dots + x_k}{k},$$

což je přesně aritmetický průměr.

Druhou část důkazu uvedeme i přesto, že je hojně známý a triviální. Předpokládejme tedy, že funkce F je aritmetický průměr. Pak

I. Pro $(x_1, \dots, x_k) \leq (y_1, \dots, y_k)$ máme

$$\begin{aligned} x_i &\leq y_i \\ x_1 + \dots + x_k &\leq y_1 + \dots + y_k \\ F(x_1, \dots, x_k) &= \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \leq \frac{y_1 + \dots + y_k}{k} = F(y_1, \dots, y_k). \end{aligned}$$

Tedy aritmetický průměr F je neklesající.

II. Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ dostaneme

$$F(x, \dots, x) = \frac{x + \dots + x}{k} = \frac{kx}{k} = x.$$

Tedy aritmetický průměr F je idempotentní.

III. Symetrie zaměňuje libovolné dva prvky x_i a x_j pro $i, j \in \{1, \dots, k\}$.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme záměnu prvního a posledního prvku, tj. x_1 a x_k . Pak

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) &= \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} \\ &= \frac{x_k + \dots + x_1}{k} \\ &= F(x_k, x_2, \dots, x_{k-1}, x_1). \end{aligned}$$

Tedy aritmetický průměr F je symetrický.

IV. Pro libovolné $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ platí

$$\begin{aligned} F(x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k) &= \frac{x_1 + y_1 + \dots + x_k + y_k}{k} \\ &= \frac{x_1 + \dots + x_k + y_1 + \dots + y_k}{k} \\ &= \frac{x_1 + \dots + x_k}{k} + \frac{y_1 + \dots + y_k}{k} \\ &= F(x_1, \dots, x_k) + F(y_1, \dots, y_k). \end{aligned}$$

Tedy aritmetický průměr F je aditivní.

□

První tři podmínky (neklesající, idempotentní, symetrická) můžeme jednoduše transformovat do teorie svazů. Problém nastává s aditivitou, protože ve svazech není obecně definována operace sčítání. Z tohoto důvodu musíme aditivitu nahradit jinou vhodnou vlastností, již aritmetický průměr disponuje. Tato nová vlastnost bere v potaz, že aritmetický průměr z hodnot x a y je tatáž hodnota, jako aritmetický průměr hodnot $x + c$ a $y - c$ (nebo $x - c$ a $y + c$) pro libovolné reálné číslo $c \in \mathbb{R}$. Nazýváme ji tzv. transferová-stabilita nebo taktéž transferový princip ([15], [16]).

DEFINICE 2.3. Necht' $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$. Funkce $F: \mathbb{I}^k \rightarrow \mathbb{R}$ je *transferově-stabilní*, jestliže pro libovolné $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ takové, že $\sum_{i=1}^k c_i = 0$ platí

$$F(x_1, \dots, x_k) = F(x_1 + c_1, \dots, x_k + c_k)$$

pro každé $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{I}^k$ takové, že $\mathbf{x} + \mathbf{c} \in \mathbb{I}^k$.

Předtím než přejdeme do teorie svazů, se chvíli budeme zabývat otázkou síly transferové-stability vůči aditivitě. Jinými slovy, jak moc se změní Věta 2.2, když aditivitu nahradíme transferovou-stabilitou. Později se dozvíme, že během tohoto nahrazení nevystane žádný problém, neboť transferová-stabilita charakterizuje na reálných číslech nejenom symetrii, ale i aditivitu.

Nyní se podíváme na popis transferově-stabilních funkcí na reálných číslech. Ukazuje se, že k plnému určení k -ární transferově-stabilní funkce na reálných číslech stačí pouze unární funkce.

VĚTA 2.4. *Všechny transferově-stabilní funkce jsou určeny nějakou unární funkcí, to znamená, $TS: \mathbb{I}^k \rightarrow \mathbb{R}$ je k -ární transferově-stabilní funkce právě tehdy, když existuje unární funkce $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že*

$$TS(x_1, \dots, x_k) = f\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right).$$

Důkaz. Mějme transferově-stabilní funkci TS a k -tici $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{I}^k$ takovou, že $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$. Označme $c := \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}$. Předpokládejme existenci $i \in \{1, \dots, k\}$ takového, že $x_i \leq c \leq x_{i+1}$. Pak

$$\sum_{\alpha=1}^i (c - x_\alpha) = \sum_{\beta=i+1}^k (x_\beta - c).$$

Tedy platí rovnost $TS(x_1, \dots, x_k) = TS(c, \dots, c)$ odkud plyne, že pro každou k -tici (x_1, \dots, x_k) existuje $x \in \mathbb{I}$ takové, že $TS(x_1, \dots, x_k) = TS(x, \dots, x)$. To jest, chování funkce TS je charakterizováno funkcí $f(x) := TS(x, \dots, x)$, odkud funkce TS je určena unární funkcí f , tj.

$$\begin{aligned} TS(x_1, \dots, x_k) &= TS\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}, \dots, \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right) \\ &= f\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right). \end{aligned}$$

Naopak, necht' f je unární reálná funkce. Označme

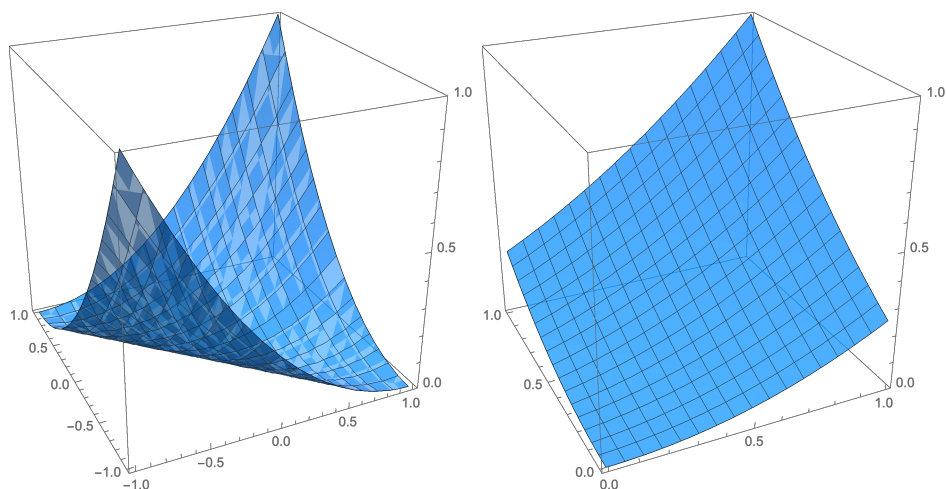
$$A(x_1, \dots, x_k) := f\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right).$$

Dokážeme, že A je transferově-stabilní funkce. Tedy pro $c_1 + \dots + c_k = 0$ platí

$$\begin{aligned} A(x_1 + c_1, \dots, x_k + c_k) &= f\left(\frac{(x_1 + c_1) + \dots + (x_k + c_k)}{k}\right) \\ &= f\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right) = A(x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

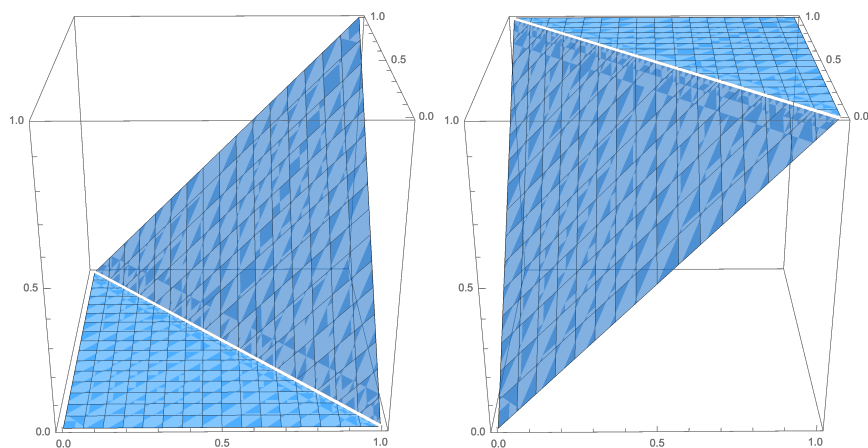
□

Obecně, transferově-stabilní funkce není aditivní nebo neklesající, avšak evidentně podle Věty 2.4 je symetrická. Na Obrázku 9 můžeme vidět, že volba intervalu \mathbb{I} je velmi důležitá. Pro unární funkci $f(x) = x^2$, transferově-stabilní funkce na intervalu $\mathbb{I} = \langle -1, 1 \rangle$ není neklesající, čili se nejedná o agregační funkci, ale pro interval $\mathbb{I} = \langle 0, 1 \rangle$ už dostaneme agregační funkci.



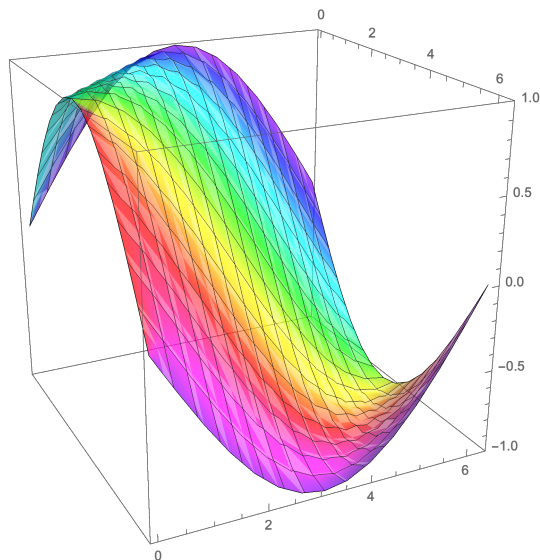
Obrázek 9: Transferově-stabilní funkce určená funkcí $f(x) = x^2$.

Dalším příkladem transferově-stabilní funkce, jakožto agregační funkce, je například Lukasiewiczova t-norma a t-conorma (viz Obrázek 10).



Obrázek 10: Lukasiewiczova t-norma a t-conorma.

Posledním příkladem je transferově-stabilní funkce určená unární funkcí $f(x) = \sin(x)$ na intervalu $\mathbb{I} = \langle 0, 2\pi \rangle$ (viz Obrázek 11).



Obrázek 11: Transferově-stabilní funkce určená funkcí $f(x) = \sin(x)$.

Jak už víme, mezi transferově-stabilními funkcemi je i aritmetický průměr, jenž dostaneme za předpokladu idempotence ve Větě 2.4.

DŮSLEDEK 2.5. *Nechť $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ je unární funkce. Transferově-stabilní funkce TS je aritmetický průměr právě tehdy, když $f = id$.*

Závěrem zde máme slíbenou sílu transferové-stability, jež ukazuje, že transferová-stabilita v sobě zahrnuje jak aditivitu, tak i symetrii.

DŮSLEDEK 2.6. *Funkce TS je idempotentní transferově-stabilní funkce právě tehdy, když TS je aritmetický průměr.*

Důkaz. Nechť TS je transferově-stabilní funkce. Z faktu, že TS je idempotentní agregační funkce plyne, že f je idempotentní neklesající funkce. Tedy funkce f musí být identitou. Naopak je důkaz triviální s využitím Věty 2.2. □

2.2 Transferově-stabilní průměry

Z právě zmíněného důsledku můžeme usoudit, že výběr transferové-stability, jakožto náhrady za aditivitu, je velmi vhodný, a tedy můžeme transferově-stabilní funkce jednoduše převést na případ konečných svazů s využitím relace pokrytí ve svazech (Definice 1.14).

DEFINICE 2.7. Funkce $A: L^k \rightarrow L$ na konečném svazu L se nazývá *transferově-stabilní*, jestliže

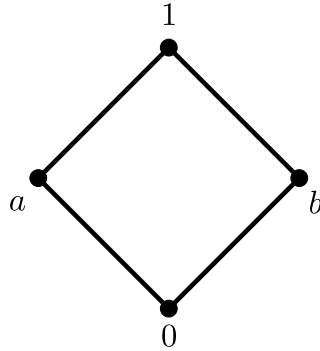
$$A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = A(x_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, x_k)$$

pro libovolné $i, j \in \{1, \dots, k\}$ a $x_i, y_j \in L$, kde $x_i \prec y_i$ a $y_j \prec x_j$.

Navíc, třídu všech transferově-stabilních agregačních funkcí na konečném svazu L označíme symbolem TSAgg_L a symbolem $\text{TSAgg}_L^{(k)}$ označíme všechny k -ární transferově-stabilní agregační funkce na svazu L .

Výslednou uvažovanou funkcí je idempotentní symetrická transferově-stabilní neklesající funkce na konečném svazu L . V následující Větě 2.8 ukážeme, že všechny zmíněné vlastnosti nejsou na sobě nezávislé. Ještě před vyslovením této věty se zamysleme nad tím, pro jakou třídu svazů má smysl idempotentní symetrické transferově-stabilní neklesající funkce uvažovat.

Idempotentní agregační funkce nebo transferově-stabilní agregační funkce může být definována na libovolném svazu L . Avšak zkombinováním obou těchto podmínek, tj. uvážením idempotentní transferově-stabilní agregační funkce TS , je patrné, že touto třídou svazů mohou být jen konečné řetězce C_n o n prvcích. Problém by nastal například už u čtyřprvkového booleovského svazu $B_4 = \{0, a, b, 1\}$ (Obr. 12).



Obrázek 12: Čtyřprvkový booleovský svaz B_4 .

Dostali bychom totiž, že

$$TS(0, 1) = TS(a, a) = a$$

a zároveň

$$TS(0, 1) = TS(b, b) = b,$$

což není možné. Tedy idempotentní transferově-stabilní funkce nemůžeme definovat nikde jinde než na konečných (resp. nekonečných) řetězcích, přičemž příkladem nekonečného řetězce jsou reálná čísla, uvažovaného v Důsledku 2.6.

VĚTA 2.8. *Nechť C_n je n -prvkový řetězec pro $n \in \mathbb{N}$ a $TS : C_n^k \rightarrow C_n$ je transferově-stabilní funkce na řetězci C_n . Pak TS je symetrická funkce.*

Důkaz. Nechť $x_i, x_j \in C_n$ s vlastností $x_i \neq x_j$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_i < x_j$. Podle transferové-stability funkce TS dostaneme

$$TS(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = TS(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k),$$

což dokazuje symetrii. □

Věta 2.2 nepojednává o konečných množinách, a tedy nedává žádnou informaci, týkající se konečných řetězců. V případě konečných řetězců nemusí být výsledná funkce jediná a ukazuje se, že dostaneme množinu funkcí, které jsou vhodnou aproximací aritmetického průměru. To znamená, že tyto funkce mají podobné chování jako aritmetický průměr. Výsledkem je následující definice.

DEFINICE 2.9. *Transferově-stabilní průměr* na konečném řetězci C_n je transferově-stabilní idempotentní agregační funkce $TS : C_n^k \rightarrow C_n$.

Třidu všech transferově-stabilních průměrů na konečném řetězci C_n označíme symbolem TSM_{C_n} a symbolem $TSM_{C_n}^{(k)}$ označíme všechny k -ární transferově-stabilní průměry na konečném řetězci C_n .

Vzniká přirozený problém, zda množina $TSM_{C_n}^{(k)}$ je uzavřená na skládání funkcí (viz Definice 1.7). Následující věta odpovídá na tuto otázku kladně.

VĚTA 2.10. *Pro $k, l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, necht' $A : C_n^k \rightarrow C_n$ je idempotentní agregační funkce a $B_1, \dots, B_k : C_n^l \rightarrow C_n$ jsou transferově-stabilní průměry na konečném řetězci C_n . Pak funkce $D = A(B_1, \dots, B_k) : C_n^l \rightarrow C_n$ daná předpisem*

$$D(\mathbf{x}) = A\left(B_1(\mathbf{x}), \dots, B_k(\mathbf{x})\right)$$

pro každé $\mathbf{x} \in C_n^l$, je l -ární transferově-stabilní průměr na řetězci C_n .

Důkaz. Důkaz toho, že funkce D je agregační funkcí, je zmíněn například v knize [4]. Ověření, že funkce je idempotentní a transferově-stabilní je triviální. □

Díky transferové-stabilitě můžeme všechny k -tice rozdělit do navzájem disjunktních tříd, jinak řečeno, transferově-stabilní průměr rozděluje k -tou direktní mocninu n -prvkového řetězce C_n^k do jednotlivých „vrstev“.

DEFINICE 2.11. Maximální podmnožina k -tic svazu C_n^k , obsahující k -tice vázané spolu transferovou-stabilitou, se nazývá (*transferově-stabilní*) *blok*, tj. dva prvky $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C_n^k$ náleží do stejného bloku, jestliže $TS(\mathbf{x}) = TS(\mathbf{y})$ pro všechny k -ární transferově-stabilní průměry $TS \in \text{TSM}_{C_n}^{(k)}$.

Bloky obsahující konstantní k -tice, tj. (x, \dots, x) , se nazývají *vedlejší bloky*. Zbývající bloky se nazývají *hlavní bloky*.

V právě zmíněné definici není potřeba idempotence, protože ta je důležitá pouze pro bloky obsahující konstantní k -tice z pohledu obrazu jednotlivých k -tic z vedlejších bloků, ale k samotné konstrukci bloků jsme idempotenci nikterak nevyužili. Je zřejmé, že každý blok je plně určen jeho libovolnou k -ticí, bloky tedy budeme značit do hranatých závorek („[“ a „]“). Funkční hodnota prvku náležícího do vedlejšího bloku je, jak už víme, plně určena, ale funkční hodnota prvku z hlavního bloku náleží do určité podmnožiny řetězce C_n , která není jednoprvková. Později se dozvíme, že tato podmnožina je právě a jenom dvouprvková.

Pro daný transferově-stabilní průměr $TS : C_n^k \rightarrow C_n$ můžeme, díky vlastnostem idempotence a transferové-stability, přiřadit některé k -tice do stejné množiny, pokud obrazy (funkční hodnoty) v TS jsou si rovny. Například, pro řetězec $C_4 = \{0, a, b, 1\}$ a ternární transferově-stabilní průměr $TS : C_4^3 \rightarrow C_4$ máme blok

$$\{(1, 0, 0), (b, a, 0), (a, b, 0), (0, 1, 0), (b, 0, a), \\ (a, a, a), (0, b, a), (a, 0, b), (0, a, b), (0, 0, 1)\},$$

jehož trojice se zobrazí na prvek $a \in C_4$, protože $TS(a, a, a) = a$. Tento vedlejší blok můžeme zapsat zkráceně jako $[(1, 0, 0)]$.

Příkladem hlavního bloku pro výše zmíněný řetězec a transferově-stabilní průměr je například množina

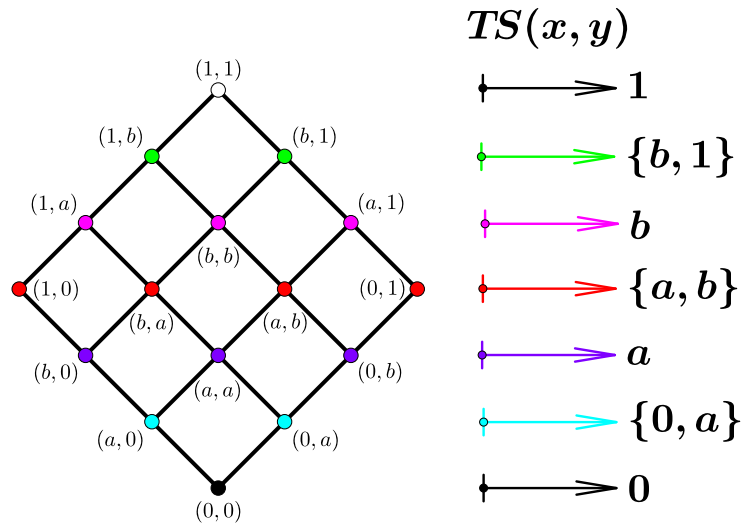
$$\begin{aligned} &\{(1, a, 0), (b, b, 0), (a, 1, 0), (1, 0, a), \\ &\quad (b, a, a), (a, b, a), (0, 1, a), (b, 0, b), \\ &\quad (a, a, b), (0, b, b), (a, 0, 1), (0, a, 1)\} = [(0, a, 1)], \end{aligned}$$

jenž funkční hodnoty trojic tohoto bloku $[(0, a, 1)]$ nejsou jednoznačně určeny.

2.3 Binární transferově-stabilní průměry

Nejdříve se zaměříme na případ $k = 2$, tj. binární transferově-stabilní průměry. Uvažujme čtyřprvkový řetězec $C_4 = \{0, a, b, 1\}$, kde $0 \prec a \prec b \prec 1$. Pak každý binární transferově-stabilní průměr je v jednom z následujících tvarů (viz Obr. 13, kde dvojice znázorněné černou, fialovou, růžovou a bílou barvou reprezentují 4 vedlejší bloky a dvojice znázorněné světle modrou, červenou a zelenou barvou reprezentují 3 hlavní bloky):

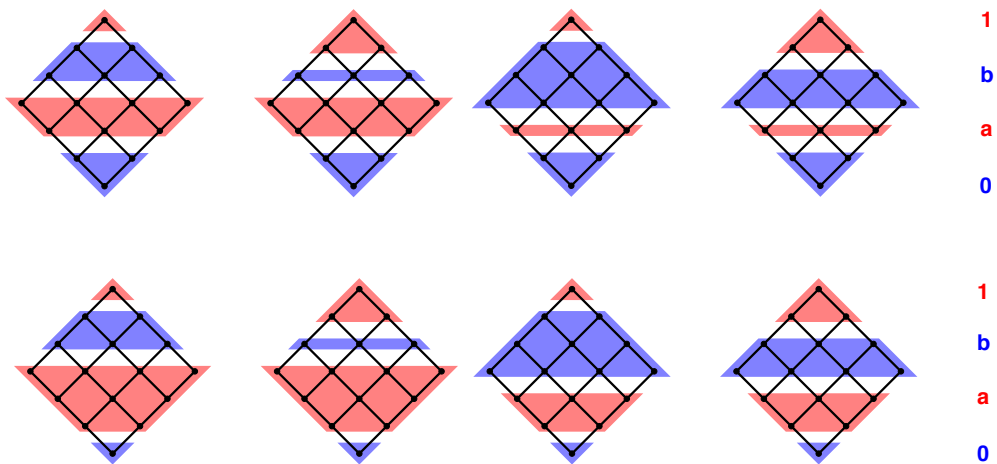
$$\begin{aligned} TS(0, 0) &= 0 \\ TS(0, a) &= TS(a, 0) \in \{0, a\} \\ TS(0, b) &= TS(a, a) = TS(b, 0) = a \\ TS(0, 1) &= TS(a, b) = TS(b, a) = TS(1, 0) \in \{a, b\} \\ TS(a, 1) &= TS(b, b) = TS(1, a) = b \\ TS(b, 1) &= TS(1, b) \in \{b, 1\} \\ TS(1, 1) &= 1. \end{aligned}$$



Obrázek 13: Všechny bloky binárních transferově-stabilních průměrů na C_4 a jejich množiny obrazů.

Vidíme, že všechny transferově-stabilní průměry se liší pouze ve dvojicích $(0, a)$, $(0, 1)$, (respektive (a, b)) a $(b, 1)$, tj. v hlavních blocích $[(0, a)]$, $[(0, 1)]$ a $[(b, 1)]$ (neobsahujících konstantní dvojice (x, x)). Funkční hodnoty hlavních bloků jsou na sobě nezávislé, tzn. pro každý hlavní blok máme dvě možnosti pro zvolení funkční hodnoty. Z toho vyplývá, že počet všech binárních transferově-stabilních průměrů na čtyřprvkovém řetězci je 8. Konkrétně se jedná o následující transferově-stabilní průměry zobrazené na Obrázku 14.

Vzhledem k faktu, že transferově-stabilní průměry se liší pouze v těchto funkčních hodnotách (funkční hodnoty hlavních bloků), můžeme jednoznačně zapsat binární transferově-stabilní průměr na čtyřprvkovém řetězci do tvaru $\langle z_1 \mid z_2 \mid z_3 \rangle$, kde $z_1 \in \{0, a\}$, $z_2 \in \{a, b\}$, $z_3 \in \{b, 1\}$. Tedy všechny binární transferově-stabilní průměry na C_4 z Obrázku 14 jsou po řadě:



Obrázek 14: Všechny binární transferově-stabilní průměry na řetězci C_4 .

$$TS_1(x, y) = \langle 0 \mid a \mid b \rangle$$

$$TS_2(x, y) = \langle 0 \mid a \mid 1 \rangle$$

$$TS_3(x, y) = \langle 0 \mid b \mid b \rangle$$

$$TS_4(x, y) = \langle 0 \mid b \mid 1 \rangle$$

$$TS_5(x, y) = \langle a \mid a \mid b \rangle$$

$$TS_6(x, y) = \langle a \mid a \mid 1 \rangle$$

$$TS_7(x, y) = \langle a \mid b \mid b \rangle$$

$$TS_8(x, y) = \langle a \mid b \mid 1 \rangle.$$

Obecně, binární transferově-stabilní průměr na řetězci $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$ je možno zapsat do tvaru

$$TS(x, y) := \langle z_1 \mid z_2 \mid \dots \mid z_{n-1} \rangle,$$

kde

$$[(c_1, c_1)]; [(c_1, c_2)]; [(c_2, c_2)]; [(c_2, c_3)]; [(c_3, c_3)]; \dots; [(c_{n-1}, c_n)]; [(c_n, c_n)]$$

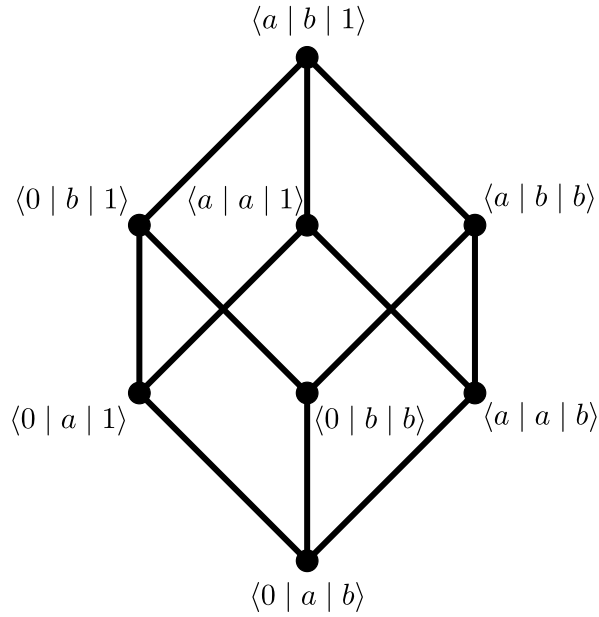
je seznam všech bloků, kde prvek z_i , z výše vypsaneho tvaru, odpovídá i -tému hlavnímu bloku $[(c_i, c_{i+1})]$ pro $i = 1, \dots, n - 1$. Z tohoto důvodu může být prvek z_i také nazván jakožto hlavní blok. Tento hlavní blok je jednoznačně určen pozicí prvku z_i ve formě $\langle z_1 \mid z_2 \mid \dots \mid z_{n-1} \rangle$. To znamená, že prvek z_i reprezentuje obraz všech dvojic náležících do tohoto hlavního bloku.

Uvážíme-li průsek či spojení dvou transferově-stabilních průměrů jakožto průsek či spojení po složkách, tj.

$$\begin{aligned} \langle z_1 \mid \dots \mid z_{n-1} \rangle \wedge \langle y_1 \mid \dots \mid y_{n-1} \rangle &= \langle z_1 \wedge y_1 \mid \dots \mid z_{n-1} \wedge y_{n-1} \rangle \\ \langle z_1 \mid \dots \mid z_{n-1} \rangle \vee \langle y_1 \mid \dots \mid y_{n-1} \rangle &= \langle z_1 \vee y_1 \mid \dots \mid z_{n-1} \vee y_{n-1} \rangle, \end{aligned}$$

což přesně odpovídá průseku či spojení samotných funkčních hodnot, mohli bychom položit otázku, jakou strukturu (přesněji jaký svaz) tvoří množina $TSM_{C_n}^{(2)}$.

Pro jednoduchost, vezmeme-li všechny binární transferově-stabilní průměry na čtyřprvkovém řetězci (viz Obrázek 14) a poskládáme-li je podle výše zavedeného průseku a spojení transferově-stabilních průměrů, dostaneme osmiprvkový booleovský svaz (viz Obrázek 15).



Obrázek 15: Booleovský svaz binárních transferově-stabilních průměrů na C_4 .

Evidentně se jedná o konečný booleovský svaz a musí tedy existovat nejmenší a největší binární transferově-stabilní průměr na řetězci C_n . Konkrétně, pro n -prvkový řetězec $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$, je nejmenší binární transferově-stabilní průměr ve tvaru

$$TS^{\min}(x, y) := \langle c_1 | c_2 | \dots | c_{n-1} \rangle$$

a největší binární transferově-stabilní průměr je

$$TS^{\max}(x, y) := \langle c_2 | c_3 | \dots | c_n \rangle.$$

VĚTA 2.12. *Množina binárních transferově-stabilních průměrů $TSM_{C_n}^{(2)}$ na n -prvkovém řetězci C_n tvoří booleovský svaz s 2^{n-1} prvky.*

Důkaz. Předpokládejme, že $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$ je n -prvkový svaz. Pak můžeme binární transferově-stabilní průměr zapsat do tvaru $\langle z_1 \mid \dots \mid z_{n-1} \rangle$, kde $z_i \in \{c_i, c_{i+1}\}$, $i = 1, \dots, n-1$. Prvek z_i , $i \in \{1, \dots, n-1\}$, je funkční hodnotou dvojice náležící do i -tého hlavního bloku $[(c_i, c_{i+1})] \approx z_i$. Vzhledem k tomu, že C_n je řetězec, jsou obrazy hlavních bloků na sobě nezávislé. Tedy počet binárních transferově-stabilních průměrů na řetězci C_n je roven

$$|\{c_1, c_2\} \mid \cdot \mid \{c_2, c_3\} \mid \cdot \dots \cdot \mid \{c_{n-1}, c_n\} \mid = 2^{n-1}.$$

Z Věty 2.10 je evidentní, že průsek nebo spojení dvou transferově-stabilních průměrů (provedených po složkách) je také transferově-stabilní průměr. Navíc, $\langle c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_{n-1} \rangle$ a $\langle c_2 \mid c_3 \mid \dots \mid c_n \rangle$ jsou po řadě nejmenší a největší transferově-stabilní průměr. Tedy množina $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$ tvoří konečný svaz.

Dále ukážeme existenci komplementarity. Nechť $TS = \langle z_1 \mid \dots \mid z_{n-1} \rangle$ je transferově-stabilní průměr a transferově-stabilní průměr \overline{TS} je definován předpisem $\overline{TS} := \langle y_1 \mid \dots \mid y_{n-1} \rangle$, kde $y_i \in \{c_i, c_{i+1}\}$, $y_i \neq z_i$. Pak průměr TS nebo \overline{TS} má prvek c_i , $i = 1, \dots, n-1$ na i -té pozici. V průseku dostaneme průměr $\langle c_1 \mid \dots \mid c_{n-1} \rangle$. Podobně, jeden z těchto průměrů má prvek c_{i+1} , $i = 1, \dots, n-1$ na i -té pozici. Spojením těchto průměrů obdržíme transferově-stabilní průměr $\langle c_2 \mid \dots \mid c_n \rangle$. Celkově, průměr \overline{TS} je jednoznačným komplementem k funkci TS . Tedy $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$ je jednoznačně komplementární svaz. Důkaz je tím hotov, neboť všechny konečné jednoznačně komplementární svazy jsou distributivní. \square

Následující důsledek pojednává o generátorech množiny $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$, tj. množině binárních transferově-stabilních průměrů, jehož uzavřením na průsek a spojení obdržíme celou množinu binárních transferově-stabilních průměrů na řetězci C_n . Jelikož svaz $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$ je booleovský, je i atomární, a z předchozí kapitoly víme, že atomární svaz je generován právě svými atomy.

DŮSLEDEK 2.13. *Každý binární transferově-stabilní průměr na n -prvkovém řetězci C_n je spojením nebo průsekem atomů svazu $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$, kde všechny atomy svazu $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$ se od nejmenšího binárního transferově-stabilního průměru TS^{\min} liší pouze v jediné hodnotě.*

Důkaz. Necht' $\langle z_1 \mid z_2 \mid \dots \mid z_{n-1} \rangle$ je binární transferově-stabilní průměr na řetězci $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$ a $\langle c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_{n-1} \rangle$ je nejmenší transferově-stabilní průměr. Zvolme $I = \{i \in \{1, \dots, n-1\} \mid z_i \neq c_i\}$, pak

$$\langle z_1 \mid z_2 \mid \dots \mid z_{n-1} \rangle = \bigvee_{i \in I} \langle c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_{i-1} \mid z_i \mid c_{i+1} \mid \dots \mid c_{n-1} \rangle.$$

Speciálně dostaneme dva extrémní případy. Pro nejmenší transferově-stabilní průměr je $I = \emptyset$. V tomto případě je binární průměr průsekem dvou různých atomů svazu $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$. Naopak, pro největší transferově-stabilní průměr je $I = \{1, \dots, n-1\}$. \square

2.4 Transferově-stabilní průměry vyšší arity

V této části se zaměříme na transferově-stabilní průměry vyšších arit. Rozdíl oproti předchozímu případu je ten, že tentokrát nepřičítáme stejné množině obrazů pouze jeden hlavní blok, nýbrž $k-1$ hlavních bloků, tj. existuje $k-1$ hlavních bloků mezi dvěma po sobě jdoucími vedlejšími bloky, jejichž funkční hodnoty náležejí do stejné množiny.

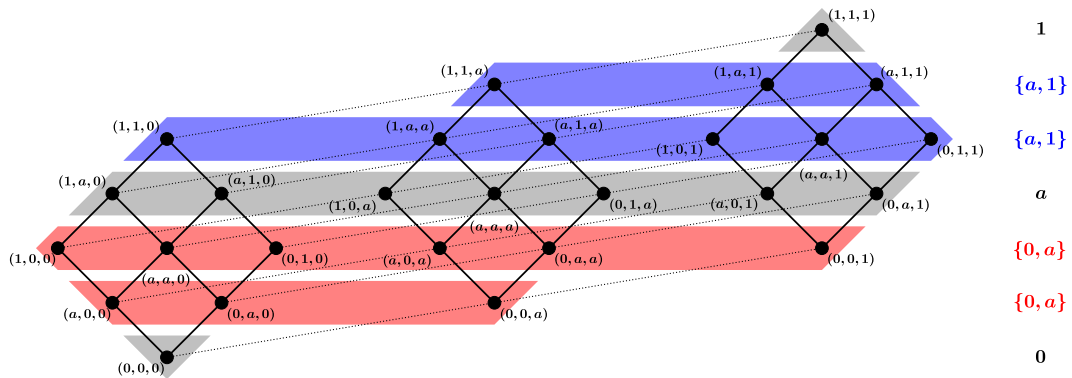
Například, k -ticím

$$(c_i, c_i, \dots, c_i, c_j), (c_i, c_i, \dots, c_j, c_j), \dots, (c_i, c_j, \dots, c_j, c_j),$$

kde $c_i, c_j \in C_n, c_i \prec c_j$, přiřadíme funkční hodnoty ze stejné množiny, i když tyto k -tice nejsou svázány transferovou-stabilitou, tj. nenáleží do stejného hlavního bloku.

DEFINICE 2.14. *Sekce* je množina k -tic, kterým se přiřazuje funkční hodnota transferově-stabilního průměru ze stejné množiny, tj. množina hlavních bloků, jenž mají stejnou množinu obrazů.

Na Obrázku 16 je znázorněno všech 7 bloků ternárního transferově-stabilního průměru na tříprvkovém svazu $C_3 = \{0, a, 1\}$. Šedé bloky představují vedlejší bloky, načez modré a červené bloky jsou hlavní, kde červené hlavní bloky tvoří první sekci a modré hlavní bloky tvoří druhou sekci, protože množiny obrazů jsou stejné, tj. po řadě $\{0, a\}$ a $\{a, 1\}$.



Obrázek 16: Sekce ternárního transferově-stabilního průměru na C_3 .

Dále, například u ternárního transferově-stabilního průměru na čtyřprvkovém řetězci $C_4 = \{0, a, b, 1\}$ dostaneme 6 hlavních bloků a 3 sekce, kde první sekce obsahuje hlavní bloky $[(0, 0, a)]$ a $[(0, a, a)]$, druhá sekce má hlavní

bloky $[(a, a, b)]$ a $[(a, b, b)]$ a poslední třetí sekce má hlavní bloky $[(b, b, 1)]$ a $[(b, 1, 1)]$.

Podíváme-li se na sekce u binárních průměrů, snadno vidíme, že velikost každé sekce je rovna 1, tj. existuje pouze jeden hlavní blok v každé sekci a navíc počet sekcí je roven $n - 1$. Podobně, transferově-stabilní průměry vyšších arit mají stejný počet sekcí jako binární transferově-stabilní průměry, tj. $n - 1$, ale rozdíl je ve velikostech sekcí, tj. počtu hlavních bloků mezi dvěma po sobě jdoucími vedlejšími bloky. Z tohoto důvodu musí být obrazy hlavních bloků ze stejné sekce, pro transferově-stabilní průměry arity větší než 2, uvnitř každé sekce uspořádány. Například, nemůže platit $A(c_i, \dots, c_i, c_i, c_{i+1}) = c_{i+1}$ a $A(c_i, \dots, c_i, c_{i+1}, c_{i+1}) = c_i$, protože A by nebyla agregační funkce, neboť $(c_i, \dots, c_i, c_i, c_{i+1}) \leq (c_i, \dots, c_i, c_{i+1}, c_{i+1})$, ale $c_{i+1} \not\leq c_i$. Navíc, obrazy jednotlivých sekcí jsou na sobě nezávislé jako v případě binárních transferově-stabilních průměrů.

Použitím zavedené notace pro zápis binárních transferově-stabilních průměrů můžeme podobně zapsat i k -ární transferově-stabilní průměr na řetězci $C_n = \{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n\}$ ve tvaru

$$TS(x_1, \dots, x_k) := \left\langle z_1^1, z_2^1, \dots, z_{k-1}^1 \mid z_1^2, z_2^2, \dots, z_{k-1}^2 \mid \dots \mid z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \right\rangle,$$

kde pro první sekci platí

$$z_1^1, z_2^1, \dots, z_{k-1}^1 \in \{c_1, c_2\}, \quad z_1^1 \leq z_2^1 \leq \dots \leq z_{k-1}^1,$$

druhá sekce je tvořena prvky

$$z_1^2, z_2^2, \dots, z_{k-1}^2 \in \{c_2, c_3\}, \quad z_1^2 \leq z_2^2 \leq \dots \leq z_{k-1}^2,$$

a pro prvky z poslední $(n - 1)$ -ní sekce je splněno

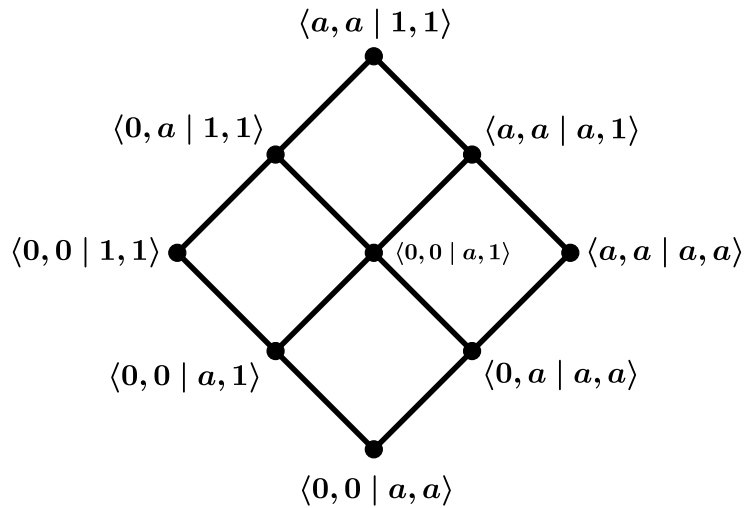
$$z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \in \{c_{n-1}, c_n\}, \quad z_1^{n-1} \leq z_2^{n-1} \leq \dots \leq z_{k-1}^{n-1}.$$

Speciálně, všechny ternární transferově-stabilní průměry na C_3 jsou

$$\begin{aligned} &\langle 0, 0 \mid a, a \rangle, \langle 0, 0 \mid a, 1 \rangle, \langle 0, 0 \mid 1, 1 \rangle, \\ &\langle 0, a \mid a, a \rangle, \langle 0, a \mid a, 1 \rangle, \langle 0, a \mid 1, 1 \rangle, \\ &\langle a, a \mid a, a \rangle, \langle a, a \mid a, 1 \rangle, \langle a, a \mid 1, 1 \rangle, \end{aligned}$$

kde $\langle 0, 0 \mid a, a \rangle$ je nejmenší ternární transferově-stabilní průměr a $\langle a, a \mid 1, 1 \rangle$ je největší .

Podobně jako u binárních transferově-stabilních průměrů, tak i zde se můžeme zabývat otázkou ohledně tvaru struktury $\text{TSM}_{C_n}^{(k)}$. I v tomto případě průsek či spojení transferově-stabilních průměrů vyšší arity provádíme po složkách, jedná se tedy o konečný svaz. Pro představu můžeme nakreslit svaz všech výše zmíněných ternárních transferově-stabilních průměrů na řetězci C_3 a zároveň je tím i uspořádat. Výsledek je znázorněn na Obrázku 17.



Obrázek 17: Svaz všech ternárních transferově-stabilních průměrů na C_3 .

I zde se můžeme pozastavit nad tvarem nejmenšího a největšího ternárního transferově-stabilního průměru. Podle výše zmíněného příkladu je jasné, že pro n -prvkový řetězec $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$ je nejmenší ternární transferově-stabilní průměr tvaru

$$TS^{min}(x, y, z) := \langle c_1, c_1 \mid \dots \mid c_{n-1}, c_{n-1} \rangle$$

a největší transferově-stabilní průměr je dán předpisem

$$TS^{max}(x, y, z) := \langle c_2, c_2 \mid \dots \mid c_n, c_n \rangle.$$

Odtud už je patrné, jak vypadá nejmenší a největší k -ární transferově-stabilní průměr na n -prvkovém řetězci $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$:

$$TS^{min}(x_1, \dots, x_k) := \langle c_1, \dots, c_1 \mid \dots \mid c_{n-1}, \dots, c_{n-1} \rangle \quad (17)$$

$$TS^{max}(x_1, \dots, x_k) := \langle c_2, \dots, c_2 \mid \dots \mid c_n, \dots, c_n \rangle. \quad (18)$$

Předtím, než vyslovíme finální tvrzení této kapitoly ohledně typu svazu množiny $TSM_{C_n}^{(k)}$, podíváme se na počet hlavních bloků pro libovolný k -ární transferově-stabilní průměr. Již víme, že počet sekcí závisí pouze na velikosti svazu, nikoli na aritě transferově-stabilního průměru. Tedy pro řetězec C_n dostaneme $n - 1$ sekcí. Například pro $C_5 = \{0, a, b, c, 1\}$ obdržíme 4 sekce, jejichž množiny obrazů jsou po řadě následující množiny: $\{0, a\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ a $\{c, 1\}$. Na druhou stranu, počet hlavních bloků v jedné sekci závisí pouze na aritě transferově-stabilního průměru. Uvažme k -ární transferově-stabilní průměr na C_5 . Pak hlavní bloky pro binární, ternární a kvaternární transferově-stabilní průměr, v sekci určené množinou obrazů $\{0, a\}$, jsou následující

k	2	3	4
	$[(0, a)]$	$[(0, 0, a)]$	$[(0, 0, 0, a)]$
		$[(0, a, a)]$	$[(0, 0, a, a)]$
			$[(0, a, a, a)]$

Jednoduše vidíme, že se vzrůstající aritou roste počet hlavních bloků v jedné sekci. Tedy velikost každé sekce je rovna $k - 1$, kde k je arita transferově-stabilního průměru, tj. pro k -ární transferově-stabilní průměr existuje právě $k - 1$ hlavních bloků v každé sekci. Závěrem, počet všech hlavních bloků k -árního transferově-stabilního průměru na konečném řetězci C_n je roven $(n - 1) \cdot (k - 1)$. Nyní již můžeme formulovat zobecněné tvrzení k Větě 2.12.

TVRZENÍ 2.15. *Nechť C_n je n -prvkový řetězec pro $n \in \mathbb{N}$. Pak počet všech k -árních transferově-stabilních průměrů na řetězci C_n je roven k^{n-1} a navíc*

$$\text{TSM}_{C_n}^{(k)} \cong C_k^{n-1},$$

tj. všechny k -ární transferově-stabilní průměry na C_n tvoří $(n - 1)$ -ní direktní mocninu k -prvkového řetězce.

Důkaz. Předpokládejme, že $C_n = \{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n\}$ je n -prvkový řetězec. Pak můžeme libovolný k -ární transferově-stabilní průměr zapsat ve tvaru:

$$\langle z_1^1, z_2^1, \dots, z_{k-1}^1 \mid z_1^2, z_2^2, \dots, z_{k-1}^2 \mid \dots \mid z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \rangle.$$

Volby hodnot jednotlivých sekcí jsou na sobě vzájemně nezávislé, ale uvnitř jedné sekce už nikoli. Počet možností pro volbu možných hodnot v jedné sekci je roven k , protože prvky $z_1^i, z_2^i, \dots, z_{k-1}^i$ musejí být uspořádané pro každé $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, tj. $z_1^i \leq z_2^i \leq \dots \leq z_{k-1}^i$. Navíc $z_j^i \in \{c_i, c_{i+1}\}$ pro všechna $j \in \{1, \dots, k - 1\}$. Celkově tedy, počet všech k -árních transferově-stabilních průměrů je roven k^{n-1} .

Je zřejmé, že průsek či spojení transferově-stabilních průměrů je opět transferově-stabilní průměr, takže $\text{TSM}_{C_n}^{(k)}$ je konečný svaz s nejmenším prvkem TS^{\min} (viz rovnost (17)) a největším prvkem TS^{\max} (viz rovnost (18)).

Dále, distributivita plyne z toho, že průsek a spojení transferově-stabilních průměrů je prováděn po složkách, přičemž v každé složce provádíme operace na řetězci, což je distributivní svaz.

Uvažujme nyní $n - 2$ pevně daných sekcí. Pak dostaneme následujících k transferově-stabilních průměrů:

$$\begin{aligned} & \langle \dots | c_i, c_i, \dots, c_i, c_i | \dots \rangle \\ & \langle \dots | c_i, c_i, \dots, c_i, c_j | \dots \rangle \\ & \langle \dots | c_i, c_i, \dots, c_j, c_j | \dots \rangle \\ & \quad \vdots \\ & \langle \dots | c_i, c_j, \dots, c_j, c_j | \dots \rangle \\ & \langle \dots | c_j, c_j, \dots, c_j, c_j | \dots \rangle, \end{aligned}$$

kde $c_i \prec c_j$ a $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Vidíme, že tyto transferově-stabilní průměry jsou lineárně uspořádané, tzn. tvoří k -prvkový řetězec C_k . Ve druhém kroku zafixujeme $n - 3$ sekcí, z čehož dostaneme k^2 transferově-stabilních průměrů uspořádaných do druhé direktní mocniny k -prvkového svazu, tj. tvoří svaz C_k^2 . Analogicky dospějeme k tomu, že všechny k -ární transferově-stabilní průměry na n -prvkovém řetězci C_n tvoří $(n - 1)$ -ní direktní mocninu k -prvkového řetězce, tj. konečný svaz C_k^{n-1} . \square

DŮSLEDEK 2.16. *Transferově-stabilní průměr $TS : C_n^k \rightarrow C_n$ je atomem svazu $\text{TSM}_{C_n}^{(k)}$ právě tehdy, když se od nejmenšího transferově-stabilního průměru TS^{\min} liší pouze v posledním prvku právě jedné sekce.*

Důkaz. Nejmenší transferově-stabilní průměr TS^{min} na n -prvkovém řetězci C_n je ve tvaru

$$\langle \underbrace{c_1, \dots, c_1}_{k-1} \mid \dots \mid \underbrace{c_{n-1}, \dots, c_{n-1}}_{k-1} \rangle.$$

Jestliže zvýšíme jeden prvek v dané sekci (musí se jednat o poslední prvek v sekci, jinak by byla porušena podmínka monotonie), dostaneme transferově-stabilní průměr nacházející se ve svazu $TSM_{C_n}^{(k)}$ ihned nad nejmenším transferově-stabilním průměrem TS^{min} , neboť je zřejmé, že mezi tímto průměrem a nejmenším průměrem neexistuje žádný jiný transferově-stabilní průměr. Tedy jedná se o atom svazu $TSM_{C_n}^{(k)}$. \square

Vrátíme-li se k příkladu na Obrázku 17, vidíme, že množina všech ternárních transferově-stabilních průměrů na tříprvkovém řetězci $TSM_{C_3}^{(3)}$ tvoří svaz, jenž je druhou mocninou tříprvkového řetězce, což podle Tvzení 2.15, pro $k = 3$ a $n = 3$, platí, neboť

$$TSM_{C_3}^{(3)} \cong C_3^2.$$

Navíc, nejmenší ternární transferově-stabilní průměr TS^{min} na tříprvkovém řetězci C_3 je ve tvaru

$$TS^{min}(x, y, z) = \langle 0, 0 \mid a, a \rangle,$$

a tedy podle Důsledku 2.16, dostaneme dva atomy svazu $TSM_{C_3}^{(3)}$ (máme dvě sekce), které po řadě dostaneme zvednutím posledního prvku v první a ve druhé sekci, tj.

$$\langle 0, a \mid a, a \rangle, \langle 0, 0 \mid a, 1 \rangle,$$

což podle Obrázku 17 přesně odpovídá.

Na konci této kapitoly se podíváme blíže na vyhodnocení vstupu k -árního transferově-stabilního průměru. U „normálních“ funkcí zadaných předpisem, například aritmetický průměr (viz Věta 2.2), je vyhodnocení libovolného vstupu velmi jednoduché, neboť stačí vstupní hodnoty zadat do předpisu a spočítat výsledek (obraz či funkční hodnotu). Nicméně u transferově-stabilních průměrů tento postup využít nemůžeme, jelikož předpis transferově-stabilních průměrů je zadán pomocí obrazů bloků, jinými slovy známe všechny výsledky a jen se snažíme najít ten správný. Naším úkolem je zjistit, do jakého bloku daný vstup padne. Někdy je na první pohled jasné, o jaký blok se jedná, ale jindy musíme pro určení bloku využít potřebných znalostí. Vyhodnocovací proces je založen na úpravě vstupní k -tice do požadovaného tvaru. Cílem je, pomocí transferové-stability, upravit původní vstup (x_1, \dots, x_k) , kde $x_1, \dots, x_k \in C_n$, do jednoho z následujících tvarů

$$\begin{aligned} & (c_i, c_i, \dots, c_i, c_i) \\ & (c_i, c_i, \dots, c_i, c_{i+1}) \\ & (c_i, c_i, \dots, c_{i+1}, c_{i+1}) \\ & \quad \vdots \\ & (c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+1}, c_{i+1}), \end{aligned}$$

pro nějaké $i \in \{1, \dots, n-1\}$, tj. libovolnou původní k -tici převedeme na k -tici obsahující pouze jednu (konstantní vstup) nebo dvě po sobě jdoucí hodnoty ze svazu C_n . Pro takto upravenou k -tici (vzor), velmi snadno nalezneme její obraz, čímž zároveň i obraz původní k -tice. Nyní popíšeme postup, jak z upravené k -tice vyčíst její funkční hodnotu.

Nechť

$$TS(x_1, \dots, x_k) = \langle z_1^1, z_2^1, \dots, z_{k-1}^1 \mid z_1^2, z_2^2, \dots, z_{k-1}^2 \mid \dots \mid z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \rangle$$

je k -ární transferově-stabilní průměr na n -prvkovém řetězci $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$.

Pak $z_j^i \in \{c_i, c_{i+1}\}$ pro $i = 1, \dots, n-1$ a jedná se o j -tý hlavní blok v i -té sekci pro $j = 1, \dots, k-1$.

Konkrétně, hlavní bloky v i -té sekci jsou následující

$$[(c_i, \dots, c_i, c_{i+1})], \dots, [(c_i, c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+1})], [(c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+1})],$$

tj. prvek z_j^i odpovídá hlavnímu bloku

$$[(c_i, \dots, c_i, \underbrace{c_{i+1}, \dots, c_{i+1}}_j)]$$

pro $i = 1, \dots, n-1$.

PŘÍKLAD 2.17. Úkolem je nalézt obrazy (funkční hodnoty) pro vstupy

1. $(c, 1, b, 1, a)$
2. $(d, 1, b, a, 0)$
3. $(0, 0, d, 0, 0)$
4. $(d, 1, b, d, 1)$

použitím 5-árního transferově-stabilního průměru

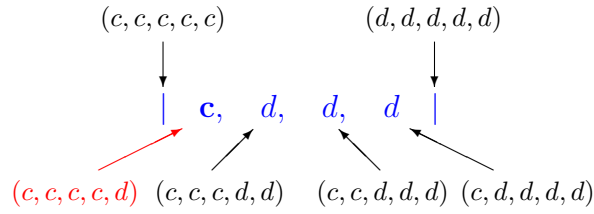
$$TS(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \langle 0, 0, 0, a \mid a, a, b, b \mid b, b, b, c \mid c, d, d, d \mid 1, 1, 1, 1 \rangle$$

na šestiprvkovém řetězci $C_6 = \{0, a, b, c, d, 1\}$.

1.

$$\begin{aligned}
 TS(c, 1, b, 1, a) &\stackrel{\text{sym}}{\cong} TS(a, b, c, 1, 1) \stackrel{a\uparrow 1\downarrow}{\cong} TS(b, b, c, d, 1) \\
 &\stackrel{b\uparrow 1\downarrow}{\cong} TS(b, c, c, d, d) \stackrel{b\uparrow d\downarrow}{\cong} TS(c, c, c, c, d),
 \end{aligned}$$

kde upravená 5-tice (c, c, c, c, d) generuje 1. hlavní blok ve 4. sekci, tj. sekci mezi prvky c a d . Hledáme tedy prvek z_1^4 , jenž podle tvaru TS odpovídá prvku c (viz diagram níže).

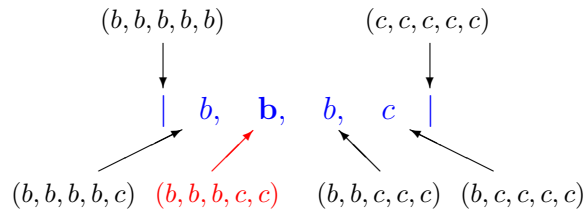


Výsledek: zadaná 5-tice $(c, 1, b, 1, a)$ se přes transferově-stabilní průměr TS zobrazí na prvek c , tj. $TS(c, 1, b, 1, a) = c$.

2.

$$\begin{aligned}
 TS(d, 1, b, a, 0) &\stackrel{\text{sym}}{\cong} TS(0, a, b, d, 1) \stackrel{0\uparrow 1\downarrow}{\cong} TS(a, a, b, d, d) \\
 &\stackrel{a\uparrow d\downarrow}{\cong} TS(a, b, b, c, d) \stackrel{a\uparrow d\downarrow}{\cong} TS(b, b, b, c, c),
 \end{aligned}$$

kde upravená 5-tice (b, b, b, c, c) generuje 2. hlavní blok ve 3. sekci, tj. sekci mezi prvky b a c . Hledáme tedy prvek z_3^2 , jenž podle tvaru TS odpovídá prvku b (viz diagram níže).

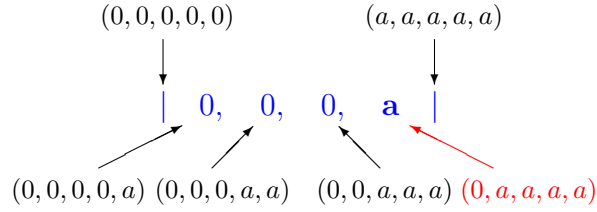


Výsledek: zadaná 5-tice $(d, 1, b, a, 0)$ se přes transferově-stabilní průměr TS zobrazí na prvek b , tj. $TS(d, 1, b, a, 0) = b$.

3.

$$\begin{aligned}
 TS(0, 0, d, 0, 0) &\stackrel{\text{sym}}{=} TS(0, 0, 0, 0, d) \stackrel{0\uparrow d\downarrow}{=} TS(0, 0, 0, a, c) \\
 &\stackrel{0\uparrow c\downarrow}{=} TS(0, 0, a, a, b) \stackrel{0\uparrow b\downarrow}{=} TS(0, a, a, a, a),
 \end{aligned}$$

kde upravená 5-tice $(0, a, a, a, a)$ generuje 4. hlavní blok v 1. sekci, tj. sekci mezi prvky 0 a a . Hledáme tedy prvek z_1^4 , jenž podle tvaru TS odpovídá prvku a (viz diagram níže).

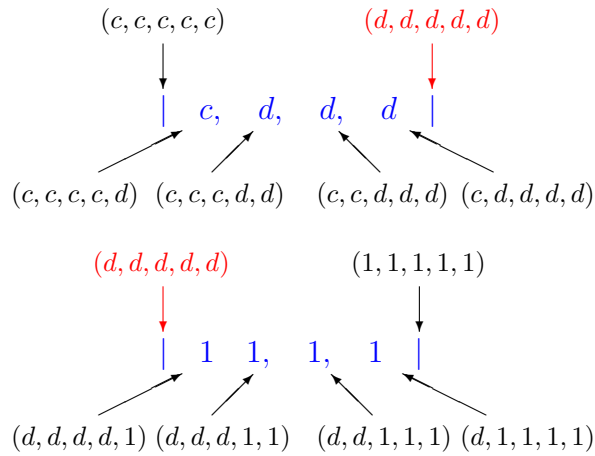


Výsledek: zadaná 5-tice $(0, 0, d, 0, 0)$ se přes transferově-stabilní průměr TS zobrazí na prvek a , tj. $TS(0, 0, d, 0, 0) = a$.

4.

$$\begin{aligned}
 TS(d, 1, b, d, 1) &\stackrel{\text{sym}}{=} TS(b, d, d, 1, 1) \stackrel{b\uparrow 1\downarrow}{=} TS(c, d, d, d, 1) \\
 &\stackrel{c\uparrow 1\downarrow}{=} TS(d, d, d, d, d),
 \end{aligned}$$

kde upravená 5-tice (d, d, d, d, d) generuje předposlední (pátý) vedlejší blok, tj. blok mezi 4. a 5. sekcí. Navíc se jedná o konstantní vstup, což tedy výsledek značně ulehčuje. Danou situaci můžeme znázornit na digramech níže, kde na prvním diagramu je čtvrtá sekce a na druhém je zobrazena sekce pátá.



Výsledek: zadaná 5-tice $(d, 1, b, d, 1)$ se přes transferově-stabilní průměr TS zobrazí na prvek d , tj. $TS(d, 1, b, d, 1) = d$.

2.5 Generující množina transferově-stabilních průměrů

2.5.1 Prostřední transferově-stabilní průměr

V této kapitole se zaměříme na transferově-stabilní průměry, které generují všechny ostatní, to znamená, že skládáním takových průměrů dostaneme libovolný transferově-stabilní průměr. Problém nastane, budeme-li chtít vygenerovat transferově-stabilní průměr s využitím transferově-stabilních průměrů menší arity. Například, v minulé kapitole jsme vygenerovali idempotentní agregační funkci libovolné arity pomocí binárních idempotentních agregačních funkcí χ_* a med_* nebo konstrukce ze článku [8], kde všechny agregační funkce byly generovány použitím unárních a binárních agregačních funkcí využívajících teorii klonů. Takovéto generování bylo možné díky projekcím (viz Definice 1.7). Nicméně v našem případě je sice skládání transferově-stabilních průměrů uzavřené na skládání, ale projekce nejsou transferově-stabilní průměry, čímž tedy množina všech transferově-stabilních průměrů netvoří klon. Odtud je již patrné, že nelze využít stejných prostředků k vygenerování

funkcí, jako v případě agregačního (respektive idempotentního) klonu, což nám tudíž znemožňuje generovat transferově-stabilní průměry různých arit. Z tohoto důvodu se zaměříme na otázku generování transferově-stabilních průměrů stejné arity. Pro tento účel zavedeme tzv. prostřední transferově-stabilní průměr a vnitřní a vnější generující transferově-stabilní průměry, což budou, ve spojení s nejmenším a největším transferově-stabilním průměrem, generátory množiny všech transferově-stabilních průměrů stejné arity na konečném řetězci, tj. generující množina svazu $\text{TSM}_{C_n}^{(k)}$.

DEFINICE 2.18. Necht' $\text{TSM}_{C_n}^{(k)}$ je množina všech k -árních transferově-stabilních průměrů na n -prvkovém řetězci $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$ pro $n, k \in \mathbb{N}$. Pak k -ární transferově-stabilní průměr TS^* nazveme *prostřední transferově-stabilní průměr*, je-li tvaru

$$\left\langle \underbrace{\{c_1, \dots, c_1, c_2, \dots, c_2\}}_{s \quad s-1}^{k-1} \mid \underbrace{\{c_2, \dots, c_2, c_3, \dots, c_3\}}_{s \quad s-1}^{k-1} \mid \dots \mid \underbrace{\{c_{n-1}, \dots, c_{n-1}, c_n, \dots, c_n\}}_{s \quad s-1}^{k-1} \right\rangle$$

pro sudé k a $s = \frac{k}{2}$ nebo

$$\left\langle \underbrace{\{c_1, \dots, c_1, c_2, \dots, c_2\}}_{s-1 \quad s-1}^{k-1} \mid \underbrace{\{c_2, \dots, c_2, c_3, \dots, c_3\}}_{s-1 \quad s-1}^{k-1} \mid \dots \mid \underbrace{\{c_{n-1}, \dots, c_{n-1}, c_n, \dots, c_n\}}_{s-1 \quad s-1}^{k-1} \right\rangle$$

pro liché k a $s = \lceil \frac{k}{2} \rceil$, kde $[x]$ je celá část čísla x .

2.5.2 Vnitřní generující transferově-stabilní průměry

Ke konstrukci vnitřních a vnějších generujících transferově-stabilních průměrů se využívá speciálního vztahu mezi dvěma sekcemi. Z předchozí kapitoly víme, že každá sekce k -árního transferově-stabilního průměru je ve tvaru

$$\left| \underbrace{\{c_i, \dots, c_i\}}_p \mid \underbrace{\{c_{i+1}, \dots, c_{i+1}\}}_q \right|$$

pro libovolné $c_i \in C_n$, kde $p, q \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, $q = k - p - 1$, tj. i -tá sekce obsahuje právě dva prvky c_i a c_{i+1} z řetězce C_n , přičemž prvek c_i se vyskytuje v sekci právě p -krát a prvek c_{i+1} je v sekci zastoupen právě q -krát.

DEFINICE 2.19. Necht' $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, $i \neq j$. Pak řekneme, že i -tá sekce ve tvaru

$$| c_i, \dots, c_i, \underbrace{c_{i+1}, \dots, c_{i+1}}_q |$$

a j -tá sekce ve tvaru

$$| \underbrace{c_j, \dots, c_j}_q, c_{j+1}, \dots, c_{j+1} |$$

tvoří *křížovou inverzi*.

DEFINICE 2.20. Transferově-stabilní průměr se nazývá *vnitřně generující*, jestliže, až na poslední dvě sekce, má stejné sekce jako prostřední transferově-stabilní průměr, tj. prvních $n-3$ sekcí odpovídá prostřednímu transferově-stabilnímu průměru

$$\left\langle \overbrace{c_1, \dots, c_1}^{s-1 \text{ nebo } s}, \overbrace{c_2, \dots, c_2}^{s-1} \mid \dots \mid \overbrace{c_{n-3}, \dots, c_{n-3}}^{s-1 \text{ nebo } s}, \overbrace{c_{n-2}, \dots, c_{n-2}}^{s-1} \mid \triangleleft \mid \triangleright \right\rangle,$$

a poslední dvě sekce tvoří křížovou inverzi, tj.

$$\begin{aligned} & \langle \bullet \mid c_{n-2}, \dots, c_{n-2} \mid c_n, \dots, c_n \rangle \\ & \langle \bullet \mid c_{n-2}, \dots, c_{n-2}, c_{n-1} \mid c_{n-1}, c_n, \dots, c_n \rangle \\ & \quad \vdots \\ & \langle \bullet \mid c_{n-2}, c_{n-1}, \dots, c_{n-1} \mid c_{n-1}, \dots, c_{n-1}, c_n \rangle \\ & \langle \bullet \mid c_{n-1}, \dots, c_{n-1} \mid c_{n-1}, \dots, c_{n-1} \rangle \end{aligned}$$

jsou všechny vnitřní generující transferově-stabilní průměry na n -prvkovém řetězci C_n , přičemž počet těchto průměrů je roven k .

Například, každé dvě sekce prostředního transferově-stabilního průměru liché arity (k je liché) tvoří křížovou inverzi, odkud vyplývá, že prostřední transferově-stabilní průměr liché arity je vnitřní generující transferově-stabilní průměr (viz Příklad 2.26). Příklad transferově-stabilního průměru sudé arity, včetně konstrukce vnitřních generujících transferově-stabilních průměrů, ukážeme v následujícím příkladu.

PŘÍKLAD 2.21. Uvažujme aritu $k = 4$ a počet prvků řetězce $n = 5$, to jest $C_5 = \{0, a, b, c, 1\}$. Pak podle Definice 2.18 je $s = 2$ a tedy prostřední transferově-stabilní průměr TS^* je

$$TS^*(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle 0, 0, a \mid a, a, b \mid b, b, c \mid c, c, 1 \rangle.$$

Dále, podle Definice 2.20, první a druhá sekce zůstanou stejné jako u TS^* , ale třetí a čtvrtou sekci musíme zapsat tak, aby tvořily křížovou inverzi. Také víme, že počet vnitřních generujících transferově-stabilních průměrů je roven $k = 4$. Tedy všechny vnitřně generující 4-ární transferově-stabilní průměry na pětiprvkovém řetězci C_5 jsou:

$$\langle 0, 0, a \mid a, a, b \mid b, b, b \mid 1, 1, 1 \rangle$$

$$\langle 0, 0, a \mid a, a, b \mid b, b, c \mid c, 1, 1 \rangle$$

$$\langle 0, 0, a \mid a, a, b \mid b, c, c \mid c, c, 1 \rangle$$

$$\langle 0, 0, a \mid a, a, b \mid c, c, c \mid c, c, c \rangle.$$

2.5.3 Vnější generující transferově-stabilní průměry

Posledními generátory množiny $TSM_{C_n}^{(k)}$, jež je potřeba zavést, jsou tzv. vnější generující transferově-stabilní průměry. Pro jejich konstrukci je potřeba nejen prostřední transferově-stabilní průměr, podobně jako u vnitřních generujících transferově-stabilních průměrů, ale navíc se využijí nejmenší a největší transferově-stabilní průměr TS^{min} a TS^{max} (viz vztahy (17) a (18)).

DEFINICE 2.22. *Vnější generující transferově-stabilní průměr* na n -prvkovém řetězci C_n je pro každé $l \in \{1, 2, \dots, n-3\}$ definován podle následujících pravidel:

- i) Prvních $(l-1)$ sekcí je stejných jako u prostředního transferově-stabilního průměru TS^* , tj.

$$\left\langle \overbrace{\underbrace{c_1, \dots, c_1}_{s-1 \text{ nebo } s}, \underbrace{c_2, \dots, c_2}_{s-1}}^{\star} \mid \dots \mid \underbrace{c_{l-1}, \dots, c_{l-1}}_{s-1 \text{ nebo } s}, \underbrace{c_l, \dots, c_l}_{s-1} \mid \diamond \mid \triangleleft \mid \dots \mid \triangleright \right\rangle.$$

- ii) Jestliže l -tá sekce \diamond je v jednom z následujících tvarů

$$\begin{aligned} & \mid c_l, \dots, c_l \mid \\ & \mid c_l, \dots, c_l, c_{l+1} \mid \\ & \vdots \\ & \mid c_l, \dots, c_l, \underbrace{c_{l+1}, \dots, c_{l+1}}_{s-2} \mid, \end{aligned}$$

pak zbývající sekce $\triangleleft, \dots, \triangleright$ odpovídají největšímu transferově-stabilnímu průměru TS^{max} , tj.

$$\begin{aligned} & \langle \star \mid c_l, \dots, c_l \mid c_{l+2}, \dots, c_{l+2} \mid \dots \mid c_n, \dots, c_n \rangle \\ & \langle \star \mid c_l, \dots, c_l, c_{l+1} \mid c_{l+2}, \dots, c_{l+2} \mid \dots \mid c_n, \dots, c_n \rangle \\ & \vdots \\ & \langle \star \mid c_l, \dots, c_l, \underbrace{c_{l+1}, \dots, c_{l+1}}_{s-2} \mid c_{l+2}, \dots, c_{l+2} \mid \dots \mid c_n, \dots, c_n \rangle. \end{aligned}$$

iii) Jestliže l -tá sekce \diamond je v jednom z následujících tvarů

$$\begin{array}{c} | c_l, \dots, c_l, \underbrace{c_{l+1}, \dots, c_{l+1}}_s | \\ \vdots \\ | c_l, c_{l+1}, \dots, c_{l+1} | \\ | c_{l+1}, \dots, c_{l+1} |, \end{array}$$

pak zbývající sekce $\triangleleft, \dots, \triangleright$ odpovídají nejmenšímu transferově-stabilnímu průměru TS^{min} , tj.

$$\begin{array}{c} \langle \star | c_l, \dots, c_l, \underbrace{c_{l+1}, \dots, c_{l+1}}_s | c_{l+1}, \dots, c_{l+1} | \dots | c_{n-1}, \dots, c_{n-1} \rangle \\ \vdots \\ \langle \star | c_l, c_{l+1}, \dots, c_{l+1} | c_{l+1}, \dots, c_{l+1} | \dots | c_{n-1}, \dots, c_{n-1} \rangle \\ \langle \star | c_{l+1}, \dots, c_{l+1} | c_{l+1}, \dots, c_{l+1} | \dots | c_{n-1}, \dots, c_{n-1} \rangle. \end{array}$$

Z právě zmíněné Definice, konkrétně z bodů ii) a iii), lze vidět, že počet všech uvažovaných tvarů l -té sekce je $k - 1$. Jinými slovy, počet všech tvarů jedné sekce je k , ačkoli neuvažujeme sekci stejnou jako má prostřední transferově-stabilní průměr TS^* . Jelikož se konstrukce vnějších generujících transferově-stabilních průměrů zabývá prvními $n - 3$ sekcemi, je počet všech vnějších generujících k -árních transferově-stabilních průměrů na n -prvkovém řetězci roven $(k - 1) \cdot (n - 3)$. Více v následujícím příkladu.

PŘÍKLAD 2.23. Vrátime-li se k Příkladu 2.21, zkonstruujeme všechny vnější generující 4-ární transferově-stabilní průměry na pětiprvkovém řetězci C_5 . V minulém příkladu jsme se zaměřili na poslední dvě sekce a nyní budeme pokračovat s druhou a následně první sekcí, tj. $l \in \{1, 2\}$.

Uvažujme $l = 2$, pak první sekce je stejná jako u TS^* a druhá sekce může nabývat následujících tvarů

$$| a, a, a | ; | a, a, b | ; | a, b, b | ; | b, b, b | .$$

Máme-li vhodně uspořádané sekce, pak sekce nalevo od sekce náležící prostřednímu transferově-stabilnímu průměru TS^* splňují bod ii) Definice 2.22 a sekce napravo splňují bod iii) oné definice. Jinými slovy, podle bodu ii) je výskyt druhého prvku maximálně $(s - 2)$ -krát. Nicméně v našem případě je $s = 2$, a tedy prvek b se nevyskytuje ani jednou pro sekce splňující bod ii), což přesně odpovídá pouze sekci $| a, a, a |$. Zbylé sekce doplníme podle největšího 4-árního transferově-stabilního průměru TS^{max} na pětiprvkovém řetězci C_5 , tj.

$$TS^{max}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle a, a, a | b, b, b | c, c, c | 1, 1, 1 \rangle .$$

Tedy

$$\langle 0, 0, a | a, a, a | c, c, c | 1, 1, 1 \rangle$$

je vnější generující 4-ární transferově-stabilní průměr splňující bod ii) Definice 2.22.

Na druhou stranu, podle bodu iii) je výskyt druhého prvku minimálně s -krát, čili prvek b se musí v sekci vyskytnout nejméně dvakrát, čemuž odpovídají sekce $| a, b, b |$ a $| b, b, b |$. Zbylé sekce doplníme podle nejmenšího 4-árního transferově-stabilního průměru TS^{min} na pětiprvkovém řetězci C_5 , tj.

$$TS^{min}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle 0, 0, 0 | a, a, a | b, b, b | c, c, c \rangle .$$

Tudíž

$$\langle 0, 0, a \mid a, b, b \mid b, b, b \mid c, c, c \rangle$$

$$\langle 0, 0, a \mid b, b, b \mid b, b, b \mid c, c, c \rangle$$

jsou vnější generující 4-ární transferově-stabilní průměry splňující bod iii)

Definice 2.22.

Podobně pro $l = 1$. V tomto případě neexistují žádné sekce před, tedy tyto vnější generující transferově-stabilní průměry nebudou mít nic společného s prostředním transferově-stabilním průměrem TS^* . I tentokrát vypíšeme ve vhodném pořadí všechny tvary první sekce, kterých může nabývat, tj.

$$\mid 0, 0, 0 \mid ; \mid 0, 0, a \mid ; \mid 0, a, a \mid ; \mid a, a, a \mid .$$

Ve stejném duchu jako v případě $l = 2$, sekce $\mid 0, 0, 0 \mid$ splňuje bod ii) a sekce $\mid 0, a, a \mid, \mid a, a, a \mid$ splňují bod iii) Definice 2.22. Tedy

$$\langle 0, 0, 0 \mid b, b, b \mid c, c, c \mid 1, 1, 1 \rangle$$

je vnější generující 4-ární transferově-stabilní průměr splňující bod ii) Definice 2.22 a

$$\langle 0, a, a \mid a, a, a \mid b, b, b \mid c, c, c \rangle$$

$$\langle a, a, a \mid a, a, a \mid b, b, b \mid c, c, c \rangle$$

jsou vnější generující 4-ární transferově-stabilní průměry splňující bod iii)

Definice 2.22.

Závěrem, počet všech vnějších generujících 4-ární transferově-stabilních průměrů na pětiprvkovém řetězci C_5 je roven $(k - 1) \cdot (n - 3) = 3 \cdot 2 = 6$.

2.5.4 Generující množina

Nyní už máme vše potřebné k vyslovení tvrzení ohledně generující množiny svazu $\text{TSM}_{C_n}^{(k)}$ všech k -árních transferově-stabilních průměrů na řetězci C_n . Generující množina svazu využívá svazové operace, které nejsou transferově-stabilními průměry, protože například pro svaz z Obrázku 12 platí

$$\begin{aligned} 0 \vee 1 &= 1 \neq a = a \vee a \\ 0 \wedge 1 &= 0 \neq a = a \wedge a. \end{aligned}$$

Tedy je nutné přidat svazové operace do generující množiny, čímž by ale bylo porušeno generování funkcí ve smyslu Definice 1.7. Ukazuje se však, že průseku a spojení transferově-stabilních průměrů můžeme dosáhnout i jiným způsobem, a to právě využitím nejmenšího a největšího transferově-stabilního průměru.

LEMMA 2.24. *Nechť TS_1 a TS_2 jsou libovolné k -ární transferově-stabilní průměry na n -prvkovém řetězci C_n . Pak*

$$\begin{aligned} TS_1 \wedge TS_2 &= TS^{\min}(TS_1, \dots, TS_1, TS_2) \\ TS_1 \vee TS_2 &= TS^{\max}(TS_1, \dots, TS_1, TS_2). \end{aligned}$$

Důkaz. Průsek dvou transferově-stabilních průměrů je proveden po složkách, tj. pro

$$\begin{aligned} TS_1 &= \langle z_1^1, \dots, z_{k-1}^1 \mid \dots \mid z_1^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \rangle \\ TS_2 &= \langle y_1^1, \dots, y_{k-1}^1 \mid \dots \mid y_1^{n-1}, \dots, y_{k-1}^{n-1} \rangle \end{aligned}$$

je

$$TS_1 \wedge TS_2 = \langle z_1^1 \wedge y_1^1, \dots, z_{k-1}^1 \wedge y_{k-1}^1 \mid \dots \mid z_1^{n-1} \wedge y_1^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \wedge y_{k-1}^{n-1} \rangle.$$

Označme $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$, pak nejmenší transferově-stabilní průměr je

$$TS^{min}(x_1, \dots, x_k) = \langle c_1, \dots, c_1 \mid \dots \mid c_{n-1}, \dots, c_{n-1} \rangle.$$

Dosadíme-li TS_1 a TS_2 do TS^{min} , dostaneme

$$TS^{min}(TS_1, \dots, TS_1, TS_2) = TS^{min}(z_j^i, \dots, z_j^i, y_j^i)$$

pro některé $i \in \{1, \dots, n-1\}$ a $j \in \{1, \dots, k-1\}$.

Nyní mohou nastat následující 3 případy, protože prvky z_j^i a y_j^i náležejí i -té sekci obsahující pouze prvky c_i a c_{i+1} . Necht

1. $z_j^i = y_j^i$. Z idempotence transferově-stabilních průměrů a svazových operací je výsledek zřejmý.
2. $z_j^i \prec y_j^i$. Pak $z_j^i \wedge y_j^i = z_j^i$, přičemž $z_j^i = c_i$ a $y_j^i = c_{i+1}$. Navíc k -tice $(z_j^i, \dots, z_j^i, y_j^i)$ náleží do i -té sekce určené prvním hlavním blokem. Podle předpisu průměru TS^{min} se jedná o prvek c_i .
3. $y_j^i \prec z_j^i$. Pak $y_j^i \wedge z_j^i = y_j^i$, přičemž $y_j^i = c_i$ a $z_j^i = c_{i+1}$. Navíc k -tice $(z_j^i, \dots, z_j^i, y_j^i)$ náleží do i -té sekce určené $(k-1)$ -ním hlavním blokem. Podle předpisu průměru TS^{min} se jedná o prvek c_i .

Spojením všech tří kroků je dokázána první rovnost. Druhá rovnost se dokáže analogicky. □

TVRZENÍ 2.25. *Necht $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $n \geq 3$. Předpokládejme, že množina G obsahuje všechny k -ární vnitřní a vnější transferově-stabilní průměry a k -ární nejmenší a největší transferově-stabilní průměr na řetězci C_n . Pak množina G generuje všechny k -ární transferově-stabilní průměry na řetězci C_n a její mohutnost je rovna $(n-2)k - (n-5)$.*

Důkaz. Necht

$$TS = \left\langle z_1^1, \dots, z_{k-1}^1 \mid \dots \mid z_1^{n-3}, \dots, z_{k-1}^{n-3} \mid z_1^{n-2}, \dots, z_{k-1}^{n-2} \mid z_1^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \right\rangle$$

je k -ární transferově-stabilní průměr na řetězci $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$. Dále TS^{min} a TS^{max} je po řadě nejmenší a největší transferově-stabilní průměr a TS^* je prostřední transferově-stabilní průměr. Pak existují vnitřní transferově-stabilní průměry ITS_1 a ITS_2 takové, že průměr ITS_1 má stejnou poslední $(n-1)$ -ní sekci jako průměr TS , a průměr ITS_2 má stejnou $(n-2)$ -hou sekci jako průměr TS . Označme symbolem TS^I buď průsek, či spojení průměrů ITS_1 a ITS_2 , jež má poslední dvě sekce stejné jako průměr TS .

V dalším kroku se zaměříme na $(n-3)$ -tí sekci průměru TS , přičemž mohou nastat dvě možnosti.

- 1) Průměry TS a TS^* mají stejnou $(n-3)$ -tí sekci. V tomto případě nic neděláme a přesuneme se na další, $(n-4)$ -tou sekci průměru TS .
- 2) Jestliže $(n-3)$ -tí sekce průměrů TS a TS^* jsou odlišné, pak existuje právě jeden vnější generující transferově-stabilní průměr OTS , který má stejnou $(n-3)$ -tí sekci jako průměr TS . Pak označíme symbolem TS^{II} průměr, jež vznikne průsekem či spojením průměrů OTS a TS^I , který má poslední tři sekce stejné jako průměr TS .

Podobným způsobem vyšetříme všechny zbylé sekce, to jest i -té sekce pro $i \in \{1, \dots, n-4\}$, až dojdeme k první sekci, čímž získáme výslednou generující formuli. Tím jsme dokázali, že každý k -ární transferově-stabilní průměr TS je průsekem či spojením k -árních vnitřních a vnějších generujících transferově-stabilních průměrů, tj. vnitřní a vnější generující transferově-stabilní průměry generují svaz $TSM_{C_n}^{(k)}$.

Z Definice 2.20 víme, že počet všech k -árních vnitřních generujících transferově-stabilních průměrů je k . Dále jsme zjistili, že počet všech k -árních vnějších generujících transferově-stabilních průměrů pro n -prvkový řetězec je $(k-1) \cdot (n-3)$ a navíc uvažujeme ještě k -ární nejmenší a největší transferově-stabilní průměr, tj.

$$k + (k-1) \cdot (n-3) + 2 = (n-2)k - (n-5).$$

□

V právě zmíněném Tvzení 2.25 jsme neuvažovali některé případy pro k a n , na které se nyní podíváme.

- i) $k = 1$, n libovolné. V tomto případě se jedná o unitární transferově-stabilní průměr na konečném řetězci, který je ale díky idempotenci roven identitě, tzn. existuje právě jeden unitární transferově-stabilní průměr na řetězci C_n .
- ii) $n = 1$, k libovolné. Zde se jedná o jednoprvkový řetězec $C_1 = \{0\}$, a máme tedy pouze jednu hodnotu k dosažení, tj. $TS(0, \dots, 0) = 0$.
- iii) $n = 2$, k libovolné. Pro dvouprvkový řetězec $C_2 = \{0, 1\}$ existuje právě jedna sekce složená z nul a jedniček, a tedy, podle Tvzení 2.15, všechny k -ární transferově-stabilní průměry na dvouprvkovém řetězci C_2 tvoří řetězec, z čehož vyplývá, že všechny takové průměry jsou zároveň generátory svazu $TSM_{C_2}^{(k)}$.

iv) $n = 3$, k libovolné. Tento případ je ve Tvzení 2.25 zahrnut, ale s mírným upřesněním, neboť pro k -ární transferově-stabilní průměry na tříprvkovém řetězci C_3 neexistují vnější generující transferově-stabilní průměry. Ty však nejsou potřeba, neboť v tomto případě stačí na vygenerování pouze vnitřní generující transferově-stabilní průměry a nejmenší a největší transferově-stabilní průměr.

Z předchozích Příkladů 2.21 a 2.23 můžeme vidět, že počet všech generátorů svazu $\text{TSM}_{C_5}^{(4)}$ je roven $(n-2)k - (n-5) = 3 \cdot 4 - 0 = 12$, ačkoli mohutnost celé množiny $\text{TSM}_{C_5}^{(4)}$ je, podle Tvzení 2.15, rovna $k^{n-1} = 4^4 = 256$.

Myšlenku Tvzení 2.25 ukážeme krok po kroku v následujícím příkladu, načež se budeme držet konstrukce zmíněné v důkazu onoho tvrzení.

PŘÍKLAD 2.26. Zvolme aritu $k = 5$ a počet prvků řetězce $n = 6$, to jest $C_6 = \{0, a, b, c, d, 1\}$. Pak $s = \lfloor \frac{5}{2} + 1 \rfloor = 3$ a 5-ární prostřední transferově-stabilní průměr TS^* na šestiprvkovém řetězci C_6 je

$$TS^* = \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid c, c, d, d \mid d, d, 1, 1 \rangle.$$

Již víme, že pro k liché se zároveň jedná o jeden z vnitřních generujících transferově-stabilních průměrů. Aplikováním křížové inverze na poslední dvě sekce (tj. 4. a 5. sekci) dostaneme 5-ární vnitřní generující transferově-stabilní průměry na řetězci C_6 , tedy

$$\begin{aligned} ITS_1 &= \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid c, c, c, c \mid 1, 1, 1, 1 \rangle \\ ITS_2 &= \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid c, c, c, d \mid d, 1, 1, 1 \rangle \\ ITS_3 &= \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid c, c, d, d \mid d, d, 1, 1 \rangle \\ ITS_4 &= \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid c, d, d, d \mid d, d, d, 1 \rangle \\ ITS_5 &= \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid d, d, d, d \mid d, d, d, d \rangle \end{aligned}$$

a počet těchto průměrů je $k = 5$. Pro další konstrukci potřebujeme 5-ární nejmenší transferově-stabilní průměr na řetězci C_6 , tj.

$$TS^{min} = \langle 0, 0, 0, 0 \mid a, a, a, a \mid b, b, b, b \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \rangle$$

a 5-ární největší transferově-stabilní průměr na C_6 , tj.

$$TS^{max} = \langle a, a, a, a \mid b, b, b, b \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \mid 1, 1, 1, 1 \rangle.$$

Podobně jako v Příkladu 2.22 se nejdříve zaměříme na třetí sekci, poté na druhou a závěrem na první sekci. Nejdříve vypíšeme všechny možné varianty pro třetí sekci a vhodně je uspořádáme, tj.

$$\mid b, b, b, b \mid ; \mid b, b, b, c \mid ; \mid b, b, c, c \mid ; \mid b, c, c, c \mid ; \mid c, c, c, c \mid .$$

Výsledkem můžeme říci, že první dvě sekce vnějších generujících transferově-stabilních průměrů pro $l = 3$ budou stejné jako u prostředního transferově-stabilního průměru TS^* a poslední dvě sekce budou doplněny sekcemi z největšího transferově-stabilního průměru TS^{max} pro třetí sekce prvních dvou tvarů z výše vypsáných variant. Na druhou stranu, poslední dvě sekce budou doplněny sekcemi z nejmenšího transferově-stabilního průměru TS^{min} pro třetí sekce posledních dvou tvarů z výše vypsáných variant. Tedy

$l = 3$:

$$OTS_1 = \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, b, b \mid d, d, d, d \mid 1, 1, 1, 1 \rangle$$

$$OTS_2 = \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, b, c \mid d, d, d, d \mid 1, 1, 1, 1 \rangle$$

$$OTS_3 = \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, c, c, c \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \rangle$$

$$OTS_4 = \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid c, c, c, c \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \rangle .$$

Za druhé, všechny varianty pro druhou sekci po vhodném uspořádání jsou

$$| a, a, a, a | ; | a, a, a, b | ; | a, a, b, b | ; | a, b, b, b | ; | b, b, b, b | .$$

Pak první sekce vnějších generujících transferově-stabilních průměrů pro hodnotu $l = 2$ je stejná jako prostředního transferově-stabilního průměru TS^* a třetí, čtvrtá a pátá sekce odpovídá největšímu transferově-stabilnímu průměru TS^{max} pro „levou stranu“ výše vypsáných variant, anebo odpovídá nejmenšímu průměru TS^{min} pro „pravou stranu“ výše vypsáných variant, tj. $l = 2$:

$$OTS_5 = \langle 0, 0, a, a | a, a, a, a | c, c, c, c | d, d, d, d | 1, 1, 1, 1 \rangle$$

$$OTS_6 = \langle 0, 0, a, a | a, a, a, b | c, c, c, c | d, d, d, d | 1, 1, 1, 1 \rangle$$

$$OTS_7 = \langle 0, 0, a, a | a, b, b, b | b, b, b, b | c, c, c, c | d, d, d, d \rangle$$

$$OTS_8 = \langle 0, 0, a, a | b, b, b, b | b, b, b, b | c, c, c, c | d, d, d, d \rangle$$

Na závěr se zaměříme na první sekci, přičemž všechny varianty po uspořádání jsou

$$| 0, 0, 0, 0 | ; | 0, 0, 0, a | ; | 0, 0, a, a | ; | 0, a, a, a | ; | a, a, a, a | .$$

Podobně jako výše, první dvě varianty jsou doplněny největším transferově-stabilním průměrem TS^{max} a poslední dvě varianty jsou doplněny nejmenším transferově-stabilním průměrem TS^{min} . Odtud 5-ární vnější generující transferově-stabilní průměry na řetězci C_6 pro $l = 1$ jsou ve tvaru

$l = 1$:

$$OTS_9 = \langle 0, 0, 0, 0 | b, b, b, b | c, c, c, c | d, d, d, d | 1, 1, 1, 1 \rangle$$

$$OTS_{10} = \langle 0, 0, 0, a | b, b, b, b | c, c, c, c | d, d, d, d | 1, 1, 1, 1 \rangle$$

$$OTS_{11} = \langle 0, a, a, a | a, a, a, a | b, b, b, b | c, c, c, c | d, d, d, d \rangle$$

$$OTS_{12} = \langle a, a, a, a | a, a, a, a | b, b, b, b | c, c, c, c | d, d, d, d \rangle .$$

Snadno vidíme, že počet vnějších generujících transferově-stabilních průměrů je $(k - 1)(n - 3) = 4 \cdot 3 = 12$. Tedy počet všech 5-árních generujících transferově-stabilních průměrů na řetězci C_6 je roven $5 + 12 = 17$ a s nejmenším a největším transferově-stabilním průměrem dostaneme mohutnost generující množiny G (z Tvrzení 2.25) rovnu $(n - 2)k - (n - 5) = 4 \cdot 5 - 1 = 19$. Navíc, počet všech 5-árních transferově-stabilních průměrů na řetězci C_6 je $k^{n-1} = 5^5 = 3125$.

Právě zmíněnou konstrukci, počínaje prostředním transferově-stabilním průměrem a konče vnějšími generujícími transferově-stabilními průměry, lze jednodušeji získat, využijeme-li k tomu diagram znázorňující všechny možné varianty každého bloku, tj.

$0, 0, 0, 0$	a, a, a, a	b, b, b, b	c, c, c, c	d, d, d, d
$0, 0, 0, a$	a, a, a, b	b, b, b, c	c, c, c, d	$d, d, d, 1$
$0, 0, a, a$	a, a, b, b	b, b, c, c	c, c, d, d	$d, d, 1, 1$
$0, a, a, a$	a, b, b, b	b, c, c, c	c, d, d, d	$d, 1, 1, 1$
a, a, a, a	b, b, b, b	c, c, c, c	d, d, d, d	$1, 1, 1, 1$

Pak nejmenší (první řádek), průměrný (prostřední řádek) a největší (poslední řádek) transferově-stabilní průměr je

$0, 0, 0, 0$	a, a, a, a	b, b, b, b	c, c, c, c	d, d, d, d
$0, 0, 0, a$	a, a, a, b	b, b, b, c	c, c, c, d	$d, d, d, 1$
$0, 0, a, a$	a, a, b, b	b, b, c, c	c, c, d, d	$d, d, 1, 1$
$0, a, a, a$	a, b, b, b	b, c, c, c	c, d, d, d	$d, 1, 1, 1$
a, a, a, a	b, b, b, b	c, c, c, c	d, d, d, d	$1, 1, 1, 1$

a dále vnitřní generující transferově-stabilní průměry můžeme z diagramu vyčíst následovně

$0, 0, 0, 0$	a, a, a, a	b, b, b, b	c, c, c, c	d, d, d, d
$0, 0, 0, a$	a, a, a, b	b, b, b, c	c, c, c, d	$d, d, d, 1$
$0, 0, a, a$	a, a, b, b	b, b, c, c	c, c, d, d	$d, d, 1, 1$
$0, a, a, a$	a, b, b, b	b, c, c, c	c, d, d, d	$d, 1, 1, 1$
a, a, a, a	b, b, b, b	c, c, c, c	d, d, d, d	$1, 1, 1, 1$

V posledním kroku znázorníme všechny tři diagramy vnějších generujících transferově-stabilních průměrů, tj. po řadě pro $l = 3, 2, 1$.

$0, 0, 0, 0$	a, a, a, a	b, b, b, b	c, c, c, c	d, d, d, d
$0, 0, 0, a$	a, a, a, b	b, b, b, c	c, c, c, d	$d, d, d, 1$
<u>$l = 3$</u> : $0, 0, a, a$	a, a, b, b	b, b, c, c	c, c, d, d	$d, d, 1, 1$
$0, a, a, a$	a, b, b, b	b, c, c, c	c, d, d, d	$d, 1, 1, 1$
a, a, a, a	b, b, b, b	c, c, c, c	d, d, d, d	$1, 1, 1, 1$

$0, 0, 0, 0$	a, a, a, a	b, b, b, b	c, c, c, c	d, d, d, d
$0, 0, 0, a$	a, a, a, b	b, b, b, c	c, c, c, d	$d, d, d, 1$
<u>$l = 2$</u> : $0, 0, a, a$	a, a, b, b	b, b, c, c	c, c, d, d	$d, d, 1, 1$
$0, a, a, a$	a, b, b, b	b, c, c, c	c, d, d, d	$d, 1, 1, 1$
a, a, a, a	b, b, b, b	c, c, c, c	d, d, d, d	$1, 1, 1, 1$

$0, 0, 0, 0$	a, a, a, a	b, b, b, b	c, c, c, c	d, d, d, d
$0, 0, 0, a$	a, a, a, b	b, b, b, c	c, c, c, d	$d, d, d, 1$
<u>$l = 1$</u> : $0, 0, a, a$	a, a, b, b	b, b, c, c	c, c, d, d	$d, d, 1, 1$
$0, a, a, a$	a, b, b, b	b, c, c, c	c, d, d, d	$d, 1, 1, 1$
a, a, a, a	b, b, b, b	c, c, c, c	d, d, d, d	$1, 1, 1, 1$

Ve druhé polovině příkladu se podíváme na samotné generování, tj. konstrukci z důkazu Tvrzení 2.25. Uvažujme 5-ární transferově-stabilní průměr na řetězci C_6 zadaný

$$TS = \langle 0, a, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, b, c \mid c, d, d, d \mid d, 1, 1, 1 \rangle.$$

Nyní použijeme onen důkaz k nalezení vnitřních a vnějších transferově-stabilních průměrů, které generují transferově-stabilní průměr TS . Podle první části důkazu existují vnitřní generující transferově-stabilní průměry, jež mají stejnou poslední a předposlední sekci jako zadaný průměr TS , tj.

$$\begin{aligned} ITS_2 &= \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid c, c, c, d \mid \underline{d, 1, 1, 1} \rangle \\ ITS_4 &= \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid \underline{c, d, d, d} \mid d, d, d, 1 \rangle. \end{aligned}$$

a platí pro ně, že

$$TS^I = ITS_2 \vee ITS_4 = \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid \underline{c, d, d, d} \mid d, 1, 1, 1 \rangle.$$

Následuje třetí sekce průměru TS . Najdeme vztah mezi třetí sekci průměru TS a prostředního transferově-stabilního průměru TS^* . Snadno zjistíme, že sekce jsou různé, a tedy existuje právě jeden vnější generující transferově-stabilní průměr

$$OTS_2 = \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid \underline{b, b, b, c} \mid d, d, d, d \mid 1, 1, 1, 1 \rangle$$

takový, že

$$\begin{aligned} TS^{II} &= OTS_2 \wedge (ITS_2 \vee ITS_4) \\ &= \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid \underline{b, b, b, c} \mid c, d, d, d \mid \underline{d, 1, 1, 1} \rangle. \end{aligned}$$

Dále určíme vztah mezi druhou sekci průměru TS a prostředního transferově-stabilního průměru TS^* . Tentokrát dospějeme k rovnosti sekcí (vnitřní generující transferově-stabilní průměr neexistuje) odkud plyne, že

$$TS^{III} = TS^{II} = \langle 0, 0, a, a \mid \underline{a, a, b, b} \mid b, b, b, c \mid c, d, d, d \mid \underline{d, 1, 1, 1} \rangle.$$

V posledním kroku opět zkontrolujeme vztah mezi sekcemi, tentokrát mezi první sekcí průměru TS a prostředního transferově-stabilního průměru TS^* . Dostaneme rozdílnost sekcí, což má za následek existenci právě jednoho vnějšího generujícího transferově-stabilního průměru

$$OTS_{11} = \langle \underline{0, a, a, a} \mid a, a, a, a \mid b, b, b, b \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \rangle$$

splňujícího

$$\begin{aligned} TS^{IV} &= OTS_{11} \vee (OTS_2 \wedge (ITS_2 \vee ITS_4)) \\ &= \langle \underline{0, a, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, b, c \mid c, d, d, d \mid d, 1, 1, 1} \rangle. \end{aligned}$$

Závěrem příkladu tedy existují 5-ární vnitřní generující transferově-stabilní průměry ITS_2 a ITS_4 a 5-ární vnější generující transferově-stabilní průměry OTS_2 a OTS_{11} na řetězci C_6 , které generují zadaný 5-ární transferově-stabilní průměr TS na šestiprvkovém řetězci C_6 .

2.6 Speciální generování

Zkoumání transferově-stabilních průměrů na konečných řetězcích zakončíme pohledem na to, jak vygenerovat transferově-stabilní průměry vyšší arity pomocí průměrů menších arit, přesněji pomocí binárních transferově-stabilních průměrů. Zde už se nebude jednat o klasické skládání funkcí, neboť jsme ukázali, že klasické skládání (viz Definice 1.7) na takovýto způsob generování nestačí a musíme zavést něco nového. Z tohoto důvodu vytvoříme nové skládání funkcí speciálně zkonstruované pro transferově-stabilní průměry. V tomto typu skládání půjde o to uspořádat všechny prvky z jedné sekce všech operujících transferově-stabilních průměrů a vytvořit z nich novou sekci. Nicméně pro uspořádání takového formátu potřebujeme zavést novou funkci, jež je definována na reálném intervalu například v knize [4]. My ji definujeme na konečném řetězci.

DEFINICE 2.27. Na konečném řetězci C_n nazveme funkci $\text{OS}_p : C_n^k \rightarrow C_n$ řádově statistická (order statistic) pro $p \in \mathbb{N}$, $p \leq k$, jež je pro každé $x_1, \dots, x_k \in C_n$ definována

$$\text{OS}_p(x_1, \dots, x_k) = x_{(p)},$$

kde $x_{(p)}$ je p -tá nejmenší hodnota z hodnot x_1, \dots, x_k , tj.

$$x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(p)} \leq \dots \leq x_{(k)}.$$

Speciálně,

$$\text{OS}_1(x_1, \dots, x_k) = \bigwedge_{i=1}^k x_i$$

a

$$\text{OS}_k(x_1, \dots, x_k) = \bigvee_{i=1}^k x_i.$$

Například na desetiprvkovém řetězci $C_{10} = \{0, a, b, c, d, e, f, g, h, 1\}$ funguje 5-ární řádově statistická funkce následovně:

$$\text{OS}_2(f, h, 1, c, a) = c,$$

protože $a \leq c \leq f \leq h \leq 1$,

$$\text{OS}_3(f, b, d, a, h) = d,$$

protože $a \leq b \leq d \leq f \leq h$,

$$\text{OS}_4(g, h, a, b, e) = g,$$

protože $a \leq b \leq e \leq g \leq h$.

DEFINICE 2.28. Necht

$$TS_A = \langle z_1^1, \dots, z_{k-1}^1 \mid \dots \mid z_1^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \rangle$$

a

$$TS_B = \langle y_1^1, \dots, y_{l-1}^1 \mid \dots \mid y_1^{n-1}, \dots, y_{l-1}^{n-1} \rangle$$

jsou po řadě k -ární a l -ární transferově-stabilní průměr na n -prvkovém řetězci C_n . Označme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 &= (z_1^1, \dots, z_{k-1}^1, y_1^1, \dots, y_{l-1}^1) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{n-1} &= (z_1^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1}, y_1^{n-1}, \dots, y_{l-1}^{n-1}). \end{aligned}$$

Pak zobrazení $\odot : \text{TSM}_{C_n}^{(k)} \times \text{TSM}_{C_n}^{(l)} \rightarrow \text{TSM}_{C_n}^{(k+l-1)}$ definované následovně

$$\begin{aligned} &TS_A \odot TS_B := \\ &\langle \text{OS}_1(\mathbf{x}^1), \dots, \text{OS}_{k-l-2}(\mathbf{x}^1) \mid \dots \mid \text{OS}_1(\mathbf{x}^{n-1}), \dots, \text{OS}_{k-l-2}(\mathbf{x}^{n-1}) \rangle \end{aligned}$$

se nazývá *transferové spojení* transferově-stabilních průměrů na řetězci C_n . Speciálně, pro binární transferově-stabilní průměry takové, že $\alpha_i \leq \beta_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n-1\}$ platí

$$\langle \alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_{n-1} \rangle \odot \langle \beta_1 \mid \dots \mid \beta_{n-1} \rangle = \langle \alpha_1, \beta_1 \mid \dots \mid \alpha_{n-1}, \beta_{n-1} \rangle.$$

PŘÍKLAD 2.29. Nalezneme spojení dle Definice 2.28 ternárního transferově-stabilního průměru

$$TS_A = \langle 0, a \mid a, a \mid b, 1 \rangle$$

a kvaternárního transferově-stabilního průměru

$$TS_B = \langle 0, a, a \mid a, b, b \mid b, b, 1 \rangle$$

na čtyřprvkovém řetězci $C_4 = \{0, a, b, 1\}$.

Nejdříve sestrojíme vektory $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2$ a \mathbf{x}^3 , tj.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^1 &= (0, a, 0, a, a) \\ \mathbf{x}^2 &= (a, a, a, b, b) \\ \mathbf{x}^3 &= (b, 1, b, b, 1).\end{aligned}$$

Aplikace řádově statistických funkcí OS_p pro $p \in \{1, \dots, k - l - 2 = 5\}$ k vytvoření jedné sekce znamená uspořádat vektor \mathbf{x}^i pro $i \in \{1, 2, 3\}$ od nejmenší hodnoty po největší. Například

$$\begin{aligned}OS_1(\mathbf{x}^1) &= 0 \\ OS_2(\mathbf{x}^1) &= 0 \\ OS_3(\mathbf{x}^1) &= a \\ OS_4(\mathbf{x}^1) &= a \\ OS_5(\mathbf{x}^1) &= a,\end{aligned}$$

což znamená, že první sekce nového 6-árního transferově-stabilního průměru je ve tvaru

$$| 0, 0, a, a, a |.$$

Podobně uspořádáme vektory \mathbf{x}^2 a \mathbf{x}^3 , čímž dostaneme

$$TS_A \odot TS_B = \langle 0, 0, a, a, a | a, a, a, b, b | b, b, b, 1, 1 \rangle.$$

Již víme, že unární transferově-stabilní průměr na libovolném řetězci je pouze identita, čili se jedná o „nezajímavý“ transferově-stabilní průměr. Mnohem zajímavější jsou binární transferově-stabilní průměry, kterými jsme se zabývali první polovinu této kapitoly. Taktéž jsme zmínili v Důsledku 2.13, že existují binární transferově-stabilní průměry, jež vygenerují všechny ostatní binární transferově-stabilní průměry, a těmito binárními transferově-stabilními průměry jsou přesně atomy svazu $TSM_{C_n}^{(2)}$ všech binárních transferově-stabilních průměrů na n -prvkovém řetězci. Nazveme je *atomární binární*

transferově-stabilními průměry. Ve finálním tvrzení této kapitoly ukážeme, že atomární binární transferově-stabilními průměry (atomy svazu $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$) jsou mnohem důležitější, než se původně zdálo.

Podle Definice 2.10 je následující rovnost platná pro libovolný k -ární transferově-stabilní průměr na řetězci C_n , tj.

$$\begin{aligned} & \left\langle z_1^1, z_2^1, \dots, z_{k-1}^1 \mid z_1^2, z_2^2, \dots, z_{k-1}^2 \mid \dots \mid z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \right\rangle = \\ & \left\langle z_1^1 \mid z_1^2 \mid \dots \mid z_1^{n-1} \right\rangle \odot \left\langle z_2^1 \mid z_2^2 \mid \dots \mid z_2^{n-1} \right\rangle \odot \dots \odot \left\langle z_{k-1}^1 \mid z_{k-1}^2 \mid \dots \mid z_{k-1}^{n-1} \right\rangle, \end{aligned}$$

kde na pravé straně rovnosti jsou pouze binární transferově-stabilní průměry na C_n . Jinými slovy, každý k -ární transferově-stabilní průměr lze transferově spojit pomocí $(k - 1)$ binárních transferově-stabilních průměrů.

TVRZENÍ 2.30. *Nechť C_n je n -prvkový řetězec. Pak množina všech transferově-stabilních průměrů TSM_{C_n} je generována atomárními binárními transferově-stabilními průměry na C_n , svazovými operacemi \vee, \wedge a transferovým spojením \odot .*

Důkaz. Podle Důsledku 2.13 lze každý binární transferově-stabilní průměr vygenerovat svazovými operacemi pomocí atomárních binárních transferově-stabilních průměrů na řetězci C_n . Dále, podle výše napsané rovnosti pro libovolný k -ární transferově-stabilní průměr a Definice 2.28, lze každý transferově-stabilní průměr na C_n vygenerovat transferovým spojením pomocí binárních transferově-stabilních průměrů. \square

PŘÍKLAD 2.31. Vygenerujme 5-ární transferově-stabilní průměr TS na šestiprvkovém řetězci C_6 z Příkladu 2.26 pomocí Tvrzení 2.30.

Nalezení odpovídajících binárních transferově-stabilních průměrů je velmi snadné, neboť i -tý binární transferově-stabilní průměr je složen z i -tých hlavních bloků průměru TS z každé sekce, tj. odpovídající binární transferově-stabilní průměry jsou

$$\begin{aligned} TS_A &= \langle 0 \mid a \mid b \mid c \mid d \rangle \\ TS_B &= \langle a \mid a \mid b \mid d \mid 1 \rangle \\ TS_C &= \langle a \mid b \mid b \mid d \mid 1 \rangle \\ TS_D &= \langle a \mid b \mid c \mid d \mid 1 \rangle. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} TS_A \odot TS_B \odot TS_C \odot TS_D = \\ \langle 0, a, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, b, c \mid c, d, d, d \mid d, 1, 1, 1 \rangle, \end{aligned}$$

kde transferové spojení bylo velmi jednoduché, jelikož se jednalo o speciální případ z Definice 2.28.

Nyní musíme ještě nalézt atomární binární transferově-stabilní průměry na šestiprvkovém řetězci pro vygenerování průměrů TS_A, TS_B, TS_C a TS_D . Snadno se přesvědčíme o tom, že TS_A je nejmenší transferově-stabilní průměr, čili k jeho vygenerování stačí vzít dva libovolné atomární průměry, například

$$TS_A = \langle a \mid a \mid b \mid c \mid d \rangle \wedge \langle 0 \mid b \mid b \mid c \mid d \rangle.$$

Další tři binární transferově-stabilní průměry se od nejmenšího značně odlišují a naším cílem je nalézt sekce, ve kterých se liší a tím najít odpovídající atomární binární transferově-stabilní průměry. To znamená, že například TS_B

se od nejmenšího průměru liší v první, čtvrté a páté sekci, čili k vygenerování potřebujeme atomární binární transferově-stabilní průměry, jež se od nejmenšího průměru liší právě v těchto sekcích. Tudíž

$$TS_B = \langle a | a | b | c | d \rangle \vee \langle 0 | a | b | d | d \rangle \vee \langle 0 | a | b | c | 1 \rangle.$$

Zcela podobně, TS_C se liší od nejmenšího průměru ve všech sekcích až na třetí sekci, tedy průměr TS_C dostaneme z atomárních binárních průměrů následovně

$$TS_C = \langle a | a | b | c | d \rangle \vee \langle 0 | b | b | c | d \rangle \vee \langle 0 | a | b | d | d \rangle \vee \langle 0 | a | b | c | 1 \rangle.$$

Poslední binární průměr se liší ve všech sekcích, což má za následek, že se jedná o největší transferově-stabilní průměr na šestiprvkovém řetězci, jenž je spojením všech atomárních binárních transferově-stabilních průměrů na řetězci C_6 , tj.

$$TS_D = \langle a | a | b | c | d \rangle \vee \langle 0 | b | b | c | d \rangle \vee \langle 0 | a | c | c | d \rangle \\ \vee \langle 0 | a | b | d | d \rangle \vee \langle 0 | a | b | c | 1 \rangle.$$

Závěrem, zadaný 5-ární transferově-stabilní průměr na šestiprvkovém řetězci lze vygenerovat pomocí všech atomárních binárních transferově-stabilních průměrů na řetězci C_6 , svazových operací a transferového spojení.

Posledním příkladem se vrátíme k χ_* a med_* funkcím a pokusíme se pomocí nich vygenerovat transferově-stabilní průměr.

PŘÍKLAD 2.32. Vygenerujme binární transferově-stabilní průměr na čtyřprvkovém řetězci $C_4 = \{0, a, b, 1\}$ zadaný předpisem $TS(x, y) = \langle 0 | a | 1 \rangle$ pomocí binárních funkcí χ_* a med_* z minulé kapitoly.

S využitím Tvzení 1.29 můžeme transferově-stabilní průměr TS zapsat

$$TS(x, y) = \bigvee_{\mathbf{a} \in C_4^2} (\mu_{\mathbf{a}}(x, y) \wedge \mathbf{med}_{TS(\mathbf{a})}(x, y)),$$

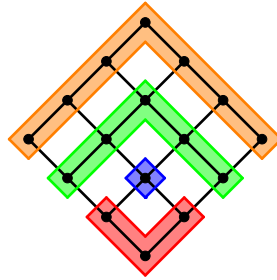
načež aplikováním distributivity můžeme rovnost přepsat do tvaru

$$TS = \left((\mu_{(0,b)} \vee \mu_{(b,0)} \vee \mu_{(0,1)} \vee \mu_{(1,0)} \vee \mu_{(a,b)} \vee \mu_{(b,a)} \vee \mu_{(a,a)}) \wedge \mathbf{med}_a \right) \\ \vee \left((\mu_{(a,1)} \vee \mu_{(1,a)} \vee \mu_{(b,b)}) \wedge \mathbf{med}_b \right) \vee (\mu_{(b,1)} \vee \mu_{(1,b)}).$$

Užitím vlastností pro funkce μ_* a χ_* z Důsledku 1.27, Lemmatu 1.24 a Věty 1.22, a taktéž distributivity, můžeme výše napsanou rovnost upravit do následující formy

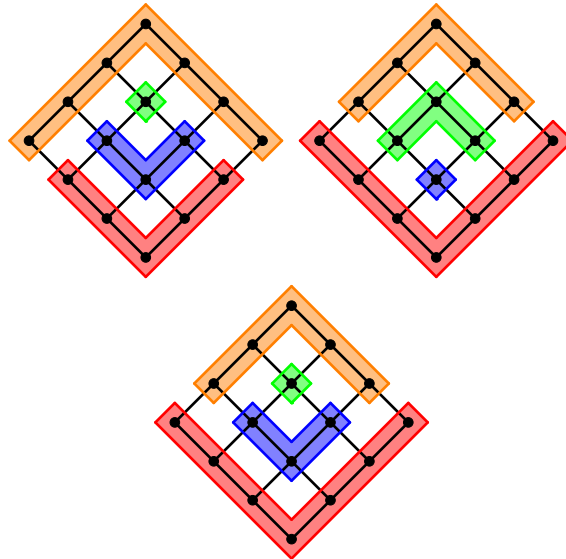
$$TS(x, y) = \left((\chi_b(x, y) \vee \chi_b(y, x) \vee (\chi_a(x, y) \wedge \chi_a(y, x))) \wedge \mathbf{med}_a \right) \\ \vee \left(\left((\chi_a(x, y) \wedge \chi_a(y, x) \wedge (\chi_1(x, y) \vee \chi_1(y, x))) \vee \chi_b(x, y) \wedge \chi_b(y, x) \right) \wedge \mathbf{med}_b \right) \\ \vee \left(\chi_b(x, y) \wedge \chi_b(y, x) \wedge (\chi_1(x, y) \vee \chi_1(y, x)) \right).$$

Vidíme, že tato rovnost je poměrně komplikovaná a je otázkou, zda ji nelze zjednodušit. Vzhledem k tomu, že se jedná o poměrně jednoduchý transferově-stabilní průměr, můžeme využít Obrázky 2 a 3, abychom pomocí průseku a spojení zkonstruovali transferově-stabilní průměr TS , jenž je zobrazen na Obrázku 14 (nahore, druhý zleva). Naším cílem je pouze zjednodušit kombinaci χ_* funkcí ve výše napsané rovnosti, neboť \mathbf{med}_* už více zjednodušit nelze. Podíváme-li se více na složení funkcí χ_* u \mathbf{med}_a , je zde cílem, aby se dvojice $(0, a)$ a $(a, 0)$ zobrazily na 0, čehož jednoduše dosáhneme spojením $\chi_b(x, y)$ a $\chi_b(y, x)$ a tuto funkci označíme symbolem χ_B^\vee (viz Obrázek 18), tj. $\chi_B^\vee := \chi_b(x, y) \vee \chi_b(y, x)$.



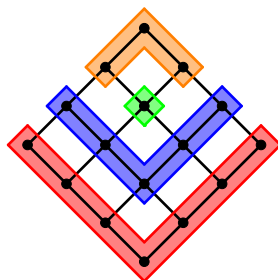
Obrázek 18: χ_B^\vee .

V případě funkcí χ_* u med_b jsou nutné dva kroky. Prvním je, aby se dvojice (a, b) a (b, a) zobrazily na a , čehož dosáhneme spojením funkcí $\chi_1(x, y)$ a $\chi_1(y, x)$, označíme symbolem χ_1^\vee (viz Obrázek 19, nahoře vlevo), to jest $\chi_1^\vee := \chi_1(x, y) \vee \chi_1(y, x)$, a za druhé, dvojice $(1, 0)$ a $(0, 1)$ se musí zobrazit na 0 , což nám zaručí průsek funkcí $\chi_a(x, y)$ a $\chi_a(y, x)$, označíme symbolem χ_A^\wedge (viz Obrázek 19, nahoře vpravo), tj. $\chi_A^\wedge := \chi_a(x, y) \wedge \chi_a(y, x)$. Průsekem obou případů dosáhneme požadované funkce pro med_b (viz Obrázek 19, dole).



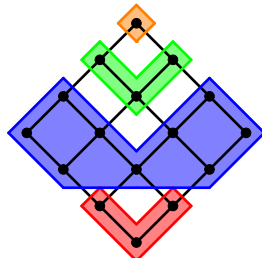
Obrázek 19: Nahoře: χ_1^\vee a χ_A^\wedge . Dole: $\chi_1^\vee \wedge \chi_A^\wedge$.

Na posledním řádku výše napsané rovnosti jsou pouze samotné funkce χ_* , jejichž cílem je zobrazit dvojice $(b, 1)$ a $(1, b)$ na 1, čehož dosáhneme průsekem funkcí $\chi_b(x, y)$ a $\chi_b(y, x)$, označíme symbolem χ_B^\wedge (viz Obrázek 20).



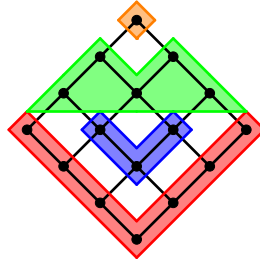
Obrázek 20: χ_B^\wedge .

Nyní vytvoříme průsek funkce χ_B^\vee z Obrázku 18 a med_a , čímž obdržíme následující funkci (viz Obrázek 21).



Obrázek 21: $\chi_B^\vee \wedge \text{med}_a$.

Podobně, funkci $\chi_1^\vee \wedge \chi_A^\wedge$ z Obrázku 19 prosekneme s funkcí med_b , jejímž výsledkem je funkce zobrazena na Obrázku 22.



Obrázek 22: $(\chi_1^\vee \wedge \chi_A^\wedge) \wedge \mathbf{med}_b$.

Spojením funkcí z Obrázků 20, 21 a 22 obdržíme zadaný transferově-stabilní průměr TS , čili následující „jednodušší“ rovnost je taktéž pravdivá.

$$\begin{aligned}
 TS(x, y) &= \left((\chi_b(x, y) \vee \chi_b(y, x)) \wedge \mathbf{med}_a(x, y) \right) \\
 &\quad \vee \left((\chi_1(x, y) \vee \chi_1(y, x)) \wedge \chi_a(x, y) \wedge \chi_a(y, x) \right) \wedge \mathbf{med}_b(x, y) \\
 &\quad \vee (\chi_b(x, y) \wedge \chi_b(y, x)) .
 \end{aligned}$$

III.

K A P I T O L A

TRANSFEROVĚ-STABILNÍ AGREGAČNÍ
FUNKCE NA KONEČNÝCH SVAZECH

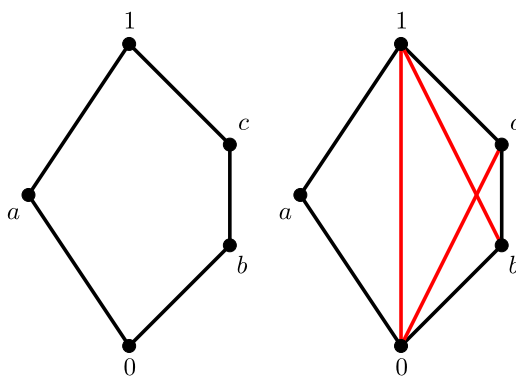
V minulé kapitole jsme studovali tzv. transferově-stabilní průměry, jež kvůli idempotenci mohly být definované pouze na řetězcích. Nicméně v této kapitole idempotenci odstraníme a budeme se zabývat pouze transferově-stabilními agregačními funkcemi, čímž definiční obor těchto funkcí vzroste z řetězců na celou třídu (konečných) svazů. Ukazuje se však, že chování transferově-stabilních agregačních funkcí závisí na volbě svazu. Přesněji řečeno, existují dvě podtřídy svazů, ve kterých se transferově-stabilní agregační funkce značně liší. První třídou jsou tzv. distančně-stabilní svazy zachovávající všechny vzdálenosti mezi prvky. V této třídě můžeme transferově-stabilní agregační funkce jednoduše popsat a díky tomu, že mají vztah k distributivním a modulárním svazům, se tato třída ukazuje jako ta „zajímavější“. Druhou třídou jsou tzv. transferově-stabilní svazy, jež zachovávají lineární uspořádání bloků. Nutno podotknout, že tyto dvě třídy nejsou disjunktní, neboť každý distančně-stabilní svaz je zároveň transferově-stabilním svazem. Nicméně je nezbytné rozlišit dva případy: distančně-stabilní svazy a transferově-stabilní distančně-nestabilní svazy, protože právě v těchto svazech se popis i chování transferově-stabilních agregačních funkcí vzájemně odlišuje. Ostatní svazy, mimo zmíněné podtřídy, uvažovat nebudeme, protože popis transferově-stabilních funkcí na těchto svazech je velmi komplikovaný. Můžeme tedy jednoduše definovat transferově-stabilní agregační funkce na zmíněných dvou podtřídách a zaměříme se na strukturu všech k -árních transferově-stabilních agregačních funkcí.

3.1 Distančně-stabilní svazy

Při studiu transferově-stabilních průměrů byla důležitá relace pokrytí ve svazech, která samozřejmě bude důležitá i nadále u transferově-stabilních agregačních funkcí. Obecně v teorii transferově-stabilních funkcí je klíčová ještě

jedna vlastnost, která využívá relaci pokrytí, jakožto svůj definiční základ. Touto vlastností je vzdálenost mezi prvky v konečném svazu.

Pro korektnost následující definice je potřeba zmínit tzv. *Hasseův diagram*, přesněji jeho správné grafické vykreslení v rovině. Na následujícím Obrázku 23 můžeme vidět jasný rozdíl mezi diagramem, jenž je správně nakreslený do roviny, oproti diagramu nesplňující jednu z podmínek Hasseova diagramu, konkrétně pokrytí prvků, protože například prvek 1 nepokrývá prvek b , ačkoli jsou spojeny úsečkou.



Obrázek 23: Příklad Hasseova diagramu a diagramu, který není Hasseův.

DEFINICE 3.1. *Vzdáleností* mezi prvky $a, b \in L$, $a \leq b$ v konečném svazu L rozumíme počet hran (úseček) v Hasseově diagramu mezi prvky a a b ve svazu L .

Symbol \mathcal{D}_{ab} značí množinu všech vzdáleností mezi prvky a a b , ve které existuje nejmenší a největší vzdálenost mezi prvky a a b označená po řadě $d_L(a, b) := \min \mathcal{D}_{ab}$ a $D_L(a, b) := \max \mathcal{D}_{ab}$.

Speciálně, pokud $a = b$, pak se jedná o nulovou vzdálenost, to znamená $d_L(a, a) = D_L(a, a) = 0$.

POZNÁMKA 3.2. Bude-li zřejmé, kterým svazem se zabýváme, můžeme dolní index L v $d_L(a, b)$ a $D_L(a, b)$ vynechat.

V každé konečné uspořádané množině existuje, pro každé dva různé srovnatelné prvky a, b , posloupnost prvků, začínající prvkem a a končící prvkem b , v níž se sousední dvojice pokrývají (následující pokrývá předchozí). Z tohoto faktu ihned plyne následující definice.

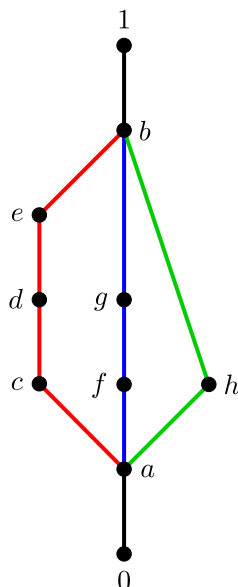
DEFINICE 3.3. *Cestou* z prvku a do prvku b , $a < b$, v konečném svazu L nazveme posloupnost prvků $x_1, \dots, x_p \in L$ takovou, že

$$a = x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_{n-1} \prec x_p = b$$

a označujeme ji $P = \{a = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_p = b\}$. Symbol $|P|$ značí počet prvků v cestě P , tzn. $|P| = p$. Na druhou stranu, symbol $\|P\|$ značí délku cesty (počet hran v cestě P) z prvku a do prvku b ve svazu L , to znamená $\|P\| = |P| - 1$.

Speciální význam mají cesty z 0 do 1 ve svazu L a množinu všech těchto cest značíme symbolem $\text{Path}L$.

PŘÍKLAD 3.4. Uvažujme svaz L_1 zobrazený na Obrázku 24.



Obrázek 24: Svaz L_1 .

Pak vzdálenost mezi prvky a a b je rovna 2, 3 a 4, tj. $\mathcal{D}_{ab} = \{2, 3, 4\}$, čili nejmenší vzdálenost mezi a a b je $d(a, b) = 2$ a největší je $D(a, b) = 4$. Odtud tedy existují 3 cesty mezi prvky a a b , tj. $P_1 = \{a, c, d, e, b\}$, $P_2 = \{a, f, g, b\}$ a $P_3 = \{a, h, b\}$ jsou všechny cesty z prvku a do prvku b ve svazu L_1 . Navíc $|P_1| = 5$, $\|P_1\| = 4$, $|P_2| = 4$, $\|P_2\| = 3$, $|P_3| = 3$, $\|P_3\| = 2$.

Závěrem, všechny cesty v $\text{Path}L$ jsou $Q_i = P_i \cup \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, což znamená, že $\text{Path}L = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$.

Podle Definice 3.1, přesněji podle vzdálenosti mezi prvky 0 a 1, můžeme třídu všech svazů rozdělit na dvě disjunktní podtřídy. První podtřída obsahuje všechny svazy mající jednotnou vzdálenost mezi prvky 0 a 1, jinými slovy, všechny cesty z množiny $\text{Path}L$ mají stejnou délku. Druhá podtřída je komplementem k první podtřídě, to znamená, že existují prvky $a, b \in L$ takové, že $|\mathcal{D}_{ab}| \geq 2$. Následující definice popisuje první zmíněnou podtřídu.

DEFINICE 3.5. Konečný svaz L se nazývá *distančně-stabilní*, jestliže vzdálenost mezi každými dvěma prvky je jednoznačně určena, tj. $d(a, b) = D(a, b)$ pro každé $a, b \in L$, $a \leq b$.

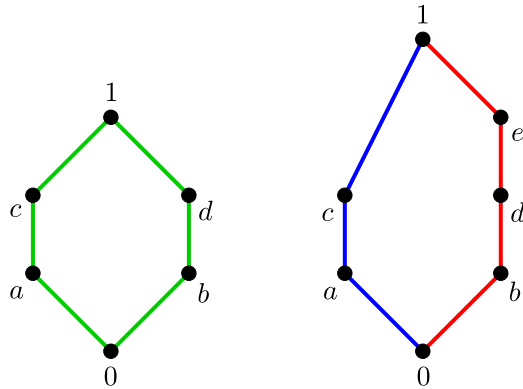
POZNÁMKA 3.6. V teorii svazů je běžnější název *semimodulární svaz*, což je svaz L splňující podmínku $a \vee c \preceq b \vee c$ pro všechny prvky $a, b, c \in L$ za předpokladu $a \prec b$. Lze dokázat, že v konečných semimodulárních svazech mají všechny maximální řetězce stejnou délku, což přesně odpovídá definici distančně-stabilního svazu. Nicméně pro dané téma není název semimodulárního svazu úplně výstižný, proto preferujeme označení distančně-stabilního svazu.

Ihned z Definice 3.5 plyne, že pokud existují dva prvky ve svazu s rozdílnou vzdáleností, pak se nemůže jednat o distančně-stabilní svaz. Jinak řečeno, podsvaz distančně-stabilního svazu je opět distančně-stabilní. Na základě tohoto faktu můžeme vyslovit následující charakteristiku distančně-stabilních svazů.

VĚTA 3.7. *Konečný svaz je distančně-stabilní právě tehdy, když nejmenší a největší vzdálenost mezi prvky 0 a 1 je shodná, tj. $d(0, 1) = D(0, 1)$.*

Vzdálenost mezi prvky 0 a 1 z právě zmíněné Věty 3.7 budeme nazývat *délkou* distančně-stabilního svazu.

Podle Věty 3.7 lze velmi snadno rozhodnout o distanční-stabilitě svazu. Například na Obrázku 25 můžeme vidět rozdíl mezi distančně-stabilním a svazem, jenž není distančně-stabilním (nazývaným taktéž distančně-nestabilním svazem).



Obrázek 25: Distančně-stabilní a distančně-nestabilní svaz.

Nyní se podíváme na některé přirozené vlastnosti, jež mají distančně-stabilní svazy. Jedna z těchto vlastností ukazuje spojitost mezi nově definovanými distančně-stabilními svazy a dvěma „nejdůležitějšími“ třídami svazů.

Pro připomenutí, svaz L se nazývá *modulární*, jestliže pro každé prvky $a, b, c \in L$ platí jedna z tzv. modulárních rovností: $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ pro $a \geq c$, anebo $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$ pro $a \leq c$.

VĚTA 3.8. *Každý konečný distributivní nebo modulární svaz je distančně-stabilní.*

Důkaz. Předpokládejme, že svaz L je distributivní nebo modulární, tj. neobsahuje pentagon (viz Obrázek 23) jakožto podsvaz, a není distančně-stabilním. Pak existují dva prvky $a, b \in L$ takové, že jejich vzdálenost není stejná, to znamená, že existují dvě rozdílné cesty $P = \{a_1, \dots, a_p\}$ and $Q = \{b_1, \dots, b_q\}$ z prvku a do prvku b , kde $p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq q$. Tedy existují indexy $i \in \{1, \dots, p\}$, $j, k \in \{1, \dots, q\}$ takové, že množina $\{a, a_i, b_j, b_k, b\}$ je podsvazem svazu L , který není distributivní ani modulární, což je spor s předpokladem. \square

Obrácená implikace neplatí, protože například distančně-stabilní svaz z Obrázku 25 není distributivní

$$b \vee (a \wedge d) = b \vee 0 = b \neq d = 1 \wedge d = (b \vee a) \wedge (b \vee d)$$

ani modulární

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a \neq c = 1 \wedge c = (a \vee b) \wedge c$$

za podmínky $a \leq c$.

Další užitečná vlastnost týkající se distančně-stabilních svazů se zabývá jejich mocninou. Přesněji řečeno, jak se ovlivní distanční-stabilita v případě direktního čtverce.

LEMMA 3.9. *Nechť L je distančně-stabilní svaz. Pak*

$$d_{L^2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_L(x_1, y_1) + d_L(x_2, y_2)$$

pro každé $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in L^2$, $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$.

Důkaz. Z faktu, že svaz L je distančně-stabilní plyne existence cest

$$P_1 = \{x_1, a_1, \dots, a_p, y_1\} \quad \text{a} \quad P_2 = \{x_2, b_1, \dots, b_q, y_2\},$$

tj. $d_L(x_1, y_1) = p + 1$ a $d_L(x_2, y_2) = q + 1$. Použitím cest P_1 a P_2 vytvoříme cestu P mezi (x_1, x_2) a (y_1, y_2) .

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, x_2) \rightarrow \dots \rightarrow (a_p, x_2) \rightarrow \\ &\rightarrow (y_1, x_2) \rightarrow (y_1, b_1) \rightarrow \dots \rightarrow (y_1, b_q) \rightarrow (y_1, y_2). \end{aligned}$$

Vidíme, že platí $d_{L^2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = p + 1 + q + 1$. Navíc, libovolná cesta z (x_1, x_2) do (y_1, y_2) je vytvořena použitím cest P_1 a P_2 , jenž jsou jediné, a tedy cesta P je taktéž právě jedna. \square

DŮSLEDEK 3.10. *Nechť L je distančně-stabilní svaz, pak L^2 je distančně-stabilní svaz.*

Následující věta přirozeně zobecňuje Lemma 3.9 a Důsledek 3.10 a není třeba ji dokazovat.

VĚTA 3.11. *Direktní přirozená mocnina distančně-stabilního svazu je opět distančně-stabilním svazem. Navíc,*

$$d_{L^k}((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) = d_L(x_1, y_1) + \dots + d_L(x_k, y_k).$$

V předchozí kapitole jsme zavedli pojem (transferově-stabilního) bloku (viz Definice 2.11), jenž obsahoval všechny k -tice vázané transferovou-stabilitou. Nicméně jsme tehdy uvažovali pouze konečné řetězce, ale definice (transferově-stabilního) bloku se nikterak nezmění, uvažujeme-li direktní mocninu libovolného konečného svazu, to jest dva prvky $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^k$ náleží stejnému bloku, jestliže platí rovnost $TS(\mathbf{x}) = TS(\mathbf{y})$ pro každou transferově-stabilní agregační funkci $TS \in \text{TSAgg}_L^{(k)}$.

Oproti blokům v řetězcích, nelze bloky na libovolných svazech jednoduše sestrojít, a proto zavedeme symboliku \leftrightarrow , jež značí přechod z jedné k -tice do jiné pomocí transferové-stability, tj. nechť B je blok v L^k obsahující dvě k -tice $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in B$, pak $(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow (y_1, \dots, y_k)$.

Uvažujme případ $k = 2$. Vyšší mocniny využívají při pohybu ve svazu L^k pomocí transferové-stability právě binární případ, a proto jsou tyto případy analogií ke druhé mocnině svazu L . Dokážeme, že relace \leftrightarrow je relací ekvivalencí na L^2 .

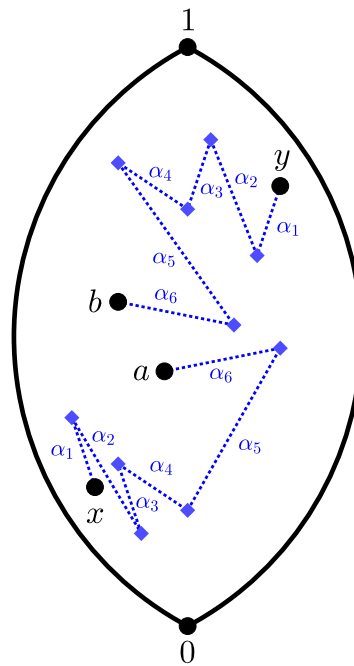
1. $(x, y) \leftrightarrow (x, y)$

Tato podmínka očividně platí, neboť z prvku (x, y) se dostaneme do toho samého, nepoužijeme-li žádný posun pomocí transferové-stability.

$$2. (x, y) \leftrightarrow (a, b) \Rightarrow (a, b) \leftrightarrow (x, y)$$

Předpokládejme, že z prvku x se dostaneme do prvku a o vzdálenost α , a tedy i z prvku y se dostaneme do prvku b o stejnou vzdálenost α .

Je nutné podotknout, že se zde nebavíme o vzdálenosti podle Definice 3.1, neboť α může být složená z více vzdáleností, které jsou již oprávněné (viz Obrázek 26). Tedy, α_i pro $i \in \{1, \dots, 6\}$ jsou vzdálenosti (podle Definice 3.1) mezi prvky, ale α , jakožto jejich součet, $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_6$, je pouze posun z prvku x do prvku a (respektive z prvku y do prvku b) směrem nahoru či dolů o celkový počet hran α .



Obrázek 26: Pohyb pomocí transferové-stability ve svazu.

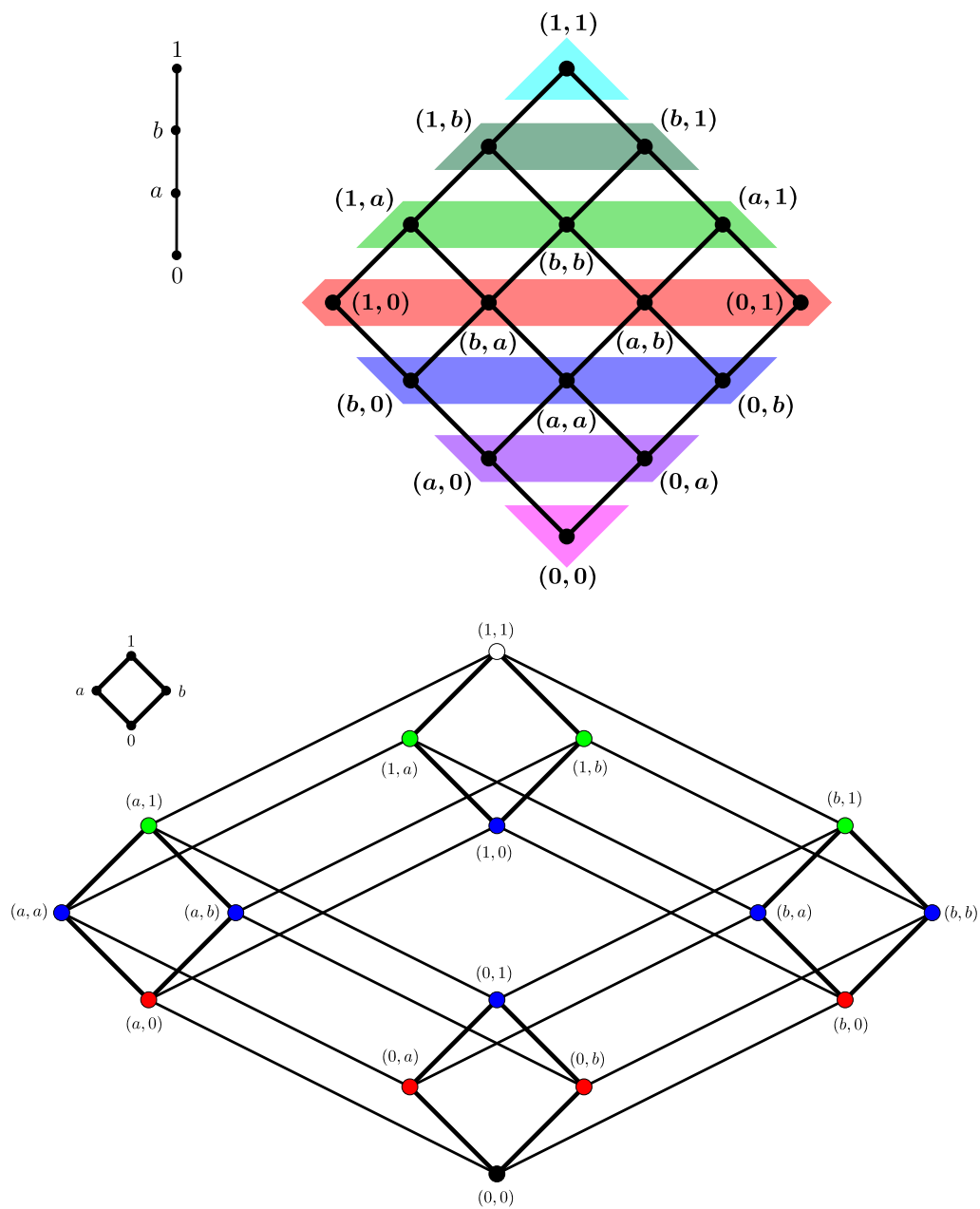
Vrátíme-li se k důkazu, můžeme jednoduše vidět, že pokud se pomocí transferové-stability dostaneme z prvku (x, y) do prvku (a, b) , pak je zřejmé, že existuje i opačný směr.

$$3. (x, y) \leftrightarrow (a, b), (a, b) \leftrightarrow (u, v) \Rightarrow (x, y) \leftrightarrow (u, v)$$

Z předchozího případu, přesněji Obrázku 26, snadno ověříme platnost tohoto výroku, neboť pokud existuje posun z prvku (x, y) do prvku (a, b) , a navíc posun z prvku (a, b) do prvku (u, v) , pak zkombinováním obou těchto posunů jistě obdržíme pohyb z prvku (x, y) do prvku (u, v) .

Jak jsme již zmínili, důkaz pro vyšší mocniny by se provedl analogicky, jelikož pohyb ve vyšších mocninách lze vždy rozložit na pohyb pouze dvou prvků, čili můžeme prohlásit, že relace \leftrightarrow je relací ekvivalence na L^k a její třídy ekvivalence odpovídají (transferově-stabilním) blokům. Na základě tohoto zjištění je každý blok plně určen jeho libovolnou k -ticí a označujeme jej do hranatých závorek. Přesněji řečeno, blok $B = [(x_1, \dots, x_k)]$ označuje třídu (ekvivalence) všech k -tic spojených transferovou-stabilitou s prvkem (x_1, \dots, x_k) , to znamená, že $(y_1, \dots, y_k) \in [(x_1, \dots, x_k)]$, jestliže je splněno $(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow (y_1, \dots, y_k)$.

Další rozdíl oproti blokům pro transferově-stabilní průměry je ten, že není nutnost dělit bloky na hlavní a vedlejší. U transferově-stabilních průměrů vyplynulo z idempotence, že vedlejší bloky byly již plně popsány a nemuseli jsme je nadále studovat. Avšak transferově-stabilní agregační funkce již nejsou idempotentní, což má za následek, že se musíme zabývat všemi bloky bez rozdílu k -tic, jež jsou obsaženy v jednotlivých blocích. Jednoduché znázornění bloků můžeme vidět na Obrázku 27, kde jsou zobrazeny bloky pro druhou mocninu čtyřprvkového řetězce $C_4 = \{0, a, b, 1\}$ a druhou mocninu čtyřprvkového booleovského svazu $B_4 = \{0, a, b, 1\}$. Zde názorně vidíme, že zatímco počet bloků pro řetězec je roven 7, tak u booleovského svazu je jich o poznání méně, jenom 5. Jinými slovy, jde o jev, při kterém má více spojení mezi prvky daného svazu za následek lepší propojení přes transferovou-stabilitu.



Obrázek 27: Všechny bloky ve druhé mocnině čtyřprvkového řetězce a booleovského čtyřprvkového svazu.

Je třeba ještě poukázat na skutečnost, že relace \leftrightarrow není „dokonalá“, neboť nezachovává svazové operace. Z teorie svazů víme, že určité relace ekvivalence hrají velmi důležitou roli. Připomeňme, že relace ekvivalence ε zachovávající svazové operace se nazývá *svazová kongruence*, tj.

$$(a, b) \in \varepsilon, (x, y) \in \varepsilon \Rightarrow (a \wedge x, b \wedge y) \in \varepsilon, (a \vee x, b \vee y) \in \varepsilon.$$

Ovšem z Obrázku 27 lze vypočítat, že výše zmíněná podmínka není splněna pro relaci \leftrightarrow ani v případě řetězce ani booleovského svazu. Například u C_4 máme

$$(a, b) \leftrightarrow (1, 0), (b, 0) \leftrightarrow (b, 0) \Rightarrow (a \wedge b, b \wedge 0) \leftrightarrow (1 \wedge b, 0 \wedge 0).$$

Z minulé kapitoly již víme, že symetrie plyne z transferové-stability pro konečné řetězce, tj. jestliže (x_1, \dots, x_k) náleží bloku B konečného řetězce C_n , pak k -tice $\mathbf{y} \in C_n^k$, představující permutaci prvků x_1, \dots, x_k , také náleží bloku B . Otázka nyní zní, zda toto tvrzení platí obecně pro libovolný konečný svaz.

VĚTA 3.12. *Blok B v konečném svazu L^k obsahuje s každou k -ticí $\mathbf{x} \in L^k$ i její libovolnou permutaci, tj. jestliže $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) \in B$, pak $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k) \in B$.*

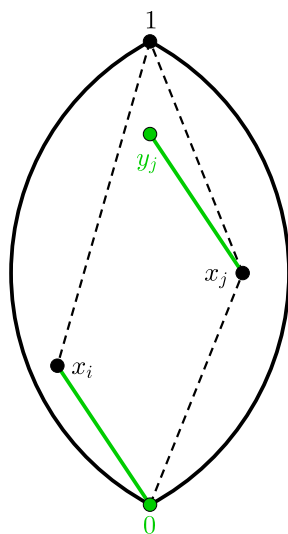
Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že

$$\min(d(0, x_i), d(0, x_j), d(1, x_i), d(1, x_j)) = d(0, x_i).$$

Pak existuje prvek $y_j \in L$ (viz Obrázek 28) takový, že

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) &\leftrightarrow (x_1, \dots, 0, \dots, y_j, \dots, x_k) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x_1, \dots, y_j, \dots, 0, \dots, x_k) \leftrightarrow (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k), \end{aligned}$$

kde ve druhém kroku byla použita symetrie z [12]. □



Obrázek 28: Příklad svazu použitého v důkazu Věty 3.12.

3.2 Binární transferově-stabilní agregační funkce

Nyní se zaměříme pouze na binární transferově-stabilní agregační funkce, přesněji na binární bloky (bloky obsahující dvojice). Jak jsme již několikrát zmínili, tak binární případy jsou nejdůležitější, neboť se od nich vše odvíjí i u vyšších arit. V kapitole 3.6 se budeme zabývat transferově-stabilními agregačními funkcemi vyšších arit, přičemž většina důkazů bude založena právě na znalosti binárních transferově-stabilních agregačních funkcí.

Z definice bloku, popřípadě relace ekvivalence \leftrightarrow , víme, že každý blok je charakterizován jeho libovolnou dvojicí. Otázkou je, zda neexistují takové dvojice, jež by daný blok mohly co nejlépe charakterizovat. Odpovědí jsou dvojice obsahující prvek 0 nebo 1, což z Obrázku 27 snadno vidíme, že v každém bloku je některá z těchto dvojic. Ještě nutno podotknout, že taková dvojice nemusí být právě jedna až na symetrii, neboť například u druhé mocniny čtyřprvkového booleovského svazu B_4^2 je druhý blok charakterizován jak dvojicí $(0, a)$, tak i dvojicí $(0, b)$.

LEMMA 3.13. *Pro každý blok B svazu L^2 existuje $x \in L$ takové, že dvojice $(0, x)$ nebo $(1, x)$ náleží do bloku B .*

Důkaz. Pro pevně danou dvojici $(x, y) \in L^2$ označme funkci

$$f(x, y) := \min(d(0, x), d(0, y), d(1, x), d(1, y)).$$

Mohou nastat dva případy:

1. Jestliže $f(x, y) = d(0, x)$ (respektive $f(x, y) = d(0, y)$), pak existuje $b \in L$ takové, že $(x, y) \leftrightarrow (0, b)$ (respektive existuje $c \in L$ takové, že $(x, y) \leftrightarrow (c, 0)$). Myšlenka tohoto kroku je zobrazena na Obrázku 28.
2. Jestliže $f(x, y) = d(1, x)$ (respektive $f(x, y) = d(1, y)$), pak existuje $b \in L$ takové, že $(x, y) \leftrightarrow (1, b)$ (respektive existuje $c \in L$ takové, že $(x, y) \leftrightarrow (c, 1)$).

□

POZNÁMKA 3.14. Z právě zmíněného Lemmatu 3.13 a zejména z binárních bloků na čtyřprvkovém booleovském svazu (viz Obrázek 27) rozlišujeme čtyři speciální případy bloků, jež má každá druhá mocnina svazu s více jak dvěma prvky.

1. *Nejmenší* blok obsahuje pouze dvojici $(0, 0) \in L^2$, tj. $[(0, 0)] = \{(0, 0)\}$.
2. *Atomárním* blokem nazveme blok, jehož jeden prvek je 0 a druhý je atomem svazu L , tj. $[(0, a)] = \{(0, a), (a, 0) \mid a \in \text{At}(L)\}$.
3. Duálně k atomárnímu bloku nazveme blok *koatomární*, odkud tedy jeden z prvků je roven prvku 1 a druhý je koatomem svazu L , tj. $[(1, z)] = \{(1, z), (z, 1) \mid z \in \text{CoAt}(L)\}$.
4. *Největší* blok obsahuje pouze dvojici $(1, 1) \in L^2$, tj. $[(1, 1)] = \{(1, 1)\}$.

Z příkladu booleovského svazu na Obrázku 27 je ihned patrné, že černý a bílý blok jsou po řadě nejmenší a největší, načež červený blok je atomární a zelený blok je koatomární. Ještě poznamenejme, že pro druhou mocninu dvouprvkového svazu, tj. čtyřprvkový booleovský svaz, je atomární blok roven koatomárnímu, a toto je jediný případ, kdy se tak stane. Jinak řečeno, pro každý konečný alespoň tříprvkový svaz je atomární blok různý od koatomárního.

Dalším velmi důležitým, a jak se ukáže dále, klíčovým v mnoha oblastech transferově-stabilních agregačních funkcí, nejen u distančně-stabilních svazů, je blok representovaný dvojicí $(0, 1)$, to jest blok $[(0, 1)]$, jenž nazveme *centrálním* blokem.

S využitím Lemmatu 3.13 můžeme snadno popsat všechny bloky v distančně-stabilním svazu. Co se týče bloků v ostatních svazech, tak zde se bude jednat o složitější případ, kterým se budeme zabývat později, jelikož poukážeme na fakt, že mimo distančně-stabilní svazy se prvky v blocích nechovají přesně podle řádu, jako u distančně-stabilních svazů. V následující větě můžeme vidět, že bloky v distančně-stabilních svazech jsou přesně takové, jak očekáváme.

VĚTA 3.15. *Nechť L je distančně-stabilní svaz a cesta $P = \{0, a_1, \dots, a_n, 1\}$, $P \in \text{Path}L$, buď cesta z 0 do 1 ve svazu L . Pak následující bloky*

$$[(0, 0)], [(0, a_1)], \dots, [(0, a_n)], [(0, 1)], [(a_1, 1)], \dots, [(a_n, 1)], [(1, 1)]$$

jsou všechny navzájem různé bloky svazu L^2 s počtem rovným $2 \cdot d(0, 1) + 1$.

Důkaz. Nejdříve dokážeme, že nezáleží na volbě cesty $P \in \text{Path}L$. V distančně-stabilním svazu je pro každé dva prvky $a, b \in L$ splněna podmínka

$$d(0, a) = d(0, b) \text{ právě tehdy, když } (0, a) \text{ a } (0, b) \text{ náleží stejnému bloku.}$$

Jestliže $Q = \{0, b_1, \dots, b_m, 1\}$, $Q \in \text{Path}L$ je cesta v L různá od cesty P , pak nutně $m = n$, protože svaz L je distančně-stabilní. Z výše zmíněné podmínky je zřejmé, že $(0, a_i) \in [(0, b_i)]$ pro $i = 1, \dots, n$. Tedy nezáleží na volbě cesty z množiny $\text{Path}L$.

Ve druhé části dokážeme, že se jedná o všechny navzájem různé bloky. Z Lemmatu 3.13 je zřejmé, že výše zmíněné bloky jsou všechny bloky svazu L^2 . Zbývá tedy dokázat, že jsou rozdílné. K tomu nám stačí se zaměřit pouze na následující dva případy, neboť ostatní jsou jejich analogií.

- i) Uvažujme bloky $[(0, a_i)]$ a $[(0, a_j)]$, kde $a_i < a_j$. Aplikováním transferové-stability na dvojici $(0, a_i)$ dostaneme dvojici $(b_i, 0)$ s rovností vzdáleností $d(0, b_i) = d(0, a_i)$, což znamená, že $(0, a_j) \notin [(0, a_i)]$, protože $d(0, a_i) < d(0, a_j)$.
- ii) Uvažujme bloky $[(0, a_i)]$ a $[(a_j, 1)]$. Použitím podobné myšlenky jako v předchozím kroku, můžeme zjistit, že ze dvojice $(0, a_i)$, $a_i \neq 1$, nikdy neobdržíme dvojici obsahující prvek 1, čili $(0, a_i) \notin [(a_j, 1)]$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$.

□

Například ve čtyřprvkovém řetězci $C_4 = \{0, a, b, 1\}$ existuje právě jedna cesta $P = \{0, a, b, 1\}$, odkud podle Věty 3.15 jsou všechny bloky jeho druhé mocniny následující:

$$[(0, 0)], [(0, a)], [(0, b)], [(0, 1)], [(a, 1)], [(b, 1)], [(1, 1)].$$

Ve druhém případě, u čtyřprvkového booleovského svazu $B_4 = \{0, a, b, 1\}$, existuje například cesta $P = \{0, a, 1\}$, odkud podle stejné věty obdržíme pro jeho druhou mocninu bloky

$$[(0, 0)], [(0, a)], [(0, 1)], [(a, 1)], [(1, 1)],$$

což nám Obrázek 27 v obou případech dává za pravdu.

Hlavní myšlenka v důkazu Věty 3.15 se zaobírá podstatou propojení vzdálenosti prvku od nulového prvku s jeho incidencí s daným blokem, čímž obdržíme následující přímý důsledek charakterizující všechny bloky v distančně-stabilních svazech jakožto jednotlivá „patra“ v druhých mocninách, přesněji, stejné vzdálenosti od nejmenšího prvku. To znamená, že každý blok na distančně-stabilním svazu je plně určen vzdáleností jeho libovolného prvku od nejmenšího (respektive největšího) prvku.

DŮSLEDEK 3.16. *Nechť B je blok ve svazu L^2 pro distančně-stabilní svaz L . Pak $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in B$ právě tehdy, když*

$$d_{L^2}((x_1, x_2), (0, 0)) = d_{L^2}((y_1, y_2), (0, 0)).$$

Důkaz. Předpokládejme, že blok B generovaný dvojicí $(0, a)$, tj. $B = [(0, a)]$, obsahuje dvojice $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$. Příklad, kdy by dvojice $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ náležely do nějakého bloku generovaného dvojicí $(1, b)$, pro $b \in L$, se dokáže analogicky. Pak $(x_1, x_2) \leftrightarrow (0, x)$ a $(y_1, y_2) \leftrightarrow (0, y)$ pro nějaké $x, y \in L$. Z distanční-stability svazu L je evidentní, že $d_L(0, x) = d_L(0, a) = d_L(0, y)$. Odtud dostaneme, s využitím Lemma 3.9, že

$$\begin{aligned} d_{L^2}((x_1, x_2), (0, 0)) &= d_L(0, x_1) + d_L(0, x_2) = d_L(0, x) = \\ &= d_L(0, y) = d_L(0, y_1) + d_L(0, y_2) = d_{L^2}((y_1, y_2), (0, 0)). \end{aligned}$$

Naopak, předpokládejme bez újmy na obecnosti, že

$$\min(d_L(0, x_1), d_L(0, x_2), d_L(0, y_1), d_L(0, y_2)) = d_L(0, x_1),$$

tj. prvek x_1 je neblíže prvku 0. Navíc uvažujme, že $d(0, x_1) \leq d(1, x_2)$. (Opačný případ by se dokázal analogicky.) Pak $(x_1, x_2) \leftrightarrow (0, x'_2)$ pro nějaké $x'_2 \in L$, a tedy

$$d_L(0, x'_2) = d_L(0, x_1) + d_L(0, x_2) = d_L(0, y_1) + d_L(0, y_2).$$

Odtud plyne, že y_1 nebo y_2 může být přesunut do prvku 0 (předpokládejme y_1), a tedy $(y_1, y_2) \leftrightarrow (0, y'_2)$ pro nějaké $y'_2 \in L$. Zřejmě $d_L(0, x'_2) = d_L(0, y'_2)$. Věta 3.15 ukazuje, že $(0, x'_2)$ a $(0, y'_2)$ náleží stejnému bloku, což je taktéž splněno pro dvojice $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$. \square

DŮSLEDEK 3.17. *Dvojice $(x_1, x_2) \in L^2$ konečného distančně-stabilního svazu L náleží do centrálního bloku $[(0, 1)]$ právě tehdy, když její vzdálenost od nejmenšího prvku svazu L^2 je rovna délce distančně-stabilního svazu L , tj.*

$$d_{L^2}((x_1, x_2), (0, 0)) = d_L(0, 1).$$

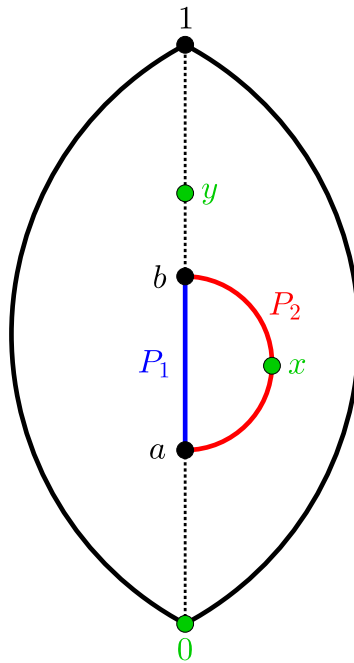
Z podstaty Důsledku 3.16 lze vyčíst charakterizaci distančně-stabilních svazů podle uspořádání dvojic v daném bloku, přesněji, že žádné uspořádání nemůže nastat.

VĚTA 3.18. *Konečný svaz L je distančně-stabilní právě tehdy, když každý blok v L^2 obsahuje pouze nesrovnatelné dvojice.*

Důkaz. Předpokládejme, že svaz L je distančně-stabilní a v jeho druhé mocnině existuje blok B obsahující srovnatelné dvojice, tj. $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in B$ takové, že $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$. Navíc, bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $(x_1, x_2) \leftrightarrow (0, x)$ pro nějaké $x \in L$. Pak mohou, pro dvojici (y_1, y_2) , nastat tyto dva případy:

1. $(y_1, y_2) \leftrightarrow (0, y)$ pro nějaké $y \in L$. Pak $(0, x), (0, y) \in B$, kde $x \leq y$, což je spor s Větou 3.15.
2. $(y_1, y_2) \leftrightarrow (y, 1)$ pro nějaké $y \in L$. Pak $(0, x), (1, y) \in B$, což je spor s Větou 3.15.

Obráceně, necht' L není distančně-stabilním (je distančně-destabilním) svazem. Pak existují prvky $a, b \in L$ s nejednoznačnou vzdáleností, tj. existují rozdílné cesty P_1 a P_2 z prvku a do b takové, že $\|P_1\| < \|P_2\|$. Použitím cest P_1 a P_2 dostaneme $(0, b) \leftrightarrow (x, 0)$ a $(0, b) \leftrightarrow (y, 0)$, kde v prvním případě jsme s prvkem b „šli dolů“ po cestě P_1 a ve druhém případě po cestě P_2 , viz Obrázek 29. To znamená, že dvojice $(0, x), (0, b)$ a $(0, y)$ náleží stejnému bloku, přičemž platí $(0, x) \leq (0, b) \leq (0, y)$. Tedy, existuje blok obsahující srovnatelné dvojice. \square



Obrázek 29: Znázornění srovnatelných dvojic v daném bloku.

Zamyslíme-li se nad myšlenkou v důkazu Věty 3.18, zejména druhou částí s Obrázkem 29, můžeme položit otázku, jak je to s centrálním blokem $[(0, 1)]$ u distančně-stabilních svazů (respektive distančně-destabilních). I zde vidíme, že existence různých cest mezi dvěma prvky ovlivňuje zejména centrální blok, odkud ihned plyne následující důsledek.

DŮSLEDEK 3.19. *Konečný svaz L je distančně-stabilní právě tehdy, když centrální blok $[(0, 1)]$ v L^2 obsahuje pouze nesrovnatelné dvojice.*

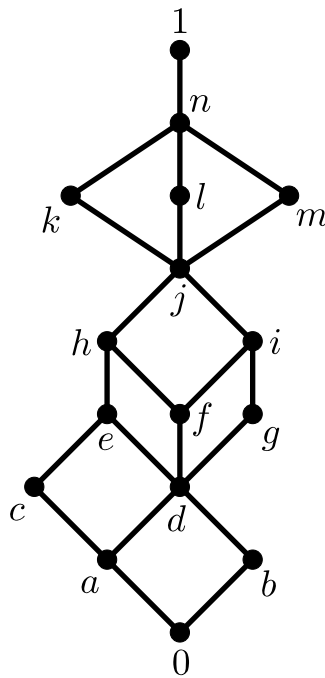
Již několikrát jsme zmínili, jak moc jsou důležité cesty z nejmenšího prvku do největšího prvku svazu, čili množina $\text{Path}L$. Otázkou je, kolik takových cest existuje. Vzhledem k tomu, že tvar svazu může být téměř „jakýkoli“, nelze mohutnost množiny $\text{Path}L$ vypočítat přímo, nýbrž postupně od atomů směrem nahoru. Podrobněji popíšeme myšlenku následovně. Víme, že do libovolného atomu vede právě jedna cesta. Uvažujme nyní prvek ve vzdálenosti 2 od nejmenšího prvku 0 pokrývající pouze jeden atom. Pak je jisté, že cesta do takového prvku je taktéž jediná. Nicméně, kdyby prvek ve vzdálenosti 2 pokrýval více atomů, pak počet cest do takového prvku je roven součtu cest do jednotlivých atomů. Na podobné myšlence se zakládá následující věta popisující počet všech cest do určitého prvku ve svazu. Ještě je třeba podotknout, že tato myšlenka v sobě neuchovává předpoklad distanční stability svazu, ale platí pro obecný konečný svaz.

VĚTA 3.20. *Nechť a je prvkem konečného svazu L s vlastností, že prvky $b_1, \dots, b_n \in L$, $n \in \mathbb{N}$, jsou všechny prvky jež pokrývá, tj. $b_1 \prec a, \dots, b_n \prec a$. Pak součet počtu všech cest do jednotlivých prvků b_1, \dots, b_n je roven počtu všech cest do prvku a .*

Důkaz. Předpokládejme, že existuje p_i cest do prvku b_i pro $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak jakékoli dvě cesty, po řadě do prvků b_i a b_j pro některé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou různé. Odtud plyne, že přidáním prvku a ke všem cestám do prvků b_i pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ se neporuší různorodost cest. Navíc se jedná o všechny cesty do prvku a , neboť každá z uvažovaných cest prochází všemi prvky, jež jsou pokryty prvkem a . \square

Nyní ukážeme netriviální příklad, na kterém předvedeme platnost několika zde zmíněných výsledků.

PŘÍKLAD 3.21. Uvažujme svaz L_2 znázorněný na Obrázku 30.



Obrázek 30: Svaz L_2 .

Podle Věty 3.7 je svaz L_2 distančně-stabilním svazem, neboť nejmenší i největší vzdálenost mezi jeho nejmenším a největším prvkem se shoduje a je rovna 8, tj. délka distančně-stabilního svazu L je $d(0, 1) = D(0, 1) = 8$,

odkud tedy podle Věty 3.15 je počet všech bloků ve druhé mocnině L_2^2 svazu L_2 roven $2 \cdot d(0, 1) + 1 = 2 \cdot 8 + 1 = 17$, přičemž z Poznámky 3.14 je po řadě nejmenší, atomární, koatomární a největší blok ve tvaru:

$$\begin{aligned} [(0, 0)] &= \{(0, 0)\} \\ [(0, a)] &= \{(0, a), (0, b), (a, 0), (b, 0)\} \\ [(1, n)] &= \{(1, n), (n, 1)\} \\ [(1, 1)] &= \{(1, 1)\}. \end{aligned}$$

Mezi atomárním a koatomárním blokem se, s využitím Věty 3.15, nachází, kupříkladu pro zvolenou cestu $P = \{0, a, c, e, h, j, k, n, 1\}$, následující bloky se svými všemi dvojicemi až na symetrii:

$$\begin{aligned} [(0, c)] &= \{(0, d), (a, b), (a, a), (b, b)\} \\ [(0, e)] &= \{(0, f), (0, g), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\} \\ [(0, h)] &= \{(0, i), (a, e), (a, f), (a, g), (b, e), (b, f), (b, g), (c, c), (c, d), (d, d)\} \\ [(0, j)] &= \{(a, h), (a, i), (b, h), (b, i), (c, e), (c, f), (c, g), (d, e), (d, f), (d, g)\} \\ [(0, k)] &= \{(0, l), (0, m), (a, j), (b, j), (c, h), (c, i), (d, h), (d, i), (e, e), (e, f), \\ &\quad (e, g), (f, f), (f, g), (g, g)\} \\ [(0, n)] &= \{(a, k), (a, l), (a, m), (b, k), (b, l), (b, m), (c, j), (d, j), (e, h), (e, i) \\ &\quad (f, h), (f, i), (g, h), (g, i)\} \\ [(0, 1)] &= \{(a, n), (b, n), (c, k), (c, l), (c, m), (d, k), (d, l), (d, m), (e, j), (f, j) \\ &\quad (g, j), (h, h), (h, i), (i, i)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[(1, a)] &= \{(1, b), (c, n), (d, n), (e, k), (e, l), (e, m), (f, k), (f, l), (f, m), (g, k) \\
&\quad (g, l), (g, m), (h, j), (i, j)\} \\
[(1, c)] &= \{(1, d), (e, n), (f, n), (g, n), (h, k), (h, l), (h, m), (i, k), (i, l), (i, m) \\
&\quad (j, j)\} \\
[(1, e)] &= \{(1, f), (1, g), (h, n), (i, n), (j, k), (j, l), (j, m)\} \\
[(1, h)] &= \{(1, i), (j, n), (k, k), (k, l), (k, m), (l, l), (l, m), (m, m)\} \\
[(1, j)] &= \{(k, n), (l, n), (m, n)\} \\
[(1, k)] &= \{(1, l), (1, m), (n, n)\}.
\end{aligned}$$

Další možnosti, jak můžeme ověřit, že dvojice náleží do stejného bloku, respektive do určitého bloku, je Důsledek 3.16. Uvažujme kupříkladu dvojice

$$\begin{aligned}
&(b, h), (b, l), (c, j), (c, e), (d, l), (e, k), (f, m), \\
&(g, h), (h, i), (i, j), (j, l), (k, l), (l, m), (m, n).
\end{aligned}$$

Pak vzdálenosti od nulového prvku, dle Lemmatu 3.9, jsou:

$$\begin{aligned}
d((b, h), (0, 0)) &= d(b, 0) + d(h, 0) = 1 + 4 = 5 \\
d((b, l), (0, 0)) &= d(b, 0) + d(l, 0) = 1 + 6 = 7 \\
d((c, j), (0, 0)) &= d(c, 0) + d(j, 0) = 2 + 5 = 7 \\
d((c, e), (0, 0)) &= d(c, 0) + d(e, 0) = 2 + 3 = 5 \\
d((d, l), (0, 0)) &= d(d, 0) + d(l, 0) = 2 + 6 = 8 \\
d((e, k), (0, 0)) &= d(e, 0) + d(k, 0) = 3 + 6 = 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d((f, m), (0, 0)) &= d(f, 0) + d(m, 0) = 3 + 6 = 9 \\
d((g, h), (0, 0)) &= d(g, 0) + d(h, 0) = 3 + 4 = 7 \\
d((h, i), (0, 0)) &= d(h, 0) + d(i, 0) = 4 + 4 = 8 \\
d((i, j), (0, 0)) &= d(i, 0) + d(j, 0) = 4 + 5 = 9 \\
d((j, l), (0, 0)) &= d(j, 0) + d(l, 0) = 5 + 6 = 11 \\
d((k, l), (0, 0)) &= d(k, 0) + d(l, 0) = 6 + 6 = 12 \\
d((l, m), (0, 0)) &= d(l, 0) + d(m, 0) = 6 + 6 = 12 \\
d((n, n), (0, 0)) &= d(n, 0) + d(n, 0) = 7 + 7 = 14,
\end{aligned}$$

odkud vidíme, že dvojice (b, h) a (c, e) náleží stejnému bloku, přičemž tento blok je určen dvojicí $(0, j)$, neboť

$$d((0, j), (0, 0)) = d(0, 0) + d(j, 0) = 0 + 5 = 5,$$

to jest, $(b, h), (c, e) \in [(0, j)]$.

Dále, dvojice (b, l) , (c, j) a (g, h) jsou ekvivalentní přes transferovou-stabilitu a ve svazu L_2 je prvek n ve vzdálenosti 7 od nejmenšího prvku 0, což odpovídá $(b, l), (c, j), (g, h) \in [(0, n)]$.

Vzhledem k tomu, že délka distančně-stabilního svazu je rovna 8, je zřejmé, dle Důsledku 3.17, že dvojice (d, l) a (h, i) musí náležet centrálnímu bloku určenému dvojicí $(0, 1)$.

Co se týče dalších dvojic, tak zde můžeme vidět, že vzdálenosti jsou větší než největší vzdálenost ve svazu L_2 , to znamená, že tyto dvojice musí náležet do bloku určeného dvojicí s jedním prvkem rovným 1. Třeba dvojice (e, k) , (f, m) a (i, j) jsou ve vzdálenosti o jedna větší než největší vzdálenost ve svazu L_2 , čímž tedy náleží do prvního bloku po centrálním bloku $[(0, 1)]$, tj. $(e, k), (f, m), (i, j) \in [(1, a)]$.

Další dvojicí, pro kterou musíme určit vhodný blok, je (j, l) . Podle předchozí myšlenky víme, že by měla náležet do třetího bloku po centrálním bloku. Nicméně na to můžeme jít i jinak. Místo vzdálenosti od nejmenšího prvku $(0, 0)$, spočítáme vzdálenost od největšího prvku $(1, 1)$, která je rovna

$$d((j, l), (1, 1)) = d(j, 1) + d(l, 1) = 3 + 2 = 5.$$

Podobně jako u dvojic předtím, akorát naopak, nalezneme prvek ve vzdálenosti 5 od největšího prvku 1 ve svazu L_2 , což odpovídá prvku e , čili $(j, l) \in [(1, e)]$.

Analogického postupu můžeme dosáhnout i u posledních nezmíněných dvojic, kde namísto vzdálenosti od nejmenšího prvku druhé mocniny svazu L_2 , určíme vzdálenost od největšího prvku využitím znalosti, že dvojice (k, l) a (l, m) jsou propojeny transferovou-stabilitou. Tedy

$$\begin{aligned} d((k, l), (1, 1)) &= d(k, 1) + d(l, 1) = 2 + 2 = 4 \\ d((n, n), (1, 1)) &= d(n, 1) + d(n, 1) = 1 + 1 = 2, \end{aligned}$$

odkud podle tvaru svazu L_2 víme, že ve vzdálenosti 4 od největšího prvku 1 je prvek h , zatímco prvek k je ve vzdálenosti 2, čili $(k, l), (l, m) \in [(1, h)]$ a $(n, n) \in [(1, k)]$.

Samozřejmě už víme, že svaz L_2 je distančně-stabilním, nicméně ze znalosti bloků můžeme taktéž vyvodit závěr pro distančně-stabilní svaz. Přesněji ze znalosti centrálního bloku $[(0, 1)]$, dle Důsledku 3.19, můžeme prohlásit, že svaz L_2 je distančně-stabilním, neboť všechny dvojice v tomto bloku jsou vzájemně nesrovnatelné.

Na závěr příkladu ukážeme platnost Věty 3.20. Znázorníme postupně počet všech cest do každého prvku svazu L_2 symbolem n^x , kde n je počet všech cest do prvku x svazu L_2 .

Do prvku a nebo b vede jen jedna cesta ve tvaru $A_1 = \{0, a\}$ nebo ve tvaru $B_1 = \{0, b\}$. Podle myšlenky Věty 3.20 je počet cest do prvku c stejný jako počet cest do prvku a , tj. $C_1 = \{0, a, c\}$ je jediná cesta do prvku c . Na druhou stranu, počet cest do prvku d je roven součtu cest do prvků a i b , tj. $D_1 = \{0, a, d\}$ a $D_2 = \{0, b, d\}$. Dle výše zavedeného označení máme $1^a, 1^b, 1^c, 2^d$.

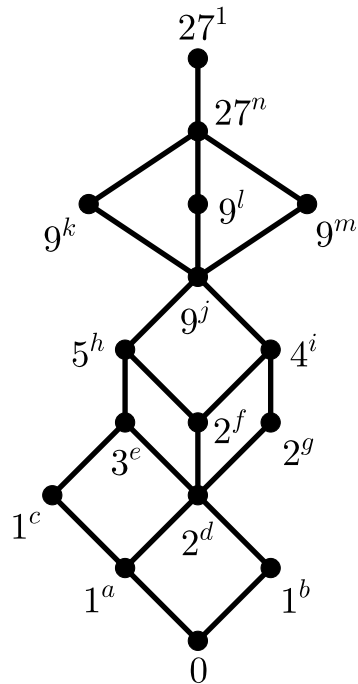
Pro ostatní prvky jsou počty všech cest znázorněny na Obrázku 31. Například počet všech cest do prvku h je roven 5, tj.

$$\begin{aligned} H_1 &= \{0, a, c, e, h\} \\ H_2 &= \{0, a, d, e, h\} \\ H_3 &= \{0, a, d, f, h\} \\ H_4 &= \{0, b, d, e, h\} \\ H_5 &= \{0, b, d, f, h\}, \end{aligned}$$

a počet všech cest do prvku i je roven 4, tj.

$$\begin{aligned} I_1 &= \{0, a, d, f, i\} \\ I_2 &= \{0, a, d, g, i\} \\ I_3 &= \{0, b, d, f, i\} \\ I_4 &= \{0, b, d, g, i\}. \end{aligned}$$

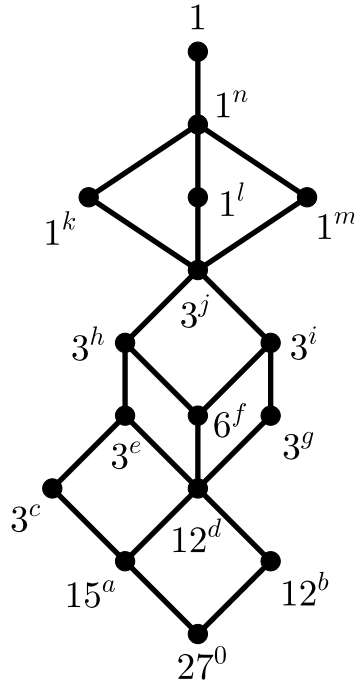
Celkově tedy přidáním prvku j ke každé z těchto cest obdržíme všech devět cest do prvku j .



Obrázek 31: Počet všech cest z prvku 0 do jednotlivých prvků svazu L_2 .

Tudíž počet všech cest od nejmenšího do největšího prvku svazu L_2 je roven 27, tj. $|\text{Path}L| = 27$.

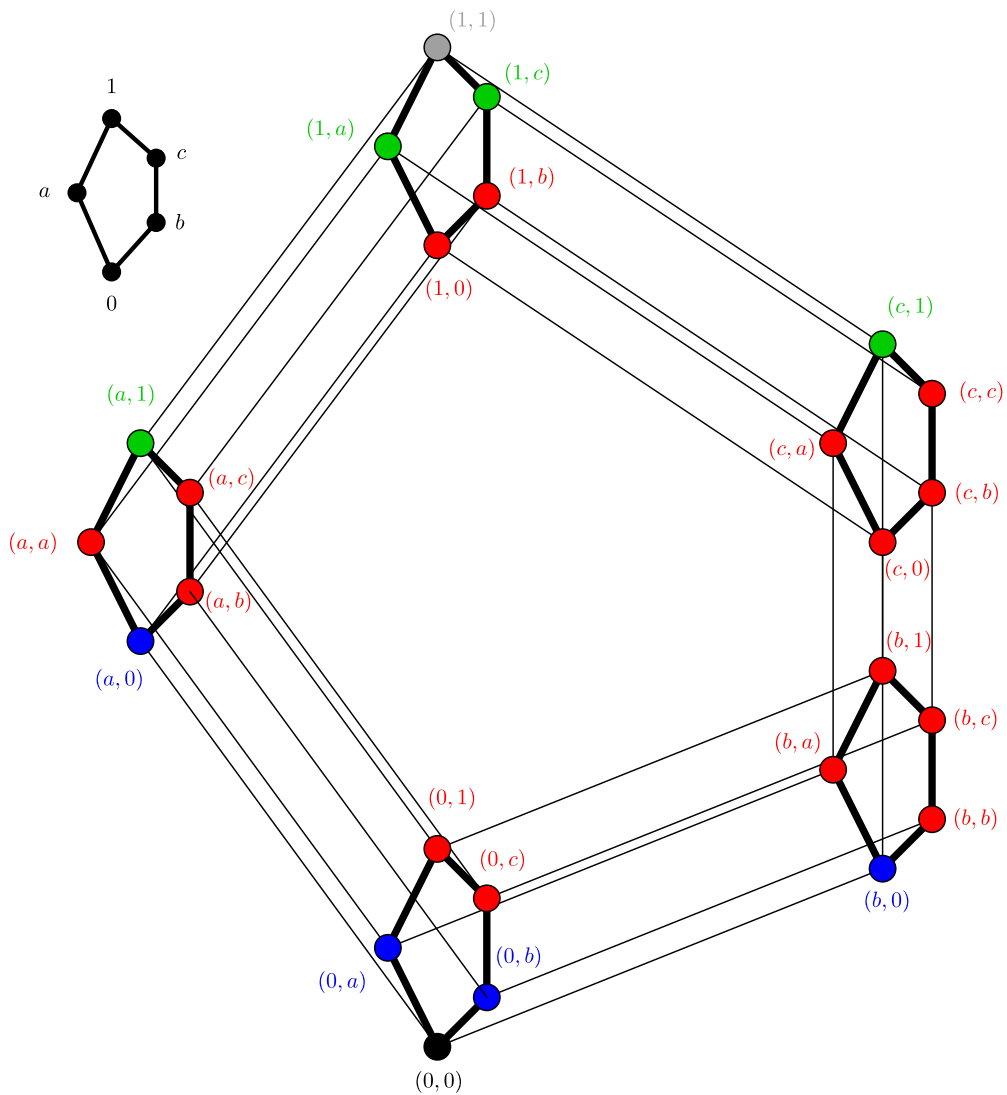
Pro zajímavost, pokud výčet cest, dle Obrázku 31, uděláme i naopak, tj. hledáme všechny cesty vycházející z prvku 1 (viz Obrázek 32), pak součin čísel u stejného prvku odpovídá počtu výskytů v cestách onoho prvku. To znamená, že kupříkladu prvek h se ze všech 27 cest ve svazu L nachází pouze v $5 \cdot 3 = 15$ cestách, zatímco prvek g jen v $2 \cdot 3 = 6$ cestách.



Obrázek 32: Počet všech cest z prvku 1 do jednotlivých prvků svazu L_2 .

Na příkladu jsme viděli, jak fungují dokázaná tvrzení pro distančně-stabilní svaz. Podívejme se na příklad distančně-destabilního svazu a zkusme tak vystihnout sílu oněch tvrzení pro distančně-stabilní svazy. Zároveň s tím nastíníme myšlenku, kterou se budeme zabývat v následující kapitole.

PŘÍKLAD 3.22. Nejmenší distančně-destabilní svaz je pentagon N_5 zobrazený na Obrázku 33, spolu se svou druhou mocninou. Vidíme, že $d(0, 1) = 2$ zatímco $D(0, 1) = 3$, můžeme tedy usoudit, že, podle Věty 3.7, se nejedná o distančně-stabilní svaz.



Obrázek 33: Druhá mocnina pentagonu N_5 .

Zabývejme se nejdříve Lemmatem 3.13, které, jak jsme již zjistili, platí obecně, takže i u druhé mocniny pentagonu víme, že v každém bloku bude dvojice obsahující nejmenší prvek 0 nebo největší prvek 1. Konkrétně dle Obrázku 33, modrý blok obsahuje kupříkladu dvojici $(0, a)$, červený blok dvojici $(0, e)$, dokonce i $(1, b)$, a zelený blok třeba dvojici $(1, c)$. Ihned můžeme

vidět jeden rozdíl mezi distančně-stabilními a distančně-destabilními svazy. V červeném bloku jsou totiž dvojice $(0, e)$ a $(1, b)$, což by se v distančně-stabilním svazu nikdy stát nemohlo, neboť jak už z důkazů víme, transferová-stabilita nám zakazuje v distančně-stabilním svazu přejít od libovolné dvojice $(0, x)$ do dvojice $(1, y)$, pro některá $x, y \in L$.

Můžeme přejít k Větě 3.15, neboť už jsme zmínili všechny bloky druhé mocniny pentagonu. Podle oné věty stačí vzít libovolnou cestu z množiny $\text{Path}L$ a z ní je možno vytvořit všechny bloky. Velmi snadno se přesvědčíme, že v pentagonu existují pouze dvě cesty $P_1 = \{0, a, 1\}$ a $P_2 = \{0, b, c, 1\}$. Pak všechny bloky podle cesty P_1 jsou:

$$[(0, 0)]; [(0, a)]; [(0, 1)]; [(a, 1)]; [(1, 1)],$$

ale podle cesty P_2 máme bloky

$$[(0, 0)]; [(0, b)]; [(0, c)]; [(0, 1)]; [(b, 1)]; [(c, 1)]; [(1, 1)].$$

Problém je ihned patrný, neboť pro cestu P_2 jsme dostali více bloků než pro cestu P_1 , čímž tedy všechny bloky sice máme, ale u cesty P_2 nejsou vzájemně různé, neboť

$$[(0, c)] = [(0, 1)] = [(b, 1)].$$

Na druhou stranu, bloky pro cestu P_1 jsou vzájemně různé, takže by se mohlo zdát, že nejkratší cesta je klíčem k zobecnění Věty 3.15, ale není tomu tak. Podstatu pro zjištění všech navzájem různých bloků zjistíme později.

Dále se budeme zabývat Důsledky 3.16 a 3.17. Jedná se o vzdálenost dvojic od nejmenšího prvku ve druhé mocnině, což má za následek incidenci se stejným blokem. Nicméně v tomto případě tomu tak není, neboť dvojice $(0, c)$, $(0, 1)$, $(1, b)$ a (c, c) náležejí stejnému bloku, ale pro jejich vzdálenosti

platí

$$d((0, c), (0, 0)) = d(0, 0) + d(c, 0) = 0 + 2 = 2$$

$$d((0, 1), (0, 0)) = d(0, 0) + d(1, 0) = 0 + 2 = 2$$

$$d((1, b), (0, 0)) = d(1, 0) + d(b, 0) = 2 + 1 = 3$$

$$d((c, c), (0, 0)) = d(c, 0) + d(c, 0) = 2 + 2 = 4,$$

a také

$$D((0, c), (0, 0)) = D(0, 0) + D(c, 0) = 0 + 2 = 2$$

$$D((0, 1), (0, 0)) = D(0, 0) + D(1, 0) = 0 + 3 = 3$$

$$D((1, b), (0, 0)) = D(1, 0) + D(b, 0) = 3 + 1 = 4$$

$$D((c, c), (0, 0)) = D(c, 0) + D(c, 0) = 2 + 2 = 4.$$

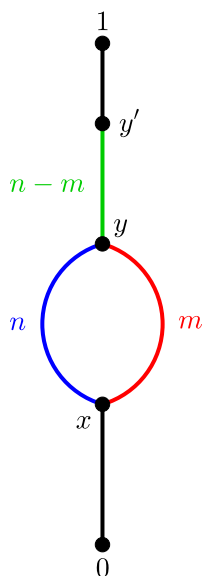
Nejenom že shodnost dvojic v jednom bloku není zaručena stejnou vzdáleností, ale v distančně-nestabilním svazu existují jak nejmenší, tak i největší vzdálenosti, načež ani tak nemáme zaručenou podmínku pro náležitost do stejného bloku. Nijak tomu nepomůže ani centrální blok, neboť $d(0, 1) = 2$ a $D(0, 1) = 3$ a z výše zmíněných vzdáleností se, dle Důsledku 3.17, ani tak nemusí shodovat. I v tomto případě se v dalším textu dozvíme, jak podle vzdálenosti dané dvojice od nejmenšího prvku určit její správný blok.

Charakterizace jednotlivých bloků podle Věty 3.18, respektive Důsledku 3.19, již podle výše napsaného textu rozhodně neplatí, protože kupříkladu v centrálním bloku existují srovnatelné dvojice $(b, b) \leq (c, b) \leq (1, b)$.

Závěrem příkladu a zároveň celé kapitoly můžeme prohlásit, že u distančně-nestabilních svazů dochází k několika problémům, kterým je potřeba se více věnovat.

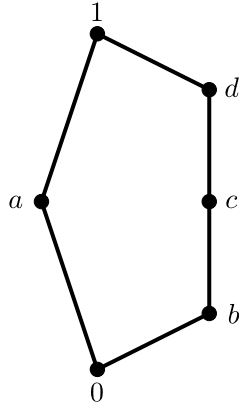
3.3 Uspořádání bloků a transferově-stabilní svazy

Pokud svaz L není distančně-stabilním, pak existují prvky $x, y \in L$ takové, že $|\mathcal{D}_{xy}| \geq 2$. Předpokládejme, že $\mathcal{D}_{xy} = \{n, m\}$, $n > m$, přesněji svaz L zobrazený na Obrázku 34.



Obrázek 34: Znázornění vzdálenosti mezi bloky v distančně-nestabilním svazu.

Pak $(x, y) \leftrightarrow (y', x) \leftrightarrow (x, y')$, kde prvek y byl přesunut po cestě délky n do prvku x a zároveň byl prvek x přesunut o vzdálenost n nahoru, do prvku y' . Zřejmě $y' > y$ a $d(y, y') = n - m$. Tedy v distančně-nestabilních svazech může dojít k tomu, že dva prvky z jednoho bloku jsou od sebe vzdáleny v určité vzdálenosti, v našem případě $n - m$, respektive jeho celočíselného násobku. Načež mezi těmito dvojicemi jsou dvojice z jiných bloků.



Obrázek 35: Svaz L_3 .

Například pro svaz L_3 z Obrázku 35 platí, že $n = 4$ a $m = 2$, čímž by tedy nejmenší vzdálenost mezi dvojicemi ze stejného bloku měla být rovna 2. Pro názornost, kromě čtyř speciálních bloků (nejmenšího, atomárního, koatomárního a největšího), máme ještě další dva bloky (až na symetrii).

$$[(0, d)] = \{(0, d), (1, b), (a, c), (b, c), (c, d)\}$$

$$[(0, 1)] = \{(0, 1), (0, c), (d, d), (1, c), (a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, c)\}$$

Odtud vidíme, že pro dvojice $(0, d), (c, d) \in [(0, d)]$ a $(b, d), (d, d) \in [(0, 1)]$ platí nerovnosti $(0, d) \leq (b, d) \leq (c, d) \leq (d, d)$, takže bloky $[(0, d)]$ a $[(0, 1)]$ vyplňují mezeru mezi atomárním a koatomárním blokem, přičemž jejich uspořádání je na přeskáčku (viz Obrázek 36). Navíc pro vzdálenosti v bloku $[(0, 1)]$ platí

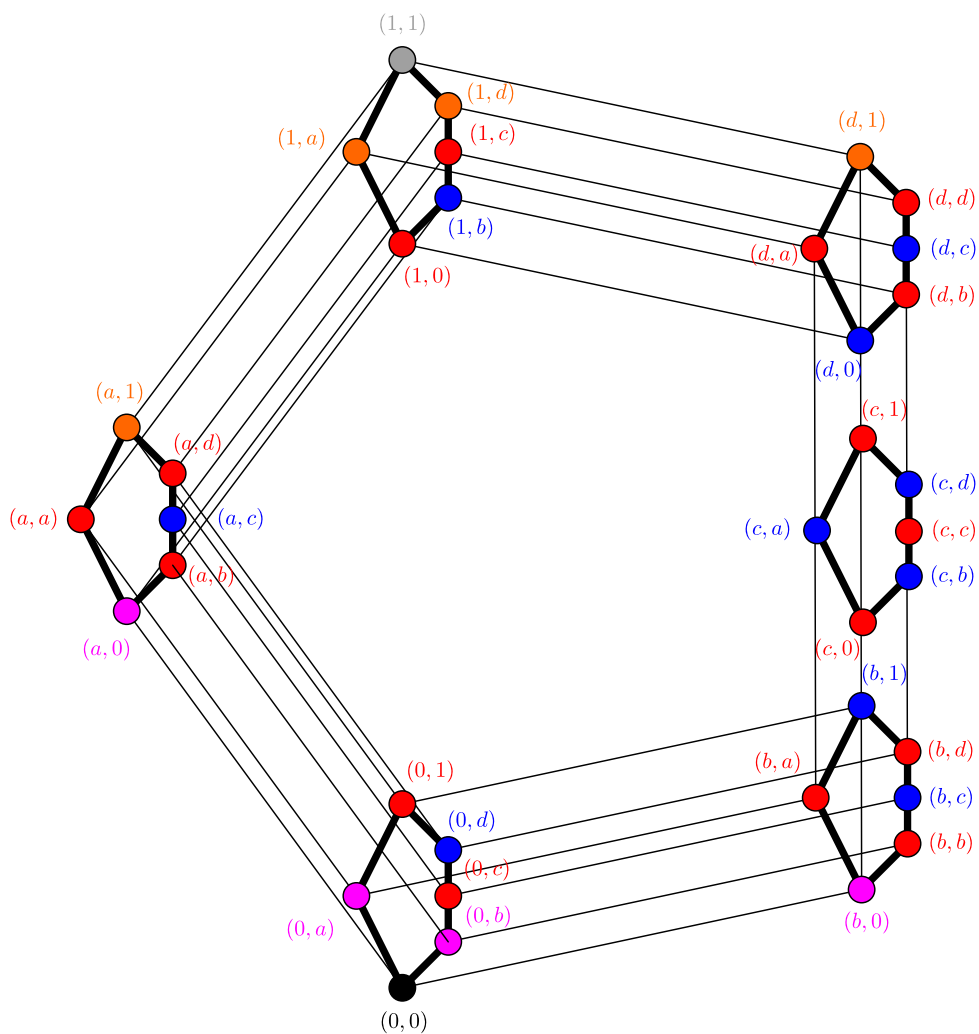
$$d((0, c), (1, c)) = d(0, 1) + d(c, c) = 2 + 0 = 2$$

$$D((0, c), (1, c)) = d(0, 1) + d(c, c) = 4 + 0 = 4$$

$$d((b, b), (d, a)) = \text{NELZE}$$

$$d((0, c), (d, d)) = d(0, d) + d(c, d) = 3 + 1 = 4$$

$$d((b, d), (c, 1)) = d(b, c) + d(d, 1) = 1 + 1 = 2,$$



Obrázek 36: Druhá mocnina svazu L_3 .

čili jak nejmenší nebo největší vzdálenosti mezi dvěma dvojicemi ze stejného bloku buď neexistují, anebo jsou násobkem dvojky.

Celkem tedy bloky v libovolném konečném svazu mohou být buď lineárně uspořádané, jak jsme to mohli vidět ve všech předchozích příkladech, anebo střídavě neuspořádané, viz minulý příklad se svazem L_3 . Přesnější definice střídavého uspořádání zní, že pro každé dva bloky $A, B \subseteq L^2$ druhé moc-

niny existují $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in A, \mathbf{b} \in B$ takové, že $\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{a}'$. Zřejmě, jestliže jsou bloky neuspořádané, pak existují prvky $x, y, z \in L, x \leq y \leq z$ takové, že $(0, x), (0, z) \in A$ and $(0, z) \in B$. Zkombinováním této myšlenky a Věty 3.15 dostaneme uspořádání bloků v distančně-stabilním svazu.

VĚTA 3.23. *Transferově-stabilní bloky jsou v každém distančně-stabilním svazu lineárně uspořádané.*

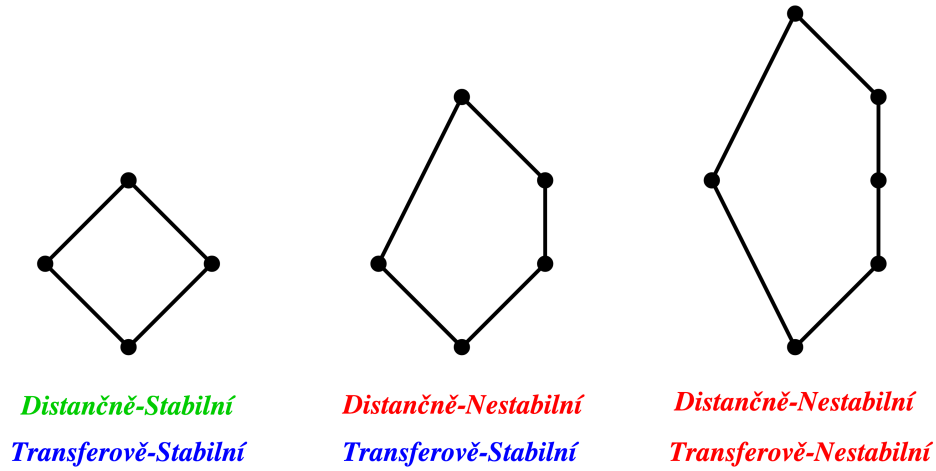
Přirozená otázka zní, jestli existují další svazy, jež by měly taktéž lineárně uspořádané bloky. Přímou odpovědí je Příklad 3.22, kde pentagon je distančně-destabilní, ale jeho bloky jsou lineárně uspořádané, tj.

$$[(0, 0)] \leq [(0, a)] \leq [(0, 1)] \leq [(1, a)] \leq [(1, 1)].$$

Na základě této skutečnosti se budeme dále zabývat svazy, jež mají právě lineárně uspořádané bloky. Přesněji, jaké svazy, kromě distančně-stabilních, mají zmíněné uspořádání bloků. Nejdříve definujeme takovou třídu svazů a posléze se budeme zabývat její charakterizací.

DEFINICE 3.24. Konečný svaz L se nazývá *transferově-stabilní*, jestliže (transferově-stabilní) bloky v jeho druhé mocnině L^2 jsou lineárně uspořádané.

Okamžitý důsledek zní, že každý distančně-stabilní svaz je transferově-stabilním svazem. Obráceně to samozřejmě neplatí, neboť jsme již narazili na všechny tři možnosti, jež mohou nastat pro libovolný konečný svaz. Čtyřprvkové svazy z Obrázku 27 jsou distančně-stabilní a zároveň i transferově-stabilní. Pentagon na Obrázku 33 je distančně-destabilní, ale je transferově-stabilní. Posledním příkladem je svaz L_3 (viz Obrázek 35), který je distančně-destabilním a zároveň i transferově-destabilním. Celkový rozdíl je znázorněn na Obrázku 37.

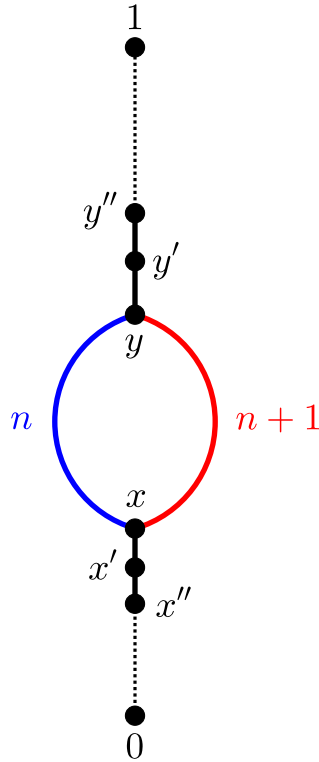


Obrázek 37: Transferově-stabilní a nestabilní svazy.

Nejdříve začneme s nejjednodušším typem distančně-nestabilních svazů, což je případ, kdy existují pouze dvě různé vzdálenosti mezi nejmenším a největším prvkem svazu rozdílné o 1, tj. $|\mathcal{D}_{01}| = 2$ a $n, n + 1 \in \mathcal{D}_{01}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Dokážeme, že takový svaz je transferově-stabilní. K onomu důkazu využijeme následující Lemma 3.25 pojednávající o tvaru centrálního bloku za předpokladu existence dvou prvků s rozdílnou vzdáleností mezi nimi o 1.

LEMMA 3.25. *Jestliže $n, n + 1 \in \mathcal{D}_{xy}$ pro nějaké $x, y \in L$, $x \leq y$ a $n \in \mathbb{N}$, pak $(x, y), (0, y), (1, x) \in [(0, 1)]$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $n, n + 1 \in \mathcal{D}_{xy}$. Pak $(x, y) \leftrightarrow (x, y')$, kde $y \prec y'$ takové, že $x \uparrow^{n+1} = y'$ a $y \downarrow_{n+1} = x$, kde symbol \uparrow^{n+1} (resp. \downarrow^{n+1}) označuje pohyb nahoru (resp. dolů) o $n + 1$ prvků. Podobně $(x, y') \leftrightarrow (x, y'')$, kde $y' \prec y''$ takové, že $x \uparrow^{n+2} = y''$ a $y' \downarrow_{n+2} = x$. Opakováním tohoto kroku dostaneme, že dvojice (x, y) a $(x, 1)$ náleží do stejného bloku (viz Obrázek 38).

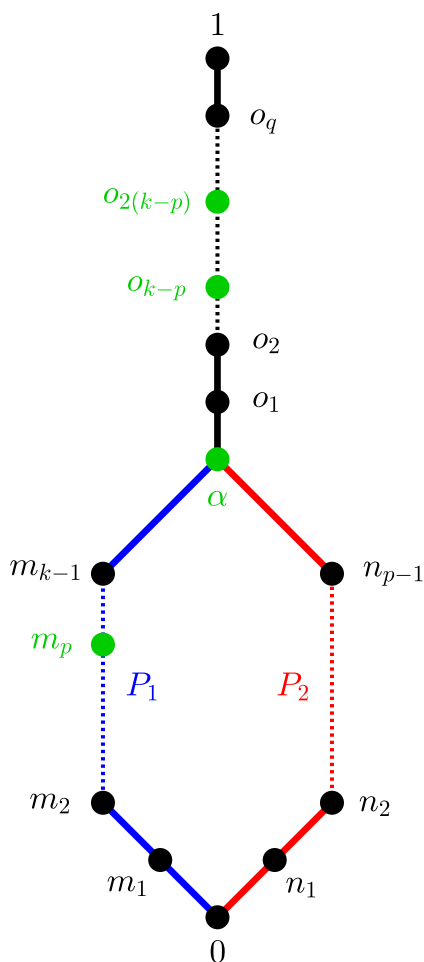


Obrázek 38: Myšlenka důkazu v Lemma 3.25.

Naopak, použitím přesunů $x \uparrow^{n+1} = y$ a $y \downarrow_{n+1} = x'$, kde $x' \prec x$, se z dvojice (x, y) dostaneme do dvojice (x', y) . Analogicky jako výše, jsou dvojice (x, y) a $(0, y)$ transferově ekvivalentní. Zkombinováním obou těchto kroků dostaneme dvojici $(0, 1)$, přesněji užitím prvního (resp. druhého) odstavce na dvojici $(0, y)$ (resp. $(x, 1)$) obdržíme dvojici $(0, 1)$. \square

V této chvíli se ještě jednou vrátíme k chování bloků v konečných svazech a poukážeme na hlavní rozdíl mezi distančně-stabilními a distančně-nestabilními svazy. V distančně-stabilních svazech jsou všechny dvojice ve stejném bloku stejně vzdálené od nejmenšího prvku podle Důsledku 3.16. Avšak, jak již víme z několika příkladů, tato vlastnost není zachována v distančně-nestabilních svazech. Na druhou stranu jsme již viděli, že i v tomto pří-

padě dochází k jakési pravidelnosti ohledně srovnatelných dvojic ve stejném bloku. Tuto myšlenku více objasníme na svazu L znázorněném na Obrázku 39.



Obrázek 39: Vzdálenost mezi srovnatelnými dvojicemi ve stejném bloku.

V předchozím textu jsme již na podobné téma upozornili, takže snadno můžeme vidět, že platí

$$(0, m_p) \leftrightarrow (0, \alpha) \leftrightarrow (0, o_{k-p}) \leftrightarrow (0, o_{2(k-p)}) \leftrightarrow \dots$$

Navíc vzdálenost, po řadě, mezi dvojicemi je rovna $k - p$. To potvrzuje myšlenku, že vzdálenost mezi srovnatelnými dvojicemi stejného bloku je rovna celočíselnému násobku rozdílu velikosti libovolných cest mezi některými prvky svazu, přesněji mezi nejmenším a největším prvkem svazu. Toto pravidlo platí i v případě existence vícero cest různých vzdáleností, ale v tomto případě půjde o zjištění nejmenší vzdáleností (až na nulovou) mezi dvojicemi stejného bloku, načež zde bude hrát roli největší společný dělitel, což bude mít i souvislost s charakterizací transferově-stabilních svazů.

Co se ale týče našeho případu, tak dále platí, že $(0, m_i) \leftrightarrow (0, \alpha)$ pro všechna $i \in \{p + 1, \dots, k - 1\}$, to znamená, že každá dvojice tvaru $(0, m_i)$, $i \in \{p + 1, \dots, k - 1\}$ reprezentuje jiný blok. Jinak řečeno nám to vlastně říká, kolik bloků se bude vzájemně střídat v případě svazu, jenž má neuspořádané bloky. To jsme mohli vidět u svazu L_3 na Obrázku 36, kde byl rozdíl cest roven 2, čímž se tedy vzájemně střídaly dva bloky (červený a modrý). Odtud taktéž pramení, proč nám později půjde o zjištění nejmenší vzdálenosti pomocí nejmenšího společného dělitele zmíněného v předchozím odstavci, neboť tímto určíme počet takových vzájemně se střídajících bloků.

Vrátíme-li se k původní myšlence z Lemmatu 3.25 s rozdílem dvou cest rovným 1, tj. $k = p - 1$, dostaneme $[(0, m_k)] = [(0, 1)]$. Nuže, pokud nastane rovnost bloků $[(0, m_i)] = [(0, m_j)]$, pak nezbytně $j = i + 1$. V takovém případě jsou bloky lineárně uspořádané, jak popisuje následující Lemma 3.29, což zároveň dokazuje Větu 3.30 ohledně vztahu mezi rozdílem vzdáleností rovným 1 a transferově-stabilními svazy.

Avšak ještě předtím, než se ke zmíněným tvrzením dostaneme, definujeme dva typy důležitých prvků v konečném svazu, které pomohou vytvořit všechny bloky v transferově-stabilním svazu.

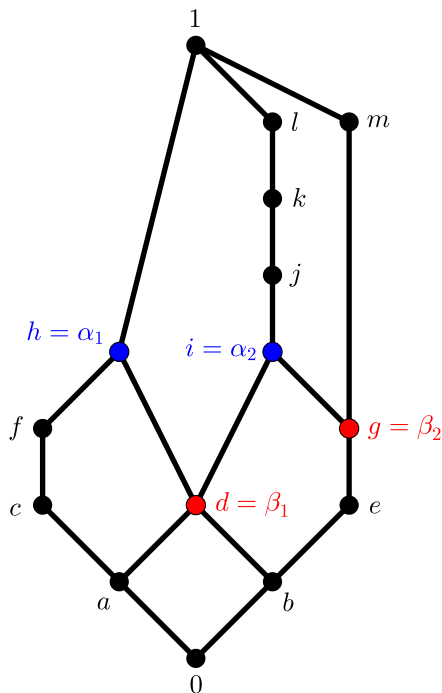
DEFINICE 3.26. Prvek α se nazývá *první nestabilní prvek vzhledem k 0*, jestliže množina $\mathcal{D}_{0\alpha}$ není jednoprvková, ale množina $\mathcal{D}_{0\gamma}$, pro každé $\gamma \in L$ takové, že $d(0, \gamma) < d(0, \alpha)$, je jednoprvková.

Podobně, prvek β se nazývá *první nestabilní prvek vzhledem k 1*, jestliže množina $\mathcal{D}_{\beta 1}$ není jednoprvková, ale množina $\mathcal{D}_{\gamma 1}$, pro každé $\gamma \in L$ takové, že $d(\gamma, 1) < d(\beta, 1)$, je jednoprvková.

Definici 3.26 můžeme říci i jinak a to tak, že první nestabilní prvek vzhledem k 0 (resp. 1) je první prvek v nejmenší vzdálenosti od nejmenšího (resp. největšího) prvku, u kterého dochází k rozdílnosti mezi nejmenší a největší vzdáleností od nejmenšího (resp. největšího) prvku. Nadto jsme nic neříkali o tvaru svazu L , pro které uvažujeme nestabilní prvky, ale je jasné, že v distančně-stabilním svazu nestabilní prvky neexistují, čímž tedy výše zmíněná definice a jakékoli další tvrzení, uvažující nestabilní prvky, je nutno brát v potaz pouze nad distančně-nestabilními svazy.

POZNÁMKA 3.27. První nestabilní prvek vzhledem k 0 (resp. 1) není jednoznačně určen, tj. takových prvků může ve svazu existovat více, ale v pozdějších úvahách nebude záležet na výběru prvku.

PŘÍKLAD 3.28. Na příkladu svazu L_4 (viz Obrázek 40) nastíníme definici prvních nestabilních prvků z Definice 3.26.



Obrázek 40: Vyznačení nestabilních prvků vzhledem k 0 i 1 ve svazu L_4 .

Podle oné definice hledáme prvek v nejmenší vzdálenosti od nejmenšího prvku 0 takový, že do něj existují cesty dvou různých vzdáleností. Začneme postupně.

Do atomu vždy existuje pouze jedna cesta délky 1, takže nutně platí $d(0, a) = d(0, b) = 1$, a zároveň $\mathcal{D}_{0a} = \mathcal{D}_{0b} = \{1\}$.

Další uvažované prvky c, d, e jsou ve vzdálenosti 2 od nejmenšího prvku, ale co je důležitější, jsou jejich množiny všech vzdáleností, po řadě k jednotlivým prvkům, $\mathcal{D}_{0c} = \mathcal{D}_{0d} = \mathcal{D}_{0e} = \{2\}$, které jak vidno jsou jednoprvkové, čímž tedy ani jeden ze zmíněných prvků stále není prvním nestabilním prvkem vzhledem k 0.

Prvky v nejmenší vzdálenosti 3 od prvku 0 jsou f, h, i, g , načež nastanou dva případy $\mathcal{D}_{0f} = \mathcal{D}_{0g} = \{3\}$ a $\mathcal{D}_{0h} = \mathcal{D}_{0i} = \{3, 4\}$. Odtud tedy můžeme vidět, že v prvcích h a i nastala nestabilita, co se počtu různých cest týče, a proto se jedná o první nestabilní prvky vzhledem k 0, to jest $h = \alpha_1$ a $i = \alpha_2$. Navíc lze velmi snadno nahlédnout, že dvojice $(0, \alpha_1)$ a $(0, \alpha_2)$ náleží stejnému bloku, a tudíž nezáleží na volbě prvního nestabilního prvku. Ještě poznamenejme, že i přesto, že prvky f a g mají stále jednotnou vzdálenost, tak dvojice $(0, f)$ a $(0, g)$ také tvoří stejný blok, který je stejný s blokem $[(0, \alpha_1)]$.

Zcela analogicky můžeme najít první nestabilní prvky vzhledem k 1. Podobně jako s atomy, tak i do koatomů vede jen jedna cesta, čili první možné prvky, kde může nastat nestabilita, jsou až ve vzdálenosti 2 od největšího prvku. To znamená, že v některém z prvků f, d, k , anebo g by mohla nastat nestabilita, k čemuž opravdu došlo, protože $\mathcal{D}_{0d} = \mathcal{D}_{0g} = \{2, 5\}$. Tedy prvky d a h jsou první nestabilní prvky vzhledem k 1, tj. $d = \beta_1$ a $g = \beta_2$, přičemž opět platí, že $(1, \beta_1) \leftrightarrow (1, \beta_2) \leftrightarrow (1, f) \leftrightarrow (1, k)$, tj. tvoří stejný blok $[(1, \beta_1)]$.

Než se pustíme dále, na příkladu svazu L_4 můžeme vidět, že splňuje onu myšlenku s rozdílem vzdáleností rovným 1, a mělo by se tedy jednat o transferově-stabilní svaz. Podíváme-li se blíže, všechny bloky jsou

$$[(0, 0)]; [(0, a)]; [(0, d)]; [(0, 1)]; [(1, m)]; [(1, 1)].$$

Výše zmíněné bloky $[(0, h)]$ a $[(1, g)]$ se spojily s centrálním blokem, protože $(0, h) \leftrightarrow (1, 0)$ a $(1, g) \leftrightarrow (0, 1)$. Kromě toho ve svazu L_4 platí kupříkladu $(1, j) \leftrightarrow (a, 1) \leftrightarrow (1, 0)$ nebo $(1, i) \leftrightarrow (0, 1)$, což má za následek, že v tomto případě opravdu nemůže nastat žádné vzájemné přehazování (neuspořádanost) bloků, protože centrální blok všechno „pohltní“ do sebe.

LEMMA 3.29. *Nechť prvky $\alpha, \beta \in L$ jsou po řadě první nestabilní prvky vzhledem k 0 a 1 konečného transferově-stabilního distančně-nestabilního svazu L . Předpokládejme, že cesta $P = \{0, a_1, \dots, a_p, \alpha\}$ je nejkratší cestou mezi nejmenším prvkem svazu L a prvním nestabilním prvkem α vzhledem k 0, a zároveň cesta $Q = \{\beta, b_1, \dots, b_r, 1\}$ je nejkratší cestou mezi největším prvkem svazu L a prvním nestabilním prvkem β vzhledem k 1, přičemž platí rovnosti $d(0, \alpha) = p + 1$ a $d(1, \beta) = r + 1$. Pak následující bloky*

$$\begin{aligned} & [(0, 0)], [(0, a_1)], \dots, [(0, a_p)] \\ & [(0, 1)] \\ & [(1, b_1)], \dots, [(1, b_r)], [(1, 1)] \end{aligned}$$

jsou všechny navzájem různé bloky svazu L s celkovým počtem rovným číslu $d(0, \alpha) + 1 + d(1, \beta)$.

Důkaz. Nechť $(x, y) \in L^2$. Předpokládejme bez újmy na obecnosti platnost $(x, y) \leftrightarrow (0, y')$ pro nějaké $y' \in L$. (Analogicky, případ $(x, y) \leftrightarrow (1, y')$ pro nějaké $y' \in L$.) Pak mohou nastat dvě možnosti:

- 1) Jestliže $d(0, y') < d(0, \alpha)$, pak existuje $a_i, i \in \{1, \dots, p\}$ takové, že $(x, y) \leftrightarrow (0, y') \leftrightarrow (0, a_i)$.
- 2) Jestliže $d(0, y') \geq d(0, \alpha)$, pak nutně $(0, y') \leftrightarrow (0, 1)$ musí být splněno, jinak by blok $[(0, y')]$ byl nesrovnatelný s blokem $[(0, 1)]$, což není možné v transferově-stabilních svazech.

Ve druhé části dokážeme, že všechny bloky jsou různé. Je splněno, že bloky $[(0, a_i)] \neq [(0, a_j)]$, $i, j \in \{1, \dots, p\}$, $i \neq j$, protože $\mathcal{M} = (M, \wedge)$, kde $M = \{x \in L \mid d(0, x) < d(0, \alpha)\}$ je distančně-stabilní průsekový polosvaz. Analogicky bychom dostali distančně-stabilní spojový polosvaz. Na základě těchto distančně-stabilních polosvazů platí i nerovnost $[(0, a_p)] \neq [(0, 1)]$. \square

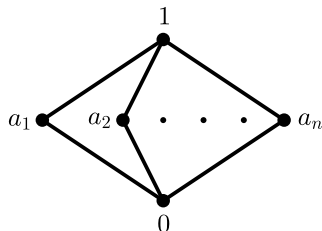
Jinými slovy nám Lemma 3.29 říká, že v distančně-stabilní části svazu, buď od nejmenšího prvku 0, anebo od největšího prvku 1, se bloky chovají stejně jako u distančně-stabilních svazů. Zbylá část je plně daná centrálním blokem, to znamená, že v transferově-stabilních distančně-destabilních svazech je blok $[(0, \alpha)]$ prvním, jenž tvoří centrální blok, načež blok $[(0, \beta)]$ je posledním, jenž uzavírá centrální blok, kde α a β jsou po řadě první nestabilní prvky vzhledem k 0 a 1.

VĚTA 3.30. *Nechť L je konečný svaz a předpokládejme, že existují prvky $a, b \in L$ takové, že $n, n + 1 \in \mathcal{D}_{ab}$. Pak L je transferově-stabilní svaz.*

3.4 Konstrukce transferově-stabilního svazu

Použitím právě zmíněné Věty 3.30 můžeme jednoduše vytvořit transferově-stabilní svaz z transferově-destabilního svazu. Následující konstrukce předpokládá, že $D(0, 1) \geq 3$, jinak by totiž nastaly dvě možnosti:

- 1) Jestliže $D(0, 1) = 1$, pak svaz L je dvouprvkovým řetězcem, což je distančně-stabilní svaz, a tedy i transferově-stabilní svaz.
- 2) Jestliže $D(0, 1) = 2$, pak svaz L je tzv. *n-dimenzionální diamant* (viz Obrázek 41), což je taktéž distančně-stabilní svaz, čili i transferově-stabilní svaz.

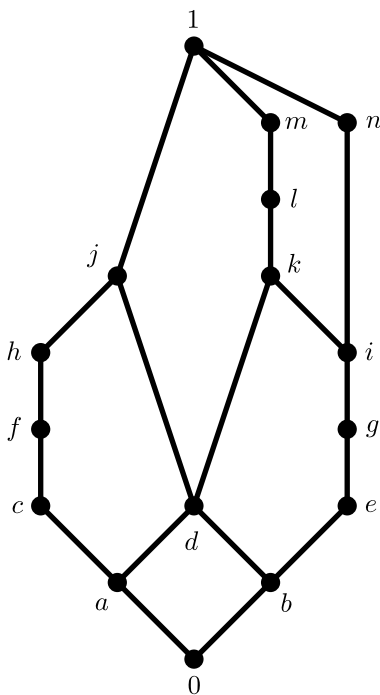


Obrázek 41: *n*-dimenzionální diamant.

Tudíž v transferově-nestabilním svazu L existuje prvek $a \in L$ takový, že $3 \in \mathcal{D}_{0a}$, čímž tedy dle Věty 3.30 přidáme prvek c do svazu L tak, že prvek c je atomem svazu L a platí $c \prec a$. Nově vytvořený svaz označíme symbolem L_c splňující $2, 3 \in \mathcal{D}_{0a}$, odkud s využitím Věty 3.30 máme okamžitý důsledek.

DŮSLEDEK 3.31. *Svaz L_c je transferově-stabilní.*

PŘÍKLAD 3.32. Na následujícím příkladu svazu L_5 (viz Obrázek 42) ukážeme platnost Důsledku 3.31.

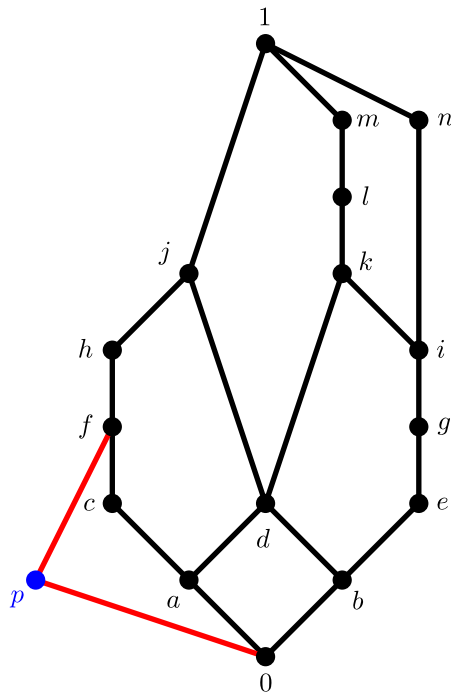


Obrázek 42: Transferově-nestabilní svaz L_5 .

Nejprve potvrdíme transferovou-nestabilitu svazu L_5 . Prvním krokem je určení prvních nestabilních prvků vzhledem k 0 a 1. V našem případě se jedná o prvky j a k , které jsou nestabilní vzhledem k 0 a na druhou stranu, prvky d a i jsou nestabilní vzhledem k 1, čili podle Lemmatu 3.29 můžeme říci, jak vypadá začátek i konec množiny všech bloků svazu L_5 podle principu distančně-stabilních svazů. Bloky $[(0, 0)]$, $[(0, a)]$, $[(0, c)]$ jsou první tři bloky množiny všech bloků druhé mocniny svazu L_5 . Naopak, bloky $[(1, j)]$, $[(1, 1)]$ jsou poslední dva bloky téže množiny. Zbývá ukázat, jestli mezi bloky $[(0, c)]$ a $[(1, j)]$ je pouze centrální blok, anebo je více bloků, jež se vzájemně střídají. Ještě poznamenejme fakt, že $\mathcal{D}_{01} = \{4, 6, 8\}$, což tedy nesplňuje předpoklady Věty 3.30, a tedy už máme mírnou nápovědu v tom, že svaz L_5 nemusí být transferově-stabilní. Nicméně věta není charakterizací transferově-stabilních svazů.

Vidíme, že mezera je vyplněna bloky $[(0, j)]$ a $[(0, 1)]$, protože například $(0, j) \leftrightarrow (1, a) \leftrightarrow (0, m) \leftrightarrow (k, 0)$, zatímco $(0, h) \leftrightarrow (1, 0) \leftrightarrow (0, l) \leftrightarrow (i, 0)$, čili dvojice $(0, k), (0, m) \in [(0, j)]$ a zároveň dvojice $(0, l), (0, i) \in [(0, 1)]$, kde $(0, i) \leq (0, k) \leq (0, l)$. Dokázali jsme tedy, že svaz L_5 je transferově-nestabilní.

Nyní můžeme použít Důsledek 3.31 a vytvořit tak z transferově-nestabilního svazu L_5 transferově-stabilní svaz. Vše, co k tomu potřebujeme, je nový prvek p , jenž přidáme do svazu L_5 jakožto nový atom pokrytý například prvkem f , čímž obdržíme nový svaz L_{5p} (viz Obrázek 43).



Obrázek 43: Transferově-stabilní svaz L_{5p} .

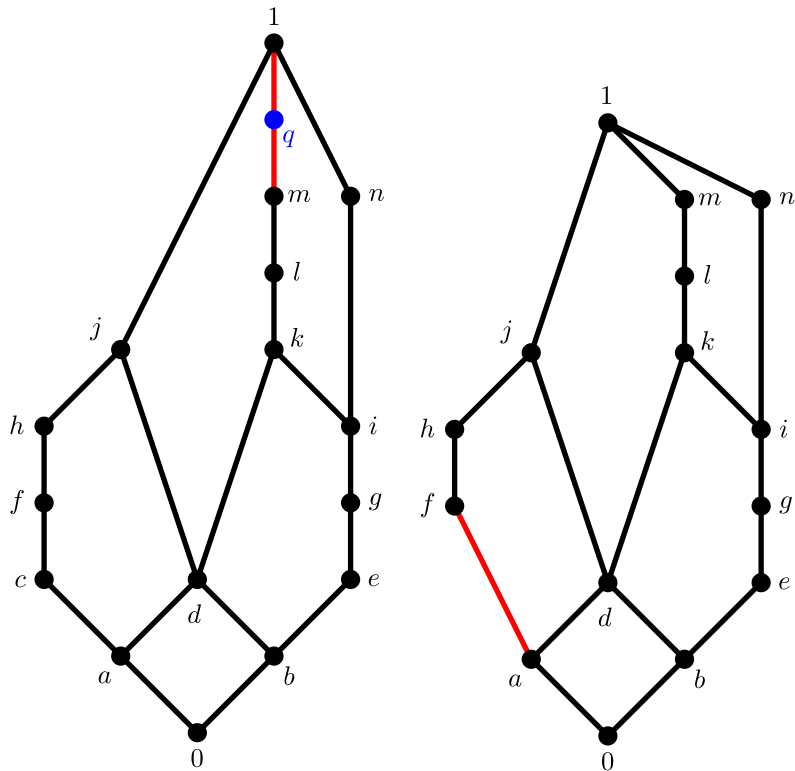
Tato úprava svazu L_5 přinesla nové změny, kterými jsou vzdálenosti mezi nejmenším a největším prvkem, tj. $\mathcal{D}_{01} = \{4, 5, 6, 8\}$, a dále došlo k záměně prvního nestabilního prvku vzhledem k 0, to znamená, že prvek j je sice stále nestabilním prvkem vzhledem k 0, ale již není prvním. Místo něho se stal prvním nestabilním prvkem vzhledem k 0 prvek f , což má za následek i změnu bloků. První dva bloky jsou $[(0, 0)]$, $[(0, a)]$ a poslední dva bloky jsou $[(n, 1)]$, $[(1, 1)]$.

Podle Věty 3.30 již víme, že svaz L_{5_p} je transferově-stabilní, tudíž meze­ra je vyplněna pouze a jenom centrálním blokem, protože

$$\begin{array}{cccccccc}
(0, f) & \leftrightarrow & (c, 0) & \leftrightarrow & (0, d) & \leftrightarrow & (e, 0) & \\
& & \leftrightarrow & (h, 0) & \leftrightarrow & (0, j) & \leftrightarrow & (k, 0) & \leftrightarrow & (0, g) \\
& & \updownarrow & & & & & & & \\
& & (\mathbf{0}, \mathbf{1}) & \leftrightarrow & (l, 0) & \leftrightarrow & (0, i) & & & \\
& & & & \updownarrow & & & & & \\
& & & & (1, b) & \leftrightarrow & (0, m) & \leftrightarrow & (n, 0) & \\
& & & & \updownarrow & & & & & \\
(\mathbf{0}, \mathbf{1}) & \leftrightarrow & (1, a) & \leftrightarrow & (b, 1) & \leftrightarrow & (g, 1) & \leftrightarrow & (1, k) & \leftrightarrow & (f, 1) \\
& & \leftrightarrow & (p, 1) & \leftrightarrow & (1, c) & \leftrightarrow & (d, 1) & \leftrightarrow & (1, i) & \leftrightarrow & (e, 1) \\
& & & & & & & & & \updownarrow & & \\
& & & & & & & & & (l, 1) & \leftrightarrow & (1, h),
\end{array}$$

a tedy neexistuje žádný jiný blok v dané mezeře kromě centrálního bloku.

POZNÁMKA 3.33. K transformaci transferově-stabilního svazu nemusíme nutně používat jen atom, jakožto přidání prvku, ale existuje mnoho způsobů, jak vytvořit transferově-stabilní svaz. Nyní je nutné, aby v novém svazu byl splněn předpoklad Věty 3.30, tedy například svazy L_{5_q} a L_{5_c} (viz Obrázek 44), kde jsme v prvním případě přidali prvek q tak, aby vznikly dvě cesty s rozdílem 1, a u druhého svazu jsme odebrali prvek c .



Obrázek 44: Transferově-stabilní svazy L_{5_q} a L_{5_c} .

3.5 Charakterizace transferově-stabilních svazů

Vraťme se k pravidelné a vzájemné rotaci (neuspořádaných) bloků v transferově-nestabilních svazech. Necht' L je transferově-nestabilní svaz a předpokládejme existenci navzájem různých bloků M, M_1, \dots, M_n obsahujících po řadě dvojice

$$(x, y), (x', y') \in M, (x_1, y_1) \in M_1, \dots, (x_n, y_n) \in M_n$$

splňující

$$(x, y) \leq (x_1, y_1) \leq \dots \leq (x_n, y_n) \leq (x', y').$$

Dále, ve svazu L existuje m různých cest P_1, \dots, P_m z množiny $\text{Path}L$ uspořádaných od nejdelsí po nejkratší cestu svazu L . Z předchozího již víme, že skoky mezi bloky jsou uzpůsobené podle rozdílu dvou délek cest. Pokud je ale těchto cest více, pak je otázkou, který rozdíl vybrat, aby byl ten nejvhodnější. Ukazuje se, že výsledkem není ani jeden z rozdílů, nýbrž jejich největší společný dělitel. Pak pro počet vzájemně se střídajících neuspořádaných bloků platí

$$n = \text{NSD}(\|P_1\| - \|P_2\|, \|P_1\| - \|P_3\|, \dots, \|P_{m-1}\| - \|P_m\|) - 1,$$

kde největší společný dělitel (NSD) dvou či více kladných celých čísel je největší kladné celé číslo, které dělí všechna zadaná kladná celá čísla.

Užitím této myšlenky pro transferově-stabilní svazy ihned dostaneme požadovanou vlastnost, jež všechny tyto svazy charakterizuje, to znamená, že zaručí lineární uspořádání bloků. Přesněji, $M = M_1 = \dots = M_n$, čímž tedy $n = 0$.

TVRZENÍ 3.34. *Konečný svaz L je transferově-stabilní právě tehdy, když je distančně-stabilní, anebo existují cesty $P_1, P_2, P_3 \in \text{Path}L$ takové, že*

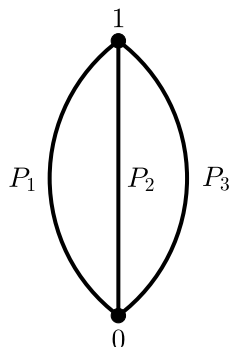
$$\text{NSD}(\|P_1\| - \|P_2\|, \|P_1\| - \|P_3\|, \|P_2\| - \|P_3\|) = 1.$$

Důkaz. V případě existence pouze dvou cest ve svazu L , tj. $P_1 = P_2$ a P_3 , obdržíme

$$\text{NSD}(0, \|P_1\| - \|P_3\|, \|P_1\| - \|P_3\|) = \|P_1\| - \|P_3\|,$$

odkud podle Věty 3.30 je nutné, aby $\|P_1\| - \|P_3\| = 1$.

Nyní předpokládejme, že svaz L je sestaven z cest P_1, P_2 a P_3 , to jest $L = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ (viz Obrázek 45). Označme $\|P_1\| = a$, $\|P_2\| = b$, $\|P_3\| = c$ a $\text{NSD}(a - b, a - c, b - c) = d$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a > b > c$.



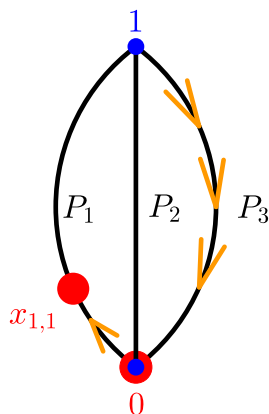
Obrázek 45: Svaz L .

V první části důkazu bude naším úkolem vytvořit cyklus \mathcal{C} obsahující dvojici $(0, x)$, $x \in P_1$ použitím transferové-stability. K tomu využijeme symbolu

$$(x, y) \overset{P}{\underset{Q}{\leftrightarrow}} (a, b)$$

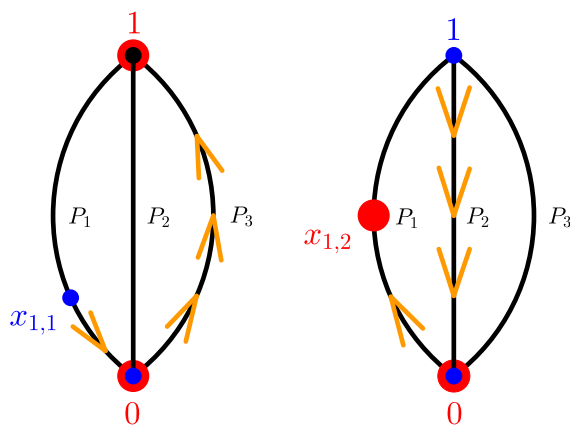
označující pohyb první složky po cestě P a druhé složky po cestě Q . Tedy konstrukce cyklu \mathcal{C} je následující:

1. $(0, 1) \xleftrightarrow[P_3]{P_1} (x_{1,1}, 0)$, kde $x_{1,1} \in P_1$ a $d(0, x_{1,1}) = c$.



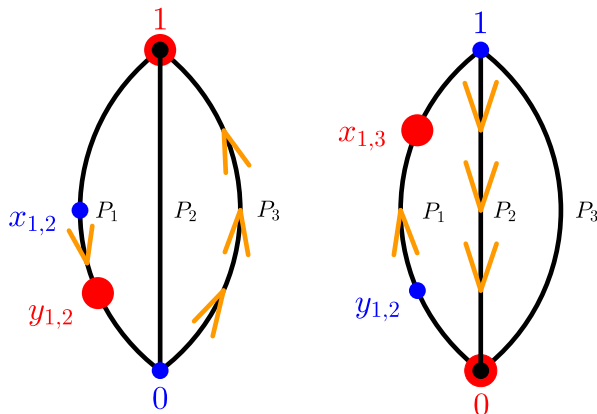
Obrázek 46: Pohyb v kroku 1.

2. $(x_{1,1}, 0) \xleftrightarrow[P_3]{P_1} (0, 1) \xleftrightarrow[P_2]{P_1} (x_{1,2}, 0)$, kde $x_{1,2} \in P_1$ a $d(x_{1,1}, x_{1,2}) = b - c$.



Obrázek 47: Pohyb v kroku 2.

3. $(x_{1,2}, 0) \xleftrightarrow[P_3]{P_1} (y_{1,2}, 1) \xleftrightarrow[P_2]{P_1} (x_{1,3}, 0)$, kde $y_{1,2}, x_{1,3} \in P_1$ a $d(x_{1,2}, x_{1,3}) = b - c$.



Obrázek 48: Pohyb v kroku 3.

4. Opakováním kroku 3. se dostaneme až do dvojice $(0, x_{1,k})$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ s podmínkou $d(x_{1,k}, 1) < b - c$. Označme $\alpha = d(x_{1,k}, 1)$. Tudíž jsme vytvořili první třídu cyklu \mathcal{C} obsahující dvojice

$$(0, x_{1,1}), (0, x_{1,2}), \dots, (0, x_{1,k})$$

s vlastností

$$(0, x_{1,1}), (0, x_{1,2}), \dots, (0, x_{1,k}) \in [(0, 1)].$$

5. V tomto kroku vytvoříme první prvek druhé třídy $(0, x_{2,1})$ cyklu \mathcal{C} . Použijeme postup z kroku 3. na dvojici $(0, x_{1,k})$, ale nedostaneme se do prvku 0 po cestě P_2 , protože $\alpha < b - c$, to znamená, že

$$(x_{1,k}, 0) \xleftrightarrow[P_3]{P_1} (y_{1,k}, 1) \xleftrightarrow[P_2]{P_1} (1, y),$$

kde $x_{1,k}, y_{1,k} \in P_1$, $y \in P_2$ a $d(0, y) = b - c - \alpha$ (viz Obrázek 49).

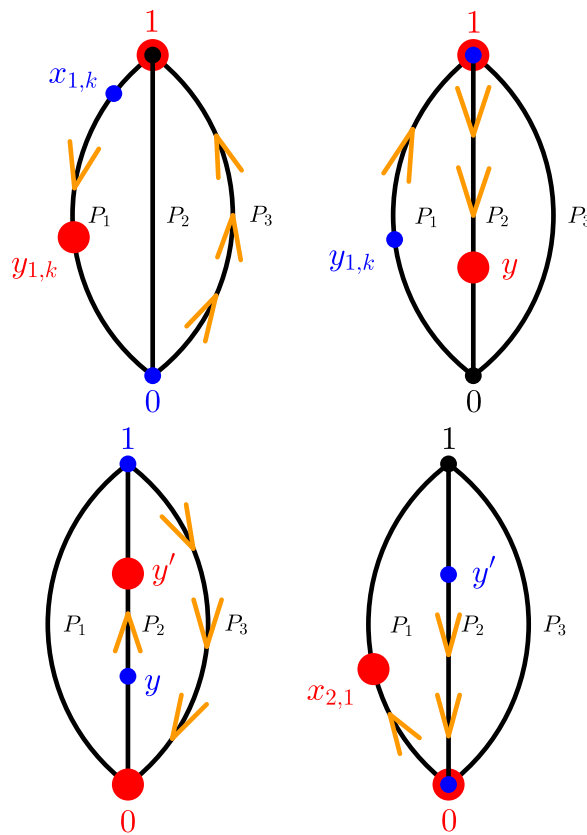
Dále

$$(1, y) \begin{matrix} \xrightarrow{P_3} \\ \xleftarrow{P_2} \end{matrix} (0, y'),$$

přičemž $y' \in P_2$ a $d(0, y') = b - \alpha$. V posledním kroku se vrátíme do cesty P_1 , tj.

$$(0, y') \begin{matrix} \xrightarrow{P_1} \\ \xleftarrow{P_2} \end{matrix} (x_{2,1}, 0),$$

kde $x_{2,1} \in P_1$ a $d(0, x_{2,1}) = b - \alpha$ (viz Obrázek 49).



Obrázek 49: Pohyb v kroku 5.

6. Aplikujeme krok 2. na dvojici $(0, x_{2,1})$.

7. Obdržíme druhou třídu cyklu \mathcal{C} použitím stejné metody jako v krocích 3. a 4., tj.

$$(0, x_{2,1}), (0, x_{2,2}), \dots, (0, x_{2,p}) \in [(0, 1)].$$

8. Cyklus \mathcal{C} končí, jakmile poslední dvojice nějaké třídy je rovna $(0, 1)$, tj. $(0, x_{n,m}) = (0, 1)$ pro některé $n, m \in \mathbb{N}$.

Cyklus \mathcal{C} můžeme také vyšetřit skrze třídy kongruencí zbytkových tříd, to znamená

$$\begin{aligned} d(0, x_{1,j}) &\equiv c \pmod{b-c} \\ d(0, x_{2,j}) &\equiv b-a+c \pmod{b-c} \\ d(0, x_{3,j}) &\equiv 2b-2a+c \pmod{b-c} \\ &\vdots \\ d(0, x_{n,j}) &\equiv (n-1)b-(n-1)a+c \pmod{b-c}. \end{aligned}$$

Všechna řešení i -té rovnice v intervalu $\langle c, a \rangle$ odpovídají prvkům v i -té třídě cyklu \mathcal{C} , přesněji, řešení jsou vzdálenosti od nejmenšího prvku 0. Navíc, aby všechny rovnice měly vzájemně různá řešení, musíme obdržet $(b-c)$ tříd.

Dokážeme, že je-li $d = 1$, pak cyklus \mathcal{C} obsahuje všechny dvojice $(0, x)$ pro $x_{1,1} \leq x \leq 1$, tj. počet všech dvojic je roven $a-c+1$. Platí, že počet všech prvků v jedné třídě je roven $\lceil \frac{a-c}{b-c} \rceil$ a počet všech tříd je roven $\frac{b-c}{d}$. Kdyby $d \neq 1$, pak

$$\left\lceil \frac{a-c}{b-c} \right\rceil \cdot \frac{b-c}{d} < a-c < a-c+1,$$

což znamená, že cyklus \mathcal{C} neobsahuje všechny dvojice. Tedy cyklus \mathcal{C} obsahuje všechny dvojice jen v případě $d = 1$.

Dokázali jsme, že dvojice ve specifické části I svazu L^2 náleží do centrálního bloku, a tyto dvojice se jedna po druhé pokrývají. Odtud má podle Věty 3.30 svaz L lineárně uspořádané bloky. Kdyby tomu tak nebylo, pak by existovala pravidelná mezera mezi bloky, a tedy by byla i mezera v části I , což ale není možné.

Obráceně, jestliže svaz L je transferově-stabilní, pak je buď distančně-stabilní, čímž je důkaz hotov, nebo existuje první nestabilní prvek α vzhledem k 0. Nechť $P_1, P_2 \in \text{Path}L$ jsou cesty takové, že $\alpha \in P_1, P_2$. Odtud $(0, \alpha), (0, \alpha_1), \dots, (0, \alpha_n) \in [(0, 1)]$, kde $\alpha \prec \alpha_1 \prec \dots \prec \alpha_n \prec 1$, pak existuje cesta P_3 splňující předpoklady Tvrzení 3.34, tj. $\text{NSD} = 1$. Kdyby taková cesta neexistovala, pak svaz L je transferově-nestabilní podle první části důkazu, což je ale spor s předpokladem. \square

3.6 k -ární transferově-stabilní agregační funkce

Nyní naše poznatky z binárních transferově-stabilních agregačních funkcí, respektive druhých mocnin distančně-stabilních a transferově-stabilních svazů, zobecníme do vyšších arit, respektive mocnin. Budeme studovat pouze ty „nejdůležitější“ vlastnosti, jež jsme dokázali pro binární případy a odhalíme tím jednoduchost vyšších arit, respektive mocnin, neboť stále můžeme využívat binárních vlastností, jelikož pohyb nahoru a dolů pomocí transferové stability je rozdělen právě na dvě složky, kde jedna se pohybuje nahoru a druhá dolů. Ukazuje se, že vícero složek není problémem.

Ze všeho nejdříve započneme zobecňování s distančně-stabilními svazy. Zaměříme se na Větu 3.15 a dokážeme, že i v případě k -árních transferově-stabilních agregačních funkcí lze bloky velmi jednoduše popsat. Následující věta pojednává o tom, jak vypadají bloky v distančně-stabilním svazu L^k .

VĚTA 3.35. *Nechť L je distančně-stabilní svaz a $P = \{0, a_1, \dots, a_n, 1\}$ je libovolná cesta z nejmenšího do největšího prvku svazu L . Pak*

$$[(x, \dots, x, y)]; [(x, \dots, x, y, y)]; \dots; [(x, y \dots, y)]; [(y \dots, y)],$$

kde $x, y \in P$, $x \preceq y$ jsou všechny navzájem různé bloky svazu L^k a jejich počet je roven $k \cdot d(0, 1) + 1$.

Důkaz. Nechť $(x_1, \dots, x_k) \in L^k$ a předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $(x_1, x_2) \leftrightarrow (0, x'_2)$ pro nějaké $x'_2 \in L$. V podobném duchu by byl důkaz prováděn pro případ $(x_1, x_2) \leftrightarrow (1, x'_2)$. Pak existují $y_i \in L$, $i = 2, \dots, k$ takové, že

$$(0, x'_2) \leftrightarrow (0, y_2)$$

$$(0, x_3) \leftrightarrow (0, y_3)$$

$$\vdots$$

$$(0, x_k) \leftrightarrow (0, y_k),$$

kde $y_i \in P$ pro $i = 2, \dots, k$, a tedy (aplikováním transferové-stability) můžeme přeuspořádat k -tici $(0, y_2, \dots, y_k)$ tak, že $(0, y_2, \dots, y_k) \leftrightarrow (0, z_2, \dots, z_k)$, přičemž $z_2 \leq z_3 \leq \dots \leq z_k$, $z_i \in P$ pro $i = 2, \dots, k$. Využitím znalostí z transferově-stabilních průměrů (viz [12]) obdržíme

$$(0, z_2, \dots, z_k) \leftrightarrow (x, \dots, x, y, \dots, y),$$

kde $x, y \in P$, $x \preceq y$.

Různorodost všech bloků, tj. každé dva bloky jsou vzájemně různé, také plyne z [12] a není potřeba nic více dokazovat.

V závěru dokážeme, že počet bloků je roven $k \cdot d(0, 1) + 1$. Pro pevné prvky $x, y \in P$, $x \prec y$ je počet bloků roven k , přičemž mohou nabýt právě těchto dvojic $(0, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, 1)$ a jejich počet nabude hodnoty $n + 1 = d(0, 1)$. Nakonec přidáme blok $[(0, \dots, 0)]$, jelikož jsme jej nezahrnuli do svých úvah. \square

PŘÍKLAD 3.36. Podle Věty 3.35 sestavíme všechny bloky pro třetí mocninu svazu L_2 z Obrázku 30. Nejprve zvolíme libovolnou cestu z nejmenšího do největšího prvku, a jak už víme, počet takových cest je 27, takže stačí zvolit jednu z nich. Například $P = \{0, a, c, e, h, j, k, n, 1\}$, načež $d(0, 1) = 8$. Tedy počet všech bloků v distančně-stabilním svazu L_2^3 je roven 25 a jejich výčet je následující

$$\begin{aligned} & [(0, 0, 0)]; [(0, 0, a)]; [(0, a, a)]; [(a, a, a)]; [(a, a, c)]; [(a, c, c)]; [(c, c, c)] \\ & [(c, c, e)]; [(c, e, e)]; [(e, e, e)]; [(e, e, h)]; [(e, h, h)]; [(h, h, h)]; [(h, h, j)] \\ & [(h, j, j)]; [(j, j, j)]; [(j, j, k)]; [(j, k, k)]; [(k, k, k)]; [(k, k, n)]; [(k, n, n)] \\ & [(n, n, n)]; [(n, n, 1)]; [(n, 1, 1)]; [(1, 1, 1)]. \end{aligned}$$

Pro ověření můžeme zvolit libovolnou trojici a upravit ji do vhodného tvaru dle generátorů výše vypsanych bloků. Kupříkladu

1. $(b, h, m) \leftrightarrow (d, e, m) \leftrightarrow (h, e, h) \leftrightarrow (e, h, h),$
2. $(a, b, n) \leftrightarrow (h, b, h) \leftrightarrow (e, d, h) \leftrightarrow (e, e, e),$
3. $(c, i, b) \leftrightarrow (c, a, h) \leftrightarrow (c, c, e),$
4. $(0, 0, 1) \leftrightarrow (h, 0, h) \leftrightarrow (c, c, h) \leftrightarrow (c, e, e),$
5. $(0, 1, 1) \leftrightarrow (h, h, 1) \leftrightarrow (h, k, k) \leftrightarrow (j, j, k).$

U binárních případů jsme blok $[(0, 1)]$ nazvali centrální. Nyní takových bloků máme více, jak můžeme vidět v kroku číslo 4. a 5., takže obecně podle počtu jedniček budeme takový blok nazývat *i-tý centrální blok* pro $i = \{1, \dots, k - 1\}$. Tedy blok $[(0, 0, 1)] = [(c, e, e)]$ je první centrální blok a blok $[(0, 1, 1)] = [(j, j, k)]$ je druhý centrální blok.

Kdybychom řešili dejme tomu pátou mocninu svazu L_2 , respektive 5-ární transferově-stabilní agregační funkci na svazu L_2 , pak dostaneme čtyři centrální bloky:

1. $[(0, 0, 0, 0, 1)] = [(a, a, c, c, c)]$, protože

$$(0, 0, 0, 0, 1) \leftrightarrow (0, 0, 0, h, h) \leftrightarrow (0, c, c, c, c) \leftrightarrow (a, a, c, c, c).$$

2. $[(0, 0, 0, 1, 1)] = [(e, e, e, e, h)]$, protože

$$(0, 0, 0, 1, 1) \leftrightarrow (0, h, h, h, h) \leftrightarrow (c, c, h, h, h) \leftrightarrow (e, e, e, e, h).$$

3. $[(0, 0, 1, 1, 1)] = [(h, j, j, j, j)]$, protože

$$(0, 0, 1, 1, 1) \leftrightarrow (h, h, h, h, 1) \leftrightarrow (h, h, h, k, k) \leftrightarrow (h, j, j, j, j).$$

4. $[(0, 1, 1, 1, 1)] = [(k, k, n, n, n)]$, protože

$$(0, 1, 1, 1, 1) \leftrightarrow (h, h, 1, 1, 1) \leftrightarrow (k, k, k, k, 1) \leftrightarrow (k, k, k, n, n).$$

Dokonce i v případě vyšších mocnin, respektive arit, můžeme zjistit, že bloky distančně-stabilního svazu L^k jsou jednotlivá pokrytí svazu L^k , tj. prvky daného bloku jsou ve stejné vzdálenosti od nejmenšího prvku svazu L^k . Tedy bloky v distančně-stabilním svazu L^k jsou lineárně uspořádané. Další důležitý poznatek je, že se zvyšující se aritou transferově-stabilní agregační funkce se zvyšuje počet bloků. Jinými slovy, počet bloků svazu L^k závisí

pouze na aritě transferově-stabilní agregační funkce. Nicméně, jak ukážeme později, tento jev platí pouze u distančně-stabilních svazů.

Již víme, že ze znalosti distanční-stability svazu L plyne distanční-stabilita svazu L^k podle Věty 3.11. Vzniká tedy otázka, jestli charakterizace distančně-stabilních svazů z Věty 3.18 platí obecně.

VĚTA 3.37. *Konečný svaz L je distančně-stabilní právě tehdy, když každý blok svazu L^k obsahuje pouze nesrovnatelné k -tice pro některé (a tedy pro každé) $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.*

Důkaz. Nechť L je distančně-stabilní svaz a B je blok v jeho k -té mocnině L^k . Dále předpokládejme existenci srovnatelných k -tic z bloku B , tudíž $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in B$, tj. $(x_1, \dots, x_k) \leq (y_1, \dots, y_k)$. Použitím stejné myšlenky jako ve Větě 3.35 existují k -tice (x'_1, \dots, x'_k) a (y'_1, \dots, y'_k) takové, že $(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow (x'_1, \dots, x'_k)$ a $(y_1, \dots, y_k) \leftrightarrow (y'_1, \dots, y'_k)$, přičemž prvky x'_i, y'_i , $i = 1, \dots, k$ náleží stejné cestě $P \in \text{Path}L$, a platí $x'_1 \leq \dots \leq x'_k$, $y'_1 \leq \dots \leq y'_k$.

Podle transferově-stabilních průměrů z [12] musí být splněna nerovnost $(x'_1, \dots, x'_k) \leq (y'_1, \dots, y'_k)$. Tedy (x'_1, \dots, x'_k) a (y'_1, \dots, y'_k) nenáležejí stejnému bloku, což je spor s předpokladem.

Opačnou implikaci dokážeme použitím negace, to znamená, jestliže svaz L je distančně-destabilní, pak existují k -tice $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^k$, $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ náležící stejnému bloku. Tudíž, nechť svaz L je distančně-destabilní. Pak existuje prvek $a \in L$ takový, že $d(0, 1) = d(0, a)$, a odtud máme $(0, \dots, 0, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, a)$, kde $(0, \dots, 0, a) \leq (0, \dots, 0, 1)$. Dokázali jsme, že v distančně-destabilním svazu L^k existuje blok, který obsahuje srovnatelné k -tice. \square

Vrátíme-li se k Příkladu 3.36, víme dle Věty 3.37, že každý ze zmíněných bloků, včetně centrálních bloků 5-ární transferově-stabilní agregační funkce, musí mít nesrovnatelné dvojice, neboť svaz L_2 je distančně-stabilní a jak již víme, i jeho druhá mocnina je distančně-stabilním svazem, čímž tedy libovolná přirozená mocnina je taktéž distančně-stabilním svazem.

U distančně-stabilních svazů bylo zobecnění zcela přirozené a platnost důkazů všech tvrzení byla očekávatelná. Ve druhé části se zaměříme na transferově-stabilní distančně-nestabilní svazy. Jako v předchozím případě se ze všeho nejdříve podíváme na výčet všech bloků pro tyto typy svazů. K důkazu využijeme následující Lemma 3.38 a Důsledek 3.39 zabývající se prvním centrálním blokem $[(0, \dots, 0, 1)]$.

LEMMA 3.38. *Nechť L je transferově-stabilní distančně-nestabilní svaz s nejdelší a nejkratší cestou*

$$P^{max} = \{0, c_1, \dots, c_n, 1\} \quad a \quad P^{min} = \{0, d_1, \dots, d_m, 1\},$$

tj. $D(0, 1) = n + 1$ a $d(0, 1) = m + 1$. Pak k -tice

$$(0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, 1, 1), \dots, (0, 0, 1, \dots, 1), (0, 1, \dots, 1)$$

náleží stejnému bloku.

Důkaz. Z toho, že důkaz je analogický pro všechny výše zmíněné k -tice, stačí dokázat, že k -tice $(0, \dots, 0, 1)$ a $(0, \dots, 0, 1, 1)$ náleží stejnému bloku.

1. $(0, \dots, 0, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, c_1, 1)$, kde $(0, 1) \leftrightarrow (c_1, 1)$, protože platí nerovnost $d(1, c_1) \geq d(1, \beta)$, přičemž β je první nestabilní prvek vzhledem k 1.
2. $(0, \dots, 0, c_1, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, d_1, 1)$, protože $(0, c_1) \leftrightarrow (0, d_1)$.

3. $(0, \dots, 0, d_1, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, c_i, 1)$, kde $(1, d_1) \leftrightarrow (1, c_i)$ pro nějaký index $i \in \{1, \dots, n\}$, protože $d(1, d_1) = d(1, c_i)$.

Pak mohou nastat dvě situace:

A) $(0, c_i) \in [(0, 1)]$, a tedy $(0, \dots, 0, c_i, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, 1, 1)$.

nebo

B) $d(0, c_i) < d(0, \alpha)$, kde α je první nestabilní prvek vzhledem k 0.

Pak existuje prvek $d_i \in P^{min}$ takový, že $(0, c_i) \leftrightarrow (0, d_i)$, a tudíž $(0, \dots, 0, c_i, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, d_i, 1)$. Následně

$$(0, \dots, 0, d_i, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, c_j, 1),$$

přičemž $(1, d_i) \leftrightarrow (1, c_j)$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$, protože platí rovnost $d(1, d_i) = d(1, c_j)$. Opět použijeme výše zmíněné situace

A) nebo B) pro k -tici $(0, \dots, 0, c_j, 1)$. Po konečném počtu kroků obdržíme $(0, c_p) \in [(0, 1)]$, $p \in \{1, \dots, n\}$, a tedy

$$(0, \dots, 0, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, 1, 1).$$

□

Právě dokázané Lemma 3.38 nám jinými slovy říká, že v případě transferově-stabilních distančně-nestabilních svazů dochází k propojení všech centrálních bloků.

Transferově-stabilním distančně-nestabilním svazem byl kupříkladu pentagon vyobrazený na Obrázku 33, kde nejdelší cesta je $P^{max} = \{0, b, c, 1\}$ a nejkratší cesta je $P^{min} = \{0, a, 1\}$. Dejme tomu, že $k = 5$, tedy uvažujeme

pátou mocninu pentagonu. Pak platí

$$\begin{aligned}
& (0, 0, 0, 0, 1) \leftrightarrow (0, 0, 0, 1, b) \leftrightarrow (0, 0, a, 1, 0) \leftrightarrow \\
& \leftrightarrow (0, 0, 1, c, 0) \leftrightarrow (0, 0, 1, 0, 1) \leftrightarrow (0, 0, 0, 1, 1) \leftrightarrow \\
& \leftrightarrow (0, 0, 0, 1, 1) \leftrightarrow (0, 0, 1, b, 1) \leftrightarrow (0, a, 1, 0, 1) \leftrightarrow \\
& \leftrightarrow (0, 1, c, 0, 1) \leftrightarrow (0, 1, 0, 1, 1) \leftrightarrow (0, 0, 1, 1, 1) \leftrightarrow \\
& \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (0, 1, 1, 1, 1).
\end{aligned}$$

To znamená, že

$$[(0, 0, 0, 0, 1)] = [(0, 0, 0, 1, 1)] = [(0, 0, 1, 1, 1)] = [(0, 1, 1, 1, 1)],$$

takže došlo ke spojení všech centrálních bloků, jinak řečeno v pentagonu, obecně transferově-stabilních distančně-nestabilních svazech, existuje pouze jeden centrální blok.

V následujícím Důsledku 3.39 uvidíme, že centrální blok u takových svazů je poměrně rozsáhlý a stačí, aby k -tice obsahovala prvky 0 a 1, a automaticky padne do onoho centrálního bloku. V případě pentagonu například platí následující

$$(a, b, c, 0, 1) \leftrightarrow (1, 0, c, 0, 1) \leftrightarrow (1, 1, 0, 0, 1).$$

DŮSLEDEK 3.39. *Je-li L transferově-stabilním distančně-nestabilním svazem, pak $(x_1, \dots, x_{k-2}, 0, 1) \in [(0, \dots, 0, 1)]$ pro všechny $x_1, \dots, x_{k-2} \in L$.*

Důkaz. Použitím předchozího lemmatu dostaneme $(x_i, 0, 1) \leftrightarrow (0, 1, 1)$ pro všechna $i = 1, \dots, k - 2$, a tedy

$$(x_1, \dots, x_{k-2}, 0, 1) \leftrightarrow (0, 1, \dots, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, 1).$$

□

V Příkladu 3.22, zabývajícím se pentagonem, jsme zjistili všechny bloky pro druhou mocninu pentagonu. Podobně můžeme najít všechny bloky kupříkladu páté mocniny, jelikož i zde je využíváno prostředků prvních nestabilních prvků vzhledem k 0 a 1, tudíž všechny bloky jsou

$$[(0, 0, 0, 0, 0)]; [(0, 0, 0, 0, a)]$$

$$[(0, 0, 0, 0, 1)]$$

$$[(1, 1, 1, 1, a)]; [(1, 1, 1, 1, 1)].$$

VĚTA 3.40. *Nechť L je transferově-stabilní distančně-nestabilní svaz s nejkratší cestou $P_1 = \{0, c_1, \dots, c_p, \alpha\}$ z nejmenšího prvku 0 do prvního nestabilního prvku vzhledem k 0 a nejkratší cestou $P_2 = \{\beta, d_1, \dots, d_r, 1\}$ z prvního nestabilního prvku vzhledem k 1 do největšího prvku 1, tj. $d(0, \alpha) = p + 1$ a $d(1, \beta) = r + 1$. Pak*

$$[(0, \dots, 0)], [(0, \dots, 0, c_1)], \dots, [(0, \dots, 0, c_p)],$$

$$[(0, \dots, 0, 1)],$$

$$[(1, \dots, 1, d_1)], \dots, [(1, \dots, 1, d_r)], [(1, \dots, 1)]$$

jsou všechny navzájem různé bloky svazu L .

Důkaz. Nechť $(x_1, \dots, x_k) \in L^k$ a podle Lemmatu 3.13 víme, že existuje $x'_2 \in L$ takový, že $(x_1, x_2) \leftrightarrow (0, x'_2)$ nebo $(x_1, x_2) \leftrightarrow (1, x'_2)$. Pak mohou nastat dvě možnosti:

$$1) (x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow (0, x'_2, x_3, \dots, x_k)$$

nebo

$$2) (x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow (1, x'_2, x_3, \dots, x_k).$$

Stejný krok jako předtím nyní použijeme na prvky x'_2, x_3 , a tedy existuje $x'_3 \in L$ takový, že $(x'_2, x_3) \leftrightarrow (0, x'_3)$ nebo $(x'_2, x_3) \leftrightarrow (1, x'_3)$. V tomto momentě obdržíme čtyři možnosti:

$$1) (0, x'_2, x_3, \dots, x_k) \leftrightarrow (0, 0, x'_3, x_4, \dots, x_k)$$

$$2) (0, x'_2, x_3, \dots, x_k) \leftrightarrow (0, 1, x'_3, x_4, \dots, x_k)$$

$$3) (1, x'_2, x_3, \dots, x_k) \leftrightarrow (1, 0, x'_3, x_4, \dots, x_k)$$

$$4) (1, x'_2, x_3, \dots, x_k) \leftrightarrow (1, 1, x'_3, x_4, \dots, x_k).$$

U možností 2) a 3) jsou výsledkem k -tice náležící do centrálního bloku podle Důsledku 3.39. Zbývá ukázat, do jakého bloku náleží k -tice ve výše uvedených možnostech 1) a 4). Jelikož možnost číslo 4) je analogická k možnosti 1), zaměříme se pouze na k -tici $(0, 0, x'_3, x_4, \dots, x_k)$.

Jestliže obdržíme $(x'_i, x_{i+1}) \leftrightarrow (1, x'_{i+1})$ během úprav dané k -tice, pak je důkaz u konce. Platí, že existuje $y \in L$, $y \neq 1$ takový, že

$$(0, 0, x'_3, x_4, \dots, x_k) \leftrightarrow (0, \dots, 0, y).$$

Kdyby $d(0, y) < d(0, \alpha)$, pak existuje $c_i \in P_1$ tak, že

$$(0, \dots, 0, y) \leftrightarrow (0, \dots, 0, c_i).$$

Jinak $(0, \dots, 0, y) \leftrightarrow (0, \dots, 0, 1)$.

Očividně jsou všechny bloky podle Lemmatu 3.29 různé. □

Zde jasně vidíme, že bloky transferově-stabilních distančně-nestabilních svazů se ani se zvyšující se mocninou svazu L , respektive aritou transferově-stabilní agregační funkce, nemění a jejich tvar, přesněji generátory, jsou velmi podobné těm z binárního případu. Navíc i jejich počet zůstává stejný.

Vracíme se zde k tomu, že i přes vzrůstající počet bloků s rostoucí aritou transferově-stabilních agregačních funkcí pro distančně-stabilní svazy se v případě transferově-stabilních distančně-nestabilních svazů toto nestane a jejich počet zůstane i nadále stejný, ať je arita transferově-stabilní agregační funkce jakákoli.

PŘÍKLAD 3.41. Dalším transferově-stabilním distančně-nestabilním svazem byl svaz L_4 z Příkladu 3.28 zobrazený na Obrázku 40. Podobně jako dříve, i tentokrát je počet bloků roven 6 a jejich výčet je podobný tomu v onom příkladu, tj. dejme tomu pro 4-ární transferově-stabilní agregační funkci jsou bloky ve svazu L_4 následující

$$\begin{aligned} & [(0, 0, 0, 0)]; [(0, 0, 0, a)]; [(0, 0, 0, d)] \\ & [(0, 0, 0, 1)] \\ & [(1, 1, 1, m)]; [(1, 1, 1, 1)]. \end{aligned}$$

Zvolíme-li libovolnou čtveřici ze svazu L_4^4 , pak nutně padne do jednoho z výše zmíněných bloků. Navíc, jak jsme již zmínili, centrální blok je velký a obsahuje většinu čtveřic. Je tedy velká pravděpodobnost, že námi zvolená čtveřice bude náležet právě centrálnímu bloku, takže kupříkladu

$$\begin{aligned} & (c, i, e, k) \leftrightarrow (0, i, e, 1) \leftrightarrow (0, a, 0, 1) \leftrightarrow (0, 1, 0, 0); \\ & (h, k, g, d) \leftrightarrow (1, k, g, a) \leftrightarrow (1, k, i, 0) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (0, 0, 0, 1), \end{aligned}$$

kde v obou případech jsme skutečně skončili v centrálním bloku. Navíc z Důsledku 3.39 víme, že pokud již během úpravy dostaneme prvky 0 a 1, pak jistě zadaná k -tice padne do centrálního bloku.

Závěrem kapitoly shrneme všechny naše získané poznatky do dvou důležitých důsledků Věty 3.40.

DŮSLEDEK 3.42. *Počet všech bloků transferově-stabilního distančně-destabilního svazu L je stejný pro všechny k -ární transferově-stabilní agregační funkce svazu L a je roven $d(0, \alpha) + d(1, \beta) + 1$.*

DŮSLEDEK 3.43. *Třída transferově-stabilních svazů je stejná pro všechny k -ární transferově-stabilní agregační funkce na svazu L , to znamená, že svaz L je transferově-stabilní právě tehdy, když (transferově-stabilní) bloky svazu L^k jsou lineárně uspořádané pro některé (a tedy pro každé) $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.*

3.7 Svaz transferově-stabilních agregačních funkcí

Na základě předchozích kapitol, zejména lineárního uspořádání bloků v transferově-stabilních svazech, můžeme, podobně jako transferově-stabilní průměry, zapsat transferově-stabilní agregační funkci na transferově-stabilním svazu ve tvaru:

$$TS(\mathbf{x}) := \langle 0, a_1, a_2, \dots, a_n, 1 \rangle,$$

kde prvky $a_1, \dots, a_n \in L$, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ jsou obrazy jednotlivých bloků s prvkem a_1 jako obrazem atomistického bloku a prvkem a_n jako obrazem koatomistického bloku. Z okrajových podmínek z definice agregační funkce víme, že k -tice samých nul (první blok) se vždy zobrazí na nulu a k -tice samých jedniček (poslední blok) se vždy zobrazí na jedničku, tj.

$$[(0, \dots, 0)] \mapsto 0 \quad \text{a} \quad [(1, \dots, 1)] \mapsto 1.$$

Odtud můžeme libovolnou transferově-stabilní agregační funkci na transferově-stabilním svazu psát ve zkrácené formě

$$TS(\mathbf{x}) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle.$$

Vzhledem k typu svazu, můžeme transferově-stabilní agregační funkce zapsat dvěma způsoby:

- **Distančně-stabilní svazy**

Nechť $P \in \text{Path}L$, $P = \{0 = c_0, c_1, c_2, \dots, c_{d(0,1)-1}, c_{d(0,1)} = 1\}$, to jest $|P| = d(0, 1) + 1$ a $\|P\| = d(0, 1)$. Pak k -ární transferově-stabilní agregační funkce TS na distančně-stabilním svazu L je ve tvaru

$$TS(\mathbf{x}) = \langle a_1, a_2, \dots, a_{kd(0,1)-1} \rangle,$$

kde prvek a_i je obrazem bloku

$$[(c_p, \dots, c_p, \underbrace{c_{p+1}, \dots, c_{p+1}}_q)]$$

pro $i = pk + q$, přičemž $p \in \{0, \dots, d(0, 1) - 1\}$, $q \in \{1, \dots, k\}$.

- **Transferově-stabilní distančně-destabilní svazy**

Nechť $P_1 = \{0, c_1, \dots, c_{d(0,\alpha)-1}, \alpha\}$ je nejkratší cesta z 0 do α (první nestabilní prvek vzhledem k 0), tj. $|P_1| = d(0, \alpha) + 1$ a $\|P_1\| = d(0, \alpha)$, a dále $P_2 = \{\beta, d_1, \dots, d_{d(1,\beta)-1}, 1\}$ je nejkratší cesta z β (první nestabilní prvek vzhledem k 1) do 1, tj. $|P_2| = d(\beta, 1) + 1$ a $\|P_2\| = d(\beta, 1)$. Pak k -ární transferově-stabilní agregační funkce TS na transferově-stabilním distančně-destabilním svazu L je ve tvaru

$$TS(\mathbf{x}) = \langle a_1, \dots, a_{d(0,\alpha)-1}, a_{d(0,\alpha)}, a'_1, \dots, a'_{d(1,\beta)-1} \rangle,$$

kde prvek

- $a_i \in L$ je obrazem bloku $[(\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, c_i)]$ pro $i = 1, \dots, d(0, \alpha) - 1$,
- $a_{d(0,\alpha)} \in L$ je obrazem centrálního bloku $[(\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1)]$,
- $a'_j \in L$ je obrazem bloku $[(\underbrace{1, \dots, 1}_{k-1}, d_j)]$ pro $j = 1, \dots, d(1, \beta) - 1$.

POZNÁMKA 3.44. Vyhodnocení transferově-stabilní agregační funkce TS se vstupem \mathbf{x} je podobné jako u transferově-stabilních průměrů, to znamená, že základem je upravit vektor \mathbf{x} do požadovaného tvaru pomocí transferově-stability. Navíc, vyhodnocení závisí na typu svazu. Jestliže svaz L je distančně-stabilní, pak upravíme vektor \mathbf{x} do tvaru

$$(c_p, \dots, c_p, c_{p+1}, \dots, c_{p+1}),$$

kde $c_p \preceq c_{p+1}$. Na druhou stranu, jestliže L je transferově-stabilní distančně-destabilní svaz, pak zaměníme vektor \mathbf{x} na jeden z následujících tvarů

$$(0, \dots, 0, c_i), (0, \dots, 0, 1), (1, \dots, 1, d_j),$$

kde prvky c_i a d_j odpovídají výše zmíněné možnosti pro transferově-stabilní distančně-destabilní svazy.

PŘÍKLAD 3.45. V návaznosti na Příklad 3.36, kde jsme stanovili všech 25 bloků třetí mocniny distančně-stabilního svazu L_2 z Obrázku 30, zvolíme libovolnou transferově-stabilní agregační funkci TS , načež pro její obrazy určíme odpovídající bloky a v další polovině příkladu vyhodnotíme některé vstupy podle předchozí Poznámky 3.44. Necht

$$TS(x_1, x_2, x_3) = \langle 0, 0, a, a, a, d, f, f, f, f, h, h, j, j, j, l, l, l, n, n, n, n, 1 \rangle$$

je ternární transferově-stabilní agregační funkce na distančně-stabilním svazu L_2 . Jelikož jsou bloky v distančně-stabilním svazu lineárně uspořádané, pak zadaná transferově-stabilní funkce bude agregační, jestliže všechny obrazy budou uspořádané. V našem případě se jedná o funkci agregační, neboť

$$0 \leq a \leq d \leq f \leq h \leq j \leq l \leq n \leq 1.$$

Dále pro stanovení správných bloků budeme používat stejnou cestu jako předtím, a tedy $P = \{0, a, c, e, h, j, k, n, 1\}$. Pak například:

- 1) Obraz d na 6-té pozici, tj. $i = 6$, odpovídá podle zápisu transferově-stabilních agregačních funkcí pro distančně-stabilní svazy, bloku

$$[(c, c, c)],$$

protože podle vztahu $i = pk + q$, kde $k = 3$ a $q \in \{1, 2, 3\}$ nutně platí, že $p = 1$ a $q = 3$, načež prvek $c_p = c_1$ odpovídá v cestě P prvku a , ale výsledný blok obsahuje 3 prvky $c_{p+1} = c_2 = c$. Tedy

$$[(c, c, c)] \mapsto d.$$

- 2) Obraz h je na 11-té pozici, tj. $i = 11$ a podle onoho vztahu musí platit, že $p = 3$ a $q = 2$, což znamená, že výsledný blok obsahuje jeden prvek $c_p = c_3 = e$ a dva prvky $c_{p+1} = c_4 = h$. Tudíž

$$[(e, h, h)] \mapsto h.$$

- 3) Obraz l je na 16-té pozici, tj. $i = 16$. Pak $16 = 3p + q$ odkud $p = 5$ a $q = 1$, načež podle cesty P platí $c_5 = j$ a $c_6 = k$, ale podle hodnoty q je prvek k zastoupen pouze jednou. Proto

$$[(j, j, k)] \mapsto l.$$

Opačným postupem bychom zjistili obrazy pro dané vstupy. Mějme například vstup ve tvaru:

- 1) $(e, i, l) \leftrightarrow (e, j, j) \leftrightarrow (h, h, j)$, tedy $(e, i, l) \in [(h, h, j)]$. Odtud můžeme vyčíst, že $h = c_4$ a prvek j je v generátoru zastoupen pouze jednou, což znamená, že $p = 4$ a $q = 1$. Dosazením do vztahu dostaneme $i = 13$, čímž výsledný obraz pro zadanou trojici je j , tj.

$$TS(e, i, j) = j.$$

- 2) $(1, l, n) \leftrightarrow (n, n, n)$, tj. $(1, l, n) \in [(n, n, n)]$, odkud vidíme shodnost všech tří prvků, tudíž $c_7 = n$, což odpovídá c_{p+1} a q je samozřejmě rovno 3. Výsledkem je $i = 6 \cdot 3 + 3 = 21$. Na této pozici vidíme podle předpisu funkce TS prvek n , tj.

$$TS(n, n, n) = n.$$

Zde je na místě podotknout, že výsledná shodnost prvků je čistě náhodná a nemá nic společného s idempotencí.

- 3) $(b, c, j) \leftrightarrow (0, e, j) \leftrightarrow (0, h, h) \leftrightarrow (c, c, h) \leftrightarrow (c, e, e)$, čímž obdržíme $(b, c, j) \in [(c, e, e)]$, kde prvek e je zastoupen dvakrát, tj. $q = 2$, a prvek c je roven c_2 , tj. $p = 2$. Výsledná pozice hledaného obrazu je index $i = 2 \cdot 3 + 2 = 8$, což odpovídá prvku f , tj.

$$TS(b, c, j) = f.$$

Na druhou stranu, co se týče transferově-stabilních agregačních funkcí na transferově-stabilním distančně-destabilním svazu, tak zde je situace o poznání jednodušší, neboť máme méně bloků, přesněji řečeno se vzrůstající aritou zůstává počet bloků stejný. Navíc většinu k -tic pozře centrální blok.

PŘÍKLAD 3.46. Uvažujme 5-ární transferově-stabilní agregační funkci

$$TS(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \langle b, g, j, l \rangle$$

na transferově-stabilním distančně-destabilním svazu L_4 (viz Obrázek 40). Podobně jako v předchozím příkladu, nejdříve přiřadíme obrazy funkce TS jednotlivým blokům, načež v tomhle případě je přiřazení bloků velmi jednoduché, protože máme pouze čtyři netriviální bloky. To znamená

$$[(0, 0, 0, 0, a)] \mapsto b$$

$$[(0, 0, 0, 0, d)] \mapsto g$$

$$[(0, 0, 0, 0, 1)] \mapsto j$$

$$[(1, 1, 1, 1, h)] \mapsto l.$$

Přesněji, podle výše uvedeného zápisu pro takové typy svazů, prvním nestabilním prvkem vzhledem k 0 je h a naopak, prvním nestabilním prvkem vzhledem k 1 je d , tudíž odpovídající nejkratší cesty jsou

$$P_1 = \{0, a, d, h\} \quad \text{a} \quad P_2 = \{d, h, 1\},$$

kde $d(0, h) = 3$ a $d(1, d) = 2$. Pak

$$TS(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \langle b, g, j, l \rangle = \langle a_1, a_2, a_3, a'_1 \rangle$$

a z definice víme, že první dvě hodnoty odpovídají dvěma blokům před centrálním blokem, třetí hodnota odpovídá centrálnímu bloku a další hodnoty odpovídají blokům po centrálním bloku, což přesně odpovídá shora uvedeným přiřazením.

Ve druhé polovině příkladu budeme opět hledat funkční hodnoty pro zadané vstupy, přičemž nápovědou je, že většina vstupů se zobrazí na hodnotu j , protože tato hodnota je obrazem centrálního bloku.

1) $(c, g, k, l, m) \leftrightarrow (0, g, 1, l, m) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow (0, 0, 0, 0, 1)$, a tedy

$$TS(c, g, k, l, m) = j.$$

2) $(a, b, c, d, e) \leftrightarrow (0, d, c, d, e) \leftrightarrow (0, d, 0, 1, e) \leftrightarrow (0, 1, 0, 1, 0)$, a tedy

$$TS(a, b, c, d, e) = j.$$

3) $(0, b, 0, a, 0) \leftrightarrow (0, 0, 0, d, 0)$, a tedy

$$TS(a, b, c, d, e) = g.$$

Nyní se zaměříme na strukturu všech k -árních transferově-stabilních agregačních funkcí $\text{TSAgg}_L^{(k)}$ a zjistíme, o jakou strukturu jde. Evidentně

$$TS^{\min}(\mathbf{x}) := \langle 0, \dots, 0 \rangle$$

$$TS^{\max}(\mathbf{x}) := \langle 1, \dots, 1 \rangle$$

jsou po řadě nejmenší a největší transferově-stabilní agregační funkce. Dále, nechť $TS_1(\mathbf{x}) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ a $TS_2(\mathbf{x}) = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ jsou libovolné transferově-stabilní agregační funkce na transferově-stabilním svazu L . Pak

$$TS_1 \wedge TS_2 = \langle a_1 \wedge b_1, \dots, a_n \wedge b_n \rangle$$

$$TS_1 \vee TS_2 = \langle a_1 \vee b_1, \dots, a_n \vee b_n \rangle$$

jsou také transferově-stabilní agregační funkce na svazu L . Tudíž struktura

$$\left(\text{TSAgg}_L^{(k)}, \wedge, \vee \right)$$

všech k -árních transferově-stabilních agregačních funkcí na transferově-stabilním svazu L spolu s průsekem a spojením tvoří konečný svaz, přičemž tento svaz má stejné vlastnosti jako původní svaz L , pokud jsou tyto vlastnosti zadány identitou, neboť podle průseku a spojení transferově-stabilních agregačních funkcí se takové typy vlastností odrážejí od původního svazu L na svaz $\text{TSAgg}_L^{(k)}$.

LEMMA 3.47. *Konečný svaz L splňuje identitu*

$$I(x_1, \dots, x_n) = J(x_1, \dots, x_n) \quad (19)$$

právě tehdy, když svaz $\text{TSAgg}_L^{(k)}$ splňuje identitu (19) pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

Ve speciálním případě: Svaz $\text{TSAgg}_L^{(k)}$ je distributivní právě tehdy, když svaz L je distributivní.

Důkaz. Předpokládejme, že svaz L splňuje identitu (19) pro všechny prvky $x_1, \dots, x_n \in L$. Označme

$$\begin{aligned} TS_1(\mathbf{x}) &:= \langle a_1^1, \dots, a_p^1 \rangle \\ &\vdots \\ TS_n(\mathbf{x}) &:= \langle a_1^n, \dots, a_p^n \rangle. \end{aligned}$$

jako libovolné k -ární transferově-stabilní agregační funkce ze svazu $\text{TSAgg}_L^{(k)}$.

Pak

$$\begin{aligned} I(TS_1, \dots, TS_n) &= \langle I(a_1^1, \dots, a_1^n), \dots, I(a_p^1, \dots, a_p^n) \rangle = \\ &= \langle J(a_1^1, \dots, a_1^n), \dots, J(a_p^1, \dots, a_p^n) \rangle = J(TS_1, \dots, TS_n). \end{aligned}$$

Nechť $I(TS_1, \dots, TS_n) = J(TS_1, \dots, TS_n)$, přičemž term I je aplikován na jednotlivé složky funkce TS_i pro všechna $i \in \{1, \dots, n\}$, podobně term J . Tedy identita (19) je splněna pro jednotlivé složky funkce TS_i , což jsou prvky náležící svazu L , a proto je tato identita splněna taktéž ve svazu L . \square

PŘÍKLAD 3.48. Zkonstruujme svaz všech binárních transferově-stabilních agregačních funkcí na čtyřprvkovém booleovském svazu B_4 (viz Obrázek 25) a na pentagonu (viz Obrázek 33). V obou případech má transferově-stabilní agregačních funkce pouze 3 bloky, tudíž musíme sestavit takové trojice, aby

splňovaly definici agregační funkce, čili všechny binární transferově-stabilní agregační funkce na čtyřprvkovém booleovském svazu jsou

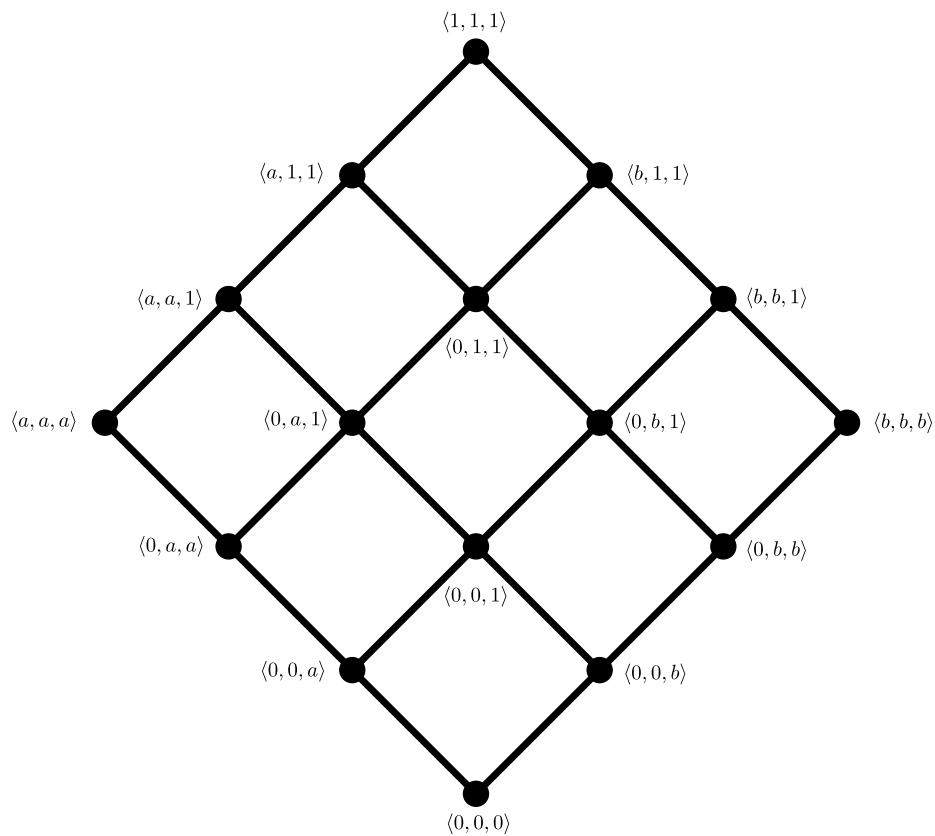
$$\langle 0, 0, 0 \rangle; \langle 0, 0, a \rangle; \langle 0, a, a \rangle; \langle a, a, a \rangle$$

$$\langle 0, 0, b \rangle; \langle 0, 0, 1 \rangle; \langle 0, a, 1 \rangle; \langle a, a, 1 \rangle$$

$$\langle 0, b, b \rangle; \langle 0, b, 1 \rangle; \langle 0, 1, 1 \rangle; \langle a, 1, 1 \rangle$$

$$\langle b, b, b \rangle; \langle b, b, 1 \rangle; \langle b, 1, 1 \rangle; \langle 1, 1, 1 \rangle$$

s počtem rovným 16 a uspořádáním podle následujícího Obrázku 50:



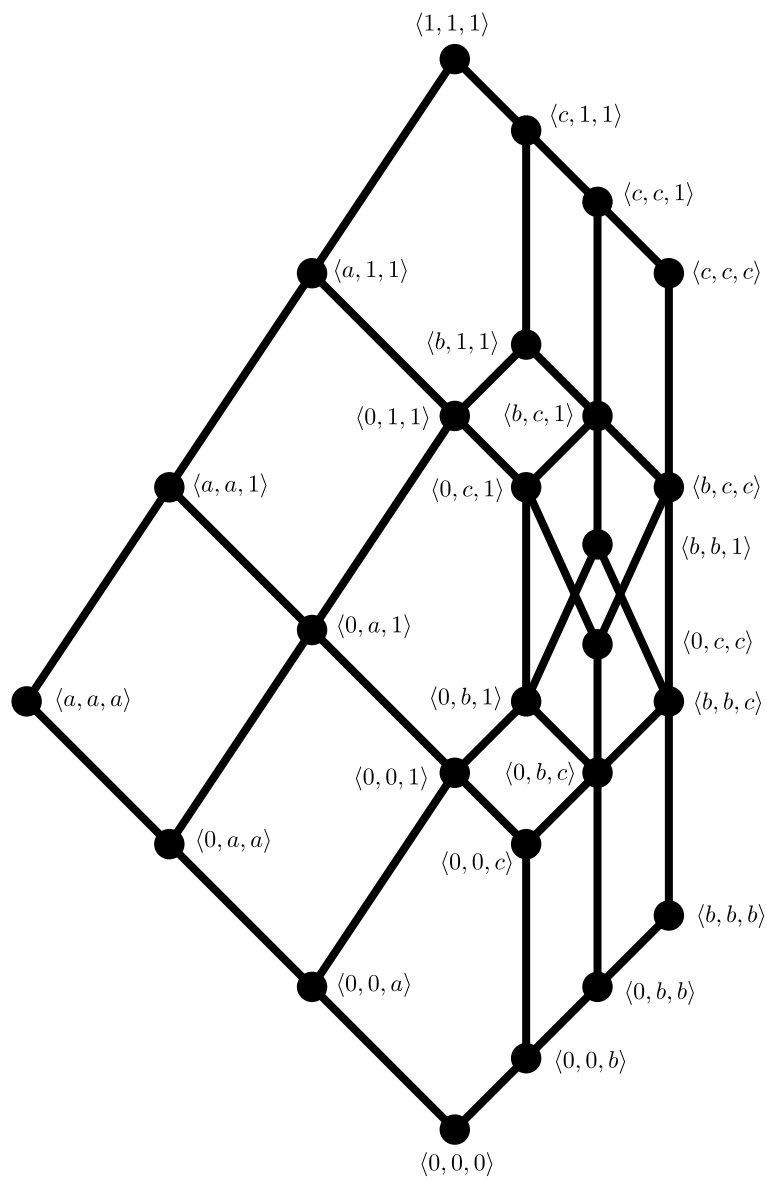
Obrázek 50: Všechny binární transferově-stabilní agregačních funkce na čtyřprvkovém booleovském svazu.

Vidíme, že z booleovského svazu B_4 se na svaz $\text{TSAgg}_{B_4}^{(2)}$ přenesla jak distributivita, tak i modularita, podle Lemmatu 3.47, ale už ne komplementarita. Obdobně by to dopadlo u funkcí vyšší arity, neboť například pro ternární transferově-stabilní agregačních funkce na čtyřprvkovém booleovském svazu, jež mají 5 bloků, obdržíme 36 funkcí uspořádaných do druhé mocniny šesti-prvkového řetězce, tj. $\text{TSAgg}_{B_4}^{(3)} \cong C_6^2$.

Situace u pentagonu je o poznání komplikovanější, neboť i přes malý počet bloků je výsledný svaz složitější. Podobně jako předtím nejprve určíme všechny možné binární transferově-stabilní agregačních funkce na pentagonu, tj.

$$\begin{aligned}
&\langle 0, 0, 0 \rangle ; \langle 0, 0, a \rangle ; \langle 0, a, a \rangle ; \langle a, a, a \rangle \\
&\langle 0, 0, b \rangle ; \langle 0, 0, 1 \rangle ; \langle 0, a, 1 \rangle ; \langle a, a, 1 \rangle \\
&\langle 0, b, b \rangle ; \langle 0, b, 1 \rangle ; \langle 0, 1, 1 \rangle ; \langle a, 1, 1 \rangle \\
&\langle b, b, b \rangle ; \langle b, b, 1 \rangle ; \langle b, 1, 1 \rangle ; \langle 1, 1, 1 \rangle \\
&\langle 0, 0, c \rangle ; \langle 0, c, c \rangle ; \langle c, c, c \rangle ; \langle c, c, 1 \rangle \\
&\langle c, 1, 1 \rangle ; \langle 0, c, 1 \rangle ; \langle 0, b, c \rangle ; \langle b, b, c \rangle \\
&\quad \langle b, c, c \rangle ; \langle b, c, 1 \rangle ,
\end{aligned}$$

s jejich celkovým počtem 26 funkcí, uspořádaných do následujícího Hasseova diagramu (viz Obrázek 51). Opět můžeme vidět, že jelikož pentagon není distributivní ani modulární, pak ani svaz z Obrázku 51 nemá žádnou ze zmíněných vlastností.



Obrázek 51: Všechny binární transferově-stabilní agregačních funkce na pentagonu.

Kromě využití Lemmatu 3.47 v Příkladu 3.48 jsme taktéž narazili na další užitečnou skutečnost, kterou je počet prvků svazu $\text{TSAgg}_L^{(k)}$. Nicméně určit obecně počet všech k -árních transferově-stabilních agregačních funkcí ať na distančně-stabilním svazu nebo transferově-stabilním distančně-nestabilním je velmi složité. Jak jsme ale mohli vidět v právě uvedeném Příkladu 3.48, tak pro určité typy svazů lze toto číslo vypočítat, protože v těchto svazech jsou všechny cesty odlišné až na nejmenší a největší prvek. Těmi svazy jsou tzv. horizontální sumy řetězců, které jsme taktéž studovali v [14]. Jednoduše řečeno, *horizontální suma konečných řetězců* je svaz, jenž vznikne sjednocením oněch řetězců a jejich společným prvkem je pouze nejmenší a největší prvek každého z řetězců. Například, pentagon je horizontální suma dvou řetězců $P_1 = \{0, a, 1\}$ a $P_2 = \{0, b, c, 1\}$.

Pokud tedy svaz L je horizontální sumou konečného počtu konečných řetězců, přičemž tento svaz je transferově-stabilní, pak můžeme zjistit počet všech k -árních transferově-stabilních agregačních funkcí.

VĚTA 3.49. *Nechť L je horizontální suma stejně mohutných řetězců s počtem c , pak počet všech k -árních transferově-stabilních agregačních funkcí na L je roven*

$$c \cdot \left(\binom{n+r-1}{r} - 1 - r \right) + 1 + r,$$

kde c je počet všech cest z nejmenšího do největšího prvku, tj. $c = |\text{Path}L|$, $n = d(0, 1) + 1$ a $r = k \cdot d(0, 1) - 1$.

Důkaz. Jelikož L vznikne sjednocením stejně mohutných řetězců, pak se evidentně musí jednat o distančně-stabilní svaz. Nechť $TS(\mathbf{x}) = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$ je libovolná k -ární transferově-stabilní agregační funkce na distančně-stabilním svazu L , tj. $r = k \cdot d(0, 1) - 1$, a $P = \{0, c_1, \dots, c_{n-2}, 1\}$, $|P| = n$, $P \in \text{Path}L$ je cesta z 0 do 1 taková, že $a_i \in P$ pro všechna $i \in \{1, \dots, r\}$. Pak počet různých

transferově-stabilních agregačních funkcí pro cestu P je roven kombinačnímu číslu $\binom{n+r-1}{r}$, přičemž jsme použili kombinaci s opakováním, abychom zachovali podmínku $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r$. Dále, počet všech k -árních transferově-stabilních agregačních funkcí s $a_i \in \{0, 1\}$ se rovná $\binom{r+1}{r}$ a toto číslo musíme odečíst od čísla $\binom{n+r-1}{r}$. Tedy počet k -árních transferově-stabilních agregačních funkcí, kde $a_i \in P \setminus \{0, 1\}$ pro nějaké $i = 1, \dots, r$ je $\binom{n+r-1}{r} - \binom{r+1}{r}$. Toto odpovídá jedné cestě P ve svazu L . Závěrem vynásobíme toto číslo počtem všech cest (řetězců v horizontální sumě) a navíc přidáme počet všech k -árních transferově-stabilních agregačních funkcí, kde $a_i \in \{0, 1\}$. \square

DŮSLEDEK 3.50. *Počet všech k -árních transferově-stabilních agregačních funkcí na transferově-stabilní distančně-nestabilní horizontální sumě řetězců L je*

$$\sum_{\substack{n=|P| \\ P \in \text{Path}L}} \left(\binom{n+r-1}{r} - 1 - r \right) + 1 + r,$$

kde $r = d(0, \alpha) + d(1, \beta) - 1$.

Vrátíme-li se k Příkladu 3.48, pro čtyřprvkový booleovský svaz máme $c = 2$, $n = 2 + 1 = 3$ a $r = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Pak

$$2 \cdot \left(\binom{3+3-1}{3} - 1 - 3 \right) + 1 + 3 = 2 \cdot \left(\binom{5}{3} - 4 \right) + 4 = 16.$$

Na druhou stranu, pro pentagon musíme použít Důsledek 3.50 a pro hodnotu $r = 2 + 2 - 1 = 3$ máme

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=|P| \\ P \in \text{Path}L}} \left(\binom{n+3-1}{3} - 1 - 3 \right) + 1 + 3 &= \sum_{n=3}^4 \left(\binom{n+2}{3} - 4 \right) + 4 = \\ &= \left(\binom{5}{3} - 4 \right) + \left(\binom{6}{3} - 4 \right) + 4 = 26. \end{aligned}$$

Závěrem kapitoly se zaměříme na generující množinu svazu všech k -árních transferově-stabilních agregačních funkcí $\text{TSAgg}_L^{(k)}$, to znamená na takovou množinu transferově-stabilních funkcí, jejímž uzavřením na průsek a spojení obdržíme všechny transferově-stabilní funkce z množiny $\text{TSAgg}_L^{(k)}$.

VĚTA 3.51. *Množina $G \subset \text{TSAgg}_L^{(k)}$ obsahující následující transferově-stabilní agregační funkce:*

$$\langle 0, \dots, 0 \rangle; \langle 0, \dots, 0, 1 \rangle; \dots; \langle 0, 1, \dots, 1 \rangle; \langle 1, \dots, 1 \rangle; \langle a, \dots, a \rangle$$

pro všechna $a \in H_L$, kde H_L je generující množinou svazu L , generuje svaz $(\text{TSAgg}_L^{(k)}, \wedge, \vee)$.

Důkaz. Necht $TS = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ je libovolná transferově-stabilní agregační funkce. Dále, transferově-stabilní agregační funkce tvaru $\langle a_i, \dots, a_i \rangle$ pro index $i = 1, \dots, m$ můžeme získat z funkcí $\langle a, \dots, a \rangle$, $a \in H_L$ vhodnou kombinací průseku a spojení. Pak

$$\begin{aligned} \langle a_1, \dots, a_1 \rangle \vee \langle 0, 1, \dots, 1 \rangle &= \langle a_1, 1, \dots, 1 \rangle \\ \langle a_2, \dots, a_2 \rangle \vee \langle 0, 0, 1, \dots, 1 \rangle &= \langle a_2, a_2, 1, \dots, 1 \rangle \\ &\vdots \\ \langle a_{m-1}, \dots, a_{m-1} \rangle \vee \langle 0, \dots, 0, 1 \rangle &= \langle a_{m-1}, \dots, a_{m-1}, 1 \rangle \\ \langle a_m, \dots, a_m \rangle \vee \langle 0, \dots, 0 \rangle &= \langle a_m, \dots, a_m \rangle, \end{aligned}$$

a průsek pravých stran všech rovností odpovídá agregační funkci TS , protože $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$. □

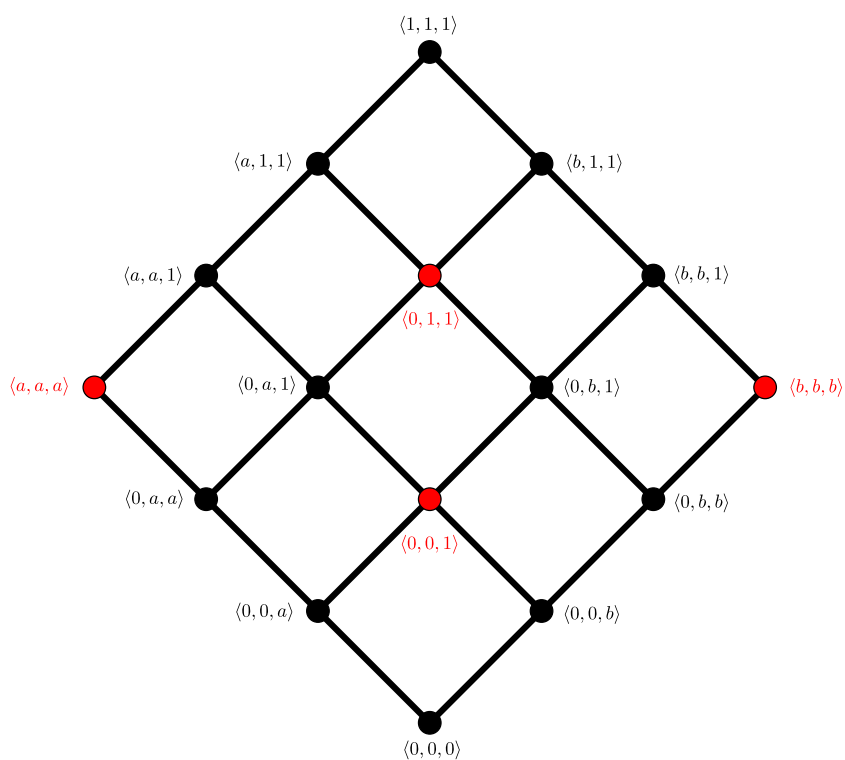
Opět vrátíme-li se k Příkladu 3.48, generující množina čtyřprvkového booleovského svazu B_4 je $H_{B_4} = \{a, b\}$, a tedy z Věty 3.51 dostaneme čtyři generující binární transferově-stabilní agregační funkce na čtyřprvkovém booleovském svazu (viz Obrázek 52):

$$\langle 0, 0, 1 \rangle; \langle 0, 1, 1 \rangle; \langle a, a, a \rangle; \langle b, b, b \rangle,$$

přičemž nejmenší $\langle 0, 0, 0 \rangle$ a největší $\langle 1, 1, 1 \rangle$ transferově-stabilní agregační funkce nejsou třeba, protože

$$\langle a, a, a \rangle \wedge \langle b, b, b \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

$$\langle a, a, a \rangle \vee \langle b, b, b \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle.$$

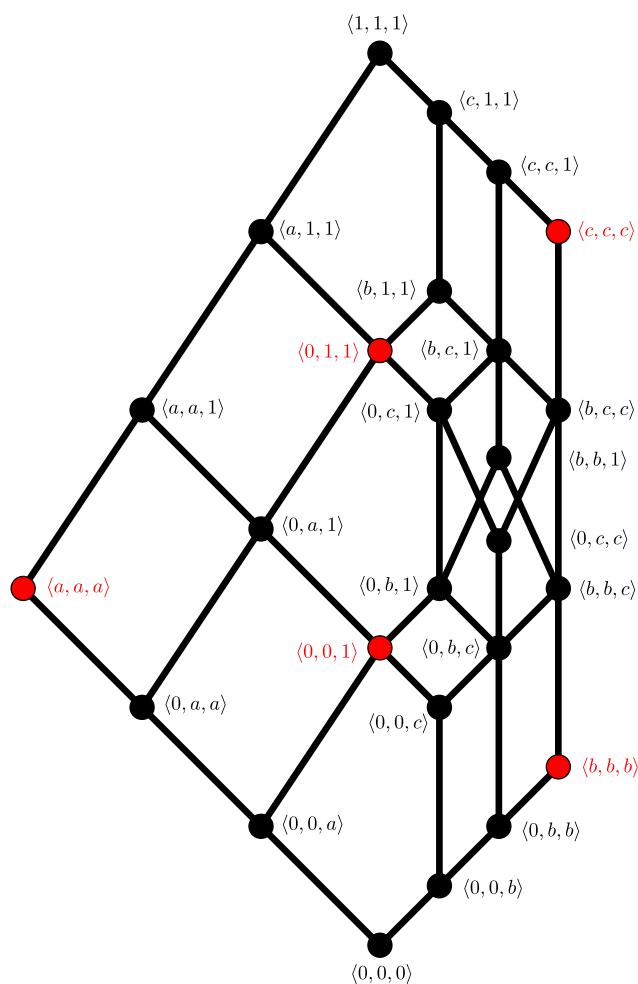


Obrázek 52: Generátory svazu $\text{TSAgg}_{B_4}^{(2)}$.

V případě pentagonu P obsahuje generující množina H_P prvky a, b a c , tudíž obdržíme pět generujících binárních transferově-stabilních agregačních funkcí na pentagonu (viz Obrázek 53):

$$\langle 0, 0, 1 \rangle; \langle 0, 1, 1 \rangle; \langle a, a, a \rangle; \langle b, b, b \rangle; \langle c, c, c \rangle,$$

kde nejmenší a největší transferově-stabilní agregační funkce nejsou třeba ze stejného důvodu jako předtím.



Obrázek 53: Generátory svazu $\text{TSagg}_P^{(2)}$.

Například binární transferově-stabilní agregační funkci $\langle b, b, c \rangle$ můžeme dle důkazy Věty 3.51 vygenerovat následovně

$$\langle b, b, c \rangle = (\langle b, b, b \rangle \vee \langle 0, 1, 1 \rangle) \wedge (\langle b, b, b \rangle \vee \langle 0, 0, 1 \rangle) \wedge \langle c, c, c \rangle$$

anebo taktéž

$$\langle b, b, c \rangle = \langle b, b, b \rangle \vee (\langle 0, 0, 1 \rangle \wedge \langle c, c, c \rangle).$$

3.8 Aplikace transferově-stabilních agregačních funkcí

Transferově-stabilní agregační funkce jsou velmi silným nástrojem k určování toho, jaké možnosti jsou vůči sobě ekvivalentní v závislosti na vstupních parametrech. Například, když změněme jeden parametr k lepšímu a druhý k horšímu, tak jestli dostaneme ekvivalentní možnost k té první, anebo už ji lze považovat za lepší variantu, či dokonce horší.

V našem případě se podíváme na dva parametry: cena a kvalita produktu. Právě s využitím transferově-stabilních agregačních funkcí můžeme rozhodnout ohledně kvality produktu v závislosti na ceně. Jinými slovy, každý blok transferově-stabilní agregační funkce odpovídá kvalitě nákupu (přesněji, poměru cena:kvalita). Ukážeme, jaké produkty jsou vůči sobě ekvivalentní, ať už jeden má horší nebo lepší cenu či kvalitu.

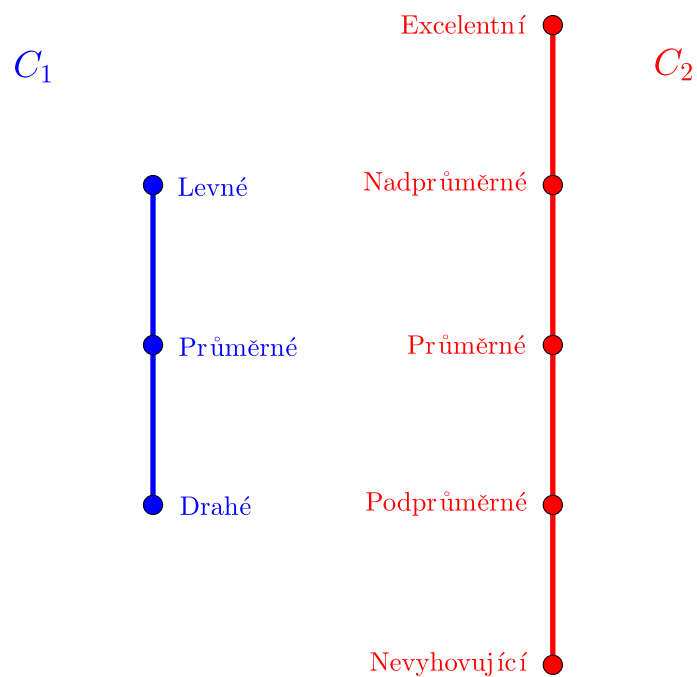
Uvažujme dva lingvistické svazy

$$C_1 = \{\text{Drahé, Průměrné, Levné}\}$$

reprezentující cenu produktu a

$$C_2 = \{\text{Nevyhovující, Podprůměrné, Průměrné, Nadprůměrné, Excelentní}\}$$

reprezentující kvalitu produktu, viz Obrázek 54. Jen pro zajímavost, lingvistický svaz je takový svaz, kde jednotlivé prvky jsou označené slovy.



Obrázek 54: Lingvistické svazy C_1 a C_2 .

Nyní vytvoříme direktní součin lingvistických svazů C_1 a C_2 , čímž dostaneme distančně-stabilní svaz $L = C_1 \times C_2$ (viz Obrázek 55), kde

L ... Levné

P ... Průměrné

D ... Drahé

a

E ... Excelentní

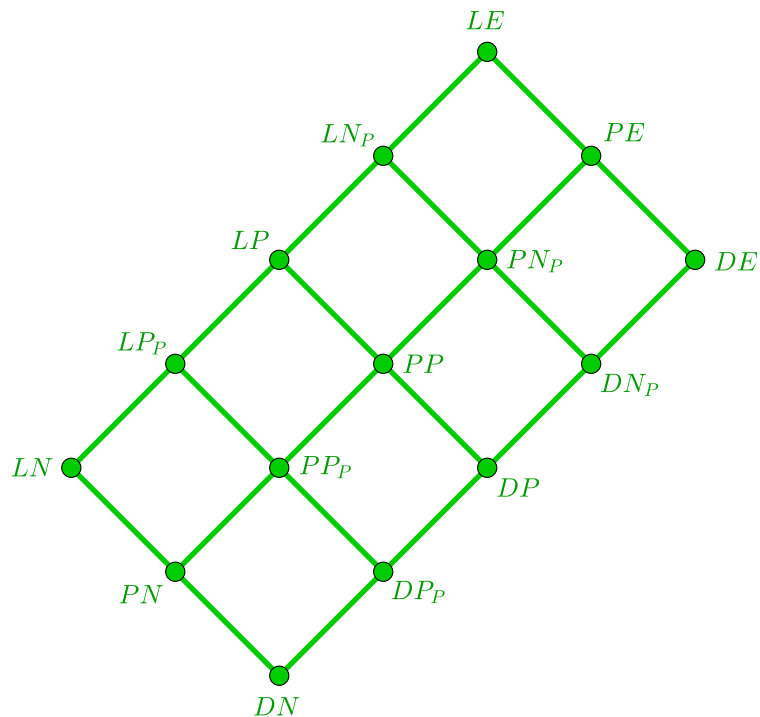
N_P ... Nadprůměrné

P ... Průměrné

P_P ... Podprůměrné

N ... Nevyhovující,

tedy kupříkladu DN je Drahý Nevyhovující výrobek, PP_P je Průměrný Pod-Průměrný a LE je Levný Excelentní.



Obrázek 55: Distančně-stabilní svaz L všech výrobků.

Podle Věty 3.15 jsou následující bloky

$$[(DN, DN)]; [(PN, DN)]; [(LN, DN)]$$

$$[(LP_P, DN)]; [(LP, DN)]; [(LN_P, DN)]$$

$$[(LE, DN)]$$

$$[(LE, PN)]; [(LE, LN)]; [(LE, LP_P)]$$

$$[(LE, LP)]; [(LE, LN_P)]; [(LE, LE)]$$

všechny bloky ve svazu L^2 .

Nejdříve uvažujme koupi jednoho produktu v situaci, kdy společnost chce prodat jejich produkt s vidinou nejvyššího zisku. Bohužel zákazník se proti návrhu společnosti ohradí a první nabídku odmítne, jelikož je produkt příliš drahý a neuspokojující. Proto společnost, za účelem prodeje, nabídne zákazníkovi jinou nabídku v rozdílné kvalitativní třídě (poměr cena:kvalita) podle toho, co je zákazník schopen přijmout, jinými slovy vzniká otázka:

Které nabídky jsou ve stejném poměru cena:kvalita?

Tento problém může být elegantně vyřešen právě pomocí transferově-stabilních agregačních funkcí, respektive jejich jednotlivých bloků.

Uvažujme dvojici (X, DN) , kde $X \in L$, pak dostaneme sedm kvalitativních tříd:

$$\begin{aligned}
 & [(DN, DN)] \dots \mathbf{0} \\
 & [(DP_P, DN)] = [(PN, DN)] \dots \mathbf{1} \\
 & [(DP, DN)] = [(PP_P, DN)] = [(LN, DN)] \dots \mathbf{2} \\
 & [(DN_P, DN)] = [(PP, DN)] = [(LP_P, DN)] \dots \mathbf{3} \\
 & [(DE, DN)] = [(PN_P, DN)] = [(LP, DN)] \dots \mathbf{4} \\
 & [(PE, DN)] = [(LN_P, DN)] \dots \mathbf{5} \\
 & [(LE, DN)] \dots \mathbf{6}
 \end{aligned}$$

a jelikož se zabýváme pouze jedním produktem, ostatní třídy nejsou potřeba, neboť právě vlastnost agregačních funkcí uspořádá bloky.

Všechny produkty ze svazu L můžeme rozdělit do sedmi tříd reprezentujících poměr cena:kvalita (viz Tabulka 3). Například kvalitativní třída $\mathbf{0}$ je „nejpříznivější“ pro společnost (výrobce), protože prodává drahý produkt nevyhovující kvality, to znamená, malé výrobní náklady, velký zisk. Na druhou

stranu, kvalitativní třída **6** je „nejvhodnější“ pro kupujícího, neboť kupuje produkt excelentní kvality za nízkou cenu.

0	1	2	3	4	5	6
Drahé Nevyhov.	Průměrné Nevyhov.	Levné Nevyhov.	Levné Podprům.	Levné Průměrné	Levné NadPrům.	Levné Excel.
	Drahé Podprům.	Průměrné Podprům.	Průměrné Průměrné	Průměrné NadPrům.	Průměrné Excel.	
		Drahé Průměrné	Drahé NadPrům.	Drahé Excel.		

Tabulka 3: Všechny kvalitativní třídy pro koupi jednoho produktu.

Z Tabulky 3 můžeme snadno kupříkladu vidět, že produkty „Levný Podprůměrný“, „Průměrný Nadprůměrný“ a „Drahý Excelentní“ náleží stejné kvalitativní třídě, což má tedy za následek, že ať si koupíme jakýkoli z těchto tří produktů, budeme na tom v poměru cena:kvalita vždy stejně. Tedy, po dohodě mezi zákazníkem a prodávajícím na vhodném poměru mezi cenou a kvalitou, prodávající může kupujícímu nabídnout různé možnosti produktů z odpovídající kvalitativní třídy.

Zásadní přínos teorie transferově-stabilních agregačních funkcí se projeví až v případě, kdy zákazník kupuje dva nebo více produktů, neboť se tím vlastně ukáže, jaké vhodné kombinace produktů jsou vůči sobě ve stejné kvalitativní třídě. Jinými slovy, ať koupíme tak nebo onak, zůstaneme ve stejném poměru cena:kvalita.

Za druhé se tedy zaměříme na koupi dvou produktů k čemuž je již potřeba všech 13-ti bloků svazu L_2 , přesněji 13-ti kvalitativních tříd:

$$\begin{array}{rcl}
 [(DN, DN)] & \dots & \mathbf{0} \\
 [(PN, DN)] & \dots & \mathbf{1} \\
 & & \vdots \\
 [(LE, DN)] & \dots & \mathbf{6} \\
 & & \vdots \\
 [(LE, LN_P)] & \dots & \mathbf{11} \\
 [(LE, LE)] & \dots & \mathbf{12}
 \end{array}$$

Například,

$$(LN_P, DE), (PE, LP) \in [(LE, LP_P)],$$

což znamená, že uvažované produkty „Levný NadPrůměrný“ a „Drahý Excelentní“, nebo „Průměrný Excelentní“ a „Levný Průměrný“, nebo „Levný Excelentní“ a „Levný PodPrůměrný“ náleží stejné kvalitativní třídě s číslem **9**. Jinak řečeno, jestliže si první zákazník koupí levný nadprůměrný a drahý excelentní produkt a koupě druhého zákazníka zahrnuje levný excelentní a levný podprůměrný produkt, pak podle výše zmíněného seznamu jsou jejich koupě ve stejné kvalitativní třídě, čímž jsou tedy jejich koupě v poměru cena:kvalita ekvivalentní.

Právě znázorněnou myšlenku můžeme zobecnit na nákup konečného počtu produktů. Předpokládejme, že chceme koupit dejme tomu 5 produktů, čímž tedy musíme využít 5-ární transferově-stabilní agregační funkci na distančně-stabilním svazu L .

Pak dostaneme $5 \cdot d(0, 1) + 1 = 5 \cdot 6 + 1 = 31$ bloků (kvalitativních tříd), například

$[(DN, DN, DN, DN, DN)]$...	0
$[(PN, PN, PN, PN, PN)]$...	5
$[(PP_P, PP_P, PP_P, PP_P, PP_P)]$...	10
$[(DP, DP, DP, DP, DP)]$...	15
$[(LP, LP, LP, LP, LP)]$...	20
$[(PN_P, PN_P, PN_P, PN_P, PN_P)]$...	25
$[(LE, LE, LE, LE, LE)]$...	30 ,

kde opět kvalitativní třída **0** je nejlepší pro výrobce, a na druhou stranu kvalitativní třída **30** je nejlepší pro zákazníka, tudíž přichází na řadu domluva mezi výrobcem a zákazníkem na vhodné kvalitativní třídě. Jinak řečeno se snaží dohodnout zlatou střední cestu tak, aby byl spokojený jak zákazník, tak i výrobce.

Předpokládejme, že zlatá střední cesta odpovídá kvalitativnímu bloku **18**, tj.

$$[(LP, LP, LP, LP, DP)] \dots \mathbf{18}.$$

Pak má zákazník několik možností, jak nakoupit 5 produktů ale s tím, že jakákoli kombinace zůstane v kvalitativní třídě **18**. S využitím transferové stability víme, že pětice

$$(LE, LE, LE, DN, DN); (DE, DE, DE, DE, DP); (LN, LP_P, PP, PN_P, LE)$$

taktéž náleží do kvalitativní třídy **18**, což odpovídá třem možnostem pro zákazníka:

- 1) tři levné excelentní produkty a dva drahé nevyhovující produkty,
- 2) čtyři drahé excelentní a jeden drahý průměrný produkt,
- 3) levný produkt nevyhovující kvality, levný podprůměrné kvality, produkt průměrné ceny i kvality, průměrné ceny nadprůměrné kvality a levný excelentní,

čili je na zákazníkovi, jaká možnost mu nejlépe vyhovuje a k čemu dané produkty potřebuje. Zejména poslední možnost by mohla představovat situaci, kdy je potřeba koupit jeden produkt od každé kvality.

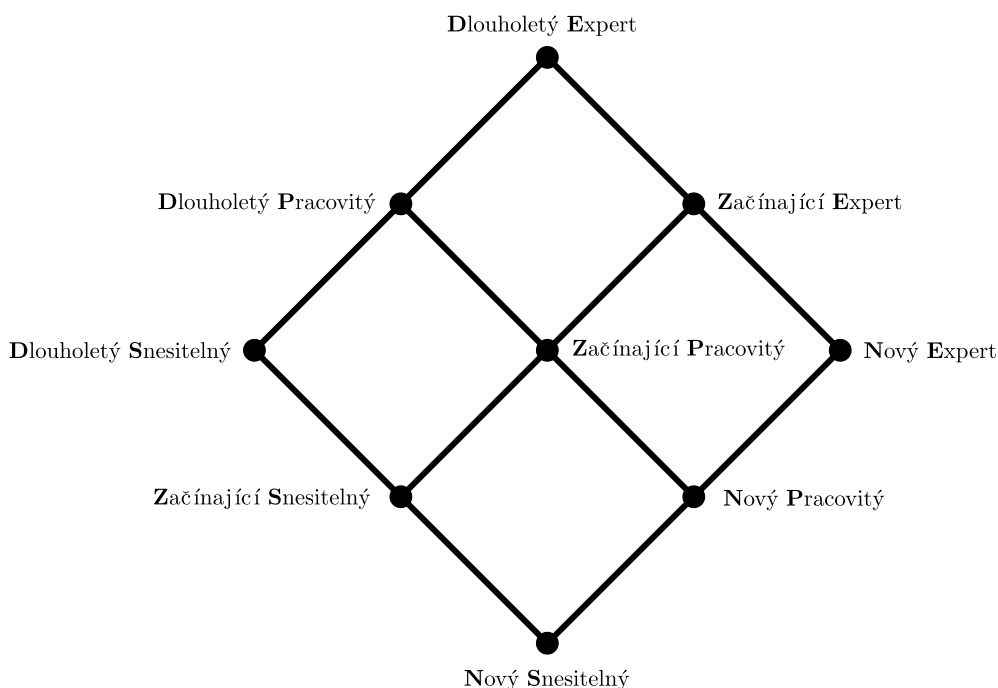
PŘÍKLAD 3.52. Předpokládejme, že jsme vedoucí určitého týmu v nějaké firmě a dostali jsme za úkol našemu týmu koupit nové mobilní telefony. V týmu máme 6 zaměstnanců Z_1, \dots, Z_6 , čili musíme koupit 6 mobilů. Využijeme proto 6-ární transferově-stabilní agregační funkci. Otázkou je, na jakém svazu. Tentokrát použijeme dva distančně-stabilní svazy L_1 a L_2 , kde první svaz reprezentuje zkušenosti pracovníků a druhý svaz zastupuje kvalitu mobilů.

Svaz L_1 (viz Obrázek 56) vznikne direktním součinem dvou tříprvkových lingvistických řetězců, kde první z nich má prvky

$$\{\text{Nový, Začínající, Dlouholetý}\}$$

pracovník týmu a druhý svaz obsahuje zkušenosti pracovníků, tj.

$$\{\text{Snesitelný, Pracovitý, Expert}\}.$$



Obrázek 56: Distančně-stabilní svaz L_1 reprezentující zkušenosti zaměstnance a jeho dobu v týmu.

V tomto případě, $k = 6$, obdržíme 25 tříd představujících sílu týmu, to znamená, že pokud v týmu budeme mít šest nových zaměstnanců, kteří pro zatím nic neukázali pro tým, pak budou mít sílu **0**, na druhou stranu, tým složený z dlouholetých expertů má sílu **24**. Náš tým je složený ze dvou nových zaměstnanců, kde jeden z nich je snesitelný a druhý je pracovitý, tří začínajících zaměstnanců (snesitelný, pracovitý, expert) a jednoho dlouholetého experta, tj. (NS, NP, ZS, ZP, ZE, DE) , což odpovídá síle **11**, protože

$$(NS, NP, ZS, ZP, ZE, DE) \in [(ZS, DS, DS, DS, DS)].$$

Jelikož průměrná třída je **12**, pak bychom mohli prohlásit, že náš tým je celkem průměrný.

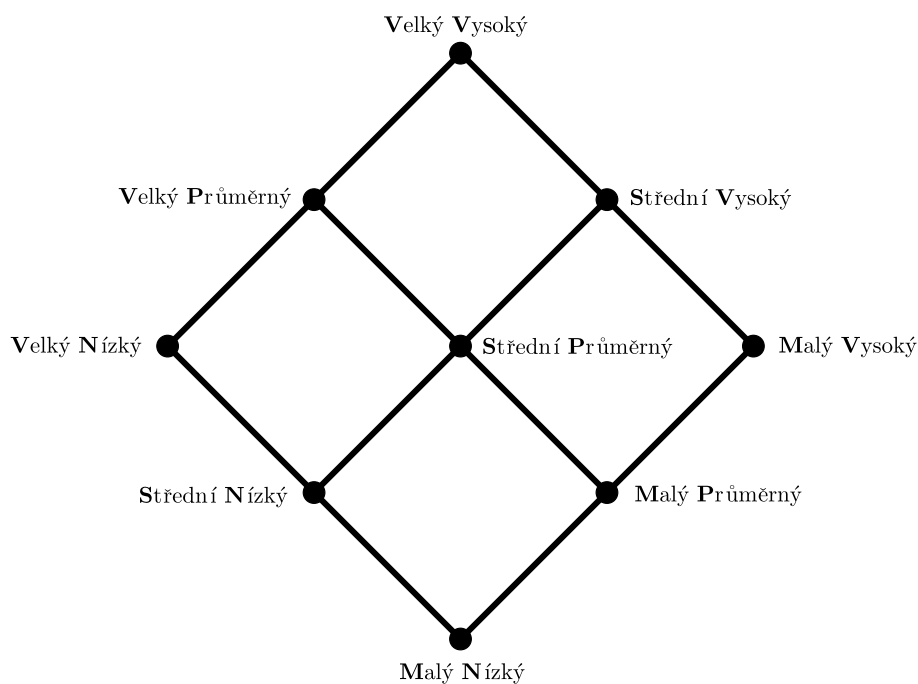
Nyní přijde na řadu svaz L_2 (viz Obrázek 57), jenž je taktéž direktním součinem dvou tříprvkových lingvistických řetězců reprezentujících po řadě velikost displeje mobilu a výkon mobilu, tj.

{Malý, Střední, Velký}

displej a

{Nízký, Průměrný, Vysoký}

výkon.



Obrázek 57: Distančně-stabilní svaz L_2 reprezentující velikost displeje a výkon mobilu.

Opět samozřejmě dostaneme 25 tříd pro 6 zaměstnanců. Zde ale bohužel neplatí, že nejvyšší třída je nejlepší, protože velikost mobilu nelze srovnat od nejlepší po nejhorší známku, na druhou stranu ale výkon ano. To znamená, že bloky

$$[(MV, MV, MV, MV, MV, MV)] \dots \mathbf{12}$$

$$[(SV, SV, SV, SV, SV, SV)] \dots \mathbf{18}$$

$$[(VV, VV, VV, VV, VV, VV)] \dots \mathbf{24}$$

by šlo z určitého hlediska považovat za nejlepší. Nicméně, každý ze zaměstnanců má jiné priority co se velikosti displeje týče. Dejme tomu, že zaměstnanec Z_2 má rád malý displej, zaměstnanci Z_1, Z_3 a Z_5 by chtěli střední displej a zaměstnanci Z_4 a Z_6 vyžadují velký displej. Na základě těchto požadavků můžeme prohlásit, jaká třída je pro nás nejhorší a jaká nejlepší. Při splnění přání našich zaměstnanců ale s vidinou nízkého výkonu obdržíme třídu

$$[(MN, SN, SN, SN, VN, VN)] \dots \mathbf{7},$$

kdežto pro vysoký výkon dostaneme třídu

$$[(MV, SV, SV, SV, VV, VV)] \dots \mathbf{19}.$$

Spojíme-li tuto skutečnost s faktem, že náš tým je téměř průměrný, můžeme nalézt průměrnou třídu z výše uvedených, což je třída **13**, a tedy pro náš tým zvolíme třídu **12**, jenž je charakterizována šesticí

$$(VN, VN, VN, VN, VN, VN).$$

V této třídě máme díky transferové-stabilitě následující šestice:

$$\begin{aligned}
& (MN, SN, SN, SP, VV, VV) \quad ; \quad (MP, SN, SN, SN, VV, VV) \\
& (MN, SP, SP, SP, VP, VP) \quad ; \quad (MP, SN, SP, SP, VP, VP) \\
& (MV, SN, SN, SP, VP, VP) \quad ; \quad (MN, SP, SV, SV, VN, VN) \\
& (MP, SP, SP, SV, VN, VN) \quad ; \quad (MV, SP, SP, SP, VN, VN) \\
& (MN, SP, SP, SP, VN, VV) \quad ; \quad (MP, SP, SP, SP, VN, VP) \\
& (MN, SN, SN, SV, VP, VV) \quad ; \quad (MV, SN, SP, SP, VN, VP) \\
& (MN, SN, SP, SV, VN, VV) \quad ; \quad (MP, SN, SP, SV, VN, VP) \\
& (MV, SN, SP, SV, VN, VN) \quad ; \quad (MN, SN, SP, SV, VN, VV) \\
& (MV, SV, SN, SN, VN, VP) \quad ; \quad (MN, SN, SP, SP, VP, VV),
\end{aligned}$$

přičemž záleží čistě na nás, jakou kombinaci využijeme pro naše zaměstnance v týmu. Využijeme-li navíc již výše zmíněné skutečnosti, že zaměstnanci Z_1 a Z_2 jsou noví, ale Z_1 je snesitelný, načež Z_2 pracovitý, zaměstnanci Z_3, Z_4 a Z_5 jsou začínající, ale po řadě snesitelný, pracovitý a expert, a jako poslední máme zaměstnance Z_6 , který je dlouholetým expertem v týmu. Navíc, zavedeme přiřazení

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto (Z_2, Z_1, Z_3, Z_5, Z_4, Z_6)$$

pro libovolné prvky $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in L_2$, to znamená, že například

$$(MV, SP, SP, SP, VN, VN)$$

lze popsat tak, že zaměstnanec Z_2 dostane mobil s malým displejem a vysokým výkonem, zaměstnanci Z_1, Z_3 a Z_5 obdrží mobil se středním displejem a průměrným výkonem, a zaměstnanci Z_4 a Z_6 získají nízko-výkonný mobil s velkým displejem.

Pak kupříkladu šestice (MV, SV, SN, SN, VN, VP) by mohla představovat, že novým zaměstnancům dáme výkonné mobily, abychom je udrželi v týmu, začínajícím zaměstnancům mobily s nízkým výkonem, protože dlouholetému expertovi, na základě výkonnosti prvních dvou mobilů, musíme dát pouze průměrně výkonný mobil. Nebo úplně naopak, dle šestice z posledního řádku (MN, SN, SP, SP, VP, VV) , dlouholetému expertovi dáme mobil s vysokým výkonem, začínajícím zaměstnancům stačí průměrný výkon a noví zaměstnanci musí ukázat, co v nich je, a proto obdrží mobily pouze s nízkým výkonem.

Nicméně, naše finální rozhodnutí bude šestice ze šestého řádku seznamu, tj.

$$(MN, SN, SN, SV, VP, VV),$$

neboť dvěma naším expertům koupíme výkonné mobilní telefony, začínajícímu, ale pracovitěmu, prozatím stačí průměrně výkonný, a co se ostatních týče, jedná se buď o úplně nové zaměstnance, anebo o ty, kteří ještě neukázali svůj celý potenciál, a proto dostanou mobily s nízkým výkonem.

Ještě poznamenejme, že výběr odpovídající třídy bychom mohli provést i na základě rozpočtu, uvažíme-li, že cena nízko-výkonného mobilu se pohybuje kolem 5 000 Kč, středně-výkonného kolem 15 000 Kč a cena mobilu s vysokým výkonem se pohybuje okolo 25 000 Kč, pak na základě těchto údajů můžeme prohlásit, že třída **7**, tj.

$$[(MN, SN, SN, SN, VN, VN)],$$

má rozpočet kolem 30 000 Kč, načež třída **19**, tj.

$$[(MV, SV, SV, SV, VV, VV)],$$

by měla rozpočet zhruba 150 000 Kč. Pozor ale na to, že bez předpokladu ohledně velikosti displejů by toto rozdělení nešlo udělat, protože kupříkladu

šestice $[(VN, VP, VP, VP, VV, VV)]$ náležící třídě **19** má rozpočet přibližně 100 000 Kč, nikoli požadovaných 150 000 Kč. Avšak s předpokladem velikosti displejů dospějeme k tomu, že všechny odpovídající šestice mají stejný rozpočet, jak můžeme vidět v seznamu odpovídající třídě **12**, kde rozpočet každé šestice činí 80 000 Kč, s jistotou tedy víme, že ať bychom se rozhodli pro jakoukoli šestici s danými předpoklady, vždy zaplatíme za mobily pro naše zaměstnance kolem 80 000 Kč.

Pro představu by finální nákup mohl vypadat následovně (viz Obrázek 58):

VV ... Samsung Galaxy Note 20

VP ... Xiaomi Mi 10T

SV ... iPhone 12

SN ... MyPhone Hammer Explorer

SN ... HUAWEI P smart

MN ... Blackview GBV5500 Pro



Obrázek 58: Finální nákup mobilních telefonů.

ZÁVĚR

Celá práce je zasazena do teorie agregačních funkcí na ohraničených (konečných) svazech.

V první kapitole jsme výše zmíněnou teorii zúžili do teorie idempotentních agregačních funkcí, jež je spjatá s teorií klonů. Cílem bylo pro tuto celou strukturu, přesněji klon, najít vhodné generující funkce a posléze odhalit, zda tuto generující množinu nelze ještě více zredukovat.

Následující kapitola se od té první razantně lišila, neboť jsme opustili studium klonů a zaměřili se na nejznámější agregační funkci – aritmetický průměr. Cílem bylo přetransformovat jej do konečných řetězců, dostali jsme transferově-stabilní průměry, a podobně jako v první kapitole jsme zkoumali strukturu všech těchto funkcí a následně i její generátory.

Poslední kapitola navazuje na předchozí kapitolu v tom směru, že jsme odstranili idempotenci a zkoumali jsme transferově-stabilní funkce z obecnějšího pohledu a zejména na libovolném konečném svazu. Ukázali jsme, že pojem libovolného konečného svazu se musí brát s rezervou, neboť chování těchto funkcí se rapidně liší od typu svazu. Zaměřili jsme se na dva typy svazů: distančně-stabilní a transferově-stabilní svazy, přičemž cílem v této kapitole byla charakterizace právě druhé zmíněné třídy svazů.

Výsledků v této práci je několik a tím pádem i rozsah možné aplikace je široký. Kupříkladu generátory idempotentního klonu z první kapitoly lze využít v informatických systémech, kde se nevyskytují pouze lineárně uspořádané množiny, ale také částečně uspořádané množiny, anebo svazy. Tím pádem pak není nutné využívat všechny idempotentní agregační funkce, ale stačí jenom jejich generátory. Výsledkem ve druhé kapitole bylo možné využití aritmetického průměru na konečných řetězcích, a tedy již víme, že pod-

mínka nekonečnosti řetězce není zábranou a lze ji překonat, čímž se otevírá okno možného použití v praxi. Posledním a řekněme i nejdůležitějším výsledkem jsou transferově-stabilní funkce a zejména jejich aplikace v distančně-stabilních svazech, načež tato aplikace má využití v obchodním sektoru.

Reference

- [1] Baker K. A., Pixley A. F. : *Polynomial Interpolation and the Chinese Remainder Theorem for Algebraic Systems*, Springer-Verlag, Math. Zeitschrift 143 (1975) 165-174.
- [2] Beliakov G., Bustince H., Calvo T. : *A Practical Guide to Averaging Functions*, Springer, 2016.
- [3] Couceiro M., Dubois D., Fargier H., Grabisch M., Prade H., Rico A. : *New Directions in Ordinal Evaluation: Sugeno Integrals and Beyond*, In: Doumpos M., Figueira J., Greco S., Zopounidis C. (eds) *New Perspectives in Multiple Criteria Decision Making. Multiple Criteria Decision Making*. Springer (2019), Cham, 978-3-030-11481-7.
- [4] Grabisch M., Marichal J. L., Mesiar R., Pap E. : *Aggregation functions*, Cambridge University Press, Cambridge 2009.
- [5] Grätzer G., Wehrung F. : *Lattice Theory: Special Topics and Applications, Volume 1*, Springer, Switzerland 2014.
- [6] Halaš R., Kurač Z., Mesiar R., Pócs J. : *Binary generating set of the clone of idempotent aggregation functions on bounded lattices*, Information Sciences 462 (2018) 367 – 373.
- [7] Halaš R., Kurač Z., Pócs J. : *On the minimality of some generating sets of the aggregation clone on a finite chain*, Information Sciences (2021).
- [8] Halaš R., Pócs J. : *On the clone of aggregation functions on bounded lattices*, Information Sciences 329 (2016) 381 — 389.

- [9] Hubbard D., Evans D. : *Problems with scoring methods and ordinal scales in risk assessment*, IBM Journal of Research and Development, Volume: 54, Issue: 3, May-June 2010.
- [10] Chajda I. : *Teorie svazů a universální algebra*, Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, Olomouc, 2013, ISBN: 978-80-244-3914-3.
- [11] Kolesárová A., Mayor G., Mesiar R. : *Weighted ordinal means*, Information Sciences 177 (2007) 3822 — 3830.
- [12] Kurač Z.: *Transfer-stable means on finite chains*, Fuzzy Sets and Systems 372 (2019) 111 – 123.
- [13] Kurač Z., Riemel T., Rýparová L.: *Transfer-stable aggregation functions on finite lattices*, Information Sciences 521 (2020) 88 — 106.
- [14] Kurač Z. : *Agregační funkce na ohraničených svazech*, Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, 2017, Diplomová práce, [online].
- [15] Kyselová D., Dubois D., Komorníková M., Mesiar R. : *Refining Aggregation Operator-Based Orderings in Multifactorial Evaluation—Part I: Continuous Scales*, Fuzzy Systems IEEE Transactions on, vol. 15, no. 6, pp. 1100-1106, 2007.
- [16] Moulin H. : *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge, MA: Cambridge Univ. Press, 1988.

Seznam obrázků

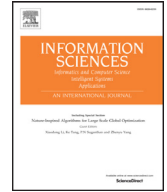
1	Binární agregační funkce na čtyřprvkovém řetězci.	30
2	Všechny funkce χ_* na C_4	36
3	Všechny funkce med_* na C_4	37
4	Booleovský Svaz.	43
5	Svaz L_1	44
6	Svaz L_3	59
7	Svaz L_4	60
8	Svaz L_5	63
9	Transferově-stabilní funkce určená funkcí $f(x) = x^2$	78
10	Lukasiewiczova t-norma a t-conorma.	78
11	Transferově-stabilní funkce určená funkcí $f(x) = \sin(x)$	79
12	Čtyřprvkový booleovský svaz B_4	81
13	Všechny bloky binárních transferově-stabilních průměrů na C_4 a jejich množiny obrazů.	85
14	Všechny binární transferově-stabilní průměry na řetězci C_4	86
15	Booleovský svaz binárních transferově-stabilních průměrů na C_4	88
16	Sekce ternárního transferově-stabilního průměru na C_3	91
17	Svaz všech ternárních transferově-stabilních průměrů na C_3	93
18	χ_B^\vee	128
19	Nahoře: χ_1^\vee a χ_A^\wedge . Dole: $\chi_1^\vee \wedge \chi_A^\wedge$	128
20	χ_B^\wedge	129
21	$\chi_B^\vee \wedge \text{med}_a$	129
22	$(\chi_1^\vee \wedge \chi_A^\wedge) \wedge \text{med}_b$	130
23	Příklad Hasseova diagramu a diagramu, který není Hasseův.	133
24	Svaz L_1	135

25	Distančně-stabilní a distančně-nestabilní svaz.	137
26	Pohyb pomocí transferové-stability ve svazu.	140
27	Všechny bloky ve druhé mocnině čtyřprkového řetězce a booleovského čtyřprkového svazu.	142
28	Příklad svazu použitého v důkazu Věty 3.12.	144
29	Znázornění srovnatelných dvojic v daném bloku.	150
30	Svaz L_2	152
31	Počet všech cest z prvku 0 do jednotlivých prvků svazu L_2 . . .	158
32	Počet všech cest z prvku 1 do jednotlivých prvků svazu L_2 . . .	159
33	Druhá mocnina pentagonu N_5	160
34	Znázornění vzdálenosti mezi bloky v distančně-nestabilním svazu. .	163
35	Svaz L_3	164
36	Druhá mocnina svazu L_3	165
37	Transferově-stabilní a nestabilní svazy.	167
38	Myšlenka důkazu v Lemma 3.25.	168
39	Vzdálenost mezi srovnatelnými dvojicemi ve stejném bloku. . .	169
40	Vyznačení nestabilních prvků vzhledem k 0 i 1 ve svazu L_4 . . .	172
41	n -dimenzionální diamant.	175
42	Transferově-nestabilní svaz L_5	176
43	Transferově-stabilní svaz L_{5_p}	178
44	Transferově-stabilní svazy L_{5_q} a L_{5_e}	180
45	Svaz L	182
46	Pohyb v kroku 1.	183
47	Pohyb v kroku 2.	183
48	Pohyb v kroku 3.	184
49	Pohyb v kroku 5.	185

50	Všechny binární transferově-stabilní agregačních funkce na čtyřprvkovém booleovském svazu.	206
51	Všechny binární transferově-stabilní agregačních funkce na pentagonu.	208
52	Generátory svazu $\text{TSagg}_{B_4}^{(2)}$	212
53	Generátory svazu $\text{TSagg}_P^{(2)}$	213
54	Lingvistické svazy C_1 a C_2	215
55	Distančně-stabilní svaz L všech výrobků.	216
56	Distančně-stabilní svaz L_1 reprezentující zkušenosti zaměstnance a jeho dobu v týmu.	222
57	Distančně-stabilní svaz L_2 reprezentující velikost displeje a výkon mobilu.	223
58	Finální nákup mobilních telefonů.	227

Seznam tabulek

1	Vyhodnocení některých dvojic ze svazu L_1^2 funkcemi $\text{med}_{\alpha\beta\gamma}$, med_d a $\text{med}_{\zeta\eta\theta}$	46
2	Vyhodnocení pro $x \in L_1$ funkcemi $\chi_a \wedge \chi_b$ a χ_d	47
3	Všechny kvalitativní třídy pro koupi jednoho produktu.	218



Binary generating set of the clone of idempotent aggregation functions on bounded lattices



Radomír Halaš^{a,*}, Zbyněk Kurač^a, Radko Mesiar^{a,b}, Jozef Pócs^{a,c}

^a Department of Algebra and Geometry, Faculty of Science, Palacký University Olomouc, 17. listopadu 12, Olomouc 771 46, Czech Republic

^b Department of Mathematics and Descriptive Geometry, Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava, Radlinského 11, Bratislava 1 810 05, Slovakia

^c Mathematical Institute, Slovak Academy of Sciences, Grešákova 6, Košice 040 01, Slovakia

ARTICLE INFO

Article history:

Received 8 January 2018

Revised 25 March 2018

Accepted 13 June 2018

Available online 14 June 2018

MSC:

06A15

Keywords:

(Monotone) clone
Monotone function
Aggregation function
Lattice
Median
Generating set

ABSTRACT

In a recent paper Botur et al. (2018) we have presented a generating set of the clone of idempotent aggregation functions on bounded lattices. As the main result we have shown that this clone is generated by certain ternary idempotent functions from which all idempotent aggregation functions of L can be obtained by usual term composition.

The aim of this paper is to present an essential improvement of the result above by presenting a new generating set of this clone. A bit artificial ternary functions are substituted here by natural (binary) lattice a -medians and certain binary characteristic functions. Consequently, the clone is generated by its binary part and the result strengthens the essential role of medians within all idempotent aggregation functions. Moreover, we will show that for an n -element lattice L , the upper bound of binary generators is $2n - 1$.

© 2018 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

Aggregation theory is a rapidly growing field of mathematics with roots in all domains where a merging of several inputs from a considered ordered scale into one output, reflecting some natural constraints, is considered. Its historical roots go back to Moscow papyrus (problem 14) and can be traced in the ancient Greece - recall several kinds of means, such as Heronian, for example. The major contribution in aggregation theory have dealt with some real interval scales and they were summarized in monographs such as [1,2,8].

Only recently more abstract scales were considered, in particular lattice (poset) scales. For information sciences, and in particular for subjective decision problems, typical scales deal with bounded (distributive) lattices. Not going into details, among different papers dealing with aggregation functions acting on lattices, we recall e.g. the seminal papers [5,6], our recent papers [11–13], or the papers on nullnorms and uninorms on bounded lattices...

Particular classes of aggregation functions can be seen as special clones, ranging from the smallest one (all projections) to the biggest one (all aggregation functions of a considered lattice L). One special case is related to the class of all idempotent aggregation functions on L , and its subclass of idempotent lattice polynomials (i.e., Sugeno integrals, see [5,6]). Note

* Corresponding author.

E-mail addresses: radomir.halas@upol.cz (R. Halaš), zbynek.kurac01@upol.cz (Z. Kurač), radko.mesiar@stuba.sk (R. Mesiar), pocs@saske.sk (J. Pócs).

that in the case of real intervals, idempotent aggregation functions are just monotone means, and they are indispensable in several domains related to unanimous decision making. The possible complexity of mentioned clones can be reduced when we look on their generating sets, i.e., subsets of aggregation functions from the considered clone such that their compositions generates all members of that clone. This problem was discussed for idempotent lattice polynomials on a distributive bounded lattice L in [5,6], see also [9,10], and for all idempotent aggregation functions on a bounded lattice L in [3]. Note that the generating set introduced in [3] has contained also quite artificial ternary aggregation functions and it was far from to be minimal. The main aim of this work is to improve earlier results concerning the generating sets of idempotent aggregation functions on lattices, where only binary generating idempotent aggregation functions will occur. We also show that our introduced generating sets are minimal.

2. Algebraic preliminaries

This paragraph is devoted to recalling the necessary concepts from universal algebra, for details we refer to standard monographs [4,17]. By an *algebra* we mean a pair $(X; F)$ consisting of a nonempty set X (called the *support* of the algebra) and the set F (possibly empty) of operations on X . For any n -ary operation $f \in F$ and any n -tuple $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$ we denote by $f(\mathbf{x})$ the evaluation of f in \mathbf{x} .

We call a nonempty subset $B \subseteq X$ a *subalgebra* of $(X; F)$ if for any n -ary operation $f \in F$ and for any n -tuple $\mathbf{x} \in B^n$ we have $f(\mathbf{x}) \in B$. It is evident that $(B; F)$ is again an algebra where the operations are those on X but restricted to B .

Further, given an algebra $(X; F)$, by the *direct square* of $(X; F)$ we mean an algebra (X^2, F) with the support being the Cartesian square X^2 of X , and the operations defined component-wise, i.e. for any n -ary $f \in F$ and any n -tuple $((x_{11}, x_{12}), \dots, (x_{n1}, x_{n2}))$ of elements of X^2 we have

$$f((x_{11}, x_{12}), \dots, (x_{n1}, x_{n2})) = (f(x_{11}, \dots, x_{n1}), f(x_{12}, \dots, x_{n2})).$$

We say that a k -ary function g on X *preserves the subalgebras of the direct square* (X^2, F) if for any subalgebra B of (X^2, F) , whenever we have a $2 \times k$ matrix (b_{ij}) of elements of X all the columns of which belong to B , then so does the 2-tuple when applying g to its rows, i.e.,

$$\left(\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix} \right), \left(\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix} \right), \dots, \left(\begin{matrix} b_{1k} \\ b_{2k} \end{matrix} \right) \in B \implies \left(\begin{matrix} g(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1k}) \\ g(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2k}) \end{matrix} \right) \in B.$$

Clone theory turned out to be an extremely useful part of universal algebra with many applications in different areas of mathematics. The concept of a clone comes from that of a monoid in a sense that monoids of selfmaps of a set X form a composition-closed class. Abstracting from this elementary example we arrive to a general definition of a clone. For an overview of clone theory we refer to [7,14–16].

A *clone* on a set X is a set of (finitary) operations on X which contains all the projections on X and that is closed under the composition in the following sense.

For a set X , a positive integer $n \in \mathbb{N}$ and for any $i \leq n$, the *i th n -ary projection* is for all $x_1, \dots, x_n \in X$ defined by

$$p_i^n(x_1, \dots, x_n) := x_i.$$

Composition is then formed as follows: given a k -ary operation $f: X^k \rightarrow X$ and k n -ary operations $g_1, \dots, g_k: X^n \rightarrow X$, their composition is an n -ary operation $f(g_1, \dots, g_k): X^n \rightarrow X$ defined by

$$f(g_1, \dots, g_k)(x_1, \dots, x_n) := f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n)), \quad (1)$$

for all $x_1, \dots, x_n \in X$.

It can be easily checked that the composition is a usual product of selfmaps for $k = n = 1$. A set of functions which is closed under composition is said to be composition-closed. Hence the clones are composition-closed classes containing all projections.

Let us note that clones on a set X can be viewed equivalently as the term operations of algebras on X . This follows from the fact that algebraic terms include the projections and they are composed in the same way as functions in clones.

The set of all clones on X (ordered by set inclusion) has always the least and the greatest element, the least one called the *trivial clone* on X consisting just of all the projections, the greatest one called the *full clone* on X containing all the functions on X (denoted by \mathcal{O}_X).

For any subset $F \subseteq \mathcal{O}_X$ we always have the least clone $[F]$ on X containing F . It can be obtained as the intersection of all clones on X containing F and we call it the clone generated by F . If $C = [F]$ for some finite set F , then C is said to be finitely generated.

Clones on a finite set X containing the so-called *near-unanimity function* are known to be finitely generated. Recall that for $n \geq 3$, an n -ary function f on X is called a *near-unanimity function* if

$$f(y, x, \dots, x) = \dots = f(x, \dots, x, y, x, \dots, x) = \dots = f(x, \dots, x, y) = x$$

for any $x, y \in X$, i.e., if any $n - 1$ of the n inputs coincide, the output of f takes the same value. In particular, 3-ary near-unanimity functions are called *ternary majority functions* on X .

More generally, a majority function (sometimes called also quorum function) is an n -ary function (with n odd) that produces an input x whenever the majority of the inputs are x . These functions are defined for three or more odd inputs only and can be found in various applications such as adders, subtractors, hash functions, and Muller C-element. Thus a ternary majority function f on a set X fulfills the equalities

$$f(x, x, y) = f(x, y, x) = f(x, x, y) = x$$

for any $x, y \in X$. As a prototypical ternary majority function $f: X^3 \rightarrow X$ one can consider the function f given by stipulation

$$f(x_1, x_2, x_2) = \begin{cases} u, & \text{if } \text{card}(\{i \in \{1, 2, 3\} : x_i = u\}) \geq 2, \\ x_1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Considering a lattice $(L; \vee, \wedge)$ the next ternary medians are majority functions:

$$\text{med}_\wedge(x, y, z) := (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) \tag{2}$$

or

$$\text{med}_\vee(x, y, z) := (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z) \tag{3}$$

Note that if L is a distributive lattice, then both above introduced median functions coincide (and then we call them simply a ternary median).

The presence of a ternary majority function in a clone has the following important consequence which is a special variant of the so-called Baker–Pixley theorem, see [14]:

Theorem 2.1 (Baker–Pixley theorem). *Let C be a clone on a finite set X , $f \in \mathcal{O}_X$ and assume that C contains a ternary majority function. Then $f \in C$ if and only if f preserves all subalgebras of the direct square of the algebra $(X; C)$.*

Remark 2.2. In what follows we will use the Baker–Pixley Theorem for proving negative results, i.e., in order to show that $f \notin C$, it suffices to find a subalgebra B of the direct square of (X, C) such that f does not preserve the subalgebra B .

From the Baker–Pixley theorem, the following important assertion can be deduced, cf. [13,16].

Theorem 2.3. *Let C be a clone on a finite set X containing a ternary majority function. Then C is finitely generated.*

3. Idempotent aggregation clones on bounded lattices and their binary generators

Recall that an aggregation function on a bounded lattice L is a function $A: L^n \rightarrow L$ that

(i) is nondecreasing (in each variable), i.e. for any $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^n$:

$$A(\mathbf{x}) \leq A(\mathbf{y}) \text{ whenever } \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \text{ (i.e. } x_i \leq y_i \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}),$$

(ii) fulfills the boundary conditions

$$A(0_L, \dots, 0_L) = 0_L \quad \text{and} \quad A(1_L, \dots, 1_L) = 1_L.$$

The integer n represents the arity of the aggregation function.

An n -ary aggregation function A on L is said to be *idempotent* if it satisfies $A(x, \dots, x) = x$ for all $x \in L$. For a positive integer $n \geq 1$ denote by $\text{Id}^n(L)$ the set of all n -ary idempotent aggregation functions on L and by $\text{Id}(L)$ the set of all idempotent aggregation functions.

It is a well-known fact that idempotent aggregation functions are exactly the so-called intermediate functions, see e.g. [8]:

Lemma 3.1. *An aggregation function $A: L^n \rightarrow L$ is idempotent if and only if it satisfies*

$$\bigwedge_{i=1}^n x_i \leq A(x_1, \dots, x_n) \leq \bigvee_{i=1}^n x_i \tag{4}$$

for all $(x_1, \dots, x_n) \in L^n$.

One can easily prove the following elementary but for our purposes important property of idempotent functions:

Lemma 3.2. *Any projection is idempotent and idempotent aggregation functions form a composition-closed class, i.e. $\text{Id}(L)$ forms a clone.*

We shall call $\text{Id}(L)$ the *idempotent clone* on L . Moreover, as $\text{Id}(L)$ apparently contains the majority functions (2) and (3), for any finite lattice L the idempotent clone is finitely generated by Theorem 2.3. Let us mention that the proof of this fact does not give any algorithm how to produce generating sets of idempotent clones, as well as it does not yield to any a priori estimates of arities of generating functions.

Let L be a bounded lattice and $a \in L$. Define the binary functions $\text{med}_a : L^2 \rightarrow L$ and $\chi_a : L^2 \rightarrow L$ by stipulation

$$\text{med}_a(x, y) = (x \wedge y) \vee (a \wedge (x \vee y)), \tag{5}$$

$$\chi_a(x, y) = \begin{cases} x \vee y, & \text{if } x \geq a, \\ x \wedge y, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{6}$$

It can be easily seen that for all $a \in L$, the functions med_a and χ_a represent binary idempotent aggregation functions. To justify the notation med_a , this function is in fact derived from one of the ternary medians (2):

$$\text{med}_a(x, y) = \text{med}_\wedge(x \wedge y, a, x \vee y).$$

Similarly, the function χ_a represents an idempotent version of the characteristic function above a .

In the sequel we will show that the lattice operations and the functions defined by (5) and (6) respectively, generate the idempotent clone $\text{Id}(L)$.

To simplify further notation and calculations, for each $a \in L$ and $n \geq 3$ we define the n -ary analogue $\chi_a^n : L^n \rightarrow L$ of the binary function χ_a as follows:

$$\chi_a^n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \bigvee_{i=1}^n x_i, & \text{if } x_1 \geq a, \\ \bigwedge_{i=1}^n x_i, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7}$$

Lemma 3.3. *Let $a \in L$ be an arbitrary element. For any $n \geq 2$ the function χ_a^n can be obtained as a composition of the function χ_a and the n -ary projections.*

Proof. We proceed by induction on n . If $n = 2$, the assertion is trivial. Hence, assume that for $n \geq 2$ the statement is valid. Then we claim that

$$\chi_a^{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \chi_a(\chi_a^n(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}).$$

Assume first $x_1 \geq a$. Then $\chi_a^n(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{i=1}^n x_i \geq a$, and we obtain

$$\chi_a(\chi_a^n(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) = \bigvee_{i=1}^n x_i \vee x_{n+1} = \bigvee_{i=1}^{n+1} x_i.$$

Secondly, if $x_1 \not\geq a$ we have $\chi_a^n(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^n x_i \not\geq a$ and, consequently,

$$\chi_a(\chi_a^n(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) = \bigwedge_{i=1}^n x_i \wedge x_{n+1} = \bigwedge_{i=1}^{n+1} x_i.$$

□

Further, for $n \geq 2$ and $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in L^n$ put

$$\mu_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^n \chi_{a_i}^n(x_i, \dots, x_1, \dots, x_n). \tag{8}$$

Informally, the function $\mu_{\mathbf{a}}$ is the meet of the functions $\chi_{a_i}^n(x_i, \dots, x_1, \dots, x_n)$, where x_1 and x_i interchanged their positions. Note that we omit the symbol denoting the arity of the function $\mu_{\mathbf{a}}$, since it is implicitly given by the arity of the tuple $\mathbf{a} \in L^n$. Obviously, each of the functions $\mu_{\mathbf{a}}$ is idempotent and, with respect to Lemma 3.3, it can be composed by the projections and the set $\{\chi_a \mid a \in L\}$ of binary functions defined by (6).

Lemma 3.4. *Let $n \geq 2$ and $\mathbf{a} \in L^n$ be arbitrary. Then for all $\mathbf{x} \in L^n$,*

$$\mu_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \bigvee_{i=1}^n x_i, & \text{if } \mathbf{x} \geq \mathbf{a}, \\ \bigwedge_{i=1}^n x_i, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{9}$$

Proof. Assume $\mathbf{x} \geq \mathbf{a}$. Then $x_i \geq a_i$ for all $i \in \{1, \dots, n\}$ and from (7) we have $\chi_{a_i}^n(x_i, \dots, x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{j=1}^n x_j$. Hence

$$\mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \bigwedge_{l=1}^n \left(\bigvee_{j=1}^n x_j \right) = \bigvee_{j=1}^n x_j.$$

If $\mathbf{x} \not\geq \mathbf{a}$, then $x_j \not\geq a_j$ for some $j \in \{1, \dots, n\}$. From (7) we obtain

$$\chi_{a_j}^n(x_j, \dots, x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{l=1}^n x_l \leq \chi_{a_i}^n(x_i, \dots, x_1, \dots, x_n)$$

for all $i \in \{1, \dots, n\}$, which according to (8) yields $\mu_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \bigwedge_{l=1}^n x_l$. \square

Further, given any n -ary idempotent aggregation function A on L and $\mathbf{a} \in L^n$, define the n -ary (idempotent) aggregation function $h_{\mathbf{a}}^A : L^n \rightarrow L$ as follows:

$$h_{\mathbf{a}}^A(x_1, \dots, x_n) = \mu_{\mathbf{a}}(x_1, \dots, x_n) \wedge \text{med}_{A(\mathbf{a})} \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i, \bigvee_{i=1}^n x_i \right). \tag{10}$$

Lemma 3.5. *Let $n \geq 2$ and $\mathbf{a} \in L^n$ be arbitrary. Then for all $\mathbf{x} \in L^n$,*

$$h_{\mathbf{a}}^A(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \text{med}_{A(\mathbf{a})} \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i, \bigvee_{i=1}^n x_i \right), & \text{if } \mathbf{x} \geq \mathbf{a}, \\ \bigwedge_{i=1}^n x_i, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{11}$$

Proof. Recall that by Lemma 3.1 the inequality

$$\bigwedge_{i=1}^n x_i \leq \text{med}_{A(\mathbf{a})} \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i, \bigvee_{i=1}^n x_i \right) \leq \bigvee_{i=1}^n x_i$$

holds for all $\mathbf{x} \in L^n$. Hence, for $\mathbf{x} \geq \mathbf{a}$, with respect to (9) of Lemma 3.4 we obtain

$$h_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}) = \bigvee_{i=1}^n x_i \wedge \text{med}_{A(\mathbf{a})} \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i, \bigvee_{i=1}^n x_i \right) = \text{med}_{A(\mathbf{a})} \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i, \bigvee_{i=1}^n x_i \right),$$

while for $\mathbf{x} \not\geq \mathbf{a}$ we have

$$h_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}) = \bigwedge_{i=1}^n x_i \wedge \text{med}_{A(\mathbf{a})} \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i, \bigvee_{i=1}^n x_i \right) = \bigwedge_{i=1}^n x_i.$$

\square

Theorem 3.6. *Let $A : L^n \rightarrow L$ be an n -ary idempotent aggregation function on a finite lattice L . Then*

$$A(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{a} \in L^n} h_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}).$$

Proof. Let $\mathbf{x} \in L^n$ be fixed. We proceed by direct calculations:

$$\begin{aligned} \bigvee_{\mathbf{a} \in L^n} h_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}) &= \bigvee_{\mathbf{a} \in L^n, \mathbf{a} \leq \mathbf{x}} h_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}) \vee \bigvee_{\mathbf{a} \in L^n, \mathbf{a} \not\leq \mathbf{x}} h_{\mathbf{a}}^A(\mathbf{x}) \stackrel{(1)}{=} \\ &\bigvee_{\mathbf{a} \in L^n, \mathbf{a} \leq \mathbf{x}} \text{med}_{A(\mathbf{a})} \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i, \bigvee_{i=1}^n x_i \right) \vee \bigvee_{\mathbf{a} \in L^n, \mathbf{a} \not\leq \mathbf{x}} \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i \right) \stackrel{(2)}{=} \\ &\bigvee_{\mathbf{a} \in L^n, \mathbf{a} \leq \mathbf{x}} \text{med}_{A(\mathbf{a})} \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i, \bigvee_{i=1}^n x_i \right) \stackrel{(3)}{=} \text{med}_{A(\mathbf{x})} \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i, \bigvee_{i=1}^n x_i \right) \stackrel{(4)}{=} A(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

where (1) follows from Lemma 3.5, (2) is due to Lemma 3.1, (3) follows from the fact that $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$ implies $\text{med}_{A(\mathbf{a})}(\bigwedge \mathbf{x}, \bigvee \mathbf{x}) \leq \text{med}_{A(\mathbf{x})}(\bigwedge \mathbf{x}, \bigvee \mathbf{x})$ and finally, (4) is due to Lemma 3.1. \square

Observe, that for $a = 0_L$, $\chi_{0_L}(x, y) = x \vee y$ and $\text{med}_{0_L}(x, y) = x \wedge y$, while for $a = 1_L$ we have $\text{med}_{1_L}(x, y) = x \vee y$. Consequently, the functions χ_{0_L} , med_{0_L} and med_{1_L} can be omitted from the generating set.

We have proved the following corollary:

Corollary 3.7. *For any finite n -element lattice L , the set of binary functions $\{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_a(x, y) \mid a \in L \setminus \{0_L\}\} \cup \{\text{med}_a(x, y) \mid a \in L \setminus \{0_L, 1_L\}\}$ generates the idempotent clone $\text{Id}(L)$. The number of generators is bounded from above by $2n - 1$.*

In the sequel, the generating sets of $\text{Id}(L)$ containing the lattice operations, functions χ_a for $a \in I \subseteq L$ and med_a for $a \in J \subseteq L$ will be referred to as (χ, med) -generating sets. Obviously, in Corollary 3.7 an example of a (χ, med) -generating set is described.

Remark 3.8. In order to generate the idempotent clone $\text{Id}(L)$, the dual approach to the presented one can be used. More precisely, for any $a \in L$ one can define the dual functions χ_a^* and med_a^* as follows:

$$\chi_a^*(x, y) = \begin{cases} x \wedge y, & \text{if } x \leq a, \\ x \vee y, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{12}$$

$$\text{med}_a^*(x, y) = (x \vee y) \wedge (a \vee (x \wedge y)). \tag{13}$$

Using dual arguments, it can be shown that the idempotent clone $\text{Id}(L)$ can also be generated by the set $\{\wedge, \vee\} \cup \{\chi_a^* \mid a \in L \setminus \{1_L\}\} \cup \{\text{med}_a^* \mid a \in L \setminus \{0_L, 1_L\}\}$. Note that in this case, any idempotent aggregation function $A: L^n \rightarrow L$ has the expression

$$A(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{a} \in L^n} \left(\mu_{\mathbf{a}}^*(\mathbf{x}) \vee \text{med}_{A(\mathbf{a})}^* \left(\bigwedge_{i=1}^n x_i, \bigvee_{i=1}^n x_i \right) \right),$$

for all $\mathbf{x} \in L^n$, where $\mu_{\mathbf{a}}^*$ represents the dual version of the function defined by (8).

There is an important question whether the above mentioned upper bound $2n - 1$ for the (χ, med) -generating sets is optimal. By optimality here we mean the minimal number of generators $\chi_a(x, y)$ and $\text{med}_a(x, y)$ which together with the lattice operations \vee, \wedge are needed in order to generate $\text{Id}(L)$ for any n -element lattice L . In what follows we show that when L is an n -element chain, the mentioned upper bound will be achieved.

Theorem 3.9. *Let L be a finite chain with $n \geq 3$ elements. Then the set $G = \{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_a \mid a \in L \setminus \{0_L\}\} \cup \{\text{med}_a \mid a \in L \setminus \{0_L, 1_L\}\}$ is a minimal (with respect to set inclusion) (χ, med) -generating set of $\text{Id}(L)$.*

Proof. For the sake of simplicity, let $L = \{1, 2, \dots, n\}$ be the finite chain with the usual order $1 < 2 < \dots < n$. Note that in this case $0_L = 1$ and $1_L = n$. According to Corollary 3.7, the set G generates the idempotent clone $\text{Id}(L)$. We prove that G is minimal, i.e., no proper subset of G generates $\text{Id}(L)$.

First we show that for any $i \in \{2, \dots, n\}$, the set $G_i = G \setminus \{\chi_i\}$ does not generate $\text{Id}(L)$. For this, we find a subset $B_i \subseteq L^2$ such that B_i is preserved by all the functions from G_i , but which is not preserved by the function χ_i . According to the Baker-Pixley theorem (see Remark 2.2), this yields that χ_i does not belong to the clone generated by the set G_i . As $\chi_i \in \text{Id}(L)$, this implies $[G_i] \subsetneq \text{Id}(L)$.

For $i \in \{2, \dots, n - 1\}$ we put $B_i = \{(i, i - 1), (i, i), (i + 1, i + 1)\}$. The set B_i forms a chain in L^2 , which is evidently a sublattice of L^2 , hence B_i is preserved by the lattice operations. If $j \leq i - 1$, then χ_j coincides with the lattice operation \vee when applied component-wise on elements of B_i . Thus the set B_i is also preserved by the function χ_j . Similarly, for $j \geq i + 1$ the function χ_j coincides with \wedge when applied component-wise on elements of B_i , except the case when $j = i + 1$ and the pair $(i + 1, i + 1)$ being the first argument. In this case $\chi_{i+1}((i + 1, i + 1), (x, y)) = (i + 1, i + 1)$ for any $(x, y) \in B_i$, and the set B_i is preserved by all the functions $\chi_j, j \geq i + 1$. However, the function χ_i does not preserve B_i , since

$$\chi_i((i, i - 1), (i + 1, i + 1)) = (\chi_i(i, i + 1), \chi_i(i - 1, i + 1)) = (i + 1, i - 1) \notin B_i.$$

Further, we show that B_i is preserved by all the functions med_j for $j \in \{2, \dots, n - 1\}$. Observe that med_j are commutative and for $x \leq y$ we have

$$\text{med}_j(x, y) = \begin{cases} x, & \text{if } j \leq x, \\ j, & \text{if } x < j < y, \\ y, & \text{if } j \geq y. \end{cases}$$

Since $\text{med}_j((i, i - 1), (i, i)) = (i, i - 1)$ if $j \leq i - 1$, $\text{med}_j((i, i - 1), (i, i)) = (i, i)$ otherwise, and $\text{med}_j((i, i - 1), (i + 1, i + 1)) = (i, i - 1)$ if $j \leq i - 1$, $\text{med}_j((i, i - 1), (i, i)) = (i, i)$ if $j = i$, $\text{med}_j((i, i - 1), (i, i)) = (i + 1, i + 1)$ otherwise, it can be easily seen that B_i is preserved by med_j .

For $i = n$ we put $B_n = \{(n, n - 1), (n - 1, n - 1), (n - 2, n - 2)\}$. Similarly, as in the previous case it can be shown that B_n is preserved by all the functions from G_n . On the other hand,

$$\chi_n((n, n - 1), (n - 2, n - 2)) = (\chi_n(n, n - 2), \chi_n(n - 1, n - 2)) = (n, n - 2) \notin B_n.$$

This shows that any of the functions $\chi_i, i \in \{2, \dots, n\}$, cannot be omitted from the generating set G .

In the second part of the proof we show that the same is valid for the medians. For $i \in \{2, \dots, n - 1\}$ we put $H_i = G \setminus \{\text{med}_i\}$ and $C_i = (L \setminus \{i\})^2$. Obviously, $C_i \subseteq L^2$ and we show that it is preserved by all the functions from the set H_i . Clearly, $L \setminus \{i\}$ is a sublattice of L and so C_i is a sublattice of L^2 as well. If $f \in H_i$, it is defined via lattice operations and possibly using a constant from $L \setminus \{i\}$ in the case of median functions. Hence, it follows that for any $x, y \in L \setminus \{i\}$ we have $f(x, y) \in L \setminus \{i\}$. From this it can be easily seen that C_i is preserved by all the functions from H_i .

On the other hand, for med_i we obtain

$$\text{med}_i((1, n), (n, 1)) = (\text{med}_i(1, n), \text{med}_i(n, 1)) = (i, i),$$

which yields that med_i does not belong to the clone generated by the set H_i . \square

Observe that considering a general bounded lattice (L, \wedge, \vee) , two types of L -valued Sugeno integrals (coinciding with the original Sugeno integral [18] if $L = [0, 1]$ is the standard real unit interval equipped with the usual ordering of reals) were introduced. For a fixed positive integer n , denote $N = \{1, \dots, n\}$. A monotone set function $\mu: 2^N \rightarrow L$ with $\mu(\emptyset) = 0$ and $\mu(N) = 1$ which is an order homomorphism is called an L -capacity. Then the mappings $\text{Su}_\mu: L^n \rightarrow L$ and $\text{Su}_\mu^*: L^n \rightarrow L$ given by

$$\text{Su}_\mu(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{E \subseteq N} \left(\mu(E) \wedge \bigwedge_{i \in E} x_i \right)$$

and

$$\text{Su}_\mu^*(x_1, \dots, x_n) = \bigwedge_{E \subseteq N} \left(\mu(N \setminus E) \vee \bigvee_{i \in E} x_i \right),$$

are called a conjunctive and a disjunctive Sugeno integral, respectively. Moreover, these integrals are idempotent aggregation functions on L . Observe that if L is a distributive lattice, then both types of the Sugeno integral on L coincide.

Now, an interesting problem opens, namely what is a role of Sugeno integrals for generating the idempotent clone on L .

4. Conclusion

In this paper we have presented a binary generating set of the idempotent aggregation clones on finite lattices. We have also discussed the minimality of this generating set.

We believe that our results will be convenient also for the analysis of other special classes of idempotent aggregation functions on lattices, or for explaining the role of Sugeno integrals for generating the idempotent clone.

Acknowledgments

The first author was supported by the project of [Grant Agency of the Czech Republic \(GAČR\)](#) no. 18-06915S and by the project MSMT Mobility 7AMB17AT054; the second author by the IGA project of the Faculty of Science [Palacký University Olomouc PrF2018012](#); the third author by the project of Grant Agency of the Czech Republic (GAČR) no. 18-06915S and by the Slovak [VEGA Grant 1/0420/15](#); the fourth author by the IGA project of the Faculty of Science [Palacký University Olomouc PrF2018012](#) and by the [Slovak Research and Development Agency](#) under the contract No. [APVV-16-0073](#).

References

- [1] G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo, *A Practical Guide to Averaging Functions*, Springer, 2016.
- [2] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, Studies in Fuzziness and Soft Computing, 221, Springer, 2007.
- [3] M. Botur, R. Halaš, R. Mesiar, J. Pócs, On generating of idempotent aggregation functions on finite lattices, *Inf. Sci.* 430–431 (2018) 39–45.
- [4] S. Burris, H.P. Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, Springer-Verlag, 1981.
- [5] M. Couceiro, J.L. Marichal, Characterizations of discrete sugeno integrals as polynomial functions over distributive lattices, *Fuzzy Sets Syst.* 161 (2010) 694–707.
- [6] M. Couceiro, J.L. Marichal, Associative polynomial functions over bounded distributive lattices, *Order* 28 (2011) 1–8.
- [7] B. Csákány, Minimal clones - a minicourse, *Algebra Universalis* 54 (2005) 73–89.
- [8] M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, *Aggregation Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [9] R. Halaš, R. Mesiar, J. Pócs, A new characterization of the discrete sugeno integral, *Inf. Fusion* 29 (2016) 84–86.
- [10] R. Halaš, R. Mesiar, J. Pócs, Congruences and the discrete sugeno integrals on bounded distributive lattices, *Inf. Sci.* 367–368 (2016) 443–448.
- [11] R. Halaš, R. Mesiar, J. Pócs, Generators of aggregation functions and fuzzy connectives, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 24 (6) (2016) 1690–1694.
- [12] R. Halaš, J. Pócs, On lattices with a smallest set of aggregation functions, *Inf. Sci.* 325 (2015) 316–323.
- [13] R. Halaš, J. Pócs, On the clone of aggregation functions on bounded lattices, *Inf. Sci.* 329 (2016) 381–389.
- [14] K. Kaarli, A.F. Pixley, *Polynomial Completeness in Algebraic Systems*, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton, Florida, 2001.
- [15] S. Kerkhoff, R. Pöschel, F.M. Schneider, A short introduction to clones, *Electron. Notes Theor. Comput. Sci.* 303 (2014) 107–120.
- [16] D. Lau, *Function Algebras on Finite Sets*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [17] R. McKenzie, G. McNulty, W. Taylor, *Algebras, Lattices and Varieties, I*, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, California, 1987.
- [18] M. Sugeno, *Theory of Fuzzy Integrals and its Applications*, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, 1974 Ph.d. thesis.



On the minimality of some generating sets of the aggregation clone on a finite chain

Radomír Halaš^{a,*}, Zbyněk Kurač^a, Jozef Pócs^{a,b}

^a Palacký University Olomouc, Faculty of Science, Department of Algebra and Geometry, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc, Czech Republic

^b Mathematical Institute, Slovak Academy of Sciences, Grešákova 6, 040 01 Košice, Slovakia

ARTICLE INFO

Article history:

Received 16 April 2020

Received in revised form 6 January 2021

Accepted 18 February 2021

Available online 27 February 2021

2000 MSC:

06A15

Keywords:

Aggregation clone

Minimal (χ, \oplus) -generating set

Chain

Aggregation functions

ABSTRACT

Clone theory plays an important role in studying aggregation functions on bounded posets or bounded lattices. Several important classes of aggregation functions on a bounded lattice L form a clone, particularly the set of all aggregation functions on L , the so-called full aggregation clone on L . For any finite lattice L , this clone is known to be finitely generated and various generating sets and their constructions have been presented in recent papers.

The aim of this paper is to extend previous results concerning generating sets of aggregation clones on finite chains. Namely, the objective is to discuss the minimality of certain generating bases, the so-called (χ, \oplus) -generating sets.

© 2021 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

Aggregation theory has its roots in ancient Greece where several kinds of means were already considered, cf. [1]. It is a process when (usually numerical) data are merged in a single output. Mathematical theory of aggregation is then described by the so-called aggregation functions satisfying some natural widely accepted constraints. Nowadays, it is a rapidly growing field of mathematics where even non-ordered scales are considered. Traditionally, the major part of aggregation theory deals with some real interval scales, the results are summarized e.g. in the monographs by Beliakov et al. [4,5] or Grabisch et al. [11].

Classical theory of aggregation is based on numerical scales. However, during the last decades it turned out that this approach cannot be applied in many natural practical situations. Consequently, more abstract scales were considered, in particular those forming a lattice or a poset. For example, in information sciences, and in particular for subjective decision problems, typical scales deal with bounded (distributive) lattices. Among different papers dealing with aggregation functions acting on lattices we recall e.g. the seminal papers [8,9] or our recent papers [15,17,18].

One of the key observations concerning sets of aggregation functions on bounded posets is that they form a clone. The clone theory has its origin in logic where algebras of functions modeling logical connectives have been considered. Clones acting on non-empty sets have been studied for decades and many results on clones can be found e.g. in the monographs

* Corresponding author.

E-mail addresses: radomir.halas@upol.cz (R. Halaš), zbynek.kurac01@upol.cz (Z. Kurač), pocs@saske.sk (J. Pócs).

[10,20,22]. It is worth noticing that the clone theory has many important applications in various branches of science, especially in discrete mathematics and information sciences. For example clone theory plays a crucial role in solving many natural problems which can be modeled as the so-called constraint satisfaction problems (CSP, for short).

Clones of functions are, roughly speaking, sets of functions containing all the projections and being composition-closed. Particular classes of aggregation functions can be seen as special clones, ranging from the smallest one (all the projections) to the largest one (all aggregation functions of a given lattice L). To be more specific, we mention two important classes of functions, namely the class of all idempotent aggregation functions on L , and its subclass of idempotent lattice polynomials (i.e., Sugeno integrals, see [8,9]). The possible complexity of the aforementioned clones can be reduced when we look at their generating sets, i.e., subsets of aggregation functions from the considered clone such that their compositions generate all members of that clone. This problem was discussed for idempotent lattice polynomials on a bounded distributive lattice L in [8,9], see also [13,14], and for all idempotent aggregation functions on a bounded lattice L in [7,19].

In [18] we have shown that for lattices with at least three elements, no set of unary aggregation functions together with the lattice operations is enough to generate the full aggregation clone. Consequently, at least one aggregation function of arity at least two (and different from the lattice operations) must be present in every generating set. In our recent paper [16] we have presented a general method for constructing various generating sets of the aggregation clone. Our approach was based on extending L -valued capacities, cf. [21], leading to the so-called full systems of aggregation functions. We have shown that aggregation functions from any full system together with certain unary aggregation functions and the lattice operations already form a generating set of the aggregation clone. In comparison with the first result presented in [18], where only one particular type of generating set of the aggregation clone was presented, the method based on full systems allowed to find new families of generating sets. This more flexible method also provided a better upper bound for the number of generators of arity at most two that has been found in [18].

In several application exploiting information techniques the considered data are not real values, but they belong to some different scale, such as linguistic scales equipped with the ordinal structure, for example. Then, mostly finite chains are considered (e.g., in evaluation of students), and the processing of several input data requires then some relevant aggregation technique. Obviously, the number of all possible k -ary aggregation functions on a finite chain is still finite, but depending on the size of the considered chain and the number of input arguments to be aggregated it can be rather large. Therefore, any significant reduction of the number of considered aggregation functions that are needed to cover the clone of all aggregation functions on a fixed finite chain is a challenging problem for all domains where general aggregation functions are considered (image processing, multicriteria decision support, expert systems, etc.). In our paper, we look for minimal sets generating the clone of aggregation functions and we show that, working on an n -element chain, it is enough to consider $2n - 3$ particular aggregation functions forming such a minimal set.

The aim of this paper is to extend previous results about generating sets of aggregation functions with respect to their minimality. The minimality here is understood in the following sense: a set G of generators of a clone is called minimal whenever no proper subset of G generates the clone. More precisely, we will deal with minimality of generating sets of functions mentioned in [18].

The paper is organized as follows. In Section 2 we recall necessary algebraic concepts and tools used in the paper. In particular, we focus on clones as a crucial concept of the paper as well as on the famous theorem of Baker and Pixley as a crucial tool. Next, some basic and preliminary observations concerning generating sets of the full aggregation clone are presented. Section 3 contains our main results concerning the generating sets of the full aggregation clone with respect to their minimality. Special interest is devoted to chains for which it is shown that they can be characterized by the minimality of a specific set of generators.

2. Preliminaries

In this section we briefly recall the basic notions and statements concerning lattices and clones which will be used in the paper. For lattices and clones we refer to the standard monographs [12,22].

A lattice is a partially ordered set (L, \leq) such that for any pair of elements $x, y \in L$ there exists their supremum (the least upper bound, or join) and their infimum (the greatest lower bound, or meet). The operations of join and meet are denoted by $x \vee y$ and $x \wedge y$, respectively. A bounded lattice contains the greatest element, denoted by 1, and the least element, denoted by 0.

An element $x \in L$ is covered by an element $y \in L$ (or equivalently, y covers x), written $x \prec y$, if $x < y$ and there is no element $z \in L$ such that $x < z < y$. An element $x \in L$ is said to be an atom of L if L has a least element 0 and $0 \prec x$. The set of all atoms is denoted by $\text{At}(L)$.

Further we recall the notion of a clone. In universal algebra, a clone is a set \mathcal{C} of finitary operations on a set A such that \mathcal{C} contains all the projections and it is closed under finitary composition (superposition). Let us note that for a positive integer $n \in \mathbb{N}$ and any $i \leq n$, the i -th n -ary projection is given by

$$p_i^n(x_1, \dots, x_n) := x_i. \quad (1)$$

Composition is defined in the following way: let $f : A^m \rightarrow A$ be an m -ary operation and $g_1, \dots, g_m : A^n \rightarrow A$ be a system of n -ary operations. The composition is an n -ary operation given by

$$f(g_1, \dots, g_m)(x_1, \dots, x_n) := f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)), \tag{2}$$

for all $x_1, \dots, x_n \in A$.

It can be easily seen that the system of all clones on A forms a closure system (or intersection closed family) on the set \mathcal{C}_A of all finitary operations on A . Consequently, the system of all clones is a complete lattice with respect to set inclusion. Moreover, given $F \subseteq \mathcal{C}_A$, the least clone $\mathcal{C}(F) = \bigcap \{ \mathcal{C} : F \subseteq \mathcal{C}, \mathcal{C} \text{ clone} \}$ always exists and it is referred to as the clone generated by F . Adopting the universal algebraic point of view, for a given subset $F \subseteq \mathcal{C}_A$ the pair (A, F) can be seen as an algebra. Then the clone generated by F represents exactly the family of all term operations of the algebra (A, F) .

Characterization of clones is closely related to the preservation of certain relations. Let $\rho \subseteq A^d$ be a d -ary relation on A , and $f : A^n \rightarrow A$ an n -ary operation on A . Then f preserves ρ , or ρ is invariant with respect to f , if for any $d \times n$ matrix (b_{ij}) of elements of A all the columns of which belong to the relation ρ , then the same is valid for the d -tuple, arising when applying f to the rows of the considered matrix, i.e.,

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{d1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{d2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{dn} \end{pmatrix} \in \rho \Rightarrow \begin{pmatrix} f(b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1n}) \\ f(b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2n}) \\ \vdots \\ f(b_{d1}, b_{d2}, \dots, b_{dn}) \end{pmatrix} \in \rho.$$

The fact that a function f preserves ρ will be denoted by $f \triangleleft \rho$. For a family $F \subseteq \mathcal{C}_A$ of operations, $\text{Inv}(F)$ denotes the set of all relations invariant with respect to all operations in F , i.e., $\text{Inv}(F) = \{ \rho : (\exists n \in \mathbb{N}, \rho \subseteq A^n) \text{ and } (\forall f \in F, f \triangleleft \rho) \}$. Since the basic operations in the direct power of algebras are computed pointwise, any d -ary relation $\rho \in \text{Inv}(F)$ can be seen as a subalgebra of the d -th power of the underlying algebra (A, F) .

In what follows we recall the famous Baker-Pixley theorem, which gives a very strong tool for the investigation of clones on finite sets. Its application is closely related to the presence of the so-called near-unanimity operation.

Let $d \in \mathbb{N}$ be a positive integer, $d \geq 2$. An operation $g : A^{d+1} \rightarrow A$ is said to be a near-unanimity operation if for all $x, y \in A$ the following identities are valid

$$g(x, \dots, x, y) = g(x, \dots, x, y, x) = \dots = g(y, x, \dots, x) = x,$$

i.e., if g reflects arguments which are unanimous except for one.

In the case of lattices, 3-ary near-unanimity operations (called majority functions) can be obtained using the lattice operations of join and meet, respectively. These operations are defined by stipulations

$$g_{\vee}(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z), \tag{3a}$$

$$g_{\wedge}(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z). \tag{3b}$$

A classical theorem of Baker and Pixley [6] states that if A is a finite algebra with a $(d + 1)$ -ary near-unanimity term and f is an n -ary operation on A , then f preserves every subuniverse of A^d if and only if f is representable by a term in A . Using clone theory formulation we obtain:

Proposition 2.1. Let A be a finite set, $F \subseteq \mathcal{C}_A$ and assume that the clone $\mathcal{C}(F)$ generated by F contains a $(d + 1)$ -ary near-unanimity operation. Then for any $f \in \mathcal{C}_A$ we have

$$f \in \mathcal{C}(F) \text{ iff } f \triangleleft \rho \text{ for all } d\text{-ary relations } \rho \in \text{Inv}(F).$$

Due to the Baker-Pixley theorem it is known that every clone \mathcal{K} over a finite domain A containing a near-unanimity operation is finitely generated, i.e., there exists a finite set $F \subseteq \mathcal{C}_A$ of functions such that $\mathcal{K} = \mathcal{C}(F)$.

Further, we recall the definition of aggregation function on a bounded poset. Given a bounded poset P with 0 and 1, a function $f : P^n \rightarrow P$ is called an aggregation function if it is:

- (i) nondecreasing, i.e., for any $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in P^n$
 $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, i.e., $x_i \leq y_i$ for all $i = 1, \dots, n$, implies $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$,
- (ii) fulfills the boundary conditions
 $f(0, \dots, 0) = 0$ and $f(1, \dots, 1) = 1$.

It can be easily seen that the family of all aggregation functions on a bounded poset forms a clone, denoted by $\text{Agg}(P)$ and called the aggregation clone of P .

Obviously, considering a bounded lattice L , the operations join and meet are binary aggregation functions. Consequently, for a finite lattice L its majority functions g_{\vee}, g_{\wedge} belong to the aggregation clone $\text{Agg}(L)$, which yields that $\text{Agg}(L)$ is finitely

generated. In [18] a generating set consisting of simple unary and binary aggregation functions was presented. These aggregation functions, beside the two lattice operations, are defined in the following way:

Let $a \in L$ be an element. We put $\chi_a : L \rightarrow L$ as

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \geq a, x \neq 0; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{4}$$

Further, for $b \in L$ we define a binary function $\oplus_b : L \times L \rightarrow L$ by

$$x \oplus_b y = \begin{cases} 1, & \text{if } x = 1, y = 1; \\ 0, & \text{if } x = 0, y = 0; \\ b, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5}$$

It can be easily verified that both χ_a and \oplus_b are aggregation functions. Let us note that for $a \neq 0$, the function χ_a represents a characteristic function of the principal filter $F(a) = \{x \in L : x \geq a\}$ generated by the element a , while \oplus_b can be seen as “al-most” constant aggregation function.

As one of the main results from [18] we recall the following proposition:

Proposition 2.2. Let L be a finite lattice. Then the aggregation clone $\text{Agg}(L)$ on L can be generated by the lattice operations \vee, \wedge , by the functions $\chi_a, a \in L$, defined by (4) and by the functions $\oplus_b, b \in L$, defined by (5).

Example 2.3. Consider the binary aggregation function f defined on a three element chain L with elements $0 < a < 1$ which is depicted in Fig. 1.

We provide a formula expressing the function f as a composition of functions (4) and (5) mentioned in Proposition 2.2. Involving considerations from [18] and using distributivity of L , we have:

$$f(x, y) = [(\chi_a(x) \vee \chi_a(y)) \wedge (x \oplus_0 y)] \vee [\chi_1(x) \wedge (x \oplus_1 y)] \vee [((\chi_a(x) \wedge \chi_a(y)) \vee \chi_1(y)) \wedge (x \oplus_a y)]. \tag{6}$$

Remark 2.4. Once a generating set G is considered, another one with functions of arbitrary high arity can be easily constructed. For an n -ary aggregation function $f \in G$ and $m \geq 1$ define an $(n + m)$ -ary function \bar{f} by

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n, \dots, x_{n+m}) = f(x_1, \dots, x_n),$$

i.e., the “new” function \bar{f} depends only on the first n variables. Obviously, the set $\bar{G} = \{\bar{f} : f \in G\}$ is a generating set as well.

This simple construction shows that there exists a countable system of generating sets of $\text{Agg}(L)$ which are pairwise disjoint. Obviously, as the set of all finitary aggregation functions defined on a finite set is countable, any system with such properties is at most countable.

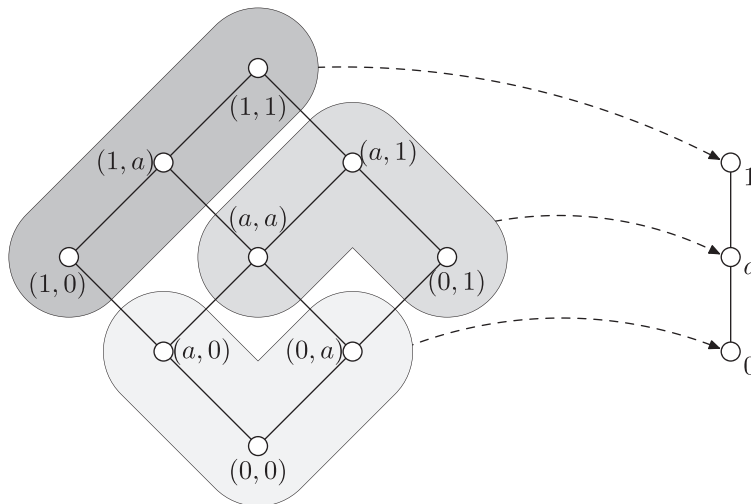


Fig. 1. A binary aggregation function $f : L^2 \rightarrow L$.

The paper is focused on a simple generating set mentioned in Proposition 2.2. The simplicity of this generating set is two-fold. Firstly, the generating functions are of minimal possible arities (cf. [18] where it was shown that for $|L| \geq 3$ at least one aggregation function different from the lattice operations of arity higher than 1 must be present in any generating set). Secondly, the generating functions (beside the lattice operations) attain only two or three values, respectively.

Hence, we formally introduce the notion of a (χ, \oplus) -generating set of the aggregation clone.

Definition 2.5. Let L be a finite lattice. A set $\{\vee, \wedge\} \cup S$ is said to be a (χ, \oplus) -generating set of $\text{Agg}(L)$, provided $S \subseteq \{\chi_a : a \in L\} \cup \{\oplus_b : b \in L\}$ and $\{\vee, \wedge\} \cup S$ generates the aggregation clone $\text{Agg}(L)$.

Going back to Example 2.3, one can easily verify that not all of the aggregation functions (4) and (5) described in Proposition 2.2 are needed in order to generate the aggregation clone. Indeed, the formula (6) can be expressed in the following form:

$$f(x, y) = [((x \oplus_1 x) \vee (y \oplus_1 y)) \wedge (x \oplus_0 y)] \vee [(x \oplus_0 x) \wedge (x \oplus_1 y)] \vee [(((x \oplus_1 x) \wedge (y \oplus_1 y)) \vee (y \oplus_0 y)) \wedge (x \oplus_a y)].$$

In the following section we will investigate which of them can be omitted in general.

3. Characterization of chains by minimality of generating sets

It is well known that vector spaces are completely determined by their bases. For finitely dimensional vector spaces all bases have the same number of elements (equal to the dimension). Analogical situation can be found across the whole mathematics: we have a certain structure and a subset by which it is generated. Concluding, generation is one of the key concepts in mathematics. Usually, generating sets of minimal cardinalities are of the greatest importance.

In this section we will investigate minimality of (χ, \oplus) -generating sets of the aggregation clone. Recall that minimality is related to the inclusion relation, i.e., a (χ, \oplus) -generating set G of the aggregation clone $\text{Agg}(L)$ is minimal if no proper subset of G is (χ, \oplus) -generating. In other words, our aim is to identify minimal elements in the set of all (χ, \oplus) -generating sets partially ordered by the inclusion relation.

For the investigation of minimality we mainly use Baker-Pixley theorem (see Proposition 2.1 and the related remark concerning finite lattices) in its negative form. That is, in order to show that some aggregation function f cannot be omitted from a generating set G , we find a binary relation $\rho \in \text{Inv}(G \setminus \{f\})$ such that f does not preserve ρ . Consequently, f does not belong to the clone generated by $G \setminus \{f\}$, i.e., the set $G \setminus \{f\}$ does not generate $\text{Agg}(L)$.

First, we state some technical results which can be easily checked.

Lemma 3.1. Let L be a finite lattice. Then for any $a, b, c \in L$ such that $a \neq 1, b \neq 1, a \not\leq b$ and $c \neq 0$ the following hold:

- (i) $\chi_0(x) = \chi_c(x \oplus_c x)$ for all $x \in L$.
- (ii) $\chi_1(x) = \chi_a(x \oplus_b x)$ for all $x \in L$.
- (iii) $x \oplus_0 y = \chi_1(x) \wedge \chi_1(y)$ for all $x, y \in L$.
- (iv) $x \oplus_1 y = \chi_0(x) \vee \chi_0(y)$ for all $x, y \in L$.

Let us note that if a lattice L contains the only atom $a \in \text{At}(L)$, then it can be easily verified that χ_0 and χ_a represent the same aggregation function. The following lemma shows that if L possesses more atoms, the functions $\chi_a, a \in \text{At}(L)$, can be expressed by the function χ_0 , too. The proof is straightforward and hence omitted.

Lemma 3.2. Let L be a finite lattice and $a \in \text{At}(L)$ be an atom. Then

$$\chi_a(x) = \chi_0(x \wedge (x \oplus_a x)) \tag{7}$$

for all $x \in L$.

In the light of the previous statements there is a natural question which of the χ and \oplus functions can be omitted from the generating sets. In what follows we will give the answer to this question for aggregation clones on finite chains.

Theorem 3.3. Let L be a finite chain and

$$G = \{\chi_a : a \in L\} \cup \{\oplus_b : b \in L \setminus \{0, 1\}\} \cup \{\wedge, \vee\}.$$

Then the set $G_c = G \setminus \{\oplus_c\}$ does not generate the aggregation clone $\text{Agg}(L)$ for any $c \in L \setminus \{0, 1\}$.

Proof. Let $c \in L \setminus \{0, 1\}$ be an arbitrary element. Denote by L_c the subchain $L \setminus \{c\}$. Note that L_c is closed with respect to the operations \vee and \wedge . Define a binary relation $\rho \subseteq L \times L$ as

$$\rho = \{(x, x) : x \in L_c\}.$$

First, we show that each function from G_c preserves the relation ρ . For the function $\chi_a, a \in L$, applied on a pair $(x, x) \in \rho$ we obtain either $(\chi_a(x), \chi_a(x)) = (1, 1)$ provided $x \geq a$, or $(\chi_a(x), \chi_a(x)) = (0, 0)$ if $x \not\geq a, a \neq 0$. Hence all the functions $\chi_a, a \in L$, preserve the relation ρ .

Further, consider a function $\oplus_b, b \in L \setminus \{c, 0, 1\}$, and pairs $(x, x), (y, y) \in \rho$. We obtain that the pair $(x \oplus_b y, x \oplus_b y)$ is equal to one of the following three possibilities: $(0, 0), (1, 1)$ or (b, b) . In any case, $(x \oplus_b y, x \oplus_b y) \in \rho$, i.e., the relation ρ is invariant with respect to \oplus_b .

For the operations \vee and \wedge let us consider the pairs $(x \vee y, x \vee y)$ and $(x \wedge y, x \wedge y)$, respectively. Since L_c is closed under \vee and \wedge , it follows that both pairs belong to the relation ρ , provided $(x, x), (y, y) \in \rho$. Thus this yields that ρ is invariant with respect to all operations in the set G_c .

If G_c generates the aggregation clone, then according to Baker-Pixley theorem, the relation ρ would be preserved by every aggregation function. However, for the function \oplus_c and the pairs $(0, 0), (1, 1) \in \rho$ we obtain $(0 \oplus_c 1, 0 \oplus_c 1) = (c, c) \notin \rho$. Consequently, the set G_c does not generate the aggregation clone $\text{Agg}(L)$.

Theorem 3.4. *Let L be a finite chain and $b \in L \setminus \{0, 1\}$ be an element such that $b \notin \text{At}(L)$. Then the function χ_b is contained in each (χ, \oplus) -generating set of the aggregation clone $\text{Agg}(L)$.*

Proof. Let $b \in L \setminus \{0, 1\}, b \notin \text{At}(L)$ be an arbitrary element and put

$$G = \{\chi_a : a \in L\} \cup \{\oplus_a : a \in L\} \cup \{\vee, \wedge\}.$$

We show that the set $G_b = G \setminus \{\chi_b\}$ does not generate the clone $\text{Agg}(L)$.

Let us define a binary relation $\rho \subseteq L \times L$ by

$$\rho = \{(c, b)\} \cup \{(x, x) : x \in L\},$$

where c satisfies $c < b$. Note that the assumptions on the element b imply that $c, b \neq 0$ as well as $c, b \neq 1$.

We shall verify that ρ is invariant with respect to all functions from the set G_b , while χ_b does not preserve ρ . Due to Baker-Pixley theorem this yields that the clone generated by G_b differs from the full aggregation clone $\text{Agg}(L)$.

Indeed, let $a \in L \setminus \{b\}$. Evidently, for a pair $(x, x) \in \rho$ we have only two possibilities: either $(\chi_a(x), \chi_a(x)) = (0, 0) \in \rho$, or $(\chi_a(x), \chi_a(x)) = (1, 1) \in \rho$, depending on the mutual position of the elements a and x . Also, considering the pair $(c, b) \in \rho$ we obtain $(\chi_a(c), \chi_a(b)) = (0, 0)$ for $a \leq c$ and $(\chi_a(c), \chi_a(b)) = (1, 1)$ for $a > b$.

Next, consider a function \oplus_a for some $a \in L$. Obviously, for each $x, y \in L$ the relation $(x \oplus_a y, x \oplus_a y) \in \rho$ is valid. Since $c, b \neq 0$ as well as $c, b \neq 1$, it can be easily seen that $(c \oplus_a x, b \oplus_a x) = (c \oplus_a c, b \oplus_a b) = (a, a) \in \rho$ for all $x \in L$. Consequently, the function \oplus_a preserves the relation ρ .

For the operation \vee , consider pairs $(c, b), (x, x) \in \rho$ for some $x \in L$. If $x \leq c$, then $(c \vee x, b \vee x) = (c, b) \in \rho$. For $x > c$ we obtain $(c \vee x, b \vee x) = (x, x) \in \rho$ for all $x \in L$. Evidently $(x \vee y, x \vee y) \in \rho$ for all $x, y \in L$, thus we have shown that the relation ρ is invariant with respect to the operation \vee . Similarly, it can be shown that ρ is invariant also with respect to the operation \wedge .

Finally, the fact that the function χ_b does not preserve the relation ρ is obvious, as $(c, b) \in \rho$, while $(\chi_b(c), \chi_b(b)) = (0, 1) \notin \rho$.

The following theorems provide characterizations of finite chains by means of minimality of certain (χ, \oplus) -generating set of the clone of all aggregation functions. First we formulate the result for finite lattices having at most three elements. We will investigate the cases $n = 2$ and $n = 3$ separately, n denoting the cardinality of a lattice. Let us note that one of the implications of the following theorem can be easily deduced from the well-known fact that the lattice operations on a two-element chain form a minimal generating set of the monotone clone. Despite this fact, we present its elementary proof.

Theorem 3.5. *Let L be a finite lattice. Then the set $\{\vee, \wedge\}$ is a minimal (χ, \oplus) -generating set of the aggregation clone $\text{Agg}(L)$ if and only if L is a two-element chain.*

Proof. Let L be a finite lattice with $|L| \geq 3$. We show that in this case $\{\vee, \wedge\}$ does not generate $\text{Agg}(L)$, hence it is not a minimal (χ, \oplus) -generating set. For this consider the relation $\rho \subseteq L \times L$ such that $\rho = \{(0, 0), (1, 1)\}$ and an aggregation function \oplus_c for some $c \in L \setminus \{0, 1\}$. It can be easily seen that ρ is invariant with respect to the lattice operations, while $(0 \oplus_c 1, 0 \oplus_c 1) = (c, c) \notin \rho$, i.e., \oplus_c does not preserve ρ .

Further, we show that if L is a two-element chain, then $\{\vee, \wedge\}$ is a minimal (χ, \oplus) -generating set of $\text{Agg}(L)$. According to Proposition 2.2, the set $\{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_0, \chi_1\} \cup \{\oplus_0, \oplus_1\}$ generates the aggregation clone. However, it can be easily seen that

$$\chi_0(x) = \chi_1(x) = x \text{ for all } x \in L,$$

as well as

$$x \oplus_0 y = x \wedge y \text{ and } x \oplus_1 y = x \vee y \text{ for all } x, y \in L.$$

This yields that the set $\{\vee, \wedge\}$ generates the clone $\text{Agg}(L)$. As any (χ, \oplus) -generating set contains the lattice operations by definition, the set $\{\vee, \wedge\}$ is obviously minimal.

Theorem 3.6. *Let L be a finite lattice, $|L| \geq 2$ and $a \in L, a \neq 0, a \neq 1$ be an arbitrary element. Then the set $\{\vee, \wedge\} \cup \{\oplus_0, \oplus_a, \oplus_1\}$ is a minimal (χ, \oplus) -generating set of the aggregation clone $\text{Agg}(L)$ if and only if L is a three-element chain.*

Proof. Let L be a finite lattice such that $|L| \geq 4$. We show that the set $G = \{\vee, \wedge\} \cup \{\oplus_0, \oplus_a, \oplus_1\}$ does not generate the aggregation clone. Let $b \in L$ with $b \notin \{0, a, 1\}$ and consider the relation $\rho = \{(0, 0), (a, a), (1, 1)\}$. As the set $\{0, a, 1\} \subseteq L$ forms a sublattice of L , it follows that ρ is invariant with respect to the lattice operations. Also it can be easily verified that each of the operations $\oplus_0, \oplus_a, \oplus_1$ preserves the relation ρ . However, $(0_{\oplus_b}1, 0_{\oplus_b}1) = (b, b) \notin \rho$, i.e., the operation \oplus_b does not belong to the clone generated by the set G .

Further, we show that if $|L| = 3$, i.e., L is a three-element chain, the set G forms a minimal (χ, \oplus) -generating set of $\text{Agg}(L)$. According to Proposition 2.2, the set $G \cup \{\chi_0, \chi_a, \chi_1\}$ is a generating set of the aggregation clone. Since $a \in L$ is the only atom of L , it follows that χ_0 and χ_a represent the same aggregation function. Also, for all $x \in L$ we obtain $x_{\oplus_0}x = \chi_1(x)$ and $x_{\oplus_1}x = \chi_0(x)$. Hence, the set G generates the aggregation clone $\text{Agg}(L)$.

Due to Theorem 3.3, the operation \oplus_a cannot be omitted from the set G . To show that the similar assertion holds for \oplus_0 , consider the relation $\rho_0 = \{(a, a); (1, 1)\}$. Obviously, ρ_0 is invariant with respect to any member of $G \setminus \{\oplus_0\}$, while it is not preserved by the operation \oplus_0 . Hence, the set $G \setminus \{\oplus_0\}$ is not a generating set of $\text{Agg}(L)$. Analogously, if we consider $\rho_1 = \{(0, 0); (a, a)\}$, we obtain that the operation \oplus_1 must be also present. This shows that G is a minimal (χ, \oplus) -generating set of the aggregation clone on a three-element chain.

Theorem 3.7. *Let $n \geq 4$ be a positive integer and L be an n -element lattice. For an arbitrary atom $a \in \text{At}(L)$ denote*

$$K_a = \{\chi_b : b \in L \setminus \{0, 1, a\}\} \cup \{\oplus_c : c \in L \setminus \{0, 1\}\} \cup \{\vee, \wedge\}. \tag{8}$$

Then the set K_a is a minimal (χ, \oplus) -generating set of the aggregation clone $\text{Agg}(L)$ if and only if the lattice L forms a chain.

Proof. Let $a \in \text{At}(L)$ be an atom and let K_a , given by (8), be a minimal (χ, \oplus) -generating set of the aggregation clone $\text{Agg}(L)$. We show that in this case the lattice L is a chain.

First, assume that there is another atom $b \in \text{At}(L)$. If $n = |L| \geq 5$, there is an element $c \in L \setminus \{0, 1, a, b\}$ such that, due to Lemma 3.1 (i), $\chi_0(x) = \chi_c(x_{\oplus_c}x)$. Consequently, according to (7) of Lemma 3.2, the function χ_b belongs to the clone generated by the set $K_a \setminus \{\chi_b\}$, i.e., K_a is not minimal.

If $n = 4$, then $L = \{0, 1, a, b\}$, a, b atoms. In this case we have

$$\chi_0(x) = x_{\oplus_1}x = (x_{\oplus_a}x) \vee (x_{\oplus_b}x)$$

for all $x \in L$, which similarly as in the previous case yields that $\chi_b \in K_a \setminus \{\chi_b\}$, i.e., K_a is not minimal.

Further, suppose that a is the only atom in L . If L is not a chain, then there is a pair $u, v \in L$ of incomparable elements with $u \wedge v \geq a \neq 0$. Consequently

$$x_{\oplus_{u \wedge v}}y = (x_{\oplus_u}y) \wedge (x_{\oplus_v}y),$$

which yields that $K_a \setminus \{\oplus_{u \wedge v}\}$ generates the aggregation clone $\text{Agg}(L)$ as well.

Thus the minimality of K_a , with respect to generation of $\text{Agg}(L)$, implies that L is a chain.

Conversely, suppose that L is a chain and let $a \in \text{At}(L)$ be the only atom. As $|L| \geq 4$, from Lemma 3.1 we obtain that the functions χ_0, χ_1 and \oplus_0, \oplus_1 can be generated from K_a , while $\chi_a = \chi_0$ as a is the only atom of L . Hence, according to Proposition 2.2 the set K_a is a (χ, \oplus) -generating set of the aggregation clone $\text{Agg}(L)$.

Since L is a chain, according to Theorem 3.3, no aggregation function $\oplus_c, c \in L \setminus \{0, 1\}$ can be omitted from the generating set K_a . Similarly, Theorem 3.4 yields that all functions $\chi_b, b \in L \setminus \{0, 1, a\}$ must be contained in K_a . Thus K_a represents a minimal (χ, \oplus) -generating set of $\text{Agg}(L)$.

4. Possible applications

Clones play an important role in universal algebra. In fact any clone defined on a non-empty base set A represents a family of all term functions corresponding to an algebra with the support A .

Skipping technical difficulties, we shall provide a more detailed explanation of this important fact. An algebra $\mathbf{A} = (A, F)$ is a set A equipped with a family F of finitary operations on it. The set of terms $T_F(X)$ over an algebra $\mathbf{A} = (A, F)$ is the smallest set of symbols containing all variables X , which is closed under the operation symbols from F , i.e., if $f \in F$ is an operation symbol and t_1, \dots, t_n are terms then $f(t_1, \dots, t_n) \in T_F(X)$ as well.

Every n -ary term $t \in \mathsf{T}_F(X)$ induces in the natural way the term operation $\bar{t}^A : A^n \rightarrow A$ and it can be easily seen that the family $\mathcal{T}_F^A = \{\bar{t}^A : t \in \mathsf{T}_F(X)\}$ of all term operations forms a clone on the underlying set A . It is apparent from the definition of a generating set of a clone that if F generates a clone \mathcal{C} on a set A , then $\mathbf{A} = (A, F)$ is an algebra for which $\mathcal{T}_F^A = \mathcal{C}$ holds.

Let us remark that relating clones with term operations of suitable algebras appears in many situations across mathematics. For example, taking the two-element Boolean algebra $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ with operations \wedge, \vee and complementation ι , it follows that the clone of all term operations on $\mathbf{2}$ is equal to the clone of all operations on the set $\{0, 1\}$. This is an algebraic version of the well-known fact of propositional logic that every truth table can be realized by a formula in conjunctive (disjunctive) normal form.

Specifically, if L is a finite lattice and G is a (χ, \oplus) -generating set of the aggregation clone, then $\mathcal{T}_G^L = \text{Agg}(L)$, where $\mathbf{L} = (L, G)$ is the corresponding algebra. It is well-known that $\text{Agg}(L)$ is generated by the lattice operations if and only if L is a two element lattice, cf. [Theorem 3.5](#). Hence the algebra $\mathbf{L} = (L, G)$ can be seen as an extension of the lattice L in such a way that the extended set of term functions coincides with the family of all aggregation functions.

In the realm of universal algebra, even more can be said about the family \mathcal{T}_F^A of all term operations over an algebra \mathbf{A} . To be more specific, the family \mathcal{T}_F^A equipped with the set of operations F forms the so-called free algebra with countable set of generators in the variety (equational class of algebras) generated by the algebra $\mathbf{A} = (A, F)$. Recall that a free algebra $\mathbf{F}_\mathcal{V}(X)$ over a set X for a class \mathcal{V} of algebras of the same type is an algebra generated by X which belongs to \mathcal{V} and has the universal mapping property, i.e., for every $\mathbf{B} \in \mathcal{V}$ and every function $v : X \rightarrow B$ there is a unique homomorphism $h : \mathbf{F}_\mathcal{V}(X) \rightarrow \mathbf{B}$ extending the mapping v (that is, $v(x) = h(x)$ for all $x \in X$). It is a well-known fact in universal algebra that $\mathbf{F}_\mathcal{V}(X)$ exists for every variety \mathcal{V} and it is unique up to isomorphism. Recall that a variety \mathcal{V} generated by an algebra \mathbf{A} is the smallest variety containing \mathbf{A} and due to the famous Birkhoff's theorem, $\mathcal{V} = \mathbf{HSP}(\mathbf{A})$. Here the operators \mathbf{P}, \mathbf{S} and \mathbf{H} denote (in this order) forming arbitrary direct products of the algebra \mathbf{A} , taking subalgebras and homomorphic images of the respective classes of algebras.

Applying the above mentioned fact to the case of algebra $\mathbf{L} = (L, G)$, L finite, G a (χ, \oplus) -generating set of the aggregation clone, we obtain $\mathbf{F}_\mathcal{V}(X) = (\text{Agg}(L), G)$, X countable, $\mathcal{V} = \mathbf{HSP}(\mathbf{L})$, i.e., the pair $(\text{Agg}(L), G)$ represents a free algebra with countably many generators in the variety $\mathbf{HSP}(\mathbf{L})$. There is a close connection between properties of varieties and the structure of their free algebras. The variety $\mathbf{HSP}(\mathbf{L})$ has some desired properties, e.g., it is finitely generated as L is a finite set, it is congruence distributive since \mathbf{L} has a lattice reduct, etc.

One of the main tools of the study of varieties is determination of identities which are valid in all algebras belonging to this class. In the case of the variety $\mathbf{HSP}(\mathbf{L})$, the identities valid within this class coincide with the set $\Sigma_{\mathbf{L}}$ of all identities satisfied in \mathbf{L} . This can be obtained by describing a finite equational basis, i.e., a finite list of (term) identities of \mathbf{L} that imply all the other identities valid in \mathbf{L} . Note that if a finite algebra is a member of a congruence distributive variety of a finite type (only finite number of operations are presented), then it has a finite equational basis.

Consequently, the elements of some equational basis can be used as rewriting rules, allowing to study aggregation functions (free algebra in the variety $\mathbf{HSP}(\mathbf{L})$) by means of the so-called term rewriting systems, cf. [\[2\]](#). Note that a term rewriting system is a set of rewriting rules, identities $l \approx r$ such that the term l is not a single variable and $\text{Var}(l) \supseteq \text{Var}(r)$. These equations are considered only in one direction, e.g. from left to right, and usually rewriting rules are denoted as $l \rightarrow r$.

One can use the term rewriting system approach to aggregation functions for the study of certain kinds of normal forms. In this context, a term t is a normal form with respect to a term rewriting system R if there is no term s such that $t \mapsto s$, where $\mapsto \supseteq R$ represents one-step reduction relation, cf. [\[2,3\]](#) for more details. In our opinion, a normal form associated with any aggregation function may serve as an important tool in the study of questions related to aggregation theory, e.g., it can be used for estimation of the number of particular classes of aggregation functions.

Another possible approach how to tackle issues connected with a process of merging several values in a single representative is to study aggregation functions by means of process algebras, cf. [\[3\]](#). A process algebra represents an approach to study processes via universal algebraic methods, particularly using equational logic. In this case the word process refers to behavior of a system, where a system is anything with observed behavior, e.g., actions of a machine, an execution of a software system, or actions performed by a human being.

The main idea behind the approach to the algebraic study of processes is that a process is something that obeys a certain set of axioms, while axioms are equations (identities) asserting the equality of certain terms. Thus, the approach taken to reason about behavior is axiomatic and uses algebraic tools. There is a view of concurrent processes whereby each process is a term over a certain signature of operator symbols. By interpreting these symbols on nets or transition systems one can find semantical interpretation of considered terms (in our particular case aggregation functions), while considering the relation of derivability between the subsets of terms and terms itself allows to syntactical study of aggregation functions.

5. Conclusion

In this paper we have discussed the minimality of (χ, \oplus) -generating sets of the full aggregation clone on finite chains. These minimal sets were described and it has been shown that its special form provides a characterization of finite chains.

In the future research we intend to extend the results concerning the minimality of certain generating sets of the full aggregation clone also for other types of finite lattices. We also plan to investigate similar problems for other important sub-clones of the full aggregation clone, in particular for the clone of idempotent aggregation functions.

CRediT authorship contribution statement

Radomír Halaš: Conceptualization, Methodology, Investigation. **Zbyněk Kurač:** Investigation. **Jozef Pócs:** Investigation, Writing - original draft.

Declaration of Competing Interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Acknowledgments

The authors were supported by the project of Grant Agency of the Czech Republic (GAČR) No. 18-06915S and by the project MSMT Mobility 8J19AT023; the second author by the IGA project of the Faculty of Science Palacký University Olomouc PrF2020014; the third author by the Slovak Research and Development Agency under the contract No. APVV-16-0073 and by the Slovak VEGA Grant 2/0097/20.

References

- [1] C. Antoine, *Les Moyennes, Que Sais-Je?* [What Do I Know?], vol. 3383, Presses Universitaires de France, Paris, 1998.
- [2] F. Baader, T. Nipkow, *Term rewriting and all that*, Cambridge University Press, 1998.
- [3] J.C.M. Baeten, T. Basten, M.A. Reniers, *Process Algebra: Equational Theories of Communicating Processes*, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 50, Cambridge University Press, 2010.
- [4] G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo, *A practical guide to averaging functions*, Springer, 2016.
- [5] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, Studies in Fuzziness and Soft Computing 221, Springer, 2007.
- [6] K.A. Baker, A.F. Pixley, *Polynomial interpolation and the chinese remainder theorem for algebraic systems*, Math. Zeitschrift 143 (1975) 165–174.
- [7] M. Botur, R. Halaš, R. Mesiar, J. Pócs, *On generating of idempotent aggregation functions on finite lattices*, Inform. Sci. 430–431 (2018) 39–45.
- [8] M. Couceiro, J.-L. Marichal, *Characterizations of discrete Sugeno integrals as polynomial functions over distributive lattices*, Fuzzy Sets Syst. 161 (2010) 694–707.
- [9] M. Couceiro, J.-L. Marichal, *Associative Polynomial Functions over Bounded Distributive Lattices*, Order 28 (2011) 1–8.
- [10] B. Csákány, *Minimal clones - a minicourse*, Algebra Universalis 54 (2005) 73–89.
- [11] M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, *Aggregation Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [12] G. Grätzer, *Lattice Theory: Foundation*, Birkhäuser, Basel, 2011.
- [13] R. Halaš, R. Mesiar, J. Pócs, *A new characterization of the discrete Sugeno integral*, Inform. Fusion 29 (2016) 84–86.
- [14] R. Halaš, R. Mesiar, J. Pócs, *Congruences and the discrete Sugeno integrals on bounded distributive lattices*, Inform. Sci. 367–368 (2016) 443–448.
- [15] R. Halaš, R. Mesiar, J. Pócs, *Generators of Aggregation Functions and Fuzzy Connectives*, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 24 (6) (2016) 1690–1694.
- [16] R. Halaš, R. Mesiar, J. Pócs, *On generating sets of the clone of aggregation functions on finite lattices*, Inform. Sci. 476 (2019) 38–47.
- [17] R. Halaš, J. Pócs, *On lattices with a smallest set of aggregation functions*, Inform. Sci. 325 (2015) 316–323.
- [18] R. Halaš, J. Pócs, *On the clone of aggregation functions on bounded lattices*, Inform. Sci. 329 (2016) 381–389.
- [19] R. Halaš, Z. Kurač, R. Mesiar, J. Pócs, *Binary generating set of the clone of idempotent aggregation functions on bounded lattices*, Inform. Sci. 462 (2018) 367–373.
- [20] S. Kerkhoff, R. Pöschel, F.M. Schneider, *A Short Introduction to Clones*, Electronic Notes Theor. Computer Sci. 303 (2014) 107–120.
- [21] E.P. Klement, R. Mesiar, *On the Expected Value of Fuzzy Events*, Int. J. Uncertainty, Fuzziness Knowl.-Based Syst. 23 (2015) 57–74.
- [22] D. Lau, *Function algebras on finite sets*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.



Transfer-stable means on finite chains

Zbyněk Kurač

Palacky University Olomouc, Faculty of Science, Department of Algebra and Geometry, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc, Czech Republic

Received 15 June 2018; received in revised form 14 September 2018; accepted 22 October 2018

Available online 23 October 2018

Abstract

According to [5], the arithmetic mean is a function characterized by four features: it is non-decreasing, idempotent, symmetric and additive. The first three of them can be naturally converted to the theory of posets but the last one generally can not. Due to this problem, we will replace it with another suitable property, which is called transfer-stability. However, we do not get the exact arithmetic mean but some approximation. These functions will be called transfer-stable means. The first aim of the paper is to show that transfer-stable means on a finite chain form a lattice which is isomorphic to the direct power of a finite chain. The second goal is to create a generating set of transfer-stable means, i.e., means that can generate all other transfer-stable means of the same arity by classical composition of functions. The last goal deals with question of how to generate all transfer-stable means of any arity by binary transfer-stable means only. For this problem we define special transfer-stable means composition.

© 2018 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Arithmetic mean; Finite lattice; Finite chain; Aggregation function; Idempotent function; Symmetric function; Transfer principle

1. Introduction

Aggregation is a process which characterizes a set of observed values by a single value. A function describing this process is called an aggregation function. The definition of the aggregation function as a non-decreasing function satisfying boundary conditions is reasoned for example in ([2], [5]). Probably, the arithmetic mean is the most prominent among all aggregation functions. Let us mention, that means and averages play an important role in aggregation theory and decision making, ([1], [4], [9]). Recall that lattices are partially ordered sets in which finite suprema and infima exist. Lattice theory is quite well established discipline of algebra, for details we recommend the book [6].

Now we could ask how the arithmetic mean converts into the lattice theory. It has been shown (see [5]) that the arithmetic mean is characterized by the following features: it is non-decreasing, idempotent, symmetric and additive. The first three can be easily transformed into the lattice theory. There is a problem with additivity because lattices do not generally possess an addition operation. For this reason, we need to replace the additivity with another suitable property that the arithmetic mean meets. The new property takes into account the fact that the arithmetic mean of the values x and y is the same as the arithmetic mean of the values $x + c$ and $y - c$ (or $x - c$ and $y + c$) for any real number c . This property is called transfer-stability or transfer principle ([10], [11]) and can be easily transformed into

E-mail address: Kury.Z@seznam.cz.

lattices using the covering relation. Using both transfer-stability and idempotency we are able to show the only class of lattices suitable as domains of such functions are chains. As a result, we have converted the arithmetic mean into finite chains. However, the characterization of arithmetic mean no longer applies on the finite chains. Therefore we do not get the exact arithmetic mean on finite subsets of real line but the obtained mean has similar properties. This mean is not the only one. There exists a whole class of such means which are called transfer-stable means.

In the next section we construct a lattice of transfer-stable means with respect to given arity and size of the chain. We can prove that this lattice is isomorphic to the lattice that is the direct power of a corresponding chain. In the case of binary transfer-stable means we will show that they form a Boolean lattice. Another topic of this paper is the study of generators of the set of all transfer-stable means. This problem is divided into two parts. In the first part we find generating transfer-stable means for given arity using the classical composition of functions. In the second part we deal with the general generating set, i.e., means which generate other transfer-stable means on a finite chain of arbitrary arities. However, for the purpose of this research the generation uses a newly created composition rather than the classical composition of functions.

2. The lattice of transfer-stable means

Definition 2.1. Let (L, \leq) be a lattice and $x, y \in L$. Then y covers x (y is a successor of x), written $x < y$, if $x \leq y$, $x \neq y$ and there is no element $z \in L$, $z \neq x$, $z \neq y$, such that $x \leq z \leq y$.

Definition 2.2. Let (L, \leq) be a finite lattice with 0 as the smallest element of L and with 1 as the greatest element of L , and $k \in \mathbb{N}$. A mapping $A : L^k \rightarrow L$ is called a k -ary aggregation function on the lattice L , if it is non-decreasing, i.e., for any $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^k$

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow A(\mathbf{x}) \leq A(\mathbf{y})$$

and it satisfies boundary conditions, i.e.,

$$A(0, \dots, 0) = 0 \quad \text{and} \quad A(1, \dots, 1) = 1.$$

Definition 2.3. An aggregation function $A : L^k \rightarrow L$ on the lattice L is called:

- i) *Idempotent*, if $A(x, \dots, x) = x$ for all $x \in L$.
- ii) *Symmetric*, if

$$A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = A(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k)$$

for all $i, j \in \{1, \dots, k\}$ and $x_i, x_j \in L$.

- iii) *Transfer-stable*, if

$$A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = A(x_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, x_k)$$

for any $i, j \in \{1, \dots, k\}$ and $x_i, y_j \in L$ where $x_i < y_i$ and $y_j < x_j$.

Remark 2.4. In the rest of paper we will denote the arity of an aggregation function by the symbol k and the symbol n indicates the number of elements of lattice.

Idempotent aggregation function or transfer-stable aggregation function can be defined on any lattice L . However, if we combine these properties together, i.e., we get idempotent transfer-stable aggregation function TS , then we only need to work with a chain C , in our case with a finite chain C_n . The problem occurs, for example, in the case of a 4-element lattice $L = \{0, a, b, 1\}$, where $a, b \in L$ are incomparable. Then we would get that $TS(a, a) = TS(b, b)$ which is not possible.

The arithmetic mean on (a subinterval of) real line is an idempotent, symmetric, additive, and non-decreasing function according to [5]. We can not use additivity in our case (on general lattices the addition is not implemented) and we replace it with transfer-stability. We get an idempotent symmetric transfer-stable non-decreasing function. We can easily prove that these properties are not independent as shown by the following proposition.

Proposition 2.5. Let C_n be an n element chain, $n \in \mathbb{N}$. Let $TS : C_n^k \rightarrow C_n$ be a transfer-stable function. Then TS is a symmetric function.

Proof. Let $x_i, x_j \in C_n$ with $x_i \neq x_j$. We can suppose without loss of generality that $x_i < x_j$. By transfer-stability of TS , we have

$$TS(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = TS(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k),$$

which proves symmetry. \square

Moreover, Corollary 4.22 in [5] (p. 144) is not fulfilled for the finite chains, therefore the resulting function is not only one, but there is a set of functions that are a suitable approximation of the arithmetic mean, that is, the resulting functions behave similarly to arithmetic mean. As a result, we obtain the following definition.

Definition 2.6. Transfer-stable mean on a finite chain C_n is a transfer-stable idempotent aggregation function $TS : C_n^k \rightarrow C_n$. Moreover, the class of all transfer-stable means on the finite chain C_n is denoted by the symbol TSM_{C_n} and the symbol $TSM_{C_n}^{(k)}$ denotes all k -ary transfer-stable means on the chain C_n .

Since we are examining the set $TSM_{C_n}^{(k)}$, we could ask whether this set is closed under the composition of functions. The following proposition provides the answer to this question.

Proposition 2.7. Let C_n be a finite chain and let $k, l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Let $A : C_n^k \rightarrow C_n$ be an idempotent aggregation function and $B_1, \dots, B_k : C_n^l \rightarrow C_n$ be transfer-stable means on C_n . Then the function $D = A(B_1, \dots, B_k) : C_n^l \rightarrow C_n$ given by

$$D(\mathbf{x}) = A(B_1(\mathbf{x}), \dots, B_k(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in C_n^l$$

is an l -ary transfer-stable mean on C_n .

Proof. A proof that the function D is an aggregation function is mentioned, for example, in [5]. Verifying that the function D is idempotent and transfer-stable is trivial. \square

Due to transfer-stability, all k -tuples can be divided into classes, that is, the transfer-stable mean divides the lattice C_n^k into individual “layers”.

Definition 2.8. The subset of k -tuples of C_n^k , which are linked together by transfer-stability, is called a *block*, that is, two elements $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C_n^k$ belong to the same block if $TS(\mathbf{x}) = TS(\mathbf{y})$ for all $TS \in TSM_{C_n}^{(k)}$. The blocks containing constant k -tuples, i.e., (x, \dots, x) , are called *side blocks* and the remaining blocks are called *main blocks*.

In definition, idempotence is not needed because it is important only for blocks containing constant k -tuples. Obviously, each block is fully determined by its arbitrary k -tuple, therefore blocks are typed into square brackets (“[” and “]”). Functional value of element belongs to side block is fully determined but function values of element of main blocks belong to a certain subset of the lattice L , which is not a singleton. Later, we will find that this subset is a two-element set.

Given a transfer-stable mean $TS : C_n^k \rightarrow C_n$ then from its properties of idempotency and transfer-stability, we can assign some k -tuples whose images (functional values) in TS are equal to the same set. For example, for $C_4 = \{0, a, b, 1\}$ and a ternary transfer-stable mean $TS : C_4^3 \rightarrow C_4$ we have a set

$$\{(1, 0, 0), (b, a, 0), (a, b, 0), (0, 1, 0), (b, 0, a), \\ (a, a, a), (0, b, a), (a, 0, b), (0, a, b), (0, 0, 1)\},$$

whose triples map to on a because $TS(a, a, a) = a$. This side block can be written as $[(1, 0, 0)]$. An example of the main block for the aforementioned lattice and the transfer-stable mean is, for example, the block

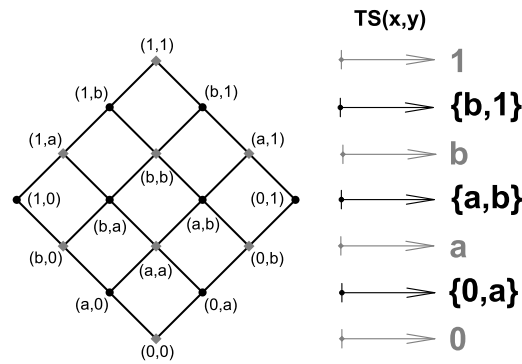


Fig. 1. All blocks of binary transfer-stable mean on C_4 and their sets of images.

$$\begin{aligned} & \{(1, a, 0), (b, b, 0), (a, 1, 0), (1, 0, a), \\ & (b, a, a), (a, b, a), (0, 1, a), (b, 0, b), \\ & (a, a, b), (0, b, b), (a, 0, 1), (0, a, 1)\} = [(0, a, 1)], \end{aligned}$$

where the functional values of the triples are not uniquely determined.

First, let us take a look at the case $k = 2$, i.e., binary transfer-stable means. Suppose that $C_4 = \{0, a, b, 1\}$ is the four-element chain, where $0 < a < b < 1$. Then each binary transfer-stable mean is in one of the following forms (see Fig. 1, where the “square” pairs represent 4 side blocks and the “circle” pairs form 3 main blocks):

$$\begin{aligned} TS(0, 0) &= 0, \\ TS(0, a) &= TS(a, 0) \in \{0, a\}, \\ TS(0, b) &= TS(a, a) = TS(b, 0) = a, \\ TS(0, 1) &= TS(a, b) = TS(b, a) = TS(1, 0) \in \{a, b\}, \\ TS(a, 1) &= TS(b, b) = TS(1, a) = b, \\ TS(b, 1) &= TS(1, b) \in \{b, 1\}, \\ TS(1, 1) &= 1. \end{aligned}$$

We see that all transfer-stable means differ only on pairs $(0, a)$, $(0, 1)$, (resp. (a, b)) and $(b, 1)$, i.e., in the main blocks $[(0, a)]$, $[(0, 1)]$ and $[(b, 1)]$ (not containing pairs (x, x)). Functional values of the main blocks are independent of each other, i.e., for each main block we have 2 options for choosing a functional value. We get that the number of binary transfer-stable means on the four-element lattice is 8. Due to the fact that the transfer-stable means differ by these functional values, we can uniquely write a transfer-stable mean in the form $\langle z_1 \mid z_2 \mid z_3 \rangle$, where $z_1 \in \{0, a\}$, $z_2 \in \{a, b\}$, $z_3 \in \{b, 1\}$.

In general, we can write a binary transfer-stable mean on the lattice $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$ in form $\langle z_1 \mid z_2 \mid \dots \mid z_{n-1} \rangle$. Then all blocks are as follows

$$[(c_1, c_1)]; [(c_1, c_2)]; [(c_2, c_2)]; [(c_2, c_3)]; [(c_3, c_3)]; \dots; [(c_{n-1}, c_n)]; [(c_n, c_n)],$$

and the element z_i corresponds to the i -th main block $[(c_i, c_{i+1})]$ for $i = 1, \dots, n - 1$. For this reason, the element z_i can also be called the main block. This main block is unambiguously determined by the position of the element z_i in the form $\langle z_1 \mid z_2 \mid \dots \mid z_{n-1} \rangle$. Furthermore, the element z_i represents the image of all pairs belonging to this main block.

Proposition 2.9. *Let C_n be an n -element chain, $n \in \mathbb{N}$. Then the set of binary transfer-stable means $TSM_{C_n}^{(2)}$ constitute a Boolean lattice with 2^{n-1} elements.*

Proof. Suppose that $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$ is an n -element chain. Then we can write a binary transfer-stable mean in the form $\langle z_1 \mid \dots \mid z_{n-1} \rangle$, where $z_i \in \{c_i, c_{i+1}\}$, $i = 1, \dots, n - 1$. Element z_i , $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, is a functional value of

the pairs belonging to the i -th main block $[(c_i, c_{i+1})] \approx z_i$. Due to being C_n a chain the images of the main blocks are independent of each other. Hence, the number of binary transfer-stable means on C_n is equal to

$$|\{c_1, c_2\}| \cdot |\{c_2, c_3\}| \cdot \dots \cdot |\{c_{n-1}, c_n\}| = 2^{n-1}.$$

In the light of Proposition 2.7, it is trivial that a meet or join of two transfer-stable means (performed component-wise) is a transfer-stable mean as well. In addition, $\langle c_1 | c_2 | \dots | c_{n-1} \rangle$ is the smallest transfer-stable mean and the mean $\langle c_2 | c_3 | \dots | c_n \rangle$ is the greatest one. Thus, the set $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$ forms a finite lattice. We will show the existence of the complementation. Let $TS = \langle z_1 | \dots | z_{n-1} \rangle$ be a transfer-stable mean and the transfer-stable mean \overline{TS} is defined by $\overline{TS} = \langle y_1 | \dots | y_{n-1} \rangle$, where $y_i \in \{c_i, c_{i+1}\}$, $y_i \neq z_i$. Then the function TS or \overline{TS} has an element c_i , $i = 1, \dots, n - 1$, in position i . In the meet, we get the function $\langle c_1 | \dots | c_{n-1} \rangle$. Similarly, one of these ones has an element c_{i+1} , $i = 1, \dots, n - 1$, in the position i . The result of the join of these functions is $\langle c_2 | \dots | c_n \rangle$. Altogether, the function \overline{TS} is a uniquely determined complement to the function TS . Thus $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$ is a uniquely complemented lattice. The proof is complete because all finite uniquely complemented lattices are distributive. \square

The following trivial consequence discusses generators of the set $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$, i.e., using meets or joins of these transfer-stable means we generate the whole set of binary transfer-stable means.

Corollary 2.10. *Let C_n be an n -element chain. Then every binary transfer-stable mean is a join or meet of atoms of lattice $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$, that is, all atoms of $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$ differ from the smallest transfer-stable mean $\langle c_1 | c_2 | c_3 | \dots | c_{n-2} | c_{n-1} \rangle$ in only one value.*

Proof. Let $\langle z_1 | z_2 | \dots | z_{n-1} \rangle$ be a binary transfer-stable mean on a chain $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$ and let $\langle c_1 | c_2 | \dots | c_{n-1} \rangle$ be the smallest transfer-stable mean. Let $I = \{i \in \{1, \dots, n - 1\} | z_i \neq c_i\}$ then

$$\langle z_1 | z_2 | \dots | z_{n-1} \rangle = \bigvee_{i \in I} \langle c_1 | c_2 | \dots | c_{i-1} | z_i | c_{i+1} | \dots | c_{n-1} \rangle.$$

We get two extreme cases. For the smallest transfer-stable mean is $I = \emptyset$. In this case, the mean is a meet of two different atoms of lattice $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$. As for as the biggest transfer-stable mean we have $I = \{1, \dots, n - 1\}$. \square

In the second part of this chapter we consider at the case of arities larger than 2. The difference from the previous case is that this time we do not assign the same set of images to only one main block but $k - 1$ main blocks, i.e., there are $k - 1$ main blocks between two consecutive side blocks. For example, we allocate k -tuples $(c_i, c_i, \dots, c_i, c_j)$, $(c_i, c_i, \dots, c_j, c_j), \dots, (c_i, c_j, \dots, c_j, c_j)$, where $c_i, c_j \in C_n$, $c_i < c_j$, to functional values from the same set, even though these k -tuples are not tied by transfer-stability, i.e., they do not belong to the same main block.

Definition 2.11. A *section* is the set of k -tuples to which we assign functional values of transfer-stable mean from the same set, that is, a section is a set of main blocks that have the same set of images.

In case of ternary transfer-stable means on $C_4 = \{0, a, b, 1\}$ we have 6 main blocks and 3 sections, where the first section contains main blocks $[(0, 0, a)]$ and $[(0, a, a)]$, the second section main blocks $[(a, a, b)]$ and $[(a, b, b)]$ and the third section $[(b, b, 1)]$ and $[(b, 1, 1)]$.

The size of each section is equal to 1 for binary transfer-stable means, i.e., there is only one main block in each section. The number of all sections is equal to $n - 1$. Similarly, transfer-stable means of higher arities have the same number of sections as binary transfer-stable means, i.e., $n - 1$. The difference is in the size of sections, i.e., the number of main blocks that have the same set of images. Due to this fact, the images of the main blocks have to be ordered inside the same section for transfer-stable means of arity higher than 2. For example, we can not choose $A(c_i, \dots, c_i, c_i, c_{i+1}) = c_{i+1}$ and $A(c_i, \dots, c_i, c_{i+1}, c_{i+1}) = c_i$ because A would not be an aggregation function, since $(c_i, \dots, c_i, c_i, c_{i+1}) \leq (c_i, \dots, c_i, c_{i+1}, c_{i+1})$. Images of individual sections are independent of each other as in binary case.

Using the introduced notation for the main blocks, we can write k -ary transfer-stable means on finite chain $C_n = \{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n\}$ in the form of

$$\left\langle z_1^1, z_2^1, \dots, z_{k-1}^1 \mid z_1^2, z_2^2, \dots, z_{k-1}^2 \mid \dots \mid z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \right\rangle,$$

where $z_1^1, z_2^1, \dots, z_{k-1}^1 \in \{c_1, c_2\}$, $z_1^1 \leq z_2^1 \leq \dots \leq z_{k-1}^1$, form the first section, $z_1^2, z_2^2, \dots, z_{k-1}^2 \in \{c_2, c_3\}$, $z_1^2 \leq z_2^2 \leq \dots \leq z_{k-1}^2$, the second section and $z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \in \{c_{n-1}, c_n\}$, $z_1^{n-1} \leq z_2^{n-1} \leq \dots \leq z_{k-1}^{n-1}$, is the last $(n - 1)$ -th section. Specifically, all ternary transfer-stable means on C_3 are

$$\begin{aligned} &\langle 0, 0 \mid a, a \rangle, \langle 0, 0 \mid a, 1 \rangle, \langle 0, 0 \mid 1, 1 \rangle, \\ &\langle 0, a \mid a, a \rangle, \langle 0, a \mid a, 1 \rangle, \langle 0, a \mid 1, 1 \rangle, \\ &\langle a, a \mid a, a \rangle, \langle a, a \mid a, 1 \rangle, \langle a, a \mid 1, 1 \rangle, \end{aligned}$$

where $\langle 0, 0 \mid a, a \rangle$ is the smallest ternary transfer-stable mean and $\langle a, a \mid 1, 1 \rangle$ the greatest one.

Before we pronounce the final theorem of this chapter, let us take a look at the number of main blocks at any k -ary transfer-stable mean. We already know that the number of sections depends only on the size of the lattice, not on the arity of the transfer-stable mean. Thus, for C_n we get $n - 1$ sections. For example, for $C_5 = \{0, a, b, c, 1\}$ we have 4 sections whose images belong to the following sets, respectively: $\{0, a\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ and $\{c, 1\}$. On the other hand, the number of main blocks in one section is dependent only on the arity of the transfer-stable mean. Let us consider the k -ary transfer-stable mean on C_5 . Then main blocks in the section $\{0, a\}$ are as follows for binary, ternary and quaternary transfer-stable mean.

k	2	3	4
	$\{0, a\}$	$\{0, 0, a\}$	$\{0, 0, 0, a\}$
		$\{0, a, a\}$	$\{0, 0, a, a\}$
			$\{0, a, a, a\}$

We simply see that increasing the arity leads to an increase of the number of main blocks in one section, specifically to $k - 1$. We conclude that the number of all main blocks of a k -ary transfer-stable mean on finite chain C_n is equal to $(n - 1) \cdot (k - 1)$. Now we can formulate a generalized claim of the Proposition 2.9.

Theorem 2.12. *Let C_n be an n -element chain, $n \in \mathbb{N}$. Then the number of all k -ary transfer-stable means on C_n is equal to k^{n-1} and*

$$\text{TSM}_{C_n}^{(k)} \cong C_k^{n-1}.$$

Proof. Let us suppose that $C_n = \{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n\}$ is an n -element chain. Then we can write any transfer-stable mean in the form:

$$\left\langle z_1^1, z_2^1, \dots, z_{k-1}^1 \mid z_1^2, z_2^2, \dots, z_{k-1}^2 \mid \dots \mid z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \right\rangle.$$

The choices of values of individual sections are mutually independent but inside one section they are not. The number of options for choosing one section is equal to k because elements $z_1^i, z_2^i, \dots, z_{k-1}^i$ have to be ordered for any $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, i.e., $z_1^i \leq z_2^i \leq \dots \leq z_{k-1}^i$. Moreover, $z_j^i \in \{c_i, c_{i+1}\}$ for all $j \in \{1, \dots, k - 1\}$. Overall, the number of all k -ary transfer-stable means is equal to k^{n-1} .

It is clear that the meet or join of transfer-stable means is a transfer-stable mean, so $\text{TSM}_{C_n}^{(k)}$ is a lattice, where $\langle c_1, \dots, c_1 \mid \dots \mid c_{n-1}, \dots, c_{n-1} \rangle$ is the smallest transfer-stable mean and $\langle c_2, \dots, c_2 \mid \dots \mid c_n, \dots, c_n \rangle$ is the greatest transfer-stable mean on C_n . The distributivity is obvious because the meet or join of transfer-stable means is performed componentwise.

Consider $n - 2$ fixed sections. Then we get k transfer-stable means

$$\begin{aligned} &\langle \dots \mid c_i, c_i, \dots, c_i, c_i \mid \dots \rangle, \\ &\langle \dots \mid c_i, c_i, \dots, c_i, c_j \mid \dots \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\langle \dots | c_i, c_i, \dots, c_j, c_j | \dots \rangle, \\ &\quad \vdots \\ &\langle \dots | c_i, c_j, \dots, c_j, c_j | \dots \rangle, \\ &\langle \dots | c_j, c_j, \dots, c_j, c_j | \dots \rangle, \end{aligned}$$

where $c_i < c_j$ and $i, j \in \{1, \dots, n\}$. We see that these transfer-stable means are linearly ordered, i.e., they form C_k . In the second step, we fix all but 2 chosen sections, which give us k^2 transfer-stable means forming the lattice C_k^2 . In an analogous way, we conclude that all transfer-stable means on L form C_k^{n-1} . \square

Corollary 2.13. *A transfer-stable mean $TS : C_n^k \rightarrow C_n$ is an atom of the lattice $TSM_{C_n}^{(k)}$ if and only if it differs from the smallest transfer-stable mean only in the last element of just one section.*

Proof. The smallest transfer-stable mean on an n -element chain C_n is in the form

$$\langle \underbrace{c_1, \dots, c_1}_{k-1} | \dots | \underbrace{c_{n-1}, \dots, c_{n-1}}_{k-1} \rangle.$$

If we increase one element in a section (it must be the last one in the section necessarily, otherwise the monotony would be violated) we get an atom of the lattice $TSM_{C_n}^{(k)}$. Obviously, there is no transfer-stable mean between this mean and the smallest mean, that is, it is indeed an atom of the lattice $TSM_{C_n}^{(k)}$. \square

At the end of this chapter we take a look at the evaluation of transfer-stable means. The evaluation process is based on modifying an input to a desired form. The goal is to modify, by transfer-stability, the original input (x_1, \dots, x_k) , where $x_1, \dots, x_k \in C_n$, into one of the following forms

$$\begin{aligned} &(c_i, c_i, \dots, c_i, c_i), \\ &(c_i, c_i, \dots, c_i, c_{i+1}), \\ &(c_i, c_i, \dots, c_{i+1}, c_{i+1}), \\ &\quad \vdots \\ &(c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+1}, c_{i+1}), \end{aligned}$$

for some $i \in \{1, \dots, n - 1\}$.

Let $\langle z_1^1, z_2^1, \dots, z_{k-1}^1 | z_1^2, z_2^2, \dots, z_{k-1}^2 | \dots | z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \rangle$ be a k -ary transfer-stable mean on the lattice $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$. Then $z_j^i \in \{c_i, c_{i+1}\}$, $i = 1, \dots, n - 1$; $j = 1, \dots, k - 1$ and z_j^i is the j -th main block in the i -th section. The main blocks in i -th section are as follows

$$[(c_i, \dots, c_i, c_{i+1})], \dots, [(c_i, c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+1})], [(c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+1})],$$

that is, the element z_j^i corresponds to the main block $[(c_i, \dots, c_i, \underbrace{c_{i+1}, \dots, c_{i+1}}_j)]$ for $i = 1, \dots, n - 1$.

Example 2.14. We want to find the image of input $(c, 1, b, 1, a)$ using the mean

$$TS(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \langle 0, 0, 0, a | a, a, b, b | b, b, b, c | 1, 1, 1, 1 \rangle$$

on the lattice $C_5 = \{0, a, b, c, 1\}$. Applying the transfer-stability we get

$$TS(c, 1, b, 1, a) \stackrel{\text{sym}}{=} TS(a, b, c, 1, 1) \stackrel{a \uparrow 1 \downarrow}{=} TS(b, b, c, c, 1) \stackrel{b \uparrow 1 \downarrow}{=} TS(b, c, c, c, c),$$

where the 5-tuple (b, c, c, c, c) generates 4-th main block in section between elements b and c , i.e., 3-rd section $| b, b, b, c |$. Thus, we look for the element z_4^3 , which according to the form of TS corresponds to the element c , that is, $TS(c, 1, b, 1, a) = c$.

3. The generating set of transfer-stable means

In this chapter we focus on those transfer-stable means which generate all the other ones. The problem arises if we want to generate a transfer-stable mean by using transfer-stable means of lower arity. For example, we mention the construction from ([3], [7], [8]), where aggregation functions were generated by using unary and binary aggregation functions employing the clone theory. In our case, we cannot use this theory because the projections are not transfer-stable means. Therefore, we have to avoid the projections when generating transfer-stable means. For this reason we focus in the first part of this chapter on problem how to generate transfer-stable means of fixed arity. For this we will use so-called medial transfer-stable means.

Definition 3.1. Let n be the number of elements of chain $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$ and let k be an arity of a transfer-stable mean on C_n . Then a *medial transfer-stable mean* is

$$\left(\underbrace{\underbrace{c_1, \dots, c_1}_{s}, \dots, \underbrace{c_2, \dots, c_2}_{s-1}}_{k-1} \mid \underbrace{\underbrace{c_2, \dots, c_2}_{s}, \dots, \underbrace{c_3, \dots, c_3}_{s-1}}_{k-1} \mid \dots \mid \underbrace{\underbrace{c_{n-1}, \dots, c_{n-1}}_{s}, \dots, \underbrace{c_n, \dots, c_n}_{s-1}}_{k-1} \right)$$

for even k and $s = \frac{k}{2}$ or

$$\left(\underbrace{\underbrace{c_1, \dots, c_1}_{s-1}, \dots, \underbrace{c_2, \dots, c_2}_{s-1}}_{k-1} \mid \underbrace{\underbrace{c_2, \dots, c_2}_{s-1}, \dots, \underbrace{c_3, \dots, c_3}_{s-1}}_{k-1} \mid \dots \mid \underbrace{\underbrace{c_{n-1}, \dots, c_{n-1}}_{s-1}, \dots, \underbrace{c_n, \dots, c_n}_{s-1}}_{k-1} \right)$$

for odd k and $s = \left\lceil \frac{k}{2} + 1 \right\rceil$, where $[x]$ is an integer part of x .

From the previous chapter we know that each section is in the form $\mid \underbrace{c_i, \dots, c_i}_p, \dots, \underbrace{c_{i+1}, \dots, c_{i+1}}_q \mid$ for any $c_i \in C_n$,

where $p, q \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$, that is, a section consists of just two elements c_i and c_{i+1} . The following definition describes a specific relation between the two sections.

Definition 3.2. Let $i, j \in \{1, \dots, n - 1\}, i \neq j$. Then the i -th section, in the form $\mid c_i, \dots, c_i, \underbrace{c_{i+1}, \dots, c_{i+1}}_q \mid$, and the j -th section, in the form $\mid \underbrace{c_j, \dots, c_j}_q, c_{j+1}, \dots, c_{j+1} \mid$, form a *cross inversion*.

Definition 3.3. An *inner generating transfer-stable mean* is the medial transfer-stable mean except for the last two sections, where the last two sections form a cross inversion. Therefore

$$\begin{aligned} & \left(\underbrace{\underbrace{c_1, \dots, c_1}_{s-1 \text{ or } s}, \dots, \underbrace{c_2, \dots, c_2}_{s-1}}_{\bullet} \mid \dots \mid \underbrace{\underbrace{c_{n-3}, \dots, c_{n-3}}_{s-1 \text{ or } s}, \dots, \underbrace{c_{n-2}, \dots, c_{n-2}}_{s-1}}_{\bullet} \mid c_{n-2}, \dots, c_{n-2} \mid c_n, \dots, c_n \right), \\ & \left(\bullet \mid c_{n-2}, \dots, c_{n-2}, c_{n-1} \mid c_{n-1}, c_n, \dots, c_n \right), \\ & \vdots \\ & \left(\bullet \mid c_{n-2}, c_{n-1}, \dots, c_{n-1}, \mid c_{n-1}, \dots, c_{n-1}, c_n \right), \\ & \left(\bullet \mid c_{n-1}, \dots, c_{n-1}, \mid c_{n-1}, \dots, c_{n-1} \right), \end{aligned}$$

are all inner generating transfer-stable means on a chain C_n and the number of these means is k .

For example, every two sections of an odd arity medial transfer-stable mean (k is odd) form a cross inversion. Obviously, the odd arity medial transfer-stable mean is the inner generating transfer-stable mean. Additionally, all the inner generating transfer-stable means differ from the medial transfer-stable mean in the last two sections. The next construction dedicates so-called outer generating transfer-stable means. In this construction, besides the medial transfer-stable means we use the greatest and the smallest transfer-stable means, i.e.,

$$TS^{min} = \langle c_1, \dots, c_1 \mid \dots \mid c_{n-1}, \dots, c_{n-1} \rangle,$$

$$TS^{max} = \langle c_2, \dots, c_2 \mid \dots \mid c_n, \dots, c_n \rangle$$

are the smallest TS^{min} and the greatest TS^{max} transfer-stable means on a chain C_n , respectively.

Definition 3.4. Let C_n be an n -element chain, $n \in \mathbb{N}$, and $l \in \{1, 2, \dots, n - 3\}$. Then an *outer generating transfer-stable mean* on C_n is defined as follows:

- i) The first $(l - 1)$ sections are the same as the medial transfer-stable mean.
- ii) If l -th section is in one of the following forms

$$\begin{aligned} & \mid c_l, \dots, c_l \mid, \\ & \mid c_l, \dots, c_l, c_{l+1} \mid, \\ & \quad \vdots \\ & \mid c_l, \dots, c_l, \underbrace{c_{l+1}, \dots, c_{l+1}}_{s-2} \mid, \end{aligned}$$

then the remaining sections correspond to the greatest transfer-stable mean, i.e.,

$$\begin{aligned} & \langle \bullet \mid c_l, \dots, c_l \mid c_{l+2}, \dots, c_{l+2} \mid \dots \mid c_n, \dots, c_n \rangle, \\ & \langle \bullet \mid c_l, \dots, c_l, c_{l+1} \mid c_{l+2}, \dots, c_{l+2} \mid \dots \mid c_n, \dots, c_n \rangle, \\ & \quad \vdots \\ & \langle \bullet \mid c_l, \dots, c_l, \underbrace{c_{l+1}, \dots, c_{l+1}}_{s-2} \mid c_{l+2}, \dots, c_{l+2} \mid \dots \mid c_n, \dots, c_n \rangle, \end{aligned}$$

where

$$\bullet = \underbrace{c_1, \dots, c_1}_{s-1 \text{ or } s}, \underbrace{c_2, \dots, c_2}_{s-1} \mid \dots \mid \underbrace{c_{l-1}, \dots, c_{l-1}}_{s-1 \text{ or } s}, \underbrace{c_l, \dots, c_l}_{s-1}.$$

- iii) If l -th section is in one of the following forms

$$\begin{aligned} & \mid c_l, \dots, c_l, \underbrace{c_{l+1}, \dots, c_{l+1}}_s \mid, \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mid c_l, c_{l+1}, \dots, c_{l+1} \mid, \\ & \mid c_{l+1}, \dots, c_{l+1} \mid, \end{aligned}$$

then the remaining sections correspond to the smallest transfer-stable mean, i.e.,

$$\begin{aligned} & \langle \bullet \mid c_l, \dots, c_l, \underbrace{c_{l+1}, \dots, c_{l+1}}_s \mid c_{l+1}, \dots, c_{l+1} \mid \dots \mid c_{n-1}, \dots, c_{n-1} \rangle, \\ & \quad \vdots \\ & \langle \bullet \mid c_l, c_{l+1}, \dots, c_{l+1} \mid c_{l+1}, \dots, c_{l+1} \mid \dots \mid c_{n-1}, \dots, c_{n-1} \rangle, \\ & \langle \bullet \mid c_{l+1}, \dots, c_{l+1} \mid c_{l+1}, \dots, c_{l+1} \mid \dots \mid c_{n-1}, \dots, c_{n-1} \rangle. \end{aligned}$$

There are $(k - 1)$ outer generating transfer-stable means for fixed l . We get that the number of all outer generating transfer-stable means is $(k - 1) \cdot (n - 3)$. In the proof of the following Theorem 3.5 the lattice operations are used, but the lattice operations are not transfer-stable means. However, we can use the following equalities for the meet and join of transfer-stable means. Let TS_1 and TS_2 be transfer-stable means. Then

$$TS_1 \wedge TS_2 = TS^{\min}(TS_1, \dots, TS_1, TS_2),$$

$$TS_1 \vee TS_2 = TS^{\max}(TS_1, \dots, TS_1, TS_2).$$

Theorem 3.5. *Let $k, n \in \mathbb{N}, k \geq 2, n \geq 3$. Let us suppose that a set G contains all k -ary inner and outer generating transfer-stable means on a chain C_n and the k -ary smallest and greatest transfer-stable mean on C_n . Then the set G generates all k -ary transfer-stable means on the chain C_n and its cardinality is equal to $(n - 2)k - (n - 5)$.*

Proof. Let

$$TS = \langle z_1^1, \dots, z_{k-1}^1 \mid \dots \mid z_1^{n-3}, \dots, z_{k-1}^{n-3} \mid z_1^{n-2}, \dots, z_{k-1}^{n-2} \mid z_1^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \rangle$$

be a k -ary transfer-stable mean on a chain $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$. Let us denote symbols TS^{\min} and TS^{\max} the smallest and the greatest transfer-stable means, respectively. Further, the symbol TS^* indicates the medial transfer-stable mean. Then there are the inner generating transfer-stable means TS_1 and TS_2 such that the mean TS_1 has the same last $(n - 1)$ -th section as the mean TS and the mean TS_2 has the same $(n - 2)$ -th section as the mean TS . Let us denote TS^l either the meet or join of the means TS_1 and TS_2 which has the same last two sections as the mean TS .

In the next step we focus on the $(n - 3)$ -th section of the mean TS and there are two disjoint possibilities:

- 1) The means TS and TS^* have the same $(n - 3)$ -th sections. In this case we focus on the $(n - 4)$ -th section of the mean TS .
- 2) If $(n - 3)$ -th sections of the means TS and TS^* are not the same, then there is only one outer generating transfer-stable mean TS_3 , which has the same $(n - 3)$ -th section as the mean TS . Then we denote TS^l either the meet or join of the means TS_3 and TS^l which has the same last two sections as the mean TS .

In the equal way we investigate the remaining sections, i.e., i -th sections for $i \in \{1, \dots, n - 4\}$. Thus we have proved that any mean TS is the meet or join of inner and outer generating transfer-stable means, i.e., inner and outer generating means form a generating set of lattice $TSM_{C_n}^{(k)}$. □

Example 3.6. Let $k = 5$ and $n = 6$, i.e., $C_6 = \{0, a, b, c, d, 1\}$ and $s = \left\lceil \frac{5}{2} + 1 \right\rceil = 3$. The medial transfer-stable mean is

$$TS^* = \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid c, c, d, d \mid d, d, 1, 1 \rangle.$$

Applying a cross inversion to the last two section (i.e., 4-th and 5-th) we get the inner generating transfer-stable means

$$\langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid c, c, c, c \mid 1, 1, 1, 1 \rangle,$$

$$\langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid c, c, c, d \mid d, 1, 1, 1 \rangle,$$

$$\langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid c, c, d, d \mid d, d, 1, 1 \rangle,$$

$$\langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid c, d, d, d \mid d, d, d, 1 \rangle,$$

$$\langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid d, d, d, d \mid d, d, d, d \rangle$$

and the number of these means is $k = 5$. The 5-ary smallest transfer-stable mean on chain C_6 is

$$TS^{\min} = \langle 0, 0, 0, 0 \mid a, a, a, a \mid b, b, b, b \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \rangle$$

and the 5-ary greatest transfer-stable mean is

$$TS^{\max} = \langle a, a, a, a \mid b, b, b, b \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \mid 1, 1, 1, 1 \rangle.$$

The outer generating transfer-stable means for $l \in \{1, 2, 3\}$ are

$l = 3$:

$$\begin{aligned} &\langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, b, b \mid d, d, d, d \mid 1, 1, 1, 1 \rangle, \\ &\langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, b, c \mid d, d, d, d \mid 1, 1, 1, 1 \rangle, \\ &\langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, c, c, c \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \rangle, \\ &\langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid c, c, c, c \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \rangle. \end{aligned}$$

$l = 2$:

$$\begin{aligned} &\langle 0, 0, a, a \mid a, a, a, a \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \mid 1, 1, 1, 1 \rangle, \\ &\langle 0, 0, a, a \mid a, a, a, b \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \mid 1, 1, 1, 1 \rangle, \\ &\langle 0, 0, a, a \mid a, b, b, b \mid b, b, b, b \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \rangle, \\ &\langle 0, 0, a, a \mid b, b, b, b \mid b, b, b, b \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \rangle. \end{aligned}$$

$l = 1$:

$$\begin{aligned} &\langle 0, 0, 0, 0 \mid b, b, b, b \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \mid 1, 1, 1, 1 \rangle, \\ &\langle 0, 0, 0, a \mid b, b, b, b \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \mid 1, 1, 1, 1 \rangle, \\ &\langle 0, a, a, a \mid a, a, a, a \mid b, b, b, b \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \rangle, \\ &\langle a, a, a, a \mid a, a, a, a \mid b, b, b, b \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \rangle. \end{aligned}$$

The number of outer generating transfer-stable means is $(k - 1)(n - 3) = 4 \cdot 3 = 12$. Thus the number of all 5-ary generating transfer-stable means on C_6 is equal to $5 + 12 = 17$ and with the smallest and greatest transfer-stable means we get that the cardinality of the generating set G (from Theorem 3.5) is equal to $(n - 2)k - (n - 5) = 4 \cdot 5 - 1 = 19$. Moreover, the number of all 5-ary transfer-stable means on chain C_6 is $k^{n-1} = 5^5 = 3125$. Let

$$TS = \langle 0, a, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, b, c \mid c, d, d, d \mid d, 1, 1, 1 \rangle$$

be the 5-ary transfer-stable mean on chain C_6 . We use the proof of Theorem 3.5 to find inner and outer generating transfer-stable means, which generate the transfer-stable mean TS . According to the first part of the proof, there are inner generating transfer-stable means

$$\begin{aligned} TS_1 &= \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid c, c, c, d \mid d, 1, 1, 1 \rangle, \\ TS_2 &= \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid c, d, d, d \mid d, d, d, 1 \rangle \end{aligned}$$

such that

$$TS^I = TS_1 \vee TS_2 = \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, c, c \mid c, d, d, d \mid d, 1, 1, 1 \rangle.$$

In the next step we focus on $(n - 3) = 3$ -rd section of the mean TS . We find the relation between the third section of the mean TS and the medial mean TS^* . We get that the sections are different. Therefore, there is only one outer generating transfer-stable mean

$$TS_3 = \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, b, c \mid d, d, d, d \mid 1, 1, 1, 1 \rangle$$

such that

$$TS^{II} = TS_3 \wedge (TS_1 \vee TS_2) = \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, b, c \mid c, d, d, d \mid d, 1, 1, 1 \rangle.$$

Next, we determine the relation between the second section of the mean TS and the medial mean TS^* . This time, we get that the sections are the same (TS_4 does not exist) and

$$TS^{III} = TS^{II} = \langle 0, 0, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, b, c \mid c, d, d, d \mid d, 1, 1, 1 \rangle.$$

In the last step we check the relation between the first section of the mean TS and the medial mean TS^* . We get that the sections are different. Consequently, there is only one outer generating transfer-stable mean

$$TS_5 = \langle 0, a, a, a, a \mid a, a, a, a \mid b, b, b, b \mid c, c, c, c \mid d, d, d, d \rangle$$

such that

$$\begin{aligned} TS^{\vee} &= TS_5 \vee (TS_3 \wedge (TS_1 \vee TS_2)) \\ &= \langle 0, a, a, a, a \mid a, a, b, b \mid b, b, b, c \mid c, d, d, d \mid d, 1, 1, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Finally, we obtain that there are 5-ary inner generating transfer-stable means TS_1 and TS_2 and there are 5-ary outer generating transfer-stable means TS_3 and TS_5 on the chain C_6 , which generate 5-ary transfer-stable mean TS on the chain C_6 .

In the conclusion of this article we look at how to generate a transfer-stable mean using a transfer-stable mean of lower arity. Another difference from the previous composition of the transfer-stable means is that we do not use the “classic” composition of functions. We create a new composition of functions specially constructed for transfer-stable means.

Definition 3.7. Let $\langle \alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_{n-1} \rangle$ and $\langle \beta_1 \mid \dots \mid \beta_{n-1} \rangle$ be binary transfer-stable means on a chain C_n . Then the mapping $\odot : \text{TSM}_{C_n}^{(2)} \rightarrow \text{TSM}_{C_n}^{(3)}$ defined as follows

$$\begin{aligned} &\langle \alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_{n-1} \rangle \odot \langle \beta_1 \mid \dots \mid \beta_{n-1} \rangle = \\ &\langle \min(\alpha_1, \beta_1), \max(\alpha_1, \beta_1) \mid \dots \mid \min(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}), \max(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}) \rangle \end{aligned}$$

is called a *componentwise composition* of binary transfer-stable means. Moreover, if $\alpha_i \leq \beta_i$ for all $i \in \{1, \dots, n-1\}$ then

$$\langle \alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_{n-1} \rangle \odot \langle \beta_1 \mid \dots \mid \beta_{n-1} \rangle = \langle \alpha_1, \beta_1 \mid \dots \mid \alpha_{n-1}, \beta_{n-1} \rangle.$$

From Definition 3.7, for a k -ary transfer-stable mean is valid

$$\begin{aligned} &\langle z_1^1, z_2^1, \dots, z_{k-1}^1 \mid z_1^2, z_2^2, \dots, z_{k-1}^2 \mid \dots \mid z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \rangle = \\ &\langle z_1^1 \mid z_1^2 \mid \dots \mid z_1^{n-1} \rangle \odot \langle z_2^1 \mid z_2^2 \mid \dots \mid z_2^{n-1} \rangle \odot \dots \odot \langle z_{k-1}^1 \mid z_{k-1}^2 \mid \dots \mid z_{k-1}^{n-1} \rangle, \end{aligned}$$

where on the right side of equality there are only binary transfer-stable means that can be generated by the atoms of a lattice $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$.

Theorem 3.8. Let C_n be an n -element chain. Then the class of all transfer-stable means TSM_{C_n} is generated by binary transfer-stable means and by mappings \vee, \wedge, \odot .

Proof. Based on Corollary 2.10 and Definition 3.7. \square

4. Conclusion

In this paper, we have shown that the binary transfer-stable means on a chain form Boolean lattices. Other transfer-stable means form a lattice which is isomorphic to the direct power of chains. We have also shown how fixed arity transfer-stable means are generated. At the end, we briefly looked at the universal generating of transfer-stable means.

Future articles could focus on a similar topic. The difference would be that the transfer-stability would be replaced by another suitable property, which is fulfilled by the arithmetic mean. Another paper could deal with the set G from Theorem 3.5. It could be shown that the set G is the smallest generating set.

Acknowledgements

The author was supported by the project of Grant Agency of the Czech Republic (GAČR) no. 18-06915S.

References

- [1] G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo, *A Practical Guide to Averaging Functions*, Springer, 2016.
- [2] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, vol. 221, Springer, 2007.
- [3] M. Botur, R. Halaš, R. Mesiar, J. Pócs, On generating of idempotent aggregation functions on finite lattices, *Inf. Sci.* 430–431 (2018) 39–45.
- [4] P. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*, Springer Science + Business Media, Dordrecht, 2003.
- [5] M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, *Aggregation Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [6] G. Grätzer, F. Wehrung, *Lattice Theory: Special Topics and Applications*, vol. 1, Springer, Switzerland, 2014.
- [7] R. Halaš, Z. Kurač, R. Mesiar, J. Pócs, Binary generating set of the clone of idempotent aggregation functions on bounded lattices, *Inf. Sci.* 462 (2018) 367–373.
- [8] R. Halaš, J. Pócs, On the clone of aggregation functions on bounded lattices, *Inf. Sci.* 329 (2016) 381–389.
- [9] A. Kolesárová, G. Mayor, R. Mesiar, Weighted ordinal means, *Inf. Sci.* 177 (2007) 3822–3830.
- [10] D. Kyselová, D. Dubois, M. Komorníková, R. Mesiar, Refining aggregation operator-based orderings in multifactorial evaluation—part I: continuous scales, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* 15 (6) (2007) 1100–1106.
- [11] H. Moulin, *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1988.



Transfer-stable aggregation functions on finite lattices

Zbyněk Kurač*, Tomáš Riemel, Lenka Rýparová

Palacky University Olomouc, Faculty of Science, Department of Algebra and Geometry, 17. listopadu 12, Olomouc 771 46, Czech Republic

ARTICLE INFO

Article history:

Received 18 July 2019

Revised 23 December 2019

Accepted 12 February 2020

Available online 13 February 2020

MSC:

06A05

39B52

Keywords:

Transfer-stability

Aggregation function

Finite lattice

Transfer principle

Distance

Path

ABSTRACT

The paper by Z. Kurač, 2019 deals with a new property, the so-called transfer-stability, characterizing the arithmetic mean. With this property, it is possible to define special forms of arithmetic mean on finite chains. The idempotence property was required for this definition. In this paper, we neglect this necessity and deal only with transfer-stable aggregation functions. Thanks to this fact, it is possible to define these aggregation functions on any finite lattice (hereinafter “lattice”) and not only on finite chains. Transfer-stable aggregation functions can be defined on any finite lattice. Nevertheless, there is a subclass of finite lattices, the so-called transfer-stable lattices, where the behavior of the transfer-stable aggregation functions is simply described because the transfer-stability classes are linearly ordered. Therefore, the main goal of this paper is characterization of these transfer-stable lattices. The second half of the paper deals with some useful properties associated with the lattice of all k -ary transfer-stable aggregation functions.

© 2020 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

Rather often we have to deal with aggregation of values from some ordinal scales, mostly represented by means of bounded distributive lattices. As a particular case, finite chains could be considered. Note that there were proposed some versions of arithmetic mean on finite chains, see, e.g. [9,13,14]. The aim of our paper is to generalize these ideas for finite lattices (hereinafter “lattices”) considering also incomparable elements and thus to propose some versions of the arithmetic mean on rather general ordinal (e.g., linguistic) scales which start to be more and more considered in multicriteria decision support [4,7,12].

The topic of this paper generalizes the topic in [10] that studied the so-called transfer-stable means. To recall, the paper [10] deals with the connection between the arithmetic mean [2,5] and finite chains. The means and averages play an important role in aggregation theory [1,3,8,9] and in lattice theory which is quite well established discipline of algebra (see [6] for more details). However, it would be useful (or even necessary) to find a new property characterizing the arithmetic mean that could allow it to be easily applied to the lattice theory. The original feature was additivity which we replaced by transfer-stability [11,14]. Transfer-stability is a property of functions that does not change the functional value if we move one variable up (increase) by the distance d and move the other variable down (decrease) by the same distance d . For example, real transfer-stable function fulfills $f(x, y) = f(x + d, y - d)$ for all $d \in \mathbb{R}$. This change has created new functions, idempotent transfer-stable functions, that could only be defined on chains.

* Corresponding author.

E-mail addresses: Kury.Z@seznam.cz (Z. Kurač), tomas.riemel@email.cz (T. Riemel), LenRy@seznam.cz (L. Rýparová).

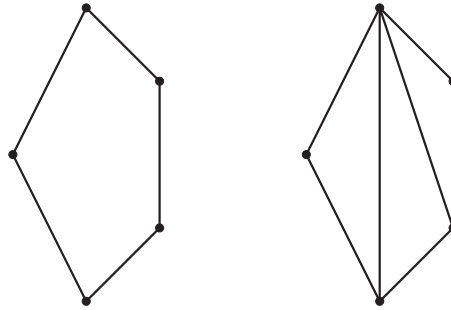


Fig. 1. Example of Hasse diagram and diagram that is not Hasse.

In this paper, we remove the idempotence and only deal with the transfer-stable aggregation functions. Thus, the domain of these functions increases to the whole class of finite lattices. However, it appears that the transfer-stable aggregation functions behave differently on some lattices than on others. The first interesting class is a class of the so-called *distance-stable lattices* that preserve all the distances between elements. In this class, the behavior of the transfer-stable functions can be easily described and the interesting features, like a relation to distributive and modular lattices, arise. Another (interesting) class is a class of the so-called *transfer-stable lattices*, which preserve the linear order of the blocks. In simple terms, the blocks are transfer-stability classes.

In the light of these discoveries, we can easily define transfer-stable aggregation functions, and above all, we focus on the structure of all k -transfer-stable aggregation functions. In addition, it is necessary to distinguish two cases: distance-stable lattices and transfer-stable distance-unstable lattices, because the transfer-stable aggregation functions behave differently in individual cases.

2. Distance-stable lattices

The cover relation in the lattices is integral to the transfer-stability. This relation plays an important part in the theory of transfer-stable functions. Then we recall how an aggregation function and a transfer-stable function are defined.

Definition 2.1. Let (L, \leq) be a finite lattice and $x, y \in L$. Then y covers x (y is a successor of x), written $x < y$, if $x < y$ and there is no $z \in L$ such that $x < z < y$. Moreover, the notation $x \leq y$ means $x < y$ or $x = y$.

Definition 2.2. Let (L, \leq) be a finite lattice with 0 as the smallest element of L and with 1 as the greatest element of L , and $k \in \mathbb{N}$. A mapping $A: L^k \rightarrow L$ is called a k -ary aggregation function on the lattice L , if it is non-decreasing, i.e., for any $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^k$

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow A(\mathbf{x}) \leq A(\mathbf{y})$$

and it satisfies boundary conditions, i.e.,

$$A(0, \dots, 0) = 0 \quad \text{and} \quad A(1, \dots, 1) = 1.$$

Definition 2.3. A function $A: L^k \rightarrow L$ on the finite lattice L is called *transfer-stable*, if

$$A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = A(x_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, x_k)$$

for any $i, j \in \{1, \dots, k\}$ and $x_i, y_j \in L$ where $x_i < y_i$ and $y_j < x_j$.

The class of all transfer-stable aggregation functions on the finite lattice L is denoted by the symbol TSAgg_L and the symbol $\text{TSAgg}_L^{(k)}$ denotes all k -ary transfer-stable aggregation functions on the lattice L .

In the study of the transfer-stable means [10] and the transfer-stable aggregation functions, it has been shown that the distance between elements in the lattices is another important property in the theory of transfer-stable functions.

Definition 2.4. Let L be a finite lattice. Then *distance* between elements $a, b \in L$, $a \leq b$ is the number of edges (line segments) in Hasse diagram between a and b in the lattice L .

The symbol \mathcal{D}_{ab} denotes the set of all distances between the elements a and b . Denote $d_L(a, b) := \min \mathcal{D}_{ab}$ the least distance between a and b and $D_L(a, b) := \max \mathcal{D}_{ab}$ the greatest distance between a and b .

Remark 2.5. If it will be clear which lattice we mean, we will avoid the lower index in $d_L(a, b)$ and $D_L(a, b)$.

Remark 2.6. A Hasse diagram (see Fig. 1) is a graphical rendering of a partially ordered set displayed via the cover relation of the partially ordered set with an implied upward orientation. A point is drawn for each element of the poset, and line segments are drawn between these points according to the following two rules:

1. If $x < y$ in the poset, then the point corresponding to x appears lower in the drawing than the point corresponding to y .

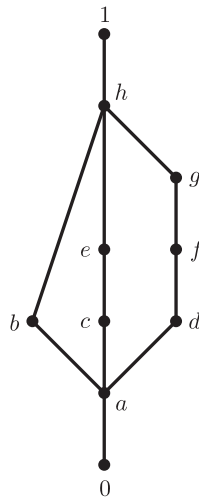


Fig. 2. Lattice L .

2. The line segment between the points corresponding to any two elements x and y of the poset is included in the drawing iff x covers y or y covers x .

The path from a to b in the lattice L is the sequence of elements $x_1, \dots, x_n \in L$ such that

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Whenever $P = \{a = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$ is a path from a to b then the symbol $|P|$ denotes the number of elements in the path P , that means $|P| = n$ and the symbol $\|P\|$ denotes the path length (the number of edges in the path P) from a to b in the lattice L , that means $\|P\| = |P| - 1$. The most important paths in the lattice L are paths from 0 to 1 and all these paths are denoted by the symbol $\text{Path}L$.

Example 2.7. Let L be the lattice depicted in Fig. 2.

Let us consider elements a and h . Then $P_1 = \{a, b, h\}$, $P_2 = \{a, c, e, h\}$ and $P_3 = \{a, d, f, g, h\}$ are all paths from a to h in the lattice L . Moreover $|P_1| = 3$, $\|P_1\| = 2$, $|P_2| = 4$, $\|P_2\| = 3$, $|P_3| = 5$, $\|P_3\| = 4$. Overall $\mathcal{D}_{ah} = \{2, 3, 4\}$, $d(a, h) = 2$, $D(a, h) = 4$. All paths in $\text{Path}L$ are $Q_i = P_i \cup \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ and therefore $\text{Path}L = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$.

We can divide the class of lattices into two subclasses by the distances between the elements 0 and 1 according to Definition 2.4. The first subclass contains all lattices that have an unambiguous distance between 0 and 1 . The second subclass is a complement to the first class, that means, there are $a, b \in L$ such that $|\mathcal{D}_{ab}| \geq 2$. The following definition describes a first subclass of these two subclasses.

Definition 2.8. The finite lattice L is called *distance-stable* if the distance between each two elements is unambiguously defined, i.e., $d(a, b) = D(a, b)$ for all $a, b \in L$, $a \leq b$.

Lemma 2.9. The finite lattice L is distance-stable if and only if $d(0, 1) = D(0, 1)$.

First impression might suggest that distance-stable lattices could have very useful properties and this impression is justified. One of the first features is described by the following Lemma which shows that the class of distance-stable lattices contains two of “the most important” lattice classes.

Lemma 2.10. If the finite lattice L is distributive or modular then L is the distance-stable.

Proof. Let us suppose that the lattice L is distributive or modular, i.e., it does not contain a pentagon as a sublattice, and L is not distance-stable. Then there are two elements $a, b \in L$ such that their distance is not unambiguous, that means there are two different paths $P = \{a_1, \dots, a_p\}$ and $Q = \{b_1, \dots, b_q\}$ from a to b where $p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq q$. Then there are indexes $i \in \{1, \dots, p\}$, $j, k \in \{1, \dots, q\}$ such that the lattice $\{a, a_i, b_j, b_k, b\}$ is a sublattice of lattice L which is neither distributive nor modular, which is a contradiction with the assumption. \square

Unfortunately, the opposite implication is not fulfilled because, for example, the lattice depicted in Fig. 3 is distance-stable but not distributive or modular.

Another useful property is the power of the lattice showing that the direct product of the distance-stable lattices is a distance-stable lattice.

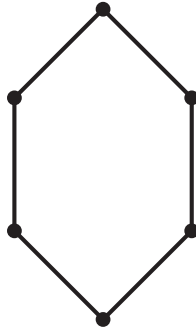


Fig. 3. Non-distributive non-modular distance-stable lattice.

Lemma 2.11. Let L be a distance-stable lattice. Then

$$d_{L^2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_L(x_1, y_1) + d_L(x_2, y_2)$$

for all $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in L^2, (x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$.

Proof. From the fact that L is a distance-stable lattice follows that there is a path $P_1 = \{x_1, a_1, \dots, a_p, y_1\}$ and a path $P_2 = \{x_2, b_1, \dots, b_q, y_2\}$, i.e., $d_L(x_1, y_1) = p + 1$ and $d_L(x_2, y_2) = q + 1$.

Using the paths P_1 and P_2 we create a path P between (x_1, x_2) and (y_1, y_2) .

$$(x_1, x_2) \rightarrow (a_1, x_2) \rightarrow \dots \rightarrow (a_p, x_2) \rightarrow (y_1, x_2) \rightarrow (y_1, b_1) \rightarrow \dots \rightarrow (y_1, b_q) \rightarrow (y_1, y_2).$$

We can see that $d_{L^2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = p + 1 + q + 1$. In addition, any path from (x_1, x_2) to (y_1, y_2) is created using paths P_1 and P_2 which are the only ones and thus the path P is the only one. \square

Corollary 2.12. Let L be a distance-stable lattice, then L^2 is a distance-stable lattice.

The following Proposition is a generalization of Lemma 2.11 and Consequence 2.12 and is not necessary to prove.

Proposition 2.13. Let L be a distance-stable lattice and $k \in \mathbb{N}$, then L^k is a distance-stable lattice. Moreover

$$d_{L^k}((x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)) = d_L(x_1, y_1) + \dots + d_L(x_k, y_k).$$

In the next section, we will focus on k -tuples in the lattice L^k . We can divide all these k -tuples into classes using transfer-stability.

Definition 2.14. The subset of k -tuples of L^k , which are linked together by transfer-stability, is called a (*transfer-stable*) *block*, that is, two elements $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^k$ belong to the same block if $TS(\mathbf{x}) = TS(\mathbf{y})$ for all $TS \in TSA_{gg_L^{(k)}}$.

The symbol \leftrightarrow denotes the transition from one k -tuple to another by transfer-stability, i.e., let B be a block in L^k and $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in B$ then $(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow (y_1, \dots, y_k)$. Obviously, each block is fully determined by its arbitrary k -tuple, therefore blocks are typed into (square) brackets. Thus $B = [(x_1, \dots, x_k)]$, which denote the class (equivalence class) of all k -tuples related by transfer-stability to the k -tuple (x_1, \dots, x_k) , that means, $(y_1, \dots, y_k) \in [(x_1, \dots, x_k)]$. Moreover, we already know from [10] that symmetry follows from the transfer-stability for the finite chains, i.e., if (x_1, \dots, x_k) belongs to the block B of the finite chain C then $\mathbf{y} \in C^k$ (which is a permutation of x_1, \dots, x_k) also belongs to the block B . The following Lemma generalizes the symmetry for all finite lattices.

Lemma 2.15. Let B be a block in the finite lattice L^k . If $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) \in B$ then $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k) \in B$.

Proof. Without loss of generality, assume that $\min(d(0, x_i), d(0, x_j), d(1, x_i), d(1, x_j)) = d(0, x_i)$, see Fig. 4. Then there is $y_j \in L$ such that

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) &\leftrightarrow (x_1, \dots, 0, \dots, y_j, \dots, x_k) \stackrel{[10]}{\leftrightarrow} \\ &\stackrel{[10]}{\leftrightarrow} (x_1, \dots, y_j, \dots, 0, \dots, x_k) \leftrightarrow (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k), \end{aligned}$$

where in the second and third step we used symmetry claim from [10]. \square

From now, we will only focus on the binary transfer-stable aggregation functions, specifically on the binary blocks (blocks containing pairs). Section 4 deals with arbitrary transfer-stable functions but most of the proofs are based on knowledge of binary transfer-stable aggregation functions.

Each block in the lattice L^2 is characterized by a pair that belongs to it. However, each block contains a significant pair that describes this block the best.

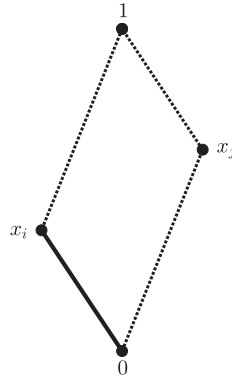


Fig. 4. Example of lattice in the proof of Lemma 2.15.

Lemma 2.16. Let L be a finite lattice and B be a (transfer-stable) block in the lattice L^2 . Then there is $x \in L$ such that the pair $(0, x)$ or $(1, x)$ belongs to the block B .

Proof. Let $(x, y) \in L^2$ and $f(x, y) := \min(d(0, x), d(0, y), d(1, x), d(1, y))$.

1. If $f(x, y) = d(0, x)$ (resp. $f(x, y) = d(0, y)$) then there is $b \in L$ such that $(x, y) \leftrightarrow (0, b)$ (resp. there is $c \in L$ such that $(x, y) \leftrightarrow (c, 0)$).
2. If $f(x, y) = d(1, x)$ (resp. $f(x, y) = d(1, y)$) then there is $b \in L$ such that $(x, y) \leftrightarrow (1, b)$ (resp. there is $c \in L$ such that $(x, y) \leftrightarrow (c, 1)$). \square

Remark 2.17. The set $\text{Atom}L$ (resp. $\text{CoAtom}L$) is a set of all atoms, resp. coatoms, of the lattice L . Then there are 4 special blocks for each lattice:

1. $[(0, 0)] = \{(0, 0)\}$
2. $[(0, a)] = \{(0, a), (a, 0) \mid a \in \text{Atom}L\}$ Atomistic block
3. $[(1, z)] = \{(1, z), (z, 1) \mid z \in \text{CoAtom}L\}$ Coatomistic block
4. $[(1, 1)] = \{(1, 1)\}$

Now we take a look at the blocks in the distance-stable lattice and firstly we describe all blocks in the distance-stable lattice using Lemma 2.16.

Proposition 2.18. Let L be a distance-stable lattice and $P = \{0, a_1, \dots, a_n, 1\}$, $P \in \text{Path}L$. Then the following blocks

$$[(0, 0)], [(0, a_1)], \dots, [(0, a_n)], [(0, 1)], [(a_1, 1)], \dots, [(a_n, 1)], [(1, 1)]$$

are all different blocks. Moreover, the number of these blocks is equal to $2 \cdot d(0, 1) + 1$.

Proof. For every two elements a, b in the distance-stable lattice the condition

$d(0, a) = d(0, b)$ iff $(0, a)$ and $(0, b)$ belong to the same block is correct. If $Q \in \text{Path}L$, $Q \neq P$ then $m = n$ because the lattice L is distance-stable. From above mentioned condition it is obvious that $(0, a_i) \in [(0, b_i)]$ for $i = 1, \dots, n$. Thus, it does not matter which path from the set $\text{Path}L$ we choose.

From Lemma 2.16 we have already proven that these are all blocks of the lattice L^2 . It remains to prove that they are different. All we have to do is examine only two cases because the other ones are analogous.

- (i) Let us consider the blocks $[(0, a_i)]$ and $[(0, a_j)]$, where $a_i < a_j$. Applying the transfer-stability to the pair $(0, a_i)$ we get the pair $(b_i, 0)$, where $d(0, b_i) = d(0, a_i)$ which means that $(0, a_j) \notin [(0, a_i)]$ because $d(0, a_i) < d(0, a_j)$.
- (ii) Let us consider the blocks $[(0, a_i)]$ and $[(a_j, 1)]$. By using a similar idea as in the previous step, we can simply find that we never get a pair containing the element 1 from the pair $(0, a_i)$, where $a_i \neq 1$. \square

Corollary 2.19. Let L be a distance-stable lattice and A be a block in the lattice L^2 . Then $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in A$ if and only if

$$d_{L^2}((x_1, x_2), (0, 0)) = d_{L^2}((y_1, y_2), (0, 0)).$$

Proof. Let us suppose there is $a \in L$ such that $A = [(0, a)]$. Then $(x_1, x_2) \leftrightarrow (0, x)$ a $(y_1, y_2) \leftrightarrow (0, y)$ for some $x, y \in L$. It is evident that $d_L(0, x) = d_L(0, y)$. Finally, we get that

$$d_{L^2}((x_1, x_2), (0, 0)) = d_L(0, x_1) + d_L(0, x_2) = d_L(0, x) = d_L(0, y) = d_L(0, y_1) + d_L(0, y_2) = d_{L^2}((y_1, y_2), (0, 0)).$$

On the contrary, let us suppose without loss of generality that

$$\min\{d_L(0, x_1), d_L(0, x_2), d_L(0, y_1), d_L(0, y_2)\} = d_L(0, x_1),$$

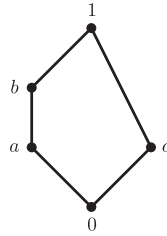


Fig. 5. Pentagon.

i.e., the element x_1 is the closest to the element 0. Moreover, let us consider that $d(0, x_1) \leq d(1, x_2)$. (The opposite case would be proven analogously.)

Then $(x_1, x_2) \leftrightarrow (0, x'_2)$ for some $x'_2 \in L$ and therefore

$$d_L(0, x'_2) = d_L(0, x_1) + d_L(0, x_2) = d_L(0, y_1) + d_L(0, y_2).$$

It follows that y_1 or y_2 can be transferred to the element 0 (suppose y_1) and therefore $(y_1, y_2) \leftrightarrow (0, y'_2)$ for some $y'_2 \in L$. Obviously, $d_L(0, x'_2) = d_L(0, y'_2)$. Proposition 2.18 shows that $(0, x'_2), (0, y'_2)$ belong to the same block, which also applies for couples $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$. □

As a result of above mentioned, we get the characterization of distance-stable lattices by ordering pairs in any block.

Proposition 2.20. *The lattice L is a distance-stable if and only if each block contains only incomparable pairs.*

Proof. Let us assume that the lattice L is distance-stable and there is a block B containing comparable pairs, i.e., $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in B$ such that $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$. In addition, without loss of generality, assume that $(x_1, x_2) \leftrightarrow (0, x)$ for some $x \in L$. Then two options may arise for (y_1, y_2) :

1. $(y_1, y_2) \leftrightarrow (0, y)$ for some $y \in L$. Then $(0, x), (0, y) \in B$, where $x \leq y$, which is contradiction with Corollary 2.18.
2. $(y_1, y_2) \leftrightarrow (y, 1)$ for some $y \in L$. Then $(0, x), (1, y) \in B$, which is also contradiction with Corollary 2.18.

Conversely, let L be a distance-unstable lattice then there are the elements $a, b \in L$ with ambiguous distance, i.e., there are different paths P_1 and P_2 from a to b such that $\|P_1\| \neq \|P_2\|$. Using the paths P_1 and P_2 we get $(a, b) \leftrightarrow (0, x)$ and $(a, b) \leftrightarrow (1, y)$, i.e., $(0, x)$ and $(1, y)$ belong to the same block. Moreover $(0, x) \leq (y, 1)$. Thus, there is a block containing comparable pairs. □

3. The order of blocks

If L is not a distance-stable lattice then there are the elements $x, y \in L$ such that $|D_{xy}| \geq 2$. Let $n, m \in D_{xy}, n > m$. Then $(0, y) \leftrightarrow (0, y')$ where $y' > y$ and $d(y, y') = n - m$, i.e., the element y has transferred up by $n - m$ steps to the element y' . Thus, the blocks in the finite lattice L can be either linearly ordered or alternately unordered, that means for every two blocks A, B there are $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in A, \mathbf{b} \in B$ such that $\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{a}'$. Obviously, if the blocks are unordered then there are $x, y, z \in L, x \leq y \leq z$ such that $(0, x), (0, z) \in A$ and $(0, z) \in B$. Combining this idea and Proposition 2.18, we get the order of blocks in the distance-stable lattices.

Proposition 3.1. *The blocks are linearly ordered in the distance-stable lattice.*

Is there a distance-unstable lattice that has linearly ordered blocks? The answer is the following example.

Example 3.2. Let $L = \{0, a, b, c, 1\}$, where $a \leq b$, be a pentagon (see Fig. 5). Then

$$[(0, 0)] \leq [(0, a)] \leq [(0, 1)] \leq [(1, b)] \leq [(1, 1)].$$

are the blocks in L^2 and therefore the pentagon has linearly ordered blocks but is not a distance-stable lattice.

Now we are concerned with the question of what lattices, apart from distance-stable lattices, have linearly ordered blocks. First of all, we define this class of lattices and we find its characteristic properties in the rest of this section.

Definition 3.3. The finite lattice L is called *transfer-stable*, if (transfer-stable) blocks in the lattice L^2 are linearly ordered.

For example, the pentagon is a transfer-stable lattice. We start with the simplest example of a distance-unstable lattice, which is the case when there are only two distances between 0 and 1 in the lattice L differing by 1, i.e., $|D_{01}| = 2$ and $n, n + 1 \in D_{01}$ for some $n \in \mathbb{N}$. We prove that this lattice is transfer-stable. To this proof, we use the following Lemma dealing with the form of the block $[(0, 1)]$ when there are the elements $x, y \in L$ with different distances differing by 1 in the lattice L .

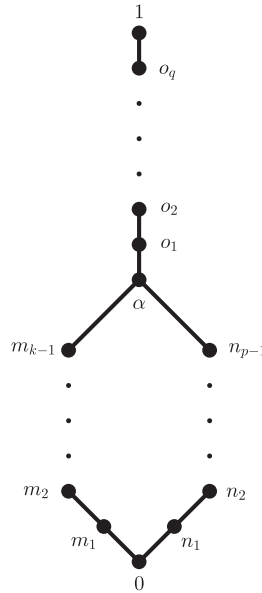


Fig. 6. Lattice L .

Lemma 3.4. *If $n, n + 1 \in \mathcal{D}_{xy}$ for some $x, y \in L, x \leq y$ and $n \in \mathbb{N}$ then $(x, y), (0, y), (1, x) \in [(0, 1)]$.*

Proof. Let us suppose that $n, n + 1 \in \mathcal{D}_{xy}$. Then $(x, y) \leftrightarrow (x, y')$, where $y < y'$ such that $x \uparrow^{n+1} = y'$ and $y \downarrow_{n+1} = x$, where the symbol \uparrow^{n+1} (resp. \downarrow^{n+1}) denotes move up (resp. down) by $n + 1$ elements. Repeating this step we get a pair $(x, 1)$.

Using the transfers $x \uparrow^{n+1} = y$ and $y \downarrow_{n+1} = x'$, where $x' < x$, to the pair (x, y) we get the pair (x', y) . The pair $(0, y)$ would be obtained analogously. Eventually, we get the pair $(0, 1)$ by combining both cases. As we know from Proposition 2.20, there is a block containing comparable pairs. \square

Now we describe the behavior of the blocks and point out the differences between distance-stable and distance-unstable lattices. In distance-stable lattices, all pairs in the same block are at the same distance from the element 0 according to Corollary 2.19. However, this property is not preserved in distance-unstable lattices. On the other hand, it turns out that in this case there is also regularity in the form of distances between comparable pairs in the lattice L^2 . We show it using the lattice L depicted on the Fig. 6.

We can easily see that $(0, m_p) \leftrightarrow (0, \alpha) \leftrightarrow (0, o_{k-p}) \leftrightarrow (0, o_{2(k-p)}) \leftrightarrow \dots$ and the distance between them is equal to $k - p$. In addition, $(0, m_i) \leftrightarrow (0, \alpha)$ for all $i \in \{p + 1, \dots, k - 1\}$, which means that each pair in the form $(0, m_i), i \in \{p + 1, \dots, k - 1\}$ represents another block. Let us return to the original idea of the difference of distances equal to 1. In this case, it holds $k = p - 1$ and thus by using Lemma 3.4 we get $[(0, m_k)] = [(0, 1)]$. If $[(0, m_i)] = [(0, m_j)]$ then necessarily $j = i + 1$. By using the following Lemma 3.8 the blocks are linearly ordered which also proves Proposition 3.9.

Definition 3.5. The element α is called the first unstable element relative to 0 , if the set $\mathcal{D}_{0\alpha}$ is not the single-element set and the set $\mathcal{D}_{0\gamma}$ is the single-element set for all $\gamma \in L$ such that $d(0, \gamma) < d(0, \alpha)$. Similarly, the element β is called the first unstable element relative to 1 if the set $\mathcal{D}_{\beta 1}$ is not the single-element set and the set $\mathcal{D}_{\gamma 1}$ is the single-element set for all $\gamma \in L$ such that $d(\gamma, 1) < d(\beta, 1)$.

Remark 3.6. The first unstable element relative to 0 (resp. 1) is not uniquely determined, see Example 3.7.

Example 3.7. Let us consider the lattice L visualized in Fig. 7. Then the elements α_1 and α_2 are the first unstable elements relative to 0 because $\mathcal{D}_{0\alpha_1} = \{3, 4\} = \mathcal{D}_{0\alpha_2}$, i.e., $d(0, \alpha_1) = d(0, \alpha_2) = 3$, and $|\mathcal{D}_{0a_1}| = |\mathcal{D}_{0a_2}| = 1$ for any other element $a \in L$, where $d(0, a) = 3$ (in Fig. 7 - $a_1, a_2 \in L$).

On the contrary, β_1 and β_2 are the first unstable elements relative to 1 because $\mathcal{D}_{1\beta_1} = \{2, 5\} = \mathcal{D}_{1\beta_2}$, i.e., $d(1, \beta_1) = d(1, \beta_2) = 2$, and $|\mathcal{D}_{1b_1}| = |\mathcal{D}_{1b_2}| = 1$ for any other element $b \in L$, where $d(1, b) = 2$ (in Fig. 7 - $b_1, b_2 \in L$).

Lemma 3.8. *Let α and β be the first unstable elements relative to 0 and 1 , respectively. Then the following blocks:*

- $[(0, 0)], [(0, a_1)], \dots, [(0, a_p)],$
- $[(0, 1)],$
- $[(1, b_1)], \dots, [(1, b_r)], [(1, 1)],$

where $0 < a_1 < \dots < a_p < \alpha, d(0, \alpha) = p + 1, \beta < b_1 < \dots < b_r < 1, d(1, \beta) = r + 1$, are all mutually different blocks of the transfer-stable distance-unstable lattice.

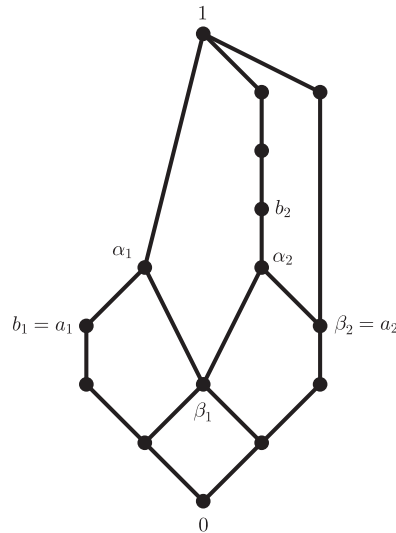


Fig. 7. Unstable elements.

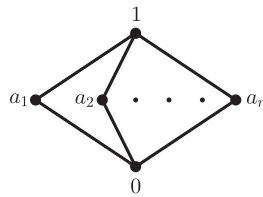


Fig. 8. n-dimensional diamond.

Moreover, the number of blocks is equal to $d(0, \alpha) + 1 + d(1, \beta)$.

Proof. Let $(x, y) \in L^2$. Let us suppose without loss of generality that $(x, y) \leftrightarrow (0, y')$ for some $y' \in L$. (Analogous, the case $(x, y) \leftrightarrow (1, y')$ for some $y' \in L$.) Then there are two options:

- (1) if $d(0, y') < d(0, \alpha)$ then there is $a_i, i \in \{1, \dots, p\}$ such that $(x, y) \leftrightarrow (0, y') \leftrightarrow (0, a_i)$.
- (2) if $d(0, y') \geq d(0, \alpha)$ then, necessarily, $(0, y') \leftrightarrow (0, 1)$ has to be fulfilled, otherwise there would be an incomparable block with the block $[(0, 1)]$ which is not possible in the transfer-stable lattice.

Next, it is necessary to prove that all blocks are different. It is fulfilled that blocks $[(0, a_i)] \neq [(0, a_j)], i, j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j$ because $\mathcal{M} = (M, \wedge)$, where $M = \{x \in L \mid d(0, x) < d(0, \alpha)\}$ is the distance-stable meet-semilattice. It remains to prove that $[(0, a_p)] \neq [(0, 1)]$. Using Lemma 3.4, we can easily see that $[(0, a_p)] \neq [(0, 1)]$ and therefore the lattice L is transfer-stable. \square

Proposition 3.9. Let L be a finite lattice with the elements $a, b \in L$ such that $n, n + 1 \in \mathcal{D}_{ab}$. Then L is a transfer-stable lattice.

By using the previous Proposition, we get simple instruction on how to create a transfer-stable lattice from a transfer-unstable lattice. The following construction assumes $D(0, 1) \geq 3$. Otherwise, there are two options:

- (1) If $D(0, 1) = 1$ then the lattice L is a two-element chain, which is a distance-stable lattice and transfer-stable lattice.
- (2) If $D(0, 1) = 2$ then the lattice L is so-called an n -dimensional diamond (see Fig. 8) which is a distance-stable lattice and transfer-stable lattice.

We get that in the transfer-unstable lattice L there is an element $a \in L$ such that $3 \in \mathcal{D}_{0a}$. Then we add the element c to the lattice L such that the element c is an atom of the lattice L and $c < a$. The created lattice is denoted by the symbol L_c and holds $2 \in \mathcal{D}_{0a}$.

Corollary 3.10. The lattice L_c is a transfer-stable lattice.

Example 3.11. Let us consider the lattice L_1 depicted in Fig. 9. We show that it is a transfer-unstable lattice. Firstly, we determine the first unstable elements with respect to 0 (resp. 1), i.e., $\alpha_1, \alpha_2 \in L_1$ (resp. $\beta_1, \beta_2 \in L_1$). Moreover, $\mathcal{D}_{01} = \{4, 6, 8\}$. Further, we find all the blocks of the lattice L_1 . We find the first blocks using the principle of distance-stable lattices. Therefore $[(0, 0)], [(0, a)], [(0, c)]$ are the first three blocks of the set of all blocks of the lattice L_1 . Similarly, $[(1, j)], [(1, 1)]$ are

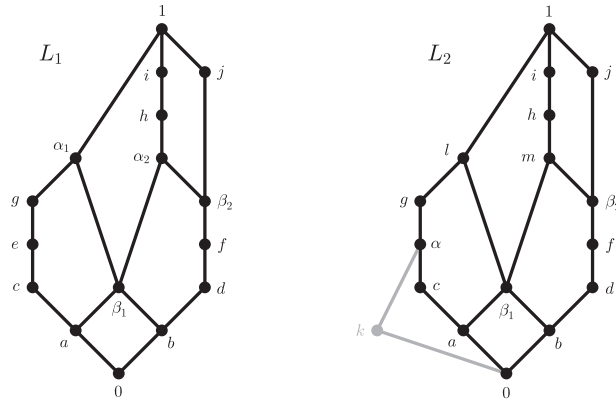


Fig. 9. Transfer-unstable lattice L_1 and transfer-stable lattice L_2 .

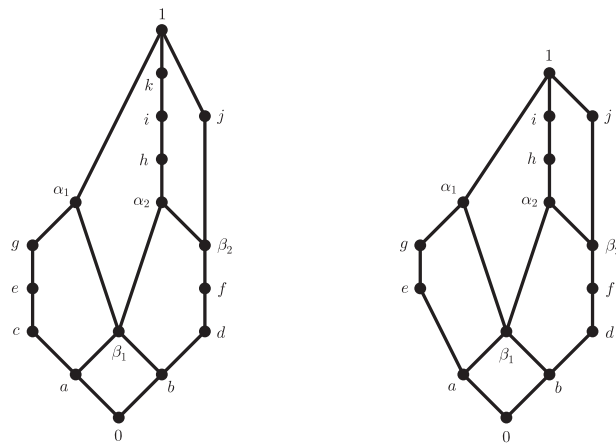


Fig. 10. Transfer-stable lattices.

the last two blocks of the same set. It remains to determine what is between the blocks $[(0, c)]$ and $[(1, j)]$. We can easily see that the space between them is filled with the blocks $[(0, \alpha_1)]$ and $[(0, 1)]$, which are incomparable. For example, $(0, \alpha_1) \leftrightarrow (1, a) \leftrightarrow (0, i) \leftrightarrow (0, \alpha_2)$ and $(0, g) \leftrightarrow (0, 1) \leftrightarrow (0, h)$ and therefore $(0, \alpha_2), (0, i) \in [(0, \alpha_1)]$ and $(0, h) \in [(0, 1)]$, where $(0, \alpha_2) \leq (0, h) \leq (0, i)$.

We have shown that the lattice L_1 is a transfer-unstable lattice and we create a transfer-stable lattice from the lattice L_1 using Corollary 3.10. Adding the element according to the idea used in Corollary 3.10 we get the lattice $L_k = L_2$ and we do the same as for the lattice L_1 . Compared to L_1 , the first unstable element relative to 0 is changed, i.e., $\alpha \in L_2$. Further, $\mathcal{D}_{01} = \{4, 5, 6, 8\}$. We get the first two and the last two blocks of the lattice L_2 using the knowledge of distance-stable lattices, i.e., $[(0, 0)], [(0, a)]$ and $[(1, j)], [(1, 1)]$. We show that the block $[(0, 1)]$ is between the blocks $[(0, a)]$ and $[(1, j)]$ and it is the only one. We have:

$$\begin{array}{cccccccc}
 (0, \alpha) & \leftrightarrow & (0, c) & \leftrightarrow & (0, \beta_1) & \leftrightarrow & (0, d) & \\
 & & \leftrightarrow & (0, g) & \leftrightarrow & (0, l) & \leftrightarrow & (0, m) & \leftrightarrow & (0, f) \\
 & & \leftrightarrow & \mathbf{(0, 1)} & \leftrightarrow & (0, h) & \leftrightarrow & (0, \beta_2) & & \\
 & & & & \downarrow & & & & & \\
 & & & & (0, i) & \leftrightarrow & (0, j) & & & \\
 \\
 \mathbf{(0, 1)} & \leftrightarrow & (1, a) & \leftrightarrow & (1, b) & \leftrightarrow & (1, f) & \leftrightarrow & (1, m) & \leftrightarrow & (1, \alpha) \\
 & & \leftrightarrow & (1, k) & \leftrightarrow & (1, c) & \leftrightarrow & (1, \beta_1) & \leftrightarrow & (1, \beta_2) & \leftrightarrow & (1, d) \\
 & & & & & & & & \downarrow & & & \\
 & & & & & & & & (1, h) & \leftrightarrow & (1, g)
 \end{array}$$

Therefore, the lattice L_2 is a transfer-stable lattice.

Remark 3.12. There are several possible ways to create a transfer-stable lattice. Other ways, how to create a transfer-stable lattice from the lattice L_1 , are shown in Fig. 10, where these lattices are transfer-stable by Proposition 3.9.

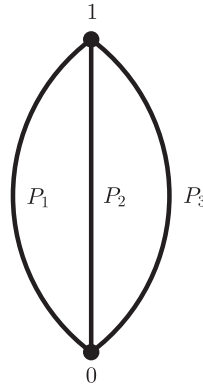


Fig. 11. Lattice P .

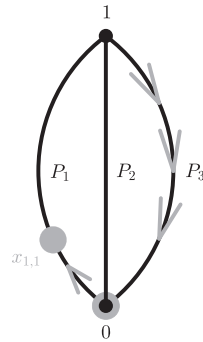


Fig. 12. The movement in the step 1.

In the end of this section we take a look at the characterization of transfer-stable lattices. By the previous idea, we will focus on the regular rotation of blocks in distance-unstable lattices.

Let L be a transfer-unstable lattice then there are blocks M, M_1, \dots, M_n such that $(x, y), (x', y') \in M, (x_1, y_1) \in M_1, \dots, (x_n, y_n) \in M_n, (x, y) \leq (x_1, y_1) \leq \dots \leq (x_n, y_n) \leq (x', y')$. In addition, the blocks M, M_1, \dots, M_n are mutually different blocks. Let P_1, \dots, P_m be paths of different distances from the set $\text{Path}L$ arranged from longest to shortest distance. Therefore $P_1 = \{0, m_1, \dots, m_k, 1\}$ is the longest path of the lattice L . Then we can prove that

$$n = \text{gcd}(\|P_1\| - \|P_2\|, \|P_1\| - \|P_3\|, \dots, \|P_{m-1}\| - \|P_m\|) - 1,$$

where greatest common divisor (gcd) of two or more positive integers is the largest positive integer that divides each of the integers. By using this idea for transfer-stable lattices, we get the required property that characterizes them, i.e., this property guarantees a linear ordering of blocks.

Theorem 3.13. *The finite lattice L is a transfer-stable if and only if it is a distance-stable or there are paths $P_1, P_2, P_3 \in \text{Path}L$ such that*

$$\text{gcd}(\|P_1\| - \|P_2\|, \|P_1\| - \|P_3\|, \|P_2\| - \|P_3\|) = 1.$$

Proof. Let us consider the lattice P created by paths P_1, P_2 and P_3 , i.e., $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$ (see Fig. 11). Let us denote $\|P_1\| = a, \|P_2\| = b, \|P_3\| = c$ and $\text{gcd}(a - b, a - c, b - c) = d$. Without loss of generality, assume that $a > b > c$.

Now we create a cycle \mathcal{C} containing the pairs $(0, x), x \in P_1$ using the transfer-stability. In the following structure, we use the symbol $(x, y) \xrightarrow{P} (a, b)$ denoting the movement of the first coordinate following the path P and the second coordinate following the path Q . The construction of the cycle \mathcal{C} is done as follows:

1. $(0, 1) \xrightarrow{P_1} (0, x_{1,1}),$ where $x_{1,1} \in P_1$ and $d(0, x_{1,1}) = c$. (see Fig. 12)
2. $(x_{1,1}, 0) \xrightarrow{P_1} (0, 1) \xrightarrow{P_2} (x_{1,2}, 0),$ where $x_{1,2} \in P_1$ and $d(x_{1,1}, x_{1,2}) = b - c$. (see Fig. 13)
3. $(x_{1,2}, 0) \xrightarrow{P_1} (y_{1,2}, 1) \xrightarrow{P_2} (x_{1,3}, 0),$ where $y_{1,2}, x_{1,3} \in P_1$ and $d(x_{1,2}, x_{1,3}) = b - c$. (see Fig. 14)
4. By repeating the step 3, we get into the pair $(0, x_{1,k})$ for some $k \in \mathbb{N}$ and the condition $d(x_{1,k}, 1) < b - c$ is fulfilled. Let us denote $\alpha = d(x_{1,k}, 1)$. Thus, we have created the 1. class of the cycle \mathcal{C} , which contains the pairs

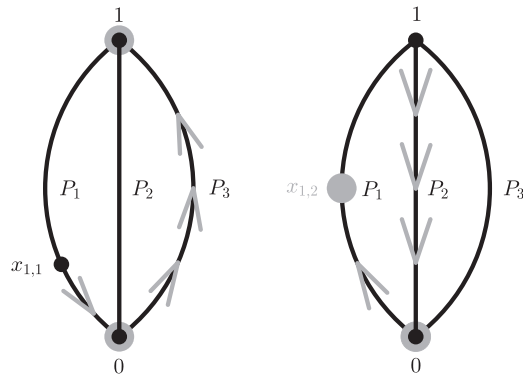


Fig. 13. The movement in the step 2.

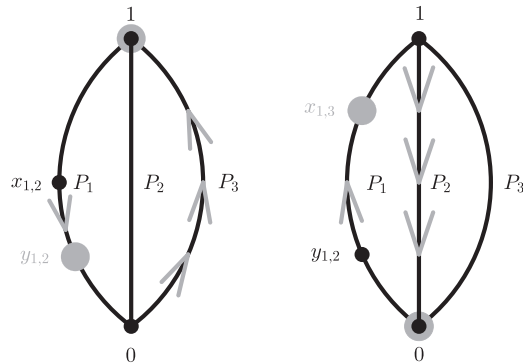


Fig. 14. The movement in the step 3.

$(0, x_{1,1}), (0, x_{1,2}), \dots, (0, x_{1,k})$ with condition

$$(0, x_{1,1}), (0, x_{1,2}), \dots, (0, x_{1,k}) \in [(0, 1)].$$

5. In this step, we create the 1. element of the 2. class $(0, x_{2,1})$ of the cycle C . We use the procedure of the step 3. for the pair $(0, x_{1,k})$ but we do not get into the element 0 when following the path P_2 because $\alpha < b - c$, that means $(x_{1,k}, 0) \xrightarrow{P_1} (y_{1,k}, 1) \xrightarrow{P_2} (1, y)$, where $x_{1,k}, y_{1,k} \in P_1, y \in P_2$ and $d(0, y) = b - c - \alpha$. Further, $(1, y) \xrightarrow{P_3} (0, y')$, where $y' \in P_2$ and $d(0, y') = b - \alpha$. In the last step, we return to the path P_1 , i.e., $(0, y') \xrightarrow{P_1} (x_{2,1}, 0)$, where $x_{2,1} \in P_1$ and $d(0, x_{2,1}) = b - \alpha$.

6. We apply the step 2. to the pair $(0, x_{2,1})$.

7. We obtain the 2. class of the cycle C using the same method as in the steps 3. and 4., i.e.,

$$(0, x_{2,1}), (0, x_{2,2}), \dots, (0, x_{2,p}) \in [(0, 1)].$$

8. The cycle C ends when the last pair of a class is $(0, 1)$, i.e., $(0, x_{n,m}) = (0, 1)$ for some $n, m \in \mathbb{N}$.

The cycle C can also be examined through congruent equations, i.e.,

$$d(0, x_{1,j}) \equiv c \pmod{b - c}$$

$$d(0, x_{2,j}) \equiv b - a + c \pmod{b - c}$$

$$d(0, x_{3,j}) \equiv 2b - 2a + c \pmod{b - c}$$

⋮

$$d(0, x_{n,j}) \equiv (n - 1)b - (n - 1)a + c \pmod{b - c}.$$

All solutions of the i -th equation in the interval (c, a) correspond to the elements in the i -th class of the cycle C (more precisely, the solutions are the distances from the element 0). There has to be $(b - c)$ classes for solution of all equations to be different.

We prove that if $d = 1$ then the cycle C contains all the pairs $(0, x)$ for $x_{1,1} \leq x \leq 1$, i.e., the number of all pairs is equal to $a - c + 1$. It can be proven that the maximum number of elements in one class is equal to $\lceil \frac{a-c}{b-c} \rceil$ and the number of all

classes is equal to $\frac{b-c}{d}$. If $d \neq 1$ then

$$\left\lceil \frac{a-c}{b-c} \right\rceil \cdot \frac{b-c}{d} < a-c < a-c+1,$$

that means the cycle C does not contain all pairs. Therefore, the cycle contains all pairs only in the case $d = 1$.

We have proven that the pairs of the specific part I of the lattice L^2 belong to the block $[(0, 1)]$ and these pairs follow each other. In the light of Proposition 3.9, the lattice L has linearly ordered blocks. If this is not the case, then there are regular gaps between the blocks and thus there would be a gap even in the part I which is not possible.

Conversely, if the lattice L is transfer-stable then either it is distance-stable (the proof is complete) or there is the first unstable element α relative to 0. Let $P_1, P_2 \in \text{Path}L$ such that $\alpha \in P_1, P_2$. Since $(0, \alpha), (0, \alpha_1), \dots, (0, \alpha_n) \in [(0, 1)]$, where $\alpha < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < 1$, then there is the path P_3 satisfying the condition of Theorem 3.13, i.e., $\text{gcd} = 1$. If there is no such path then the lattice L is a transfer-unstable lattice according to the first part of the proof which can not be. \square

4. k -Ary transfer-stable aggregation functions

In this section, we focus on the transfer-stable aggregation functions of higher arity. Until then, we have only studied the binary transfer-stable aggregation functions and we have shown some of their properties. Now we generalize some “most important” properties of binary transfer-stable functions for the transfer-stable aggregation functions of any arity. First of all, we start with distance-stable lattices. We try to generalize Corollary 2.18, that means how the form of blocks in the distance-stable lattice L^k look.

Proposition 4.1. *Let L be a distance-stable lattice and $P \in \text{Path}L, P = \{0, a_1, \dots, a_n, 1\}$. Then*

$$[(x, \dots, x, y)]; [(x, \dots, x, y, y)]; \dots; [(x, y, \dots, y)]; [(y, \dots, y)],$$

where $x, y \in P, x \leq y$ are all different blocks of the lattice L^k .

In addition, the number of all blocks is equal to $k \cdot d(0, 1) + 1$.

Proof. Let $(x_1, \dots, x_k) \in L^k$. Let us assume without loss of generality that $(x_1, x_2) \leftrightarrow (0, x'_2)$ for some $x'_2 \in L$. Similarly, the proof would be made for the case $(x_1, x_2) \leftrightarrow (1, x'_2)$.

Then there are $y_i \in L, i = 2, \dots, k$ such that

$$\begin{aligned} (0, x'_2) &\leftrightarrow (0, y_2) \\ (0, x_3) &\leftrightarrow (0, y_3) \\ &\vdots \\ (0, x_k) &\leftrightarrow (0, y_k), \end{aligned}$$

where $y_i \in P$ for $i = 2, \dots, k$ and thus (by applying the transfer-stability) we can rearrange the k -tuple $(0, y_1, \dots, y_k)$ such that $(0, y_2, \dots, y_k) \leftrightarrow (0, z_2, \dots, z_k)$, where $z_2 \leq z_3 \leq \dots \leq z_k, z_i \in P$ for $i = 2, \dots, k$. By using the knowledge of the transfer-stable means (see [10]) we have

$$(0, z_2, \dots, z_k) \leftrightarrow (x, \dots, x, y, \dots, y),$$

where $x, y \in P, x \leq y$. The variety of all blocks, each two blocks different from one another, also results from [10] and there is no need to prove it.

Next, we prove that the number of blocks is equal to $k \cdot d(0, 1) + 1$. The number of all blocks for a fixed pair of elements $x, y \in P, x < y$ is equal to k . All these pairs are in the form $(0, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, 1)$ and the number of these pairs is equal to $n + 1 = d(0, 1)$. Finally, we have to add 1 since the above calculation does not contain the block $[(0, \dots, 0)]$. Therefore, the proof is complete. \square

Even in this case, we found that the blocks of the lattice L^k are individual coverage of the lattice L^k . Therefore, the blocks of the lattice L^k (distance-stable lattice L) are linearly ordered. An important piece of knowledge is that as the arity of the transfer-stable aggregation function increases, the number of blocks increases, i.e., the number of block of the lattice L^k depends on the arity of k -ary transfer-stable aggregation function. As we will show later, this phenomenon is only fulfilled in distance-stable lattices.

We already know that the lattice L^k is distance-stable by Proposition 2.13. Therefore a question, how is it generally with Proposition 2.20, arises.

Proposition 4.2. *The finite lattice L is distance-stable if and only if each block of the lattice L^k contains only incomparable k -tuples for all $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.*

Proof. Let L be a distance-stable lattice and A be a block of the lattice L^k . Let us suppose there are k -tuples $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k) \in A, (x_1, \dots, x_k) \leq (y_1, \dots, y_k)$. By using the same idea as in Proposition 4.1 there are k -tuples (x'_1, \dots, x'_k) and (y'_1, \dots, y'_k) such that $(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow (x'_1, \dots, x'_k)$ and $(y_1, \dots, y_k) \leftrightarrow (y'_1, \dots, y'_k)$, where the elements $x'_i, y'_i, i = 1, \dots, k$ belong to the same path $P \in \text{Path}L$ and $x'_1 \leq \dots \leq x'_k, y'_1 \leq \dots \leq y'_k$.

According to the transfer-stable means in [10] it must be fulfilled $(x'_1, \dots, x'_k) \leq (y'_1, \dots, y'_k)$. Thus (x'_1, \dots, x'_k) and (y'_1, \dots, y'_k) do not belong to the same block and this is a contradiction with the assumption.

We can prove the opposite by using negation, that means if the lattice L is a distance-unstable then there are k -tuples $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L^k$, $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ belonging to the same block. Let the lattice L be a distance-unstable lattice. Then there is the element $a \in L$ such that $d(0, 1) = d(0, a)$ and therefore $(0, \dots, 0, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, a)$, where $(0, \dots, 0, a) \leq (0, \dots, 0, 1)$.

We have proven that there is a block of the lattice L^k which contains comparable k -tuples. \square

In the distance-stable lattices we found that the generalization was natural and as expected. In the second part we focus on the transfer-stable distance-unstable lattices. As in the previous case, we take a look at all blocks of these lattices. To prove this idea, we use the following Lemma and Corollary dealing with the block $[(0, \dots, 0, 1)]$.

Lemma 4.3. *Let L be a transfer-stable distance-unstable lattice and $P^{\max} = \{0, c_1, \dots, c_n, 1\}$ and $P^{\min} = \{0, d_1, \dots, d_m, 1\}$ be the longest and shortest path of the lattice L , respectively, i.e., $D(0, 1) = n + 1$ and $d(0, 1) = m + 1$. Then the k -tuples*

$$(0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, 1, 1), \dots, (0, 0, 1, \dots, 1), (0, 1, \dots, 1)$$

belong to the same block.

Proof. Since the proof is analogous for all the above mentioned k -tuples it is sufficient to prove that the k -tuples $(0, \dots, 0, 1)$ and $(0, \dots, 0, 1, 1)$ belong to the same block.

1. $(0, \dots, 0, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, c_1, 1)$, where $(0, 1) \leftrightarrow (c_1, 1)$ because $d(1, c_1) > d(1, \beta)$, where β is the first unstable element relative to 1.
2. $(0, \dots, 0, c_1, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, d_1, 1)$ because $(0, c_1) \leftrightarrow (0, d_1)$.
3. $(0, \dots, 0, d_1, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, c_i, 1)$, where $(1, d_1) \leftrightarrow (1, c_i)$ for some $i \in \{1, \dots, n\}$ because $d(1, d_1) = d(1, c_i)$.

Then there are two situations:

- (A) $(0, c_i) \in [(0, 1)]$ and therefore $(0, \dots, 0, c_i, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, 1, 1)$. or
- (B) $d(0, c_i) < d(0, \alpha)$, where α is the first unstable element relative to 0. Then there is the element $d_i \in P^{\min}$ such that $(0, c_i) \leftrightarrow (0, d_i)$ and thus $(0, \dots, 0, c_i, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, d_i, 1)$. Then $(0, \dots, 0, d_i, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, c_j, 1)$, where $(1, d_i) \leftrightarrow (1, c_j)$ for some $i \in \{1, \dots, n\}$ because $d(1, d_i) = d(1, c_j)$. Again, we use the above mentioned situations A) or B) for the k -tuple $(0, \dots, 0, c_j, 1)$. After the finite number of steps we get $(0, c_p) \in [(0, 1)]$, $p \in \{1, \dots, n\}$ and therefore $(0, \dots, 0, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, 1, 1)$. \square

Corollary 4.4. *Let L be a transfer-stable distance-unstable lattice. Then*

$$(x_1, \dots, x_{k-2}, 0, 1) \in [(0, \dots, 0, 1)] \text{ for all } x_1, \dots, x_{k-2} \in L.$$

Proof. By using the previous Lemma we get $(x_i, 0, 1) \leftrightarrow (0, 1, 1)$ for all $i = 1, \dots, k-2$ and therefore $(x_1, \dots, x_{k-2}, 0, 1) \leftrightarrow (0, 1, \dots, 1) \leftrightarrow (0, \dots, 0, 1)$. \square

Proposition 4.5. *Let L be a transfer-stable distance-unstable lattice and α (resp. β) is the first unstable element relative to 0 (resp. 1). Let $P_1 = \{0, c_1, \dots, c_p, \alpha\}$ and $P_2 = \{\beta, d_1, \dots, d_r, 1\}$ be the shortest path from 0 to α and from β to 1 of the lattice L , respectively, i.e., $d(0, \alpha) = p + 1$ and $d(1, \beta) = r + 1$. Then*

$$\begin{aligned} & [(0, \dots, 0)], [(0, \dots, 0, c_1)], \dots, [(0, \dots, 0, c_p)], \\ & [(0, \dots, 0, 1)], \\ & [(1, \dots, 1, d_1)], \dots, [(1, \dots, 1, d_r)], [(1, \dots, 1)] \end{aligned}$$

are all the different blocks of the lattice L .

Proof. Let $(x_1, \dots, x_k) \in L^k$. According to Lemma 2.16 we know that there is $x'_2 \in L$ such that $(x_1, x_2) \leftrightarrow (0, x'_2)$ or $(x_1, x_2) \leftrightarrow (1, x'_2)$. We get two options:

- (1) $(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow (0, x'_2, x_3, \dots, x_k)$ or
- (2) $(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow (1, x'_2, x_3, \dots, x_k)$

The same step is used to the elements x'_2, x_3 and therefore there is $x'_3 \in L$ such that $(x'_2, x_3) \leftrightarrow (0, x'_3)$ or $(x'_2, x_3) \leftrightarrow (1, x'_3)$. There are four options:

- (1) $(0, x'_2, x_3, \dots, x_k) \leftrightarrow (0, 0, x'_3, x_4, \dots, x_k)$
- (2) $(0, x'_2, x_3, \dots, x_k) \leftrightarrow (0, 1, x'_3, x_4, \dots, x_k)$
- (3) $(1, x'_2, x_3, \dots, x_k) \leftrightarrow (1, 0, x'_3, x_4, \dots, x_k)$
- (4) $(1, x'_2, x_3, \dots, x_k) \leftrightarrow (1, 1, x'_3, x_4, \dots, x_k)$

The k -tuples in the options 2) and 3) belong to the block $[(0, \dots, 0, 1)]$ based on Corollary 4.4.

It remains to show in which blocks the k -tuples in the options 1) and 4) belong to. Since the option 4) is analogous to the option 1) we will only focus on the k -tuple $(0, 0, x'_3, x_4, \dots, x_k)$.

If we get $(x'_i, x_{i+1}) \leftrightarrow (1, x'_{i+1})$ while editing the given k -tuple then the proof is done. It must be true that there is $y \in L, y \neq 1$ such that $(0, 0, x'_3, x_4, \dots, x_k) \leftrightarrow (0, \dots, 0, y)$. If $d(0, y) < d(0, \alpha)$ then there is $c_i \in P_1$ such that $(0, \dots, 0, y) \leftrightarrow (0, \dots, 0, c_i)$. Otherwise, $(0, \dots, 0, y) \leftrightarrow (0, \dots, 0, 1)$.

Apparently, all blocks are different by Lemma 3.8. \square

Corollary 4.6. *The number of all blocks of transfer-stable distance-unstable lattice L is the same for all k -ary transfer-stable aggregation functions of the lattice L , that means $d(0, \alpha) + d(1, \beta) + 1$.*

Corollary 4.7. *The class of transfer-stable lattices is the same for all k -ary transfer-stable aggregation functions of the lattice L , that means the lattice L is a transfer-stable if (transfer-stable) blocks of the lattice L^k are linearly ordered for all $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$.*

5. The lattice of transfer-stable aggregation functions

Based on the previous section, we can write the binary transfer-stable aggregation function on transfer-stable lattice in the following form:

$$TS(\mathbf{x}) := \langle 0, a_1, a_2, \dots, a_n, 1 \rangle,$$

where the elements $a_1, \dots, a_n \in L, a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ are images of individual blocks and the element a_1 is an image of the atomistic block and the element a_n is an image of the coatomistic block. We can use the abbreviated form $TS(\mathbf{x}) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ because $[(0, \dots, 0)] \mapsto 0$ and $[(1, \dots, 1)] \mapsto 1$.

• **Distance-stable lattices**

Let $P \in \text{Path}L, P = \{0 = c_0, c_1, c_2, \dots, c_{d(0,1)-1}, c_{d(0,1)} = 1\}$, i.e., $|P| = d(0, 1) + 1$ and $\|P\| = d(0, 1)$. Then k -ary transfer-stable aggregation function TS on distance-stable lattice L is in the form

$$TS(\mathbf{x}) = \langle a_1, a_2, \dots, a_{kd(0,1)-1} \rangle,$$

where the element a_i is an image of the block $[(c_p, \dots, c_p, \underbrace{c_{p+1}, \dots, c_{p+1}}_q)]$ for $i = pk + q$, where $p \in \{0, \dots, d(0, 1) - 1\}$,

$q \in \{1, \dots, k\}$.

• **Transfer-stable distance-unstable lattice**

Let $P_1 = \{0, c_1, \dots, c_{d(0,\alpha)-1}, \alpha\}$ be the shortest path from 0 to α (the first unstable element relative to 0), i.e., $|P_1| = d(0, \alpha) + 1$ and $\|P_1\| = d(0, \alpha)$. Let $P_2 = \{\beta, d_1, \dots, d_{d(1,\beta)-1}, 1\}$ be the shortest path from β to 1 (the first unstable element relative to 1), i.e., $|P_2| = d(\beta, 1) + 1$ and $\|P_2\| = d(\beta, 1)$. Then a k -ary transfer-stable aggregation function TS on the transfer-stable distance-unstable lattice L is in the form

$$TS(\mathbf{x}) = \langle a_1, \dots, a_{d(0,\alpha)-1}, a_{d(0,\alpha)}, a'_1, \dots, a'_{d(1,\beta)-1} \rangle,$$

where the element $a_i \in L$ is an image of the block $[(\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, c_i)]$ for $i = 1, \dots, d(0, \alpha) - 1$, the element $a_{d(0,\alpha)} \in L$ is an image of the block $[(\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1)]$ and the element a'_j is an image of the block $[(1, \dots, 1, \underbrace{d_j}_{k-1})]$ for $j = 1, \dots, d(1, \beta) - 1$.

Remark 5.1. The evaluation of the transfer-stable aggregation function TS with the input \mathbf{x} is done by modifying the vector \mathbf{x} to the required form. Moreover, the evaluation depends on the type of the lattice. If the lattice L is a distance-stable lattice then we change the vector \mathbf{x} to the form $(c_p, \dots, c_p, c_{p+1}, \dots, c_{p+1})$ where $c_p \leq c_{p+1}$. If the lattice L is a transfer-stable distance-unstable lattice then we convert the vector \mathbf{x} to one of the following forms $(0, \dots, 0, c_i), (0, \dots, 0, 1)$ or $(1, \dots, 1, d_j)$, where c_i and d_j correspond to the above mentioned option for transfer-stable distance-unstable lattices.

Next, we take a look at the structure $\text{TSAgg}_L^{(k)}$ and we find what kind of structure it is. Evidently, $TS^{\min}(\mathbf{x}) := \langle 0, \dots, 0 \rangle$ and $TS^{\max}(\mathbf{x}) := \langle 1, \dots, 1 \rangle$ are the smallest and the greatest transfer-stable aggregation functions. Let $TS_1(\mathbf{x}) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ and $TS_2(\mathbf{x}) = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ be arbitrary transfer-stable aggregation functions on the lattice L then

$$TS_1 \wedge TS_2 = \langle a_1 \wedge b_1, \dots, a_n \wedge b_n \rangle$$

$$TS_1 \vee TS_2 = \langle a_1 \vee b_1, \dots, a_n \vee b_n \rangle$$

are transfer-stable aggregation functions on the lattice L . Thus, the structure $(\text{TSAgg}_L^{(k)}, \wedge, \vee)$ of all k -ary transfer-stable aggregations functions on the transfer-stable lattice L is a lattice. Now let us look at some of its features. The first property is the number of elements in the structure.

Proposition 5.2. *The number of all k -ary transfer-stable aggregation functions on the distance-stable lattice L is equal to*

$$c \cdot \left(\binom{n+r-1}{r} - 1 - r \right) + 1 + r,$$

where c is the number of all paths from 0 to 1, i.e., $c = |\text{Path}L|, n = d(0, 1) + 1, r = k \cdot d(0, 1) - 1$.

Proof. Let $P = \{0, c_1, \dots, c_{n-2}, 1\}$, $|P| = n$, $P \in \text{Path}L$ and $TS(\mathbf{x}) = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$ be a k -ary transfer-stable aggregation function on a distance-stable lattice L , that means $r = k \cdot d(0, 1) - 1$. Then, the number of different transfer-stable aggregation functions for the path P , where $a_i \in P$ for all $i \in \{1, \dots, r\}$, is equal to $\binom{n+r-1}{r}$. We used the combinations with repetition to preserve the condition $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_r$. The number of all the transfer-stable functions with $a_i \in \{0, 1\}$ is equal to $\binom{r+1}{r}$ and we subtract this number from the number $\binom{n+r-1}{r}$. Therefore, the number of transfer-stable functions, where $a_i \in P \setminus \{0, 1\}$ for some $i = 1, \dots, r$, is equal to $\binom{n+r-1}{r} - \binom{r+1}{r}$. This number corresponds to one path P in the lattice L . Finally, we multiply this number by the number of all paths and add the number of transfer-stable functions, where $a_i \in \{0, 1\}$. \square

Corollary 5.3. *The number of all k -ary transfer-stable aggregation functions on the transfer-stable distance-unstable lattice L is equal to*

$$\sum_{\substack{n=|P| \\ P \in \text{Path}L}} \left(\binom{n+r-1}{r} - 1 - r \right) + 1 + r,$$

where $r = d(0, \alpha) + d(1, \beta) - 1$.

It can be easily proven by definition of the transfer-stable aggregation function and the form of this function that the identities valid in the general transfer-stable lattice are also fulfilled in the lattice $\text{TSAgg}_L^{(k)}$.

Lemma 5.4. *The lattice L fulfills the identity*

$$I(x_1, \dots, x_n) = J(x_1, \dots, x_n) \tag{1}$$

if and only if the lattice $\text{TSAgg}_L^{(k)}$ fulfills the identity (1).

In special case: The lattice $\text{TSAgg}_L^{(k)}$ is distributive if and only if the lattice L is distributive.

Proof. Let the lattice L be determined by the identity (1) for all $x_1, \dots, x_n \in L$. Let us denote

$$\begin{aligned} TS_1(\mathbf{x}) &:= \langle a_1^1, \dots, a_k^1 \rangle \\ &\vdots \\ TS_n(\mathbf{x}) &:= \langle a_1^n, \dots, a_k^n \rangle. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} I(TS_1, \dots, TS_n) &= \langle I(a_1^1, \dots, a_k^1), \dots, I(a_1^n, \dots, a_k^n) \rangle \\ &= \langle J(a_1^1, \dots, a_k^1), \dots, J(a_1^n, \dots, a_k^n) \rangle = J(TS_1, \dots, TS_n). \end{aligned}$$

Let $I(TS_1, \dots, TS_n) = J(TS_1, \dots, TS_n)$. The term I is applied to the individual coordinates of the functions TS_i for all $i \in \{1, \dots, k\}$. Similarly for the term J . Hence, the identity (1) is fulfilled for the individual coordinates of the functions TS_i belonging to the lattice L . Thus, the identity (1) is fulfilled for the lattice L . \square

In the next Proposition, we study the generating set G of the lattice $\text{TSAgg}_L^{(k)}$, that means the set G creates the whole set $\text{TSAgg}_L^{(k)}$ by closing under the meets and joins in the lattice L .

Proposition 5.5. *The set $G \subset \text{TSAgg}_L^{(k)}$ containing the following transfer-stable aggregation functions:*

$$\langle 0, \dots, 0 \rangle; \langle 0, \dots, 0, 1 \rangle; \dots; \langle 0, 1, \dots, 1 \rangle; \langle 1, \dots, 1 \rangle; \langle a, \dots, a \rangle$$

for all $a \in H_L$, where H_L is a generating set of the lattice L , generates the lattice $(\text{TSAgg}_L^{(k)}, \wedge, \vee)$.

Proof. Let $TS = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$ be a transfer-stable aggregation function. Transfer-stable function $\langle a_i, \dots, a_i \rangle$ for $i = 1, \dots, m$ can be obtained from the functions $\langle a, \dots, a \rangle$, $a \in H_L$ by a suitable combinations of the meet and joins. Then

$$\begin{aligned} \langle a_1, \dots, a_1 \rangle \vee \langle 0, 1, \dots, 1 \rangle &= \langle a_1, 1, \dots, 1 \rangle, \\ \langle a_2, \dots, a_2 \rangle \vee \langle 0, 0, 1, \dots, 1 \rangle &= \langle a_2, a_2, 1, \dots, 1 \rangle, \\ &\vdots \\ \langle a_{m-1}, \dots, a_{m-1} \rangle \vee \langle 0, \dots, 0, 1 \rangle &= \langle a_{m-1}, \dots, a_{m-1}, 1 \rangle, \\ \langle a_m, \dots, a_m \rangle \vee \langle 0, \dots, 0 \rangle &= \langle a_m, \dots, a_m \rangle, \end{aligned}$$

and the meet of the right sides of equalities corresponds to the aggregation function TS because $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m$. \square

6. Transfer-stable function on real line

In [10] we removed the additivity from the arithmetic mean characterization (see Proposition 6.1) so that we could easily introduce the transfer-stable functions. The question about the strength of the transfer-stability arises. That means, what happens when we replace the additivity with the transfer-stability in the arithmetic mean characterization. Later, we show that nothing happens because the transfer-stability “well” characterizes the arithmetic mean.

Proposition 6.1 ([5], p. 144, Corollary 4.22). $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ is additive, non-decreasing, symmetric, and idempotent if and only if $F = AM$ is the arithmetic mean.

Definition 6.2. A function $F : \mathbb{I}^k \rightarrow \mathbb{R}$ is transfer-stable if, for any $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ such that $\sum_{i=0}^k c_i = 0$, we have

$$F(x_1, \dots, x_k) = F(x_1 + c_1, \dots, x_k + c_k)$$

for all $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{I}^k$ such that $\mathbf{x} + \mathbf{c} \in \mathbb{I}^k$.

Proposition 6.3. All transfer-stable functions are determined by a unary function, that means $TS : \mathbb{I}^k \rightarrow \mathbb{R}$ is a k -ary transfer-stable function if and only if there is a unary function $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ such that

$$TS(x_1, \dots, x_k) = f\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right).$$

Proof. Let TS be a transfer-stable function. Let us consider the k -tuple $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{I}^k$, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$. Denote $c := \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}$. Assume that there is $i \in \{1, \dots, k\}$ such that $x_i \leq c \leq x_{i+1}$. Then

$$\sum_{\alpha=1}^i (c - x_\alpha) = \sum_{\beta=i+1}^k (x_\beta - c).$$

Therefore $(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow (c, \dots, c)$, that means each block is represented by the k -tuple (x, \dots, x) for some $x \in \mathbb{I}$. Hence, the behavior of the function TS is characterized by the function $f(x) := TS(x, \dots, x)$. Thus, the function TS is determined by the unary function f , i.e.,

$$TS(x_1, \dots, x_k) = TS\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}, \dots, \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right) = f\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right).$$

Conversely, let f be a unary real function. Denote $A(x_1, \dots, x_k) := f\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right)$. We prove that A is a transfer-stable function. Let $c_1 + \dots + c_k = 0$.

$$\begin{aligned} A(x_1 + c_1, \dots, x_k + c_k) &= f\left(\frac{(x_1 + c_1) + \dots + (x_k + c_k)}{k}\right) \\ &= f\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right) = A(x_1, \dots, x_k). \end{aligned}$$

□

Generally, the transfer-stable function is not additive or non-decreasing. We can see an example of a transfer-stable function with a unary function $f(x) = \sin(x)$ depicted in Fig. 15. Other examples of transfer-stable functions are, for example, Lukasiewicz’s t -norm and t -conorm. Among the transfer-stable functions is the arithmetic mean, which we get by adding idempotence to the Proposition 6.3.

Corollary 6.4. Let $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ be an unary function. A transfer-stable function TS is the arithmetic mean if and only if $f = id$.

Corollary 6.5. The function TS is an idempotent transfer-stable aggregation function if and only if TS is the arithmetic mean.

Proof. Let TS be a transfer-stable function. The fact that TS is an idempotent aggregation function implies that f is an idempotent non-decreasing function. Thus, the function f has to be an identity.

On the contrary, the proof is trivial using Proposition 6.1. □

7. Example of application

Based on transfer-stable aggregation functions we can decide about product quality. Every block of the transfer-stable aggregation function corresponds to the quality of purchase (price:quality ratio). Let us consider two linguistic lattice $C_1 = \{\text{Expensive, Average, Cheap}\}$ representing the price of the product, and $C_2 = \{\text{Unsatisfactory, BelowAverage, Average, AboveAverage, Excellent}\}$ representing the quality of the product, see Fig. 16.

The direct product of above mentioned lattices is the distance-stable lattice $L = C_1 \times C_2$ (see Fig. 17), where, for example, EU is Expensive Unsatisfactory, AB_A is Average Below Average, CE is Cheap Excellent.

Then according to the Proposition 2.18 the following blocks

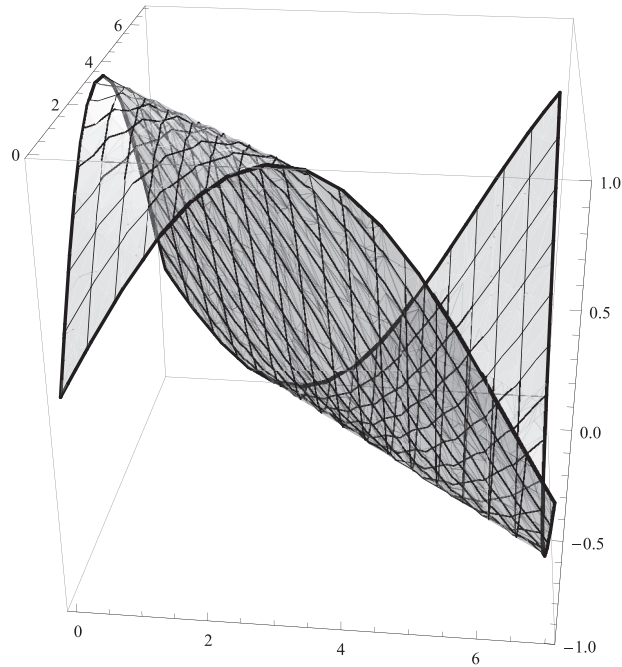


Fig. 15. Transfer-stable function with $f(x) = \sin(x)$.

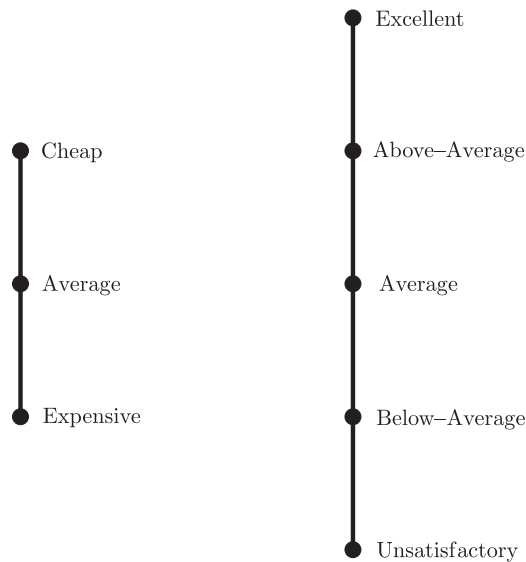


Fig. 16. Linguistic lattices C_1 and C_2 .

$$\begin{aligned}
 &[(EU, EU)]; [(AU, EU)]; [(CU, EU)]; [(CB_A, EU)]; [(CA, EU)]; [(CA_A, EU)]; \\
 &[(CE, EU)]; \\
 &[(CE, AU)]; [(CE, CU)]; [(CE, CB_A)]; [(CE, CA)]; [(CE, CA_A)]; [(CE, CE)]
 \end{aligned}$$

are all blocks of the lattice L^2 .

Firstly, let us focus on purchase of one product. Consider a situation when a company wants to sell their product with the highest profit possible. Customer claims that the first offer is expensive and the product is unsatisfactory. Since the company wants to sell the product they gave us different offers in different qualitative classes (price:quality ratio) according to what the customer is willing to accept. Which offers are in “same” price:quality ratio.

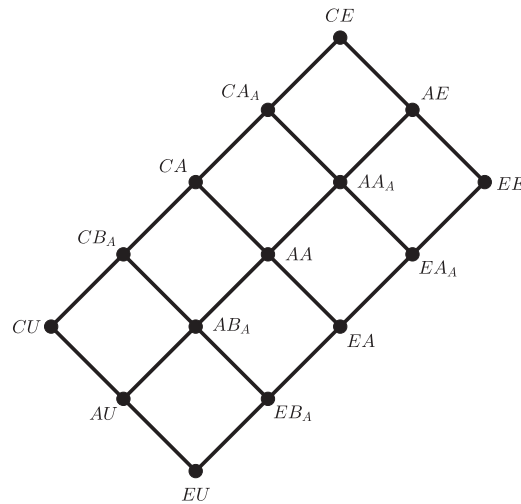


Fig. 17. Distance-stable lattice L of all products.

Table 1
Table of all qualitative classes for the purchase of one product.

0	1	2	3	4	5	6
Expen.	Aver.	Cheap	Cheap	Cheap	Cheap	Cheap
Unsatis.	Unsatis.	Unsatis.	Below A.	Aver.	AboveA.	Excell.
	Expen.	Aver.	Aver.	Aver.	Aver.	
	BelowA.	BelowA.	Aver.	AboveA.	Excell.	
		Expen.	Expen.	Expen.		
		Aver.	AboveA.	Excell.		

The problem can be elegantly solved using the transfer-stable aggregation functions. Let us consider pair (X, EU) , where $X \in L$, then we obtain seven qualitative classes:

- $[(EU, EU)] \dots \mathbf{0}$
- $[(EB_A, EU)] = [(AU, EU)] \dots \mathbf{1}$
- $[(EA, EU)] = [(AB_A, EU)] = [(CU, EU)] \dots \mathbf{2}$
- $[(EA_A, EU)] = [(AA, EU)] = [(CB_A, EU)] \dots \mathbf{3}$
- $[(EE, EU)] = [(AA_A, EU)] = [(CA, EU)] \dots \mathbf{4}$
- $[(AE, EU)] = [(CA_A, EU)] \dots \mathbf{5}$
- $[(CE, EU)] \dots \mathbf{6}$

Since we buy only one product the other classes are not needed (therefore are not included).

All products from the lattice L can be divided into seven classes representing the price:quality ratio (see Table 1). For example, qualitative class $\mathbf{0}$ is the “most favorable” for the company (manufacturer) because it is selling an expensive product of an unsatisfactory quality. On the other hand qualitative class $\mathbf{6}$ is the “most favorable” for the buyer because he/she buys a cheap product of an excellent quality.

From the Table 1 it is easy to see that products which are “Cheap and BellowAverage”, “Average and Average” and “Expensive AboveAverage” belong to the same qualitative class.

Therefore, if the customer chooses the price:quality ratio (mathematically speaking class) the company can offer them different product options from the required qualitative ratio (class).

The crucial contribution of the theory of transfer-stable aggregation functions shows in case the buyer purchases two or more products. Secondly, we focus on the purchase of two products. Now, consider all 13 qualitative classes

- $[(EU, EU)] \dots \mathbf{0}$
- $[(AU, EU)] \dots \mathbf{1}$
- \vdots
- $[(CE, EU)] \dots \mathbf{6}$

⋮
 [(CE, CA_A)] ... **11**
 [(CE, CE)] ... **12**

For example, $(CA_A, EE), (AE, CA) \in [(CE, CB_A)]$, that means, products “Cheap AboveAverage” and “Expensive Excellent” or “Average Excellent” and “Cheap Average” or “Cheap Excellent” and “Cheap BelowAverage” belong to the same qualitative class (number **9**). In other words, if the first customer buys Cheap AboveAverage and Expensive Excellent products and the second customer buys Cheap Excellent and Cheap BelowAverage products, according to the above, their purchase is the same in qualitative sense.

The idea of purchases in the second case can be generalized. Let $k = 5$ be a number of bought products then the number of qualitative classes equals 31 (denoted 0 – 30). For example,

[(EU, EU, EU, EU, EU)] ... **0**
 [(CA, CA, CA, CA, CA)] ... **20**
 [(CE, CE, CE, CE, CE)] ... **30**

If the customer chooses qualitative class **20** then there are, among others, these 5-tuples

$(CA, CA, AA_A, AA_A, AA_A); (CA, AA_A, EE, EE, EE); (CA, AA_A, EE, CA_A, EA);$
 $(CA, CA, CA, CE, CU); (EE, EE, AE, CE, EB_A); (AA_A, CA, CE, CE, EU);$
 $(CA_A, AA, CE, CE, EU); (CE, CE, CE, CU, EU); \dots$

and the customer can choose which combination suits his/her needs the most.

8. Conclusion

In this paper we try to find a class of lattices that has linearly ordered transfer-stable blocks. To solve this problem we used the so-called distance-stable lattices which we described and found their useful properties. Thanks to these results, we could simply define the transfer-stable aggregation functions, and above all, we focused on the set of all transfer-stable aggregation functions of the same arity. In conclusion, we briefly looked at the transfer-stable functions defined on the real line and found that each transfer-stable function of any arity is determined by the unary function.

There are two possible types of continuation of this research. Firstly, it is possible to change the structure to which transfer-stable functions are considered, for example, posets. Secondly, the function definition can be modified. For instance, weighted transfer-stable functions, which means, a function where the “move upwards” is not the same as the “move downwards”. For example, ratio 2: 1, twice up, once down.

Declaration of Competing Interest

None.

Acknowledgments

All authors were supported by the IGA project of the Faculty of Science [Palacký University Olomouc IGA_2019_015](#); the first author by the project of [Grant Agency of the Czech Republic \(GAČR\)](#) no. 18-06915S.

We would like to express a very great appreciation to professor Radko Mesiar for his valuable and constructive suggestions during the research work, especially his contribution to the last chapter.

References

- [1] G. Beliakov, H. Bustince, T. Calvo, *A Practical Guide to Averaging Functions*, Springer, 2016.
- [2] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, Studies in Fuzziness and Soft Computing 221, Springer, 2007.
- [3] P. Bullen, *Handbook of Means and Their Inequalities*, Springer Science+Business Media, Dordrecht, 2003.
- [4] M. Couceiro, D. Dubois, H. Fargier, M. Grabisch, H. Prade, A. Rico, New directions in ordinal evaluation: Sugeno integrals and beyond, in: M. Doumpos, J. Figueira, S. Greco, C. Zopounidis (Eds.), *Multiple Criteria Decision Making*, Springer, Cham, 2019. 978-3-030-11481-7
- [5] M. Grabisch, J.L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, *Aggregation Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [6] G. Grätzer, *F. Wehrung, Lattice Theory: Special Topics and Applications*, 1, Springer, Switzerland, 2014.
- [7] D. Hubbard, D. Evans, Problems with scoring methods and ordinal scales in risk assessment, *IBM J. Res. Dev.* 54 (3) (2010).
- [8] R. Halaš, Z. Kurač, R. Mesiar, J. Pócs, Binary generating set of the clone of idempotent aggregation functions on bounded lattices, *Inf. Sci.* 462 (2018) 367–373.
- [9] A. Kolesárová, G. Mayor, R. Mesiar, Weighted ordinal means, *Inf. Sci.* 177 (2007) 3822–3830.
- [10] Z. Kurač, Transfer-stable means on finite chains, *Fuzzy Sets Syst.* 372 (2019) 111–123.
- [11] D. Kýselová, D. Dubois, M. Komorníková, R. Mesiar, Refining aggregation operator-based orderings in multifactorial evaluation part I: continuous scales, *Fuzzy Syst. IEEE Trans.* 15 (6) (2007) 1100–1106.
- [12] L. Louvart, P. Meyer, A.L. Olteanu, MODEL: A multicriteria ordinal evaluation tool for GIS, *Int. J. Geogr. Inf. Sci.* 29 (10) (2015) 1910–1931.
- [13] J. Martín, G. Mayor, J. Suñer, Symmetric aggregation operators on a finite chain, *Proc. IPMU'2002* 1365–1372.
- [14] H. Moulin, *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, MA, 1988.



Přírodovědecká
fakulta

Univerzita Palackého
v Olomouci

Některé vlastnosti agregačních funkcí na ohraničených svazech

Abstrakt Disertační práce

Autor: Mgr. Zbyněk KURAČ
Katedra Algebry a Geometrie
Školitel: Prof. Mgr. Radomír HALAŠ, Dr.
Konzultant: Mgr. Jozef Pócs, PhD.

Olomouc 2021

Autor: Mgr. Zbyněk Kurač
Vedoucí práce: Prof. Mgr. Radomír Halaš, Dr.
Konzultant: Mgr. Jozef Pócs, PhD.
Oponenti: Prof. RNDr. Ivan Chajda, DrSc.
Univerzita Palackého v Olomouci
doc. RNDr. Jana Pócssová, PhD.
Technická univerzita v Košicích
doc. Mgr. Ľubomíra Horanská, PhD.
Slovenská technická univerzita v Bratislavě

Disertační práce byla napsána pod Katedrou Algebry a Geometrie, Přírodovědecké fakulty, Univerzity Palackého v Olomouci.

Vyhodnocení disertační práce bylo napsáno vedoucím práce.

Abstrakt disertační práce byl zaslán:

Obhajoba disertační práce se uskuteční dne 25. 8. 2021 za přítomnosti oborové komise studijního programu Algebra a Geometrie pro obhajobu disertační práce na Katedře Algebry a Geometrie, Přírodovědecké fakulty, Univerzity Palackého v Olomouci, 17. listopadu 12, 77146 Olomouc.

Kopie disertační práce bude uložena v kanceláři děkana Přírodovědecké fakulty, Univerzity Palackého v Olomouci.

Doc. RNDr. Jan Kühn, Ph.D.

Předseda oborové komise studijního programu
Algebry a geometrie pro obhajobu disertační práce,
Přírodovědecké fakulty, Univerzity Palackého v Olomouci.

Obsah

Úvod	4
Cíle disertační práce	8
Výsledky	9
Přehled Disertační práce	11
Anotace	25
Summary	27
Autorovy publikace použité v disertační práci	29

Úvod

Teorie agregačních funkcí má hluboké kořeny sahající až k počátkům použití aritmetického průměru [2], či k prvnímu využití nasbíraných dat a informací, z nichž byl vyvozen nějaký závěr v podobě jediné výsledné hodnoty. Agregace je takový proces, kdy na základě nějakých dat (většinou numerických) je vyvozen výsledek v podobě jediného výstupu či jediné hodnoty. Matematická teorie zabývající se tímto procesem se nazývá teorie agregačních funkcí [4]. Agregační funkce pak matematicky realizují výsledek v podobě jediné hodnoty a splňují dvě přirozené podmínky. Nutno podotknout, že tyto podmínky nejsou zcela univerzální, neboť v celé historii studia procesů je možné narazit i na obecnější funkce, které jakýmsi způsobem taktéž vyvozují určitý typ jediného výsledku. Nicméně při zkoumání z obecného pohledu se ukázalo, že většina funkcí, používaných pro zpracování statistických dat, splňují ony dvě zmíněné podmínky.

Dlouhou dobu se agregační funkce používaly pouze na reálných číslech, respektive číselných množinách obecně, a to kvůli statistice jakožto numerické disciplíně. V nedávné době se ale stále dostávají více do popředí i jiné struktury, zejména nelineárně uspořádané, kde se teorie agregačních funkcí, v některých případech, projevuje odlišně [3, 9, 11]. Jednou z takových uspořádaných struktur jsou ohraničené svazy [5], o nichž pojednává i tato práce. Jedním z důvodů, proč se teorie uchýlila k této struktuře, je propojení agregační teorie s teorií klonů jakožto množinou všech agregačních funkcí, kde svazová problematika hraje významnou roli. Teorie má základy v logice, odkud přímo navazuje na diskrétní matematiku a informační vědy.

Uvážíme-li množinu všech agregačních funkcí, coby klon na ohraničeném svazu, ukazuje se, že existují i vhodné podmnožiny, které rovněž tvoří klon. Jedním takovým případem jsou idempotentní agregační funkce, přičemž idempotence je přirozenou vlastností některých známých agregačních funkcí. Podobně jako u klonu všech agregačních funkcí, kde byly hledány jeho vhodné generátory [8], tak i u jeho podklonu idempotentních agregačních funkcí se v práci zaměříme na generující funkce. O nich pojednává první kapitola této práce [6]. Nutno zmínit, že generující množina klonu všech agregačních funkcí nemůže obsahovat jenom unární funkce, neboť se ukazuje, že nevygenerují úplně vše. Proto se museli do generující množiny přidat další, alespoň binární, funkce. U podklonu všech idempotentních agregačních funkcí je situace odlišná, totiž unární idempotentní funkcí je pouze identita, čili triviální funkce. Tedy generující množina podklonu idempotentních agregačních funkcí musí obsahovat funkce arity alespoň druhé. V práci ukážeme, že lze vybrat všechny generátory jakožto binární funkce.

Po uvedení generující množiny onoho podklonu se dále zabýváme snížením mohutnosti množiny generátorů. Jinými slovy, ukážeme vztahy, jak mezi sebou vygenerovat funkce z generující množiny podklonu idempotentních agregačních funkcí. Hledáme tedy nejmenší generující množinu. Je to podobné jako u vektorových prostorů, kde je velký rozdíl mezi generující množinou a bází. V našem případě ukážeme nejmenší generující množinu pro konečné řetězce. Pro nejmenší generující množiny z obecného pohledu, tedy libovolného ohraničeného svazu, je situace velmi komplikovaná a dosud stále nevyřešená ani v případě klonu agregačních funkcí. Nicméně ukážeme různé cesty, jak onu nejmenší generující množinu nalézt. Z jedné strany hraje roli povaha samotného svazu a z druhé strany nastíníme algoritmus, který umožňuje nalezení nejmenší generující množiny podklonu idempotentních agregač-

ních funkcí libovolného ohraničeného svazu.

Ve druhé kapitole se budeme věnovat tzv. transferově-stabilním funkcím. Aritmetický průměr je asi nejznámější agregační funkcí vůbec a na reálných číslech je jeho podoba známá. Avšak naše zaměření na konečně ohraničené svazy vyvolává otázku, jak lze onen aritmetický průměr modelovat právě v těchto strukturách. Ukážeme, že aritmetický průměr nelze definovat na nelineárně uspořádaných strukturách, a ve druhé kapitole převedeme aritmetický průměr z nekonečných řetězců (reálná čísla) do konečných řetězců. Transformace je závislá na pojmu tzv. transferové-stability, přičemž budeme postupně zvyšovat jak počet prvků daného řetězce, tak i aritu oněch funkcí, nazývaných transferově-stabilní průměry [12]. Jedním z hlavních výsledků je popis struktury všech transferově-stabilních průměrů. Ve druhé části hledáme, podobně jako u klonů, generující množinu všech transferově-stabilních průměrů. Množina všech transferově-stabilních průměrů netvoří ovšem klon a nemůžeme tedy využívat stejných principů jako dříve. I přesto se můžeme zaměřit na generování, ale pouze z pohledu dané arity funkcí. Jinými slovy, při generování nemůžeme měnit aritu transferově-stabilních průměrů.

V poslední kapitole transferově-stabilní průměry oslabíme, čímž dostaneme transferově-stabilní agregační funkce, které lze sice definovat na libovolném konečném řetězci, ale ze samotné jejich podstaty se zaměříme pouze na dvě vhodné třídy svazů: distančně-stabilní a transferově-stabilní svazy, kdy první je podtřídou druhé. Postupně ukážeme rozdíly mezi jednotlivými třídami a dokážeme, jak daný svaz ovlivňuje chování transferově-stabilní agregační funkce. Hlavním výsledkem této kapitoly je charakterizace transferově-stabilních svazů podle jejich tvaru [13]. Významnou roli ohledně transferově-stabilních funkcí hraje také poslední podkapitola pojednávající o možné aplikaci transferově-stabilních agregačních funkcí. Ukážeme aplikaci

z pohledu obchodní strategie, kdy z pohledu koupě vícero produktů nám právě transferově-stabilní agregační funkce mohou pomoci ke vhodnému výběru kombinace produktů, abychom zachovali danou kvalitativní třídu, například poměr ceny k výkonu.

Cíle disertační práce

Studium této disertační práce je zaměřeno na několik vlastností agregačních funkcí na konečných svazech. Práce se z počátku věnuje propojení teorie klonů s teorií agregačních funkcí za podmínky idempotence. Dalším předmětem studia jsou transferově-stabilní agregační funkce a jejich kompletní popis, jak na konečných řetězcích se zahrnutou idempotencí nebo obecně na konečných svazech bez ní.

Hlavní cíle práce:

- I. Podrobný popis klonu idempotentních agregačních funkcí, zejména jeho generátorů.
- II. Transformace aritmetického průměru z reálných čísel na případ konečných svazů.
- III. Studium transferově-stabilních agregačních funkcí.

Výsledky

I. Idempotentní agregační klon [R1, R2]

- Binární funkce χ a med generující tento klon byly nalezeny.
- Na základě předchozího výsledku, nejmenší (χ, med) -generující množina na konečných řetězcích byla zkonstruována.
- Následně byly zkoumány postupy, jak nalézt potenciálně nejmenší generující množinu na obecném konečném svazu, ať už na základě tvaru celého svazu nebo uspořádání prvků ve svazu.

II. Transformace aritmetického průměru; [R3]

- S využitím transferové-stability byly definovány transferově-stabilní průměry, jakožto aritmetické průměry na konečných řetězcích.
- Struktura všech transferově-stabilních průměrů stejné arity byla popsána v jednom případě jako Booleovské svazy a v těch dalších jako direktní mocnina konečných řetězců.
- Ve zkoumané struktuře byly nalezeny generující funkce, pomocí nichž lze charakterizovat libovolný transferově-stabilní průměr.
- Závěrem bylo zkonstruováno speciální generování, umožňující binární transferově-stabilní průměry využít k vytvoření celé struktury transferově-stabilních průměrů.

III. Transferově-stabilní agregační funkce [R4]

- Dokázali jsme, že aditivita a symetrie, jakožto vlastnosti aritmetického průměru, je plně pokryta transferovou-stabilitou.
- Definovali jsme distančně-stabilní svazy, načež byly zkoumány jejich charakteristiky a další vlastnosti spojené jak s teorií svazů, tak i teorií transferově-stabilních funkcí.
- Dále byla rozšířena třída distančně-stabilních svazů na třídu transferově-stabilních svazů a zkoumali jsme podobné vlastnosti jako předtím.
- V neposlední řadě charakterizujeme transferově-stabilní svazy pomocí největšího společného dělitele.
- Aplikace transferově-stabilních agregačních funkcí v obchodním sektoru pro koupi jednoho nebo vícero produktů.

Přehled Disertační práce

I. Idempotentní agregační klon

Ve článku [8] byly zkoumány unární funkce χ_a a binární funkce \oplus_a , přičemž funkce χ_a nabývala pouze hodnot 0 nebo 1 a funkce \oplus_a byla „skoro“ konstantní (viz rovnosti (1)).

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1 & ; x \geq a, x \neq 0 \\ 0 & ; \text{jinak,} \end{cases} \quad x \oplus_a y = \begin{cases} 1 & ; x = 1, y = 1 \\ 0 & ; x = 0, y = 0 \\ a & ; \text{jinak.} \end{cases} \quad (1)$$

Ukázalo se, že tyto dva typy funkcí, spolu se svazovými operacemi, generují agregační klon $\mathbf{Agg}(L)$ ohraničeného svazu L . Nicméně ani funkce χ_a ani funkce \oplus_a nejsou idempotentní. Je tedy nutné oba typy funkcí vhodně „upravit“, aby se z nich staly idempotentní funkce, ale s cílem zachování generování idempotentního klonu $\mathbf{Id}(L)$.

Unární funkci $\chi_a(x)$ ze vztahu (1) převedeme na binární tím způsobem, že místo hodnoty 1 bude nabývat spojení vstupních hodnot a místo hodnoty 0 bude nabývat průseku vstupních hodnot x a y . Na druhou stranu, binární funkci \oplus_a ze vztahu (1) nelze přirozeně zobecnit na idempotentní funkci, a proto je nutné využít ternární mediány, přičemž jejich propojení s funkcí \oplus_a je dáno následující rovností:

$$x \oplus_a y = \mathbf{med}_\wedge(\chi_0(x \vee y) \wedge \chi_1(x \wedge y), a, \chi_0(x \vee y) \vee \chi_1(x \wedge y)).$$

Výsledkem tohoto zkoumání jsou binární funkce χ_a a \mathbf{med}_a , které nyní podrobně popíšeme v následující definici.

DEFINICE 1.1. Na konečném (ohraničeném) svazu L definujeme pro každé $a \in L$ binární funkce $\text{med}_a : L^2 \rightarrow L$ a $\chi_a : L^2 \rightarrow L$ následujícími předpisy

$$\text{med}_a(x, y) := (x \wedge y) \vee (a \wedge (x \vee y)), \quad (2)$$

$$\chi_a(x, y) := \begin{cases} x \vee y & ; x \geq a \\ x \wedge y & ; \text{jinak.} \end{cases} \quad (3)$$

DŮSLEDEK 1.2. Pro každý konečný n -prvkový svaz L , množina binárních funkcí

$$\{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_a \mid a \in L \setminus \{0\}\} \cup \{\text{med}_a \mid a \in L \setminus \{0, 1\}\}$$

generuje idempotentní klon $\text{Id}(L)$. Počet generátorů je shora ohraničen číslem $2n - 1$.

Množin generujících idempotentní klon je nekonečně mnoho a mohou obsahovat různé typy funkcí různých arit. Budeme se zabývat takovými generujícími množinami, jenž obsahují svazové operace a funkce χ_a , med_a .

DEFINICE 1.3. Nechť L je konečný svaz. Množinu S nazveme (χ, med) -generující množinou idempotentního klonu $\text{Id}(L)$, jestliže

$$S \subseteq \{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_a, \text{med}_a \mid a \in L\}$$

a množina S generuje idempotentní klon $\text{Id}(L)$.

TVRZENÍ 1.4. Nechť L je alespoň tříprvkový konečný řetězec s n prvky. Pak množina

$$G = \{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_a \mid a \in L \setminus \{0\}\} \cup \{\text{med}_a \mid a \in L \setminus \{0, 1\}\}$$

je nejmenší (vzhledem k inkluzi) (χ, med) -generující množinou idempotentního klonu $\text{Id}(L)$.

Nechť L je ohraničený svaz. Označme H jako množinu generujících prvků, V jako množinu prvků, které lze vygenerovat a H' a V' jako pomocné množiny. Navíc symbolem $x \rightsquigarrow B$ budeme značit přesun prvku x do množiny B .

I. Nejmenší prvek 0 přesuneme do množiny V a všechny atomy svazu L přesuneme do množiny H , tj. $a \rightsquigarrow H$ pro každé $a \in \text{At}(L)$.

II. Označme $A = \{x \in L \setminus \{H \cup V\} \mid h \prec x \text{ pro nějaké } h \in H\}$.

- Pokud pro $x \in A$ existuje právě jeden prvek l z L takový, že $l \prec x$ a zároveň $l \in H$, pak $x \rightsquigarrow H'$.
- Pokud pro $x \in A$ existuje více prvků l_1, \dots, l_p z L pro $p \in \mathbb{N}$ takové, že $l_1 \prec x, \dots, l_p \prec x$ a zároveň $l_1, \dots, l_p \in H$, pak $x \rightsquigarrow V'$.
- Pokud pro prvek $x \in A$ existují prvky l_1, l_2 ze svazu L pro takové, že $l_1 \prec x, l_2 \prec x$ a zároveň $l_1 \in H, l_2 \notin H$, pak x odebereme z množiny A .

Nyní množinu H obohatíme o prvky z množiny H' , tj. $H = H \cup H'$ a množinu V o prvky z množiny V' , tj. $H = V \cup V'$. Množiny H' a V' vyprázdníme. Tedy množina A je nyní prázdná, neboť každý prvek z ní jsme buď přesunuli do jedné ze dvou množin H, V , a nebo jej odstranili k budoucímu použití.

III. Označme $A = \{x \in L \setminus \{H \cup V\} \mid h \prec x \text{ pro nějaké } h \in H \cup V\}$.

- Pokud $x \in A$ pokrývá právě jeden prvek ze svazu L a ten prvek padne do množiny H nebo V , pak $x \rightsquigarrow H'$.
- Pokud $x \in A$ pokrývá více prvků ze svazu L a všechny prvky padnou do množiny $H \cup V$, pak $x \rightsquigarrow V'$.

- Pokud $x \in A$ pokrývá více prvků ze svazu L a jeden z nich padne do množiny $H \cup V$ a druhý nikoli, pak x odebereme z množiny A .
- $H = H \cup H'$, $V = V \cup V'$ a $H', V' = \emptyset$.

IV. Opakujeme krok III.

Algoritmus končí, jakmile bude každý prvek ze svazu L buď v množině H nebo V , přičemž množina H je hledaná generující množina ohraničeného svazu L .

VĚTA 1.5. *Nechť L je ohraničený svaz a množina H je generující množina svazu L z výše popsaného algoritmu. Pak množina*

$$\{\vee, \wedge\} \cup \{\chi_a \mid a \in H \setminus \{0\}\} \cup \{\text{med}_a \mid a \in H \setminus \{0, 1\}\}$$

je (χ, med) -generující množinou idempotentního klonu $\text{Id}(L)$.

II. Transformace aritmetického průměru

Cílem v této části bude transformovat aritmetický průměr z reálných čísel na případ konečných svazů. Z knihy [4] víme, že aritmetický průměr na reálných číslech je charakterizován čtyřmi podmínkami – je neklesající, idempotentní, symetrický a aditivní (Definice 1.6).

DEFINICE 1.6. Necht' $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$. Pak funkce $F : \mathbb{I}^k \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá

1. *symetrická*, jestliže

$$F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k)$$

pro každé $i, j \in \{1, \dots, k\}$ a $x_i, x_j \in \mathbb{I}$.

2. *aditivní*, jestliže

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y})$$

pro každé \mathbf{x}, \mathbf{y} z intervalu \mathbb{I}^k takové, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{I}^k$.

Plné znění charakteristiky pro aritmetický průměr je v následující větě.

VĚTA 1.7. [4] *Funkce $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající, idempotentní, symetrická a aditivní právě tehdy, když funkce F je aritmetickým průměrem, tj.*

$$F(x_1, \dots, x_k) = \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}.$$

První tři podmínky (neklesající, idempotentní, symetrická) můžeme jednoduše transformovat do teorie svazů. Problém nastává s aditivitou, protože ve svazech není obecně definována operace sčítání. Z tohoto důvodu musíme aditivitu nahradit jinou vhodnou vlastností, již aritmetický průměr disponuje. Tato nová vlastnost bere v potaz, že aritmetický průměr z hodnot x a y je tatáž hodnota, jako aritmetický průměr hodnot $x + c$ a $y - c$ (nebo $x - c$ a $y + c$) pro libovolné reálné číslo $c \in \mathbb{R}$. Nazýváme ji tzv. transferová-stabilita nebo taktéž transferový princip ([15], [16]).

DEFINICE 1.8. Necht' $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$. Funkce $F : \mathbb{I}^k \rightarrow \mathbb{R}$ je *transferově-stabilní*, jestliže pro libovolné $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}^k$ takové, že $\sum_{i=1}^k c_i = 0$ platí

$$F(x_1, \dots, x_k) = F(x_1 + c_1, \dots, x_k + c_k)$$

pro každé $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{I}^k$ takové, že $\mathbf{x} + \mathbf{c} \in \mathbb{I}^k$.

Předtím, než přejdeme do teorie svazů, se chvíli budeme zabývat otázkou síly transferové-stability vůči aditivitě. Jinými slovy, jak moc se změní Věta 1.7, když aditivitu nahradíme transferovou-stabilitou. Později se dozvíme, že během tohoto nahrazení nevystane žádný problém, neboť transferová-stabilita charakterizuje na reálných číslech nejenom symetrii, ale i aditivitu.

Nyní se podíváme na popis transferově-stabilních funkcí na reálných číslech. Ukazuje se, že k plnému určení k -ární transferově-stabilní funkce na reálných číslech stačí pouze unární funkce.

VĚTA 1.9. *Všechny transferově-stabilní funkce jsou určeny nějakou unární funkcí, to znamená, $TS : \mathbb{I}^k \rightarrow \mathbb{R}$ je k -ární transferově-stabilní funkce právě tehdy, když existuje unární funkce $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že*

$$TS(x_1, \dots, x_k) = f\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{k}\right).$$

Obecně, transferově-stabilní funkce není aditivní nebo neklesající, avšak evidentně podle Věty 1.9 je symetrická.

Jak už víme, mezi transferově-stabilními funkcemi je i aritmetický průměr, jenž dostaneme přidáním idempotence do Věty 1.9.

DŮSLEDEK 1.10. *Necht' $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ je unární funkce. Transferově-stabilní funkce TS je aritmetický průměr právě tehdy, když $f = id$.*

Závěrem zde máme slíbenou sílu transferové-stability, jenž ukazuje, že transferová-stabilita v sobě zahrnuje jak aditivitu tak i symetrii.

DŮSLEDEK 1.11. *Funkce TS je idempotentní transferově-stabilní funkce právě tehdy, když TS je aritmetický průměr.*

Z právě zmíněného důsledku můžeme usoudit, že výběr transferové-stability, jakožto náhrady za aditivitu, je velmi vhodný a tedy můžeme transferově-stabilní funkce jednoduše převést na případ konečných svazů s využitím relace pokrytí ve svazech.

DEFINICE 1.12. Funkce $A : L^k \rightarrow L$ na konečném svazu L se nazývá *transferově-stabilní*, jestliže

$$A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) = A(x_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, x_k)$$

pro libovolné $i, j \in \{1, \dots, k\}$ a $x_i, y_j \in L$, kde $x_i \prec y_i$ a $y_j \prec x_j$.

Navíc, třídu všech transferově-stabilních agregačních funkcí na konečném svazu L označíme symbolem TSAgg_L a symbolem $\text{TSAgg}_L^{(k)}$ označíme všechny k -ární transferově-stabilní agregační funkce na svazu L .

Obecně, binární transferově-stabilní průměr na řetězci $C_n = \{c_1, \dots, c_n\}$ je možno zapsat do tvaru

$$TS(x, y) := \langle z_1 \mid z_2 \mid \dots \mid z_{n-1} \rangle,$$

kde

$$[(c_1, c_1)]; [(c_1, c_2)]; [(c_2, c_2)]; [(c_2, c_3)]; [(c_3, c_3)]; \dots; [(c_{n-1}, c_n)]; [(c_n, c_n)]$$

je seznam všech bloků, kde prvek z_i , z výše vypsaného tvaru, odpovídá i -tému hlavnímu bloku $[(c_i, c_{i+1})]$ pro $i = 1, \dots, n - 1$.

VĚTA 1.13. *Množina binárních transferově-stabilních průměrů $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$ na n -prvkovém řetězci C_n tvoří Booleovský svaz s 2^{n-1} prvky.*

Použitím zavedené notace pro zápis binárních transferově-stabilních průměrů můžeme podobně zapsat i k -ární transferově-stabilní průměr na řetězci $C_n = \{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n\}$ ve tvaru

$$TS(x_1, \dots, x_k) := \left\langle z_1^1, z_2^1, \dots, z_{k-1}^1 \mid z_1^2, z_2^2, \dots, z_{k-1}^2 \mid \dots \mid z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \right\rangle,$$

kde pro první sekci platí

$$z_1^1, z_2^1, \dots, z_{k-1}^1 \in \{c_1, c_2\}, \quad z_1^1 \leq z_2^1 \leq \dots \leq z_{k-1}^1,$$

druhá sekce je tvořena prvky

$$z_1^2, z_2^2, \dots, z_{k-1}^2 \in \{c_2, c_3\}, \quad z_1^2 \leq z_2^2 \leq \dots \leq z_{k-1}^2,$$

a pro prvky z poslední $(n-1)$ -ní sekce je splněno

$$z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \in \{c_{n-1}, c_n\}, \quad z_1^{n-1} \leq z_2^{n-1} \leq \dots \leq z_{k-1}^{n-1}.$$

TVRZENÍ 1.14. *Nechť C_n je n -prvkový řetězec pro $n \in \mathbb{N}$. Pak počet všech k -árních transferově-stabilních průměrů na řetězci C_n je roven k^{n-1} a navíc*

$$\text{TSM}_{C_n}^{(k)} \cong C_k^{n-1},$$

tj. všechny k -ární transferově-stabilní průměry na C_n tvoří $(n-1)$ -ní direktní mocninu k -prvkového řetězce.

Dále se zaměříme na transferově-stabilní průměry, které generují všechny ostatní, to znamená, že skládáním takových průměrů dostaneme libovolný transferově-stabilní průměr. Problém nastane, budeme-li chtít vygenerovat transferově-stabilní průměr s využitím transferově-stabilních průměrů menší

arity. Například, v minulé kapitole jsme vygenerovali idempotentní agregační funkci libovolné arity pomocí binárních idempotentních agregačních funkcí χ_* a med_* nebo konstrukce ze článku [8], kde všechny agregační funkce byly generovány použitím unárních a binárních agregačních funkcí využívajících teorii klonů. Takovéto generování bylo možné díky projekcím. Nicméně v našem případě je sice skládání transferově-stabilních průměrů uzavřené na skládání, ale projekce nejsou transferově-stabilní průměry, čímž tedy množina všech transferově-stabilních průměrů netvoří klon. Odtud je již patrné, že nelze využít stejných prostředků k vygenerování funkcí, jako v případě agregačního (respektive idempotentního) klonu, což nám tudíž znemožňuje generovat transferově-stabilní průměry různých arit. Z tohoto důvodu se zaměříme na otázku generování transferově-stabilních průměrů stejné arity. Pro tento účel zavedeme tzv. prostřední transferově-stabilní průměr a vnitřní a vnější generující transferově-stabilní průměry, což budou, ve spojení s nejmenším a největším transferově-stabilním průměrem, generátory množiny všech transferově-stabilních průměrů stejné arity na konečném řetězci, tj. generující množina svazu $\text{TSM}_{C_n}^{(k)}$.

TVRZENÍ 1.15. *Nechť $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $n \geq 3$. Předpokládejme, že množina G obsahuje všechny k -ární vnitřní a vnější transferově-stabilní průměry a k -ární nejmenší a největší transferově-stabilní průměr na řetězci C_n . Pak množina G generuje všechny k -ární transferově-stabilní průměry na řetězci C_n a její mohutnost je rovna $(n - 2)k - (n - 5)$.*

Zkoumání transferově-stabilních průměrů na konečných řetězcích zakončíme pohledem na to, jak vygenerovat transferově-stabilní průměry vyšší arity pomocí průměrů menších arit, přesněji pomocí binárních transferově-stabilních průměrů. Zde už se nebude jednat o klasické skládání funkcí, neboť jsme ukázali, že klasické skládání na takovýto způsob generování nestačí

a musíme zavést něco nového. Z tohoto důvodu vytvoříme nové skládání funkcí speciálně zkonstruované pro transferově-stabilní průměry. V tomto typu skládání půjde o to uspořádat všechny prvky z jedné sekce všech operujících transferově-stabilních průměrů a vytvořit z nich novou sekci.

Již víme, že unární transferově-stabilní průměr na libovolném řetězci je pouze identita, čili se jedná o „nezajímavý“ transferově-stabilní průměr. Mnohem zajímavější jsou binární transferově-stabilní průměry, kterými jsme se zabývali první polovinu této kapitoly. Taktéž jsme zmínili, že existují binární transferově-stabilní průměry, jež vygenerují všechny ostatní binární transferově-stabilní průměry, a těmito binárními transferově-stabilními průměry jsou přesně atomy svazu $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$ všech binárních transferově-stabilních průměrů na n -prvkovém řetězci. Nazveme je *atomární binární transferově-stabilními průměry*. Ve finálním tvrzení této kapitoly ukážeme, že atomární binární transferově-stabilní průměry (atomy svazu $\text{TSM}_{C_n}^{(2)}$) jsou mnohem důležitější, než se původně zdálo.

Podle definice transferového spojení je následující rovnost platná pro libovolný k -ární transferově-stabilní průměr na řetězci C_n , tj.

$$\begin{aligned} & \left\langle z_1^1, z_2^1, \dots, z_{k-1}^1 \mid z_1^2, z_2^2, \dots, z_{k-1}^2 \mid \dots \mid z_1^{n-1}, z_2^{n-1}, \dots, z_{k-1}^{n-1} \right\rangle = \\ & \left\langle z_1^1 \mid z_1^2 \mid \dots \mid z_1^{n-1} \right\rangle \odot \left\langle z_2^1 \mid z_2^2 \mid \dots \mid z_2^{n-1} \right\rangle \odot \dots \odot \left\langle z_{k-1}^1 \mid z_{k-1}^2 \mid \dots \mid z_{k-1}^{n-1} \right\rangle, \end{aligned}$$

kde na pravé straně rovnosti jsou pouze binární transferově-stabilní průměry na C_n . Jinými slovy, každý k -ární transferově-stabilní průměr lze transferově spojit pomocí $(k - 1)$ binárních transferově-stabilních průměrů.

TVRZENÍ 1.16. *Nechť C_n je n -prvkový řetězec. Pak množina všech transferově-stabilních průměrů TSM_{C_n} je generována atomárními binárními transferově-stabilními průměry na C_n , svazovými operacemi \vee, \wedge a transferovým spojením \odot .*

III. Transferově-stabilní agregační funkce

Podle vzdálenosti mezi prvky 0 a 1, můžeme třídu všech svazů rozdělit na dvě disjunktní podtřídy. První podtřída obsahuje všechny svazy mající jednotnou vzdálenost mezi prvky 0 a 1, jinými slovy, všechny cesty z množiny $\text{Path}L$ mají stejnou délku. Druhá podtřída je komplementem k první podtřídě, to znamená, že existují prvky $a, b \in L$ takové, že $|\mathcal{D}_{ab}| \geq 2$. Následující definice popisuje první zmíněnou podtřídu.

DEFINICE 1.17. Konečný svaz L se nazývá *distančně-stabilní*, jestliže vzdálenost mezi každými dvěma prvky je jednoznačně určena, tj. $d(a, b) = D(a, b)$ pro každé $a, b \in L$, $a \leq b$.

Ihned z Definice 1.17 plyne, že pokud existují dva prvky ve svazu s rozdílnou vzdáleností, pak se nemůže jednat o distančně-stabilní svaz. Jinak řečeno, podsvaz distančně-stabilního svazu je opět distančně-stabilní. Na základě tohoto faktu můžeme vyslovit následující charakteristiku distančně-stabilních svazů.

VĚTA 1.18. *Konečný svaz je distančně-stabilní právě tehdy, když nejmenší a největší vzdálenost mezi prvky 0 a 1 je shodná, tj. $d(0, 1) = D(0, 1)$.*

VĚTA 1.19. *Každý konečný distributivní nebo modulární svaz je distančně-stabilní.*

VĚTA 1.20. *Konečný svaz L je distančně-stabilní právě tehdy, když každý blok svazu L^k obsahuje pouze nesrovnatelné k -tice pro některé (a tedy pro každé) $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.*

VĚTA 1.21. *Nechť L je distančně-stabilní svaz a $P = \{0, a_1, \dots, a_n, 1\}$ je libovolná cesta z nejmenšího do největšího prvku svazu L . Pak*

$$[(x, \dots, x, y)]; [(x, \dots, x, y, y)]; \dots; [(x, y \dots, y)]; [(y \dots, y)],$$

kde $x, y \in P$, $x \preceq y$ jsou všechny navzájem různé bloky svazu L^k a jejich počet je roven $k \cdot d(0, 1) + 1$.

Bloky v libovolném konečném svazu mohou být buď lineárně uspořádané, jak jsme to mohli vidět ve všech předchozích příkladech, a nebo střídavě neuspořádané, viz minulý příklad se svazem L_3 . Přesnější definice střídavého uspořádání zní, že pro každé dva bloky $A, B \subseteq L^2$ druhé mocniny existují $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in A, \mathbf{b} \in B$ takové, že $\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{a}'$. Zřejmě, jestliže jsou bloky neuspořádané, pak existují prvky $x, y, z \in L$, $x \leq y \leq z$ takové, že $(0, x), (0, z) \in A$ and $(0, z) \in B$. Zkombinováním této myšlenky a uspořádání bloků v distančně-stabilních svazech dostaneme uspořádání bloků v distančně-stabilním svazu.

VĚTA 1.22. *Transferově-stabilní bloky jsou v každém distančně-stabilním svazu lineárně uspořádané.*

Přirozená otázka zní, jestli existují další svazy, jež by měly taktéž lineárně uspořádané bloky. Přímoou odpovědí je pentagon, který je distančně-nestabilní, ale jeho bloky jsou lineárně uspořádané, tj.

$$[(0, 0)] \leq [(0, a)] \leq [(0, 1)] \leq [(1, a)] \leq [(1, 1)].$$

Na základě této skutečnosti se budeme dále zabývat svazy, jenž mají právě lineárně uspořádané bloky. Přesněji, jaké svazy, kromě distančně-stabilních, mají zmíněné uspořádání bloků. Nejdříve definujeme takovou třídu svazů a posléze se budeme zabývat její charakterizací.

DEFINICE 1.23. Konečný svaz L se nazývá *transferově-stabilní*, jestliže (transferově-stabilní) bloky v jeho druhé mocnině L^2 jsou lineárně uspořádané.

VĚTA 1.24. *Nechť L je konečný svaz a předpokládejme, že existují prvky $a, b \in L$ takové, že $n, n+1 \in \mathcal{D}_{ab}$. Pak L je transferově-stabilní svaz.*

VĚTA 1.25. *Nechť L je transferově-stabilní distančně-nestabilní svaz s nejkratší cestou $P_1 = \{0, c_1, \dots, c_p, \alpha\}$ z nejmenšího prvku 0 do prvního nestabilního prvku vzhledem k 0 a nejkratší cestou $P_2 = \{\beta, d_1, \dots, d_r, 1\}$ z prvního nestabilního prvku vzhledem k 1 do největšího prvku 1 , tj. $d(0, \alpha) = p+1$ a $d(1, \beta) = r+1$. Pak*

$$\begin{aligned} & [(0, \dots, 0)], [(0, \dots, 0, c_1)], \dots, [(0, \dots, 0, c_p)], \\ & [(0, \dots, 0, 1)], \\ & [(1, \dots, 1, d_1)], \dots, [(1, \dots, 1, d_r)], [(1, \dots, 1)] \end{aligned}$$

jsou všechny navzájem různé bloky svazu L .

Vraťme se k pravidelné a vzájemné rotaci (neuspořádaných) bloků v transferově-nestabilních svazech. Nechť L je transferově-nestabilní svaz a předpokládejme existenci navzájem různých bloků M, M_1, \dots, M_n obsahujících po řadě dvojice

$$(x, y), (x', y') \in M, (x_1, y_1) \in M_1, \dots, (x_n, y_n) \in M_n$$

splňující

$$(x, y) \leq (x_1, y_1) \leq \dots \leq (x_n, y_n) \leq (x', y').$$

Dále, ve svazu L existuje m různých cest P_1, \dots, P_m z množiny $\text{Path}L$ uspořádaných od nejdelší po nejkratší cestu svazu L . Z předchozího již víme, že skoky mezi bloky jsou uzpůsobené podle rozdílu dvou délek cest. Pokud těch cest je ale více, pak je otázkou, který rozdíl vybrat, aby byl ten nejvhodnější. Ukazuje se, že výsledkem není ani jeden z rozdílů, nýbrž jejich největší společný dělitel. Pak pro počet vzájemně se střídajících neuspořádaných bloků platí

$$n = \text{NSD}(\|P_1\| - \|P_2\|, \|P_1\| - \|P_3\|, \dots, \|P_{m-1}\| - \|P_m\|) - 1,$$

kde největší společný dělitel (NSD) dvou či více kladných celých čísel je největší kladné celé číslo, které dělí všechny zadaná kladná celá čísla.

Užitím této myšlenky pro transferově-stabilní svazy ihned dostaneme požadovanou vlastnost, jenž všechny tyto svazy charakterizuje, to znamená, že zaručí lineární uspořádání bloků. Přesněji, $M = M_1 = \dots = M_n$, čímž tedy $n = 0$.

TVRZENÍ 1.26. *Konečný svaz L je transferově-stabilní právě tehdy, když je distančně-stabilní, a nebo existují cesty $P_1, P_2, P_3 \in \text{Path}L$ takové, že*

$$\text{NSD}(\|P_1\| - \|P_2\|, \|P_1\| - \|P_3\|, \|P_2\| - \|P_3\|) = 1.$$

Anotace

Disertační práce se věnuje zejména teorii agregačních funkcí na konečných svazech, na kterou se v jednotlivých kapitolách díváme z různých úhlů pohledu a propojujeme ji s několika dalšími teoriemi.

První kapitola se zabývá generující množinou agregačního klonu. V jednom z předchozích článků byla představena generující množina klonu idempotentních agregačních funkcí na ohraničených svazech. Jako hlavním výsledkem bylo ukázáno, že tento klon je generovaný určitými ternárními idempotentními funkcemi, ze kterých lze získat všechny idempotentní agregační funkce svazu pomocí klasického skládání funkcí. Cílem v této kapitole je ukázat zlepšení výše zmíněného výsledku pomocí nové generující množiny tohoto klonu. Umělé ternární funkce jsou zde nahrazeny binárními mediány a binárními charakteristickými funkcemi. V důsledku toho je klon generován jeho binární částí, čímž výsledek posiluje základní úlohu mediánů v idempotentních agregačních funkcích. Navíc ukážeme, že pro n -prvkový svaz je horní hranice binárních generátorů rovna $2n - 1$.

Druhá kapitola se zaměřuje na transformaci aritmetického průměru na konečné svazy. Podle encyklopedie agregačních funkcí Grabisch M. a spol. (2009), aritmetický průměr je funkce charakterizovaná čtyřmi vlastnostmi: je neklesající, idempotentní, symetrická a aditivní. První tři mohou být přirozeně konvertovány do teorie svazů, ale poslední vlastnost nelze obecně převést. Proto jsme ji nahradili jinou vhodnou vlastností, nazvanou transferová stabilita. Avšak při konvertování do konečných svazů nedostaneme přesně aritmetický průměr, ale jeho vhodné aproximace. Tyto funkce se nazývají transferově-stabilní průměry. Prvním cílem v této kapitole je poukázání na fakt, že transferově-stabilní průměry na konečných řetězcích tvoří svaz izo-

morfní s direktní mocninou konečných řetězců. Druhým výsledkem je vytvoření generující množiny všech transferově-stabilních průměrů, tj. uvažovat takové průměry, které mohou vygenerovat všechny transferově-stabilní průměry stejné arity pomocí klasického skládání funkcí. Poslední výsledek se zabývá otázkou, jak vygenerovat všechny transferově-stabilní průměry libovolné arity pomocí binárních transferově-stabilních průměrů. Pro tento problém jsme museli definovat speciální skládání transferově-stabilních průměrů.

Z předchozí kapitoly jsme získali novou vlastnost, tzv. transferovou-stabilitu, charakterizující aritmetický průměr. Umožnila nám definovat speciální tvary aritmetického průměru na konečných svazech, přičemž idempotence byla součástí této definice. V poslední kapitole tuto vlastnost zanedbáme a budeme se zabývat pouze transferově-stabilními agregačními funkcemi. Díky tomuto je možné definovat tyto agregační funkce na libovolném konečném svazu a nikoli pouze na konečných řetězcích. Nicméně, existuje podtřída konečných svazů, tzv. transferově-stabilní svazy, na kterých lze chování transferově-stabilních agregačních funkcí jednoduše popsat, protože transferově-stabilní třídy (bloky) jsou lineárně uspořádané. Hlavním cílem v této kapitole je charakterizace této podtřídy. Ve druhé části se zaměříme na vhodné vlastnosti spojené se svazem všech k -árních transferově-stabilních agregačních funkcí.

Summary

The Ph.D. thesis is devoted to study the theory of aggregation functions on finite lattices, which we look at from different angles in individual chapters and connect it with several other theories.

The first chapter deals with the generating set of aggregation clone. In one of the previous papers, a generating set of clone idempotent aggregation functions on bounded lattices was introduced. As a main result it was shown that this clone is generated by certain ternary idempotent functions from which all idempotent aggregation functions of the lattice can be obtained by usual term composition. The aim in this chapter is to present an essential improvement of the result above by presenting a new generating set of this clone. A bit artificial ternary functions are substituted here by natural (binary) lattice a -medians and certain binary characteristic functions. As a result, the clone is generated by its binary part and the result strengthens the essential role of medians within all idempotent aggregation functions. In addition, we will show that for an n -element lattice, the upper bound of binary generators is $2n - 1$.

The second chapter focuses on the transformation of the arithmetic mean into finite lattices. According to the encyclopedia of aggregation functions Grabisch M. et al. (2009), the arithmetic mean is a function characterized by four features: it is non-decreasing, idempotent, symmetric and additive. The first three of them can be naturally converted to the theory of posets but the last one generally can not. Due to this problem, we will replace it with another suitable property, which is called transfer-stability. However, we do not get the exact arithmetic mean but some approximation. These functions will be called transfer-stable means. The first aim of this chapter is to show

that transfer-stable means on a finite chain form a lattice which is isomorphic to the direct power of a finite chain. The second goal is to create a generating set of transfer-stable means, i.e., means that can generate all other transfer-stable means of the same arity by classical composition of functions. The last goal deals with question of how to generate all transfer-stable means of any arity by binary transfer-stable means only. For this problem we define special transfer-stable means composition.

From the previous chapter we obtained a new property, the so-called transfer-stability, characterizing the arithmetic mean. With this property, it is possible to define special forms of arithmetic mean on finite chains. The idempotence property was required for this definition. In the last chapter, we neglect this necessity and deal only with transfer-stable aggregation functions. Thanks to this fact, it is possible to define these aggregation functions on any finite lattice (hereinafter “lattice”) and not only on finite chains. Nevertheless, there is a subclass of finite lattices, the so-called transfer-stable lattices, where the behavior of the transfer-stable aggregation functions is simply described because the transfer-stability classes are linearly ordered. Therefore, the main goal of this chapter is characterization of these transfer-stable lattices. The second half of the chapter deals with some useful properties associated with the lattice of all k -ary transfer-stable aggregation functions.

Autorovy publikace použité v disertační práci

- [R1] Halaš R., Kurač Z., Pócs J. : *On the minimality of some generating sets of the aggregation clone on a finite chain*, Information Sciences 564 (2021) 193 – 201.
DOI 10.1016/j.ins.2021.02.070 (Scopus, WoS)
- [R2] Halaš R., Kurač Z., Mesiar R., Pócs J. : *Binary generating set of the clone of idempotent aggregation functions on bounded lattices*, Information Sciences 462 (2018) 367 – 373.
DOI 10.1016/j.ins.2018.06.038 (Scopus, WoS)
- [R3] Kurač Z.: *Transfer-stable means on finite chains*, Fuzzy Sets and Systems 372 (2019) 111 – 123.
DOI 10.1016/j.fss.2018.10.009 (Scopus, WoS)
- [R4] Kurač Z., Riemel T., Rýparová L.: *Transfer-stable aggregation functions on finite lattices*, Information Sciences 521 (2020) 88 – 106.
DOI 10.1016/j.ins.2020.02.043 (Scopus, WoS)

Reference

- [1] Baker K. A., Pixley A. F. : *Polynomial Interpolation and the Chinese Remainder Theorem for Algebraic Systems*, Springer-Verlag, Math. Zeitschrift 143 (1975) 165-174.
- [2] Beliakov G., Bustince H., Calvo T. : *A Practical Guide to Averaging Functions*, Springer, 2016.
- [3] Couceiro M., Dubois D., Fargier H., Grabisch M., Prade H., Rico A. : *New Directions in Ordinal Evaluation: Sugeno Integrals and Beyond*, In: Doumpos M., Figueira J., Greco S., Zopounidis C. (eds) *New Perspectives in Multiple Criteria Decision Making. Multiple Criteria Decision Making*. Springer (2019), Cham, 978-3-030-11481-7.
- [4] Grabisch M., Marichal J. L., Mesiar R., Pap E. : *Aggregation functions*, Cambridge University Press, Cambridge 2009.
- [5] Grätzer G., Wehrung F. : *Lattice Theory: Special Topicsa Applications, Volume 1*, Springer, Switzerland 2014.
- [6] Halaš R., Kurač Z., Mesiar R., Pócs J. : *Binary generating set of the clone of idempotent aggregation functions on bounded lattices*, Information Sciences 462 (2018) 367 – 373.
- [7] Halaš R., Kurač Z., Pócs J. : *On the minimality of some generating sets of the aggregation clone on a finite chain*, Information Sciences (2021).
- [8] Halaš R., Pócs J. : *On the clone of aggregation functions on bounded lattices*, Information Sciences 329 (2016) 381 — 389.

- [9] Hubbard D., Evans D. : *Problems with scoring methods and ordinal scales in risk assessment*, IBM Journal of Research and Development, Volume: 54, Issue: 3, May-June 2010.
- [10] Chajda I. : *Teorie svazů a universální algebra*, Univerzita Palackého, Přírodovědecká fakulta, Olomouc, 2013, ISBN: 978-80-244-3914-3.
- [11] Kolesárová A., Mayor G., Mesiar R. : *Weighted ordinal means*, Information Sciences 177 (2007) 3822 — 3830.
- [12] Kurač Z.: *Transfer-stable means on finite chains*, Fuzzy Sets and Systems 372 (2019) 111 – 123.
- [13] Kurač Z., Riemel T., Rýparová L.: *Transfer-stable aggregation functions on finite lattices*, Information Sciences 521 (2020) 88 — 106.
- [14] Kurač Z. : *Agregační funkce na ohraničených svazech*, Olomouc, Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, 2017, Diplomová práce, [online].
- [15] Kyselová D., Dubois D., Komorníková M., Mesiar R. : *Refining Aggregation Operator-Based Orderings in Multifactorial Evaluation—Part I: Continuous Scales*, Fuzzy Systems IEEE Transactions on, vol. 15, no. 6, pp. 1100-1106, 2007.
- [16] Moulin H. : *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge, MA: Cambridge Univ. Press, 1988.